

Całka Riemanna

Niech dana będzie funkcja ograniczona $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Sumą częściową (Riemanna) nazywa się liczbę

$$R_{f,P(q_1, \dots, q_n)} = \sum_{i=1}^n f(q_i) \cdot \Delta p_i$$

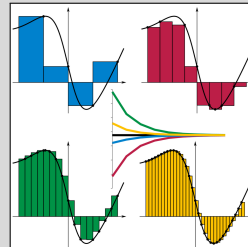
Funkcję f nazywa się całkowaną w sensie Riemanna lub krótko R-całkowaną, jeśli dla dowolnego ciągu normalnego (P^k) podziałów przedziału $[a, b]$ istnieje (niezależna od wyboru punktów pośrednich) granica [b]

$$R_f = \lim_{k \rightarrow \infty} R_{f,P^k(q_1^k, \dots, q_{n_k}^k)}$$

nazywana wtedy całką Riemanna tej funkcji. Równoważnie: jeżeli istnieje taka liczba R_f , że dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba rzeczywista $\delta > 0$ że dla dowolnego podziału $P(q_1, \dots, q_n)$ o średnicy $\text{diam } P(q_1, \dots, q_n) < \delta$; bądź też w języku rozdrobnień: że dla dowolnej liczby rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje taki podział $S(t_1, \dots, t_m)$ przedziału $[a, b]$, że dla każdego podziału $P(q_1, \dots, q_n)$ rozdrabniającego $S(t_1, \dots, t_m)$ zachodzi

$$|R_{f,P(q_1, \dots, q_n)} - R_f| < \varepsilon.$$

Funkcję f nazywa się wtedy całkowaną w sensie Riemanna (R-całkowaną), a liczbę R_f jej całką Riemanna.



Przykład sum Riemanna przy wyborze punktu pośredniego w prawym końcu podprzedziału (niebieski), w wartości minimalnej (czerwony) i maksymalnej (zielony) funkcji w podprzedziale i lewego końca podprzedziału (żółty). Wartość wszystkich czterech przypadków zbliża się do 3,76 przy powiększaniu liczby podprzedziałów od 2 do 10 (w domyśle, również nieograniczenie).