Análisis Matemático II
Relación de ejercicios del tema I

Óscar Bermúdez
Universidad de Granada
18 de febrero de 2015

Sucesiones de funciones

1. Estudia la convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0, a]$ y $[a, +\infty[$, donde $a > 0$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \geq 0$ por:
$$f_n(x) = \frac{2nx^2}{1 + n^2x^4}$$

2. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}$, donde $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es la función definida para todo $x \in [0, 1]$ por:
$$f_n(x) = n^\alpha x(1 - x^2)^n$$
¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[0, 1]$?¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[\rho, 1]$, donde $\rho \in]0, 1[$?

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ la función dada por:
$$f_n(x) = n(\cos x)^n \operatorname{sen} x$$
Estudia la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ y la convergencia uniforme en los intervalos $[0, a]$ y $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$, donde $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ la función dada por:
$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n \operatorname{sen} x} \quad (0 < x < \pi)$$
Estudia la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$, así como la convergencia uniforme en los intervalos del tipo $]0, a]$, $[a, \pi[$ y $[a, b]$, donde $0 < a < b < \pi$.

5. Estudia la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $\{f_n\}$, donde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

6. Estudia la convergencia uniforme en intervalos de la forma $]-\infty, -a]$, $[-a, a]$ y $[a, +\infty[$, donde $a > 0$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas por:

$$f_n(x) = n \operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

7. Estudia la convergencia uniformen en $\mathbb{R}_0^+$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$ por:

$$f_n(x) = \arctan\left(\frac{n + x}{1 + nx}\right)$$

Series de funciones

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$f_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1 + nx^2)} \quad (x \geq 0)$$

Prueba que $\sum f_n$ converge:

a) puntualmente en $\mathbb{R}_0^+$ si $\alpha > 0$.

b) uniformemente en semirrecas cerradas que no contienen al 0.

c) uniformemente en $\mathbb{R}_0^+$ si $\alpha > \frac{1}{2}$.

2. Estudia la convergencia puntual y uniforme de la serie $\sum f_n$, donde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función dada por:

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Sea $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$, la función suma de la serie. Calcula $\lim_{x \to 0^-} F(x)$ y $\lim_{x \to 0^+} F(x)$. [1]

[1] Sugerencia:
Para $x > 0$ se tiene que

$$\int_k^{k+1} \frac{x}{1 + t^2x^2} dt \leq f_k(x) = \int_k^{k+1} \frac{x}{1 + k^2x^2} dt \leq \int_{-k}^{k} \frac{x}{1 + t^2x^2} dt$$

3. Estudia la convergencia puntual y uniforme de la serie $\sum f_n$, donde

$$f_n(x) = \frac{n^{n+1}}{n!} x^n e^{-nx} \quad (x \geq 0)$$

4. En cada uno de los siguientes ejercicios se especifica un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, se define una función $f_n : A \to \mathbb{R}$. Se pide estudiar, en cada caso, la convergencia puntual en A de la serie de funciones $\sum f_n$, y la continuidad de la función suma $F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$:

   a) $A = \mathbb{R}$ y $f_n(x) = e^{-nx}$.
   b) $A = \mathbb{R}$ y $f_n(x) = (-1)^n \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(n^2 x)}{n(\log(n+1))^2}$.
   c) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$ y $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 - x^2}$.
   d) $A = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ y $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1 - x^{2n+1}}$.

5. Estudia la derivabilidad de la función de Riemann $\xi :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$, definida para todo $x > 1$ por:

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

   Justifica también que $\lim_{x \to 1} \xi(x) = +\infty$.

Series de potencias

1. Calcula el radio de convergencia de cada una de las series de potencias $\sum_n a_n x^n$ y estudia el comportamiento de la serie en los extremos del intervalo de convergencia, en los siguientes casos:

   a) $a_n = \dfrac{1}{\log(n+2)}$
   b) $a_n = (n+1)^{\log(n+1)}$
   c) $a_n = e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
   d) $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}$
   e) $a_n = a^{\sqrt{n}} \quad (a > 0)$

f) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$

2. Calcula la función suma de las series de potencias $\sum_{n\geq 0}(n+1)\frac{x^{3n}}{2^n}$ y $\sum_{n\geq 1}\frac{n(x+3)^{3n}}{2^n}$.

3. Expresa la función suma de las series de potencias $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ y $\sum_{n\geq 1}\frac{n}{n+1}x^n$ por medio de funciones elementales y calcula el valor de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n+1)}$.

4. Calcula el radio de convergencia y la suma de las series:

   - $\sum_{n\geq 0}\frac{n^3+n+3}{n+1}x^n$
   - $\sum_{n\geq 0}\frac{n^3}{n!}x^n$
   - $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{1+2+\ldots+n}x^n$

5. Calcula la función suma de la serie de potencias $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(2n+1)}x^n$ y deduce el valor de las sumas de las series $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(2n+1)}$ y $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$.

6. Calcula la función suma de la serie de potencias $\sum_{n\geq 1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$.

7. Prueba que las funciones definidas por:

   - $g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad g(0) = 1$
   - $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \quad f(0) = 1$

   son de clase C^∞ en su intervalo natural de definición.

8. Calcula el desarrollo en serie de potencias centrada en un punto a de la función:

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 7}{x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2}$$