

Análisis Matemático II

Relación de ejercicios del tema I

ÓSCAR BERMÚDEZ
Universidad de Granada
17 de febrero de 2015

Sucesiones de funciones

1. Estudia la convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0, a]$ y $[a, +\infty[$, donde $a > 0$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \geq 0$ por:

$$f_n(x) = \frac{2nx^2}{1 + n^2x^4}$$

2. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}$, donde $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es la función definida para todo $x \in [0, 1]$ por:

$$f_n(x) = n^\alpha x(1 - x^2)^n$$

¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[0, 1]$? ¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[\rho, 1]$, donde $\rho \in]0, 1[$?

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x$$

Estudia la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ y la convergencia uniforme en los intervalos $[0, a]$ y $[a, \frac{\pi}{2}]$, donde $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n :]0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{n \sin x} \quad (0 < x < \pi)$$

Estudia la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$, así como la convergencia uniforme en los intervalos del tipo $[0, a]$, $[a, \pi]$ y $[a, b]$, donde $0 < a < b < \pi$.

5. Estudia la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $\{f_n\}$, donde $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

6. Estudia la convergencia uniforme en intervalos de la forma $] -\infty, a]$, $[-a, a]$ y $[a, +\infty[$, donde $a > 0$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas por:

$$f_n(x) = n \operatorname{sen} \left(\frac{x}{n} \right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

7. Estudia la convergencia uniforme en \mathbb{R}_0^+ , de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}_0^+$ por:

$$f_n(x) = \arctan \left(\frac{n+x}{1+nx} \right)$$

Series de funciones

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$f_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1+nx^2)} \quad (x \geq 0)$$

Prueba que $\sum f_n$ converge:

- a) puntualmente en \mathbb{R}_0^+ si $\alpha > 0$.
 - b) uniformemente en semirrectas cerradas que no contienen al 0.
 - c) uniformemente en \mathbb{R}_0^+ si $\alpha > \frac{1}{2}$.
2. Estudia la convergencia puntual y uniforme de la serie $\sum f_n$, donde $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función dada por:

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Sea $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$, la función suma de la serie. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$.¹

¹Sugerencia:

Para $x > 0$ se tiene que

$$\int_k^{k+1} \frac{x}{1+t^2x^2} dt \leq f_k(x) = \int_k^{k+1} \frac{x}{1+k^2x^2} dt \leq \int_{-k}^k \frac{x}{1+t^2x^2} dt$$

3. Estudia la convergencia puntual y uniforme de la serie $\sum f_n$, donde

$$f_n(x) = \frac{n^{n+1}}{n!} x^n e^{-nx} \quad (x \geq 0)$$

4. En cada uno de los siguientes ejercicios se especifica un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, se define una función $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$. Se pide estudiar, en cada caso, la convergencia puntual en A de la serie de funciones $\sum f_n$, y la continuidad de la función suma $F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$:

a) $A = \mathbb{R}$ y $f_n(x) = e^{-nx}$.

b) $A = \mathbb{R}$ y $f_n(x) = (-1)^n \cdot \frac{\sin(n^2 x)}{n(\log(n+1))^2}$.

c) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$ y $f_n(x) = \frac{1}{n^2 - x^2}$.

d) $A = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ y $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 - x^{2n+1}}$.

5. Estudia la derivabilidad de la función de Riemann $\xi :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, definida para todo $x > 1$ por:

$$\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

Justifica también que $\lim_{x \rightarrow 1} \xi(x) = +\infty$.

Series de potencias

1. Calcula el radio de convergencia de cada una de las series de potencias $\sum_n a_n x^n$ y estudia el comportamiento de la serie en los extremos del intervalo de convergencia, en los siguientes casos:

a) $a_n = \frac{1}{\log(n+2)}$

b) $a_n = (n+1)^{\log(n+1)}$

c) $a_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

d) $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}$

e) $a_n = a^{\sqrt{n}} \quad (a > 0)$

f) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

2. Calcula la función suma de las series de potencias $\sum_{n \geq 0} (n+1) \frac{x^{3n}}{2^n}$ y

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n(x+3)^{3n}}{2^n}.$$

3. Expresa la función suma de las series de potencias $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$ y $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n+1} x^n$ por medio de funciones elementales y calcula el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)}$.

4. Calcula el radio de convergencia y la suma de las series:

- $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3 + n + 3}{n+1} x^n$

- $\sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n$

- $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1+2+\dots+n} x^n$

5. Calcula la función suma de la serie de potencias $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(2n+1)} x^n$ y

deduce el valor de las sumas de las series $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(2n+1)}$ y $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$.

6. Calcula la función suma de la serie de potencias $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$.

7. Prueba que las funciones definidas por:

- $g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad g(0) = 1$

- $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}, \quad f(0) = 1$

son de clase C^∞ en su intervalo natural de definición.

8. Calcula el desarrollo en serie de potencias centrada en un punto a de la función:

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 7}{x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2}$$