Wiskunde compendium

R. Rood

examen VWO 1996

Inhoud:

æ

1. functies en grafieken

eerstegraads fuctie

$$l:\ y - b = r(x - a)$$
$$\text{met: } P(a;b) \in l$$
$$r = \tan(l;X_{+}\text{-as})$$

richtingscoëfficiënt

$$A \wedge B \in l$$
$$r_l = \frac{y_B - y_A}{x_b - x_a}$$

hoek tussen l en m

$$\tan\alpha = \left|\frac{r_l - r_m}{r_l . r_m + 1}\right|$$

l loodrecht op m

$$l \perp m \rightarrow r_l . r_m = -1$$

l evenwijdig aan m

$$l \mid m \rightarrow r_l = r_m$$

f raakt g

$$f(x) = g(x) \wedge f'(x) = g'(x)$$

f en g snijden loodrecht

$$f(x) = g(x) \wedge f'(x) \cdot g'(x) = -1$$

f heeft een extreem

$$\begin{gathered} f'(x) = 0 \\ t.v.v. f' \rightarrow t.w. \\ t.w.\ + \rightarrow - \Rightarrow \textit{maximum} \\ t.w.\ - \rightarrow + \Rightarrow \textit{minimum} \end{gathered}$$

f heeft een buigpunt

$$\begin{gathered} f''(x) = 0 \\ t.v.v. f'' \rightarrow t.w. \\ t.w.\ + \rightarrow - \Rightarrow \textit{bol} \rightarrow \textit{hol} \\ t.w.\ - \rightarrow + \Rightarrow \textit{hol} \rightarrow \textit{bol} \end{gathered}$$

verticale lijn

$$x = a$$

tweedegraads functie

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

x-coördinaat van de top
(tweedegraads functie)

$$x_T = \frac{-b}{2a}$$

$ax^2 + bx + c = 0$
(ABC-formule)

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

raaklijn door P(a;b) aan f
met $P \notin f$

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x) - b}{x - a}}$$

$f(x) = y$
$T\binom{a}{0}$ geeft y^*

$$\boxed{y^* = f(x - a)}$$

$f(x) = y$
$T\binom{0}{b}$ geeft y^*

$$\boxed{y^* = f(x) + b}$$

$f(x) = y$
$V_{x\text{-as},c}$ geeft y^*

$$\boxed{y^* = \frac{f(x)}{c}}$$

$f(x) = y$
$V_{y\text{-as},d}$ geeft y^*

$$\boxed{y^* = f\left(\frac{x}{d}\right)}$$

lijnsymetrie in $x = s$

$$\boxed{f(s + a) = f(s - a)}$$

puntsymetrie in P(s;r)	$\dfrac{f(s+a)+f(s-a)}{2} = r$
lijnsymetrie t.o.v. y-as (even functie)	$f(x) = f(-x)$
puntsymetrie t.o.v. O(0;0) (oneven functie)	$f(x) = -f(x)$
K symetrisch t.o.v. x-as	$(x;y) \in K \rightarrow (x;-y) \in K$
K symetrisch t.o.v. y-as	$(x;y) \in K \rightarrow (-x;y) \in K$
K symetrisch t.o.v. l: y=x	$(x;y) \in K \rightarrow (y;x) \in K$
K symetrisch t.o.v. l: y=-x	$(x;y) \in K \rightarrow (-y;-x) \in K$

K symetrisch t.o.v. O(0;0)

$$\boxed{(x;y) \in K \rightarrow (-x;-y) \in K}$$

K symetrisch t.o.v. l: x=a

$$\boxed{(x;y) \in K \rightarrow (2a-x;y) \in K}$$

K symetrisch t.o.v. l: y=b

$$\boxed{(x;y) \in K \rightarrow (x;2b-y) \in K}$$

K symetrisch t.o.v. P(a;b)

$$\boxed{(x;y) \in K \rightarrow (2a-x;2b-y) \in K}$$

inverse functie

$$f(x) = y(x) \rightarrow f_{inv}(x) = x(y)$$

$$D_f = B_{f_{inv}} \overset{f \text{ is een bijectie}}{\wedge} B_f = D_{f_{inv}}$$

standaardfuncties

$$f_1(x) = x \quad \textit{lineaire functie}$$

$$f_2(x) = x^2 \quad \textit{parabool}$$

$$f_3(x) = \sqrt{x} \quad \textit{wortel functie}$$

$$f_4(x) = |x| \quad \textit{modulus- of absoluutfunctie}$$

$$f_5(x) = \frac{1}{x} \quad \textit{orthogonale hyperbool}$$

functieonderzoek

1. D_f
2. S_{y-as}
3. S_{x-as}
4. $tvvf$
5. $f'(x)$
6. $tvvf'$
7. *extremen*
8. *HA*
9. *VA*
10. *SA*
11. *grafische voorstelling f*
12. B_f
13. *P.v.S.*
14. *A.v.S.*
15. *bijzonderheden*

2. differentiëren

definitie

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

differentiëren

$$f(x)=c \rightarrow f'(x)=0$$
$$f(x)=ax \rightarrow f'(x)=a$$
$$f(x)=x^n \rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$$
$$f(x)=c.g(x) \rightarrow f'(x)=c.g'(x)$$

kettingregel

$$f(x) = g \circ h(x) = g(h(x)) \rightarrow$$
$$f'(x) = g'(h(x)).h'(x)$$

somregel

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \rightarrow$$
$$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

quotiëntregel

$$f(x) = \frac{t(x)}{n(x)} \rightarrow$$
$$f'(x) = \frac{n(x).t'(x)-t(x).n'(x)}{n^2(x)}$$

machtsfuncties

$$f(x)=e^{x} \rightarrow f'(x)=e^{x}$$
$$f(x)=\ln x \rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$$
$$f(x)=a^{x} \rightarrow f'(x)=a^{x}.\ln a$$
$$f(x)={}^{g}\log x \rightarrow f'(x)=\frac{1}{x.\ln g}$$

goniometrische functies

$$f(x)=\sin x \rightarrow f'(x)=\cos x$$
$$f(x)=\cos x \rightarrow f'(x)=-\sin x$$
$$f(x)=\tan x \rightarrow$$
$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

cyclometrische functies

$$f(x)=\arccos x \rightarrow f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$f(x)=\arcsin x \rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$f(x)=\arctan x \rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

3. matrices en grafen

m × n-matrix A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

graaf G is minimaal verbonden
elke p_i verbonden met p_j

$$N_{G,min} = n_G - 1$$

N *aantal wegen*
n *aantal knooppunten*

graaf G is maximaal verbonden
elke p_i wordt direct verbonden met p_j

$$N_{G,max} = \frac{1}{2} . n_G . (n_G - 1)$$

N *aantal wegen*
n *aantal knooppunten*

graad van verbondenheid van graaf G

$$V_G = \frac{N_G}{N_{G,max}}$$

N *aantal wegen*

verdeling n(X)=x, n(Y)=y, n(Z)=z, ... is stabiel

$$M \,.\, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

$\mathbf{M}$ *overgangsmatrix*

$n \times n$-populatievoorspellingsmatrix L (Leslie-matrix)
leeftijdklasse i
vruchtbaarheidsgetal v_i
overlevingskans p_i

$$L = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_{n-1} & v_n \\ p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

4. periodieke functies

algemene formule
 a = amplitude
 b = 2π / periode
 c = horizontale verschuiving
 d = evenwichtstand

$$f(x) = a \sin b(x - c) + d$$
$$a \neq 0 \wedge b \neq 0$$

trendbeweging
 trendlijn: l: y = px + q
 periodiek verschijnsel:
 y = a sin b(x - c)

$$f(x) = px + q + a \sin b(x - c)$$
$$p \neq 0 \wedge a \neq 0 \wedge b \neq 0$$

gedempte trilling

$$f(x) = g.a \sin b(x - c) + d$$
$$p \neq 0 \wedge q \neq 0 \wedge a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge g \neq 0$$
$$q < 0 \rightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = d$$
$$q > 0 \rightarrow \lim_{x \to \infty} a = \infty$$
$$g = a(0) . \left(\frac{a\left(\frac{4\pi}{b}\right)}{a\left(\frac{2\pi}{b}\right)} \right)^{\frac{t}{p}}$$

5. kansberekening en kansverdeling

definitie kans

$$P(G) = \frac{aantal \in G}{aantal \in U}$$

$$0 \leq P(G) \leq 1$$

complementregel

$$P(G) + P(G^c) = 1$$

somregel
A & B onderling onafhank-
elijk

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

produktregel
A & B onderling onafhank-
elijk

$$P(A.B) = P(A).P(B)$$

faculteiten

$$n! = 1 \times \ldots \times n-1 \times n$$

$$n \in \mathbf{N}$$

binomiaalcoëfficiënt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

X is binomiale stochast
n trekkingen
k successen
n ≥ k

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$= P(X \le k) - P(X \le k-1)_{(tabel)}$$

X is hypergeometrische stochast
N elementen
n trekkingen
A successen

$$P(X=k) = \frac{\binom{A}{k}\binom{N-A}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

6. beschrijvende statistiek

klassen

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ \ldots,\ k_n$$

klassegrenzen van klasse i

$$[k_{i,l}\ ;\ k_{i,r}\rangle$$

klassemidden van klasse i

$$\frac{k_{i,l} + k_{i,r}}{2}$$

klassebreedte van klasse i

$$k_{i,r} - k_{i,l}$$

aantal waarnemingen van waarnemingsgetal x_i dan wel klasse k_i (frequentie van i)

$$f_i$$

frequentiedichtheid van k_i

$$\rho_{k_i} = \frac{f_i}{k_{i,r} - k_{i,l}}$$

totaal aantal waarnemingen

$$\Sigma f = n$$

relatieve frequentie (%) van k_i of x_i

$$f_{r,i} = \frac{f_i}{\Sigma f} \; (\times\ 100\%)$$

somfrequentie of cumulatieve frequentie

$$\Sigma f_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_{i-1} + f_i \leq n$$

relatieve somfrequentie of relatieve cumulatieve frequentie (× 100%)

$$\rho_{f_{r_i}} = \frac{\Sigma f_i}{\Sigma f} \; (\times\ 100\%)$$

rekenkundig gemiddelde bij x_i met f_i

$$\mu = \frac{f_1.x_1 + f_2.x_2 + \ldots + f_n.x_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\Sigma f.x}{\Sigma f}$$

rekenkundig gemiddelde bij k_i met f_i en klassemidden m_i

$$\mu = \frac{f_1.m_1 + f_2.m_2 + \ldots + f_n.m_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\Sigma f.m}{\Sigma f}$$

variatiebreedte bij x_i met f_i

$$x_{max} - x_{min}$$

variatiebreedte bij k_i met f_i

$$\boxed{k_{r_{max}} - k_{l_{min}}}$$

variantie bij x_i met f_i

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f.(x-\mu)^2}{\Sigma f}$$

variantie bij k_i met f_i

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f.(m-\mu)^2}{\Sigma f}$$

standaarddeviatie, spreiding of standaardafwijking

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

7. normale verdeling

X is de normaal verdeelde stochast

$$E(X) = \mu \wedge SD(X) = \sigma \text{ als:}$$

$$\begin{cases} P(X \le x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \ \forall\, x \in \mathbb{R} \\ P(X \ge x) = 1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} P(X=x)=0 \\ P(X<x)=P(X\le x) \\ P(X>x)=P(X\ge x) \end{array}\right.$$

$X_1 \wedge X_2$ $n.v.$ $\rightarrow$ $X_1 \pm X_2$ $n.v.$

$$\mu(X_1 \pm X_2) = \mu(X_1) \pm \mu(X_2)$$

$$\sigma(X_1 \pm X_2) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2)}$$

X $n.v.$ $\rightarrow$ $n.X$ $n.v.$

$$\mu(n.X) = n.\mu(X)$$

$$\sigma(n.X) = \sqrt{n}.\sigma(X)$$

van de binomiale stochast X_b naar de normale stochast X_n (continuïteitscorrectie bij discontinue stochast)

$$P(X_b \le x) = P(X_n \le x + \frac{1}{2})$$

$$X_b \text{ met } n \wedge p$$

$$P(X_b \ge x) = P(X_n \ge x - \frac{1}{2})$$

$$X_n \text{ met } \mu = n.p \wedge \sigma = \sqrt{n.p.(1-p)}$$

8. hypothesen toetsen

linkszijdige binomiale toets

H_0: $p = p_0$ *nulhypothese*

H_1: $p < p_0$ *alternatieve hypothese*

n *omvang steekproef*

X *aantal successen in steekproef*

α *significantieniveau*

K *kritieke gebied*

$$K \ni k \in \mathbb{N} \mid 0 \le k \le n \wedge P(X \le k \wedge p = p_0 \wedge n = n) \le \alpha$$

$$X \in K \rightarrow H_0 \text{ w. v.}$$

$$X \notin K \rightarrow H_1 \text{ w. v.}$$

$P(X \in K \mid H_0 \text{ i. w.})$ *onbetrouwbaarheid*

$P_o(X \le x \wedge p = p_0 \wedge n = n)$ *overschrijdingskans*

$$P_o \le \alpha \leftrightarrow x \in K$$

rechtszijdige binomiale toets

H_0: $p = p_0$ *nulhypothese*

H_1: $p > p_0$ *alternatieve hypothese*

n *omvang steekproef*

X *aantal successen in steekproef*

α *significantieniveau*

K *kritieke gebied*

$K \ni k \in \mathbf{N} \mid$

$0 \le k \le n \wedge P(X \geq k \wedge p = p_0 \wedge n = n) \le \alpha$

$$X \in K \rightarrow H_0 \text{ w.v.}$$

$$X \notin K \rightarrow H_1 \text{ w.v.}$$

$P(X \in K \mid H_0 \text{ i.w.})$ *onbetrouwbaarheid*

$P_o(X \le x \wedge p = p_0 \wedge n = n)$ *overschrijdingskans*

$$P_o \le \alpha \leftrightarrow x \in K$$

tweezijdige binomiale toets

H_0: $p = p_0$ *nulhypothese*

H_1: $p \neq p_0$ *alternatieve hypothese*

n *omvang steekproef*

X *aantal successen in steekproef*

α *significantieniveau*

K *kritieke gebied*

$$K \ni k \in \mathbf{N} \mid 0 \le k \le n \wedge$$
$$P(X \le k \wedge p=p_0 \wedge n=n) \le \frac{\alpha}{2} \wedge$$
$$P(X \ge k \wedge p=p_0 \wedge n=n) \le \frac{\alpha}{2}$$

$$X \in K \rightarrow H_0 \text{ w. v.}$$
$$X \notin K \rightarrow H_1 \text{ w. v.}$$

$P(X \in K \mid H_0 \text{ i. w.})$ *onbetrouwbaarheid*

linker-overschrijdingskans:

1° $x < n.p_0 = \mu \rightarrow$
$$P(X \le x \wedge p=p_0 \wedge n=n)$$

2° $x > n.p_0 = \mu \rightarrow$
$$P(X \le 2\mu - x \wedge p=p_0 \wedge n=n)$$

rechter-overschrijdingskans:

1° $x < n.p_0 = \mu \rightarrow$
$$P(X \ge 2\mu - x \wedge p=p_0 \wedge n=n)$$

2° $x > n.p_0 = \mu \rightarrow$
$$P(X \ge x \wedge p=p_0 \wedge n=n)$$

verwerpen H_0

1° $X=x \wedge x < n.p_0 = \mu$

$$\begin{cases} P(X \le x \wedge p=p_0 \wedge n=n) \le \frac{\alpha}{2} \\ P(X \ge 2\mu - x \wedge p=p_0 \wedge n=n) \le \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

H_0 w. v.

2° $X=x \wedge x < n.p_0 = \mu$

$$\begin{cases} P(X \le 2\mu - x \wedge p=p_0 \wedge n=n) \le \frac{\alpha}{2} \\ P(X \ge x \wedge p=p_0 \wedge n=n) \le \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

H_0 w. v.

tekentoets

H_0: $p = 0,5$ *nulhypothese*

$\left.\begin{array}{l} 1° \; H_1: p < 0,5 \\ 2° \; H_1: p > 0,5 \\ 3° \; H_1: p \neq 0,5 \end{array}\right\}$ *alternatieve hypothese*

n *omvang steekproef*

X *toetsingsgrootheid*

X, α en K *afhankelijk van* H_1 (*lz rz tz*)

9. correlatie en regressie

covariantie

$$Cov(x;y) = \frac{\sum (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{n}$$

Correlatiecoëfficiënt

$$R = \frac{Cov(x;y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

Regressielijn y op x

$$(y - \mu_y) = R\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x)$$

Regressielijn x op y

$$(x - \mu_x) = R\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y)$$

Regressiecoëfficiënt y op x

$$\boxed{R\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\frac{Cov(x;y)}{\sigma_x\sigma_y}\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\frac{Cov(x;y)}{\sigma_x^2}}$$

Regressiecoëfficiënt x op y

$$\boxed{R\frac{\sigma_x}{\sigma_y}=\frac{Cov(x;y)}{\sigma_x\sigma_y}\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_y}=\frac{Cov(x;y)}{\sigma_y^2}}$$

10. vergelijkingen en ongelijkheden

ABC-formule
(D is de discriminant)

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac \\ x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a} \end{cases}$$

som van de wortels
(ABC-formule)

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

produkt van de wortels
(ABC-formule)

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

aantal oplossingen
(ABC-formule)

$$O_x = \{x_1 ; x_2\} \rightarrow D > 0$$
$$O_x = \{x\} \rightarrow D = 0$$
$$O_x = \emptyset \rightarrow D < 0$$

gebroken vergelijking
gelijknamig maken

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = 0 \leftrightarrow \frac{ad \pm bc}{bd}$$
$$b \neq d \wedge b \neq 0 \wedge d \neq 0$$

definitie absolute waarde

$$|a| = a \quad \{a \geq 0\}$$
$$|a| = -a \quad \{a \leq 0\}$$

absoluutvergelijkingen

$$|A| = B \rightarrow A = B \vee -A = B \quad \text{controle!}$$
$$|A| = |A| \leftrightarrow A = B \vee -A = B$$

absoluutongelijkheden

$$|f(x)| < a \rightarrow -a < f(x) < a$$
$$|f(x)| < a \rightarrow f(x) < -a \vee f(x) > a$$

11. limieten

somregel

$$\lim_{x \to a} (f(x)+g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq \pm\infty$$
$$\wedge$$
$$\lim_{x \to a} g(x) \neq \pm\infty$$

produktregel

$$\lim_{x \to a} (f(x).g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \;.\; \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq \pm\infty$$
$$\wedge$$
$$\lim_{x \to a} g(x) \neq \pm\infty$$

quotiëntregel

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq \pm\infty$$
$$\wedge$$
$$\lim_{x \to a} g(x) \neq \pm\infty$$
$$\wedge$$
$$\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

regel van l'Hôpital

$$\frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f'(x)}{\lim_{x \to a} g'(x)}$$

als f en g differentieerbaar zijn in a

standaardlimieten

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \ln x = 0$
4. $\lim\limits_{x \downarrow 0} x^b \ln x = 0$
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^b} = 0$
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^b e^{-x} = 0$

$a \neq 0 \wedge b \in \mathbb{R}^+$

12. continuïteit en differentiëerbaarheid

continuïteit
f is continu in a

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

differentieerbaarheid
f is differentieerbaar in a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

f heeft perforatie in P(a;b)

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = b \wedge \lim_{x \downarrow a} f(x) = b$$

discontinuïteit
f is discontinu in a

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$

13. asymptoten

f heeft horizontale asymptoot l: y = b

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

f heeft verticale asymptoot k: x = a

$$N = 0 \rightarrow x = a$$
$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = \pm\infty \vee \lim_{x \downarrow a} f(x) = \pm\infty$$

f heeft scheve asymptoot m: y = ax + b

$$\lim_{x \to \infty} f'(x) = a$$
$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a$$
$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - ax) = b$$

14. exponenten en logaritmen

exponenten

$$a^{b}=c \quad (a\in\mathbb{R}^{+}\setminus\{1\},\ b\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R}^{+})$$
$$a^{p}\cdot a^{q}=a^{p+q}$$
$$\frac{a^{p}}{a^{q}}=a^{p-q}$$
$$(a^{p})^{q}=a^{p\cdot q}$$
$$a^{-p}=\frac{1}{a^{p}}$$
$$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^{p}}$$

exponentiële groei
(stijgende kromme)

$$f(t) = ag^{t}$$
$$a>0 \wedge g>1$$

exponentiële groei
(dalende kromme)

$$f(t) = ag^{t}$$
$$a>0 \wedge 0<g<1$$

logaritmen

$${}^{g}\log a=b \quad (g\in\mathbb{R}^{+}\setminus\{1\},\ b\in\mathbb{R},\ a\in\mathbb{R}^{+})$$
$${}^{g}\log a=b \leftrightarrow g^{b}=a$$
$${}^{g}\log a+{}^{g}\log b = {}^{g}\log(a\cdot b)$$
$${}^{g}\log a-{}^{g}\log b = {}^{g}\log\left(\frac{a}{b}\right)$$
$$p\cdot{}^{g}\log a = {}^{g}\log a^{p}$$
$${}^{c}\log a = \frac{{}^{g}\log a}{{}^{g}\log c}$$
$${}^{\frac{1}{c}}\log a = -{}^{c}\log a$$
$$a = {}^{g}\log(g^{a}) = g^{{}^{g}\log a}$$

logaritmisch papier

$$y = ag^{x} \leftrightarrow \log y = \log a + x\log g$$
$$S_{y\text{-}as}\ (0;a)$$
$$R.C. = \log g$$

dubbel logaritmisch papier

$$y = ax^{n} \leftrightarrow \log y = \log a + n\log x$$
$$S_{y\text{-}as}\ (1;a)$$
$$R.C. = n$$

logistische groei
(S-kromme)

$$N(t) = \frac{a}{b + ce^{-dt}}$$

15. goniometrie

$\triangle ABC$, $\beta = 90°$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{c}{a}$$
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c}$$

goniometrische betrekkingen

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow$$
$$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

verdubbelingsformules

$$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha-1 =$$
$$= 1-2\sin^2\alpha =$$
$$= \cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\tan2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

somformules

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

sinusregel

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

cosinusregel

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

hulphoekconstructie
φ is de hoek die de vector (a;b) maakt met x_+-as
φ in hetzelfde kwadrant als de vector (a;b)

$$a\cos x + b\sin x = c$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} = c$$
$$\tan\varphi = \frac{b}{a}$$
$$c = \sqrt{a^2+b^2}.\cos(x-\varphi)$$

16. cyclometrische functies

arccosinus

$$f(x) = \cos x$$
$$g(x) = f_{inv}(x) = \arccos x$$
$$D_g = B_f = [-1;1]$$
$$B_g = D_f = [0;\pi]$$

arcsinus

$$f(x) = \sin x$$
$$g(x) = f_{inv}(x) = \arcsin x$$
$$D_g = B_f = [-1;1]$$
$$B_g = D_f = [-\frac{1}{2}\pi;\frac{1}{2}\pi]$$

arctangens

$$f(x) = \tan x$$
$$g(x) = f_{inv}(x) = \arctan x$$
$$D_g = B_f = \mathbb{R}$$
$$B_g = D_f = \langle -\frac{1}{2}\pi;\frac{1}{2}\pi\rangle$$

17. integraalrekening

primitieve functie	$F'(x) = f(x)$
partiële integratie	$\int ab'dx = ab - \int a'bdx$
oppervlakte van een vlakdeel A begrenst door f(x), x=a, x=b en de x-as (a < b)	$O_A = \int_a^b f(x)\,dx$
volume van een omwentelingslichaam A begrenst door de om de x-as gewentelde functie f(x) en de lijnen x=a en x=b	$V_A = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$

18. krommen in parametervoorstelling

kromme in parametervoorstelling K	1° $K: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ 2° $K: (x;y) = (f(t);g(t))$
snijpunt met de x-as	$K \cap x\text{-as} \rightarrow y=0$
snijpunt met de y-as	$K \cap y\text{-as} \rightarrow x=0$
raaklijn	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$
horizontale raaklijn	$\frac{dy}{dx} = 0$
verticale raaklijn	$\frac{dx}{dy} = 0$

19. ruimtemeetkunde en vectorrekening

afstand van A en B in R_3

$$d(A;B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

midden van A en B in R_3

$$M(A;B) = \left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} ; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

vector AB

$$\overline{AB} = \overline{b} - \overline{a} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

lengte van vector AB

$$\left| \overline{AB} \right| = d(A;B) = \left| \overline{a} \right| . \left| \overline{b} \right| . \cos\angle(\overline{a};\overline{b})$$

midden van vector AB

$$\overline{m_{AB}} = \frac{1}{2} (\overline{a} + \overline{b})$$

vector a loodrecht op b

$$\overline{a} . \overline{b} = 0 \rightarrow \overline{a} \perp \overline{b}$$

hoek tussen l en m

$$\cos\angle(l;m) = \frac{\left|\overline{r_l}.\overline{r_m}\right|}{\left|\overline{r_l}\right|.\left|\overline{r_m}\right|}$$

hoek tussen l en V

$$\sin\angle(l;V) = \frac{\left|\overline{r_l}.\overline{n_V}\right|}{\left|\overline{r_l}\right|.\left|\overline{n_V}\right|}$$

hoek tussen V en W

$$\cos\angle(V;W) = \frac{\left|\overline{n_V}.\overline{n_W}\right|}{\left|\overline{n_V}\right|.\left|\overline{n_W}\right|}$$

afstand tussen l en m

$$l\in\alpha \wedge \alpha \| m$$
$$d(l;m) = \frac{\overline{n_\alpha}.\overline{r_m}}{\left|\overline{n_\alpha}\right|}$$

vergelijking bol β
in Oxyz-assenstelsel

$$\beta(x;y;z):$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$$
$$M(a;b;c)$$
r is de straal

vergelijking kegel K
in Oxyz-assenstelsel

$K(x;y;z)$:
$(x-a)^2+(y-b)^2 = a^2+(z-c)^2$
$T(a;b;c)$
$a = \tan\alpha$
z-as is as

vergelijking cilinder C
in Oxyz-assenstelsel

$C(x;y;z)$: $x^2+y^2 = r^2$
r = *straal*
z-as is as

20. logica

De wet van de tegenspraak

$$\neg(p \wedge \neg p)$$

De wet van de uitsluitende derde

$$p \wedge \neg p$$

De wet van de identiteit

$$p \rightarrow p$$

conjunctie

p	q	$p \wedge q$
O	O	O
W	O	O
O	W	O
W	W	W

disjunctie

p	q	$p \vee q$
O	O	O
W	O	W
O	W	W
W	W	W

implicatie

p	q	$p \rightarrow q$
O	O	W
W	O	O
O	W	W
W	W	W

21. oppervlakte- en inhoudsmaten

oppervlakte van driehoek ABC met zijden a,b en c en hoeken α, β en γ

$$O_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} b_s h$$

oppervlakte van rechthoek ABCD met zijden a en b

$$O_{ABCD} = ab$$

oppervlakte van parallellogram ABCD met zijden a en b en hoek γ

$$O_{ABCD} = ab \sin\gamma$$

oppervlakte van cirkel C met straal r

$$O_C = \pi r^2$$

oppervlakte van ellips E met assen a en b

$$O_E = \pi ab$$

oppervlakte van bol β met straal r

$$O_\beta = 4\pi r^2$$

oppervlakte van cilinder L met straal r en hoogte h	$O_L = 2\pi r(h+r)$
oppervlakte van kegel K met straal r en apothema l	$O_K = \pi r l$
omtrek van cirkel C met straal r	$O_C = 2\pi r$
omtrek van ellips E met assen a en b	$O_E = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$
inhoud van bol β met straal r	$V_\beta = \frac{4}{3}\pi r^3$
inhoud van cilinder L met straal r en hoogte h	$V_L = \pi r^2 h$
inhoud van kegel K met straal r en hoogte h	$V_K = \frac{\pi r^2 h}{3}$

inhoud van prisma M met grondoppervlak G en hoogte h

$$V_M = Gh$$

inhoud van piramide P met grondoppervlak G en hoogte h

$$V_P = \frac{1}{3}Gh$$

22. symbolen en notaties

Rekenkunde en algebra

is gelijk aan	=
is per definitie gelijk aan	≐
is niet gelijk aan	≠
veronderstelde gelijkheid	≙
is identiek aan	≡
is bij benadering gelijk	≈
nadert tot	→
is evenredig met	~
is kleiner dan	<
is groter dan	>
is kleiner dan gelijk aan	≤
is groter dan gelijk aan	≥
veel kleiner dan	«
veel groter dan	»
plus	+
minus	−
vermenigvuldigen	×
delen	÷
absolute waarde van a	$\|a\|$
n-faculteit	$n!$
logaritme met grondtal a	$^{a}\log x$
gewone logaritme (van x)	$^{10}\log x$
gedurige som	$\sum$
gedurig produkt	⊓

Meetkunde en goniometrie

hoek	∠
gemeten hoek	∡
rechte hoek	⊾
driehoek	△
cirkel	⊙
is evenwijdig met	∥
staat loodrecht op	⊥
is congruent met	≅
is gelijkvormig met	~
sinus	sin
cosinus	cos
tangens	tan
arcsinus	asin
arccosinus	acos
arctangens	atan

Verzamelingen en logica

daaruit volgt	$\Rightarrow$
hetgeen volgt uit	$\Leftarrow$
is equivalent met	$\Leftrightarrow$
de verzameling A	$A=\{\dots\}$
is een element van	$\in$
is niet een element van	$\notin$
heeft als element	$\ni$
voor alle	$\forall$
er bestaat	$\exists$
zodanig dat	:
aantal elementen van de verzameling B	#(B)
de lege verzameling	$\emptyset$
de vereninging van de verzamelingen A en B	$A \cup B$
de doorsnede van de verzamelingen A en B	$A \cap B$
de verzameling A is een deelverzameling van de verzameling B	$A \subset B$
de verzameling der natuurlijke getallen	$\mathbb{N}$
de verzameling der gehele getallen	$\mathbb{Z}$
de verzameling der rationale getallen	$\mathbb{Q}$
de verzameling der reële getallen	$\mathbb{R}$
de verzameling der complexe getallen	$\mathbb{C}$
de verzameling der imaginaire getallen	$\mathbb{I}$
conjunctie	$\wedge$
disjuntie	$\vee$
negatie	$\neg$
verzamelingsuitzondering	$\setminus$