

平成 30 年度 10 月期入学 / 平成 31 年度 4 月期入学  
京都大学 大学院情報学研究科  
修士課程 知能情報学専攻 入学者選抜試験問題  
(専門科目)

平成 30 年 8 月 6 日 9:00~12:00

【注意】

- 問題冊子はこの表紙を含めて 33 枚ある。
- 試験開始の合図があるまで中を見てはいけない。
- 試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷の不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
- 問題は下記 14 題であり、日本語と英語の両方で出題されている。このうちいずれか 4 題を選択し、解答しなさい。

生命情報学(問題番号:B-1～B-2) .....	1～4 ページ
心理学、認知神経科学(問題番号:P-1～P-4) .....	5～12 ページ
計算機科学、電気電子工学(問題番号:T-1～T-5) .....	13～24 ページ
基礎数学(問題番号:M-1～M-3) .....	25～32 ページ

- 特に指定のない限り、日本語または英語で解答すること。
- 解答用紙に記載されている注意事項についても留意すること。

---

*The Japanese version of this document is the prevailing and authoritative version;  
the English translation below is provided for reference only*

October 2018 Admissions / April 2019 Admissions  
Entrance Examination for Master's Program  
Department of Intelligence Science and Technology  
Graduate School of Informatics, Kyoto University  
(Specialized Subjects)

August 6, 2018  
9:00 - 12:00

NOTES

- This is the Question Booklet in 33 pages including this front cover.
- Do not open the booklet until you are instructed to start.
- After the exam has started, check the number of pages and notify proctors (professors) immediately if you find missing pages or unclear printings.
- There are 14 questions, written in Japanese and English. The questions are classified as listed below. **Choose and answer 4 questions.**

Bioinformatics (Question Numbers B-1 to B-2)	Pages 1 to 4
Psychology and Cognitive Neuroscience (Question Numbers P-1 to P-4)	Pages 5 to 12
Computer Science and Electrical and Electronic Engineering (Question Numbers T-1 to T-5)	Pages 13 to 24
Basic Mathematics (Question Numbers M-1 to M-3)	Pages 25 to 32

- Write your answer in Japanese or English, unless otherwise specified.
- Read carefully the notes on the Answer Sheets as well.

設問 生命情報学に関する以下の語句から 8 つを選んで、それぞれ 4 行以上 10 行以内で説明せよ。図を用いても良い。

1. パラログ
2. Smith-Waterman アルゴリズム
3. コドン
4. 糖鎖付加
5. 遺伝子機能グループ解析
6. タンパク質ドメイン
7. RNAseq
8. メタボローム解析
9. De novo タンパク質構造予測
10. shRNA (short hairpin RNA)

*Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.*

Q. Choose 8 terms from the following 10 terms related to bioinformatics, and explain each of them in 4 – 10 lines. Figures can be used, if necessary.

1. Paralog
2. Smith-Waterman algorithm
3. Codon
4. Glycosylation
5. Gene Set Enrichment Analysis: GSEA
6. Protein domains
7. RNAseq
8. Metabolomic analysis
9. De novo protein structure prediction
10. shRNA (short hairpin RNA)

DNA 配列のパターンを表現するために、長さ 0 以上の任意の DNA 配列とマッチする文字 ‘\*’ と A, C, G, T の合計で 5 種類の文字からなるパターン文字列を考える。ここで、 $F(s, n)$  をパターン文字列  $s$  とマッチする長さ  $n$  の DNA 配列すべての集合とする。例えば、

$$\begin{aligned} F(A^*CGT, 5) &= \{AACGT, ACCGT, AGCGT, ATCGT\} \\ F(A^*G^*, 3) &= \{AAG, ACG, AGG, ATG, AGA, AGC, AGT\} \\ F(A^*, 2) \cap F(*T, 2) &= \{AT\} \end{aligned}$$

が成立し、 $|F(A^*CGT, 5)| = 4$ ,  $|F(A^*G^*, 3)| = 7$ ,  $|F(A^*, 2) \cap F(*T, 2)| = 1$  となる。ただし、 $S \cap R$  は集合  $S$  と  $R$  の積集合（交わり）を表し、 $|S|$  は集合  $S$  の要素数を表す。

以下の設問に答えよ。なお、設問 3, 4, 5 のいずれにおいても  $n$  は 3 以上の整数とし、漸化式を解答の式とはしないものとする。

設問 1  $F(A^*T^*C, 4)$  の要素をすべて列挙せよ。

設問 2  $F(A^*T, 4) \cap F(*C^*, 4) \cap F(*G^*, 4)$  の要素をすべて列挙せよ。

設問 3  $|F(A^*T, n) \cap F(*C^*, n)|$  を与える  $n$  に関する式を理由とともに示し、かつ、 $n = 5$  の時の値を求めよ。

設問 4  $|F(*A^*, n) \cap F(*T^*, n)|$  を与える  $n$  に関する式を理由とともに示し、かつ、 $n = 5$  の時の値を求めよ。

設問 5  $|F(*A^*C^*, n)|$  を与える  $n$  に関する式を理由とともに示し、かつ、 $n = 5$  の時の値を求めよ。

*Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.*

In order to represent patterns in DNA sequences, we consider *pattern strings* over an alphabet  $\{A,C,G,T,*\}$ , where '\*' is a special letter that matches any string over  $\{A,C,G,T\}$  including the empty string. Let  $F(s, n)$  be the set of DNA sequences of length  $n$  that match a pattern string  $s$ . For example, the following equalities hold:

$$\begin{aligned} F(A^*CGT, 5) &= \{AACGT, ACCGT, AGCGT, ATCGT\}, \\ F(A^*G^*, 3) &= \{AAG, ACG, AGG, ATG, AGA, AGC, AGT\}, \\ F(A^*, 2) \cap F(*T, 2) &= \{AT\}, \end{aligned}$$

and thus we have  $|F(A^*CGT, 5)| = 4$ ,  $|F(A^*G^*, 3)| = 7$ , and  $|F(A^*, 2) \cap F(*T, 2)| = 1$ , where  $S \cap R$  denotes the intersection of sets  $S$  and  $R$ , and  $|S|$  denotes the number of elements in a set  $S$ . Answer the following questions. Note that in each of Q.3, Q.4, and Q.5,  $n$  is an integer no less than 3, and that a mathematical formula must not be given as a recurrence relation.

Q.1 List all elements of  $F(A^*T^*C, 4)$ .

Q.2 List all elements of  $F(A^*T, 4) \cap F(*C^*, 4) \cap F(*G^*, 4)$ .

Q.3 Describe a mathematical formula on  $n$  that gives  $|F(A^*T, n) \cap F(*C^*, n)|$ , explain its derivation, and compute its value for  $n = 5$ .

Q.4 Describe a mathematical formula on  $n$  that gives  $|F(*A^*, n) \cap F(*T^*, n)|$ , explain its derivation, and compute its value for  $n = 5$ .

Q.5 Describe a mathematical formula on  $n$  that gives  $|F(*A^*C^*, n)|$ , explain its derivation, and compute its value for  $n = 5$ .

設問 脳情報処理に関する以下の用語について簡潔に説明せよ。数式や図を用いてもよい。

- (1) 複雑型細胞 (Complex cell)
- (2) スパイクトリガー平均 (Spike-triggered averaging)
- (3) ポピュレーション・ベクター (Population vector)
- (4) TD 学習 (TD learning; Temporal difference learning)
- (5) デルタ・ルール (Delta rule)

*Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.*

Q. Give a concise explanation of each of the following terms regarding neural information processing. Mathematical expressions and/or figures can be used.

- (1) Complex cell
- (2) Spike-triggered averaging
- (3) Population vector
- (4) TD learning / Temporal difference learning
- (5) Delta rule

Figure 1 は、ある心理物理実験における 1 試行の刺激提示スケジュールを示している。まず、画面上に 3 つの正方形が提示される。手がかり(cue)画面では、そのうちの左右どちらかの正方形の輝度が上昇した。その後、50, 150, 550, 1000 msec のいずれかの時間間隔(interval)のうち、左右のどちらかの正方形中に標的刺激(target)が提示される。実験参加者の課題は、視線を中央の正方形に固定したまま、標的刺激を検出したら素早くキーを押すことであった。キー押しまでの反応時間(reaction time)が計測された。

Figure 2 は、右半球の頭頂葉を損傷したある患者（右利き）の結果である。手がかり位置（左右）と標的位置（左右）の組み合わせに分けて反応時間がプロットされている。横軸は、手がかりと標的刺激の間の時間間隔である。

設問 1 右半球の側頭-頭頂領域を含む部位を損傷することで、典型的に生じる注意障害について説明せよ。

設問 2 Figure 2 中の Right-Right と Left-Right の結果を注意の働きの観点から説明せよ。

設問 3 この結果からわかる、注意のコントロールにおける右側頭-頭頂領域の機能について考察せよ。

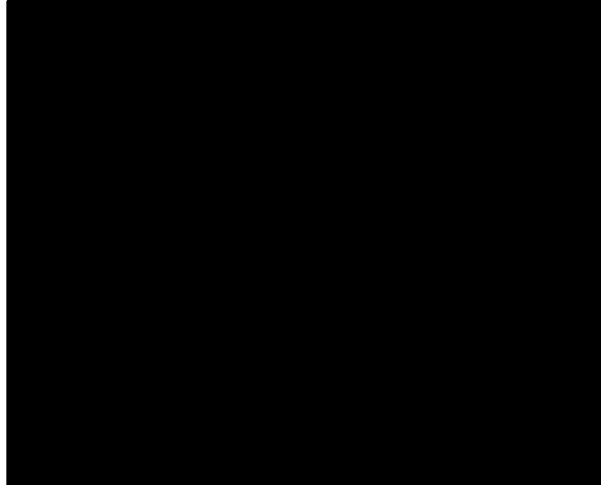


Figure 1. Time sequence of stimulus presentation.

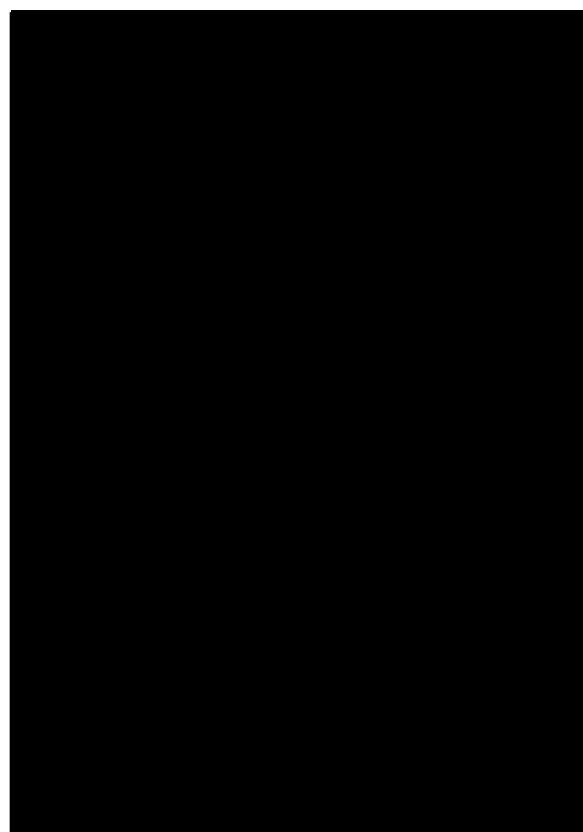


Figure 2. A result of the experiment.

Figures 1 and 2. Modified from Posner, Cohen, & Rafal (1982). *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, 298, 187–198.

*Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.*

Figure 1 shows the time sequence of a trial in a psychophysical experiment. Three squares were presented on a display, followed by a cue stimulus, in which the luminance of the left or right square increased. After 50, 150, 550 or 1000 msec of interval, a target was presented in the left or right square. The task of participants was to press a key when they detect a target, while fixating their eyes on the central square. The reaction time to key press was measured.

Figure 2 shows a result of a right-handed patient with a right parietal lesion. Reaction times are plotted as a function of time interval between a cue and a target, separately for the cue and target positions.

Q.1 Explain attentional deficits that are typically observed after brain lesions including the right temporo-parietal region.

Q.2 Explain the results of the Right-Right and Left-Right conditions in Figure 2, in terms of attentional functions.

Q.3 Discuss the function of the right temporo-parietal region in attentional control.



Figure 1. Time sequence of stimulus presentation.

Figures 1 and 2. Modified from Posner, Cohen, & Rafal (1982). *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, 298, 187–198.

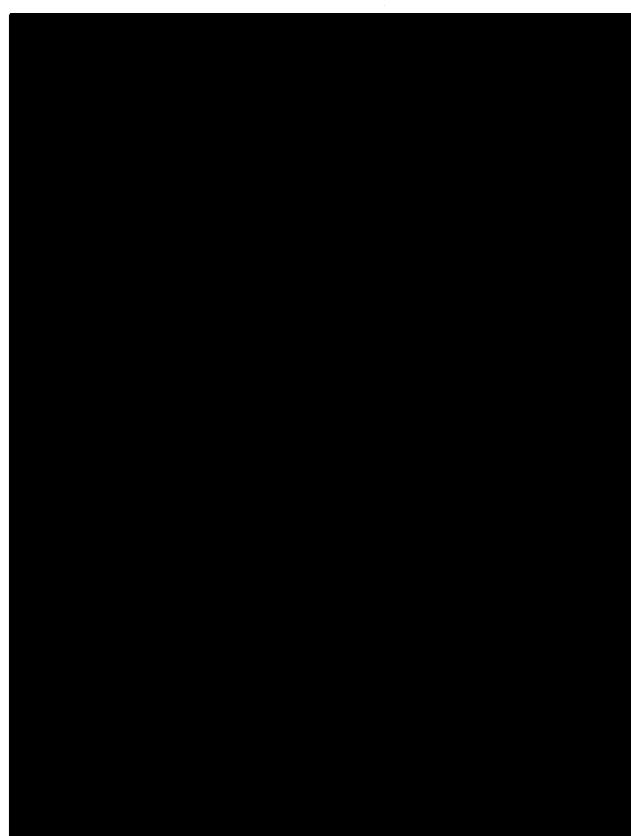


Figure 2. A result of the experiment.

ある実験で、Figure 1 のような 2つの単語が重ね書きされた刺激を 2 セット続けて提示した。ここでは、前者を第 1 刺激(Stimulus 1), 後者を第 2 刺激(Stimulus 2)と呼ぶ。実験参加者には、それぞれの刺激中の赤色（本紙面上では黒色）の単語の呼称を求めた。この実験では、Figure 1 にあるような 3 種類の条件(A, B, and C)が設けられていた。従属変数は第 2 刺激の単語呼称反応時間(Reaction time)と誤答率(% Errors)であった。

設問 1 この実験のように、先行する刺激が後続の刺激の認知処理に影響を与える効果を何と呼ぶか。

設問 2 このような実験を行ったところ Table 1 のような結果を得た。Table 1 の Condition の(1), (2), (3)は、それぞれ Figure 1 の Condition A, B, C のいずれに該当するか答えよ。

設問 3 Table 1 の結果を認知メカニズムの観点から説明せよ。

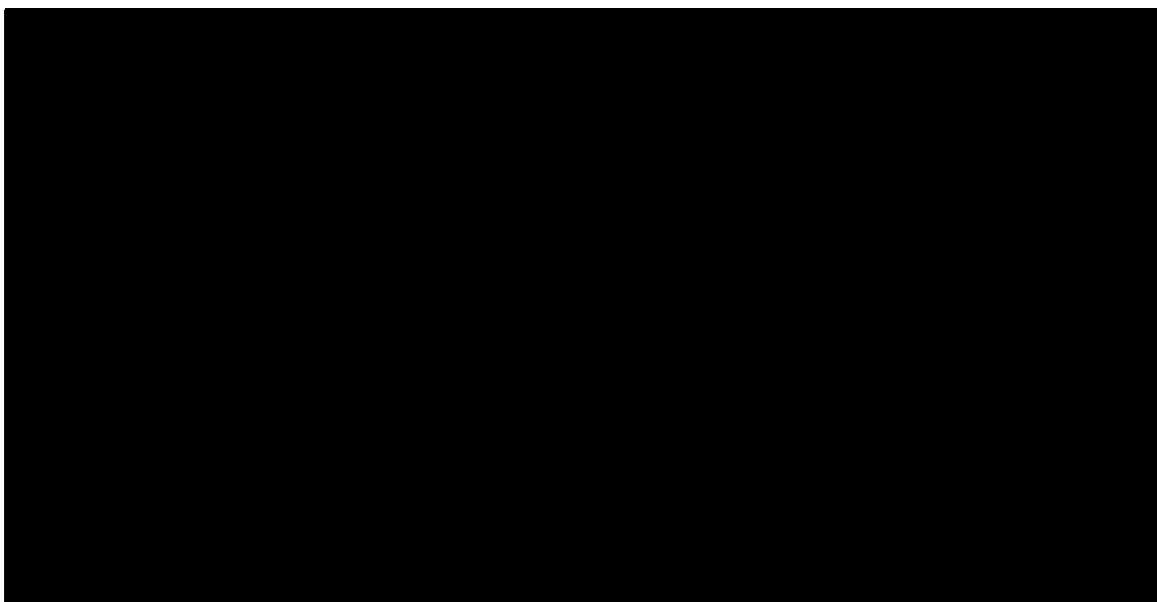


Table 1. Results of the experiment.

Figure 1 and Table 1. Modified from Tipper & Driver (1988).  
*Memory & Cognition*, 16, 64-70.

*Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.*

Two sets of stimuli (Stimulus 1 and Stimulus 2) were successively presented in an experimental trial (Figure 1). Each stimulus consisted of two overlapping words. Participants were asked to read aloud the red word (printed in black in Figure 1) in each stimulus. There were three conditions (A, B, and C) as shown in Figure 1. Dependent variables were vocal reaction times to Stimulus 2 and their error rates.

Q.1 As this experiment shows, preceding stimuli can affect the cognitive processing of subsequent stimuli. Provide the name of this effect.

Q.2 The results are shown in Table 1. Give the correspondence between Condition 1, 2, and 3 in Table 1 and Condition A, B, and C in Figure 1.

Q.3 Explain the results in Table 1 in terms of cognitive mechanism.

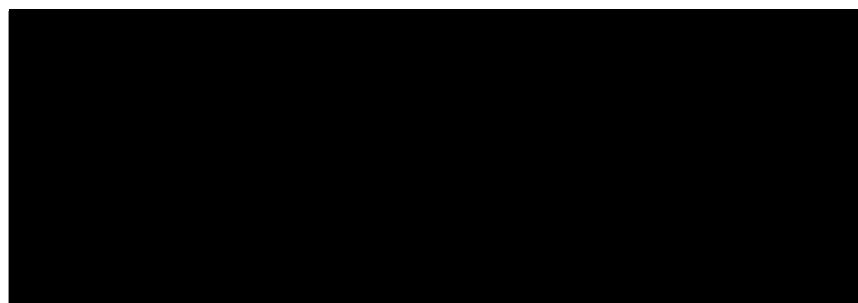
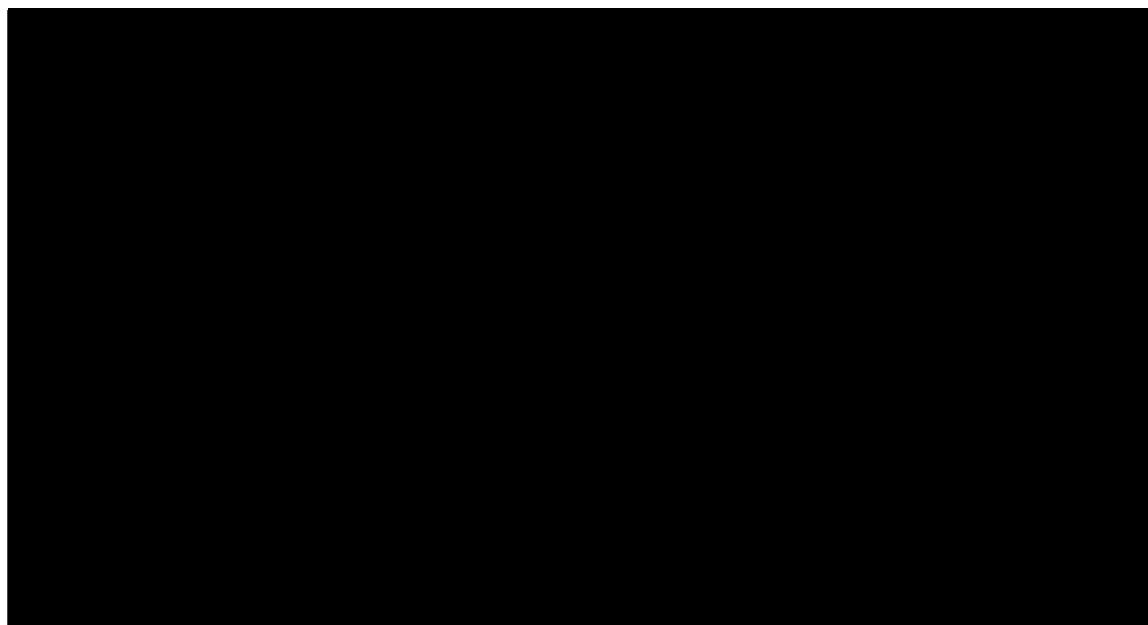


Figure 1 and Table 1. Modified from Tipper & Driver (1988).

*Memory & Cognition, 16, 64-70.*

下記の設間に答えよ。必要であれば図を用いてもよい。

設問 1 ヒトの水平方向および垂直方向の音源定位のメカニズムについて、以下の語を全て用いて説明せよ。

- (1) 外耳形状
- (2) 到達時間
- (3) 音圧

設問 2 音がまとまり、他の音源から分離して知覚される現象を何というか。また、音のまとまりを誘発する手がかりを 3 つ述べよ。

設問 3 視覚情報のまとまりの説明については、ゲシュタルトの群化原理が知られている。ゲシュタルトの群化原理を 5 つ挙げるとともに、それぞれの原理について説明せよ。

*Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.*

Answer the following questions. You may use figures if necessary.

**Q.1** Describe the mechanisms of sound localization in humans for the horizontal and vertical directions by using all of the following terms.

- (1) External ear shape
- (2) Arrival time
- (3) Sound pressure

**Q.2** Answer the name of the phenomenon of perceiving sounds as a chunk while discriminating the sounds from others. Explain three cues that induce the chunking of sounds.

**Q.3** In vision, perceptual grouping is often explained by the Gestalt principles. Explain five Gestalt principles for visual grouping.

通信路行列

$$U = \begin{bmatrix} 1-q & q \\ q & 1-q \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 1-q & q \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

で規定される記憶のない2元定常通信路 $U, V$ が与えられたとする。ただし、入力アルファベット、出力アルファベットとも、 $\{A, B\}$ （第1番目の記号をA、第2番目の記号をBとする）とし、 $0 \leq q < \frac{1}{2}$ とする。

設問1 受信された系列を復号するための最尤復号法がどのようなものか、一般的な説明を示しなさい。

設問2 長さ3の入力系列 $x_1x_2x_3$  ( $x_i \in \{A, B\}, 1 \leq i \leq 3$ )の伝送にあたって、AAAとBBBだけを符号語として選んだとき、通信路 $U$ からの出力系列

$$y_1y_2y_3 \quad (y_i \in \{A, B\}, 1 \leq i \leq 3)$$

と通信路 $V$ からの出力系列

$$z_1z_2z_3 \quad (z_i \in \{A, B\}, 1 \leq i \leq 3)$$

の最尤復号法による復号のしかたを、それぞれ具体的に示しなさい。

設問3 設問2において、AAAの出現確率を $p$ としたとき、通信路 $U$ と $V$ に対する最尤復号法による復号誤りの確率をそれぞれ求めなさい。

設問4 通信路 $U$ において、長さ3の入力系列 $x_1x_2x_3$  ( $x_i \in \{A, B\}, 1 \leq i \leq 3$ )の伝送にあたって、AAAとBBBだけを符号語として選んだとき、最尤復号法による復号誤り率を $P_e$ とすれば、

$$P_e \leq (q^{1-s}(1-q)^s + q^s(1-q)^{1-s})^3$$

であることを示しなさい。ヒント：任意の $0 \leq x \leq y \leq 1$ と $0 < s < 1$ に対して、 $x \leq x^{1-s}y^s$ となることを利用してよい。

設問5 通信路 $U$ において、長さ $N$ の入力系列 $x_1 \cdots x_N$  ( $x_i \in \{A, B\}, 1 \leq i \leq N$ )の伝送にあたって、 $A^N$ と $B^N$ だけを符号語として選んだとき、最尤復号法による復号誤り率を $P_{e,N}$ とすれば、

$$P_{e,N} \leq \left( 2\sqrt{q(1-q)} \right)^N$$

であることを示しなさい。ここで、 $A^N$ と $B^N$ は、それぞれ入力アルファベットA、出力アルファベットBの $N$ 個の連続した並びである。

*Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.*

Consider a couple of memoryless binary communication channels, characterized by channel matrices:

$$U = \begin{bmatrix} 1-q & q \\ q & 1-q \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 1-q & q \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

where the output alphabet is the same as the input alphabet  $\{A, B\}$  (let the first letter be A, and the second be B), and  $0 \leq q < \frac{1}{2}$ .

Q.1 Explain, in general, how the maximum-likelihood decoding works to estimate a code word for the output from a channel.

Q.2 Consider that only AAA and BBB are chosen as code words in transmitting  $x_1x_2x_3$  ( $x_i \in \{A, B\}, 1 \leq i \leq 3$ ) of length 3. Show how the maximum-likelihood decoding works to decode outputs

$$y_1y_2y_3 \quad (y_i \in \{A, B\}, 1 \leq i \leq 3)$$

from  $U$  and outputs

$$z_1z_2z_3 \quad (z_i \in \{A, B\}, 1 \leq i \leq 3)$$

from  $V$ .

Q.3 Let  $p$  be the probability of AAA's occurrence in the input in Q.2. Calculate the probabilities of decoding errors in the maximum-likelihood decoding to decode outputs from  $U$  and  $V$ .

Q.4 Demonstrate that the error probability  $P_e$  in decoding outputs using the maximum-likelihood decoding to decode outputs from  $U$  is

$$P_e \leq (q^{1-s}(1-q)^s + q^s(1-q)^{1-s})^3,$$

provided that only AAA and BBB are employed as code words in transmitting  $x_1x_2x_3$  ( $x_i \in \{A, B\}, 1 \leq i \leq 3$ ) of length 3. You may use the property that  $x \leq x^{1-s}y^s$  for  $0 \leq x \leq y \leq 1$  and  $0 < s < 1$ .

Q.5 Demonstrate that the error probability  $P_{e,N}$  in decoding outputs using the maximum-likelihood decoding to decode outputs from  $U$  is

$$P_{e,N} \leq \left(2\sqrt{q(1-q)}\right)^N,$$

provided that only  $A^N$  and  $B^N$  are employed as code words in transmitting  $x_1 \dots x_N$  ( $x_i \in \{A, B\}, 1 \leq i \leq N$ ) of length  $N$ . Notation:  $A^N$  and  $B^N$  stand for consecutive sequences of letters A and B of length  $N$ , respectively.

連続時間信号  $x(t)$  のフーリエスペクトル  $X(\omega)$  は、 $X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$  で与えられる。ここで  $j$  は虚数単位、 $\mathcal{F}[\cdot]$  はフーリエ変換を表し、フーリエ逆変換を  $\mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} dt$  とする。

設問 1 フーリエスペクトルが  $P_{\Omega}(\omega)$  となる連続時間信号  $\mathcal{F}^{-1}[P_{\Omega}(\omega)]$  を求めよ。なお、 $P_{\Omega}(\omega)$  は幅  $2\Omega$  の矩形関数であり、以下の式で与えられる。

$$P_{\Omega}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \Omega \\ 0 & |\omega| \geq \Omega \end{cases}$$

設問 2  $\delta_T(t)$  を周期  $T$  のくし型関数  $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$  とする。

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \frac{2\pi}{T} \delta_{\frac{2\pi}{T}}(\omega)$$

を示せ。ここで、 $\delta(t)$  は、

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

および

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

を満たす関数である。なお、任意の実数  $\omega_0$  に対し、

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

設問 3 連続時間信号  $x(t)$  を標本間隔  $T$  でサンプリングした信号を  $x_s(t) = x(t)\delta_T(t)$  とする。 $\mathcal{F}[x_s(t)]$  を  $X(\omega)$  と  $T$  を用いて表せ。

Master's Program	Specialized Subjects	[Computer Science and Electrical and Electronic Engineering]	Question Number	T - 2
<i>Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.</i>				

The Fourier spectrum of a continuous-time signal  $x(t)$  is given by

$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$ , where  $j$  denotes the imaginary unit and  $\mathcal{F}[\cdot]$  denotes Fourier transform. Let  $\mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} dt$  be inverse Fourier transform.

Q.1 Find the continuous-time signal  $\mathcal{F}^{-1}[P_{\Omega}(\omega)]$  corresponding to the Fourier spectrum  $P_{\Omega}(\omega)$ , where  $P_{\Omega}(\omega)$  denotes a rectangular function of width  $2\Omega$  and is given by

$$P_{\Omega}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \Omega, \\ 0 & |\omega| \geq \Omega. \end{cases}$$

Q.2 Let  $\delta_T(t)$  be a comb function whose time period is  $T$ ,  $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ . Show that

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \frac{2\pi}{T} \delta_{\frac{2\pi}{T}}(\omega),$$

where  $\delta(t)$  is a function that satisfies

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0, \\ 0 & t \neq 0, \end{cases}$$

and

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

You may use  $\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$  for any real number  $\omega_0$ .

Q.3 Let  $x_s(t) = x(t)\delta_T(t)$  be a continuous-time signal sampled from  $x(t)$  with a sampling period  $T$ . Describe  $\mathcal{F}[x_s(t)]$  with  $X(\omega)$  and  $T$ .

予測問題を考える。 $d$  次元の入力ベクトルを  $\mathbf{x} = [x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}]^\top \in \mathbb{R}^d$  ( $\top$  は転置)，それに対応する出力を  $y \in \mathbb{R}$  とする。入力と出力が対になつた学習データを  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$  とし，それぞれの  $(x_i, y_i)$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$  は独立に同一分布に従う。なお，データ行列  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] \in \mathbb{R}^{d \times n}$  のランクを  $d$  とする。

線形モデル

$$f(\mathbf{x}; \mathbf{w}) = \mathbf{w}^\top \mathbf{x}$$

を考え， $\mathbf{w} = [w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(d)}]^\top \in \mathbb{R}^d$  をモデルパラメータとする。

設問 1 以下の式を満たす  $\hat{\mathbf{w}}$  を学習データを用いて導け。

$$\hat{\mathbf{w}} = \underset{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d}{\operatorname{argmin}} \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - f(\mathbf{x}_i; \mathbf{w}))^2$$

設問 2 出力  $y_i$  と入力  $\mathbf{x}_i$  に次の関係があるとする。

$$y_i = f(\mathbf{x}_i; \mathbf{w}) + \epsilon_i, \quad \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

ここで  $N(\mu, \sigma^2)$  は平均  $\mu$ , 分散  $\sigma^2$  の 1 次元の正規分布である。 $\mathbf{w}$  の尤度関数を定義した上で，その最尤推定量を求めよ。

設問 3 以下の式を満たす  $\hat{\mathbf{w}}$  を学習データを用いて導け。

$$\hat{\mathbf{w}} = \underset{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d}{\operatorname{argmin}} \quad \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i (y_i - f(\mathbf{x}_i; \mathbf{w}))^2 + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{w}\|^2 \right)$$

なお， $r_i > 0$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$  および  $\lambda > 0$  は定数とし， $\|\cdot\|$  はユークリッドノルムとする。

設問 4 予測モデルの出力を  $y \in \{0, 1\}$  とし， $y = 1$  の事後確率の確率モデルを

$$p(y = 1 | \mathbf{x}; \mathbf{w}) = \frac{1}{1 + \exp(-f(\mathbf{x}; \mathbf{w}))}$$

とする。 $y = 0$  の事後確率の確率モデルを  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{w}$  を用いて表せ。

設問 5 学習データの出力を  $y_i \in \{0, 1\}$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$  とする。設問 4 の確率モデルにおいて，対数尤度関数  $L(\mathbf{w})$  の  $\mathbf{w}$  に関する勾配が次で表せることを示せ。

$$\frac{\partial L(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = \sum_{i=1}^n (y_i - p(y = 1 | \mathbf{x}_i; \mathbf{w})) \mathbf{x}_i$$

Master's Program	Specialized Subjects	[Computer Science and Electrical and Electronic Engineering]	Question Number	T - 3
<i>Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.</i>				

We consider prediction problems. Let  $\mathbf{x} = [x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(d)}]^\top \in \mathbb{R}^d$  be a  $d$ -dimensional input vector ( $\top$  denotes matrix transpose) and  $y \in \mathbb{R}$  be the corresponding output. We have paired training data  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$ , where  $(x_i, y_i)$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$  are independently and identically distributed (i.i.d.). The rank of the data matrix  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] \in \mathbb{R}^{d \times n}$  is  $d$ .

We employ a linear model:

$$f(\mathbf{x}; \mathbf{w}) = \mathbf{w}^\top \mathbf{x},$$

where  $\mathbf{w} = [w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(d)}]^\top \in \mathbb{R}^d$  is a model parameter.

Q.1 Derive  $\hat{\mathbf{w}}$  that satisfies the following equation using paired training data.

$$\hat{\mathbf{w}} = \underset{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i - f(\mathbf{x}_i; \mathbf{w}))^2.$$

Q.2 Suppose that  $y_i$  and  $\mathbf{x}_i$  have the following relationship:

$$y_i = f(\mathbf{x}_i; \mathbf{w}) + \epsilon_i, \quad \epsilon_i \sim N(0, \sigma^2),$$

where  $N(\mu, \sigma^2)$  is a one-dimensional normal distribution with mean  $\mu$  and variance  $\sigma^2$ . Derive the likelihood function of  $\mathbf{w}$  and obtain the maximum likelihood solution.

Q.3 Derive  $\hat{\mathbf{w}}$  that satisfies the following equation using paired training data.

$$\hat{\mathbf{w}} = \underset{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d}{\operatorname{argmin}} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i (y_i - f(\mathbf{x}_i; \mathbf{w}))^2 + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{w}\|^2 \right),$$

where  $r_i > 0$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$  and  $\lambda > 0$  are constants, and  $\|\cdot\|$  is the Euclidean norm.

Q.4 Assume the output of a prediction model as  $y \in \{0, 1\}$  and the probabilistic model of the posterior probability of  $y = 1$  as

$$p(y = 1 | \mathbf{x}; \mathbf{w}) = \frac{1}{1 + \exp(-f(\mathbf{x}; \mathbf{w}))}.$$

Derive the probabilistic model of the posterior probability of  $y = 0$  using  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{w}$ .

Q.5 Assume the output of paired training data as  $y_i \in \{0, 1\}$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$ . For the probabilistic model in Q.4, show that the gradient of the log likelihood function  $L(\mathbf{w})$  with respect to  $\mathbf{w}$  is given as

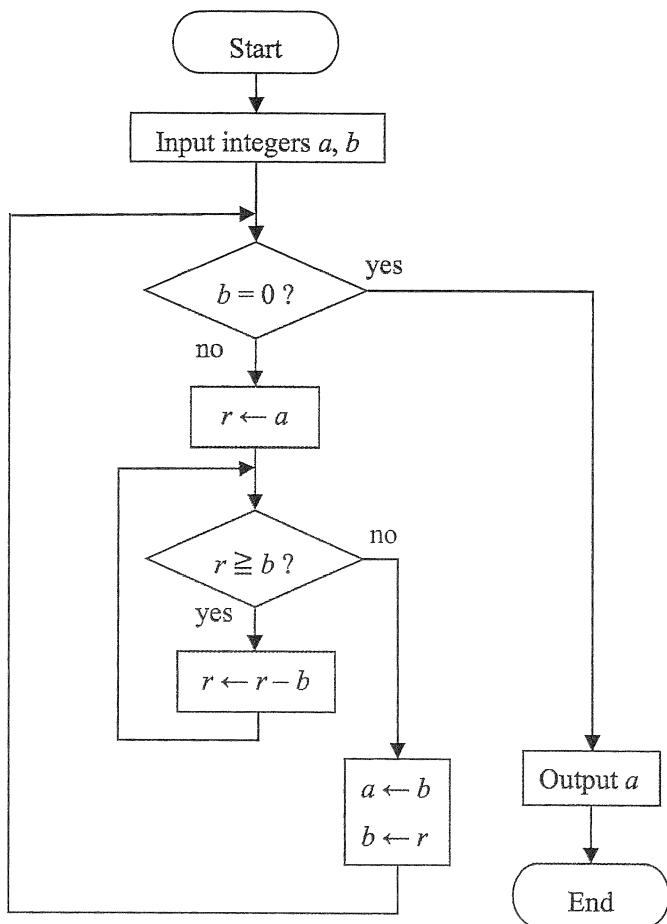
$$\frac{\partial L(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = \sum_{i=1}^n (y_i - p(y = 1 | \mathbf{x}_i; \mathbf{w})) \mathbf{x}_i.$$

設問 1 以下の問い合わせに答えよ。

- (1) 定義域を自然数全体、値域を実数全体とする関数  $f(n), g(n)$ において、 $n \rightarrow \infty$  のとき  $|g(n)/f(n)|$  が 0 に収束するとき、 $f(n)$  は  $g(n)$  よりも漸近的な増加の勢いが大きいといふ。以下の関数①～⑥を、漸近的な増加の勢いが大きい順に並べよ。ただし、対数の底は 2 とする。
- ①  $n! - 100n^{100}$
  - ②  $n^{\log n}$
  - ③  $\log n + (100/2^n)$
  - ④  $100 \sin^2 n$
  - ⑤  $n^{100}/\log n$
  - ⑥  $(n/100) - 100$
- (2) どんなに大きい次数を持つ多項式関数よりも漸近的な増加の勢いが大きい関数を上記①～⑥の中から全て選び出せ。また、その理由を付すこと。
- (3) どんな定数  $c > 0$  に対する指数関数  $2^{cn}$  よりも漸近的な増加の勢いが大きい関数を上記①～⑥の中から全て選び出せ。また、その理由を付すこと。

(次のページに続く)

設問 2 下記のフローチャートが表す手続きに関して、問い合わせに答えよ。



- (1)  $a = 4, b = 15$  を入力として与えたときに得られる出力を答えよ。
- (2) この手続きは、正整数の組を入力したときに何を計算するものであるか、入力と出力との間の算術的な関係を述べよ。
- (3) この手続きに対して、どんな正整数の組を入力しても必ず有限ステップで終了するか否かを答えよ。また、その理由を付すこと。
- (4) 入力の少なくとも一方が 0 または負の整数であった場合、どんな動作が起こるかを説明せよ。

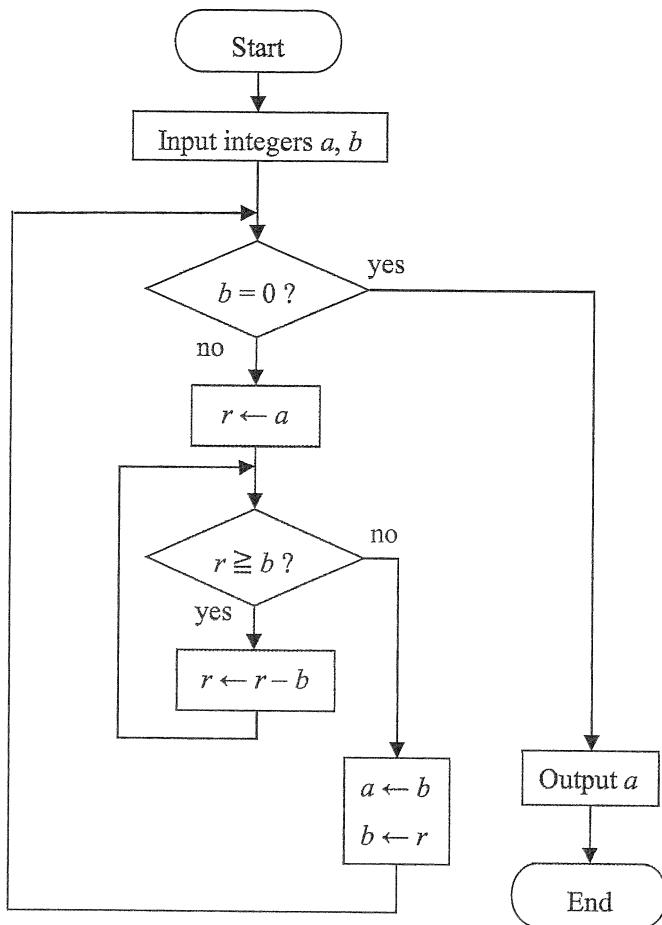
*Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.*

Q.1 Answer the following questions.

- (1) For two functions  $f(n)$  and  $g(n)$  whose domains and ranges are the set of natural numbers and the set of real numbers, respectively, we say  $f(n)$  grows asymptotically faster than  $g(n)$  if and only if  $|g(n)/f(n)|$  converges to 0 as  $n \rightarrow \infty$ . Sort the following functions ①, ..., ⑥ from the fastest to the slowest in terms of asymptotical growth. Note that the base of the logarithm is 2.
  - ①  $n! - 100 n^{100}$
  - ②  $n^{\log n}$
  - ③  $\log n + (100 / 2^n)$
  - ④  $100 \sin^2 n$
  - ⑤  $n^{100} / \log n$
  - ⑥  $(n / 100) - 100$
- (2) List all the functions in the above ①, ..., ⑥ that grow asymptotically faster than any polynomial function of any large degree, and explain why.
- (3) List all the functions in the above ①, ..., ⑥ that grow asymptotically faster than the exponential function  $2^{cn}$  for any constant  $c > 0$ , and explain why.

(continued on the next page)

Q.2 Answer the questions on the procedure shown by the following flowchart.



- (1) Answer the output of this procedure for the input  $a = 4, b = 15$ .
- (2) What is calculated by this procedure if a pair of positive integers  $a$  and  $b$  is input? Answer the arithmetic relation between the input and the output.
- (3) Answer whether this procedure terminates in a finite number of steps for any pair of positive integers, and explain why.
- (4) Explain the behavior of this procedure if at least one of the input integers is less than or equal to zero.

計算機のパイプライン処理に関する以下の設問に答えよ。ただしパイプラインは命令フェッチ (IF), レジスタ読み出し (RR), ALU 動作 (ALU), データアクセス (DA), レジスタ書き込み (RW) の 5 ステージから構成されるとする。また計算機は語のロード (lw) とストア (sw), 加算 (add), 分岐 (beq) の 4 命令のみを持ち、それぞれのアセンブリ言語としての意味および各ステージで要する処理時間は表 1 の通りとする。

表 1 : 各命令の例および意味と各ステージで要する処理時間 (単位 picoseconds)

命令	例	意味	IF	RR	ALU	DA	RW
lw	lw \$s1, 8(\$s2)	\$s1=メモリ[\$s2+8]	200	100	200	200	100
sw	sw \$s1, 12(\$s2)	メモリ[\$s2+12]=\$s1	200	100	200	200	N/A
add	add \$s1, \$s2, \$s3	\$s1=\$s2+\$s3	200	100	200	N/A	100
beq	beq \$s1, \$s2, L1	if (\$s1==\$s2) goto L1	200	100	200	N/A	N/A

設問 1 すべての命令が 1 クロックサイクルを要する単一サイクルの場合と、パイプライン化した場合それにおける、命令間の平均間隔時間を導出せよ。

設問 2 パイプライン処理では、次のクロックサイクルで次の命令を実行できないパイプラインハザードの種類として構造ハザード、データハザード、制御ハザードが知られている。それについてハザードの原因を説明せよ。

設問 3 図 1 の命令で生じるハザードを解決する方法として、パイプラインステージ間を結ぶフォワーディングまたはバイパッシングと呼ばれる仕組みが知られている。その概要を説明するとともに、パイプラインステージをどのように結べばよいか述べよ。

設問 4 図 2 に示す部分的な C 言語のコードから図 3 の命令が生成されたとする。ただしデータは全てメモリ上に存在し、\$t0 からのオフセットでアクセスできるとする。図 3 のコードからハザードを見つけ、パイプラインをストールさせないように並べ替えよ。ただし設問 3 のフォワーディングがパイプラインに備わっていると仮定すること。

```
add $s0, $t0, $t1
add $t2, $s0, $t3
```

図 1

```
A = B + E;
C = B + F;
```

図 2

```
lw $t1, 0($t0)
lw $t2, 4($t0)
add $t3, $t1, $t2
sw $t3, 12($t0)
lw $t4, 8($t0)
add $t5, $t1, $t4
sw $t5, 16($t0)
```

図 3

*Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.*

Answer the following questions about pipelining for computers. In what follows, the pipeline is assumed to have five stages consisting of instruction fetch (IF), register read (RR), ALU operation (ALU), data access (DA), and register write (RW). The computer is assumed to have only four instructions: load word (lw), store word (sw), add (add), and branch (beq) as shown in Table 1.

Table 1: An example and meaning of each of the four instructions, and the processing time of each of the five stages in picoseconds.

Instruction	Example	Meaning	IF	RR	ALU	DA	RW
lw	lw \$s1, 8(\$s2)	\$s1=MEMORY[\$s2+8]	200	100	200	200	100
sw	sw \$s1, 12(\$s2)	MEMORY[\$s2+12]=\$s1	200	100	200	200	N/A
add	add \$s1, \$s2, \$s3	\$s1=\$s2+\$s3	200	100	200	N/A	100
beq	beq \$s1, \$s2, L1	if (\$s1==\$s2) goto L1	200	100	200	N/A	N/A

Q.1 Compute the average time between instructions of a single-cycle implementation, in which all instructions take one clock cycle, and that of a pipelined implementation.

Q.2 There are situations in pipelining when the next instruction cannot be executed in the following clock cycle. These events are called hazards, and there are three different types: structural hazards, data hazards, and control hazards. Explain why each of them occurs.

Q.3 The two instructions in Figure 1 cause a hazard. To solve the hazard, a method called forwarding or bypassing that connects pipeline stages is known. Explain this method and show what pipeline stages should be connected.

Q.4 Consider the code segment in C language in Figure 2, and its corresponding instructions in Figure 3, where all variables are in memory and are addressable as offsets from \$t0. Find hazards and reorder the instructions to avoid any pipeline stalls. Assume that the forwarding in Q.3 is implemented in the pipeline.

Figure 1

add \$s0, \$t0, \$t1
add \$t2, \$s0, \$t3

Figure 2

A = B + E;
C = B + F;

Figure 3

lw \$t1, 0(\$t0)
lw \$t2, 4(\$t0)
add \$t3, \$t1, \$t2
sw \$t3, 12(\$t0)
lw \$t4, 8(\$t0)
add \$t5, \$t1, \$t4
sw \$t5, 16(\$t0)

設問 1 下記の間に答えよ.

- (1) 変数変換  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  のヤコビ行列およびその行列式を求めよ.
- (2) 積分  $I$  の結果を求めよ.

$$I = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \quad D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R \}, \quad R > 0$$

- (3) (2) の  $I$  について, 次の極限を求めよ.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I$$

- (4) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

- (5) 次式で定義される  $x > 0$  の関数  $\Gamma(x)$  について,  $\Gamma(1/2)$  の値を求めよ.

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

設問 2 下記の間に答えよ. ただし, 行列  $A$  は次式で与えられる. また,  $a$  は実数である.

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

- (1) 行列  $A$  の固有値と固有ベクトルを求めよ.
- (2)  $n$  を正整数とする.  $A^n$  を求めよ.

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Q.1 Answer the following questions.

- (1) Find the Jacobi matrix and its determinant of the transformation  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ .
- (2) Evaluate the following integral  $I$ .

$$I = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \quad D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R \}, \quad R > 0$$

- (3) Find the following limit, where  $I$  is defined in (2).

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I$$

- (4) Show that

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

- (5) Find the value of  $\Gamma(1/2)$ , where  $\Gamma(x)$  is a function of  $x > 0$  defined by

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Q.2 A matrix  $A$  is given by

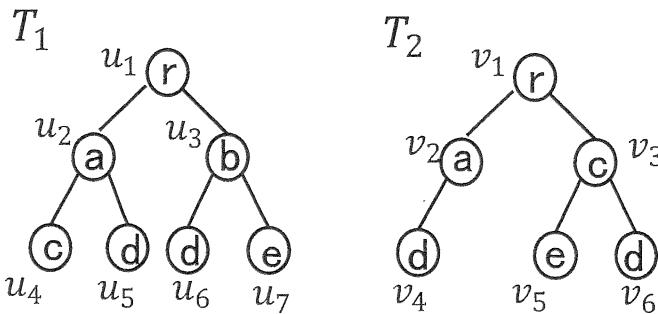
$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix},$$

where  $a$  is a real number. Answer the following questions.

- (1) Find the eigenvalues and eigenvectors of matrix  $A$ .
- (2) Let  $n$  be a positive integer. Find  $A^n$ .

問題は2ページあるので注意すること

下図の  $T_1$  と  $T_2$  は根付き木であり、各頂点にはラベルがついている。 $U = \{u_1, \dots, u_7\}$  と  $V = \{v_1, \dots, v_6\}$  は、それぞれ  $T_1$  と  $T_2$  の頂点集合であり、 $u_1$  と  $v_1$  が根である。共通の親を持つ頂点間の順序を区別しない木を無順序木という。頂点の削除、頂点の挿入、ラベルの置換により  $T_1$  を  $T_2$  へ変形する編集操作列を考える。なお、頂点の削除は根以外にのみ定義され、親が  $v_p$  である頂点  $v$  を削除すると、 $v$  の各子頂点は  $v_p$  の子になる。また、ある頂点  $v_p$  の子として  $v$  を挿入する時、 $v_p$  の子頂点集合の一部が選ばれ  $v$  の子になる。挿入された頂点を根にすることはできない。ラベルの置換は頂点のラベルを変更する。例えば  $T_1$  と  $T_2$  が無順序木の時、 $T_1$  に対して「 $u_4$  を削除」、「 $u_3$  を削除」、「ラベルが  $c$  の頂点を  $u_1$  の子かつ  $u_6$  と  $u_7$  の親として挿入」により、3回の編集操作で  $T_1$  を  $T_2$  へ変形できる。



設問1  $T_1$  と  $T_2$  が無順序木である時、以下の(1)と(2)に答えよ。

- (1) 2回の編集操作で  $T_1$  を  $T_2$  へ変形する過程を、1操作ごとに図示せよ。
- (2) 1回の編集操作だけでは  $T_1$  を  $T_2$  へ変形できない理由を説明せよ。

次に、 $u \in U, v \in V$  であるペア  $(u, v)$  の集合で、同じ頂点が重複して現れないものをマッチングと呼ぶ。マッチング  $M$  が「祖先と子孫の関係を保存する」とは、任意の  $(u, v)$ ,  $(u', v') \in M$  に対し、 $u$  が  $u'$  の祖先である必要十分条件が、 $v$  が  $v'$  の祖先であることである。 $(u, v) \in M$  に対し、 $u$  と  $v$  が同じラベルの時  $f(u, v) = 2$  で、異なるラベルの時  $f(u, v) = 1$  とし、 $W(M) = \sum_{(u,v) \in M} f(u, v)$  と定義する。

設問2  $T_1$  と  $T_2$  が無順序木である時、 $W(M)$  が最大となる「祖先と子孫の関係」を保存するマッチング  $M$  を1つ示せ。

次ページへ続く

次に、共通の親を持つ頂点間の順序を区別する木を順序木という。順序木では頂点  $u$  と  $u'$  が祖先と子孫の関係がない時、 $u$  と  $u'$  の左右関係が一意に決まる。例えば  $T_1$  の  $(u_2, u_6)$  は(左, 右)の関係であり、 $(u_3, u_4)$  は(右, 左)の関係である。

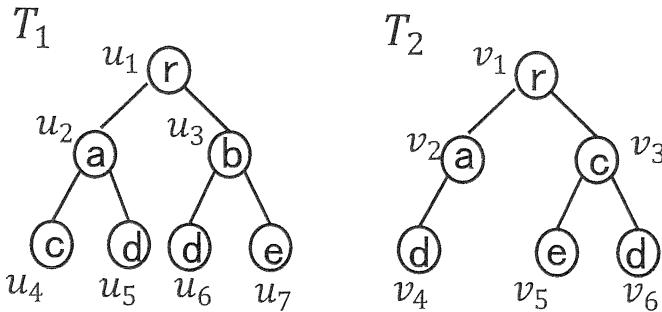
設問3  $T_1$  と  $T_2$  が順序木である時、 $W(M)$  が最大となる「祖先と子孫の関係」を保存するマッチング  $M$  を3つ示せ。ただし任意の  $(u, v), (u', v') \in M$  に対し、 $u$  と  $u'$  が祖先と子孫の関係ではなく、 $v$  と  $v'$  も祖先と子孫の関係がない時、 $(u, u')$  の左右関係と、 $(v, v')$  の左右関係は一致するものとする。

設問4  $T_1$  と  $T_2$  が順序木である時、4回の編集操作で  $T_1$  を  $T_2$  へ変形する編集操作列を1つ選び、変形する過程を1操作ごとに図示せよ。ただし、順序木の頂点の削除において、削除された頂点以外の頂点間の左右関係は保存される。同様に順序木の頂点の挿入においても、挿入された頂点以外の頂点間の左右関係は保存される。

設問5 2つの木の根頂点が必ず対になるマッチングのみを考える。上記と同様に定義される任意の無順序木  $T_i, T_j$  に対し、 $T_i$  を  $T_j$  に変形するのに必要な最小の編集操作回数  $D$  と、 $T_i, T_j$  間のマッチングにおける最大の  $W(M)$  の関係を、 $|T_i|$  と  $|T_j|$  を用いて等式で示せ。ただし  $|T_i|, |T_j|$  はそれぞれ  $T_i, T_j$  の頂点数とする。

**Note that M-2 is written in two pages.**

$T_1$  and  $T_2$  in the following figure are rooted trees whose nodes are labeled.  $U = \{u_1, \dots, u_7\}$  and  $V = \{v_1, \dots, v_6\}$  are sets of nodes of  $T_1$  and  $T_2$ , respectively, and  $u_1$  and  $v_1$  are the roots. In unordered trees, the order of nodes that have a common parent node is ignored. We consider edit operation sequences that transform  $T_1$  to  $T_2$  by “deletion of a node,” “insertion of a node” and “substitution of a label.” Deletion is defined only for non-root nodes. When a node  $v$  is deleted, children of  $v$  become children of the parent of  $v$ . When  $v$  is inserted as a child of a node  $v_p$ , some children of  $v_p$  become children of  $v$ . The inserted node cannot become the root. Substitution changes the label of a node. For example, when  $T_1$  and  $T_2$  are unordered trees, we can transform  $T_1$  to  $T_2$  in three edit operations on  $T_1$  that consist of “deletion of  $u_4$ ,” “deletion of  $u_3$ ” and “insertion of a node whose label is  $c$  as a child of  $u_1$  and as a parent of  $u_6$  and  $u_7$ .”



Q.1 Suppose that  $T_1$  and  $T_2$  are unordered trees. Answer the following (1) and (2).

- (1) Draw each operation of a process that transforms  $T_1$  to  $T_2$  in two edit operations.
- (2) Explain why  $T_1$  cannot be transformed to  $T_2$  in one edit operation.

Next, a set of pairs  $(u, v)$  with  $u \in U, v \in V$  is called a matching, if a node does not appear multiple times. We say that a matching  $M$  preserves the “ancestor-descendant relation” if the following holds. For any  $(u, v), (u', v') \in M$ ,  $u$  is an ancestor of  $u'$  if and only if  $v$  is an ancestor of  $v'$ . For  $(u, v) \in M$ , when  $u$  and  $v$  have the same label, we define  $f(u, v) = 2$ . When the labels are different, we define  $f(u, v) = 1$ . We define  $W(M) = \sum_{(u,v) \in M} f(u, v)$  as the score of  $M$ .

Q.2 Suppose that  $T_1$  and  $T_2$  are unordered trees. Show a maximum score matching that preserves the ancestor-descendant relation.

Continued to the next page

In ordered trees, the order of nodes that have a common parent node is considered. For ordered trees, when  $u$  and  $u'$  are not in the ancestor-descendant relation, the “left-to-right order” between  $u$  and  $u'$  is uniquely defined. For example,  $(u_2, u_6)$  is in (left,right)-order, and  $(u_3, u_4)$  is in (right, left)-order.

Q.3 Suppose that  $T_1$  and  $T_2$  are ordered trees. Show three maximum score matchings that preserve the ancestor-descendant relation under the following conditions. For any  $(u, v)$ ,  $(u', v') \in M$ , when  $u$  and  $u'$  are not in the ancestor-descendant relation and  $v$  and  $v'$  are not in the ancestor-descendant relation, the left-to-right order of  $(u, u')$  matches the left-to-right order of  $(v, v')$ .

Q.4 Suppose that  $T_1$  and  $T_2$  are ordered trees. Choose one edit operation sequence that transforms  $T_1$  to  $T_2$  in four edit operations, and draw each operation of the transformation process under the following conditions. In a deletion operation on an ordered tree, the left-to-right order is preserved for any node pair except for the deleted node. Similarly, in an insertion operation on an ordered tree, the left-to-right order is preserved for any node pair except for the inserted node.

Q.5 We consider only the matchings that match the roots of two trees. For arbitrary unordered trees  $T_i$  and  $T_j$  defined similarly as above, show an equation using  $|T_i|$  and  $|T_j|$  that describes the relation between the minimum number  $D$  of necessary edit operations that transform  $T_i$  to  $T_j$  and the maximum score  $W(M)$  of a matching  $M$  between  $T_i$  and  $T_j$ . Here,  $|T_i|$  and  $|T_j|$  are the numbers of nodes of  $T_i$  and  $T_j$ , respectively.

設問 以下の確率密度関数で与えられる確率分布を  $D(\alpha, \lambda)$  とする.

$$f(x; \alpha, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0, \lambda > 0)$$

ただし  $\Gamma(\alpha)$  はガンマ関数であり,  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ ,  $\Gamma(1) = 1$  である.  $X_1, \dots, X_n (n \geq 3)$  を分布  $D(1, \lambda)$  からの無作為標本,  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  を標本平均とする. 以下の問い合わせに答えよ. ただし導出過程も示すこと.

- (1)  $X_i (i = 1, \dots, n)$  の期待値  $E[X_i]$  および分散  $V[X_i]$  を求めよ.
- (2)  $X_1, \dots, X_n$  に対する母数  $\lambda$  の最尤推定量  $\hat{\lambda}$  を求めよ.
- (3)  $n\bar{X}$  が分布  $D(n, \lambda)$  に従うことを示せ. ヒント: モーメント母関数を利用できる. なお, 確率変数  $X$  のモーメント母関数は  $M_X(t) = E[e^{tX}]$  で与えられる.
- (4)  $2\lambda n\bar{X}$  が自由度  $2n$  のカイ二乗分布  $\chi_{2n}^2$  に従うことを示せ. ただし自由度  $k$  のカイ二乗分布  $\chi_k^2$  は以下の確率密度関数で与えられる.

$$g(x; k) = \begin{cases} \frac{1}{2\Gamma(\frac{k}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

- (5) 分布  $\chi_{2n}^2$  の上側  $100p$  パーセント点を  $\chi_{2n}^2(p)$  のように表すものとする. 信頼水準 (信頼係数)  $c$  での母数  $\lambda$  の信頼区間を,  $\bar{X}, n, \chi_{2n}^2(p)$  を用いて表せ. ただし,  $p$  には  $c$  を用いた数式を適宜入れること.

*Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.*

Q. Let  $D(\alpha, \lambda)$  be the probability distribution whose probability density function is

$$f(x; \alpha, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad (\alpha > 0, \lambda > 0),$$

where  $\Gamma(\alpha)$  is the gamma function, which satisfies  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$  and  $\Gamma(1) = 1$ . Suppose that  $X_1, \dots, X_n (n \geq 3)$  are a random sample from the distribution  $D(1, \lambda)$  and that

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  is the sample mean. Answer the following questions, showing your work.

- (1) Derive the expectation  $E[X_i]$  and variance  $V[X_i]$  of  $X_i (i = 1, \dots, n)$ .
- (2) Derive the maximum-likelihood estimator  $\hat{\lambda}$  for the parameter  $\lambda$  given  $X_1, \dots, X_n$ .
- (3) Show that  $n\bar{X}$  follows the distribution  $D(n, \lambda)$ . Hint: Moment-generating functions can be utilized. Here, the moment-generating function of a random variable  $X$  is given by  $M_X(t) = E[e^{tX}]$ .
- (4) Show that  $2\lambda n\bar{X}$  follows the chi-squared distribution  $\chi_{2n}^2$  with  $2n$  degrees of freedom.  
Here, the chi-squared distribution  $\chi_k^2$  with  $k$  degrees of freedom is given by the following probability density function:

$$g(x; k) = \begin{cases} \frac{1}{2\Gamma(\frac{k}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

- (5) Let  $\chi_{2n}^2(p)$  be the upper  $100p$  percentile of the distribution  $\chi_{2n}^2$ . Derive the confidence interval for the parameter  $\lambda$  with a confidence level (confidence coefficient)  $c$ . Give your answer using  $\bar{X}$ ,  $n$ , and  $\chi_{2n}^2(p)$ , where  $p$  should be replaced with an appropriate numerical expression using  $c$ .