

# 包絡線定理

三ツ國 拓真

2014/6/6

## 1 包絡線とは

包絡線とは、曲線群があるとき、その縁がなぞる曲線をいう。一般的に曲線群と書いたが、直線群の包絡線も存在する。ここでは、直線群の包絡線について説明する。

関数  $f(t, x) = tx - t^2$  について考える。

$t$  をパラメーターと見なすと、縦軸  $f(x)$  横軸  $x$  のグラフにおいて、傾き  $t$ 、切片  $-t^2$  の直線となる。このとき、 $t$  の値を変えることによっていくつもの直線が引かれる。このグラフが図1・図2。 $f(x, t)$  は  $t$  について二次関数なので平方完成することで

$$f(t, x) = -\left(t - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{4}$$

が得られ、 $f$  は  $t = x/2$  で最大値  $x^2/4$  をとることから、包絡線を表す関数を  $F(x)$  とおくと、 $F(x) = x^2/4$  となる。

## 2 包絡線定理

$$f(t, x) = tx - t^2 \tag{1}$$

$$f(t, x) = -\left(t - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{x^2}{4} \tag{2}$$

$t$  についての最大化問題の解を  $t^*(x)$  とおく。ここでは  $t^*(x) = x/2$ 。 $F(x)$  で定義される包絡線  $C$  が存在すると仮定すると、包絡線  $C$  と曲線  $f(x, t)$  は各点  $x = \bar{x}$  において接している。つまり

$$F(\bar{x}) = f(t^*(\bar{x}), \bar{x}) \tag{3}$$

$$F'(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(t^*(\bar{x}), \bar{x}) \tag{4}$$

が成り立つ。以上より、 $F'(x)$  を計算するのに  $\frac{\partial f}{\partial x}(t^*(x), x)$  を計算すればよいことがわかる。包絡線定理とは、関数  $f(t, x)$  について、 $F(x) = \max_t f(x, t)$  とし、 $F(x)$  と  $f(t, x)$  は  $x$  について微分可能で、各  $x$  に対して最大値を与える  $t$  を  $t^*(x)$  と表すとき、

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t^*(x), x) \tag{5}$$

が成り立つことである。

## Envelope Theorem

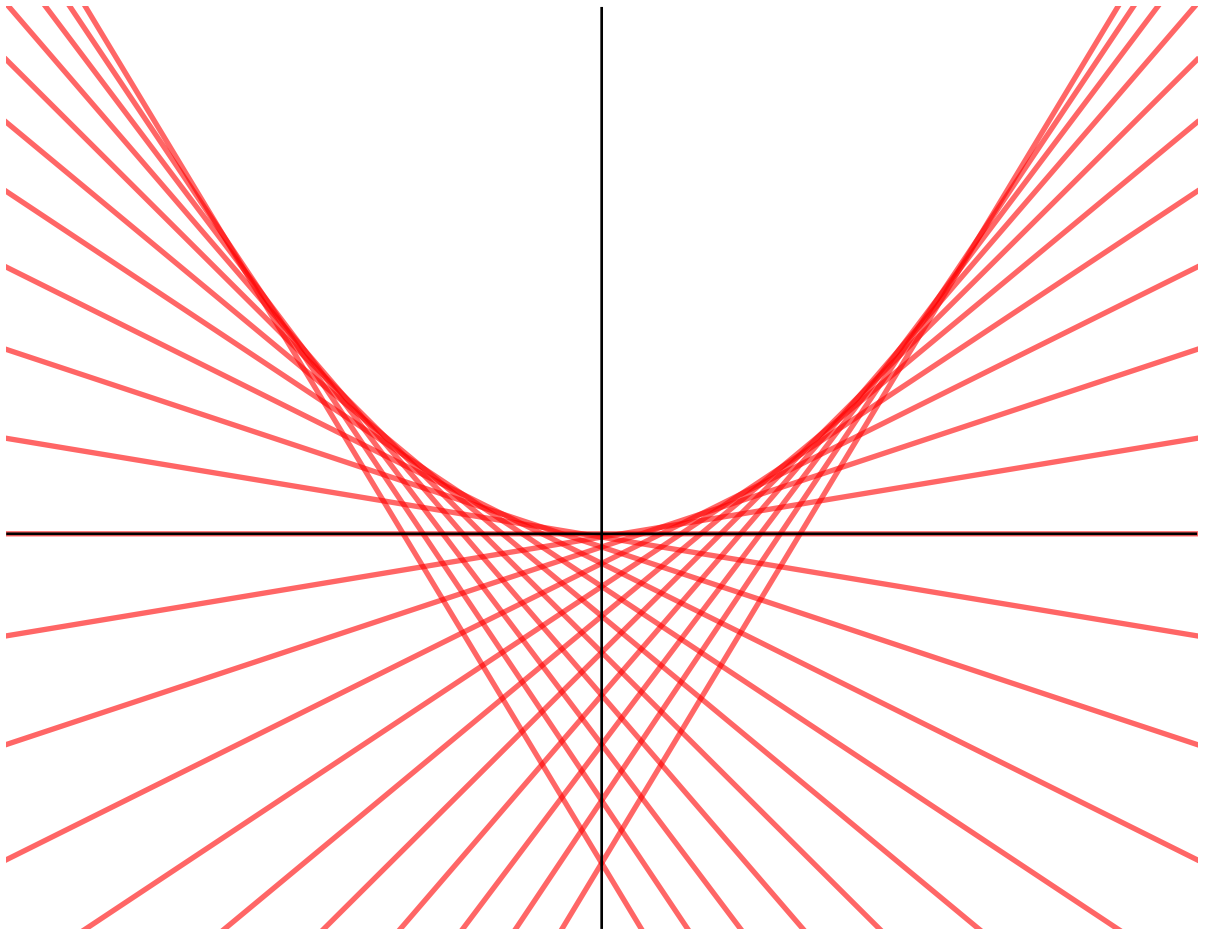


图 1: 包絡線 1

## Envelope Theorem

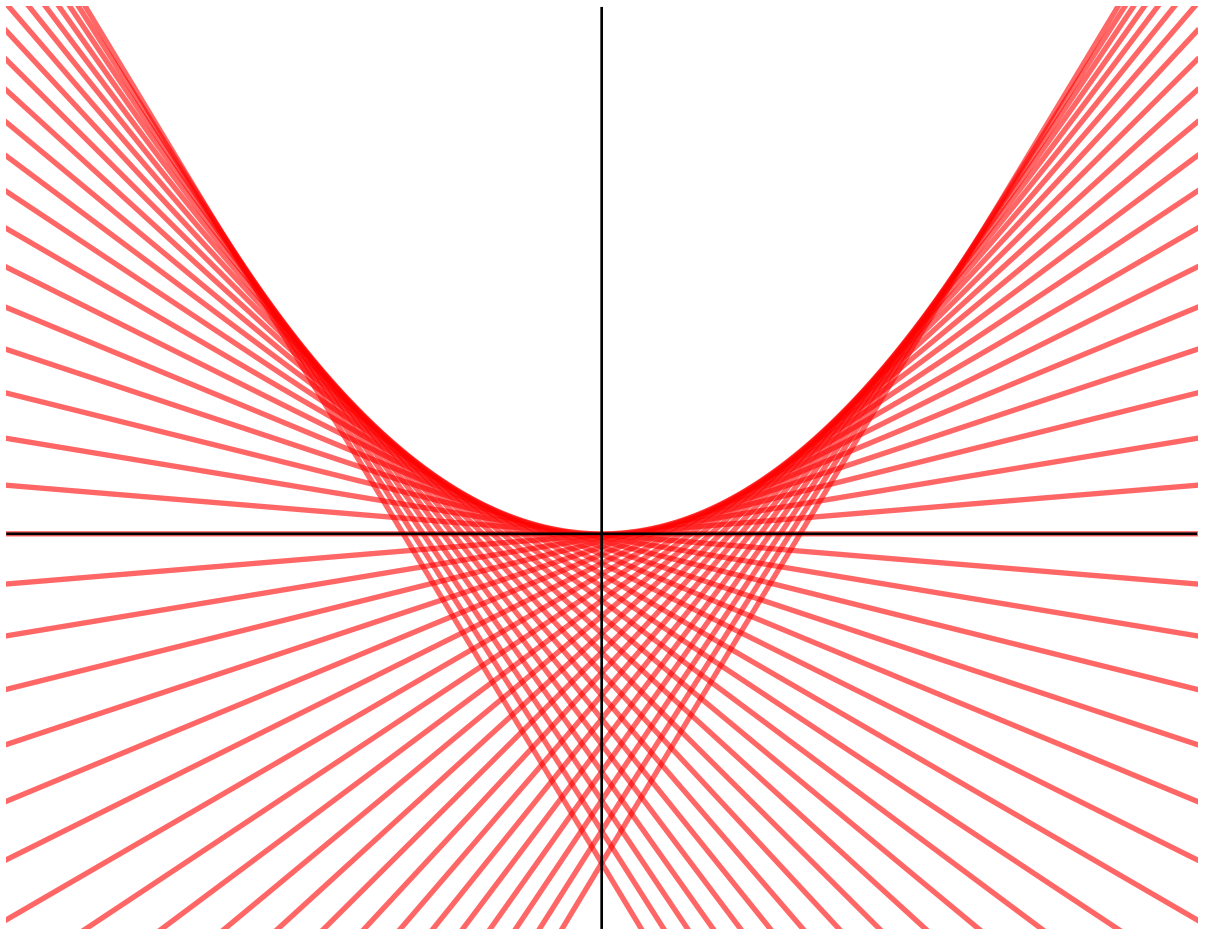


图 2: 包絡線 2

### 3 Python プログラム

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import pylab as pl
def f(x,t):
    return t * x - t**2 #包絡線のもとの関数を定義

FIGNUM = 1 #2つのグラフを作るために if を用いる
if FIGNUM == 0:
    a, b, c = 0.5, -10, 11#aは~刻み、b,cはnループの範囲と包絡線の本数
if FIGNUM == 1:
    a, b, c = 0.25, -20, 21

u = a

def subplots():
    "Custom subplots with axes through the origin"
    fig, ax = plt.subplots()

    # Set the axes through the origin
    for spine in ['left', 'bottom']:
        ax.spines[spine].set_position('zero')
    for spine in ['right', 'top']:
        ax.spines[spine].set_color('none')

    return fig, ax

fig, ax = subplots() # Call the local version, not plt.subplots()
x = np.linspace(-15, 15, 100) #xの範囲設定
plt.xlim([x.min(),x.max()]) #x軸の範囲
plt.ylim([-30,40]) #y軸の範囲
ax.set_xticks([]) #x,y軸の目盛消し
ax.set_yticks([])
fig.suptitle('Envelope Theorem', fontsize=15)
for n in range(b, c): #b~cの範囲でまわす
    y = f(x,t = n * u) #u=0.1のときはtは0.1刻みになる
    ax.plot(x, y, 'r-', linewidth=2, label='sine function', alpha=0.6)

plt.savefig('envelope' + str(FIGNUM) + '.pdf', bbox_inches='tight', pad_inches=0)
```

```
plt.show()
```

正直なところ包絡線のグラフを sample のコードからその意味を理解しながら作成するので手一杯になって工夫する余裕がなかった。Quantitative Economics の excercise でもそうだが、答えや方針を与えられて理解することはなんとかできても、自身で方針や代替案を考えることのできるレベルに至っていないように思われる。慣れの問題もあると思われるので、ゼミの時間や課題以外にも自主練習を行っていきたいと思う。まずは、短期費用曲線と長期費用曲線のグラフを描きたいと思う。

## 参考文献

[1] 尾山大輔・安田洋祐「経済学で出る包絡線定理」『経済セミナー』2011年10・11月号.