МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники
15.04.06 Робототехника и искусственный интеллект

ОТЧЕТ
по дисциплине
«Имитационное моделирование робототехнических систем»

Практическая работа №2
МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ С ПРУЖИНОЙ И ДЕМПФЕРОМ

Студент:
Группа № R4136c *507170 О.Е. Попова*

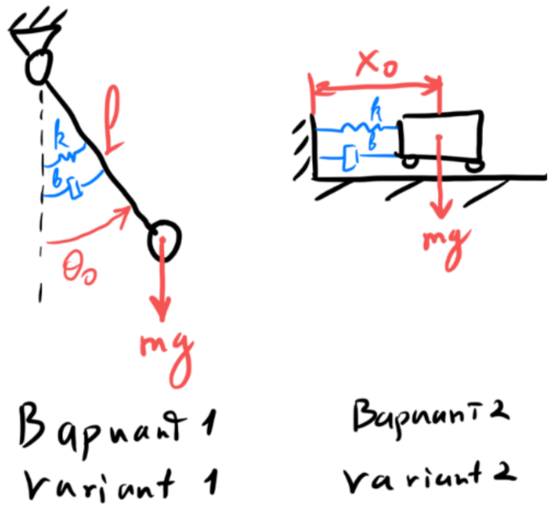
Предподаватель:
Ассистент ФСУиР *373529 Е.А. Ракшин*

Санкт-Петербург 2025

1 Задание на практическую работу

1. Look in the table and find yourself:

2. Compose the ODE from the mass spring damper system using variants below:



Use method described in `SRS/lecture_1/lecture_1.pdf`.

3. **Try** to solve analytically the ODE you composed. If you can't solve it, describe the reason and why?

4. Compare results of these methods with analytical solution (if it exists), dicsuss and conclude your thoughts in the .pdf report.

5. Name of the report should be "Your_ISU_number_YourName_task2.pdf"

Таблица 1 – Данные для моделирования системы с пружиной и демпфером

Вариант	*m*	*k*	*b*	x_0
2	0.2 кг	14.8 Н/м	0.015 Н*с/м	0.96 м

2 Моделирование системы

Для того, чтобы промоделировать систему, нужно знать ее уравнение динамики. Воспользуемся методом, описанным в файле lecture_1. В нем для описания динамики системы используется Лагранжиан (2.1), который в свою очередь является разностью между кинетической (2.2) и потенциальной (2.3) энергиями. Внешней силой в этой системе является сила демпфирования, представленная в уравнении (2.4).

$$L(x, \dot{x}) = K(x, \dot{x}) - P(x), \tag{2.1}$$

$$K(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \tag{2.2}$$

$$P(x) = \frac{1}{2} k x^2, \tag{2.3}$$

$$Q = -b\dot{x}. \tag{2.4}$$

Используем Лагранжиан для записи уравнения Эйлера второго порядка (2.5), и таким образом получим уравнение (2.7), которое ляжет в основу функции spring_damper_system():

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q, \tag{2.5}$$

$$m\ddot{x} + kx = -b\dot{x}, \tag{2.6}$$

$$\ddot{x} = \left(-\frac{0.015}{0.2}\right)\dot{x} + \left(-\frac{14.8}{0.2}\right)x. \tag{2.7}$$

Используя функции, представленные в файле modeling_n_simulation, промоделируем поведение системы. Для выполнения задачи достаточно задать начальное условие и заменить функцию mass_spring_system() на spring_damper_system(), представленную ниже в листинге 1. Эта функция принимает на вход вектор состояния системы и возвращает производную вектора состояния. Параметры моделирования в таблице 2.

Листинг 1 – Функция динамики системы и начальное условие

```
def spring_damper_system(state:list):

    x, dx = state
    b = 0.015
    m = 0.2
    g = 9.8
    k = 14.8
    ddx = - 1/m * (b*dx + k*x)
    return np.array([dx, ddx])

x0 = np.array([0.96, 0])
```

Таблица 2 – Параметры моделирования

x_0, н/у положения	$\dot{x}_0$, н/у скорости	T, время моделир.	h, шаг моделир.
0.96	0.0	10	0.01

Результат моделирования системы представлен на рисунке 1. Обратим внимание, что поведение у системы имеет колебательный и затухающий характер. Основываясь на этом выводе, предположим, что характеристические корни уравнения системы являются комплексно-сопряженными с отрицательной действительной частью.

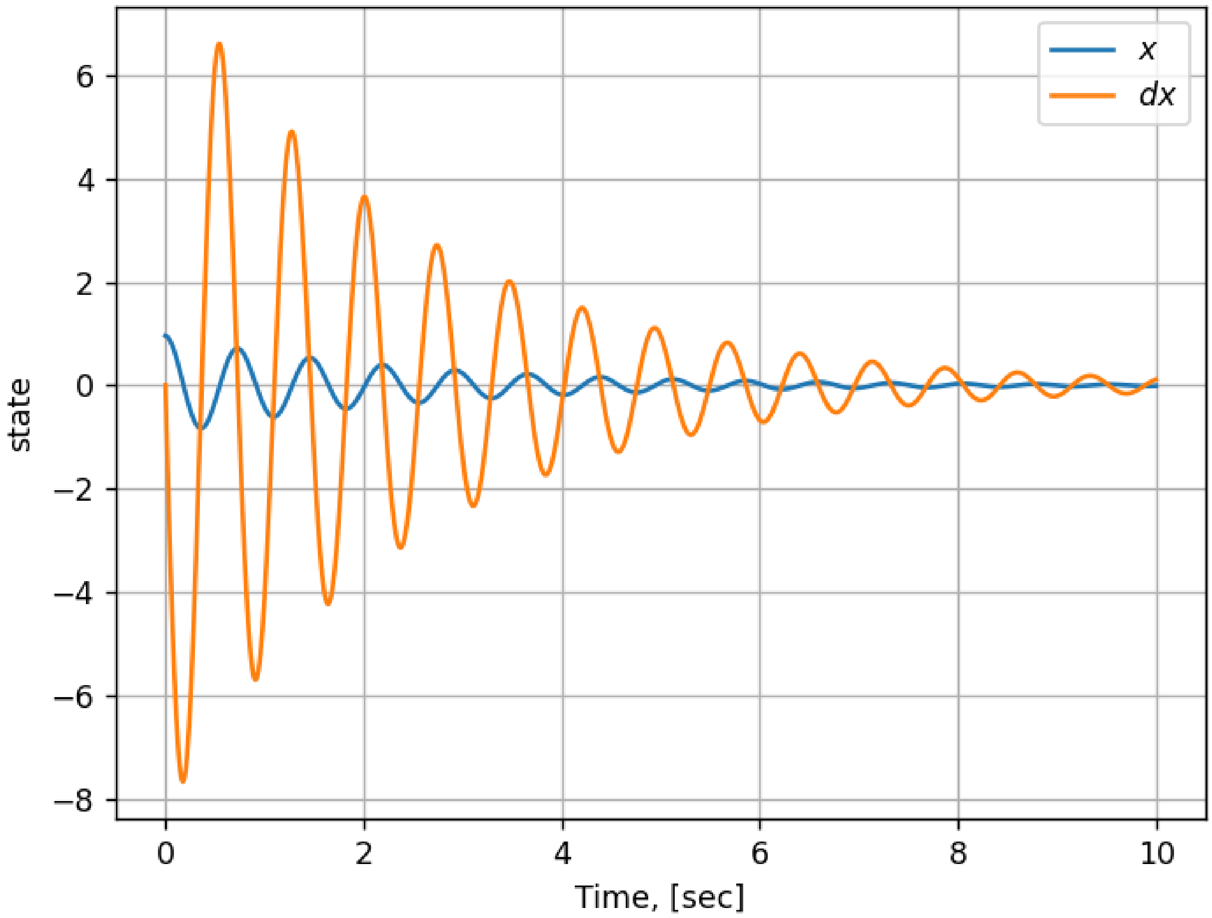


Рисунок 1 – График положения и скорости во времени

3 Аналитическое решение

Попробуем найти аналитическое решение системы и проверить гипотезу о корнях характеристического уравнения. Вычислим аналитически корни характеристического уравнения этой системы. Составим характеристическое уравнение для (2.7) и решим его:

$$\lambda^2 + \frac{0.015}{0.2}\lambda + \frac{14.8}{0.2} = 0, \tag{3.1}$$

$$\lambda_{1,2} = -0.0375 \pm j8.6. \tag{3.2}$$

Корни характеристического уравнения получились комплексно-сопряженными, причем их действительная часть отрицательная. Гипотеза подтверждена.

Используя знания из курса высшей математики, запишем ответ в общем виде:

$$x = C_1 e^{-0.0375t} \cos(8.6t) + C_2 e^{-0.0375t} \sin(8.6t). \tag{3.3}$$

4 Выводы

Система массы с пружинкой и демпфером, заданная варианту 2, имеет колебательный и затухающий характер. При аналитическом решении это можно сказать по тому, что корни характеристического уравнения получились комплексно-сопряженными и их действительная часть отрицательная, а при численном решении это видно по графикам.

Сравнивая аналитический и численный методы решения ДУ, я порекомендовала бы использовать численный метод решения, так как он проще в исполнении и демонстрирует поведение системы в нужный промежуток времени.