МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники
15.04.06 Робототехника и искусственный интеллект

ОТЧЕТ
по дисциплине
«Имитационное моделирование робототехнических систем»

Практическая работа №1
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДУ

Студент:
Группа № R4136c *507170 О.Е. Попова*

Предподаватель:
Ассистент ФСУиР *373529 Е.А. Ракшин*

Санкт-Петербург 2025

1 Задание на практическую работу

1. Look in the table and find yourself:
2. Look in the "Integrators.ipynb" file and use these functions for your task.
3. Solve analytically the ODE in the form of:

$a \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = d$

4. From the list take coefficients of your ODE and solve them with three integrators: Explicit/Implicit Euler, Rung-Kutta methods.
5. Compare results of these methods with analytical solution, dicsuss and conclude your thoughts in the .pdf report.
6. Name of the report should be "Your_ISU_number_YourName_task1.pdf"

Таблица 1 – Компоненты дифференциального уравнения системы

a	b	c	d
8.31	-6.82	-7.53	-4.44

2 Аналитическое решение

Дифференциальное уравнение второго порядка системы:

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = d, \tag{2.1}$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{a}\dot{x} + \frac{c}{a}x = \frac{d}{a}, \tag{2.2}$$

$$\ddot{x} = \left(-\frac{6.82}{8.31}\right)\dot{x} + \left(-\frac{7.53}{8.31}\right)x + \left(-\frac{4.44}{8.31}\right). \tag{2.3}$$

Вычислим аналитически корни характеристического уравнения этой системы. Составим характеристическое уравнение для (2.2) и решим его:

$$\lambda^2 + \frac{-6.82}{8.31}\lambda + \frac{-7.53}{8.31} = 0, \tag{2.4}$$

$$\lambda_1 = -0.6262, \qquad \lambda_2 = 1.4469. \tag{2.5}$$

Корни характеристического уравнения получились действительными, при чем один из корней отрицательный, а другой положительный. В этом случае можно уже утверждать, что система не является устойчивой.

Используя знания из курса высшей математики, найдем частное решение ДУ и запишем ответ в общем виде:

$$\tilde{x} = 0.5897, \tag{2.6}$$

$$x = C_1 e^{-0.6262t} + C_2 e^{1.4469t} + 0.5897. \tag{2.7}$$

Для того, чтобы убедиться, что система неустойчива, промоделируем систему в MATLAB Simulink. Схема системы представлена на рисунке 1.

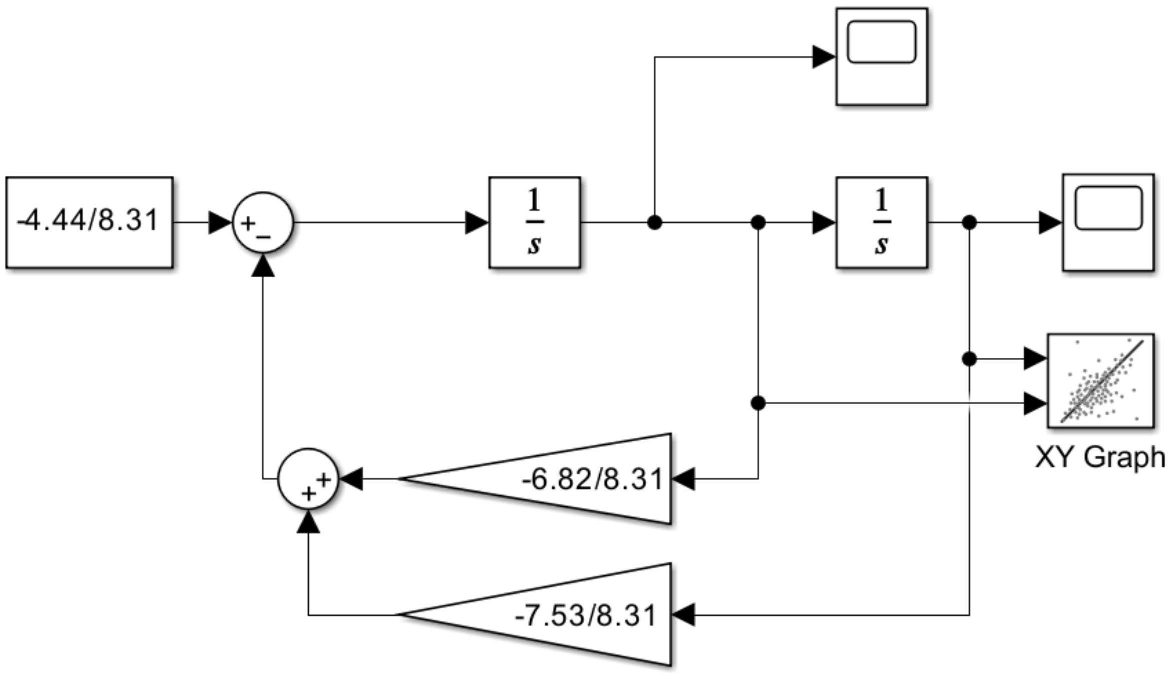

Рисунок 1 – Схема системы в MATLAB Simulink

Для моделирования использовался метод Рунге-Кутта с параметрами, представленными в таблице 2. Результаты моделирования показаны на рисунках 2 и 3.

Таблица 2 – Параметры моделирования

x_0, н/у положения	$\dot{x}_0$, н/у скорости	T, время моделир.	h, шаг моделир.
0.1	0.0	1	0.01

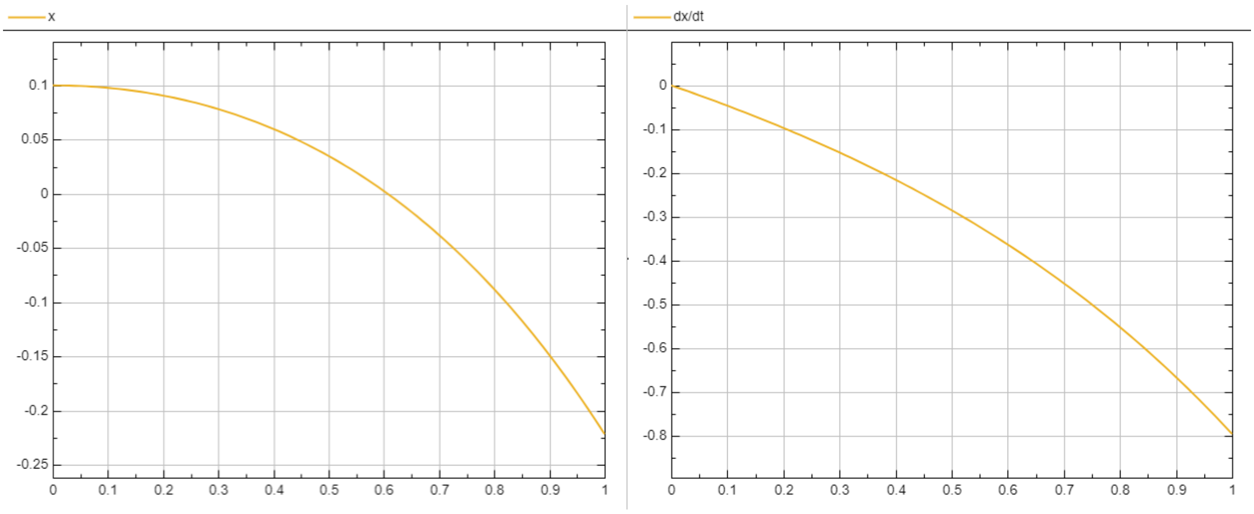

Рисунок 2 – Графики положения и скорости во времени

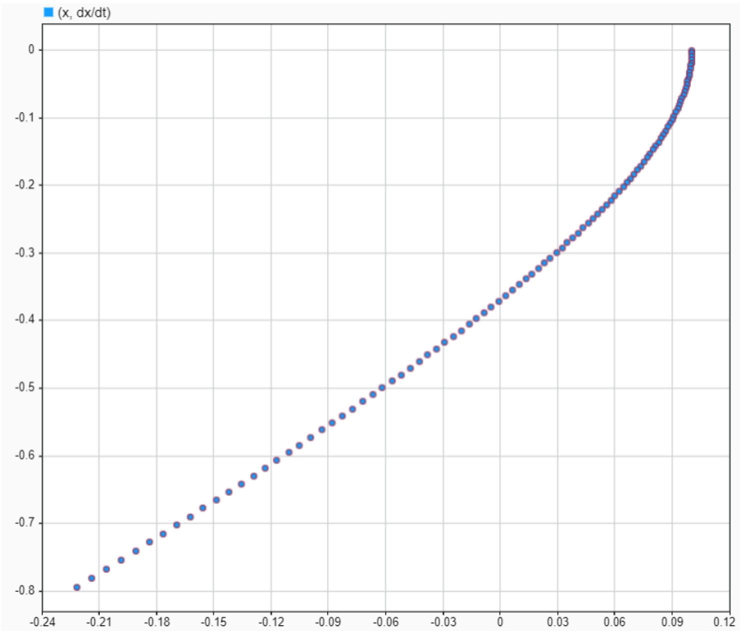

Рисунок 3 – Фазовый портрет системы

3 Решение численными методами Эйлера и Рунге-Кутта

Используя функции, представленные в файле integrators, промоделируем поведение системы, используя три численных метода решения ДУ. Для выполнения задачи достаточно заменить функцию pendulum_dynamics() на system_dynamics(), представленную ниже в листинге 1. Эта функция принимает на вход вектор состояния системы, и возвращает производную вектора состояния.

Листинг 1 – Функция динамики системы

```python
def system_dynamics(y):
    """
    a*ddx + b*dx + c*x = d
    System dynamics: ddx = (d - b*dx - c*x)/a
    State vector y = [x, dx]
    Initial state [0.1 0.0]
    """
    a = 8.31
    b = -6.82
    c = -7.53
    d = -4.44

    x = y[0]
    dx = y[1]

    ddx = (d - b*dx - c*x)/a

    return np.array([dx, ddx])
```

Результат моделирования системы, используя явный и неявный методы Эйлера и метод Рунге-Кутта, продемонстрирован на рисунке 4. Сравнивая визуально рисунки 2–4, получившиеся результаты схожи, и утверждение о неустойчивости системы доказано.

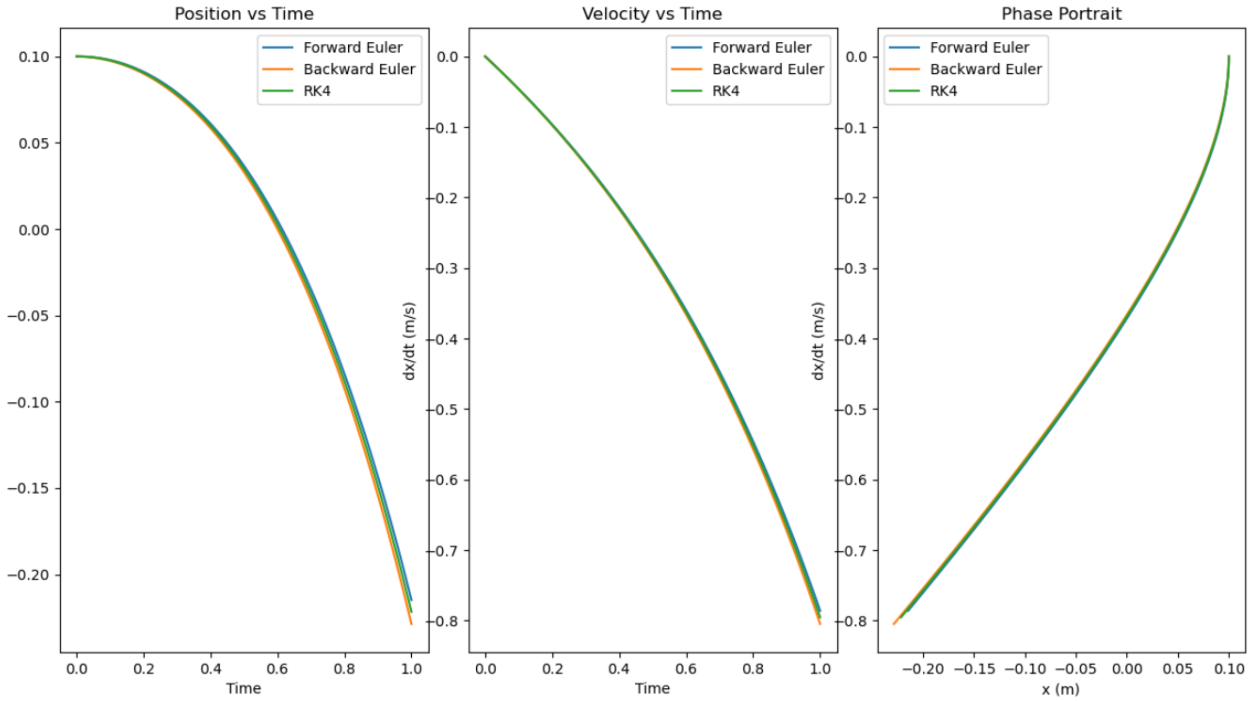

Рисунок 4 – Результат моделирования системы с помощью трех численных методов

Так как метод Рунге-Кутта имеет четвертый порядок и является стандартом в моделировании робототехнических систем, сравним методы Эйлера с ним (см. рисунок 5).

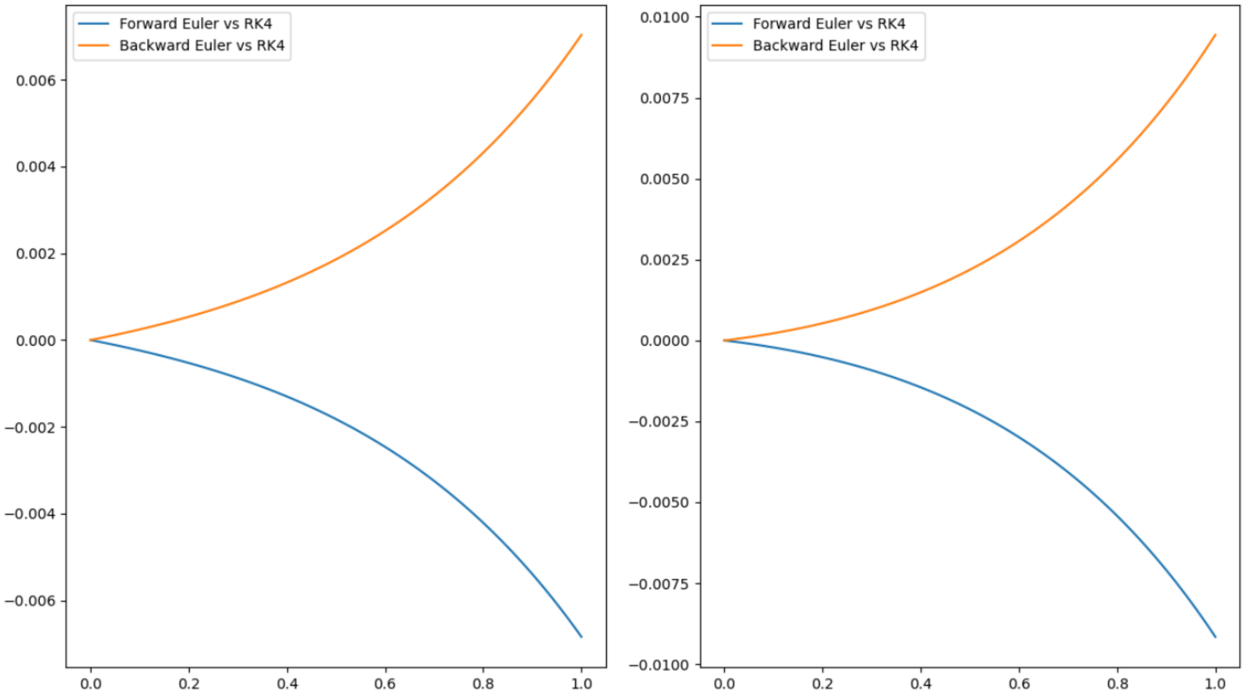

Рисунок 5 – Разница между методом Рунге-Кутта и методами Эйлера

4 Выводы

Система, заданная дифференциальным уравнением (2.3), оказалась неустойчивой. При аналитическом решении ДУ это можно было сказать по наличию положительного корня характеристического уравнения, а при численном решении ДУ это видно по графикам.

Сравнивая методы численного решения ДУ, очевидно, что метод Рунге-Кутта высокого порядка является самым точным, однако для данной системы ошибка между ним и методами Эйлера приемлема. В зависимости от задачи моделирования: скорость и простота вычислений или точность, в первом случае рекомендую использовать любой из методов Эйлера, во втором случае – метод Рунге-Кутта.