МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)
Факультет системы управления и робототехники

ОТЧЕТ
по дисциплине
«Задачи и подходы современной робототехники»

по теме:
Лабораторная работа №1 - Аналитическое решение ОДУ

Студент:
Группа № R4133c *Шумкарбек кызы Нурзада*

Предподаватель:
инженер, ассистент *Ракшин Е. А.*

Санкт-Петербург 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Основная часть

В данной работе проводится аналитическое решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. ОДУ заданного вида:

$$a \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = d$$

Заданы постоянные коэффициенты ОДУ: $a = -0.68$, $b = 3.91$, $c = 7.85$, $d = -0.8$. Решение уравнения тремя интеграторами: явным и неявным методами Эйлера, методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Результаты сравниваются с аналитическим решением.

Алгоритм решения ОДУ аналитическим методом

Общий вид уравнения:

$$a \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = d$$

Подставляем коэффициенты:

Шаг 1: Записываем уравнение в стандартной форме

$$-0.68 \cdot x'' + 3.91 \cdot x' + 7.85 \cdot x = -0.8$$

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$-0.68 \cdot x'' + 3.91 \cdot x' + 7.85 \cdot x = -0.8$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$-0.68\lambda^2 + 3.91\lambda + 7.85 = 0$$

$$0.68\lambda^2 - 3.91\lambda - 7.85 = 0$$

$$D = (-3.91)^2 - 4 \cdot (0.68) \cdot (-7.85) = 15.2881 + 21.352 = 36.6401$$

$$\lambda_{1,2} = [3.91 \pm \sqrt{36.6401}] / (2 \cdot 0.68) = [3.91 \pm 6.053] / 1.36$$

$$\lambda_1 = (3.91 - 6.053)/1.36 = -2.143/1.36 = -1.576$$

$$\lambda_2 = (3.91 + 6.053)/1.36 = 9.963/1.36 = 7.326$$

Общее решение однородного уравнения:

$$x_{\square}(t) = C_1 \cdot e\text{^}(7.326t) + C_2 \cdot e\text{^}(-1.576t)$$

Так как правая часть константа, ищем в виде $x_{\square}(t) = K$;

Определяем $x_{□} = K$, $x_{□}' = 0$, $x_{□}'' = 0$

$-0.68 \cdot 0 + 3.91 \cdot 0 + 7.85 \cdot K = -0.8$

$7.85K = -0.8$

$K = -0.8 / 7.85 \approx -0.102$

Частное решение: $x_{□}(t) = -0.102$;

Полное решение: подставляем общее и частное решения

$x(t) = x_{□}(t) + x_{□}(t) = C_1 \cdot e\^(7.326t) + C_2 \cdot e\^(-1.576t) - 0.102$

Находим константы $C_1 + C_2$(при $x(0)=0$, $x'(0)=0$)

$x(0) = C_1 + C_2 - 0.102 = 0$

$C_1 + C_2 = 0.102$

$x'(t) = 7.326 \cdot C_1 \cdot e\^(7.326t) - 1.576 \cdot C_2 \cdot e\^(-1.576t)$

$x'(0) = 7.326C_1 - 1.576C_2 = 0$

Решаем систему:

$C_1 + C_2 = 0.102$ $\qquad$ $C_1 + 4.65C_1 = 0.102$

$7.326C_1 - 1.576C_2 = 0$ $\qquad$ $C_2 = (7.326/1.576) \cdot C_1 \approx 4.65C_1$

Подставляем в первое уравнение:

$C_1 + 4.65C_1 = 0.102$

$5.65C_1 = 0.102$

$C_1 \approx 0.0181$

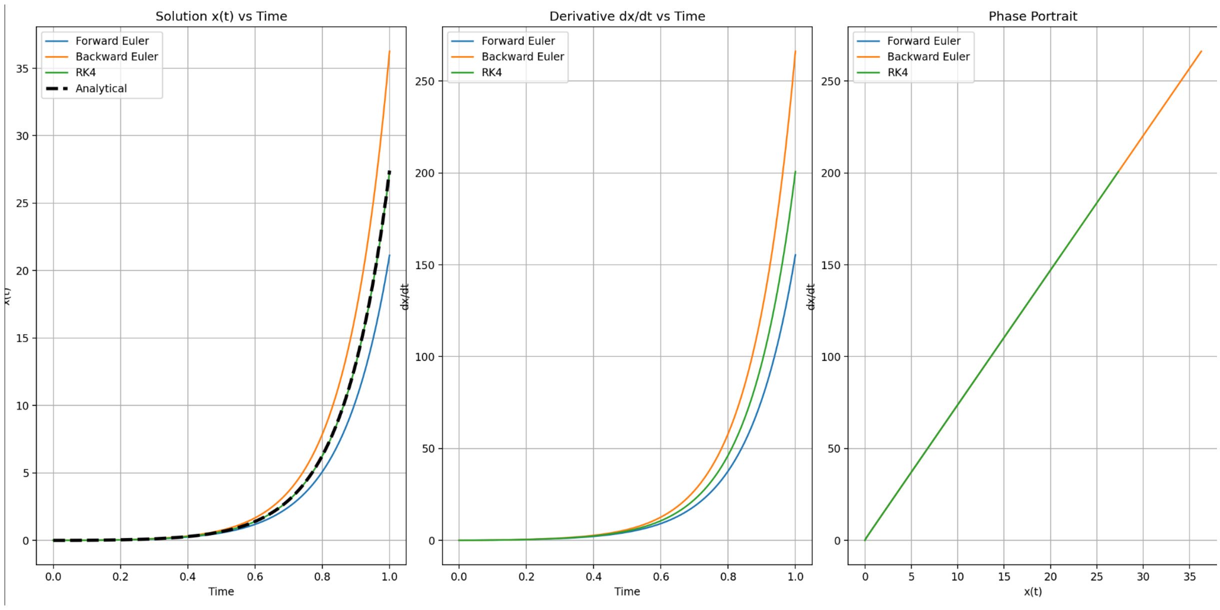
$C_2 \approx 0.102 - 0.0181 = 0.0839$

Полное решение будет иметь вид:

$x(t) = 0.0181 \cdot e\^(7.326t) + 0.0839 \cdot e\^(-1.576t) - 0.102$

Алгоритм решения ОДУ численным методом

Используя функции в файле "Integrators.ipynb" выводом служат графики, выполненные явным/неявным методом Эйлера или методом Рунга-Кутты:



-0.68·0 + 3.91·0 + 7.85·K = -0.8 - система имеет отрицательную массу.

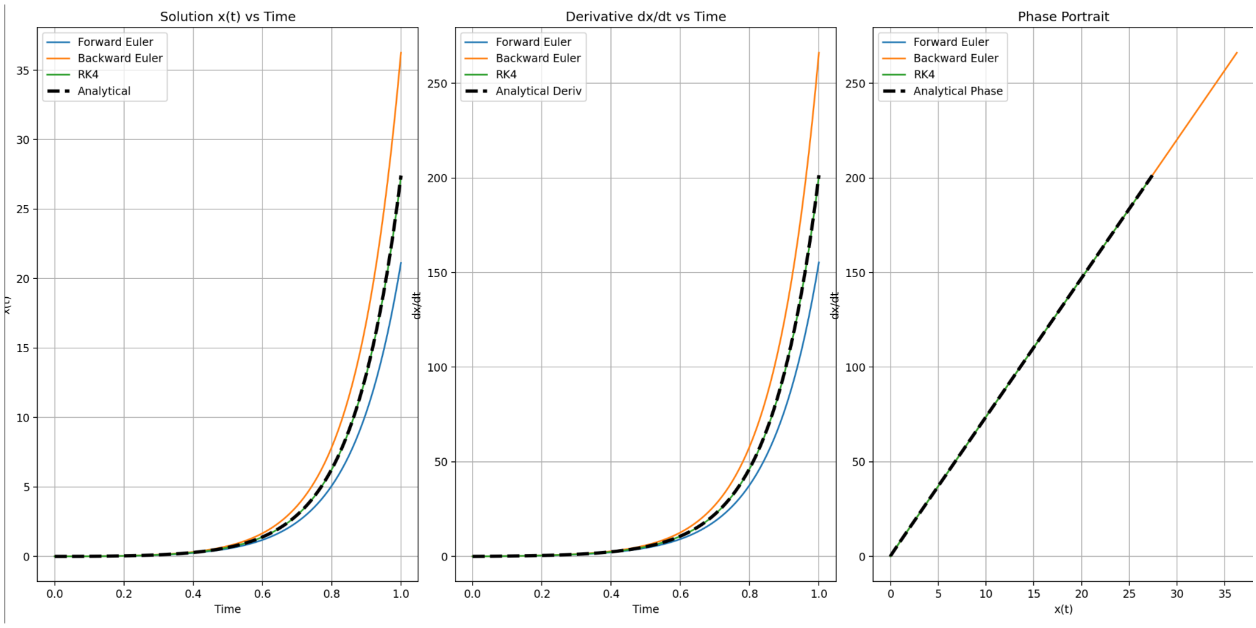
1. Solution x(t) - Решение уравнения во времен, T = 1.0
Сравнение: RK4 (метод Рунге–Кутты 4-го порядка) практически совпадает с аналитическим решением, в то время как методы Эйлера (как явный, так и неявный) дают заметную погрешность.
2. Derivative dx/dt vs Time - Скорость изменения величины x зависит от времени.
3. Phase Portrait - Фазовый портрет, анализ динамических систем. Он показывает зависимость скорости (dx/dt) от самой переменной (x), убирая из рассмотрения время.

Черная пунктирная линия показывает эталонную траекторию. Синяя линия практически идеально накладывается на черную пунктирную. Это подтверждает, что RK4 точно воспроизводит аналитическое, неустойчивое поведение системы.

Добавляем решение ОДУ аналитическим методом:

```
def analytic_derivative(t):
    return 0.0181 * 7.326 * np.exp(7.326*t) + 0.0839 * (-1.576) * np.exp(-1.576*t)
```

Добавим данные аналитического метода и в другие графики:



Можно сделать вывод, что аналитическое и методом Рунга-Кутты 4-го порядка дают наиболее точный результат, так как система является неустойчивой.

Заключение

Проведенное исследование показало, что система является неустойчивой вследствие наличия положительного характеристического корня, что приводит к экспоненциальному росту решения. Среди исследованных численных методов только метод Рунге-Кутты 4-го порядка адекватно воспроизводит поведение системы как во временной области, так и на фазовой плоскости. Методы Эйлера демонстрируют либо чрезмерную неустойчивость (явный метод), либо ложную стабилизацию (неявный метод), что делает их непригодными для моделирования обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами заданного вида:
$a \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = d$.