

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

Практическая работа №2
по дисциплине
«Имитационное моделирование робототехнических систем»

по теме:
«Построение математической модели»

Студент:
Группа № R4136с

Носов А.С.

Предподаватель:
Ассистент СУиР

Ракшин Е.А.

Санкт-Петербург 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ЦЕЛИ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	3
1 ВЫВОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ	4
1.1 Условие задания	4
1.2 Решение	4
1.3 Линеаризация и вывод аналитического решения	5
2 МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ	7
2.1 Графики моделирования	7
2.2 Анализ графиков	9
ОБЩИЕ ВЫВОДЫ	10

ЦЕЛИ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Исследование численных методов интегрирования на физическом объекте.

В работе решаются следующие задачи:

- Построение математической модели системы заданной вариантом;
- Аналитическое решение дифференциального уравнения системы, если это возможно;
- Моделирование системы с помощью трёх численных методов интегрирования;

1 ВЫВОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

1.1 Условие задания

Система заданная вариантом

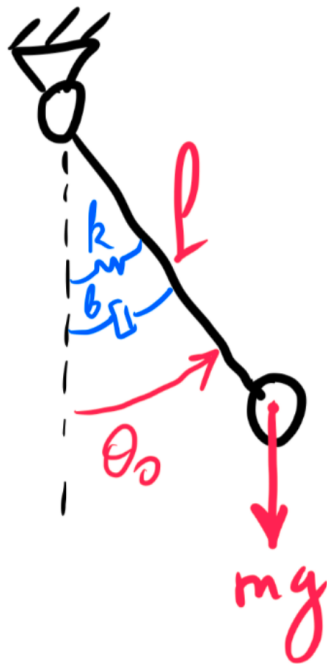


Рисунок 1 — Схема объекта

Параметры варианта:

- $m = 0.3\text{кг}$
- $k = 9\text{Н} \cdot \text{м/рад}$
- $b = 0.02\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с/рад}$
- $l = 0.79\text{м}$
- $\theta_0 = -0.9110901665\text{рад}$

1.2 Решение

Кинетическая энергия объекта:

$$K = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2,$$

где $I = ml^2$ так как считаем, что масса сосредоточена на конце маятника.

Потенциальная энергия:

$$P = -mgl \cos \theta + \frac{1}{2}k\theta^2.$$

Лагранжиан системы:

$$L = K - P = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta + \frac{1}{2}k\theta^2.$$

Уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q.$$

Подставим полученный лагранжиан в уравнение Лагранжа, при этом добавим демпфирование $Q = -b\dot{\theta}$:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta + k\theta = -b\dot{\theta}$$

Итоговое уравнение:

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta + mgl \sin \theta = 0$$

В полученном уравнении системы присутствует нелинейный член $\sin \theta$, поэтому вывести аналитическое решение невозможно. Можно было бы линеаризовать систему у точки равновесия, но так как начальное условие $\theta_0 = -0.9110901665$ рад не близко нулю, то линеаризация не даст хорошего результата.

1.3 Линеаризация и вывод аналитического решения

Из исследовательского интереса захотелось вывести аналитическое решение для системы с помощью линеаризации.

Линеаризация системы у точки равновесия:

$$\sin \theta \approx \theta.$$

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + (k + mgl)\theta = 0$$

Составим характеристическое уравнение:

$$ml^2\lambda^2 + b\lambda + (k + mgl) = 0$$

$$0.1872\lambda^2 + 0.02\lambda + 11.325 = 0$$

Получим комплексно-сопряженные корни:

$$\lambda_{1,2} = -0.053 \pm 7.778i$$

Пара комплексно-сопряженных корней, значит общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$\theta(t) = C_1 e^{-0.053t} \sin(7.778t) + C_2 e^{-0.053t} \cos(7.778t)$$

Для дальнейшего аналитического решения необходимы начальные условия, пусть начальные условия

$$\begin{cases} \theta(0) = -0.9110901665 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases}$$

Соответственно при подстановке получаем:

$$C_2 = -0.9110901665$$

И Соответственно найдем производную:

$$\dot{\theta}(t) = -\alpha e^{-\alpha t} (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) \cdot e^{-\alpha t} (C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t).$$

Подставим $t = 0$ и $\dot{\theta}(0) = 0$, следовательно

$$0 = -\alpha C_2 + C_1 \omega$$

$$C_1 = \frac{\alpha C_2}{\omega}$$

$$C_1 = -0.0062083$$

И итоговое решение:

$$\theta(t) = -0.0062083 e^{-0.053t} \sin(7.778t) - 0.9110901665 e^{-0.053t} \cos(7.778t)$$

2 МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ

Моделирование системы было произведено с помощью трёх численных методов интегрирования: метод явного Эйлера, метод неявного Эйлера, метод Рунге-Кутты 4-го порядка. В качестве аналитического решения использовалась линеаризованная модель у точки равновесия.

Параметры моделирования:

- $h = 0.001$
- $Tf = 10$
- $\theta_0 = -0.9110901665$
- $\dot{\theta}_0 = 0$

2.1 Графики моделирования

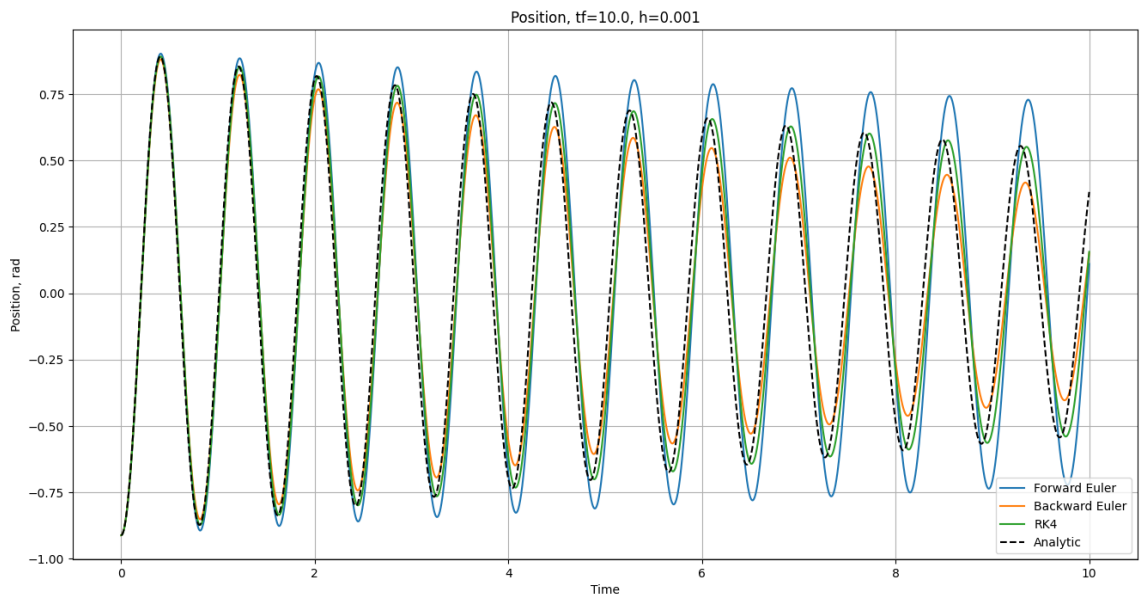


Рисунок 2 — График моделирования угла отклонения при начальном условии $\theta_0 = -0.9110901665$

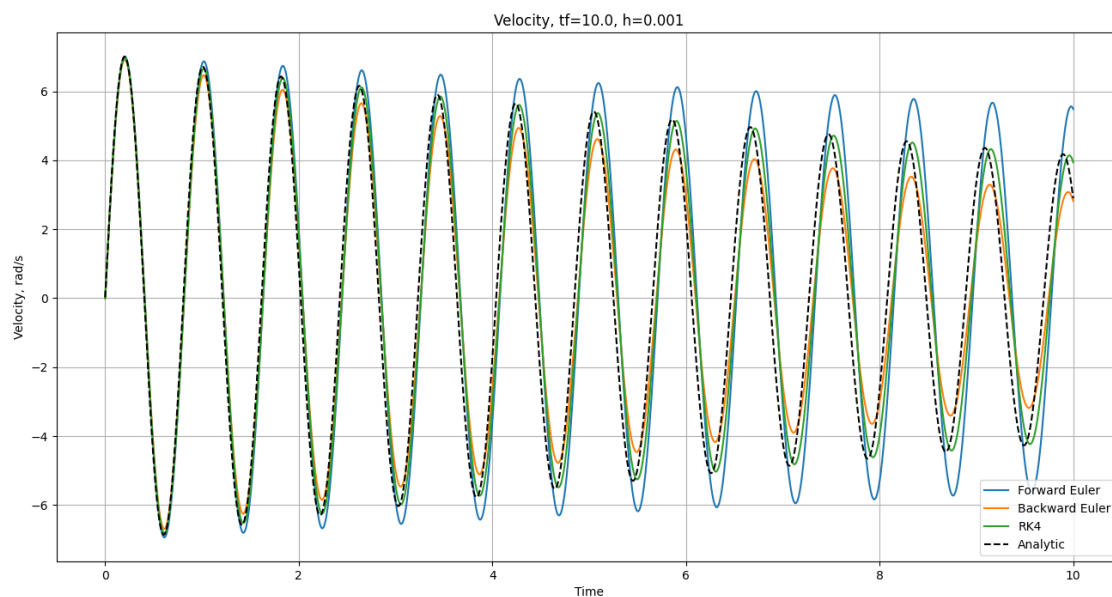


Рисунок 3 — График моделирования угловой скорости при начальном условии $\theta_0 = -0.9110901665$

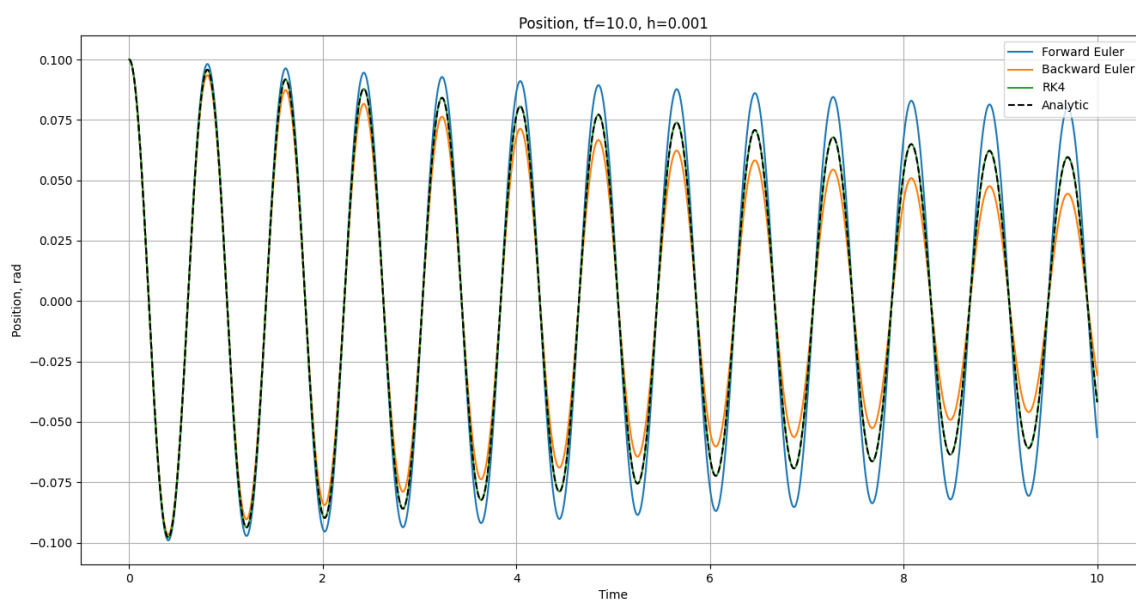


Рисунок 4 — График моделирования угла отклонения при начальном условии $\theta_0 = 0.1$

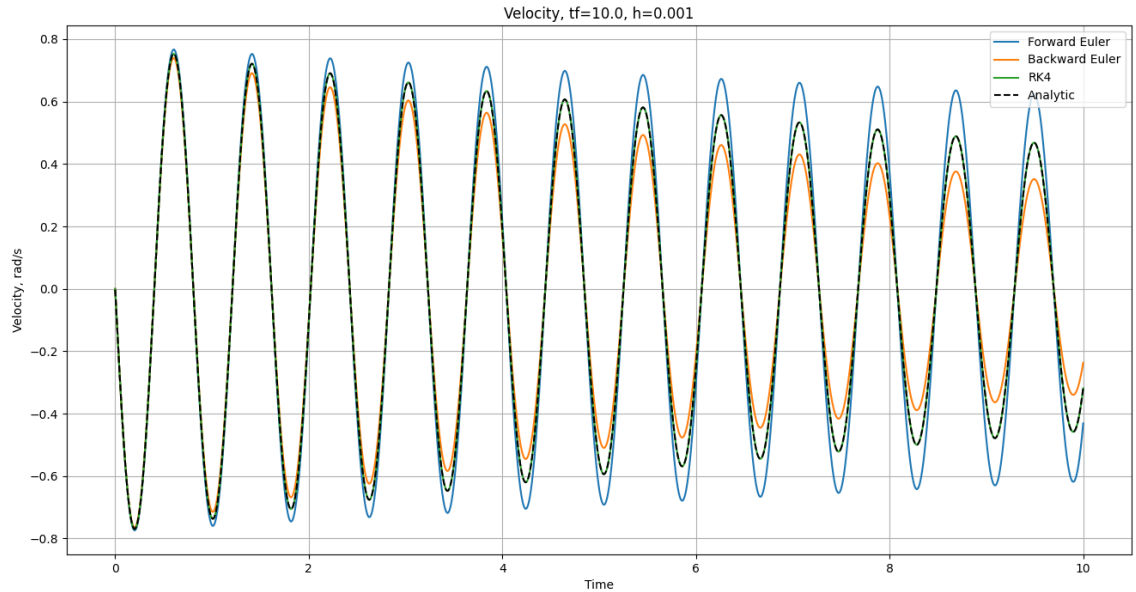


Рисунок 5 — График моделирования угловой скорости при начальном условии $\theta_0 = 0.1$

2.2 Анализ графиков

Как видно по графикам моделирования при начальных условиях $\theta_0 = 0.1$, то есть когда начальное отклонение малое, моделирование с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка совпадает с линеаризованным аналитическим решением, метод неявного Эйлера затухает быстрее, а при методе явного Эйлера затухает медленнее.

При начальных условиях $\theta_0 = -0.9110901665$ - интегрирование с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка довольно близко совпадает с линеаризованным, однако здесь скорее всего проблема именно в линеаризации, так как линеаризация производится у точки равновесия, то есть при нулевом угловом отклонении, отсюда и может возникать неточность.

ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

В ходе практической работы были выполнены следующие задачи:

- выведена математическая модель заданной системы;
- Произведена линеаризация модели у точки равновесия и вывод математической модели;
- моделирование системы с помощью трёх численных методов интегрирования;
- проведено сравнение результатов моделирования

Можно сказать, что наиболее точным методом численного интегрирования является метод Рунге-Кутты 4-го порядка, который совпадал с линеаризованной моделью при малом начальном отклонении маятника.