```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def ode_dynamics(x):

    a, b, c, d = -5.63, -2.16, -3.85, 5.83

    pos = x[0]
    vel = x[1]

    accel = (d - b * vel - c * pos) / a

    return np.array([vel, accel])

def analytical_solution(t, x0, v0):

    a, b, c, d = -5.63, -2.16, -3.85, 5.83

    b_norm = b/a
    c_norm = c/a
    d_norm = d/a

    discriminant = b_norm**2 - 4*c_norm

    alpha = -b_norm/2
    beta = np.sqrt(-discriminant)/2

    x_particular = d/c

    A = x0 - x_particular
    B = (v0 - alpha * A) / beta

    return np.exp(alpha * t) * (A * np.cos(beta * t) + B * np.sin(beta
* t)) + x_particular

def forward_euler(fun, x0, Tf, h):
    """
    Explicit Euler integration method
    """
    t = np.arange(0, Tf + h, h)
    x_hist = np.zeros((len(x0), len(t)))
    x_hist[:, 0] = x0
```

```
    for k in range(len(t) - 1):
        x_hist[:, k + 1] = x_hist[:, k] + h * fun(x_hist[:, k])

    return x_hist, t

def backward_euler(fun, x0, Tf, h, tol=1e-8, max_iter=100):
    """
    Implicit Euler integration method using fixed-point iteration
    """
    t = np.arange(0, Tf + h, h)
    x_hist = np.zeros((len(x0), len(t)))
    x_hist[:, 0] = x0

    for k in range(len(t) - 1):
        x_hist[:, k + 1] = x_hist[:, k]  # Initial guess

        for i in range(max_iter):
            x_next = x_hist[:, k] + h * fun(x_hist[:, k + 1])
            error = np.linalg.norm(x_next - x_hist[:, k + 1])
            x_hist[:, k + 1] = x_next

            if error < tol:
                break

    return x_hist, t

def runge_kutta4(fun, x0, Tf, h):
    """
    4th order Runge-Kutta integration method
    """
    t = np.arange(0, Tf + h, h)
    x_hist = np.zeros((len(x0), len(t)))
    x_hist[:, 0] = x0

    for k in range(len(t) - 1):
        k1 = fun(x_hist[:, k])
        k2 = fun(x_hist[:, k] + 0.5 * h * k1)
        k3 = fun(x_hist[:, k] + 0.5 * h * k2)
        k4 = fun(x_hist[:, k] + h * k3)

        x_hist[:, k + 1] = x_hist[:, k] + (h / 6.0) * (k1 + 2*k2 + 2*k3
+ k4)
```

```
    return x_hist, t

x0 = np.array([0.1, 0.0])  # Initial state: [position, velocity]
Tf = 10.0
h = 0.01

t_analytical = np.linspace(0, Tf, 1000)  # плотная сетка для гладкости
x_analytical = analytical_solution(t_analytical, x0[0], x0[1])
v_analytical = np.gradient(x_analytical, t_analytical)  # численная
производная

x_fe, t_fe = forward_euler(ode_dynamics, x0, Tf, h)
x_be, t_be = backward_euler(ode_dynamics, x0, Tf, h)
x_rk4, t_rk4 = runge_kutta4(ode_dynamics, x0, Tf, h)

plt.figure(figsize=(24, 8))

plt.subplot(1, 3, 1)
plt.plot(t_analytical, x_analytical, 'k-', linewidth=2,
label='Analytical')
plt.plot(t_fe, x_fe[0, :], label='Forward Euler')
plt.plot(t_be, x_be[0, :], label='Backward Euler')
plt.plot(t_rk4, x_rk4[0, :], label='RK4')
plt.xlabel('Time')
plt.ylabel('Position')
plt.legend()
plt.title('Position vs Time')

plt.subplot(1, 3, 2)
plt.plot(t_analytical, v_analytical, 'k-', linewidth=2,
label='Analytical')
plt.plot(t_fe, x_fe[1, :], label='Forward Euler')
plt.plot(t_be, x_be[1, :], label='Backward Euler')
plt.plot(t_rk4, x_rk4[1, :], label='RK4')
plt.xlabel('Time')
plt.ylabel('Velocity')
plt.legend()
plt.title('Velocity vs Time')

plt.subplot(1, 3, 3)
plt.plot(x_analytical, v_analytical, 'k-', linewidth=2,
label='Analytical')
plt.plot(x_fe[0, :], x_fe[1, :], label='Forward Euler')
```

```
plt.plot(x_be[0, :], x_be[1, :], label='Backward Euler')
plt.plot(x_rk4[0, :], x_rk4[1, :], label='RK4')
plt.xlabel('Position')
plt.ylabel('Velocity')
plt.legend()
plt.title('Phase Portrait')

plt.tight_layout()
plt.show()
```

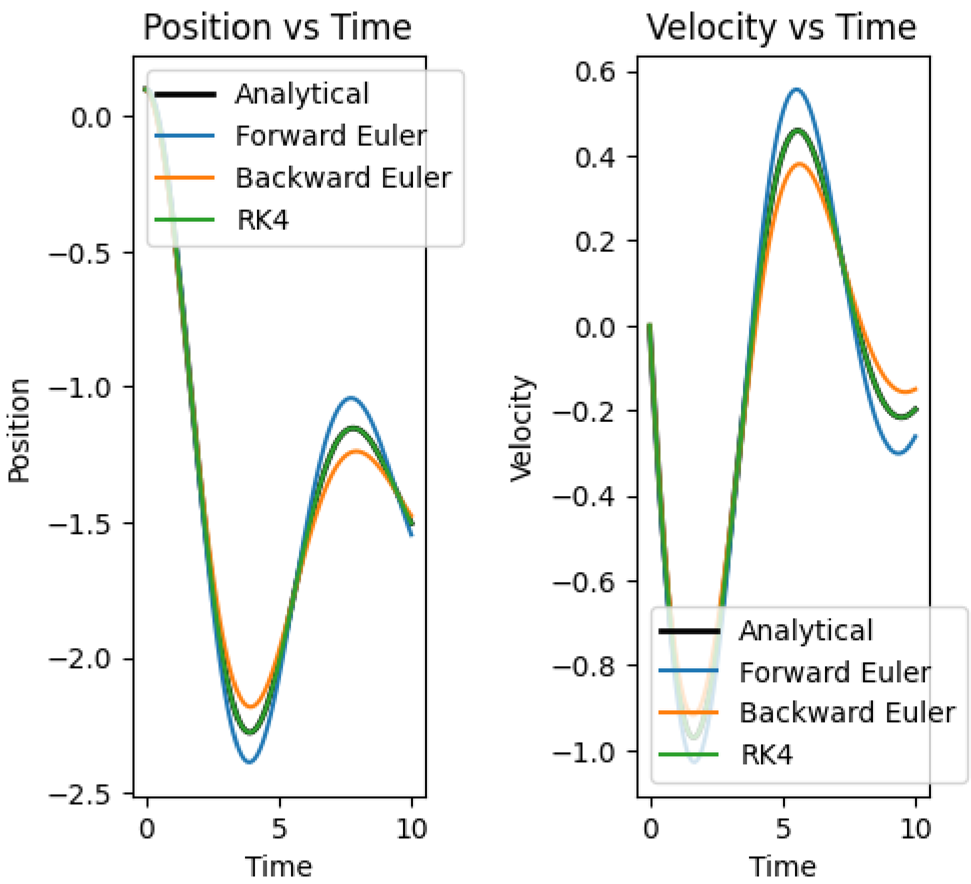
Выводы

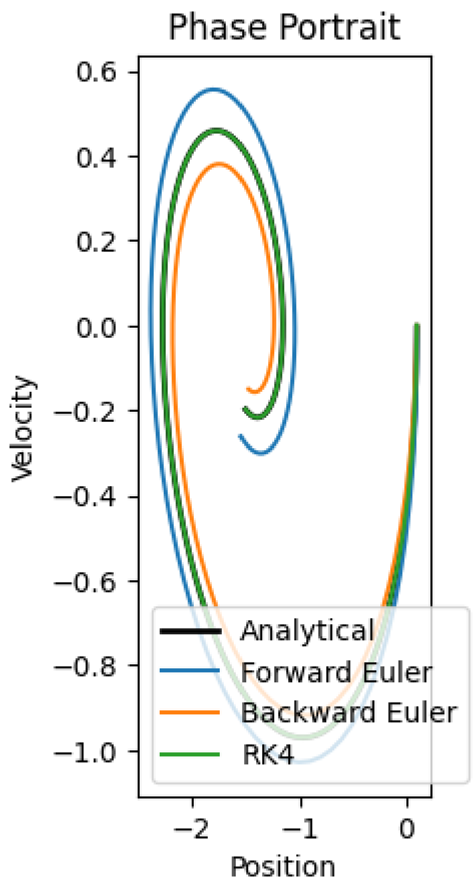
В данной работе было решено неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка аналитически и численными методами: Явный Эйлер, Неявный метод, Рунге-Кутты. Это уравнение может описывать динамику системы с постоянным внешним воздействием, например, пружину с демпфером – начальные условия: начальное растяжение и начальная скорость. Аналитическое решение – точная формула расчета искомой функции, а численное – приближенное вычисление, основанное на алгоритме. В отличие от аналитического решения численные методы могут решать уравнения только первого порядка, поэтому используется система двух дифференциальных уравнений первого порядка.

Начальные условия: $x(0) = 0.1$, $\dot{x}(0) = 0.0$ соответствуют системе, выведенной из положения равновесия без начальной скорости.

Большой шаг ($h = 0.1$):

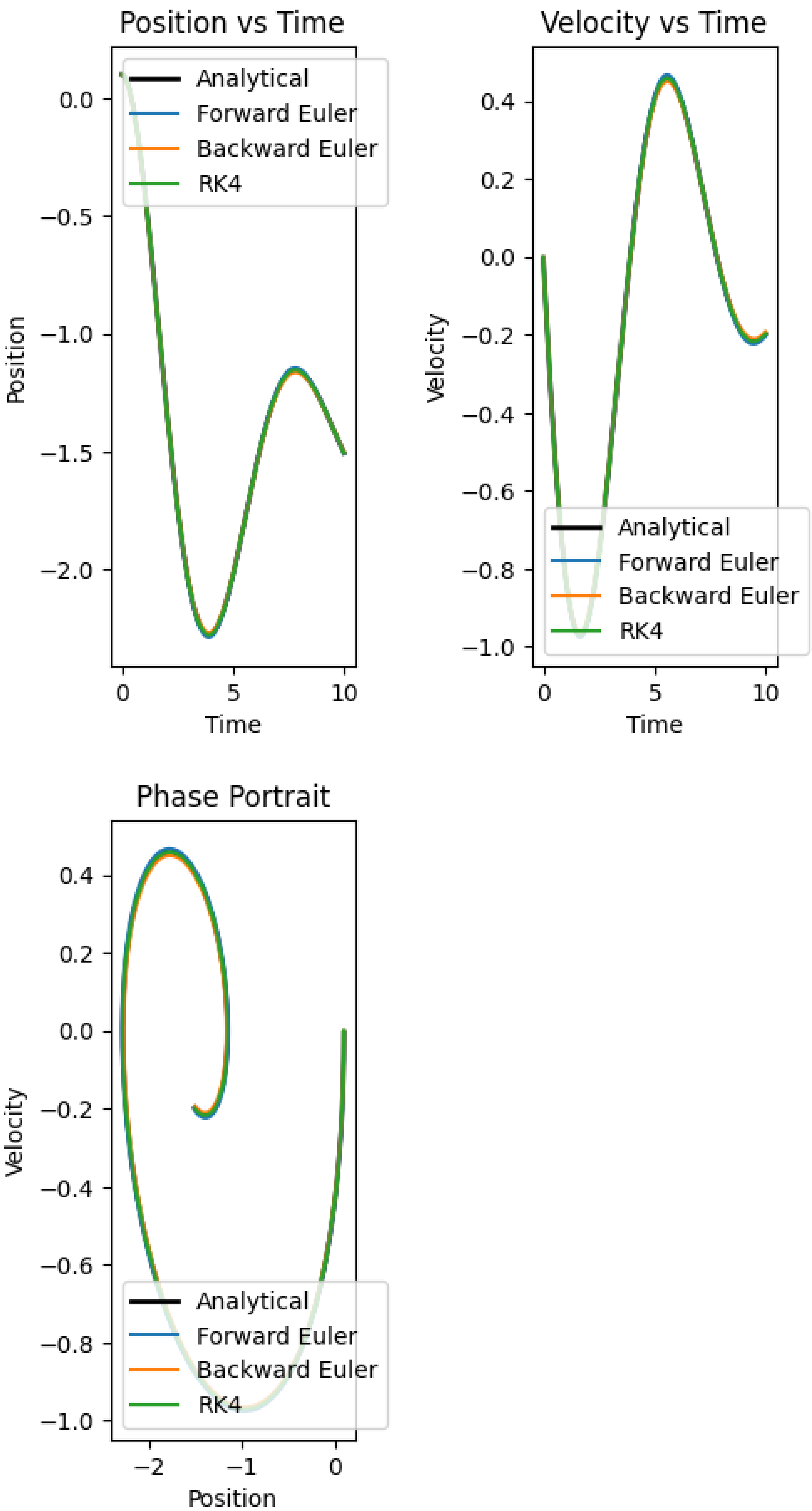
- Forward Euler: значительная погрешность, возможная неустойчивость системы
- Backward Euler: устойчив, но большая погрешность, излишнее демпфирование
- RK4: высокая точность, практически полное совпадение с аналитическим решением


Position vs Time
Analytical
Forward Euler
Backward Euler
RK4
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.5
Position
0
5
10
Time
Velocity vs Time
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1.0
Velocity
Analytical
Forward Euler
Backward Euler
RK4
0
5
10
Time



Маленький шаг (h = 0.01):

- Forward Euler: улучшение точности, практически совпадает с аналитическим решением
- Backward Euler: хорошая точность, сохраняет устойчивость
- RK4: высокая точность, близкое соответствие аналитическому решению


Position vs Time
Velocity vs Time
Phase Portrait
Position
Velocity
Time
Analytical
Forward Euler
Backward Euler
RK4

Наиболее точным оказался метод Рунге-Кутты. Неявный Эйлер имеет смысл использовать тогда, когда важна устойчивость системы (маленький шаг, чтобы избежать излишнего демпфирования), явный Эйлер не подходит для расчетов, где нужна точность, но он подходит для быстрых оценок (большой шаг).