



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное автономное

образовательное учреждение высшего образования

«Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет

информационных технологий, механики и оптики»

**Факультет Систем управления и робототехники**

**Лабораторная работа №2**

по дисциплине

«Имитационное моделирование робототехнических систем»

**Выполнил:**

Студент группы R4135с

Дуль Ян Сергеевич

**Преподаватель:**

Ракшин Егор Александрович

Санкт-Петербург  
2025

# СОДЕРЖАНИЕ

1	Введение . . . . .	3
2	Ход работы . . . . .	4
2.1	Кинетическая и потенциальная энергия . . . . .	4
2.2	Уравнение Эйлера-Лагранжа . . . . .	4
2.3	Моделирование . . . . .	5
3	Выводы . . . . .	8

# 1 Введение

В данной лабораторной работе будет рассмотрен маятник с пружиной и демпфером. С помощью уравнения Эйлера-Лагранжа будет получено дифференциальное уравнение, описывающее изменение обобщенной координаты во времени. В данной случае обобщенной координатой будет угол отклонения маятника от вертикальной оси.

## 2 Ход работы

### 2.1 Кинетическая и потенциальная энергия

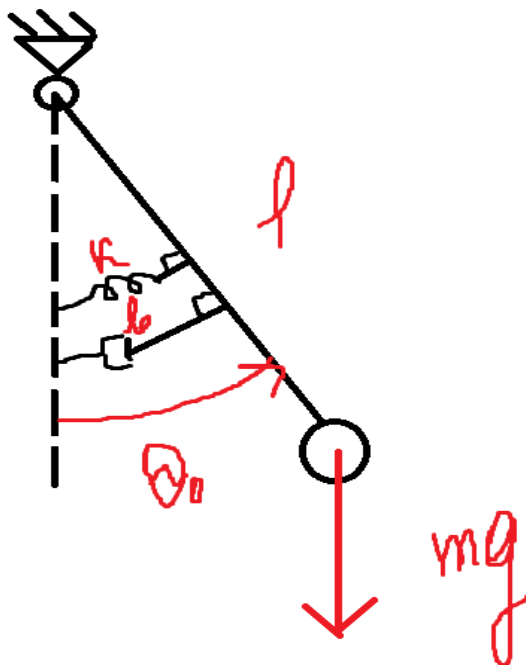


Рисунок 1 — Схема механизма

Пусть обобщенной координатой будет  $\theta$  - угол отклонения маятника от вертикальной оси.

Найдем кинетическую и потенциальную энергию маятника:

$$K = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad (2.1)$$

$$P = -mgl \cos \theta + \frac{1}{2} k (l \tan \theta - l \tan \theta_0)^2 = -mgl \cos \theta + \frac{1}{2} k l^2 (\tan \theta - \tan \theta_0)^2 \quad (2.2)$$

### 2.2 Уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = Q \quad (2.3)$$

, где  $\mathcal{L}$  — Лагранжиан системы, а  $Q$  — внешние силы, действующие на систему

$$Q = -bl\dot{\theta} \quad (2.4)$$

$$\mathcal{L} = K - P = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta - \frac{1}{2}kl^2(\tan^2 \theta - 2 \tan \theta_0 \tan \theta + \tan^2 \theta_0) \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta - \frac{1}{2}kl^2\left(\frac{2 \sin \theta}{\cos^3 \theta} - \frac{2 \tan \theta_0}{\cos^2 \theta}\right) = -mgl \sin \theta - kl^2\left(\frac{\tan \theta - \tan \theta_0}{\cos^2 \theta}\right) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \quad (2.7)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} \quad (2.8)$$

Подставим полученное в уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta + kl^2\left(\frac{\tan \theta - \tan \theta_0}{\cos^2 \theta}\right) = -bl\dot{\theta} \quad (2.9)$$

Перенесем и поделим на  $ml^2$ :

$$\ddot{\theta} = -\frac{b}{ml}\dot{\theta} - \frac{g}{l} \sin \theta - \frac{k}{m}\left(\frac{\tan \theta - \tan \theta_0}{\cos^2 \theta}\right) \quad (2.10)$$

## 2.3 Моделирование

$m = 0.7$ ,  $k = 15$ ,  $b = 0.005$ ,  $l = 0.21$ ,  $\theta_0 = 1.351$

Промоделируем систему с помощью среды Matlab/Simulink:

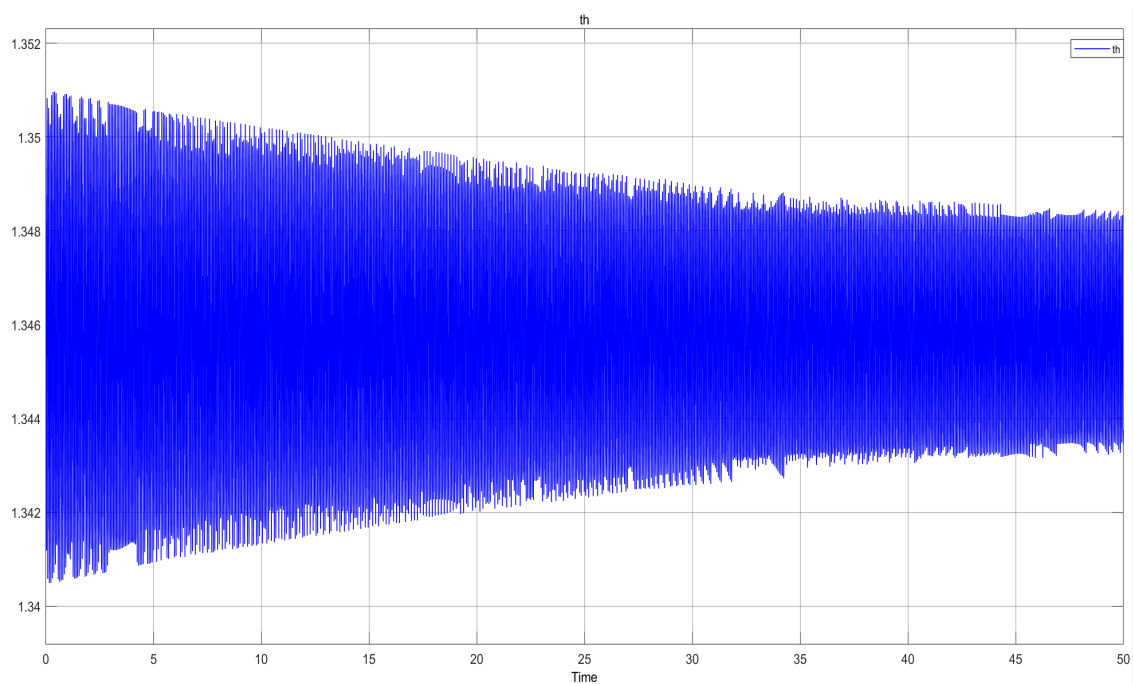


Рисунок 2 — График обобщенной координаты

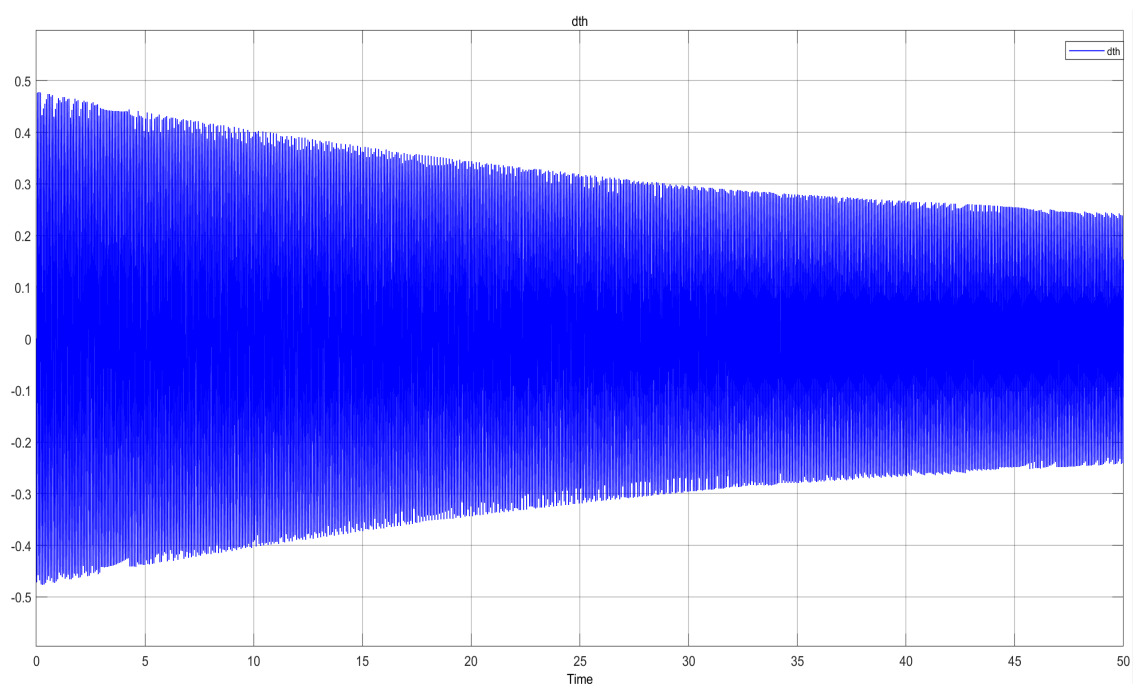


Рисунок 3 — График скорости изменения обобщенной координаты

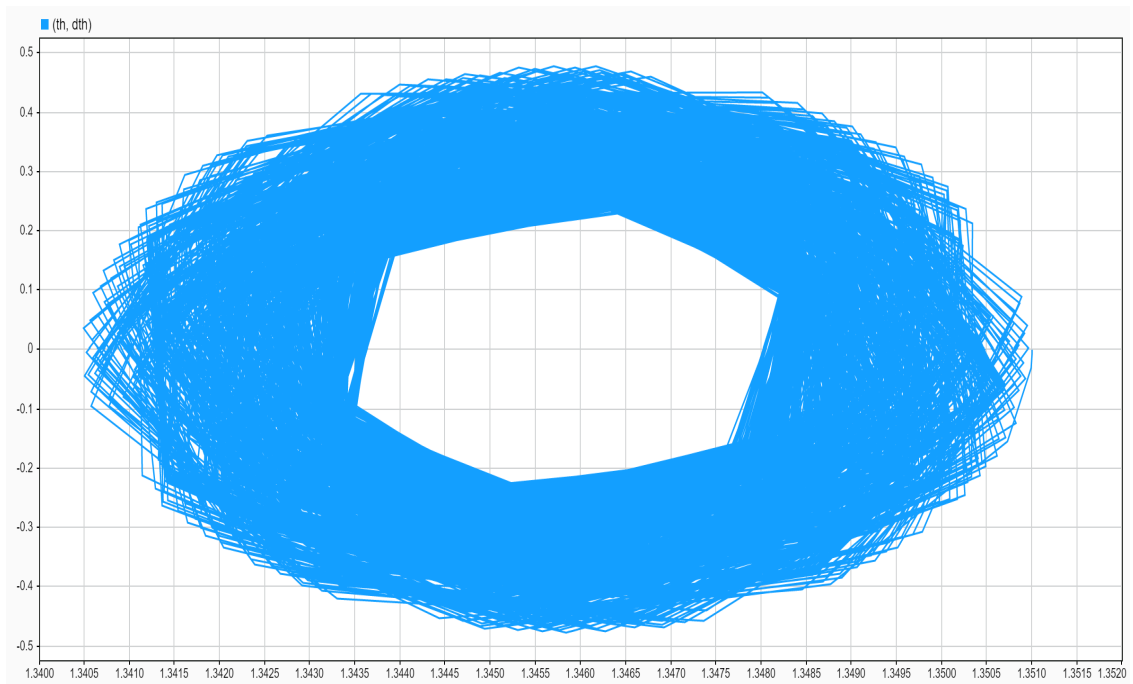


Рисунок 4 — Фазовый портрет

На графике  $\theta(t)$  видно затухающие колебания около начального угла  $\theta_0$ . График угловой скорости  $\dot{\theta}(t)$  стремится к нулевому значению.

Результаты численного решения полученного ДУ методами Рунге-Кутты, явного и неявного Эйлера представлены на Рис. 5. Моделирование методами из прошлой лабораторной работы на Python проведено неуспешно по нескольким причинам: уход на бесконечность при приближении  $\cos \theta$  к 0, отсутствие контроля ошибки, а также собственные недостатки методов. Все это приводит к искажению фазового портрета системы.

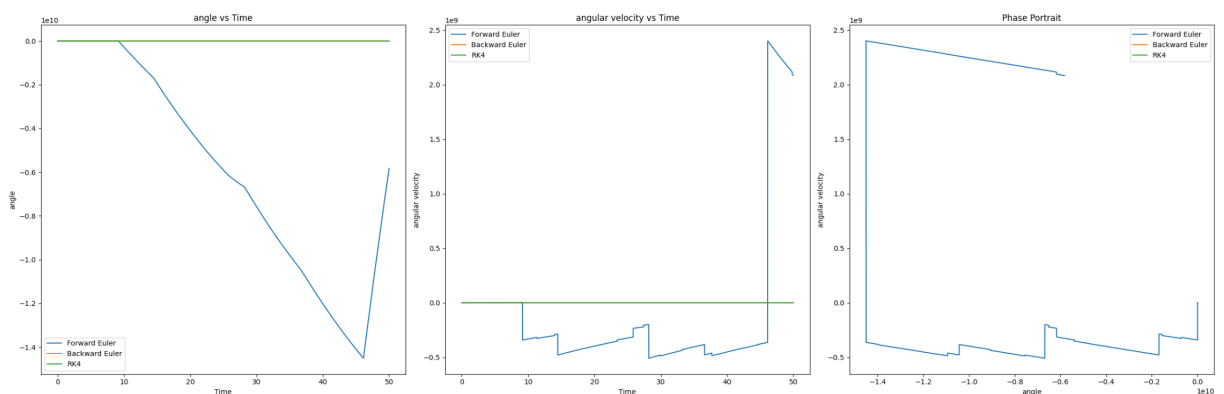


Рисунок 5 — Результаты моделирования методами Рунге-Кутты, явного и неявного Эйлера на Python

### 3 Выводы

Данное дифференциальное уравнение не может быть решено аналитически. Во-первых, в нем имеются сингулярности при  $\cos \theta = 0$ . Во-вторых, в уравнении имеется ряд нелинейностей, которые содержат в себе обобщенную координату, как параметр. При всем этом была рассмотрена энергия механизма и составлено уравнение Эйлера-Лагранжа. Также были построены графики в среде Matlab/Simulink. Это удалось, потому что Matlab/Simulink внутри использует численные методы решения ДУ. Хотя решить ДУ аналитически не удалось, графики были построены. Была попытка провести численное моделирование методами из прошлой лабораторной работы. Однако реализация данных методов лишена хорошо настроенного solver-a, в отличие от Matlab/Simulink, поэтому результаты такого моделирования абсолютно бесполезны.