Национальный исследовательский университет ИТМО
Мегафакультет компьютерных технологий и управления
Факультет систем управления и робототехники

Отчёт по практическому заданию №1
«Интеграторы»

Студент Круглов А. С.
Группа R4133c
Преподаватель Ракшин Е.

Санкт-Петербург
2025

Задание

1) Решить аналитически:

$$a * \ddot{x} + b * \dot{x} + c * x = d$$

Коэффициенты:

$$a = -2.31$$

$$b = 0.54$$

$$c = -5.99$$

$$d = -4.8$$

2) Решить тремя методами интегрирования:

- явный метод Эйлера;
- неявный метод Эйлера;
- метод Рунге-Кутты.

3) Сравнить результаты методов с аналитическим решением.

Аналитическое решение

Дифференциальное уравнение:

$$-2.31 * \ddot{x} + 0.54 * \dot{x} - 5.99 * x = -4.8$$

Характеристическое уравнение:

$$-2.31 * \lambda^2 + 0.54 * \lambda - 5.99 = 0$$

Найдём корни:

$$D = -55.056$$

$$\lambda_1 = 0.117 - 1.606i$$

$$\lambda_2 = 0.117 + 1.606i$$

Общее решение:

$$x = e^{0.177t}(C1 * \cos(1.606t) + C2 * \sin(1.606t))$$

Частное:

$$-5.99К = -4.8$$
$$К = 0.801$$

Полное:

$$x = e^{0.177t}(C1 * \cos(1.606t) + C2 * \sin(1.606t)) + 0.801$$

Найдём C1 и C2:

$$x(0) = x_0$$
$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$$
$$x_0 = (C1 + C2 * 0) + 0.801$$
$$\text{C}1 = x_0 - 0.801$$
$$\dot{x}(t) = e^{0.117t}(0.117 * C1 + 1.606 * C2) * \cos(1.606t)$$
$$- (C1 * 1.606 - C2 * 0.117) * \sin(1.606t))$$
$$\dot{x}(0) = 0{,}117C1 - 1{,}606C2$$
$$C2 = \frac{\dot{x}(0) - 0{,}117C1}{1.606}$$

Реализация аналитического решения на python приведена на рисунке 1.

```
def analitical_solution(Tf, h, x0):

    t = np.arange(0, Tf + h, h)

    alpha = 0.117
    beta = 1.606

    K = 0.801

    C1 = x0[0] - K

    C2 = (x0[1] - alpha * C1) / beta

    # Полное решение
    x = np.exp(alpha * t) * (C1 * np.cos(beta * t) + C2 * np.sin(beta * t)) + K
    x_dot = np.exp(alpha * t)*((alpha * C1 + beta * C2) * np.cos(beta * t) -
                               (C1 * beta - C2 * alpha)) * np.sin(beta * t)

    return x, x_dot, t
```

Рисунок 1 – Аналитическое решение в phyton

Методы интегрирования

Явный метод Эйлера:

$$x_{n+1} = x_n + h * f(x_n)$$

Неявный метод Эйлера:

$$x_{n+1} = x_n + h * f(x_{n+1})$$

Метод Рунге-Кутты 4го порядка:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6} * (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$k_1 = f(x_n),$$

$$k_2 = f(x_n) + \frac{1}{2} h * k_1,$$

$$k_3 = f(x_n) + \frac{1}{2} h * k_2,$$

$$k_4 = f(x_n) + \frac{1}{2} h * k_3,$$

Функция нахождения второй производной, реализованная в python, показана на рисунке 2.

```
def ODE(ODE_var):

    x = ODE_var[0]
    x_dot = ODE_var[1]

    x_ddot = (- 4.8 + 5.99 * x - 0.54 * x_dot) / -2.31

    return np.array([x_dot, x_ddot])
```

Рисунок 2 – Вычисление второй производной

Сравнение методов

На рисунке 3 показаны графики значений x и $\dot{x}$, обозначенные как координата и скорость, вычисленные разными методами интегрирования и полученные аналитически.

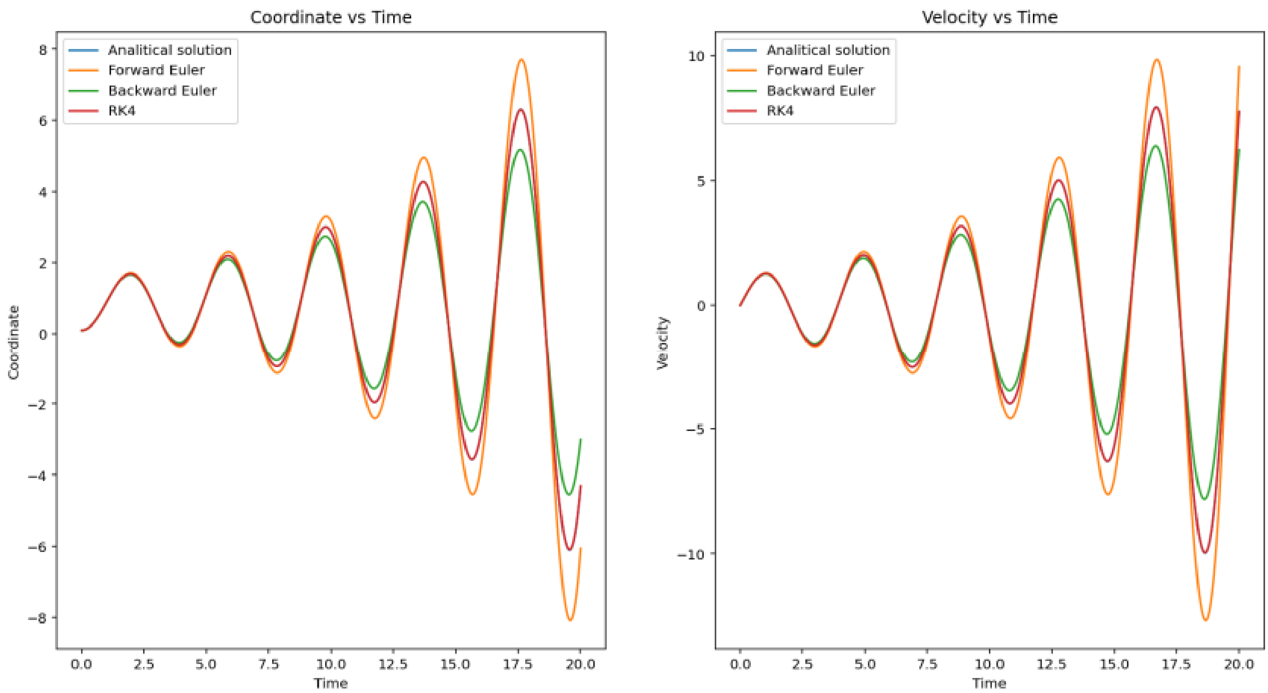

Рисунок 3 – Графики значений x и $\dot{x}$

На рисунке 4 показаны графики аналитического решения и решение методом Рунге-Кутты.

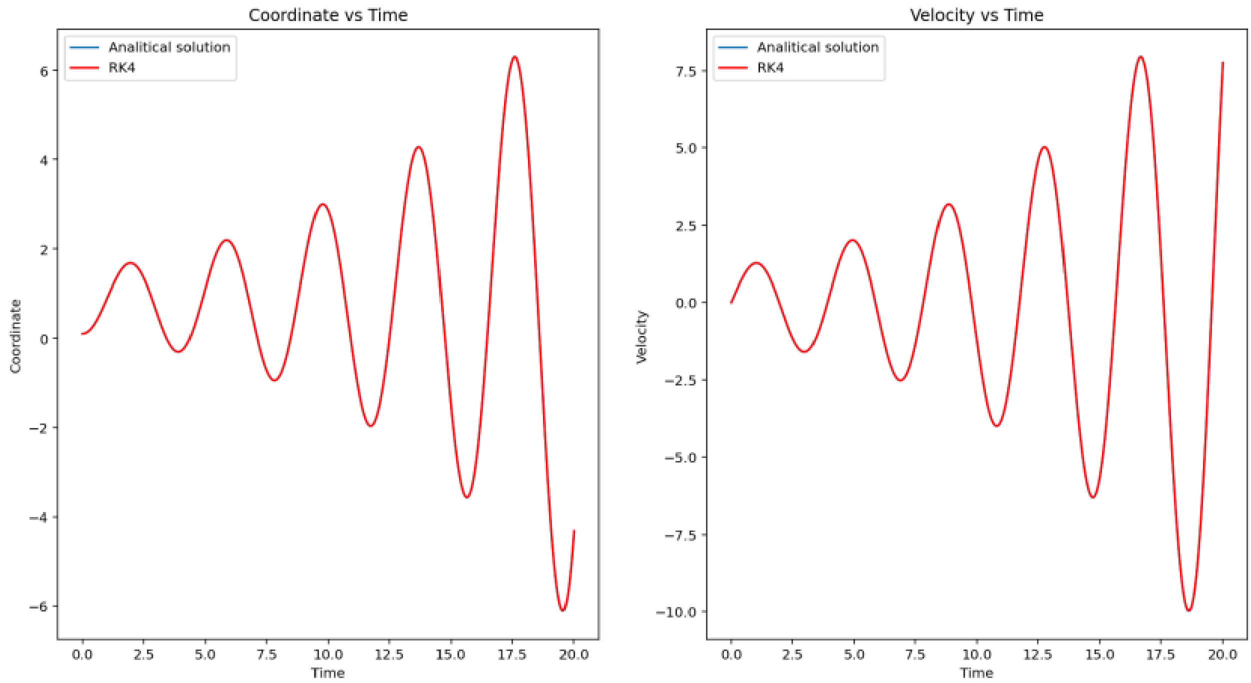

Рисунок 4 – Графики аналитического решения и решение методом Рунге-Кутты

Из полученных графиков можно сделать вывод, что метод Рунге-Кутты 4го порядка имеет наилучшую точность и в данной задаче эквивалентен аналитическому решению.

Наибольшее отклонение от аналитического решения показал явный метод Эйлера.