Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Отчёт по практической работе №2

Дисциплина: “Имитационное моделирование робототехнических систем”

Автор: Балакин А.Р.

Вариант: 6

Факультет: СУиР

Преподаватель: Ракшин Е.А.

Санкт-Петербург, 2025

Входные данные

m, кг	k, $\frac{Н}{м}$	b, $\frac{Н \cdot с}{м}$	x_0, м
0.2	17.4	0.03	0.29

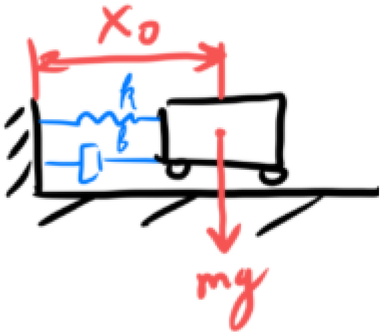

Рисунок 1 - Графическое представление системы

Задание

a) Составление ODE

Запишем кинетическую и потенциальную энергии в обобщенных координатах:

$$K(x,\ x') = \frac{1}{2}mx'^2$$
$$P(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Теперь запишем Лагранжиан системы:

$$L = K(x,\ x') - P(x) = \frac{1}{2}mx'^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Запишем уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta x'}\right) - \frac{\delta L}{\delta x} = Q$$

Соответственно рассчитаем:

$$Q = -\ bx'$$
$$\frac{\delta L}{\delta x} = -\ kx$$
$$\frac{\delta L}{\delta x'} = mx'$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta x'}\right) = mx''$$

Итоговое уравнение:

$$mx'' + kx + bx' = 0$$

b) Аналитическое решение системы

$$0.2x'' + 0.03x' + 17.4x = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$0.2\lambda^2 + 0.03\lambda + 17.4 = 0$$

Дискриминант: $D = -\ 13.9191$
Корни:

$$\lambda_1 = -\ 0.075 + i \cdot 9.327;\ \lambda_2 = -\ 0.075 - i \cdot 9.327$$

В итоге:

$$x(t) = C_1 e^{-0.075t} cos(9.327t) + C_2 e^{-0.075t} sin(9.327t)$$

Найдем значения коэффициентов C_1 и C_2 при условии ($x(0) = 0.29;\ x(0)' = 0$):

$$C_1 = 0.29$$

$$x'(t) =- 0.075e^{-0.075t}(C_1cos(9.327t) + C_2sin(9.327t)) +$$

$$+ e^{-0.075t}(- 9.327C_1sin(9.327t) + 9.327C_2cos(9.327t))$$

$$C_2 = 0.002332$$

Итоговое уравнение:

$$x(t) = 0.29e^{-0.075t}cos(9.327t) + 0.002332e^{-0.075t}sin(9.327t)$$

c) Решение с помощью интеграторов

Для выполнения данного задания воспользуемся данным в репозитории файлом с кодом для трех интеграторов: явного и неявного методов Эйлера и метода Рунге-Кутта. Для этого изменим метод pendulum_dynamics(x) (нейминг изначального файла будет сохранен).

```
def system_dynamics(x):

    m = 0.2
    k = 17.4
    b = 0.03

    x_x = x[0]
    x_dot = x[1]

    x_ddot = -(b * x_dot + k * x) / m

    return np.array([x_dot, x_ddot])
```

Рисунок 2 - Откорректированный метод pendulum_dynamics(x)

Далее необходимо добавить построение графика численного решения.

```
def analytical_solution(t):

    alpha = 0.075
    beta = 9.327
    C1 = 0.29
    C2 = 0.002332

    return np.exp(-alpha * t) * (C1 * np.cos(beta * t) + C2 * np.sin(beta * t))
```

Рисунок 3 - Построение численного решения

Проведем четыре эксперимента, уменьшая h на порядок.

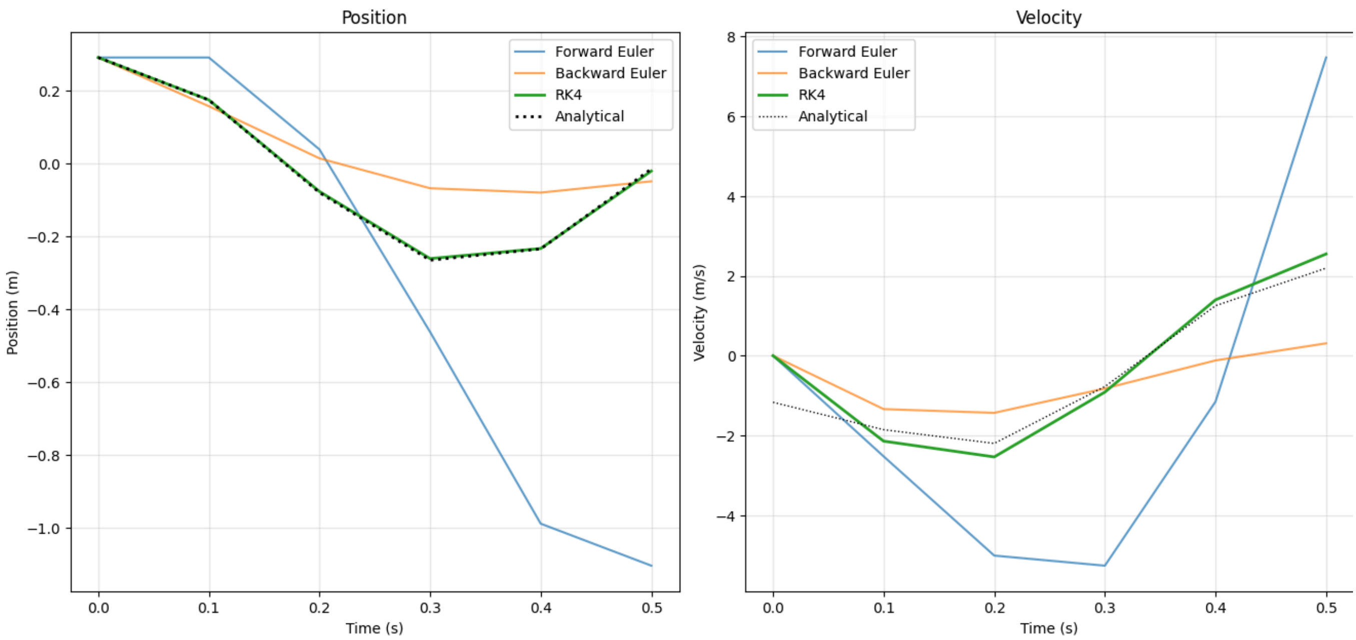

Рисунок 4 - Графики положения и скорости при h = 0.1

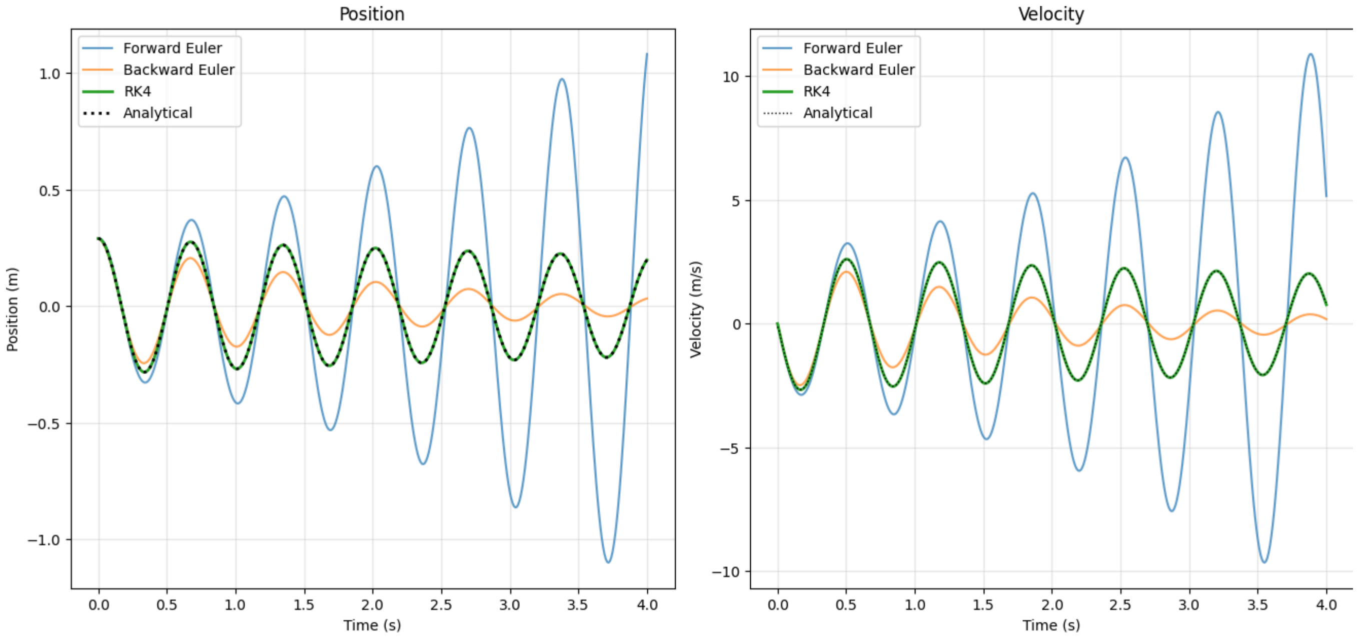

Рисунок 5 - Графики позиции и скоростей при h = 0.01

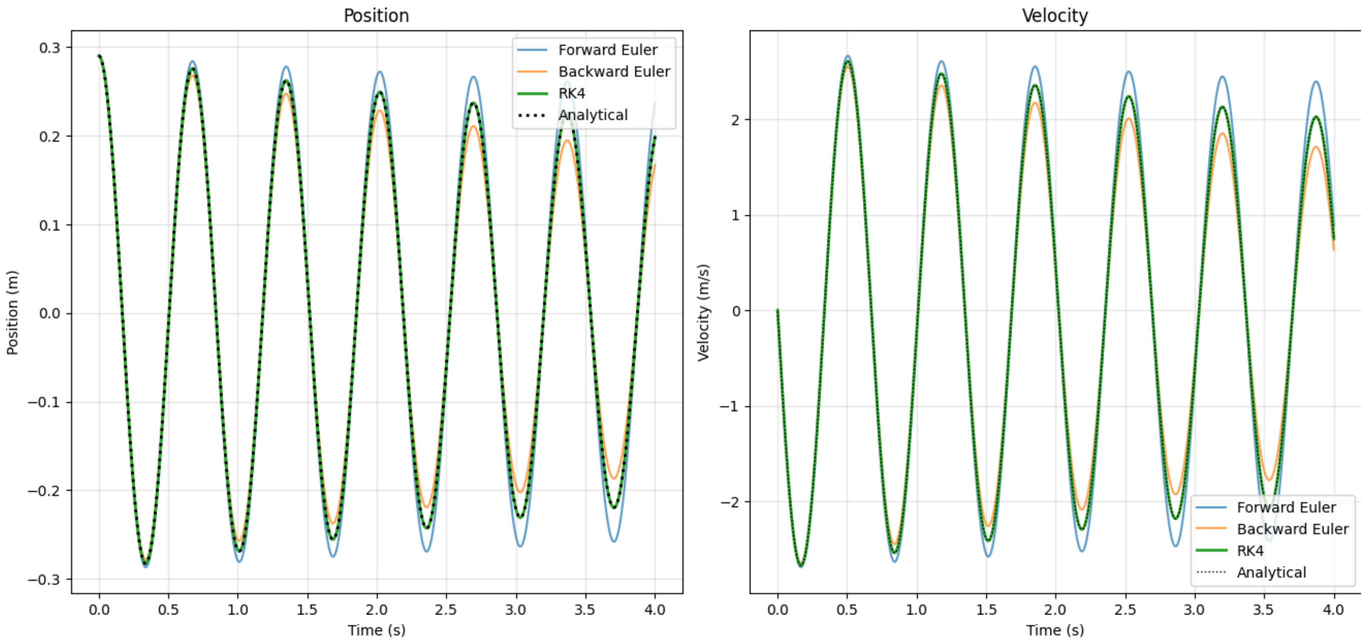

Рисунок 6 - Графики позиции и скоростей при h = 0.001

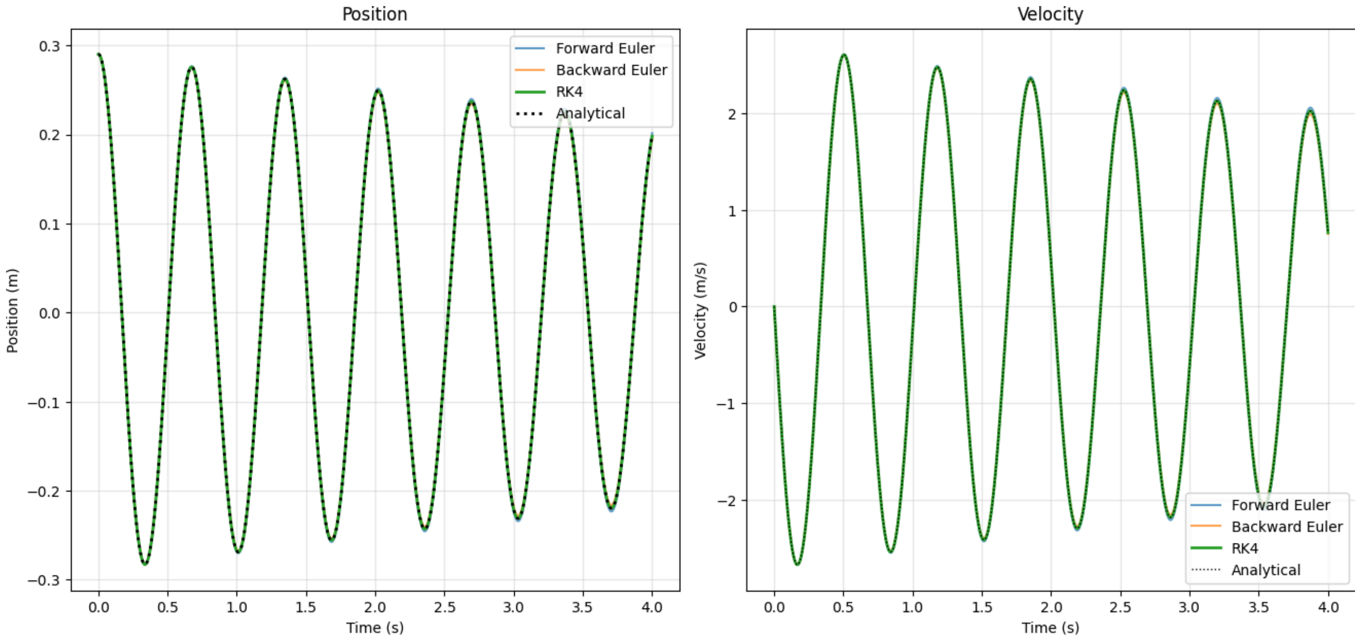

Рисунок 7 - Графики позиции и скоростей при h = 0.0001

d) Анализ графиков

Вновь наблюдается картина, аналогичная предыдущему практическому заданию: при всех использованных шагах h, наибольшую точность демонстрирует метод Рунге-Кутта четвертого порядка. Для получения качественного решения с помощью методов Эйлера необходим крайне малый шаг h, в то время как Рунге-Кутта четвертого порядка позволяет использовать шаги на порядок больше.

Прямой Эйлер при больших шагах h плохо аппроксимирует экспоненту, и в итоге система уходит в “разнос”. Обратный Эйлер добавляет дополнительное демпфирование, из-за чего опять же при больших шагах h сводит систему к 0 существенно быстрее, чем это происходит согласно аналитическому решению.

Также стоит вновь отметить, что если мы хотим получать точный результат, то для прямого Эйлера нужно выбирать крайне малый шаг, однако для получения аналогичного по точности результата методом Рунге-Кутта четвертого порядка можно использовать шаг h на пару порядков меньше, соответственно хоть и на этапе вычисления Рунге-Кутта проигрывает, однако из-за разницы кол-ва самих вычислений он оказывается выгоднее.

Метод обратного Эйлера также требует больше вычислений, однако его основное преимущество (возможность хорошо работать с жесткими системами) неактуально для данной системы, т.к. система не является жесткой (отсутствует значительный разброс действительных частей корней нашей системы). По итогу можно вновь прийти к выводу, что в данном случае метод Рунге-Кутта оказался оптимальнее.