

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ ПО ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ
по дисциплине
«Имитационное моделирование робототехнических систем»

по теме:
РЕШЕНИЕ ОДУ ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С
ДЕМПФИРОВАНИЕМ

Студент:
Группа R4134c

Шилов В.И.

Предподаватель:
Ассистент

Ракшин Е.А.

г. Санкт-Петербург, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

1 ОПИСАНИЕ РАБОТЫ	3
1.1 Цель работы	3
1.2 Задачи	3
1.3 Индивидуальное задание	3
2 ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ	4
2.1 Уравнение движения системы.....	4
2.2 Аналитическое решение	5
2.3 Численное решение	6
2.4 Визуализация результатов	6
3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ	8

1 ОПИСАНИЕ РАБОТЫ

1.1 Цель работы

Получить уравнение движения для заданной системы, решить ОДУ аналитически. Сравнить точность результатов, полученных с использованием аналитического и численного методов.

1.2 Задачи

1. Вывести уравнение движения для системы
2. Получить аналитическое решение дифференциального уравнения
3. Получить численное решение дифференциальное уравнение:
4. Сделать визуализацию решений
5. Провести анализ точности методов

1.3 Индивидуальное задание

Таблица 1 — Коэффициенты согласно индивидуальному заданию

вариант	m	k	b	l	θ_0
1	0.7	9.4	0.025	0.39	-0.9739239711

Согласно варианту, необходимо сделать уравнение движения для системы маятник-пружина-демпфер, изображенной на рисунке 1

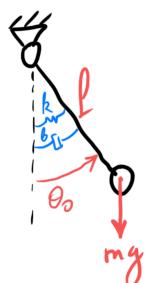


Рисунок 1 — Система маятник-пружина-демпфер

2 ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

2.1 Уравнение движения системы

Чтобы записать уравнение движения, запишем Лагранжиан системы, \mathcal{L} , как разность между кинетической и потенциальной энергией системы

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \mathcal{K}(\theta, \dot{\theta}) - \mathcal{P}(\theta), \quad (1)$$

Где $\mathcal{K}(\theta, \dot{\theta})$ кинетическая энергия тела и $\mathcal{P}(\theta)$ потенциальная энергия тела и пружины, записанные в обобщенных координатах, $g \approx 9.8 \text{m/sec}^2$ гравитационная постоянная.

Кинетическая энергия тела:

$$\mathcal{K}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2, \quad (2)$$

Потенциальная энергия тела:

$$\mathcal{P}(\theta) = \mathcal{P}_g + \mathcal{P}_s = mgl(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}kl^2\theta^2, \quad (3)$$

Тогда Лагранжиан системы:

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}kl^2\theta^2, \quad (4)$$

Уравнение Лагранжа для механической системы с обобщенными координатами $\theta \in \mathbb{R}^m$ и Лагранжиан \mathcal{L} задаются уравнением:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = Q, \quad (5)$$

Где Q представляет собой внешнюю силу, действующую на систему - в нашем случае это демпфирующая сила $Q = -bl^2\dot{\theta}$.

Частная производная \mathcal{L} по θ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mglsin\theta - kl^2\theta, \quad (6)$$

Частная производная \mathcal{L} по $\dot{\theta}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}, \quad (7)$$

Полная производная по времени от частной производной Лагранжиана по скорости равна:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta}. \quad (8)$$

Уравнение движения для системы маятник-пружина-демпфер получается в виде:

$$ml^2 \ddot{\theta} + mg l \sin \theta + kl^2 \theta = -bl^2 \dot{\theta}, \quad (9)$$

Это уравнение можно переписать в форме

$$F = -bl^2 \dot{\theta} - kl^2 \theta - mg l \sin \theta, \quad (10)$$

Где согласно второму закону Ньютона $F = ml^2 \ddot{\theta}$.

Альтернативно уравнение можно преобразовать к виду (11) путем деления на ml^2 :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta + \frac{k}{m} \theta = -\frac{b}{m} \dot{\theta}, \quad (11)$$

Приводя к виду относительно второй производной, получаем:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{k}{m} \theta - \frac{b}{m} \dot{\theta}, \quad (12)$$

2.2 Аналитическое решение

Подставляя в уравнение коэффициенты, получаем:

$$\ddot{\theta} + 0.0357 \dot{\theta} + 13.4286 \theta + 25.1282 \sin \theta = 0, \quad (13)$$

Наличие $\sin \theta$ делает аналитическое решение в замкнутой форме невозможным. Так, уравнение с $\sin \theta$ является нелинейным дифференциальным уравнением, для которых нет универсального аналитического метода решения.

Решение может быть найдено при малых углах, где $\sin \theta \approx \theta$. Для дальнейших вычислений будем считать, что начальное условие $\theta_0 = -0.9739239711$ удовлетворяет $\sin \theta \approx \theta$:

$$\ddot{\theta} + 0.0357 \dot{\theta} + 38.5568 \theta = 0, \quad (14)$$

Характеристическое уравнение:

$$r^2 + 0.0357r + 38.5568 = 0 \quad (15)$$

Решая квадратное уравнение, получены следующие корни характеристического уравнения:

$$r_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{15422592551} i}{20000} - \frac{357}{20000} \quad (16)$$

$$r_{1,2} = \pm 6.209i - 0.01785 \quad (17)$$

Общее решение однородного уравнения:

$$\theta(t) = e^{-0.01785t}(C_1\cos(6.209t) + C_2\sin(6.209t)) \quad (18)$$

Подставляя $\theta(0) = -0.9739239711$, получаем:

$$\theta(0) = e^0(C_1\cos(0) + C_2\sin(0)) = 1 = -0.9739239711 \quad (19)$$

$$\dot{\theta}(0) = -0.01785(-0.9739239711) + 6.209 * C_2 = 0 \quad (20)$$

Решая уравнение, получаем $C_2 = -0.002801$

Итоговое аналитическое решение:

$$\theta(t) = e^{-0.01785t}(-0.9739239711\cos(6.209t) - 0.002801\sin(6.209t)) \quad (21)$$

Так как характеристические корни $r_{1,2}$ имеют отрицательную вещественную часть, решение будет сходиться, но медленно.

2.3 Численное решение

Для решения используется метод неявного Эйлера - метод первого порядка, использующий значение производной в конце шага, что обеспечивает лучшую устойчивость по сравнению с методом явного Эйлера. Метод представляется в виде:

$$s_{n+1} = s_n + h \cdot f(t_{n+1}, s_{n+1}) \quad (22)$$

2.4 Визуализация результатов

Для наглядности в графики были добавлены значения, полученные аналитическим решением. Код, осуществляющий вычисления и визуализацию прикреплен в `simulation.ipynb`.

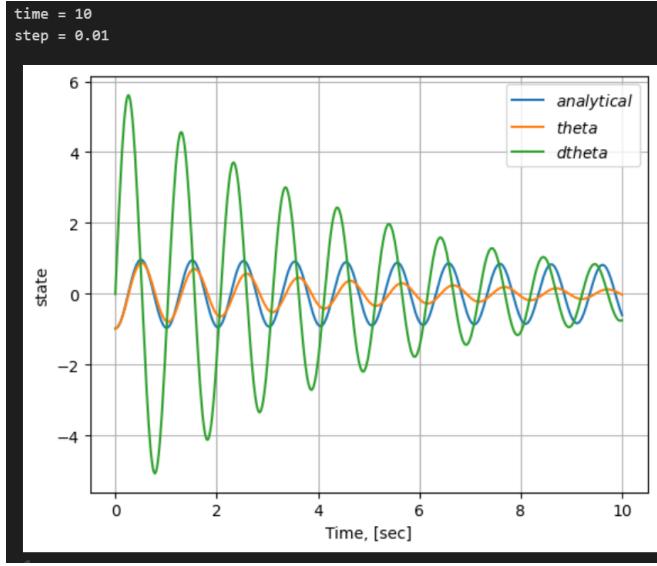


Рисунок 2 — Результат моделирования при шаге 0.01

Экспериментально был выбран шаг 0.01, как показывающий себя лучше остальных. На рисунке 2 представлен график, где зеленым выделены значения $\dot{\theta}$, оранжевым значения θ , полученные с помощью метода неявного Эйлера, а синим значения θ , полученные аналитическим решением.

Можно заметить, что численное решение быстро сходится, в то время, как аналитическое решение почти не сходится. На рисунке 3 показана результат симуляции с большим временем симуляции, где отчетливо видно, что аналитическое решение также сходится.

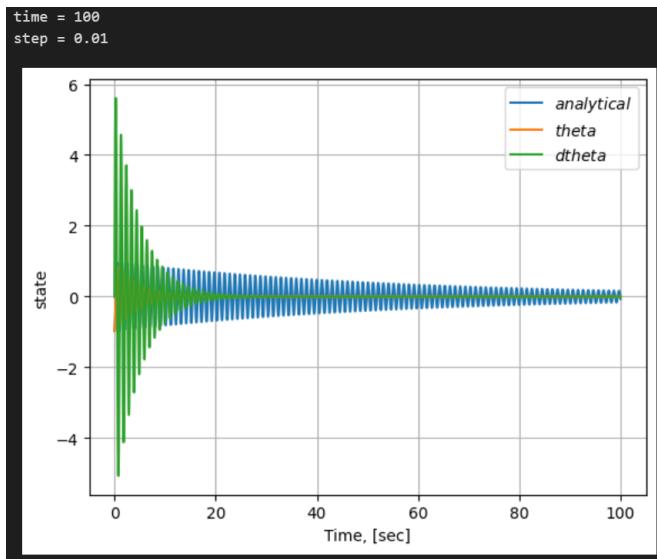


Рисунок 3 — Результат длительного моделирования при шаге 0.01

3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты моделирования показывают, что решение для уравнения движения сходится и система стабильна. Тем не менее, приведенное аналитическое решение показывает плохие результаты и сходится в 10-20 раз медленнее, чем при использовании метода неявного Эйлера. Такой результат обусловлен тем, что исходное уравнение (13) является нелинейным, и в общем виде не имеет решения. Так, для получения аналитического решения были приняты некоторые упрощения.