МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

Практическая работа №2
по дисциплине
«Имитационное моделирование робототехнических систем»

Студент:
Группа R4135с *Амансахедов М.М.*

Преподаватель:
Ассистент *Е.А. Ракшин*

Санкт-Петербург 2025 г.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ.

1. Решить в численном виде ОДУ для рисунка 1:

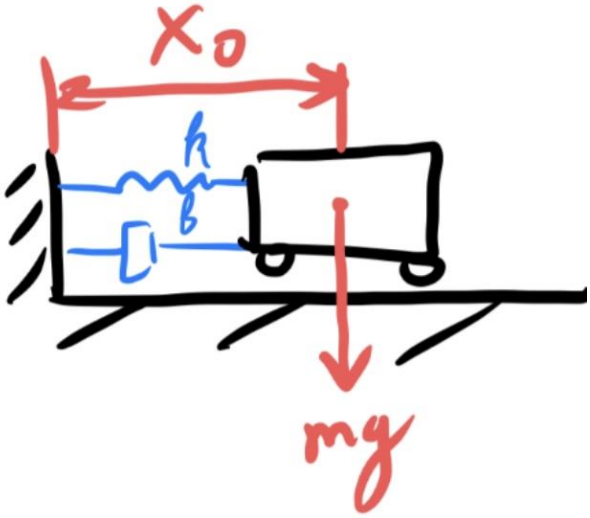

Рисунок 1 – Вариант 2

2. Решить ОДУ системы в аналитическом виде;
3. Сравнить результаты методов с аналитическим решением.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

Для решения системы в аналитическом виде нужно составить лагранжиан системы.

$$\mathcal{L}(x,\dot{x}) = \mathcal{K}(x,\dot{x}) - \mathcal{P}(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \quad (1)$$

Уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = \mathcal{Q}. \quad (2)$$

Где:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m\dot{x}; \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) = m\ddot{x} \quad (4)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = -kx; \quad (5)$$

$$\mathcal{Q} = -b\dot{x}. \quad (6)$$

Подставив данные уравнения в (2), было получено:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0. \quad (7)$$

Согласно таблице: m = 0.5, b = 0.03, k = 9.0.

Решение будет производиться в общем виде, составляется характеристический многочлен:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0;$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad (8)$$
$$\lambda_{1,2} = -0{,}03 \pm 4{,}2425i.$$

Так как нет действительных корней, то общее решение ОДУ:

$$x(t) = e^{-0.03t}(C1\cos(4.2425t) + C2\sin(4.2425t)). \quad (9)$$

Нахождение значений коэффициентов $C1$ и $C2$ при начальных условиях $x_0 = 0{,}06, \dot{x}_0 = 0$.

$$x(0) = C1 = x_0;$$

$$\dot{x}(0) = \alpha C1 + \beta C2 = 0;$$

$$\begin{cases} C1 = x_0 \\ C2 = \dfrac{-\alpha C1}{\beta} \end{cases}; \qquad (10)$$

$$\begin{cases} C1 = 0{,}6 \\ C2 = 0.00424 \end{cases}. \qquad (11)$$

Подставив в (9) и в (11) получено:

$$x(t) = e^{-0.03t}(0{,}6\cos(4.2425t) + 0.00424\sin(4.2425t)). \qquad (12)$$

РЕШЕНИЕ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ.

В файле Integrators.ipynb функция pendulum_dynamics была заменена на функцию ode_system.

```
a = 0.5 #m
b = 0.03 #b
c = 9.0 #k
d = 0 #0
x0_val = 0.6
v0_val = 0.0
Tf = 10.0
h = 0.01
def ode_system(x):
    x1 = x[0]
    x2 = x[1]
    dx1 = x2
    dx2 = (d - b * x2 - c * x1) / a
    return np.array([dx1, dx2])
```

Рисунок 1 – функция *ode_system*

```
#analytically
p = b / a
q = c / a
s = d / a

x_p = d / c

alpha = -p / 2.0
beta_sq = 4.0 * q - p**2
if beta_sq > 0:
    beta = 0.5 * np.sqrt(beta_sq)
else:
    beta = 0.0
C1 = x0_val - x_p
if beta != 0:
    C2 = (v0_val - alpha * C1) / beta
else:
    C2 = 0.0
def x_analytic(t):
    return x_p + np.exp(alpha * t) * (C1 * np.cos(beta * t) + C2 * np.sin(beta * t))

x0_vec = np.array([x0_val, v0_val])

x_fe, t_fe   = forward_euler(ode_system, x0_vec, Tf, h)
x_be, t_be   = backward_euler(ode_system, x0_vec, Tf, h)
x_rk4, t_rk4 = runge_kutta4(ode_system, x0_vec, Tf, h)
x_an = x_analytic(t_fe)
```

Рисунок 2 - Реализация аналитического решения

Далее будут показаны графики решений:

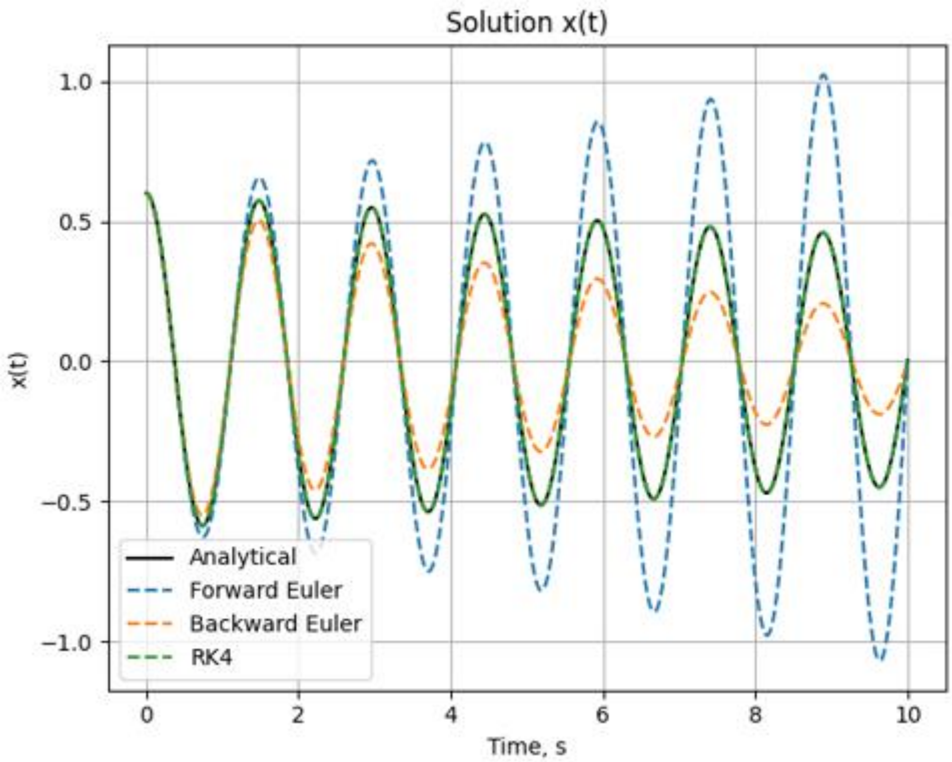

Рисунок 3 – Зависимость координаты x(t) от времени

Из рисунка 3 видно, что аналитический метод больше всего совпадает с численным методом Рунге – Кутты.

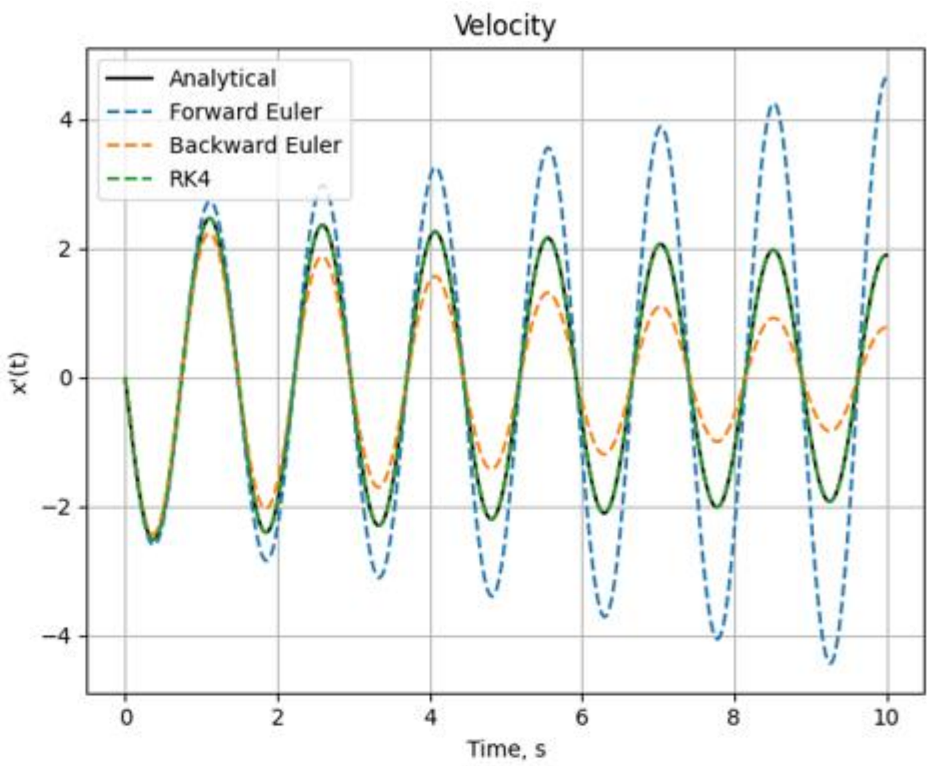

Рисунок 4 – Зависимость скорости x(t) от времени

Из рисунка 4 также видно, что аналитический метод больше всего совпадает с численным методом Рунге – Кутты.

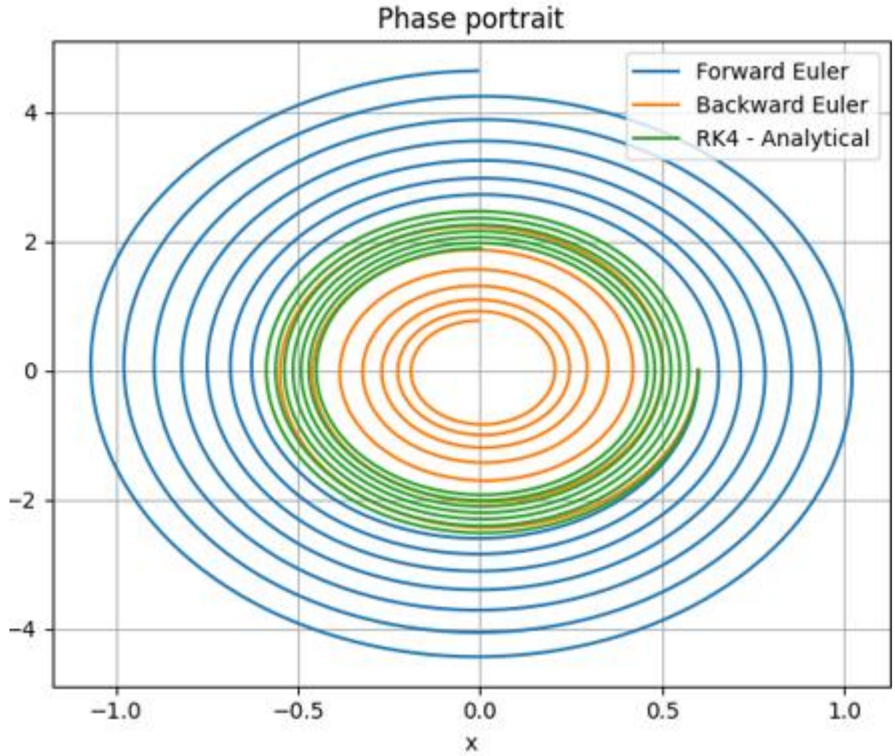

Рисунок 5 – Фазовый портрет системы

Из рисунка 5 также видно, что аналитический метод больше всего совпадает с численным методом Рунге – Кутты.

ВЫВОД.

Согласно полученным данным, можно сделать вывод о том, что из всех приведенных методов численного интегрирования метод Рунге – Кутты даёт наименьшую погрешность, явный Эйлер менее точен и может накапливать ошибку, неявный Эйлер более устойчив, но при данном шаге может давать более грубое приближение, чем RK4.