

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования  
«Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет систем управления и робототехники

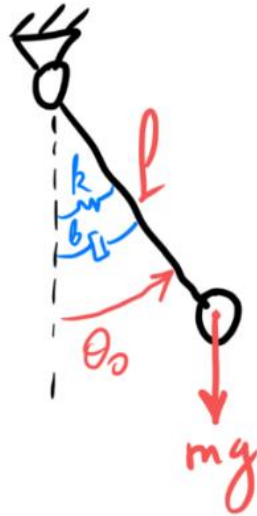
**Отчет по практическому заданию № 2.**  
**Вариант 61.**

Выполнил студент:  
Филиппов А.В. R4136с  
Преподаватель:  
Ракшин Е.А.

Санкт-Петербург  
2025

## 1. Задание

- Составить уравнение движения (ОДУ) для системы:



| m, kg | k, N/m,<br>Nm/rad | b, N*s/m,<br>Nm*s/rad | l, m | $\theta_0$ , rad  | $x_0$ , m |
|-------|-------------------|-----------------------|------|-------------------|-----------|
| 0.9   | 19.4              | 0.01                  | 0.96 | 0.172792962613886 | 0.76      |

- Решить уравнение аналитическим способом (если возможно);
- Сравнить результаты численных методов с аналитическим решением (если оно существует).

## 2. Аналитическое решение

Лагранжиан:  $L = K - P$

Кинетическая энергия:  $K = \frac{1}{2}m\omega^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$

Потенциальная энергия:  $P = -mgl \cdot \cos\theta + \frac{1}{2}k\theta^2$

Метод Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q,$$

где  $Q = -b\dot{\theta}$ .

Выполнив подстановку, получим:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \cdot \sin(\theta) + k\theta + b\dot{\theta}$$

В общем виде:

$$\ddot{\theta} = -\frac{b}{ml^2}\dot{\theta} - \frac{g}{l}\sin(\theta) - \frac{k}{ml^2}\theta$$

Уравнение маятника является нелинейным из-за наличия функции  $\sin(\theta)$ . Однако при малых углах отклонения можно использовать приближение  $\sin(\theta) \approx \theta$ , что приводит систему к линейному виду и позволяет получить аналитическое решение.

Подставив известные параметры получим (с учетом принятого допущения):

$$\ddot{\theta} + 0.01206 \cdot \dot{\theta} + 33.60802 \cdot \theta = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 0.01206\lambda + 33.60802 = 0$$

Так как дискриминант характеристического уравнения отрицателен, система совершает затухающие колебания. Общее решение имеет вид:

$$\theta(t) = e^{-\beta t} \left( C_1 \cos \left( \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t \right) + C_2 \sin \left( \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t \right) \right),$$

где:

$$\beta = \frac{0.01206}{2} = 0.00603; \quad \omega_0^2 = 33.608; \quad \omega_0 = 5.7972;$$

Тогда:

$$\theta(t) = e^{-0.00603} (C_1 \cos(5.7972t) + C_2 \sin(5.7972t))$$

При начальных условиях  $\theta(0) = 0.17279$ ;  $\dot{\theta}(0) = 0$

$$C_1 = 0.17279; \quad C_2 = 0.00018$$

Тогда окончательное аналитическое решение:

$$\theta(t) = e^{-0.00603} (0.17279 \cos(5.7972t) + 0.00018 \sin(5.7972t))$$

### 3. Результаты моделирования:

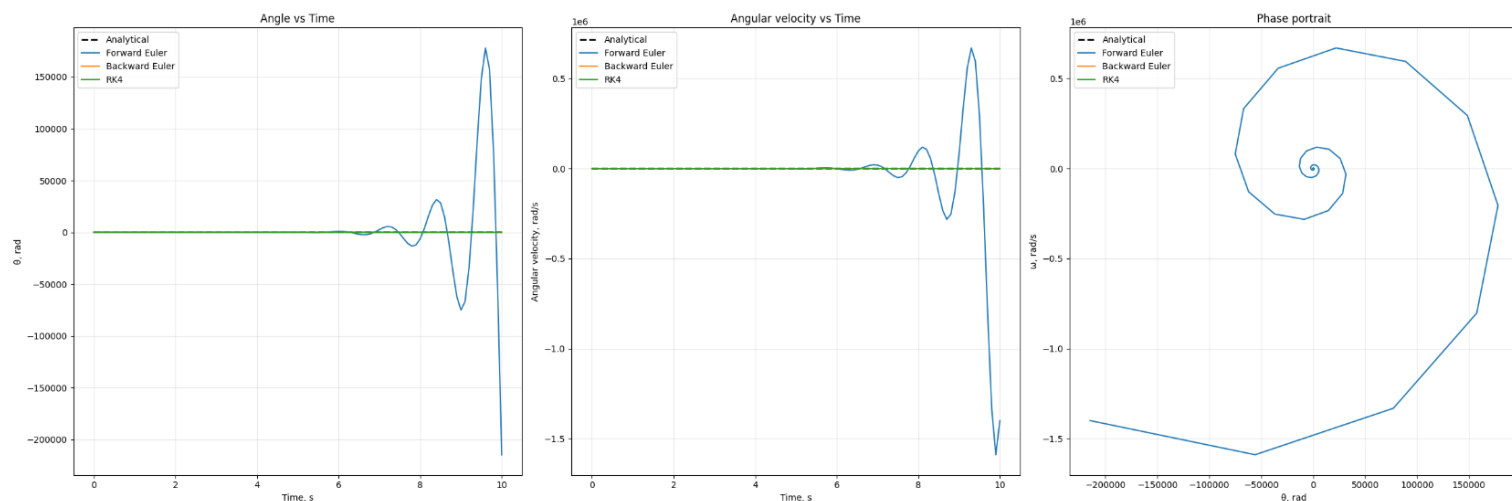


Рисунок 1 – результаты моделирования при  $h = 0.1$

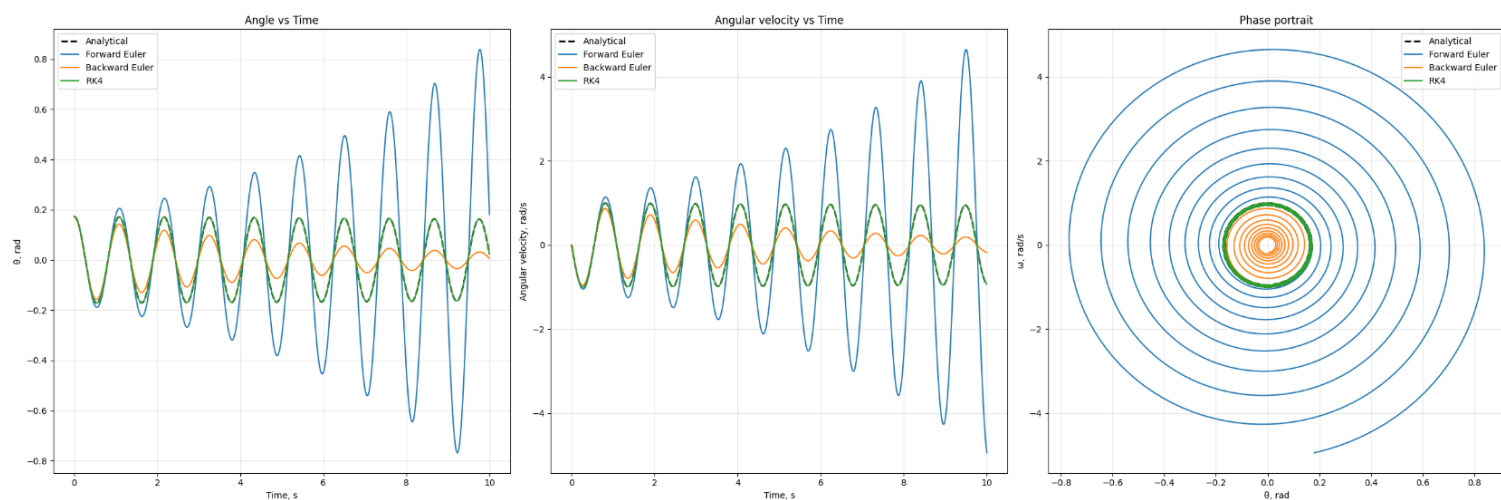


Рисунок 2 – результаты моделирования при  $h = 0.01$

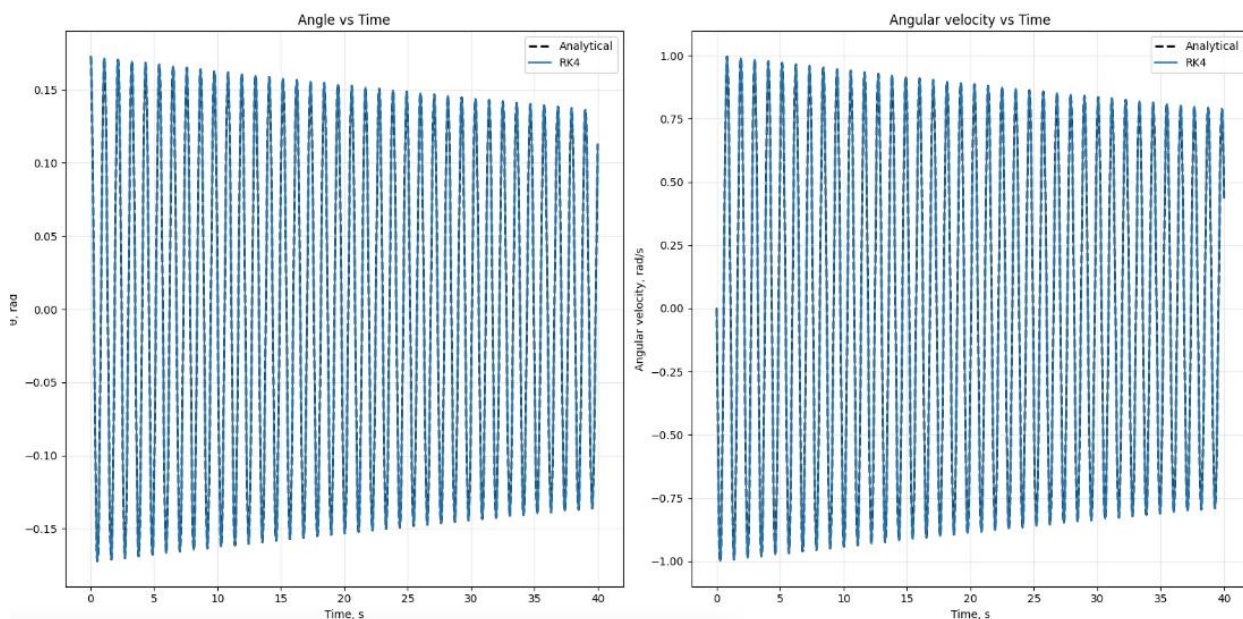


Рисунок 3 – сравнение аналитического решения и метода Рунге-Кутты 4-го порядка

Статистика ошибок (для  $T_f=10$ ;  $h=0.01$ ):

| Метод          | $Max(\theta)$        | $Mean(\theta)$       | $Max(\dot{\theta})$  | $Mean(\dot{\theta})$ |
|----------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| Forward Euler  | $6.77 \cdot 10^{-1}$ | $1.69 \cdot 10^{-1}$ | 4.01                 | 0.97                 |
| Backward Euler | $1.31 \cdot 10^{-1}$ | $5.47 \cdot 10^{-2}$ | $7.61 \cdot 10^{-1}$ | $3.16 \cdot 10^{-1}$ |
| RK4            | $8.72 \cdot 10^{-7}$ | $2.87 \cdot 10^{-7}$ | $5.03 \cdot 10^{-6}$ | $1.68 \cdot 10^{-6}$ |

#### 4. Вывод

В ходе работы было проведено моделирование движения маятника с демпфированием и упругим элементом.

Для получения аналитического решения было принято допущение о малости углов отклонения  $\sin(\theta) \approx \theta$ , что позволило привести исходное нелинейное уравнение к линейному виду и решить его аналитически.

По результатам моделирования видно, что численные методы демонстрируют различную степень точности и устойчивости при решении линейного уравнения маятника.

Метод Forward Euler показал неустойчивое поведение: амплитуда колебаний со временем увеличивается, что приводит к расхождению с аналитическим решением.

Метод Backward Euler, напротив, проявил избыточное численное затухание – решение сходится быстрее аналитического.

Таким образом, метод Runge-Kutta 4-го порядка обеспечивает наибольшую точность и практически полное совпадение с аналитическим решением.