



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное автономное

образовательное учреждение высшего образования

«Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет

информационных технологий, механики и оптики»

**Факультет Систем управления и робототехники**

**Лабораторная работа №2**

по дисциплине

«Имитационное моделирование робототехнических систем»

**Выполнил:**

Студент группы R4135с  
Взглядов Захар Евгеньевич

**Преподаватель:**

Ракшин Егор Александрович

# Отчёт по практическому заданию №2

Взглядов Захар Евгеньевич  
ИСУ - 507015, Группа: R4135с  
Преподаватель: Ракшин Е.А.

## 1 Задание

1. Составить ОДУ для системы масса-пружина-демпфер (вариант 2);
2. Решить ОДУ аналитически;
3. Решить ОДУ тремя методами интегрирования:
  - явный метод Эйлера;
  - неявный метод Эйлера;
  - метод Рунге-Кутты 4-го порядка;
4. Сравнить результаты методов с аналитическим решением.

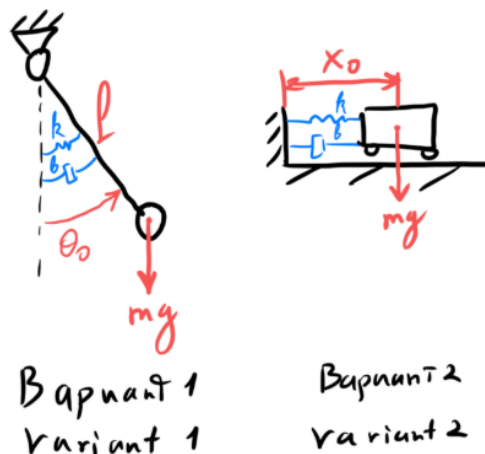


Рис. 1: Система масса-пружина-демпфер

Дано (из таблицы):

$m = 0.7$  кг (масса)

$k = 16.2$  Н/м (коэффициент жесткости пружины)

$b = 0.025$  Н·с/м (коэффициент демпфирования)

$x_0 = 0.9$  м (начальное смещение)

## 2 Составление дифференциального уравнения

Дифференциальное уравнение системы составляется в соответствии с уравнением Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q$$

где:

$L$  – лагранжиан системы, равный разности кинетической и потенциальной энергий:

$$L = K - P;$$

$Q$  – обобщённая сила;

$x$  – координата.

Кинетическая энергия системы:

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

Потенциальная энергия системы:

$$P = \frac{1}{2} k x^2$$

Обобщённая сила (демпфирующая сила):

$$Q = -b\dot{x}$$

Лагранжиан системы:

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

Вычислим необходимые производные:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

Подставим в уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

Подставим значения параметров:

$$0.7\ddot{x} + 0.025\dot{x} + 16.2x = 0$$

### 3 Аналитическое решение

Характеристическое уравнение для дифференциального уравнения:

$$0.7\lambda^2 + 0.025\lambda + 16.2 = 0$$

Дискриминант:

$$D = (0.025)^2 - 4 \cdot 0.7 \cdot 16.2 = -45.359 < 0$$

Корни характеристического уравнения комплексные:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-0.025 \pm \sqrt{-45.359}}{2 \cdot 0.7} = -0.017857 \pm 4.8107i$$

Так как  $D < 0$ , система демонстрирует слабое затухание, и общее решение имеет вид:

$$x(t) = e^{-\alpha t}(C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t))$$

где:

$$\alpha = \frac{b}{2m} = 0.017857 \text{ с}^{-1} - \text{коэффициент затухания}$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \alpha^2} = 4.8107 \text{ рад/с} - \text{частота затухающих колебаний}$$

Определим константы  $C_1$  и  $C_2$  из начальных условий:

$$x(0) = x_0 = 0.9 \text{ м}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \text{ м/с}$$

Из условия  $x(0) = 0.9$ :

$$x(0) = e^0(C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0)) = C_1 = 0.9$$

Найдем производную:

$$\dot{x}(t) = -\alpha e^{-\alpha t}(C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)) + e^{-\alpha t}(-C_1 \omega_d \sin(\omega_d t) + C_2 \omega_d \cos(\omega_d t))$$

Из условия  $\dot{x}(0) = 0$ :

$$\dot{x}(0) = -\alpha C_1 + C_2 \omega_d = 0$$

$$C_2 = \frac{\alpha C_1}{\omega_d} = \frac{0.017857 \cdot 0.9}{4.8107} \approx 0.00334$$

Таким образом, аналитическое решение системы:

$$x(t) = e^{-0.017857t} (0.9 \cos(4.8107t) + 0.00334 \sin(4.8107t))$$

Характеристики системы:

Собственная частота:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 4.8107 \text{ рад/с}$

Период колебаний:  $T = \frac{2\pi}{\omega_d} = 1.3061 \text{ с}$

Логарифмический декремент затухания:  $\delta = \alpha T = 0.023323$

Время затухания колебаний (до 5% от начальной амплитуды):  $t_{5\%} = \frac{3}{\alpha} = 168.00 \text{ с}$

## 4 Численное решение

Для численного решения ОДУ использованы три метода:

1. Явный (прямой) метод Эйлера
2. Неявный (обратный) метод Эйлера
3. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

### 4.1 Алгоритмы методов

#### 4.1.1 Явный метод Эйлера

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \cdot f(\mathbf{x}_k)$$

#### 4.1.2 Неявный метод Эйлера

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \cdot f(\mathbf{x}_{k+1})$$

Решается итеративно с заданной точностью.

#### 4.1.3 Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

$$\begin{aligned}k_1 &= f(\mathbf{x}_k) \\k_2 &= f\left(\mathbf{x}_k + \frac{h}{2}k_1\right) \\k_3 &= f\left(\mathbf{x}_k + \frac{h}{2}k_2\right) \\k_4 &= f(\mathbf{x}_k + hk_3) \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\end{aligned}$$

## 5 Результаты численного решения

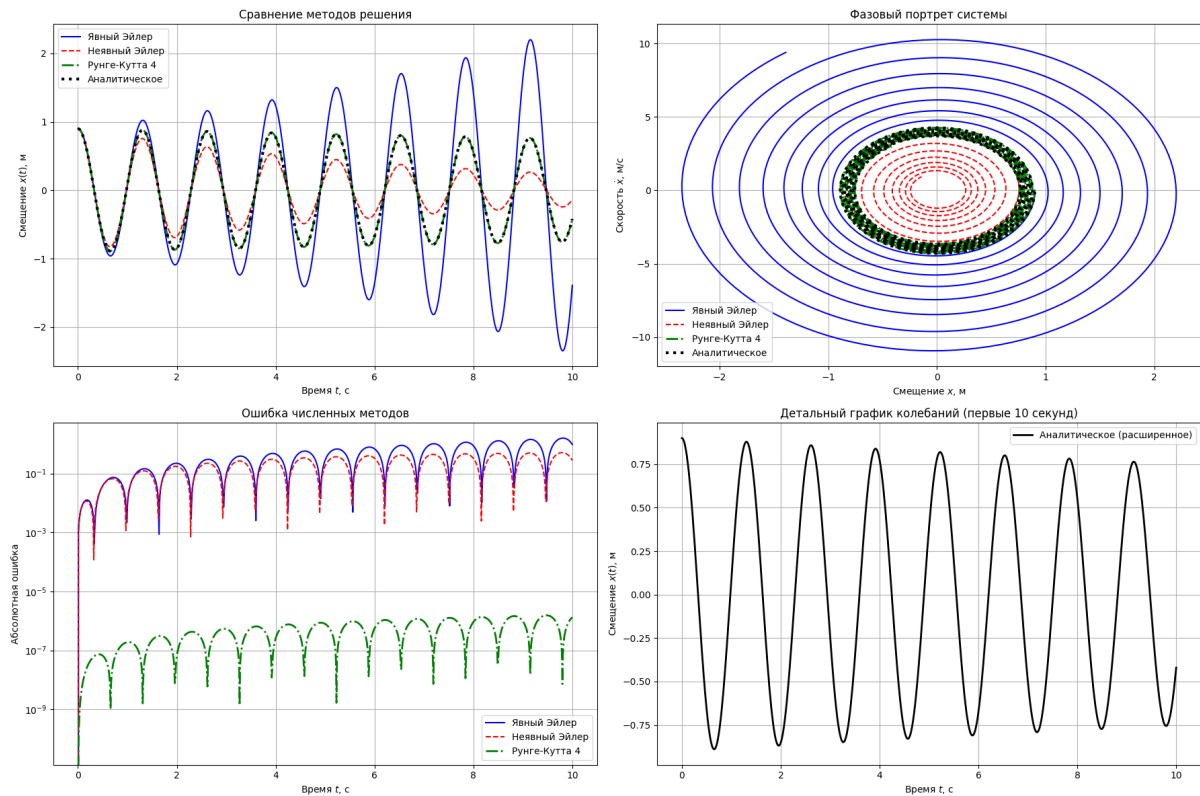


Рис. 2: Сравнение методов решения: а) сравнение решений; б) фазовый портрет системы; в) ошибка численных методов; г) детальный график колебаний

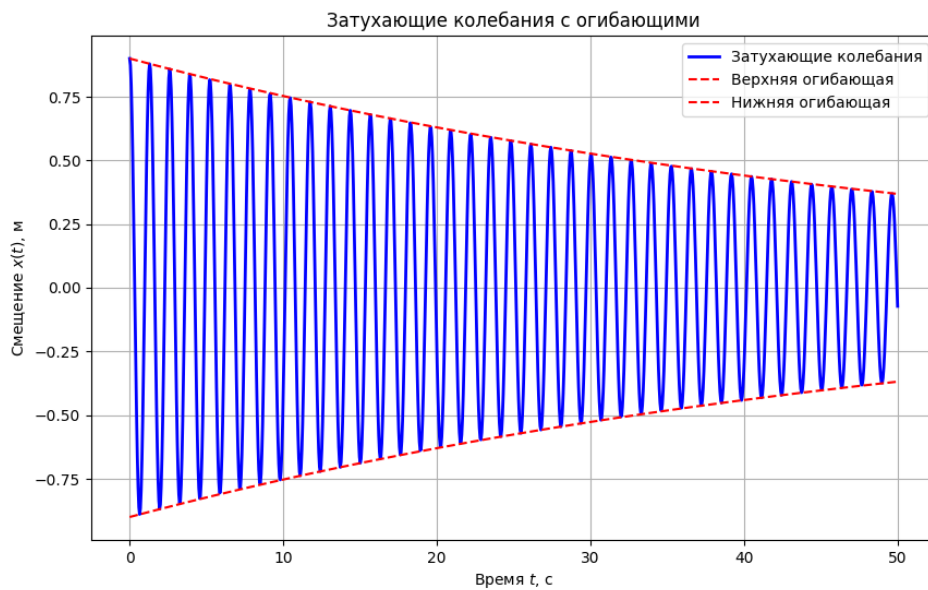


Рис. 3: Затухающие колебания с огибающими

## 6 Сравнение результатов

Точность численных методов оценивалась по максимальной абсолютной ошибке относительно аналитического решения:

Явный Эйлер: 1.592888

Неявный Эйлер: 0.512153

Рунге-Кутта 4: 0.000002

Анализ результатов:

1. Явный метод Эйлера показывает значительные отклонения от аналитического решения, особенно на больших временах. Это связано с низкой устойчивостью метода при больших шагах интегрирования.
2. Неявный метод Эйлера демонстрирует лучшую устойчивость, но все же имеет заметную ошибку. Метод дает более точные результаты, чем явный Эйлер, но менее точные, чем метод Рунге-Кутты.
3. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка показывает превосходную точность, практически полностью совпадая с аналитическим решением. Ошибка метода на 6 порядков меньше, чем у явного метода Эйлера.

На фазовом портрете видно, что:

Траектория явного метода Эйлера расходится, показывая неустойчивость метода

Траектория неявного метода Эйлера сходится, но имеет заметное отклонение

Траектория метода Рунге-Кутты практически совпадает с аналитическим решением

График ошибок подтверждает, что:

Ошибка явного метода Эйлера растет со временем

Ошибка неявного метода Эйлера колеблется, но остается на относительно высоком уровне

Ошибка метода Рунге-Кутты остается минимальной на всем временном интервале

## 7 Выводы

1. Для данной системы масса-пружина-демпфер с малым коэффициентом демпфирования ( $b = 0.025$  Н·с/м) колебания являются слабозатухающими, с периодом  $T = 1.3061$  с и временем затухания до 5% начальной амплитуды около 168 с.
2. Сравнение численных методов показало:

3. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка является наиболее точным и устойчивым методом для решения данной задачи. Его ошибка на 6 порядков меньше, чем у явного метода Эйлера.
4. Неявный метод Эйлера обеспечивает лучшую устойчивость по сравнению с явным, но имеет существенную ошибку.
5. Явный метод Эйлера демонстрирует неустойчивость и значительную ошибку, что делает его непригодным для решения данной задачи при используемом шаге интегрирования.
6. Для систем с колебательным поведением, таких как масса-пружина-демпфер, метод Рунге-Кутты 4-го порядка является предпочтительным для численного решения, так как он обеспечивает высокую точность и устойчивость даже при относительно крупном шаге интегрирования.
7. При использовании методов Эйлера для подобных задач необходимо значительно уменьшать шаг интегрирования, что увеличивает вычислительную сложность и время решения.