МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИСЙКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ

ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Отчёт по практической работе №2

По предмету: «*Имитационное моделирование робототехнических систем*»

Выполнил:

Бойко М.О. R4133c

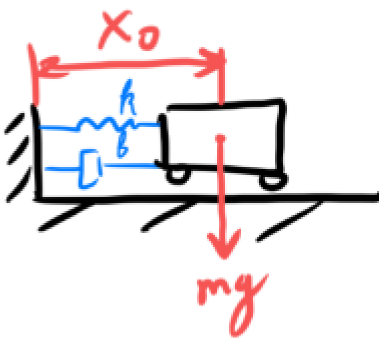
Предоставлено на проверку:

Ракшин Е.А.

Санкт-Петербург, Университет ИТМО
2025

Задание:

1) Составить ОДУ для системы с массой, пружиной и демпфером, используя приведенный ниже вариант:



2) Следует решить составленное ОДУ аналитически и сравнить его с результатами, полученными при решении методами Эйлера (явного/неявного) и Рунге-Кутты 4-го порядка.

Ход работы:

Определимся со значениями, вот мои:

m, kg	k, N/m, Nm/rad	b, N*s/m, Nm*s/rad	l, m	theta_0, rad	x_0, m
1	11.4	0.025	0.97	1.570845115	0.84

Дифференциальное уравнение составим через уравнение Эйлера-Лагранжа через лагранжиан:

L=K-P, где K- кинетическая энергия, а P – потенциальная.

$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ И $P = \frac{1}{2}kx^2$, то L=$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$

Уравнение Эйлера-Лагранжа в общем виде:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q$, где Q=$-b\dot{\theta}$.

Уравнение Эйлера-Лагранжа в нашем виде:

$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$, или $\ddot{x} + 0.025\dot{x} + 11.4x = 0$ – если всё подставим. Теперь решим аналитически. Приведём к характеристическому выражению:

$$y^2 + 0.025y + 11.4 = 0$$

Увы, дискриминант отрицательный. Значит корни будут следующими:

$x_{1,2} = -0.0125 \pm 3.376i$, где β=0.0125 – коэффициент затухания и ω = 3.37635 – частота затухающих колебаний.

Подставляем наши значения в общее решение и получаем:

$$\mathrm{x}(t) = C_1 e^{-0.0125t} sin(3.376t) + C_2 e^{-0.0125t} cos(3.376t)$$

Найдём C1 и C2. При x(0)=0.84 – из условия.

$$x(0) = C_1 e^{-0.0125t} sin(3.376 * 1) + 0 = 0.84$$

C1=0.84

Для C2 надо найти производную:

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = C_1\left(-0.0125 e^{-0.0125t} sin(3.376t) + 3.376 e^{-0.0125t} cos(3.376t)\right) + C_2(-0.0125 e^{-0.0125t} cos(3.376t) - 3.376 e^{-0.0125t} sin(3.376t)$$

Зная что производная x(t)=0, решим выражением и получим что C2=0.003.

Окончательное решение:

$$\mathrm{x}(t) = 0.84 e^{-0.0125t} sin(3.376t) + -0.003 e^{-0.0125t} cos(3.376t)$$

Теперь реализуем программой счёт различными методами и сравним результаты.

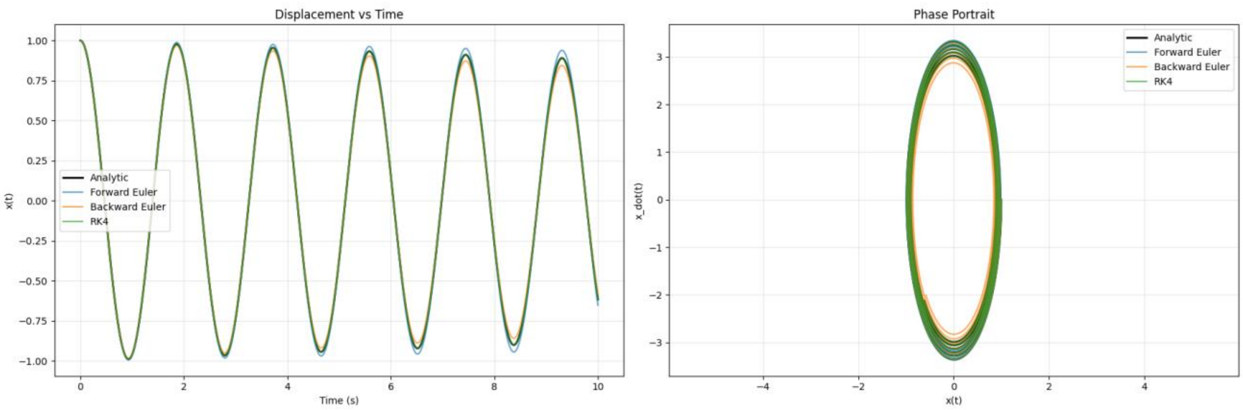


Рис. 1. «1) Изменение пути от времени, 2) Фазовый портрет системы»

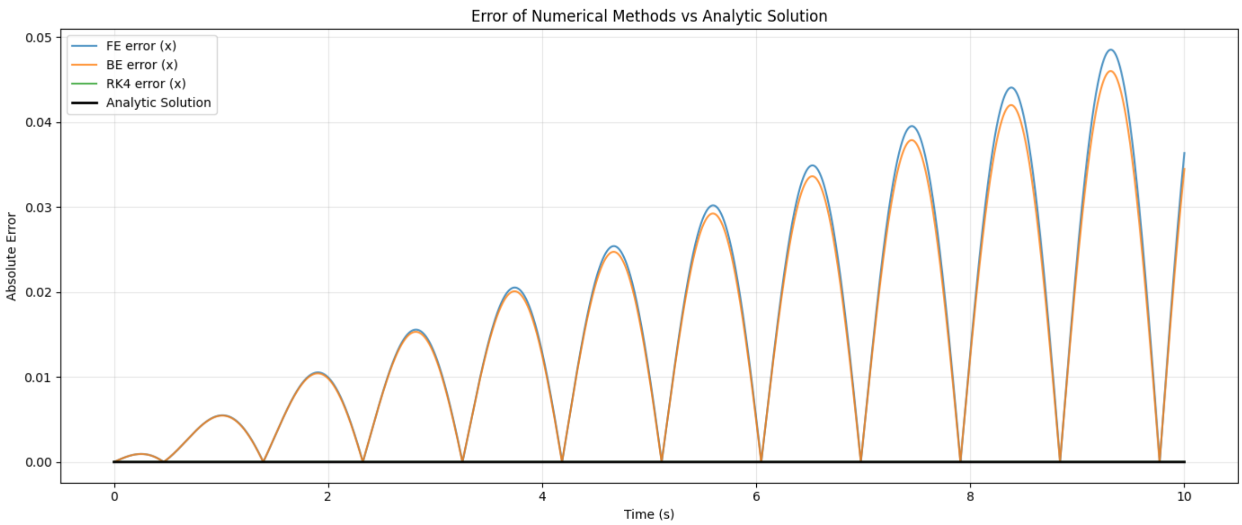


Рис. 2. «Ошибки методов»

Выводы:

В ходе работы была проведена численная интеграция дифференциального уравнения второго порядка, которое было составлено по нашей модели с использованием методов явного/неявного Эйлера и метода Рунге-Кутты 4-го порядка. Также проверяли результат методов с нашим аналитическим решением.

Результаты сравнения показали:

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка практически совпадает с аналитическим решением, ошибки близки к нулю, что подтверждает его высокую точность.

Методы явного и неявного Эйлера демонстрируют заметные отклонения от аналитического решения, особенно по производной (скорости):

ЯВНЫЙ: максимальная ошибка угла ~0.013, максимальная ошибка скорости ~0.046

НЕЯВНЫЙ: максимальная ошибка угла ~0.012, максимальная ошибка скорости ~0.043

Средние ошибки находятся на уровне 0.004–0.016.

Ошибки методов Эйлера сохраняются относительно небольшими благодаря малому шагу интегрирования, однако RK4 обеспечивает лучшую стабильность и точность на протяжении всего временного интервала.

Вывод:

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка является предпочтительным для численного решения дифференциальных уравнений с малой диссипацией и высокой частотой, обеспечивая минимальные ошибки относительно аналитического решения. Методы Эйлера могут быть использованы для грубой аппроксимации, но их точность ограничена и зависит от размера шага интегрирования.