

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

Практическая работа №1

По дисциплине «Имитационное моделирование робототехнических систем»

Выполнил: студент гр. № R4133c _____ / Пивоварова И.К.

Проверил: ассистент _____ / Ракшин Е.А.

Санкт-Петербург
2025

Входные данные:

Вариант 40

a	b	c	d
-0,32	-8,56	-8	9,59

Задание:

1. Решите аналитически ОДУ в виде

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = d$$

2. Решите ОДУ с помощью трёх интеграторов: методы явного/неявного Эйлера, Рунге-Кутты

3. Сравните результаты этих методов с аналитическим решением, обсудите и сделайте выводы

Ход работы:

1. Решим уравнение аналитически. Для этого сначала найдём решение однородного уравнения вида:

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$D = (-8,56)^2 - 4 * (-0,32) * (-8) = 63,0336$$

Дискриминант положителен, поэтому ищем решение в виде

$$x_0(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Рассчитаем корни:

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{8,56 + 63,0336}{-0,64} = -25.7803$$

$$\lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{8,56 - 63,0336}{-0,64} = -0.9697$$

Тогда общее решение:

$$x_0(t) = C_1 e^{-25.7803t} + C_2 e^{-0.9697t}$$

Найдём частное решение как:

$$x_q = \frac{d}{c} = \frac{9,59}{-8} = -1,195$$

Общее решение:

$$x(t) = x_0(t) + x_q = C_1 e^{-25.7803t} + C_2 e^{-0.9697t} - 1,195$$

При нулевых начальных условиях $x_0 = [0.0, 0.0]^T$:

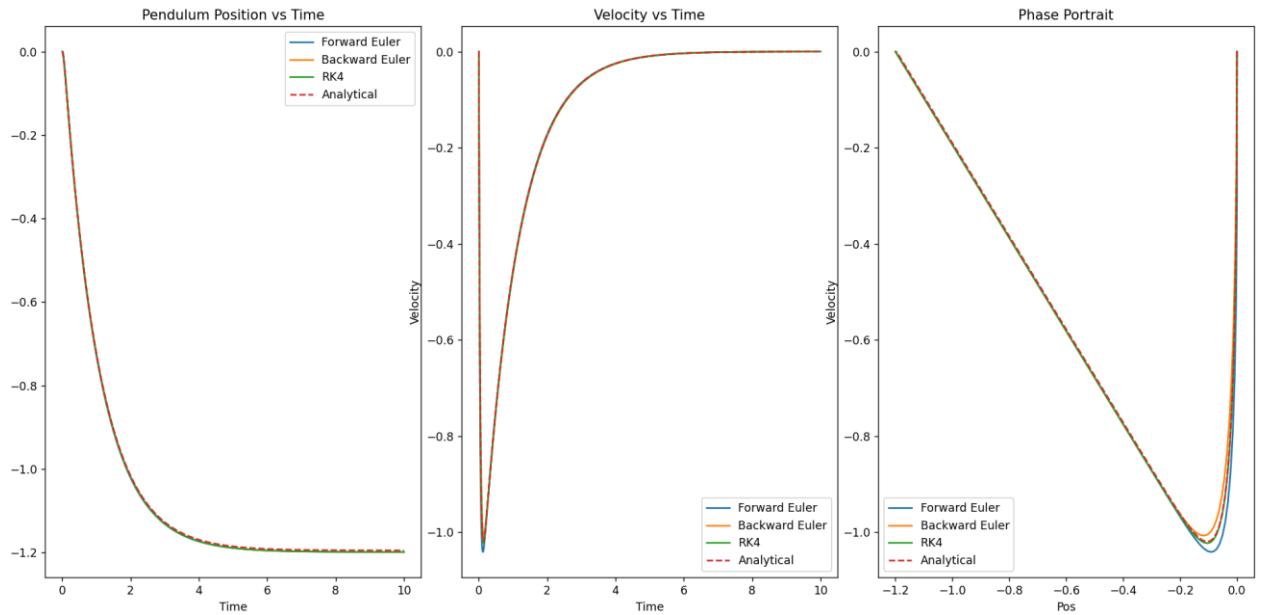
$$C_1 = -0.0467$$

$$C_2 = 1.2417$$

Тогда:

$$x(t) = -0.0467e^{-25.7803t} + 1.2417e^{-0.9697t} - 1.195$$

2. Используем интеграторы для нахождения решения ДУ и сравним с аналитическим решением:



Высчитаем среднеквадратическую ошибку (RMSE):

```
RMSE Position:  
Forward Euler: 0.004034  
Backward Euler: 0.003057  
RK4: 0.003442  
  
RMSE Velocity:  
Forward Euler: 0.005555  
Backward Euler: 0.004430  
RK4: 0.000814
```

Метод Рунге-Кутты показывает минимальное значение среднеквадратичной ошибки 0,003442 для положения и 0,000814 для скорости.

Метод прямого Эйлера обеспечивает приемлемую точность с ошибками 0,004034 по положению и 0,005555 по скорости.

Метод обратного Эйлера показывает ошибки 0,003057 по положению и 0,004430 по скорости, что ниже, чем у прямого.

Вывод: Анализ результатов показывает, что наиболее точным методом моделирования по положению и скорости является метод Рунге-Кутты за счёт более сложных вычислений, что сказывается на скорости его работы. В тоже время методы Эйлера выполняют расчёты за меньшее время, но проигрывают в точности.

Таким образом, рекомендуется использовать метод Рунге-Кутты для получения максимально точных результатов, а методы Эйлера использовать для быстрого приближения при меньших требованиях к точности или при ограниченных вычислительных ресурсах.