МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

Отчёт
по практическому заданию №1
”Численное интегрирование линейных ОДУ”

по дисциплине:
Имитационное моделирование робототехнических систем

Студент:
Группа № R4134c *К.С. Хитушкин*

Предподаватель:
Ассистент ФСУиР *Е.А. Ракшин*

Санкт-Петербург 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы:

Изучить и сравнить численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на примере заданного уравнения и оценить их точность по сравнению с аналитическим решением.

Задание:

В рамках практического задания необходимо:

1. Решить аналитически ОДУ в виде:

$$a \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = d$$

2. Решить ОДУ с помощью трёх интеграторов: явного и неявного методов Эйлера, а также метода Рунге–Кутты.
3. Сравнить результаты этих методов с аналитическим решением и сделать выводы.

Заданные параметры:

$$a = 9.66, b = 5.18, c = -2.49, d = 2.42.$$

1 ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1.1 Аналитическое решение

Исходное уравнение:

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = d,$$

где $a = 9.66$, $b = 5.18$, $c = -2.49$, $d = 2.42$.

Характеристическое уравнение:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \Rightarrow 9.66\lambda^2 + 5.18\lambda - 2.49 = 0.$$

Дискриминант $D = b^2 - 4ac = 5.18^2 - 4 \cdot 9.66 \cdot (-2.49) = 123.046.$

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \Rightarrow \lambda_1 = 0.306, \quad \lambda_2 = -0.842.$$

Однородное решение:

$$X(t) = C_1 e^{0.306t} + C_2 e^{-0.842t}.$$

Частное решение :

$$c\tilde{x} = d \Rightarrow \tilde{x} = \frac{d}{c} = \frac{2.42}{-2.49} = -0.972.$$

Общее решение:

$$x(t) = C_1 e^{0.306t} + C_2 e^{-0.842t} - 0.972.$$

Возьмём в качестве начальных условий $x(0) = 0.1$, $\dot{x}(0) = 0$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 0.972 = 0.1 \\ 0.306C_1 - 0.842C_2 = 0 \end{cases}$$

Решая систему, получаем:

$$C_1 \approx 0.786, \quad C_2 \approx 0.286.$$

Итоговое решение:

$$x(t) = 0.786e^{0.306t} + 0.286e^{-0.842t} - 0.972$$

1.2 Решение численными методами

1.2.1 Исследуемые методы численного интегрирования

Для применения численных методов перепишем исходное уравнение $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = d$ в систему первого порядка. Пусть $y_1 = x, y_2 = \dot{x}$, тогда получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{1}{a}\left(d - by_2 - cy_1\right) \end{cases}$$

или в векторной форме $\dot{y} = f(t, y)$, где $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Для численного решения используются методы:

1. **Явный метод Эйлера:**

$$y_i = y_{i-1} + hf(t_{i-1}, y_{i-1})$$

2. **Неявный метод Эйлера:**

$$y_i = y_{i-1} + hf(t_i, y_i)$$

3. **Метод Рунге–Кутта 4-го порядка:**

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_{i-1}, y_{i-1}) \\ k_2 &= f\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(t_{i-1} + h, y_{i-1} + hk_3) \\ y_i &= y_{i-1} + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

Для расчётов использовались методы, предложенные в файле `integrators.ipynb`.

1.2.2 Параметры эксперимента

Рассматриваемое уравнение второго порядка:

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = d$$

Параметры эксперимента:

– Начальное состояние: $y_0 = (0.1\ 0.0)^{\mathrm{T}}$
– Время моделирования: $T_f = 20.0$
– Шаг интегрирования: $h = 0.1$
– Параметры уравнения: $a = 9.66; b = 5.18; c = -2.49; d = 2.42$

Для наглядности параметры размера шага и времени моделирования были увеличены.

1.2.3 Эксперимент

Было проведено моделирование системы с использованием трёх численных методов: Forward Euler, Backward Euler и Runge-Kutta 4-го порядка. Результаты сравнения с аналитическим решением представлены на рисунке 1.

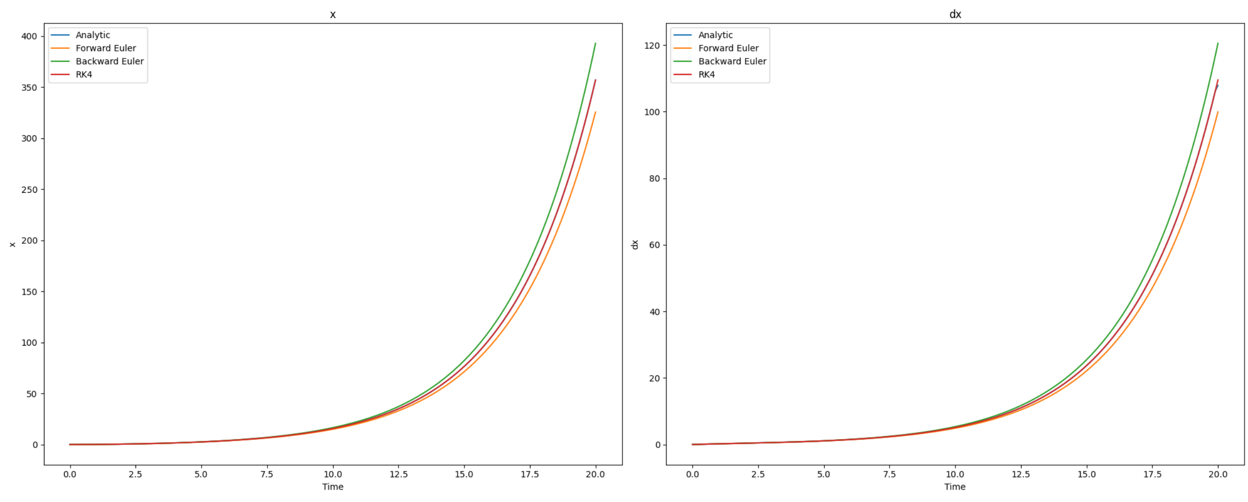

Рисунок 1 — Сравнение аналитического решения и численных методов

На рисунке 2 показаны графики абсолютной ошибки численных методов по сравнению с аналитическим решением. Из рисунка видно, что ошибка метода Runge-Kutta 4 существенно меньше, чем у методов Эйлера, как для положения, так и для скорости.

В таблице 1 приведены максимальные значения абсолютных ошибок для всех методов.

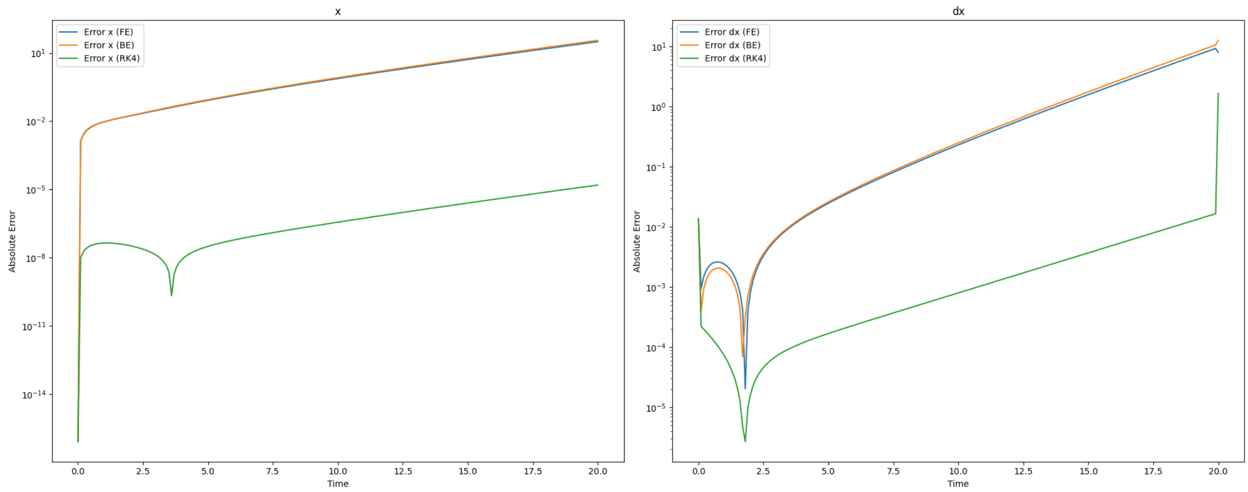

Рисунок 2 — Графики абсолютной ошибки численных методов по сравнению с аналитическим решением

Таблица 1 — Максимальные абсолютные ошибки численных методов интегрирования

Метод	Ошибка позиции	Ошибка скорости
Forward Euler	31.387	9.288
Backward Euler	35.907	12.648
Runge-Kutta 4	1.561e-05	1.659

1.2.4 Анализ результатов

Сравнение численных методов интегрирования показывает:

- Метод Runge-Kutta 4-го порядка обеспечивает наибольшую точность. Ошибки для позиции и скорости в этом методе значительно меньше, чем у методов Эйлера.
- Явный и неявный методы Эйлера демонстрируют более высокую ошибку, особенно при большом шаге интегрирования $h = 0.1$. Разница между ними невелика, однако Backward Euler имеет тенденцию к несколько большему расхождению по сравнению с Forward Euler для данной системы. Также можно заметить, что в случае данный выпуклой функции явный Эйлер склонен преуменьшать реальное значение, в то время как неявный наоборот преувеличивать.
- Наблюдается, что точность численных методов сильно зависит от выбора шага интегрирования. Для методов Эйлера уменьшение ша-

га существенно снижает ошибку, в то время как для метода Рунге–Кутта даже относительно крупный шаг даёт высокую точность.

Для решения линейного дифференциального уравнения второго порядка предпочтительно использовать метод Рунге-Кутта 4-го порядка, так как он обеспечивает наилучшую точность. Методы Эйлера могут быть применимы для грубых оценок или при необходимости быстрого вычисления, но их использование требует значительно меньшего шага, чтобы достичь сопоставимой точности.

ВЫВОД

В ходе выполнения работы было проведено аналитическое и численное решение дифференциального уравнения второго порядка. Сравнение методов показало, что метод Рунге–Кутта 4-го порядка обеспечивает наибольшую точность, тогда как методы Эйлера могут применяться для быстрых оценок, но требуют уменьшения шага для получения сопоставимой точности.