МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

Отчёт
по практическому заданию №2

по дисциплине:
Имитационное моделирование робототехнических систем

Студент:
Группа № R4134c *К.С. Хитушкин*

Предподаватель:
Ассистент ФСУиР *Е.А. Ракшин*

Санкт-Петербург
2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы:

Изучить и сравнить численные и аналитические методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений на примере системы второго порядка и оценить точность численных методов.

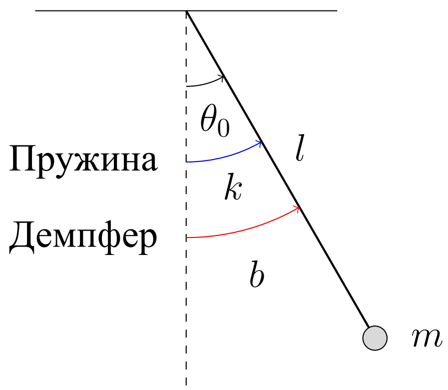
Задание:

В рамках практического задания необходимо:

1. Составить дифференциальное уравнение для заданной системы.
2. Попробовать решить составленное ОДУ аналитически. Если решение невозможно, объяснить причину.
3. Решить ОДУ численно с использованием выбранных методов.
4. Сравнить результаты численных методов с аналитическим решением (если оно существует) и сделать выводы.

Заданные параметры: $m = 0.7$ кг, $k = 8.8$ Н/м, $b = 0.02$ Н·с/м, $l = 0.44$ м, $\theta_0 = -1.083883129$ рад, $x_0 = 0.3$ м.

Заданная система:



1 ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1.1 Аналитическое решение

Выберем в качестве обобщённой координаты угол отклонения маятника от вертикали θ. Кинетическая энергия системы:

$$K(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2, \tag{1}$$

где m – масса груза,

l – длина маятника.

Потенциальная энергия системы:

$$P(\theta) = mgl(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} k \theta^2, \tag{2}$$

где k – жёсткость угловой пружины,

$g \approx 9.8$ м/с^2 – ускорение свободного.

Лагранжиан системы:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = K(\theta, \dot{\theta}) - P(\theta). \tag{3}$$

Демпфирование включается через обобщённую силу:

$$Q_\theta = -b\dot{\theta}. \tag{4}$$

где b – коэффициент демпфирования.

Уравнение движения получается из уравнения Лагранжа с обобщёнными силами:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_\theta. \tag{5}$$

Подставляя энергии и обобщённую силу, получаем уравнение движения:

$$m l^2 \ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta + mgl \sin\theta = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) нелинейно из-за $\sin\theta$ и не имеет аналитического решения через стандартные функции. Траекторию $\theta(t)$ находят численно, например методом Рунге-Кутты.

1.2 Решение численными методами

1.2.1 Параметры эксперимента

Было проведено моделирование системы опысанной в уравнении (6) с использованием трёх численных методов интегрирования: явного метода Эйлера (Forward Euler), неявного метода Эйлера (Backward Euler) и метода Рунге-Кутты 4-го порядка (RK4).

Параметры эксперимента:

– Начальное состояние: $\theta_0 = -1.083883129$, $\dot{\theta}_0 = 0.0$
– Время моделирования: $T_f = 10.0$ с
– Шаг интегрирования: $h = 0.01$ с
– Параметры системы: $m = 0.7$ кг, $l = 0.44$ м, $k = 8.8$ Н/м, $b = 0.02$ Н·с/м, $g = 9.8$ м/с²

1.2.2 Эксперимент

Результаты представлены на рисунке 1.

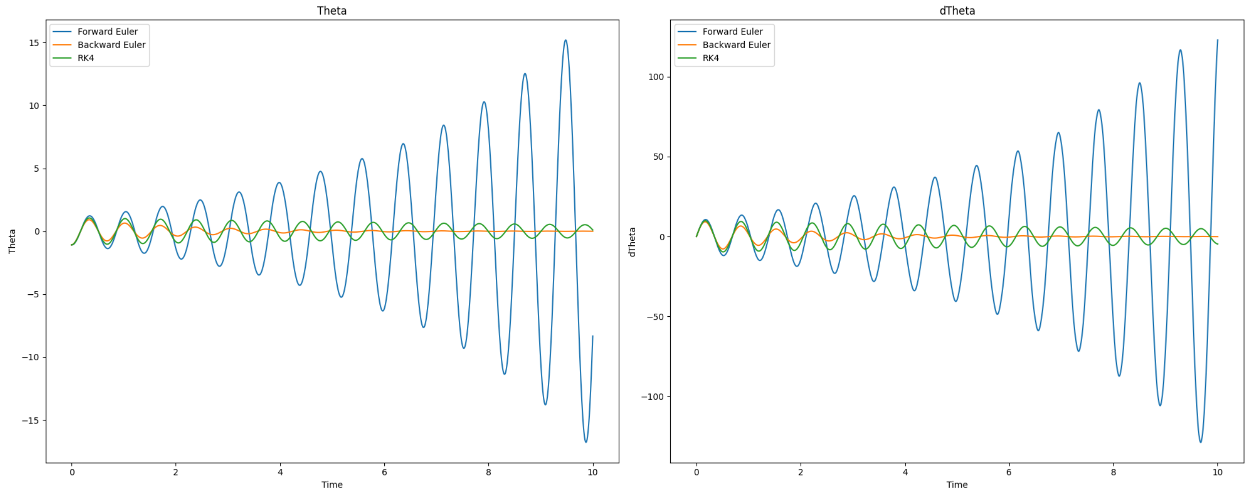


Рисунок 1 — Сравнение численных методов для маятника

1.2.3 Анализ результатов

Из графиков видны характерные особенности численных методов:

- Метод Рунге-Кутты 4-го порядка сохраняет физически реалистичное поведение затухающих колебаний, обеспечивая плавное уменьшение амплитуды.
- Явный метод Эйлера (Forward Euler) демонстрирует расходимость колебаний при выбранном шаге интегрирования.
- Неявный метод Эйлера (Backward Euler) стабилизирует решение, однако колебания затухают слишком быстро.
- Точность численного решения сильно зависит от выбора шага h. Для Рунге-Кутты 4-го порядка даже относительно крупный шаг даёт правдоподобный результат.

Таким образом, для моделирования нелинейного демпфированного маятника предпочтительно использовать метод Рунге-Кутты 4-го порядка, так как он обеспечивает корректное затухание колебаний и адекватное представление динамики системы. Методы Эйлера могут применяться для грубых оценок или быстрых вычислений, но требуют значительно меньшего шага интегрирования.

ВЫВОД

В ходе выполнения работы была проведена численная интеграция нелинейного уравнения движения маятника с использованием методов Forward Euler, Backward Euler и Runge-Kutta 4-го порядка. Анализ результатов показал, что метод Рунге-Кутты 4-го порядка обеспечивает наиболее корректное затухание колебаний, тогда как методы Эйлера демонстрируют либо расходимость (Forward Euler), либо чрезмерное затухание (Backward Euler) и требуют уменьшения шага интегрирования для сопоставимой точности.