МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Лабораторная работа №2

по дисциплине
«Имитационное моделирование робототехнических систем»
Вариант 1

Студент:

Группа R4135c *Лущенко А.С.*

Преподаватель: *Ракшин Е.А.*

Санкт-Петербург 2025

Содержание

Постановка задачи **2**

Ход работы **4**

1.1 Вывод однородного дифференциального уравнения 4

1.2 Моделирование 5

Вывод **11**

Постановка задачи

В данной лабораторной работе рассматривается маятник с пружиной и демпфером, для которого требуется составить однородное дифференциальное уравнение с помощью уравнения Эйлера-Лагранжа и сравнить с аналитическим решением, если оно существует.

Параметры, используемые в работе:

- Масса $m = 0.9$, кг.;
- Жесткость пружины $k = 13$, $\frac{\text{Н}}{\text{м}}$;
- Коэффициент демпфирования $b = 0.05$, $\frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}}$;
- Длина маятника $l = 0.83$, м;
- Начальное положения угла $\theta_0 = -0.879673264216148$, рад;
- Смещение $x_0 = 0.52$, м;

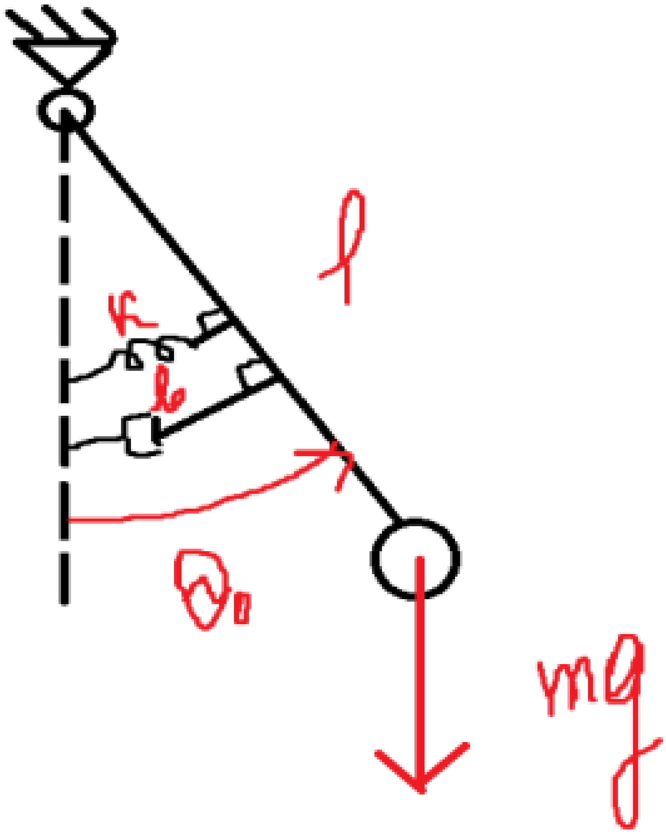

Рис. 1.1: Схема механизма с пружиной и демпфером.

Ход работы

1.1 Вывод однородного дифференциального уравнения

Для механизма, изображенного на рисунке 1.1 θ – угол отклонения маятника. В данной работе θ – обобщенная координата.

Для того, чтобы получить однородное дифференциальное уравнение с помощью метода Эйлера-Лагранжа требуется найти кинтеческую K и потенциальную P энергии:

$$K = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} P &= -mgl\cos\theta + \frac{1}{2}k(l\tan\theta - l\tan\theta_0)^2 \\ &= -mgl\cos\theta + \frac{1}{2}kl^2(\tan\theta - \tan\theta_0)^2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

На основе кинетической и потенциальной энергии можно используется уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = Q, \tag{1.3}$$

где $\mathcal{L}$ – ланагражиан, Q – внешние силы, которые действуют на систему.

$$Q = -bl\dot{\theta} \tag{1.4}$$

$$\mathcal{L} = K - P = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta - \frac{1}{2}kl^2(\tan^2\theta - 2\tan\theta_0\tan\theta + \tan^2\theta_0) \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta - \frac{1}{2}kl^2\left(\frac{2\sin\theta}{\cos^3\theta} - \frac{2\tan\theta_0}{\cos^2\theta}\right) = -mgl\sin\theta - kl^2\left(\frac{\tan\theta - \tan\theta_0}{\cos^2\theta}\right) \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \tag{1.7}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} \tag{1.8}$$

После того, как были получены $\mathcal{L}$ и Q, можно воспользоваться уравнением Эйлера-Лагранжа:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta + kl^2\left(\frac{\tan\theta - \tan\theta_0}{\cos^2\theta}\right) = -bl\dot{\theta} \tag{1.9}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{b}{ml}\dot{\theta} - \frac{g}{l}\sin\theta - \frac{k}{m}\left(\frac{\tan\theta - \tan\theta_0}{\cos^2\theta}\right) \tag{1.10}$$

1.2 Моделирование

Используя данные из блока "Постановка задачи"можно провести моделирование в среде Simulink:

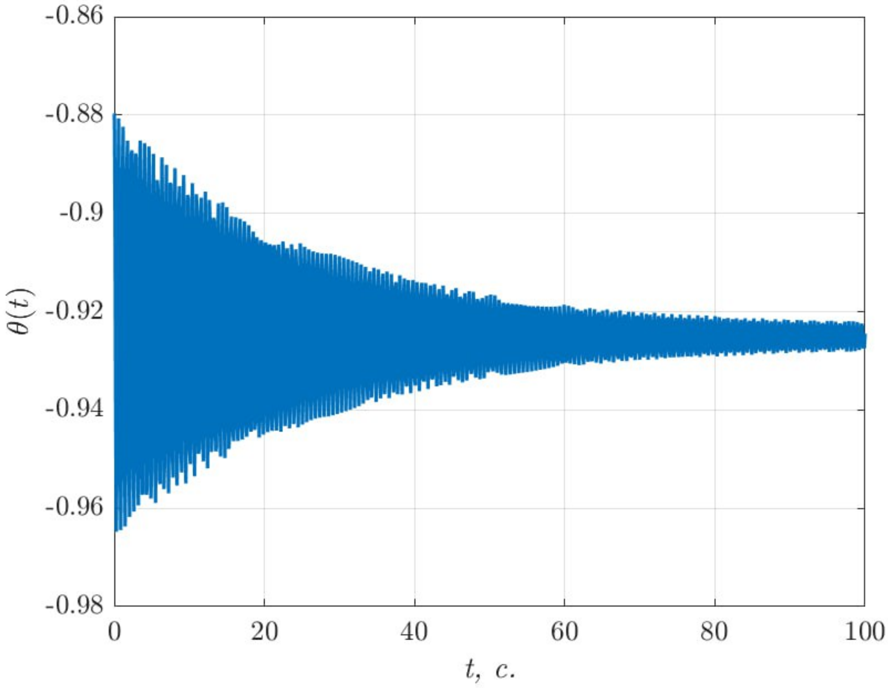

Рис. 1.2: График обобщенной координаты θ

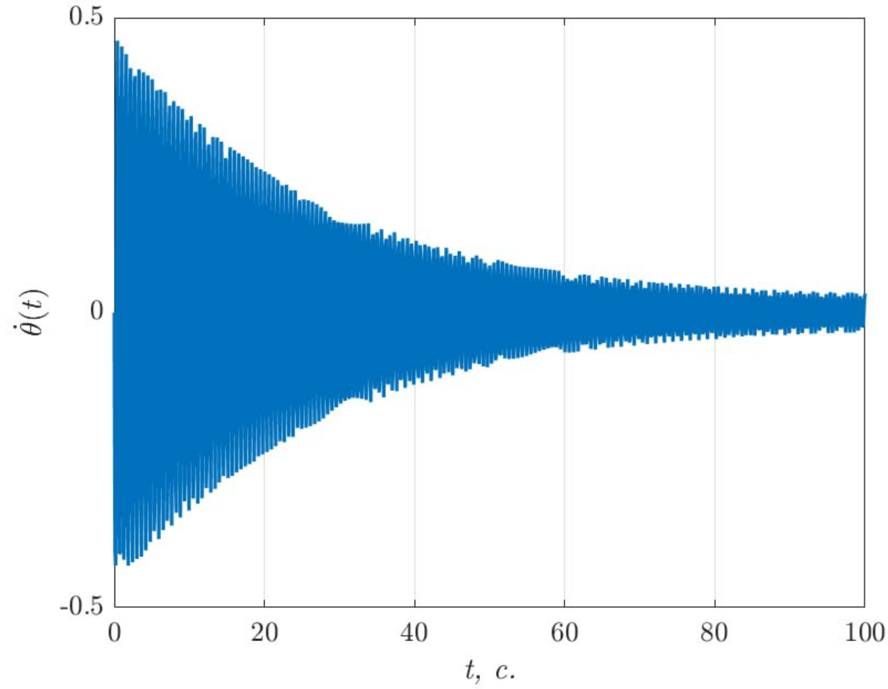

Рис. 1.3: График скорости изменения обобщенной координаты $\dot{\theta}$

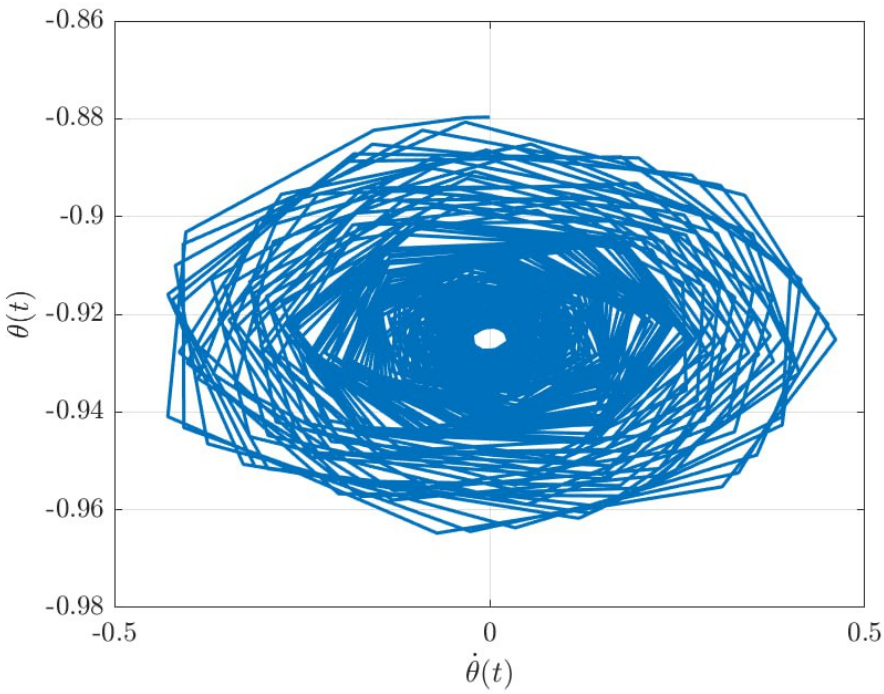

Рис. 1.4: Фазовый портрет

На графике $\theta(t)$ видно, что после отклонения θ колеблется около θ_0 . График угловой скорости $\dot{\theta}(t)$ стремится к нулю.

Для сравнения строятся графики положения и улговой скорости которы были получены с помощью методов Эйлеров и Рунге-Кутта:

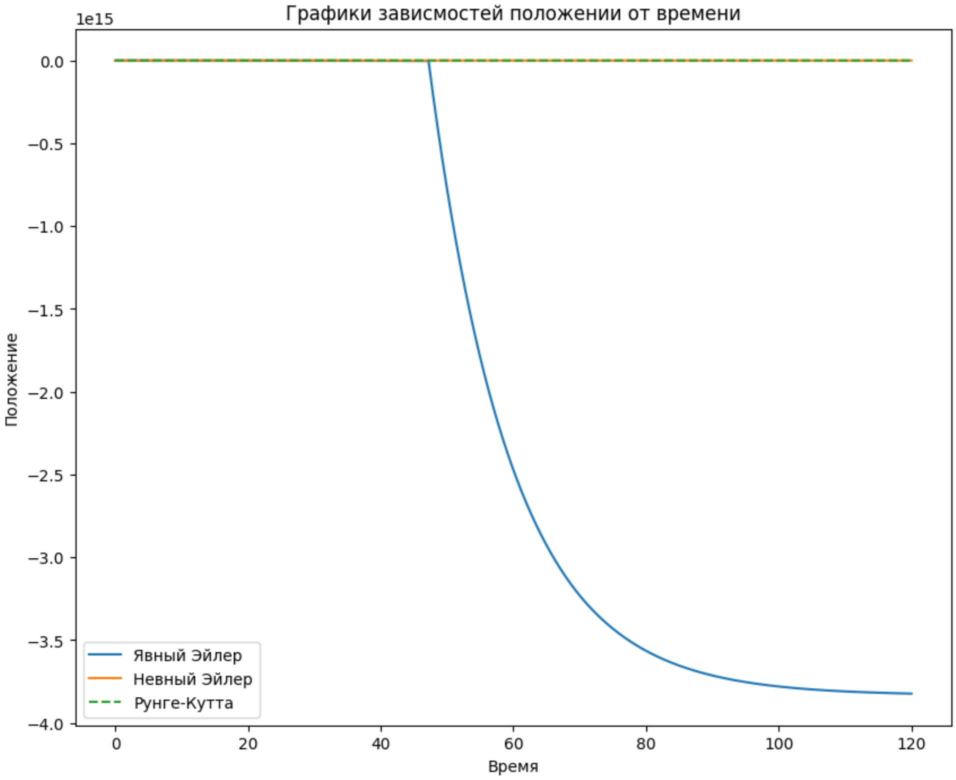

Рис. 1.5: График обобщенной координаты θ

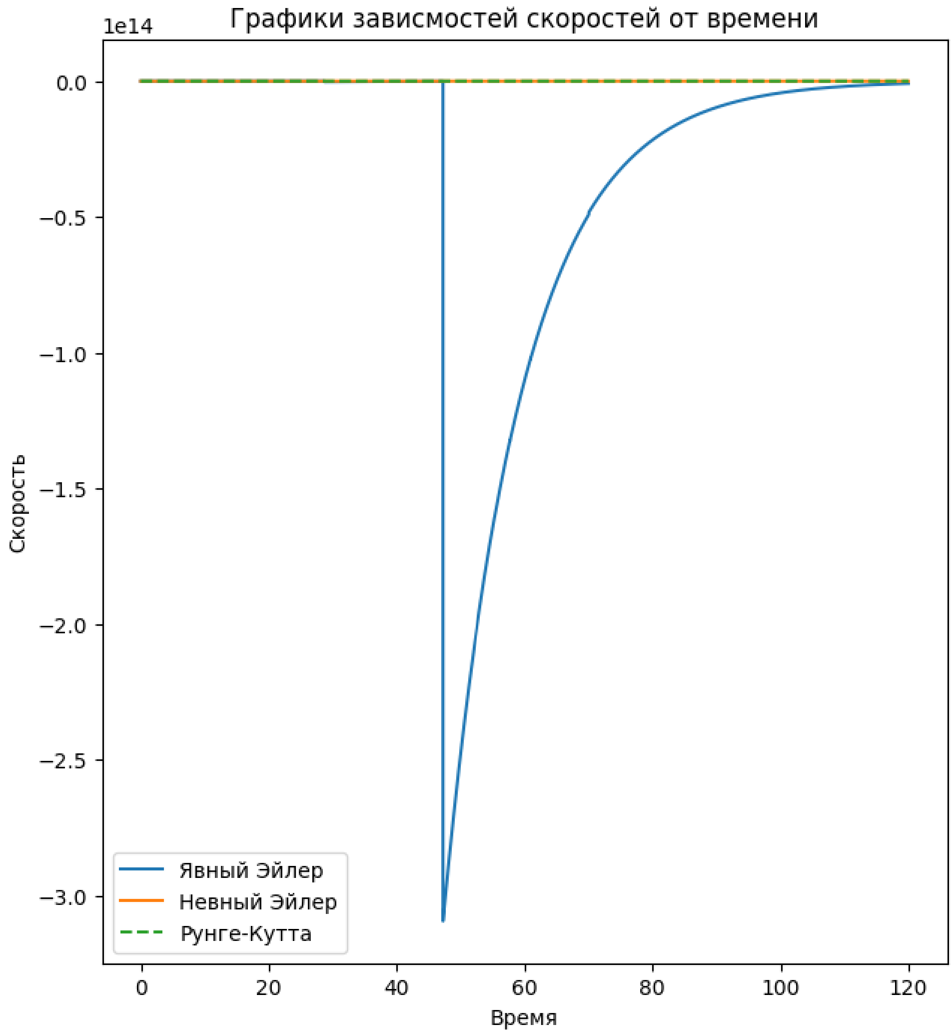

Рис. 1.6: График скорости изменения обобщенной координаты $\dot{\theta}$

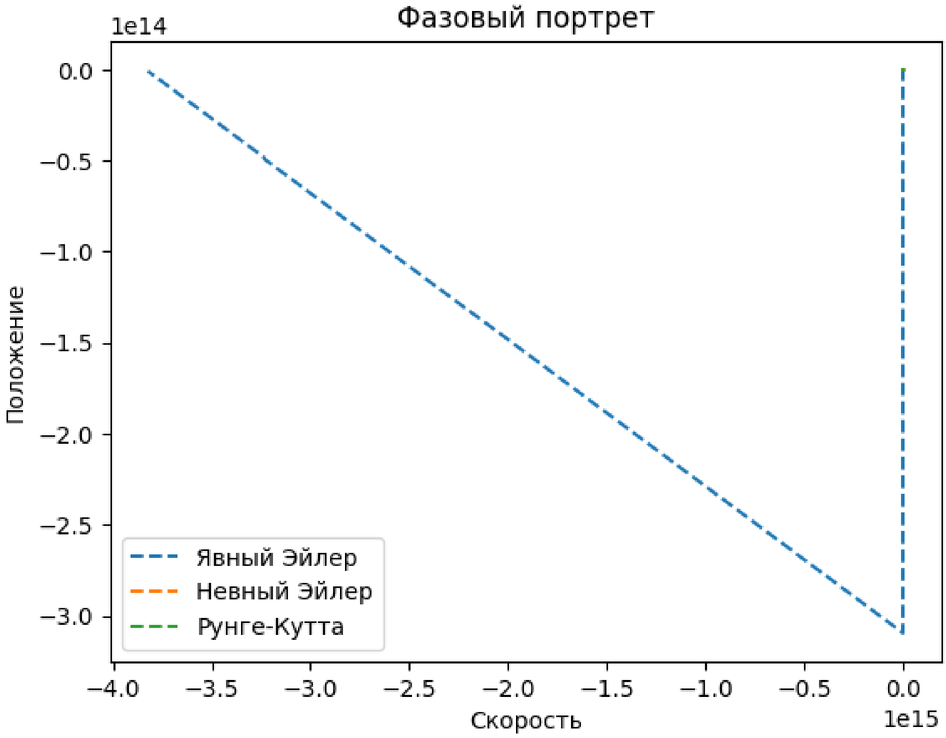

Рис. 1.7: Фазовый портрет

Вывод

В ходе работы было получено однородное дифференциальное уравнение для механизма. Аналитическое решение данного дифференциального уравнения невозможно найти, так как будет присутстовать сингулярность и нелинейностей.

На основе кинетической и потенциальной энергиях было составлено уравнение Эйлера-Лагранжа. Для изучения динамики системы было проведено моделирование в Simulink, которая успешно построила графики, используя встроенные алгоритмы. Кроме того, предпринималась попытка применить численные методы из предыдущей лабораторной работы, но безуспешно, так как значения становятся близки к бесконечности, из-за $\cos\theta \approx 0$.