МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Лабораторная работа №2

по дисциплине
«Имитационное моделирование робототехнических систем»
Вариант 42

Студент:

Группа R4135c *Петрищев А.С.*

Преподаватель: *Ракшин Е.А.*

Санкт-Петербург 2025

# СОДЕРЖАНИЕ

## 1 Введение

В данной лабораторной работе будет рассмотрен маятник с пружиной и демпфером. С помощью уравнения Эйлера-Лагранжа будет получено дифференциальное уравнение, описывающее изменение обобщенный координаты во времени. В данной случае обобщенной координатой будет угол отклонения маятника от вертикальной оси.

## 2 Ход работы

### 2.1 Кинетическая и потенциальная энергия

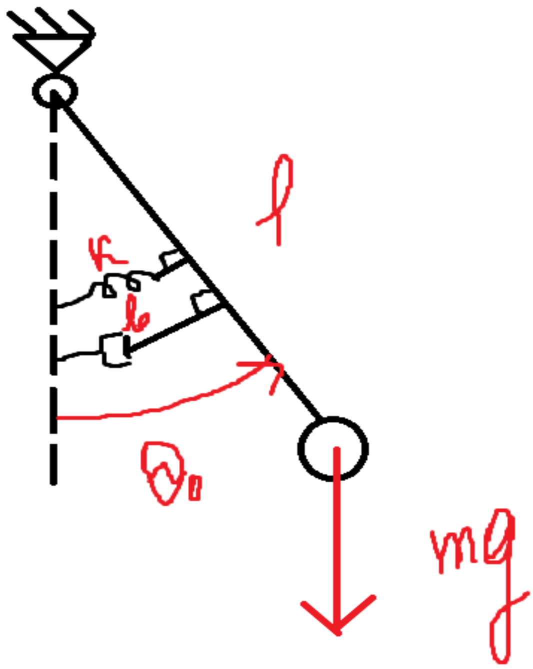


Рисунок 1 — Схема механизма

Пусть обощенной координатой будет $\theta$ - угол отклонения маятника от вертикальной оси.

Найдем кинетическую и потенциальную энергию маятника:

$$K = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \tag{2.1}$$

$$P = -mgl\cos\theta + \frac{1}{2}k(l\tan\theta - l\tan\theta_0)^2 = -mgl\cos\theta + \frac{1}{2}kl^2(\tan\theta - \tan\theta_0)^2 \tag{2.2}$$

### 2.2 Уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = Q \tag{2.3}$$

, где $\mathcal{L}$– Лагранжиан системы, а $Q$– внешние силы, действующие на систему

$$Q = -bl\dot{\theta} \tag{2.4}$$

$$\mathcal{L} = K - P = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta - \frac{1}{2}kl^2(\tan^2\theta - 2\tan\theta_0\tan\theta + \tan^2\theta_0) \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -mgl\sin\theta - \frac{1}{2}kl^2(\frac{2\sin\theta}{\cos^3\theta} - \frac{2\tan\theta_0}{\cos^2\theta}) = -mgl\sin\theta - kl^2(\frac{\tan\theta - \tan\theta_0}{\cos^2\theta}) \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \tag{2.7}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}) = ml^2\ddot{\theta} \tag{2.8}$$

Подставим полученное в уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta + kl^2(\frac{\tan\theta - \tan\theta_0}{\cos^2\theta}) = -bl\dot{\theta} \tag{2.9}$$

Перенесем и поделим на $ml^2$:

$$\ddot{\theta} = -\frac{b}{ml}\dot{\theta} - \frac{g}{l}\sin\theta - \frac{k}{m}(\frac{\tan\theta - \tan\theta_0}{\cos^2\theta}) \tag{2.10}$$

### 2.3 Моделирование

$m = 0.3$, $k = 4.2$, $b = 0.03$, $l = 0.92$, $\theta_0 = -0.7226$

Промоделируем систему с помощью среды Matlab/Simulink:

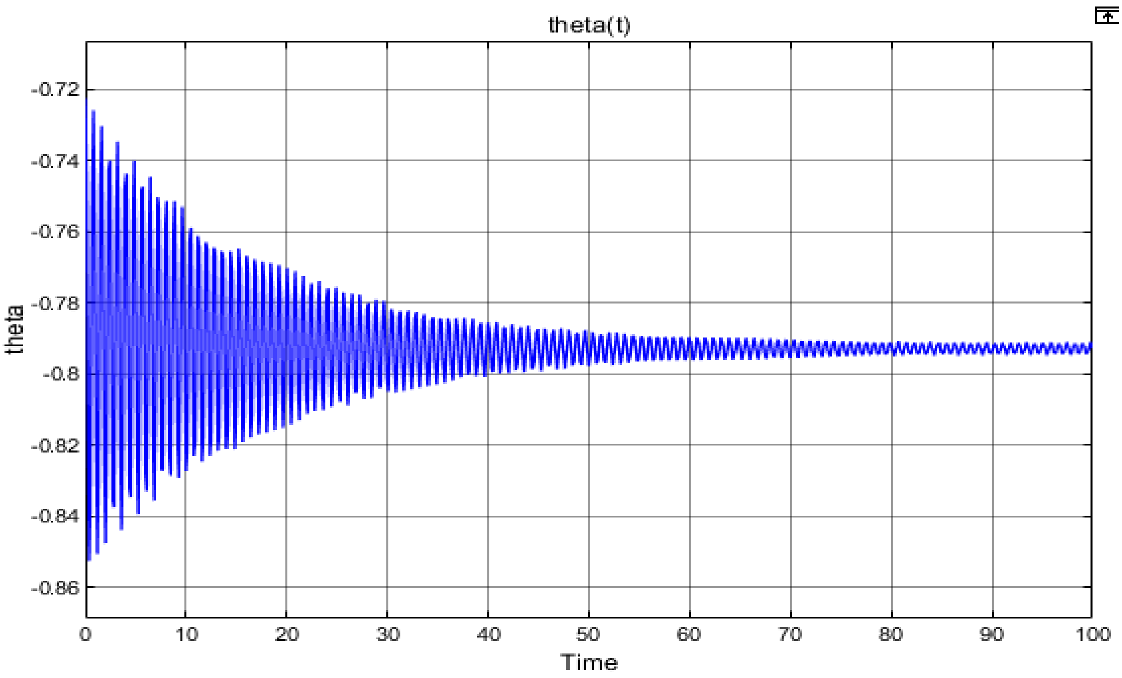


Рисунок 2 — График обощенной координаты

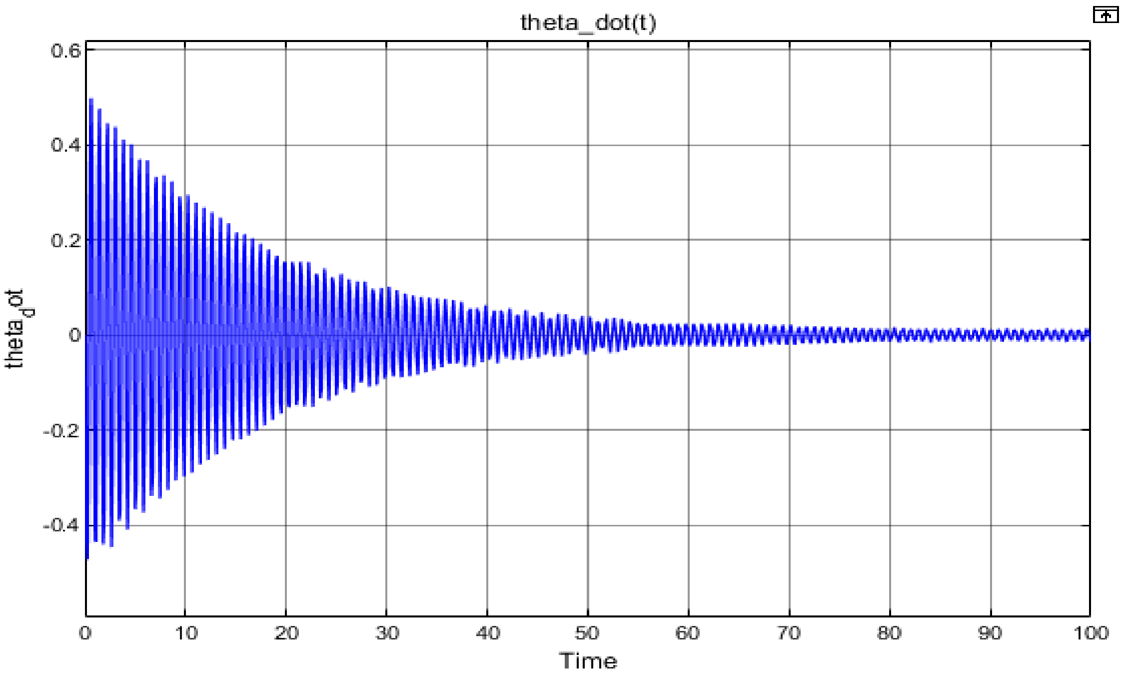


Рисунок 3 — График скорости изменения обощенной координаты

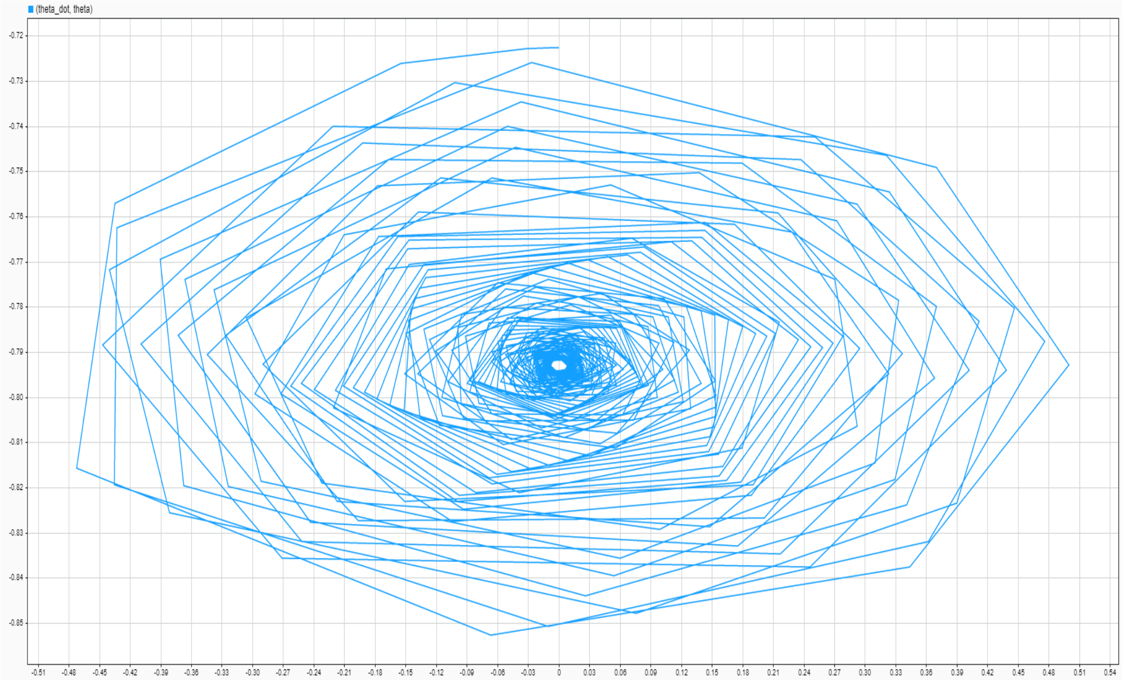


Рисунок 4 — Фазовый портрет

На графике $\theta(t)$ видно затухающие колебания около начального угла $\theta_0$. График угловой скорости $\dot{\theta}(t)$ стремится к нулевому значению.

Результаты численного решения полученного ДУ методами Рунге-Кутты, явного и неявного Эйлера представлены на Рис. 5. Моделирование методами из прошлой лабораторной работы на Python проведено неуспешно по нескольким причинам: уход на бесконечность при приближении $\cos\theta$ к 0, отсутствие контроля ошибки, а также собственные недостатки методов. Все это приводит к искажению фазового портрета системы.

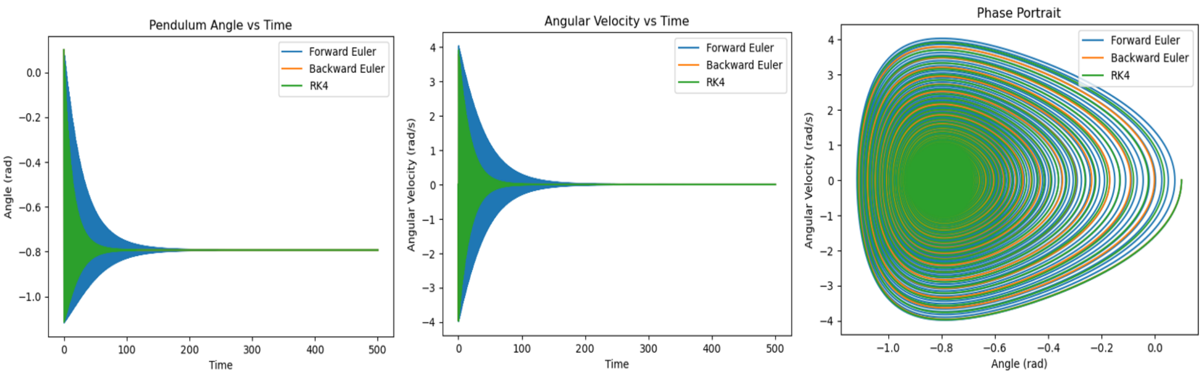


Рисунок 5 — Результаты моделирования методами Рунге-Кутты, явного и неявного Эйлера на Python

## 3 Выводы

Аналитическое решение данного дифференциального уравнения невозможно ввиду наличия сингулярностей (при $\cos\theta = 0$) и нелинейных членов, содержащих обобщенную координату. В связи с этим, для анализа динамики системы был применен численный подход. Исследование включало рассмотрение энергии механизма и составление уравнения Эйлера-Лагранжа. Конечное моделирование и построение графиков были успешно выполнены в среде `Matlab/Simulink`, которая использует устойчивые алгоритмы численного интегрирования.