

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1
по дисциплине
«Имитационное моделирование робототехнических систем»

Студент:
Группа № R4135c

E.A. Щерблюк

Предподаватель: *E.A. Ракшин*

Санкт-Петербург
2025

Цель работы: необходимо решить аналитически ОДУ вида: $a \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = d$ решить уравнение с помощью трех интеграторов явного/ неявного Эйлера и метода Рунге-Кутты, а также сравнить полученные результаты.

Ход работы

Таблица 1 – Задание варианта №73

a	b	c	d
-3.22	-3.6	-8.21	-7.55

Аналитическое решение ОДУ:

Постановка задачи

Рассматривается линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$a x''(t) + b x'(t) + c x(t) = d$$

Подставлены численные значения: $a = -3.22$, $b = -3.6$, $c = -8.21$, $d = -7.55$.

Характеристическое уравнение

Для однородного уравнения $ax'' + bx' + cx = 0$ составляется характеристическое уравнение

$$ar^2 + br + c = 0$$

Численные корни:

$$r_{1,2} = -0.5590 \pm 1.4957i$$

Корни являются комплексно-сопряжёнными с отрицательной действительной частью.

Общее решение однородного уравнения

При комплексных корнях $r = \alpha \pm i\omega r$ общее решение имеет вид

$$x_h(t) = e^{\alpha t} (C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t))$$

где $\alpha = -0.5590$, $\omega = 1.4957$.

Частное решение

Для постоянного правого плеча d частное решение — константа $x_p = X_0$:

$$cX_0 = d \Rightarrow X_0 = d/c$$

Подставив значения, получаем

$$X_0 = 0.9196$$

Полное аналитическое решение

$$x(t) = e^{-0.5590t} (C_1 \sin(1.4957t) + C_2 \cos(1.4957t)) + 0.9196$$

Анализ поведения решения

Так как $\alpha < 0$ колебания со временем затухают. При $t \rightarrow \infty$ решение стремится к постоянному значению $x = 0.9196x$.

Графическое представление решения

На рисунке приведены решения при разных значениях интегральных постоянных:

- $C_1 = 1, C_2 = 0$
- $C_1 = 0, C_2 = 1$
- $C_1 = 2, C_2 = -1$
- $C_1 = 0, C_2 = 0$ - частное решение

Из графика видно, что все решения представляют собой затухающие колебания, стремящиеся к установившемуся значению $x = 0.9196x$.

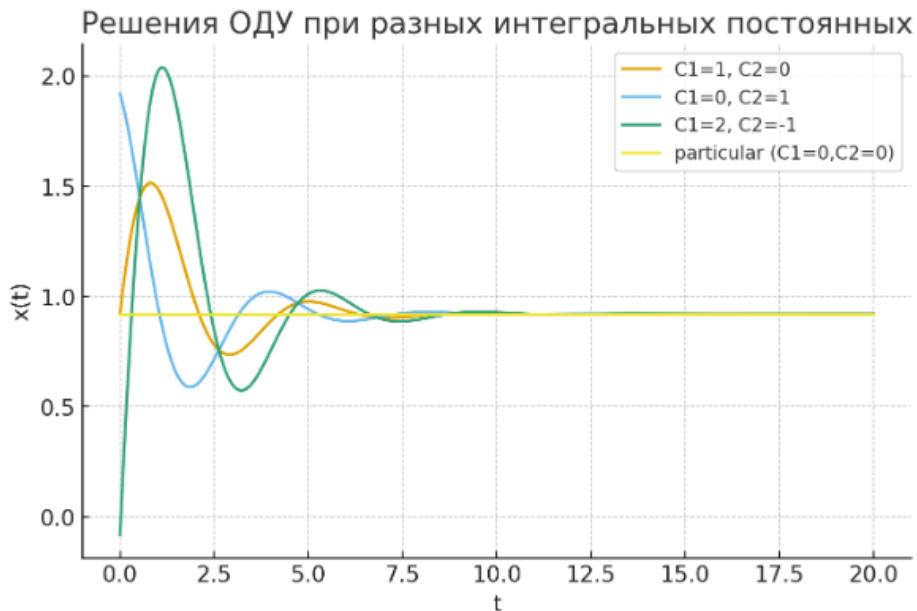


Рисунок 1 – Графики решения ОДУ

Решение с помощью интеграторов:

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # Coefficients of the ODE
5 a, b, c, d = -3.22, -3.6, -8.21, -7.55
6
7 def ode_dynamics(x):
8     """
9         Function describing the dynamics for the ODE: a·x'' + b·x' + c·x = d
10        Rewritten as: x'' = (d/a) - (b/a)·x' - (c/a)·x
11        Where x[0] = x, x[1] = x'
12        """
13    x_val = x[0] # x
14    x_dot = x[1] # x'
15    x_ddot = (d/a) - (b/a)*x_dot - (c/a)*x_val # x''
16    return np.array([x_dot, x_ddot])
17
18 def forward_euler(fun, x0, Tf, h):
19     """
20         Explicit Euler integration method
21         """
22    t = np.arange(0, Tf + h, h)
23    x_hist = np.zeros((len(x0), len(t)))
24    x_hist[:, 0] = x0
25
26    for k in range(len(t) - 1):
27        x_hist[:, k + 1] = x_hist[:, k] + h * fun(x_hist[:, k])
28
29    return x_hist, t
30
31 def backward_euler(fun, x0, Tf, h, tol=1e-8, max_iter=100):
32     """
33         Implicit Euler method for numerical integration with fixed-point iterations
34         """
35    t = np.arange(0, Tf + h, h)
36    x_hist = np.zeros((len(x0), len(t)))
37    x_hist[:, 0] = x0
38
39    for k in range(len(t) - 1):
40        x_hist[:, k + 1] = x_hist[:, k] # Initial guess
41
42        for i in range(max_iter):
43            x_next = x_hist[:, k] + h * fun(x_hist[:, k + 1])
44            error = np.linalg.norm(x_next - x_hist[:, k + 1])
45            x_hist[:, k + 1] = x_next
46
47            if error < tol:
48                break
49
50    return x_hist, t
51
52 def runge_kutta4(fun, x0, Tf, h):
53     """
54         Runge-Kutta method of the 4th order for numerical integration
55         """
56    t = np.arange(0, Tf + h, h)
57    x_hist = np.zeros((len(x0), len(t)))
58    x_hist[:, 0] = x0
59
60    for k in range(len(t) - 1):
61        k1 = fun(x_hist[:, k])
62        k2 = fun(x_hist[:, k] + 0.5 * h * k1)
63        k3 = fun(x_hist[:, k] + 0.5 * h * k2)
64        k4 = fun(x_hist[:, k] + h * k3)
65
66        x_hist[:, k + 1] = x_hist[:, k] + (h / 6.0) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4) # RK4 step
67
68    return x_hist, t
69
70 # Test all integrators
71 x0 = np.array([1.0, 0.0]) # Initial conditions: [x, x']
72 Tf = 10.0 # Final time
73 h = 0.01 # Time step
74
75 # Solving the ODE using three methods
76 x_fe, t_fe = forward_euler(ode_dynamics, x0, Tf, h) # Explicit Euler
77 x_be, t_be = backward_euler(ode_dynamics, x0, Tf, h) # Implicit Euler
78 x_rk4, t_rk4 = runge_kutta4(ode_dynamics, x0, Tf, h) # Runge-Kutta

```

Рисунок 2 – Код для решения помощью трех интеграторов

```

80  # Plot results
81  plt.figure(figsize=(24, 8))
82
83  plt.subplot(1, 3, 1)
84  plt.plot(t_fe, x_fe[0, :], label='Explicit Euler')
85  plt.plot(t_be, x_be[0, :], label='Implicit Euler')
86  plt.plot(t_rk4, x_rk4[0, :], label='Runge-Kutta 4')
87  plt.xlabel('Time')
88  plt.ylabel('x(t)')
89  plt.legend()
90  plt.title('solution x(t)')
91
92  plt.subplot(1, 3, 2)
93  plt.plot(t_fe, x_fe[1, :], label='Explicit Euler')
94  plt.plot(t_be, x_be[1, :], label='Implicit Euler')
95  plt.plot(t_rk4, x_rk4[1, :], label='Runge-Kutta 4')
96  plt.xlabel('Time')
97  plt.ylabel("x'(t)")
98  plt.legend()
99  plt.title("Derivative x'(t)")
100
101 plt.subplot(1, 3, 3)
102 plt.plot(x_fe[0, :], x_fe[1, :], label='Explicit Euler', linewidth=1)
103 plt.plot(x_be[0, :], x_be[1, :], label='Implicit Euler', linewidth=1)
104 plt.plot(x_rk4[0, :], x_rk4[1, :], label='Runge-Kutta 4', linewidth=1)
105 plt.xlabel('x(t)')
106 plt.ylabel("x'(t)")
107 plt.legend()
108 plt.title('Phase Portrait')
109
110 plt.tight_layout()
111 plt.show()

```

Рисунок 3 – Вывод графиков

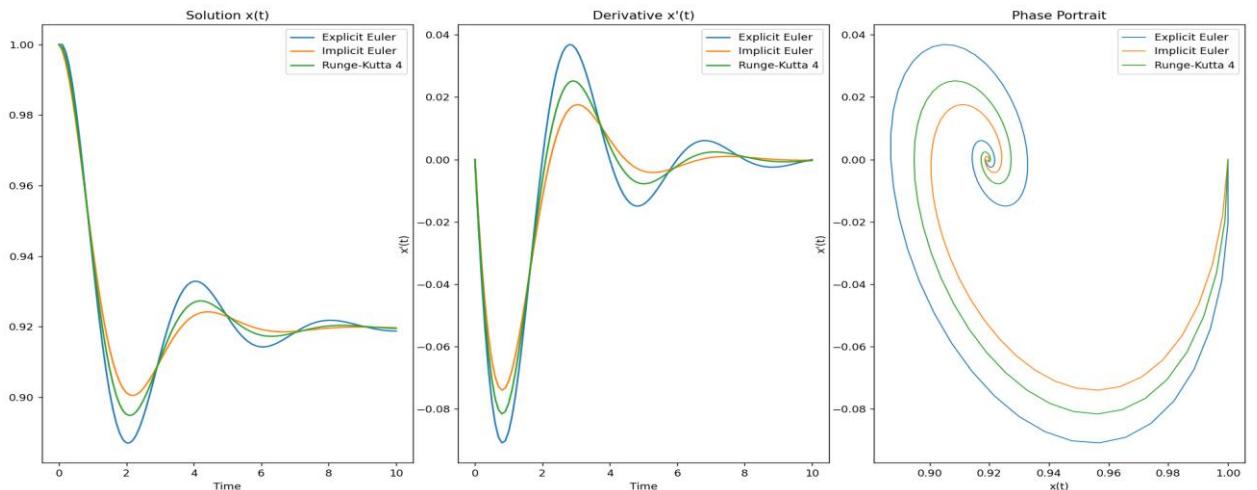


Рисунок 4 – Полученные графики

На левом графике наблюдается начальное резкое падение функции $x(t)$ с последующим затуханием колебаний — система стремится к устойчивому состоянию; средний график отражает скорость изменения функции $x(t)$ — хорошо видны моменты максимумов и минимумов изменения состояния системы; а правый график показывает взаимосвязь между состоянием системы $x(t)$ и её скоростью $x'(t)$.

Вывод: Аналитическое решение показывает затухающие колебания, стремящиеся к устойчивому значению $x=0.9196$. Численные методы подтверждают это поведение: метод Рунге–Кутты даёт наиболее точный результат, неявный метод Эйлера — более сглаженное затухание, а явный метод Эйлера проявляет заметные фазовые и амплитудные искажения. Все решения подтверждают устойчивость системы.