МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

Практическая работа №1
по дисциплине
«Имитационное моделирование робототехнических систем»

Студент:
Группа R4135c *Амансахедов М.М.*

Преподаватель:
Ассистент *Е.А. Ракшин*

Санкт-Петербург 2025 г.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ.

- Проанализировать код и файла Integrators.ipunb;
- Решить в аналитическом виде ОДУ

$$a \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = d;$$

Где a, b, c, d – коэффициенты из таблицы;

- Решить ОДУ численными методами используя функции из Integrators.ipunb;
- Сравнить результаты методов с аналитическим решением.

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ.

В файле реализованы функции 3х методов численного интегрирования, а именно явный метод Эйлера, неявный метод Эйлера и метод Рунге-Кутты.

Явный метод Эйлера — из известной начальной точки двигается вперёд по направлению касательной, вычисленной в этой точке. Метод позволяет явно рассчитать следующее значение, используя только информацию с предыдущего шага. Метод обладает первым порядком точности, что означает накопление значительной ошибки.

Неявный метод Эйлера для определения нового значения использует производную в будущей точке. Поскольку искомая величина присутствует в обеих частях уравнения, для его нахождения требуется решать нелинейное уравнение на каждом шаге.

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка (RK4) – явный многошаговый метод, который для повышения точности вычисляет значение производной не в одной, а в четырёх промежуточных точках. Эти "пробные шаги" (k_1, k_2, k_3, k_4) затем комбинируются по специальной формуле с весами, давая усреднённое, более точное значение наклона.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

Требуется аналитическим методом решить ОДУ вида:

$$a \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = d. \tag{1}$$

Согласно таблице – a = 7.94, b = -1.4, c = 5.79, d = -2.53.

Решение будет производиться в общем виде. Для начала правая часть ОДУ приравнивается к нулю:

$$7.94 \cdot \ddot{x} - 1.4 \cdot \dot{x} + 5.79 \cdot x = -2.53 \tag{2}$$

Далее составляется характеристическое уравнение:

$$7.94 \cdot \lambda^2 - 1.4 \cdot \lambda + 5.79 = 0 \tag{3}$$

$$\lambda_{1,2} = 0.08816 \pm 0.84938i$$

Тогда:

$$xh(t) = e^{0.08816\mathrm{t}}(C1cos(0.84938t) + C2sin(0.84938t)) \tag{4}$$

Частное решение для постоянной правой части:

Ищем x_p=const:

$$cxp = d \Rightarrow xp = cd = 5.79 - 2.53 \approx -0.43696.$$

Полное решение:

$$x(t) = xp + e0.08816t\big(C1cos(0.84938t) + C2sin(0.84938t)\big).$$

Подстановка начальных условий:

$$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0;$$
$$C_1 = x_0 - x_p;$$
$$C_2 = \frac{v_0 - 0.08816C_1}{0.84938}$$

Тогда:

$$C_1 = 0 - (-0.43696) = 0.43696;$$

$$C_2 = -0.04535;$$

$$x(t) = -0.43696 + e^{0.08816t}\big(0.43696cos(0.84938t) - 0.04535sin(0.84938t)\big).$$

РЕШЕНИЕ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ.

В файле Integrators.ipynb функция pendulum_dynamics была заменена на функцию ode_system, реализующую систему первого порядка для уравнения (1). Также были добавлены функции аналитического решения координаты и её производной, и вызовы трёх интеграторов для сравнения.

```
a = 7.94
b = -1.4
c = 5.79
d = -2.53
x0_val = 0.0
v0_val = 0.0
Tf = 10.0
h = 0.01
def ode_system(x):
    x1 = x[0]
    x2 = x[1]
    dx1 = x2
    dx2 = (d - b * x2 - c * x1) / a
    return np.array([dx1, dx2])
```

Рисунок 1 – функция *ode_system*

```
#analytically
p = b / a
q = c / a
s = d / a

x_p = d / c

alpha = -p / 2.0
beta_sq = 4.0 * q - p**2
if beta_sq > 0:
    beta = 0.5 * np.sqrt(beta_sq)
else:
    beta = 0.0
C1 = x0_val - x_p
if beta != 0:
    C2 = (v0_val - alpha * C1) / beta
else:
    C2 = 0.0
def x_analytic(t):
    return x_p + np.exp(alpha * t) * (C1 * np.cos(beta * t) + C2 * np.sin(beta * t))

x0_vec = np.array([x0_val, v0_val])
```

Рисунок 2 - Реализация аналитического решения

Далее будут показаны графики решений:

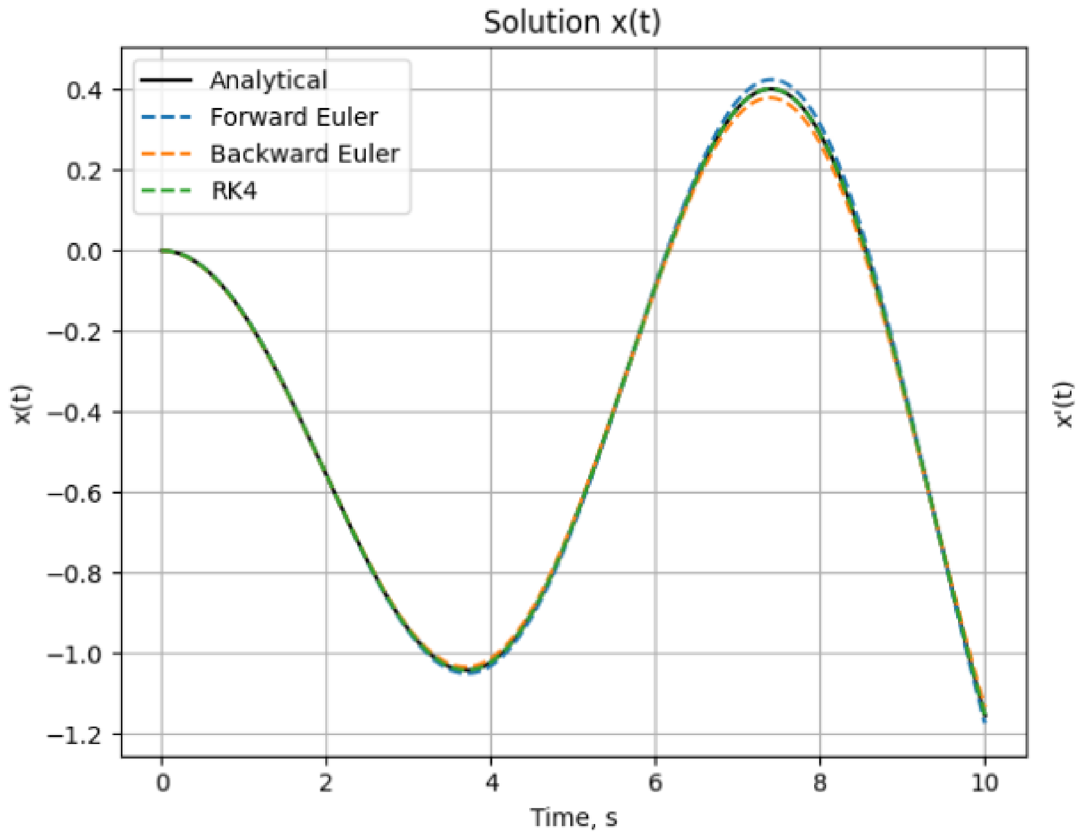

Рисунок 3 – Зависимость координаты x(t) от времени

Из рисунка 3 видно, что аналитический метод больше всего совпадает с численным методом Рунге – Кутты.

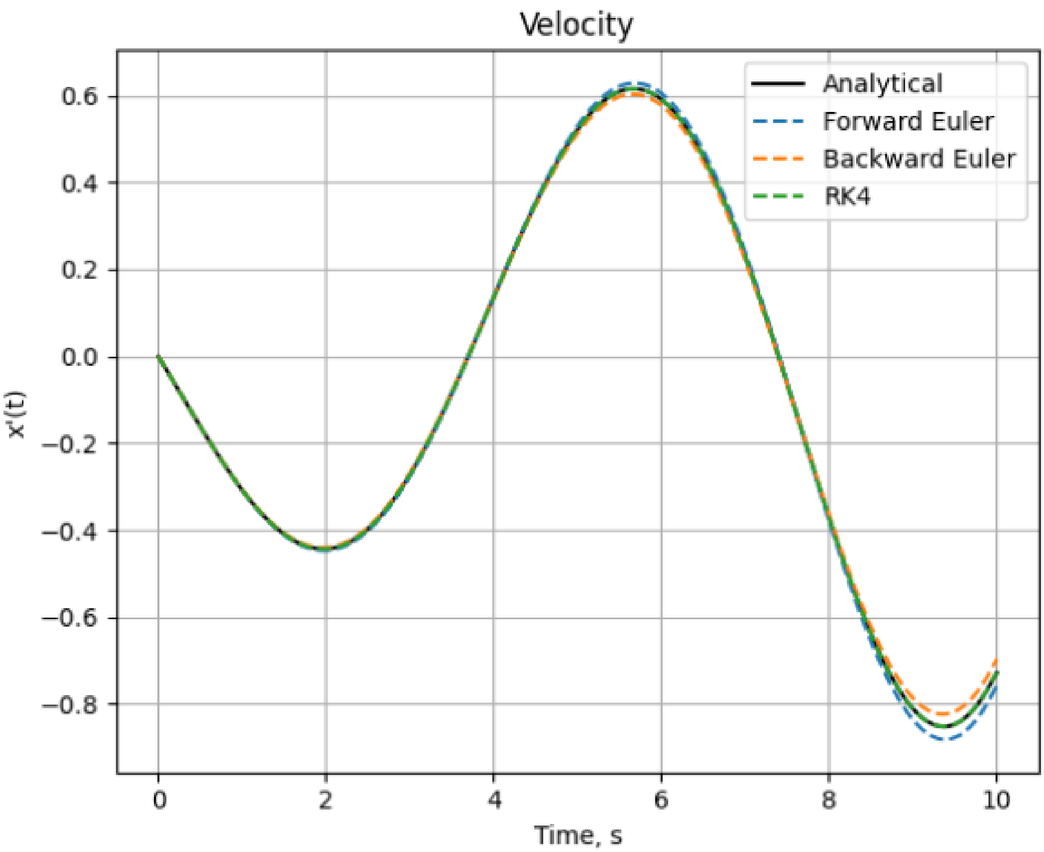

Рисунок 4 – Зависимость скорости x(t) от времени

Из рисунка 4 также видно, что аналитический метод больше всего совпадает с численным методом Рунге – Кутты.

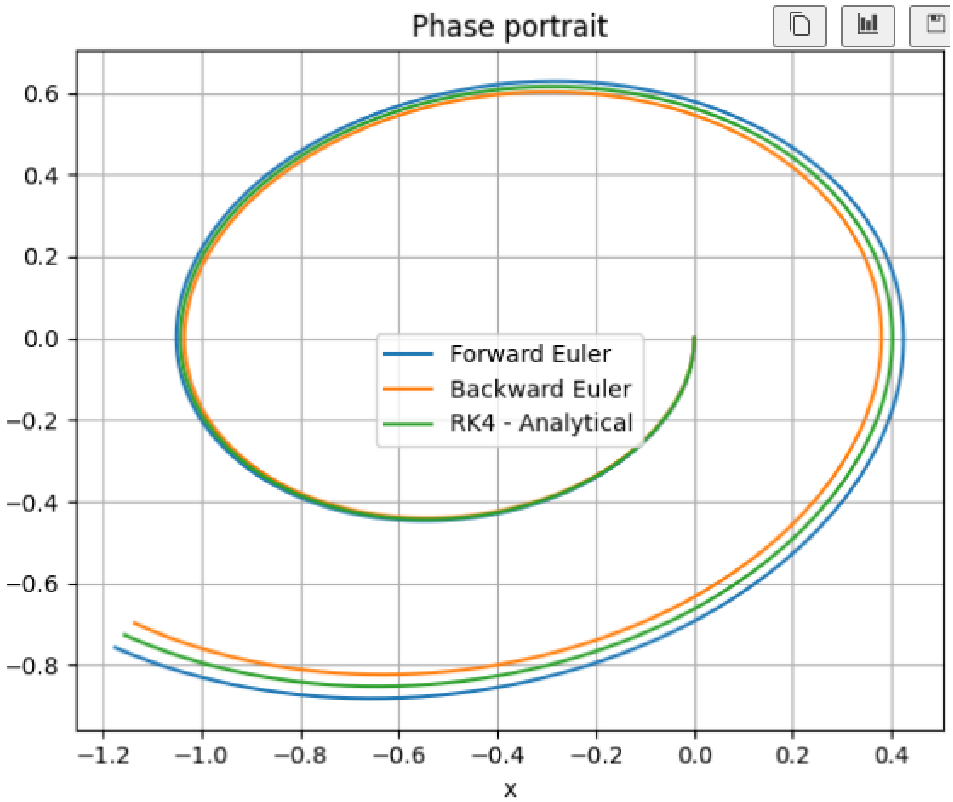

Рисунок 5 – Фазовый портрет системы

Из рисунка 5 также видно, что аналитический метод больше всего совпадает с численным методом Рунге – Кутты.

ВЫВОД.

Согласно полученным данным, можно сделать вывод о том, что из всех приведенных методов численного интегрирования метод Рунге – Кутты даёт наименьшую погрешность, явный Эйлер менее точен и может накапливать ошибку, неявный Эйлер более устойчив, но при данном шаге может давать более грубое приближение, чем RK4.