

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования
«Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет систем управления и робототехники

Отчет по практическому заданию № 2.

Вариант 61.

Выполнил студент:

Филиппов А.В. Р4136с

Преподаватель:

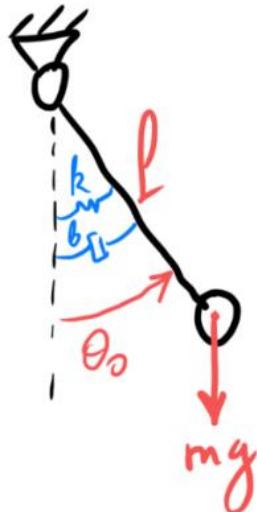
Ракшин Е.А.

Санкт-Петербург

2025

1. Задание

- Составить уравнение движения (ОДУ) для системы:



m, kg	$k, \text{N/m, Nm/rad}$	$b, \text{N*s/m, Nm*s/rad}$	l, m	θ_0, rad	x_0, m
0.9	19.4	0.01	0.96	0.172792962613886	0.76

- Решить уравнение аналитическим способом (если возможно);
- Сравнить результаты численных методов с аналитическим решением (если оно существует).

2. Аналитическое решение

Лагранжиан: $L = K - P$

$$\text{Кинетическая энергия: } K = \frac{1}{2}m\omega^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$\text{Потенциальная энергия: } P = -mgl \cdot \cos\theta + \frac{1}{2}k\theta^2$$

Метод Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q,$$

где $Q = -b\dot{\theta}$.

Выполнив подстановку, получим:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \cdot \sin(\theta) + k\theta + b\dot{\theta}$$

В общем виде:

$$\ddot{\theta} = -\frac{b}{ml^2}\dot{\theta} - \frac{g}{l}\sin(\theta) - \frac{k}{ml^2}\theta$$

Уравнение маятника является нелинейным из-за наличия функции $\sin(\theta)$.

Однако при малых углах отклонения можно использовать приближение $\sin(\theta) \approx \theta$, что приводит систему к линейному виду и позволяет получить аналитическое решение.

Подставив известные параметры получим (с учетом принятого допущения):

$$\ddot{\theta} + 0.01206 \cdot \dot{\theta} + 33.60802 \cdot \theta = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 0.01206\lambda + 33.60802 = 0$$

Так как дискриминант характеристического уравнения отрицателен, система совершает затухающие колебания. Общее решение имеет вид:

$$\theta(t) = e^{-\beta t} \left(C_1 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t\right) \right),$$

где:

$$\beta = \frac{0.01206}{2} = 0.00603; \quad \omega_0^2 = 33.608; \quad \omega_0 = 5.7972;$$

Тогда:

$$\theta(t) = e^{-0.00603}(C_1 \cos(5.7972t) + C_2 \sin(5.7972t))$$

При начальных условиях $\theta(0) = 0.17279; \dot{\theta}(0) = 0$

$$C_1 = 0.17279; \quad C_2 = 0.00018$$

Тогда окончательное аналитическое решение:

$$\theta(t) = e^{-0.00603}(0.17279 \cos(5.7972t) + 0.00018 \sin(5.7972t))$$

3. Результаты моделирования:

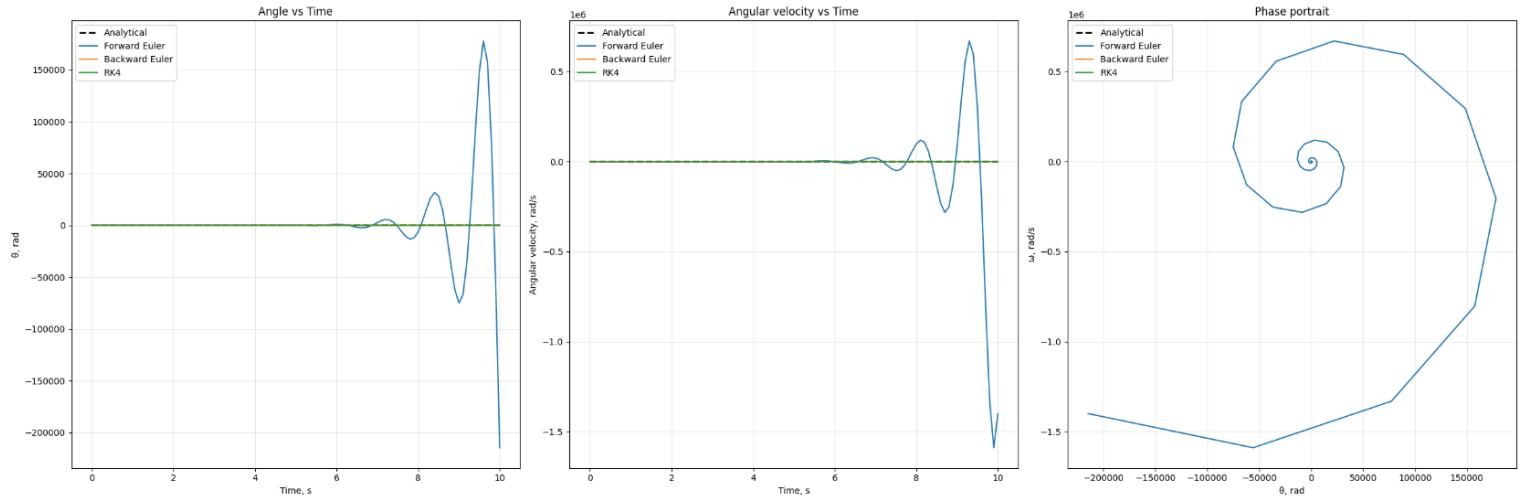


Рисунок 1 – результаты моделирования при $h = 0.1$

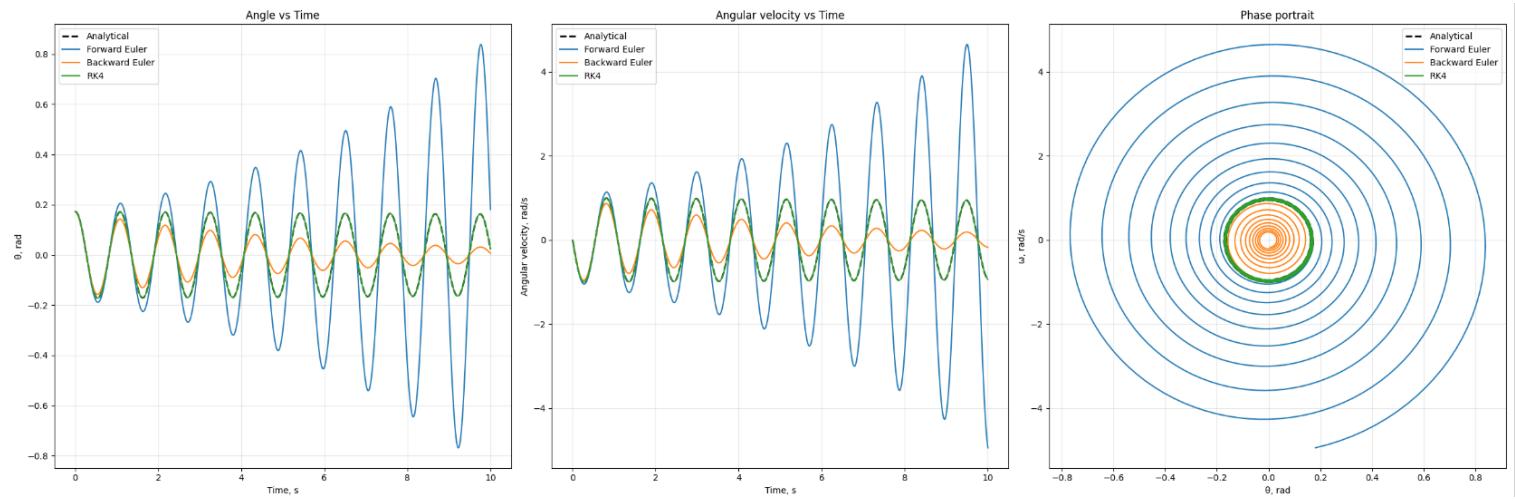


Рисунок 2 – результаты моделирования при $h = 0.01$

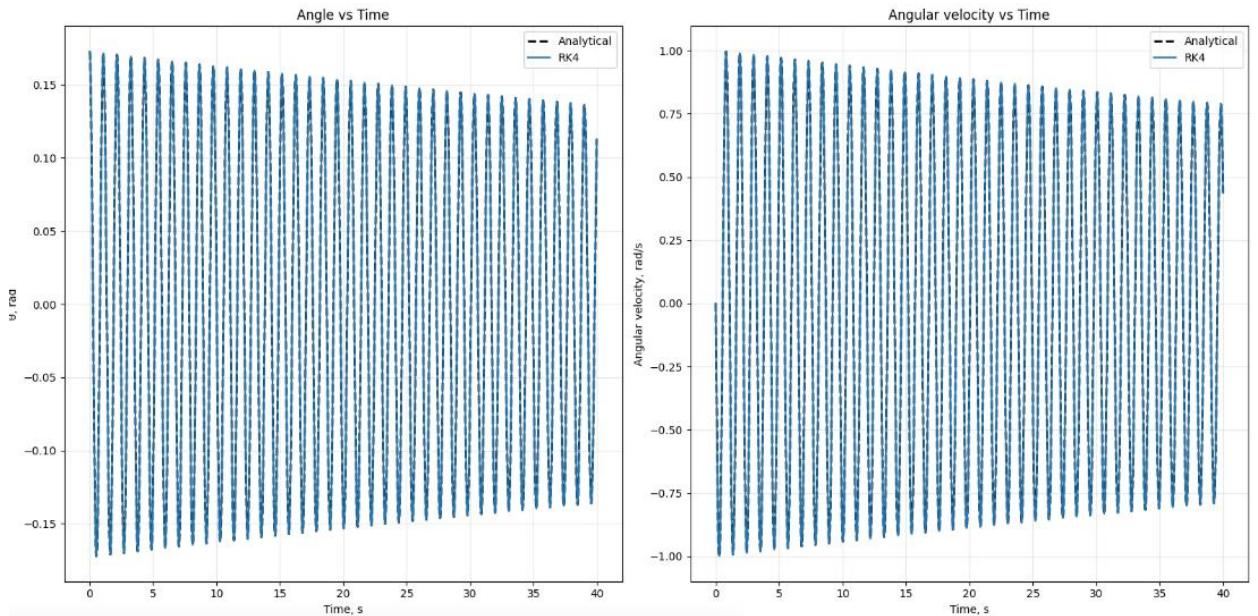


Рисунок 3 – сравнение аналитического решения и метода Рунге-Кутты 4-го порядка

Статистика ошибок (для Tf=10; h=0.01):

Метод	$Max(\theta)$	$Mean(\theta)$	$Max(\dot{\theta})$	$Mean(\dot{\theta})$
Forward Euler	$6.77 \cdot 10^{-1}$	$1.69 \cdot 10^{-1}$	4.01	0.97
Backward Euler	$1.31 \cdot 10^{-1}$	$5.47 \cdot 10^{-2}$	$7.61 \cdot 10^{-1}$	$3.16 \cdot 10^{-1}$
RK4	$8.72 \cdot 10^{-7}$	$2.87 \cdot 10^{-7}$	$5.03 \cdot 10^{-6}$	$1.68 \cdot 10^{-6}$

4. Вывод

В ходе работы было проведено моделирование движения маятника с демпфированием и упругим элементом.

Для получения аналитического решения было принято допущение о малости углов отклонения $\sin(\theta) \approx \theta$, что позволило привести исходное нелинейное уравнение к линейному виду и решить его аналитически.

По результатам моделирования видно, что численные методы демонстрируют различную степень точности и устойчивости при решении линейного уравнения маятника.

Метод Forward Euler показал неустойчивое поведение: амплитуда колебаний со временем увеличивается, что приводит к расхождению с аналитическим решением.

Метод Backward Euler, напротив, проявил избыточное численное затухание – решение сходится быстрее аналитического.

Таким образом, метод Runge-Kutta 4-го порядка обеспечивает наибольшую точность и практически полное совпадение с аналитическим решением.