МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЕТ
по дисциплине
«Имитационное моделирование робототехнических систем»

по теме:
ЗАДАНИЕ 2

Студент:
Группа R4135c *А.Е. Целищев*

Преподаватель:
ассистент *Е.А. Ракшин*

Санкт-Петербург 2025

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВЫВОД И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СИСТЕМЫ

Дана система, изображенная на рис. 1, вариант 2:

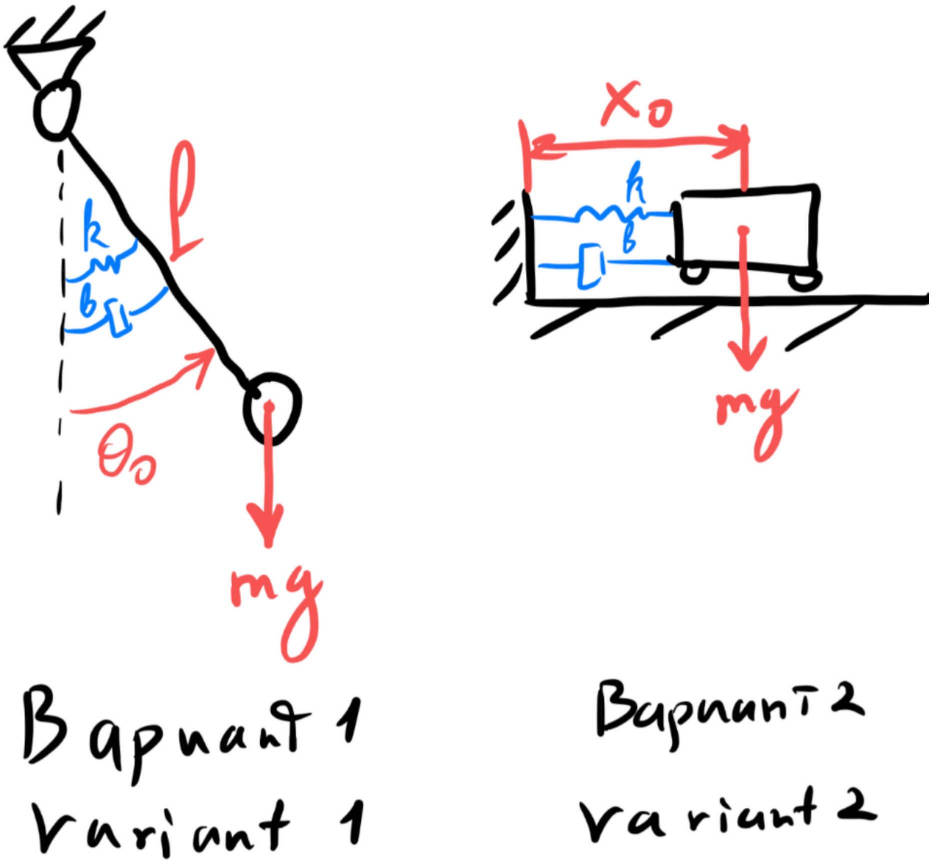

Рисунок 1 — Схема данной системы

Необходимо вывести и решить уравнение системы: аналитически и при помощи прямого и обратного методов Эйлера, метода Рунге-Кутты. Сравнить результаты и сделать выводы.

Согласно таблице, даны следующие обозначения: $m = 0.1$ кг, $k = 9.6$ Н/м, $b = 0.03$ Н·с/м, $x_0 = 0.9$ м.

Лагранжиан системы:

$$\mathcal{L}(x,\dot{x}) = \mathcal{K}(x,\dot{x}) - \mathcal{P}(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2, \tag{1}$$

Уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = Q, \tag{2}$$

для которого

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}) = m\ddot{x}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kx, \tag{5}$$

$$Q = -b\dot{x}. \tag{6}$$

Подставим в 2:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0. \tag{7}$$

Решим ОДУ 7 системы аналитически.

Соответствующий характеристический многочлен:

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0, \tag{8}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}. \tag{9}$$

Согласно заданным значениям варианта, $(b^2 - 4mk) < 0$. Тогда общее решение ОДУ примет вид:

$$x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t), \tag{10}$$

при $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, $C_1, C_2 - const.$

Найдем значения коэффициентов C_1, C_2 при начальных условиях $x_0 = 0.9$, $\dot{x}_0 = 0$.

$$x(0) = C_1 = x_0, \tag{11}$$

$$\dot{x}(0) = \alpha C_1 + \beta C_2 = 0, \tag{12}$$

$$\begin{cases} C_1 = x_0, \\ C_2 = -\frac{\alpha C_1}{\beta}; \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} C_1 = 0.9, \\ C_2 = 0.013779995. \end{cases} \tag{14}$$

Подставим найденные значения в 13 и 10. Тогда

$$x(t) = e^{-0.15t}[0.9\cos{(9.796810706t)} + 0.013779995\sin{(9.796810706t)}] \tag{15}$$

— решение системы при заданных начальных условиях.

2 СРАВНЕНИЕ С ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

Дополним код для вывода результатов аналитического решения на графики и сравним с результатами численных методов.

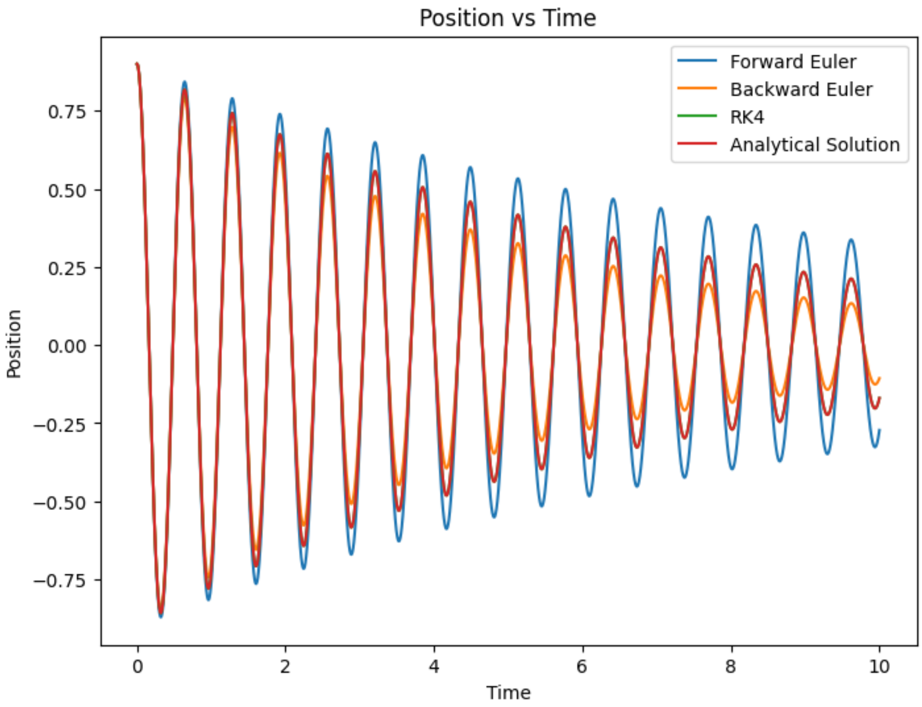

Рисунок 2 — Изменение положения во времени

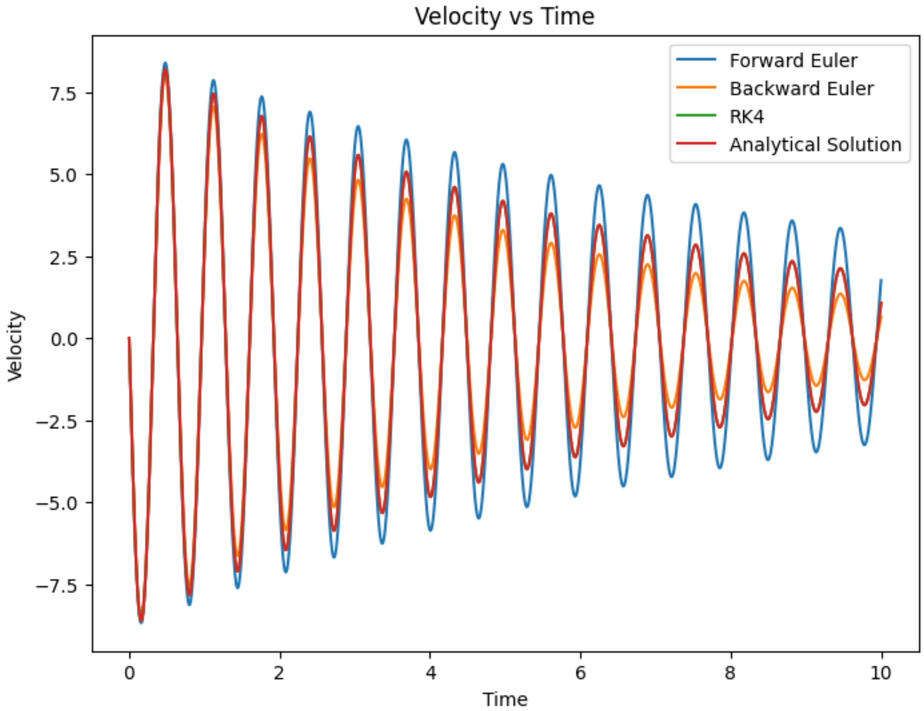

Рисунок 3 — Изменение скорости во времени

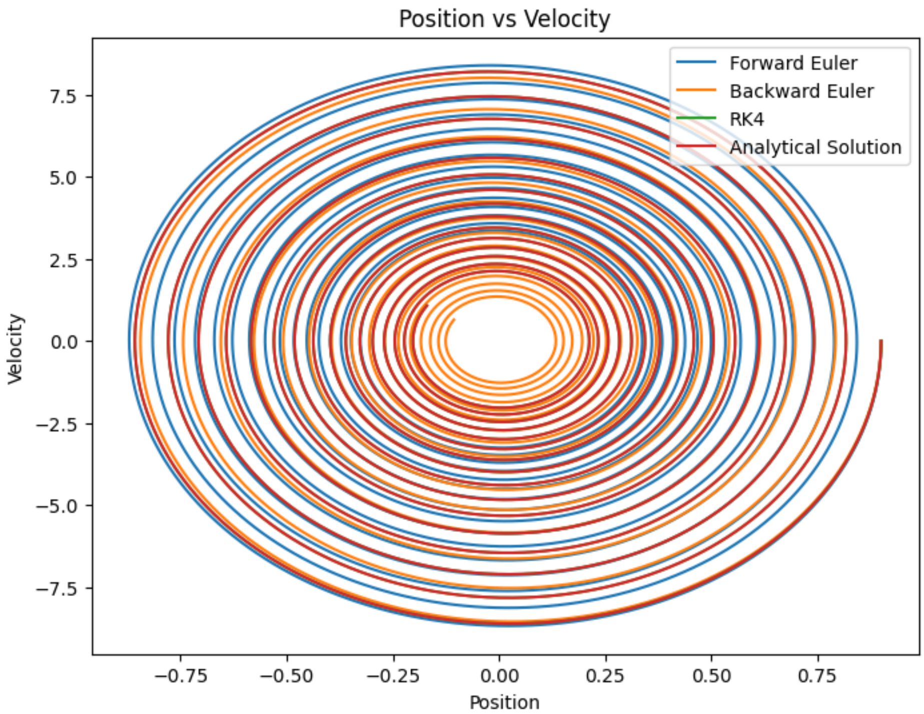

Рисунок 4 — Фазовый портрет

3 ВЫВОДЫ

Метод Рунге-Кутты почти идеально совпадает с аналитическим решением как на графиках положения/скорости от времени, так и на графике фазового портрета.

Прямой и обратный методы Эйлера оказались неточны, хотя их средний результат мог бы быть довольно близок к аналитическому решению: графики обоих методов примерно симметричны друг другу относительно аналитического решения.