Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Отчет
по практической работе № 2
по дисциплине «Имитационное моделирование робототехнических систем»

Автор: Михин Н. С.
Факультет: СУиР
Группа: R4150
Вариант № 1
Преподаватель: Ракшин Е. А.

Санкт-Петербург, 2025

Условия варианта:

m = 0.8 кг; l = 0.9 м; k = 17 Н·м/рад; b = 0.035 Н·м·с/рад; g = 9.81 м/с^2

начальный угол: $\theta(0) = \theta_0 = -1.398052152$ рад; примем $\dot{\theta}(0) = \omega_0 = 0$

Аналитическое решение:

Момент инерции маятника:

$$I = ml^2$$

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2$$

Потенциальная энергия:

$$V = mgl(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} k\theta^2$$

Функция рассеяния:

$$D = \frac{1}{2} b\dot{\theta}^2$$

Лагранжиан:

$$L = T - V$$

Уравнение Лагранжа 2-го рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) \cdot \frac{\partial L}{\partial\theta} \cdot \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = 0$$

Считаем по частям:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt} = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -(mgl\sin\,\theta + k\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -(mgl\sin\,\theta + k\theta)$$

Подставляем:

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta + mgl\sin\theta = 0$$

Это нелинейное ОДУ второго порядка.

Если подставить значения варианта:

$$0.648\,\ddot{\theta} + 0.035\,\dot{\theta} + 17\,\theta + 7.0632\,\sin\theta = 0$$

Из-за нелинейного члена $\sin\theta$ это уравнение относится к классу нелинейных осцилляторов. Для таких систем, как правило, нет решения в элементарных функциях, поэтому для дальнейших действий проведем линеаризацию.

Линеаризация:

Линеаризуем около $\theta = 0$:

$$\sin\theta \approx \theta$$

Получаем:

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + (k + mgl)\theta = 0$$

Обозначим $I = ml^2$. Тогда:

$$I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + K_{\text{eq}}\theta = 0, \qquad K_{\text{eq}} = k + mgl$$

или

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{I}\dot{\theta} + \frac{K_{\text{eq}}}{I}\theta = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$Ir^2 + br + K_{\text{eq}} = 0$$

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4IK_{\text{eq}}}}{2I}$$

В нашем случае:

$$I = ml^2 = 0.8 \cdot 0.9^2 = 0.648$$

$$K_{\text{eq}} = k + mgl = 17 + 0.8 \cdot 9.81 \cdot 0.9 \approx 24.0632$$

Дискриминант:

$$\Delta = b^2 - 4IK_{\text{eq}} < 0$$

система колебательная с затуханием

$$\left(r_{1,2} = -\delta \pm i\omega_d\right):$$

$$\delta = \frac{b}{2I} \approx 0.0270$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{K_{\text{eq}}}{I} - \delta^2} \approx 6.094 \text{ рад/с}$$

Общее решение:

$$\theta(t) = e^{-\delta t}(C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t))$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \omega_0$$

Из $\theta(0), C_1 = \theta_0$

$$\dot{\theta}(t) = e^{-\delta t}[-\delta(C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t) + (-C_1\omega_d \sin \omega_d t + C_2\omega_d \cos \omega_d t)]$$

При $t = 0$:

$$\dot{\theta}(0) = -\delta C_1 + C_2\omega_d = \omega_0 \Rightarrow C_2 = \frac{\omega_0 + \delta\theta_0}{\omega_d}$$

Аналитическое решение линеаризованной системы:

$$\boxed{\theta(t) = e^{-\delta t}\left(\theta_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\omega_0 + \delta\theta_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right)}$$

Для численных методов:

$$x_1 = \theta, \quad x_2 = \dot{\theta}$$

Нелинейная модель:

$$\dot{x_1} = x_2$$

$$\dot{x_2} = -\frac{b}{I}x_2 - \frac{k}{I}x_1 - \frac{mgl}{I}\sin x_1$$

Линеаризованная модель:

$$\dot{x_1} = x_2$$

$$\dot{x_2} = -\frac{b}{I}x_2 - \frac{K_{\text{eq}}}{I}x_1$$

Сравнение различных методов:

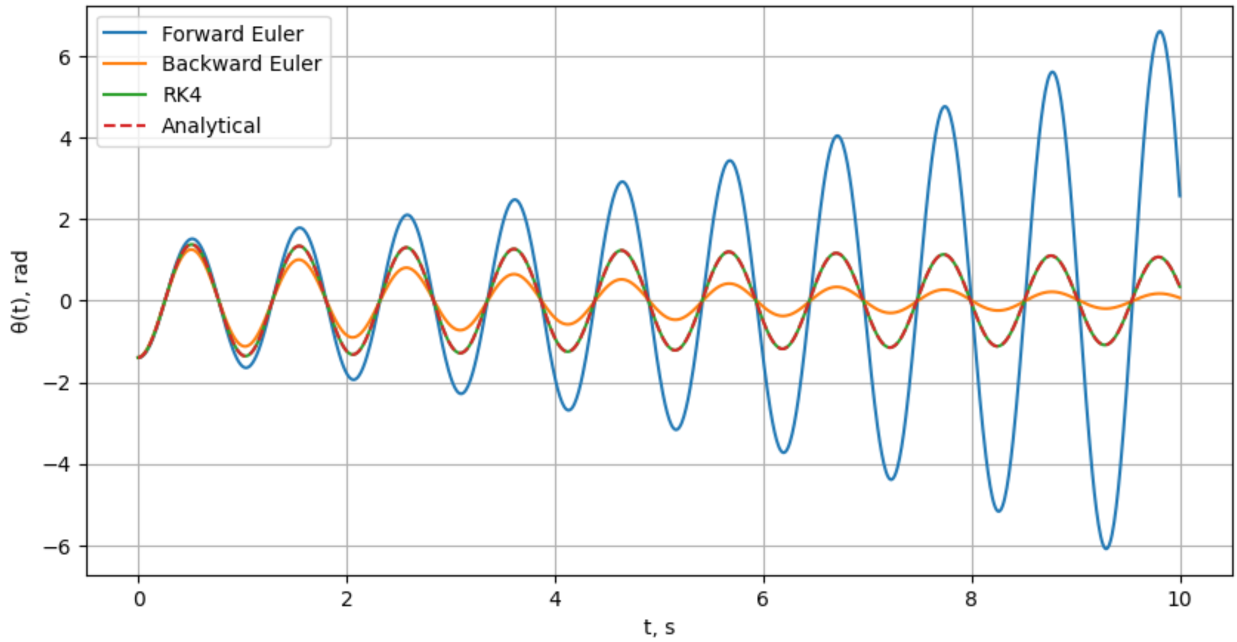

График 1 - Сравнение разных методов для положения маятника

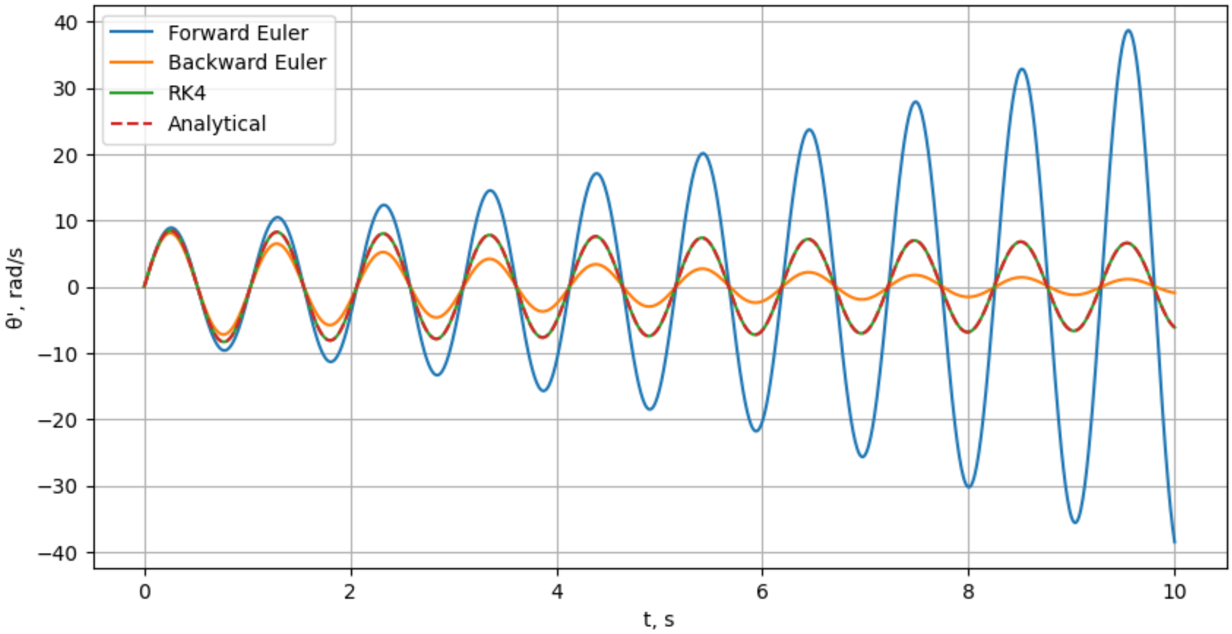

График 2 - Сравнение разных методов для угловой скорости

Таблица 1. Ошибки по углу $\theta(t)$

Метод	max	L2
Forward Euler	5.54	6.19
Backward Euler	0.90	1.56
RK4	0.00	0.00

Таблица 2. Ошибки по скорости $\dot{\theta}(t)$

Метод	max	L2
Forward Euler	32.37	36.84
Backward Euler	5.46	9.41
RK4	0.00	0.00

Вывод:

По итогу выполнения работы было получено аналитическое решение ДУ согласно условиям варианта. Из-за нелинейного члена $\sin\theta$ в полученном уравнении для данного уравнения нет решения в элементарных функциях, поэтому для сравнения с численными методами система была линеаризована в окрестности точки равновесия.

По итогу моделирования и сравнения численных методов с аналитическим решением были получены следующие результаты: метод прямого Эйлера показал себя наихудшим образом с самой большой ошибкой, обратный Эйлер справился чуть лучше, но с течением времени ошибка становилась все больше и больше. Рунге-Кутта показал себя наилучшим образом, продемонстрировав точное сходство с аналитическим решением.