

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего
образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет Систем Управления И Робототехники

Практическое задание №1
по дисциплине
«Имитационное моделирование робототехнических систем»

Студент:
Группа № R4133C
Звонков Г.Е

Преподаватель:
Ракишин. Е.А.

Санкт-Петербург
2025

Цели и задачи работы

1) Аналитически решить ДУ вида:

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = d \quad (1)$$

2) Сравнить полученное аналитическое решение с результатом интегрирования трёх интеграторов: Прямой/обратный Эйлер и Рунге–Кутта.

Выполнение

Коэффициенты ДУ (1) приведены в таблице 1.

a	b	c	d
1,31	1,21	-3,54	8,27

Для решения Ду необходимо составить характеристическое уравнение (2)

$$1,31\lambda^2 + 1,21\lambda - 3,54 = 0 \quad (2)$$

Корни характеристического уравнения (2):

$$\lambda_1 = -2,1795; \lambda_2 = 1,2398$$

$$x_p = -2,3362$$

Общее решение ДУ (3):

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-2,18t} + C_2 e^{1,24t} - 2,3362 \\ \dot{x}(t) = -2,18C_1 e^{-2,18t} + 1,24C_2 e^{1,24t} \end{cases} \quad (3)$$

Решая систему для C_1, C_2 при $t = 0$

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 - 2,3362 \\ \dot{x}(0) = -2,18C_1 + 1,24C_2 \end{cases} \quad (4)$$

Откуда получаем:

$$C_1 = \frac{\dot{x}(0) - 1,24(x(0) - 2,3362)}{-3,4195} \quad (5)$$

$$C_2 = x(0) + 2,3362 - C_1 \quad (6)$$

Создадим функцию, решающую ДУ аналитически (Приложение А) и построим график, приведенный на рисунке 1.

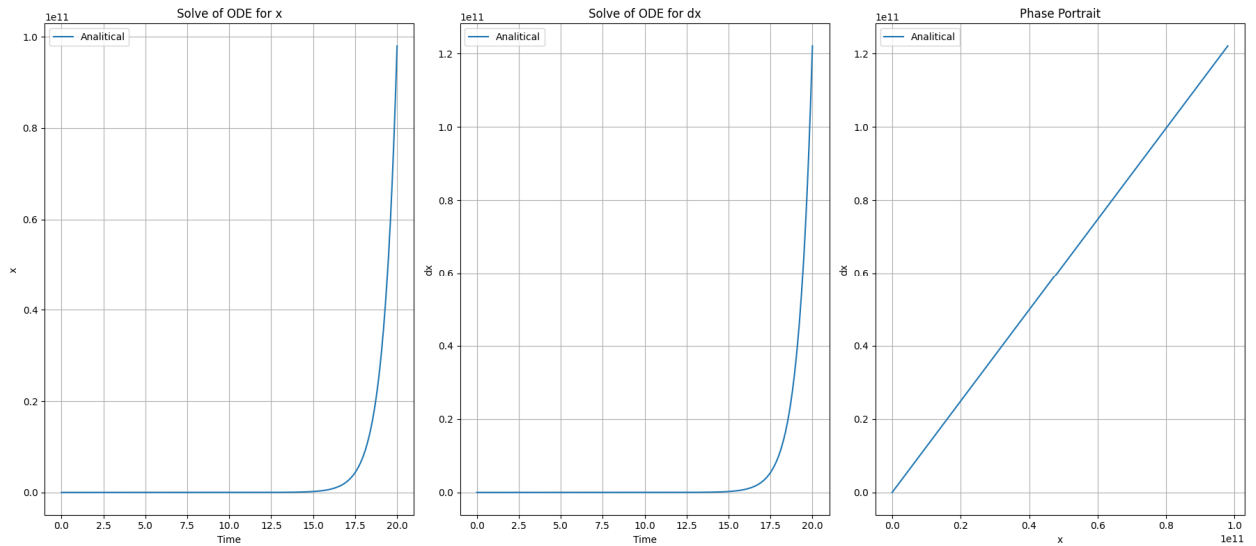


Рисунок 1 – Решение ДУ

Как видно из рисунка 1 система неустойчива. Попробуем проинтегрировать ее при помощи интеграторов прямого и обратного Эйлера и Рунге–Куты. Для этого перепишем ДУ в следующем виде (7).

$$\ddot{x} = \frac{d - b\dot{x} - cx}{a} \quad (7)$$

Уравнения интеграторов для прямого Эйлера (8), обратного Эйлера (9), Рунге-Кутта (10) представлены ниже:

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n, u_n) \quad (8)$$

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_{n+1}, u_{n+1}) \quad (9)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (10)$$

Где: $k_1 = f(x_n)$; $k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}k_1\right)$; $k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}k_2\right)$; $k_4 = f(x_n + hk_3)$

Результаты интегрирования при $t = 20$, $h = 0,1$ приведены на рисунке 2.

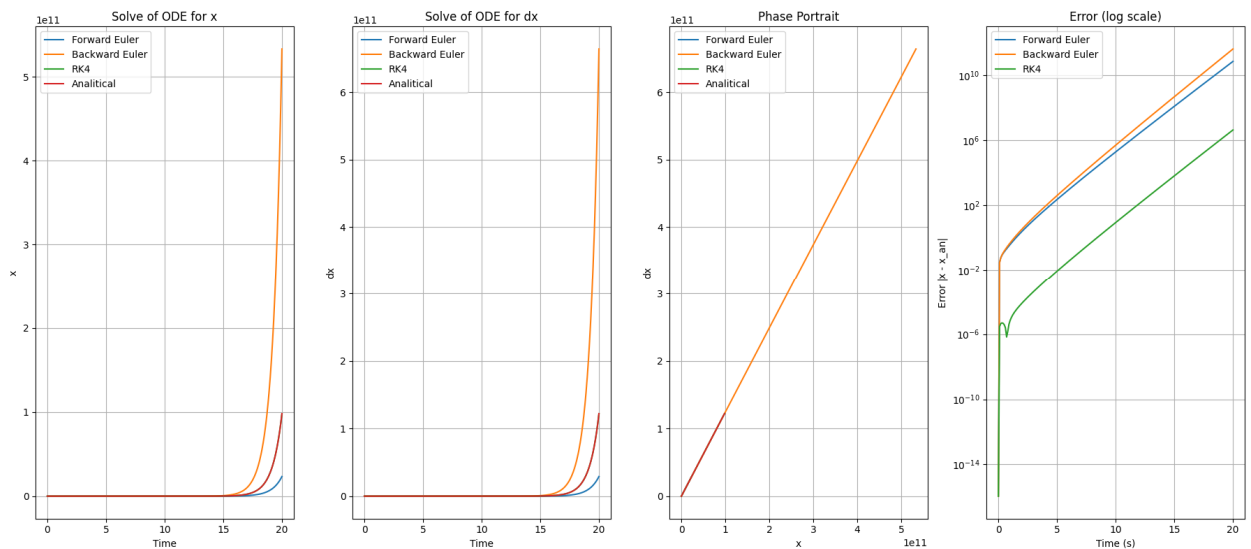


Рисунок 2 – Результаты интегрирования при $h = 0,1$ $t = 20$

Как видно из рисунка 2 обратный Эйлер накапливает ошибку быстрее прямого метода, а RK4 практически соответствует аналитическому решению.

Попробуем уменьшить шаг интегрирования до 0,001 результат на рисунке 3.

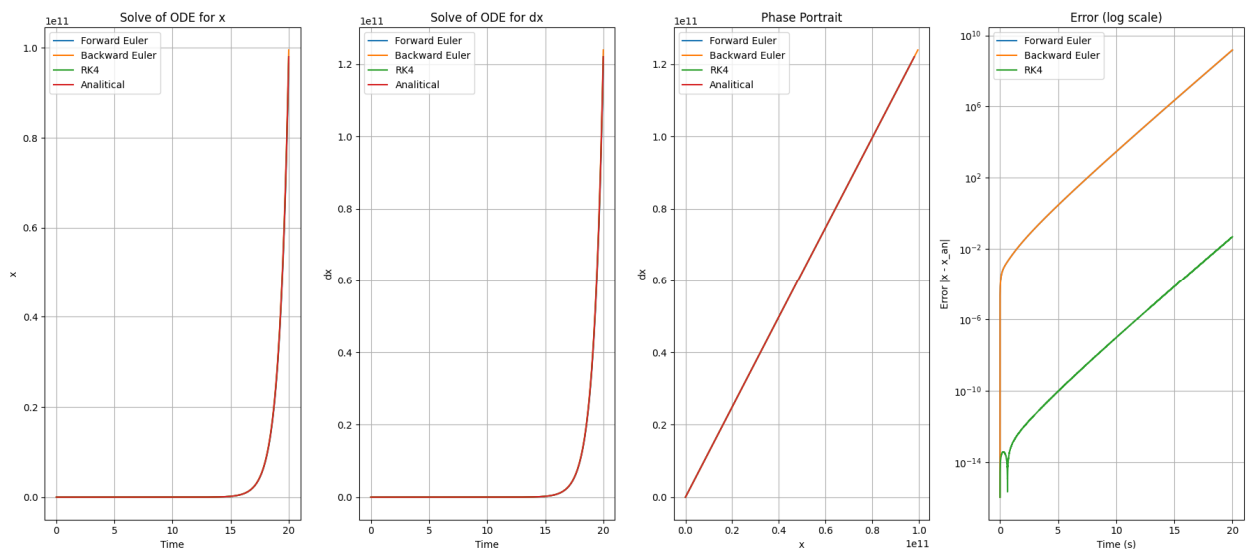


Рисунок 3 – Результаты интегрирования при $h = 0,001$ $t = 20$

В данном случае результат интегрирования прямого и обратного Эйлера соответствуют друг другу. RK4 по прежнему точнее на несколько порядков, чем методы Эйлера. Попробуем сделать систему устойчивой изменив коэффициент C на 3,54 и еще раз проинтегрировать при шаге 0,1 (рис. 4).

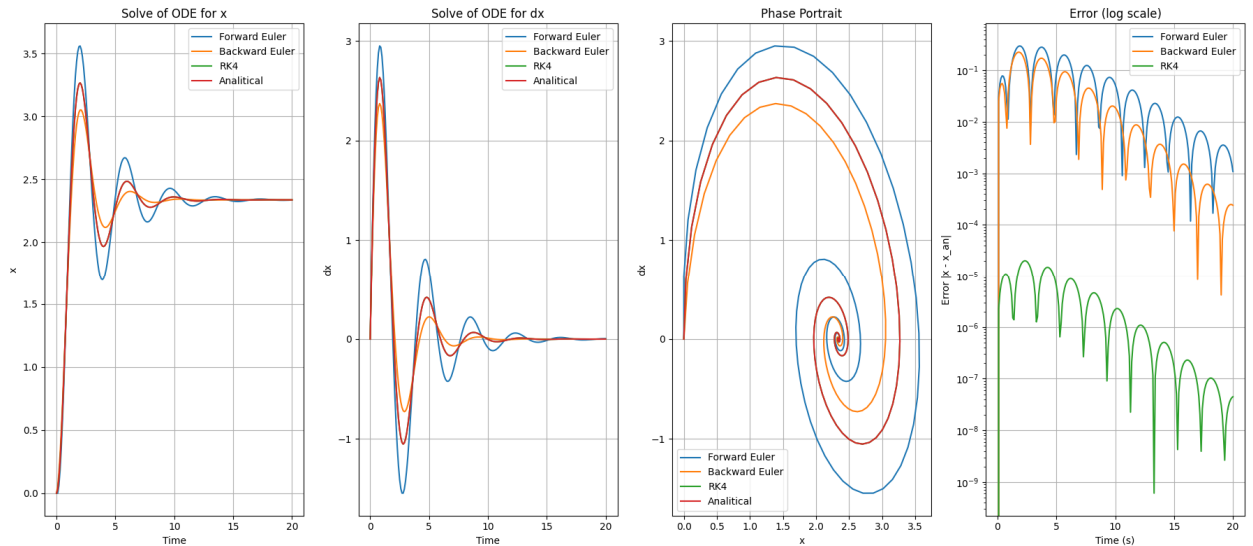


Рисунок 4 – Результаты интегрирования при $h = 0,1$ $t = 20$, $c = 3,54$

Теперь неявный Эйлер лучше соответствует аналитическому решению системы, а RK4 имеет пренебрежительно малые отклонения от неё. Очевидно, при уменьшении шага точность всех методов повыситься, ради эксперимента попробуем промоделировать систему «Масса – пружина – демпфер» (рис. 5).

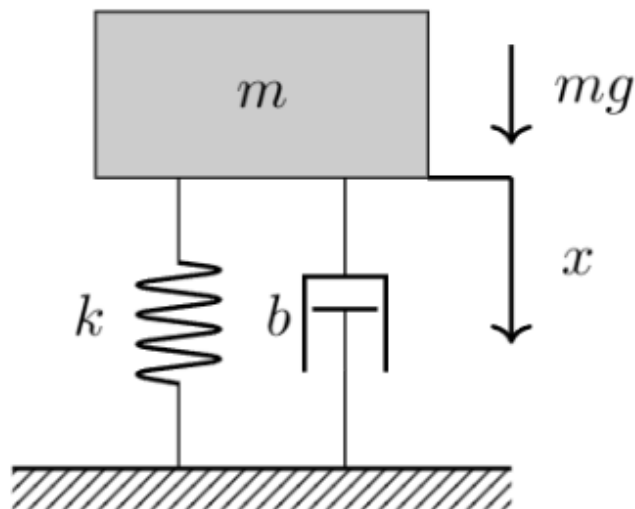


Рисунок 5 – система «Масса – пружина – демпфер»

Уравнение динамики этой системы:

$$\ddot{x} = -\frac{1}{m}(b\dot{x} + kx + mg) \quad (11)$$

$$m = 6; k = 1,21; g = 9,8; b = 0$$

Проинтегрировав систему при шаге 0,1, получились следующие результаты (рис. 6).

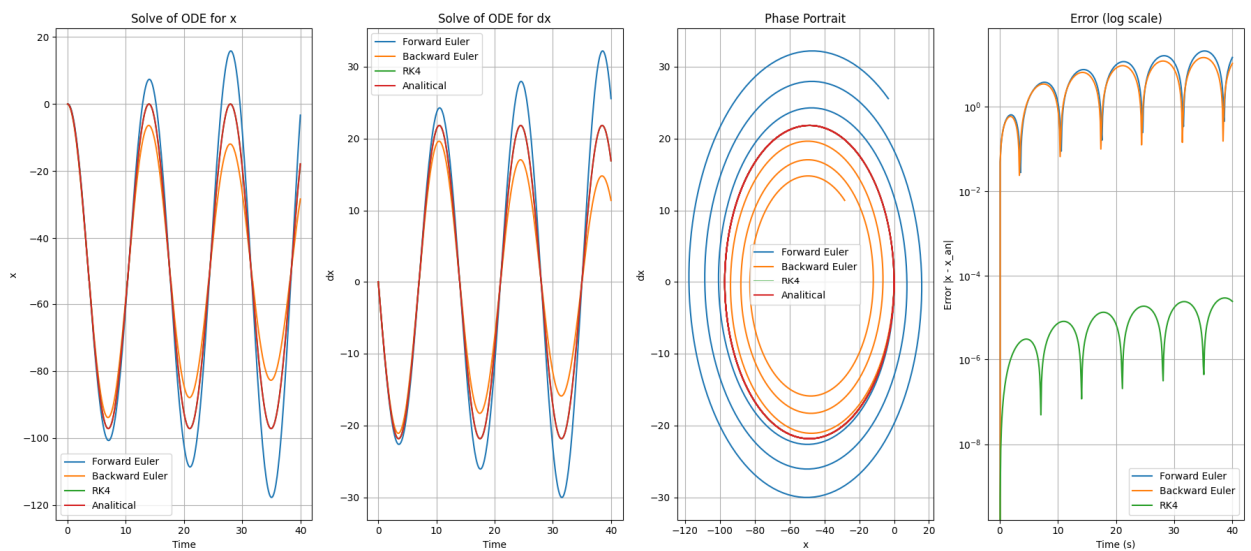


Рисунок 6 –Результаты интегрирования системы «Масса – пружина – демпфер» при $h = 0,1$ $t = 40$, $b = 0$

Как видно из рисунка 6 при использовании явного Эйлера у нас получилась неустойчивая система, хотя она очевидно должна иметь автоколебательный характер. Неявный метод Эйлера наоборот показывает затухающий характер переходного процесса, что в данном случае лучше, поскольку система не уходит в разнос.

При уменьшении шага интегрирования и добавления коэффициента b Все методы соответствуют аналитическому характеру переходного процесса, при этом RK4 имеет наименьшую ошибку (рис. 7).

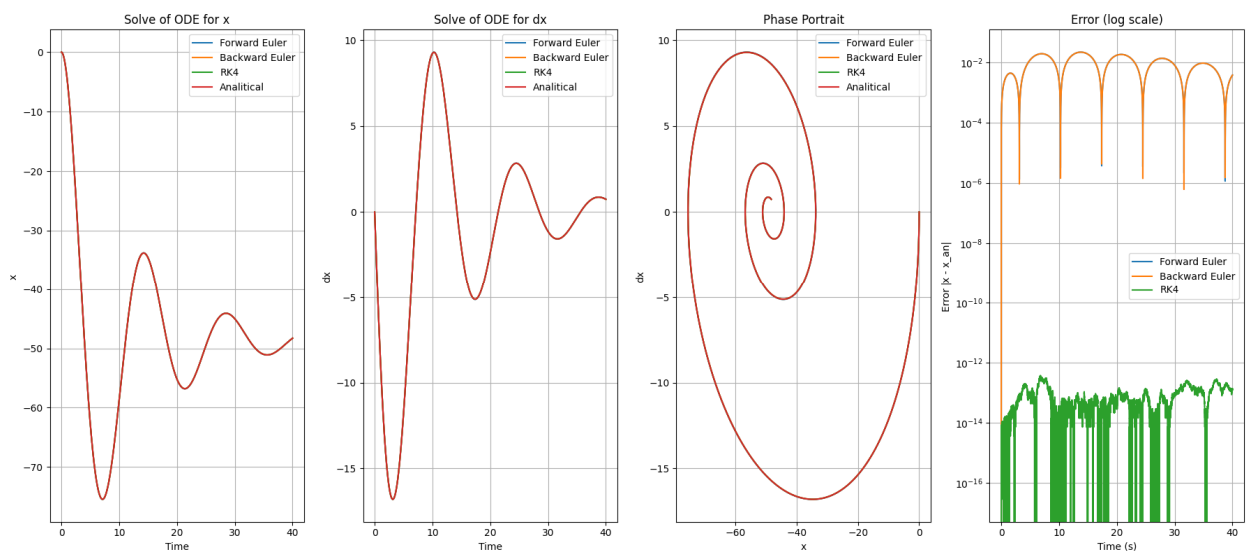


Рисунок 7 – Результаты интегрирования системы «Масса – пружина – демпфер» при $h = 0,001$ $t = 40$, $b = 1$

Выводы

В ходе выполнения работы были исследованы три интегратора — прямой и обратный Эйлера, а также метод Рунге–Кутты — на примере решения дифференциального уравнения второго порядка. Было установлено, что выбор интегратора зависит от свойств исходной системы. Метод прямого (явного) Эйлера является наименее предпочтительным, поскольку не гарантирует численной устойчивости. Неявный метод Эйлера, напротив, обеспечивает устойчивость, однако при больших шагах интегрирования может исказить реальное поведение системы. Метод Рунге–Кутты показал наилучшую точность и наиболее достоверно воспроизводит аналитическое решение, хотя и требует больших вычислительных затрат.