

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»



Отчет по практической работе №2

По дисциплине: Имитационное моделирование

робототехнических систем

На тему: «Составление и решение ОДУ для системы масса-пружина-демпфер»

Студент:

Рязанцев Д.Л.

Группа:

R4134c

Преподаватель:

Ракшин Е. А.

Санкт-Петербург, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|------------------------------|---|
| Постановка задачи..... | 3 |
| Аналитическое решение | 3 |
| Реализация интеграторов..... | 5 |
| Заключение | 8 |

Цель работы: составление и решение ОДУ для системы масса-пружина-демпфер.

Постановка задачи

- Составление ОДУ для системы масса-пружина-демпфер.
- Решить составленное ОДУ аналитически.
- Сравнение результатов этих методов с аналитическим решением.

Исходные данные берутся в соответствии с номером ИСУ 507578.

Вариант 1.

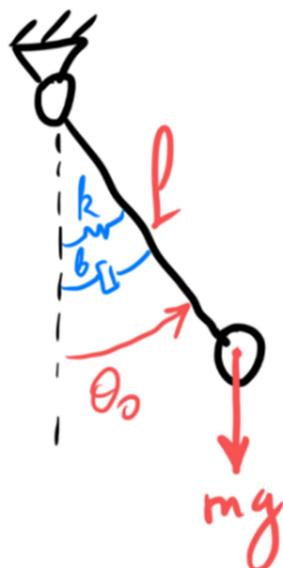


Рисунок 1. Схема системы

Таблица 1 – Исходные данные

| m, kg | $k, N/m, Nm/rad$ | $b, N*s/m, Nm*s/rad$ | l, m | θ_0, rad | x_0, m |
|---------|------------------|----------------------|--------|-----------------|----------|
| 0.1 | 2.8 | 0.015 | 0.47 | 0.3455859252 | 0.67 |

Аналитическое решение

Используем механику Лагранжа для вывода уравнения движения.

1. Кинетическая энергия системы:

$$K = \frac{1}{2} m(l\dot{\theta})^2$$

2. Потенциальная энергия системы:

$$U = mgl(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}k\theta^2$$

3. Ф-ия Лагранжа:

$$L = K - U = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 - mgl(1 - \cos \theta) - \frac{1}{2}k\theta^2$$

4. Составим уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q$$

$$5. \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2\theta$$

$$6. \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta}$$

$$7. \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = -mgl \sin \theta - k\theta$$

8. $Q = -b\dot{\theta}$ — обобщенная сила (демпфирование)

9. Тогда уравнение Лагранжа имеет вид:

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta + k\theta = -b\dot{\theta}$$

В стандартной форме:

$$\ddot{\theta} + \frac{b}{ml^2}\dot{\theta} + \frac{k}{ml^2}\theta + \frac{g}{l}\sin \theta = 0$$

10. Решим уравнение аналитически, составив характеристическое уравнение:

$$\ddot{\theta} + 0,678\dot{\theta} + 147,66\theta = 0$$

$$\lambda^2 + 0,678\lambda + 147,66 = 0$$

$$D = 0,678^2 - 4 \cdot 147,66 = -590,181$$

$$\lambda = \frac{-0,678 \pm \sqrt{590,181i}}{2} = -0,339 \pm 12,147i$$

Общий вид решения дифференциального уравнения:

$$\theta(t) = e^{-0,339t}(C_1 \cos(12,147t) + C_2 \sin(12,147t))$$

Начальные условия:

$$\theta(0) = 0.3455859252$$

$$\dot{\theta}(0) = 0$$

Тогда:

$$C_1 = 0.3455859252$$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t) &= -0,339e^{-0,339t}(C_1 \cos(12,147t) + C_2 \sin(12,147t)) \\ &\quad + e^{-0,339t}(-12,147C_1 \sin(12,147t) + 12,147C_2 \cos(12,147t)) \\ 12,147C_2 &= 0,1171 \\ C_2 &= 0,00964\end{aligned}$$

$$\theta(t) = e^{-0,339t}(0,3456 \cos(12,147t) + 0,00964 \sin(12,147t))$$

Параметры решения:

- Собственная частота: $\omega=12,147$ рад/с;
- Коэффициент затухания: $\delta=0,339$ 1/с;
- Период колебаний: $T=2\pi\omega\approx0,517$ с;
- Логарифмический декремент затухания: $\Lambda=\delta T\approx0,175$;

Данное решение справедливо только для малых углов отклонения. При начальном угле $19,8^\circ$ погрешность линеаризации может составлять 2-3%. Для больших углов необходимо использовать численные методы решения исходного нелинейного уравнения.

Реализация интеграторов

1. Явный метод Эйлера (Forward Euler)

Функция интегратора:

```
def forward_euler(fun, x0, Tf, h):
```

```
t = np.arange(0, Tf + h, h)
x_hist = np.zeros((len(x0), len(t)))
x_hist[:, 0] = x0
```

```
for k in range(len(t) - 1):
```

```
x_hist[:, k + 1] = x_hist[:, k] + h * fun(x_hist[:, k])
```

```
    return x_hist, t
```

2. Неявный метод Эйлера (Backward Euler)

Функция интегратора:

```
def backward_euler(fun, x0, Tf, h, tol=1e-8, max_iter=100):
```

```
    t = np.arange(0, Tf + h, h)
```

```
    x_hist = np.zeros((len(x0), len(t)))
```

```
    x_hist[:, 0] = x0
```

```
    for k in range(len(t) - 1):
```

```
        x_hist[:, k + 1] = x_hist[:, k]
```

```
        for i in range(max_iter):
```

```
            x_next = x_hist[:, k] + h * fun(x_hist[:, k + 1])
```

```
            error = np.linalg.norm(x_next - x_hist[:, k + 1])
```

```
            x_hist[:, k + 1] = x_next
```

```
        if error < tol:
```

```
            break
```

```
    return x_hist, t
```

3. Метод Рунге-Кутта 4-го порядка (RK4)

Функция интегратора:

```
def runge_kutta4(fun, x0, Tf, h):
```

```
    t = np.arange(0, Tf + h, h)
```

```
    x_hist = np.zeros((len(x0), len(t)))
```

```
    x_hist[:, 0] = x0
```

```
    for k in range(len(t) - 1):
```

```
        k1 = fun(x_hist[:, k])
```

```
        k2 = fun(x_hist[:, k] + 0.5 * h * k1)
```

```
        k3 = fun(x_hist[:, k] + 0.5 * h * k2)
```

$k4 = \text{fun}(x_hist[:, k] + h * k3)$

$x_hist[:, k + 1] = x_hist[:, k] + (h / 6.0) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)$

return x_hist, t

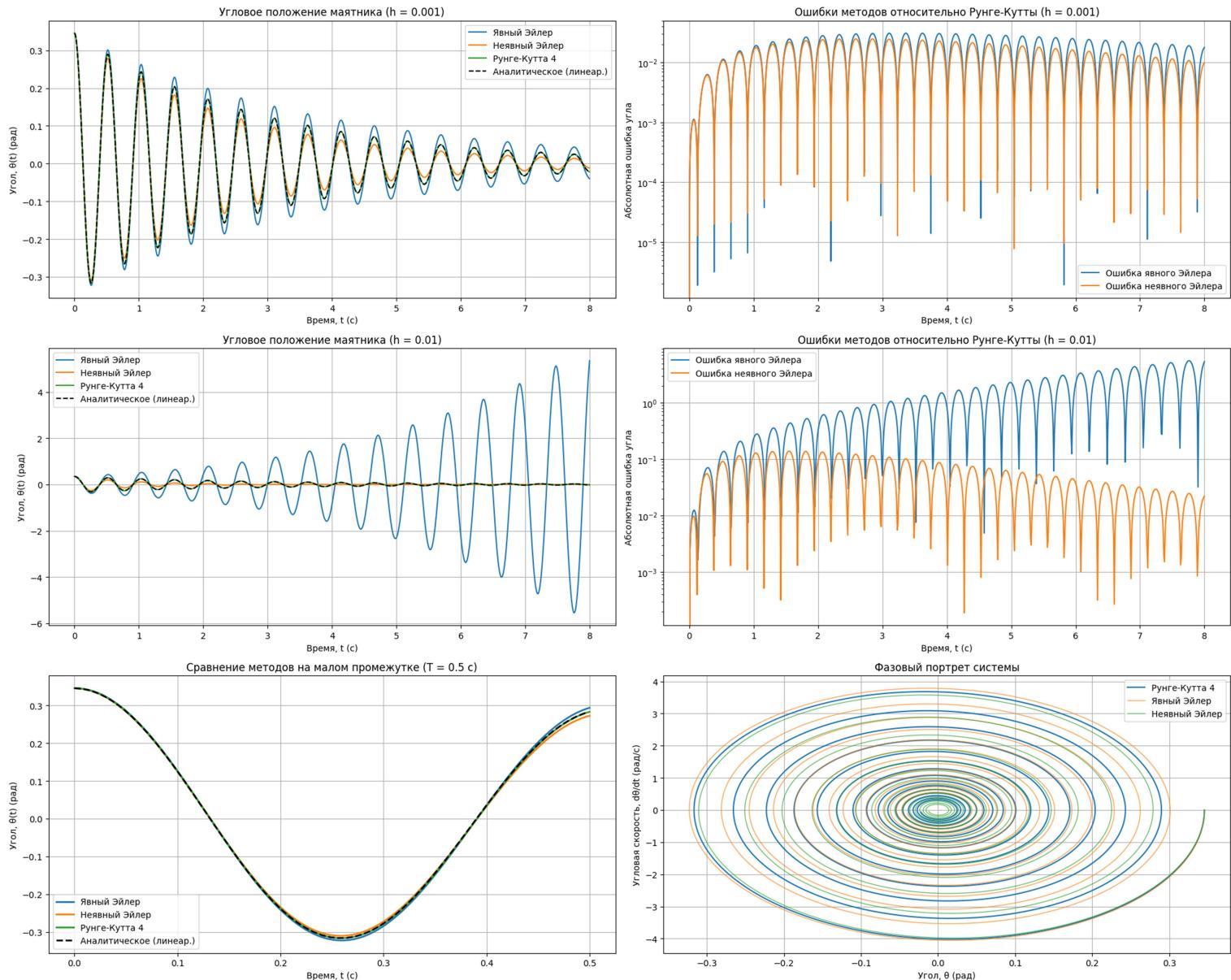


Рисунок 2. Характеристики и сравнительный анализ

Заключение

Проведенное исследование динамики системы пружина-масса-демпфер позволило сделать комплексные выводы о возможностях аналитического и численного анализа подобных систем. Исходное нелинейное дифференциальное уравнение не имеет точного аналитического решения в элементарных функциях. Применение линеаризации для малых углов отклонения в случае начального угла 0,346 рад позволяет получить приближенное решение, однако его точность ограничена, что снижает практическую ценность аналитического подхода для данной задачи.

Сравнительный анализ численных методов выявил четкую иерархию их эффективности. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка продемонстрировал наивысшую точность и устойчивость при различных шагах интегрирования, сохраняя физическую адекватность решения на всех временных интервалах. Неявный метод Эйлера показал хорошую устойчивость, но проявил склонность к избыточному численному демпфированию, что выразилось в более быстром затухании колебаний по сравнению с эталонным решением. Явный метод Эйлера при малом шаге интегрирования обеспечивал приемлемую точность, однако при увеличении шага проявлял выраженную неустойчивость с экспоненциальным ростом ошибки, что делает его применение ограниченным.

Влияние шага интегрирования оказалось критически важным для качества получаемого решения. При малом шаге все методы демонстрировали удовлетворительную сходимость, тогда при увеличении шага только методы Рунге-Кутты и неявный Эйлер сохраняли устойчивость решения. Фазовый портрет системы подтвердил колебательный характер движения с затуханием, полностью соответствующий физической природе механической системы с демпфированием.