

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

Практическая работа №1
по дисциплине
«Имитационное моделирование робототехнических систем»

Студен:

Группа R4134с

И. Ковылин

Преподаватель:

Ассистент

Е.А. Ракишин

Санкт-Петербург 2025 г.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ.

- Проанализировать код и файла Integrators.ipunb;
- Решить в аналитическом виде ОДУ

$$a \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = d;$$

Где a, b, c, d – коэффициенты из таблицы;

- Решить ОДУ численными методами используя функции из Integrators.ipunb;
- Сравнить результаты методов с аналитическим решением.

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ.

В файле реализованы функции 3х методов численного интегрирования, а именно явный метод Эйлера, неявный метод Эйлера и метод Рунге-Кутты.

Явный метод Эйлера — из известной начальной точки двигается вперёд по направлению касательной, вычисленной в этой точке. Метод позволяет явно рассчитать следующее значение, используя только информацию с предыдущего шага. Метод обладает первым порядком точности, что означает накопление значительной ошибки.

Неявный метод Эйлера для определения нового значения использует производную в будущей точке. Поскольку искомая величина присутствует в обеих частях уравнения, для его нахождения требуется решать нелинейное уравнение на каждом шаге.

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка (RK4) – явный многошаговый метод, который для повышения точности вычисляет значение производной не в одной, а в четырёх промежуточных точках. Эти "пробные шаги" (k_1, k_2, k_3, k_4) затем комбинируются по специальной формуле с весами, давая усреднённое, более точное значение наклона.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

Требуется аналитическим методом решить ОДУ вида:

$$a \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = d. \quad (1)$$

Согласно таблице – $a = -1.9$, $b = -4.54$, $c = -8.33$, $d = -4.46$.

Решение будет производиться в общем виде. Для начала правая часть ОДУ приравняется к нулю:

$$a \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = 0. \quad (2)$$

Далее составляется характеристический многочлен:

$$\begin{aligned} a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c &= 0; \\ \lambda_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned} \quad (3)$$
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1.1945 - 1.7196i; \\ \lambda_2 &= -1.1945 + 1.7196i; \end{aligned}$$

Так как нет действительных корней, то общее решение ОДУ:

$$x = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)). \quad (4)$$

Где C_1 и C_2 – постоянные величины, $\alpha = -1.1945$, $\beta = 1.7196$.

Нахождение частного решения ОДУ производится согласно методу неопределенных коэффициентов:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= A, \tilde{\dot{x}} = 0, \tilde{\ddot{x}} = 0, \\ a \cdot 0 + b \cdot 0 + cA &= d. \end{aligned}$$

$$\tilde{x} = A = \frac{d}{c}.$$

Тогда общее решение неоднородного ДУ:

$$x = e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)) + \frac{d}{c};$$

Характеристическое уравнение равно:

$$x = e^{-1.1945t} (C_1 \cos(1.7196t) + C_2 \sin(1.7196t)) + 0.5453; \quad (5)$$

Для определения C_1 и C_2 нужно определить начальные условия. Пусть $x(0) = 0.1$, $\dot{x}(0) = 0$. Тогда:

$$x(0) = C_1 + 0.535;$$

$$C_1 = x(0) - 0.535 = -0.435; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) = & -1.1945e^{-1.1945t}(C_1 \cos(1.7196t) + C_2 \sin(1.7196t)) \\ & + e^{-1.1945t}(-1.7196C_1 \cos(1.7196t) + 1.7196tC_2 \sin(1.7196t)); \end{aligned}$$

$$\dot{x}(0) = -1.1945 \cdot C_1 + 1.7196 \cdot C_2;$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}(0) + 1.1945 \cdot C_1}{1.7196} = 0.302; \quad (7)$$

РЕШЕНИЕ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ.

Функция *pendulum_dynamics* из файла *Integrators.ipynb* была изменена для решения ОДУ из формулы 1.

```
def pendulum_dynamics(x): 3 usages

    d = -4.46
    c = -8.33
    b = -4.54
    a = -1.9

    temp = x[0] #x
    dx = x[1] #z

    ddx = (d - b * dx - c * temp) / a

    return np.array([dx, ddx])
```

Рисунок 1 – функция *pendulum_dynamics*

Также были добавлены 2 функции расчета аналитического решения ОДУ.

```
def analytical_solution(Tf, h): 1 usage

    t = np.arange(0, Tf + h, h)
    alpha = 1.1945
    omega = 1.7196
    C1 = -0.4354
    C2 = -0.3024
    xp = 0.5354

    return [np.exp(-alpha * t) * (C1 * np.cos(omega * t) + C2 * np.sin(omega * t)) + xp, t]

def analytical_solution_derivative(Tf, h): 1 usage

    t = np.arange(0, Tf + h, h)
    alpha = 1.1945
    omega = 1.7196
    return [np.exp(-alpha * t) * (1.11 * np.sin(omega * t) + 0.0002 * np.cos(omega * t)), t]
```

Рисунок 2 – функции аналитического решения

Функция *analytical_solution* аналитически считает координату x , а функция *analytical_solution_derivative* считает \dot{x} .

Также добавлены вызовы этих функций:

```

x_vals, t_analytic = analytical_solution(Tf, h)
x_vals_derivative, t_analytic_derivative = analytical_solution_derivative(Tf, h)

# Plot results
plt.figure(figsize=(24, 8))

plt.subplot(1, 3, 1)
plt.plot(t_analytic, x_vals, 'b-', linewidth=3, label='Analytical Solution')

plt.plot(t_fe, x_fe[0, :], label='Forward Euler')
plt.plot(t_be, x_be[0, :], label='Backward Euler')
plt.plot(t_rk4, x_rk4[0, :], label='RK4')
plt.xlabel('Time')
plt.ylabel('Angle (rad)')
plt.legend()
plt.title('Pendulum Angle vs Time')

plt.subplot(1, 3, 2)
plt.plot(t_analytic_derivative, x_vals_derivative, 'b-', linewidth=3, label='Analytical Solution')
plt.plot(t_fe, x_fe[1, :], label='Forward Euler')
plt.plot(t_be, x_be[1, :], label='Backward Euler')
plt.plot(t_rk4, x_rk4[1, :], label='RK4')
plt.xlabel('Time')
plt.ylabel('Angular Velocity (rad/s)')
plt.legend()
plt.title('Angular Velocity vs Time')

plt.subplot(1, 3, 3)
plt.plot(x_vals, x_vals_derivative, 'b-', linewidth=3, label='Analytical Solution')
plt.plot(x_fe[0, :], x_fe[1, :], label='Forward Euler')
plt.plot(x_be[0, :], x_be[1, :], label='Backward Euler')
plt.plot(x_rk4[0, :], x_rk4[1, :], label='RK4')

```

Рисунок 3 – вызовы функций *analytical_solution* и *analytical_solution_derivative*

Далее будут показаны графики решений.

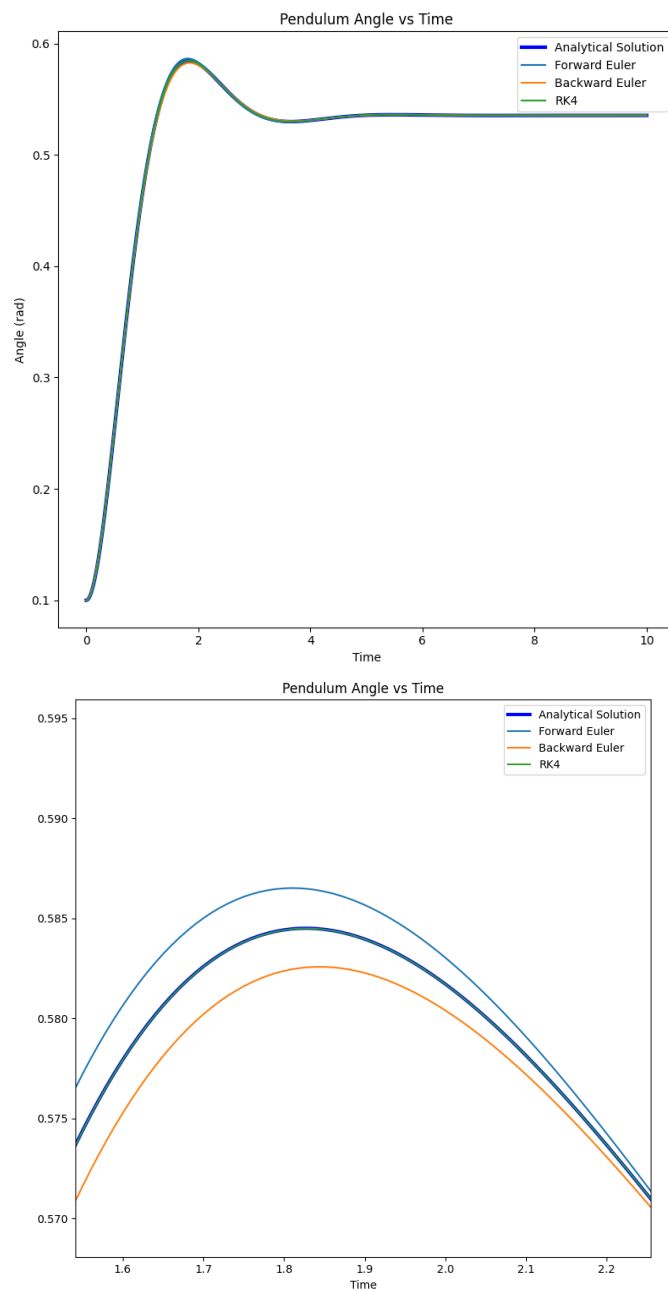


Рисунок 4 – зависимость положения от времени

Из рисунка 4 видно, что аналитический метод больше всего совпадает с численным методом Рунге – Кутты.

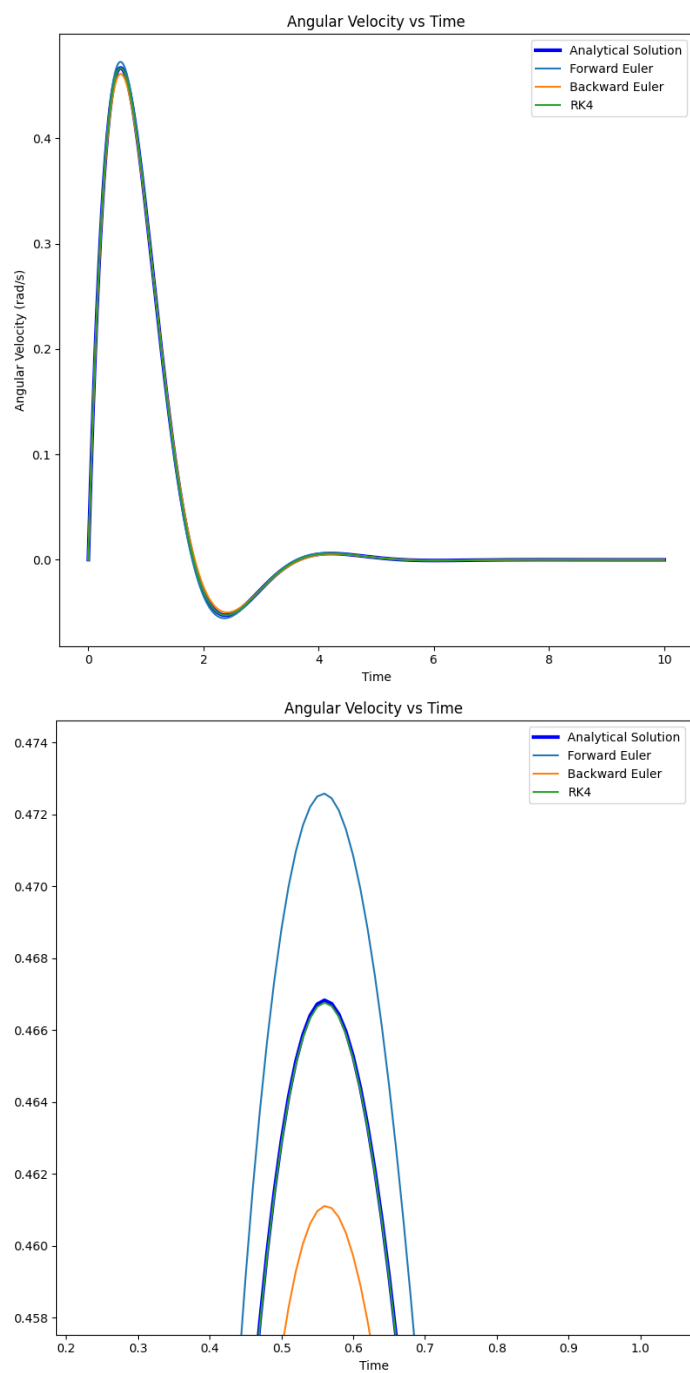


Рисунок 5 – зависимость скорости от времени

Из рисунка 5 также видно, что аналитический метод больше всего совпадает с численным методом Рунге – Кутты.

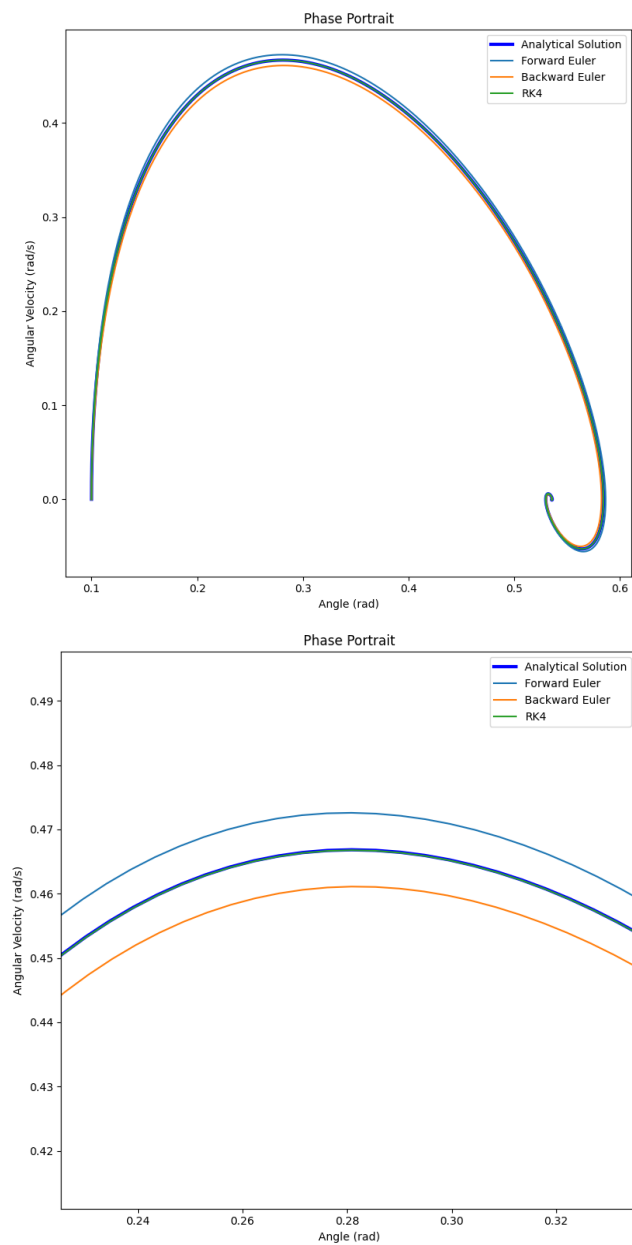


Рисунок 6 – фазовый портрет

Из рисунка 6 также видно, что аналитический метод больше всего совпадает с численным методом Рунге – Кутты.

ВЫВОД.

Согласно полученным данным, можно сделать вывод о том, что из всех приведенных методов численного интегрирования метод Рунге – Кутты является самым точным, так как он практически идеально совпадает с данными, полученные аналитическим методом расчета.