Национальный исследовательский университет ИТМО
Мегафакультет компьютерных технологий и управления
Факультет систем управления и робототехники

Отчёт по практическому заданию №2
«Система масса-пружина-демпфер»

Студент Круглов А. С.
Группа R4133c
Преподаватель Ракшин Е. А.

Санкт-Петербург
2025

Задание

1) Составить ДУ для следующей системы:

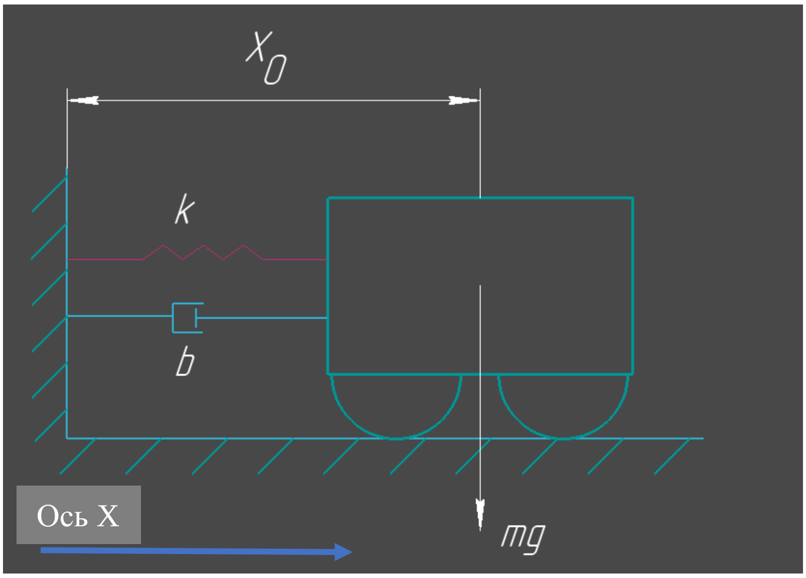

Рисунок 1 – Система масса-пружина-демпфер

Дано:

$$m = 0.3\ kg$$

$$b = 0.015\ N * S/m$$

$$k = -5.99\ N/m$$

$$x_0 = 0.21\ m$$

2) Решить ДУ аналитически;

3) Решить ДУ тремя методами интегрирования:

- явный метод Эйлера;
- неявный метод Эйлера;
- метод Рунге-Кутты**;**

4) Сравнить результаты методов с аналитическим решением.

Составление ДУ

Дифференциальное уравнение составляется в соответствии с уравнением Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q$$

Где:

L – лагранжиан системы, равный разности кинетической и потенциальной энергий:

$$L = K - P;$$

Q – обобщённая сила;

x – координата.

Кинетическая энергия равна:

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

Потенциальная энергия:

$$P = \frac{1}{2}kx^2.$$

Обобщённая сила:

$$Q = -b\dot{x}.$$

Лагранжиан:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2.$$

Подставим в уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx.$$

В результате получаем:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

Подставим данные параметры и получим:

$$0.3\ddot{x} + 0.015\dot{x} + 17.8x = 0$$

Аналитическое решение

Характеристическое уравнение:

$$0.3 * \lambda^2 + 0.015 * \lambda - 17.8 = 0$$

Корни:

$$D = -21.036$$

$$\lambda_1 = -0.025 - 7.7i$$

$$\lambda_2 = -0.025 + 7.7i$$

Общее решение:

$$x = e^{-0.025t}(C1 * \cos(7.7t) + C2 * \sin(7.7t))$$

Найдём C1 и C2:

$$x(0) = x_0 = 0.21$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

$$x_0 = (C1 + C2 * 0)$$

$$\text{C1} = x_0 = 0.21$$

$$C2 = \frac{\dot{x}(0) + 0{,}25C1}{7.7}$$

Реализация аналитического решения на python приведена на рисунке 2.

```
def analitical_solution(Tf, h, x0):

    t = np.arange(0, Tf + h, h)

    alpha = -0.025
    beta = 7.7


    C1 = x0[0]

    C2 = (x0[1] - alpha * C1) / beta


    x = np.exp(alpha * t) * (C1 * np.cos(beta * t) + C2 * np.sin(beta * t))
    x_dot = np.exp(alpha * t)*((alpha * C1 + beta * C2) * np.cos(beta * t) -
                               (C1 * beta - C2 * alpha)) * np.sin(beta * t)


    return x, x_dot, t
```

Рисунок 2 – Аналитическое решение в phyton

Решение с помощью интеграторов

Функция нахождения второй производной для работы интеграторов, реализованная в python, показана на рисунке 2.

```
def ODE(ODE_var):

    x = ODE_var[0]
    x_dot = ODE_var[1]

    x_ddot = (-17.8 * x - 0.015 * x_dot) / 0.3

    return np.array([x_dot, x_ddot])
```

Рисунок 2 – Вычисление второй производной

На рисунке 3 изображено решение методами Эйлера и Рунге-Кутты.

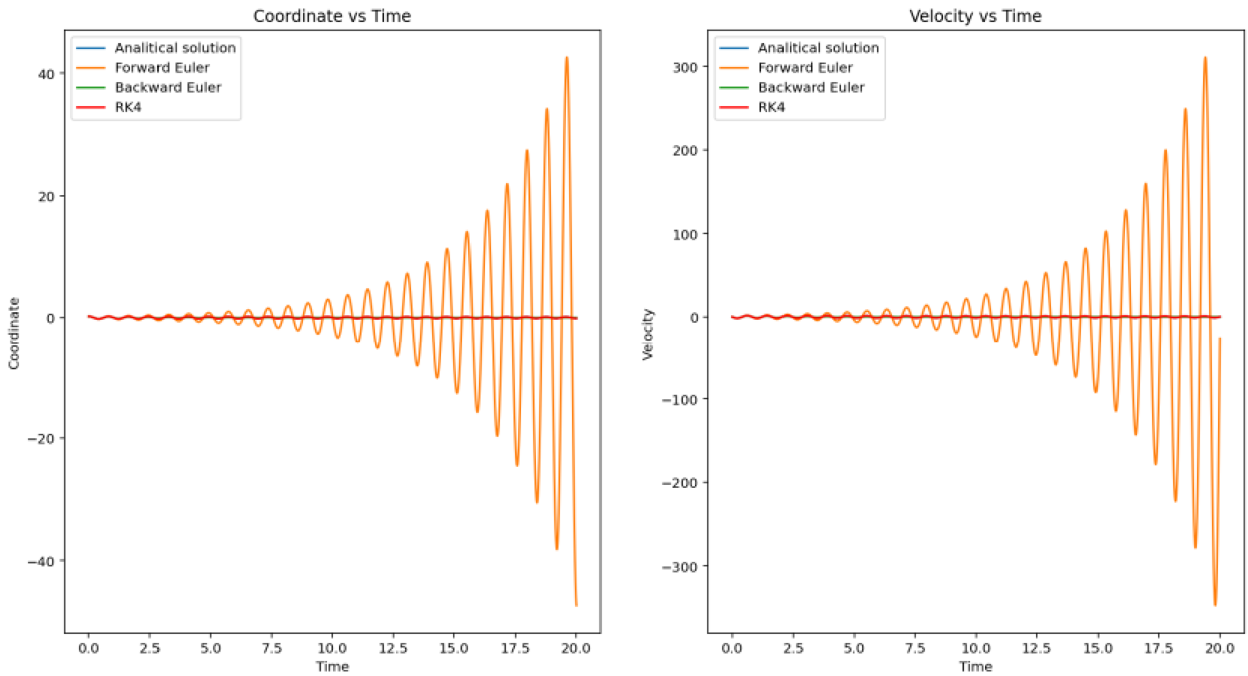

Рисунок 3 – Графики значений x и $\dot{x}$ при использовании интеграторов

Отображение графиков без прямого Эйлера показано на рисунке 4.

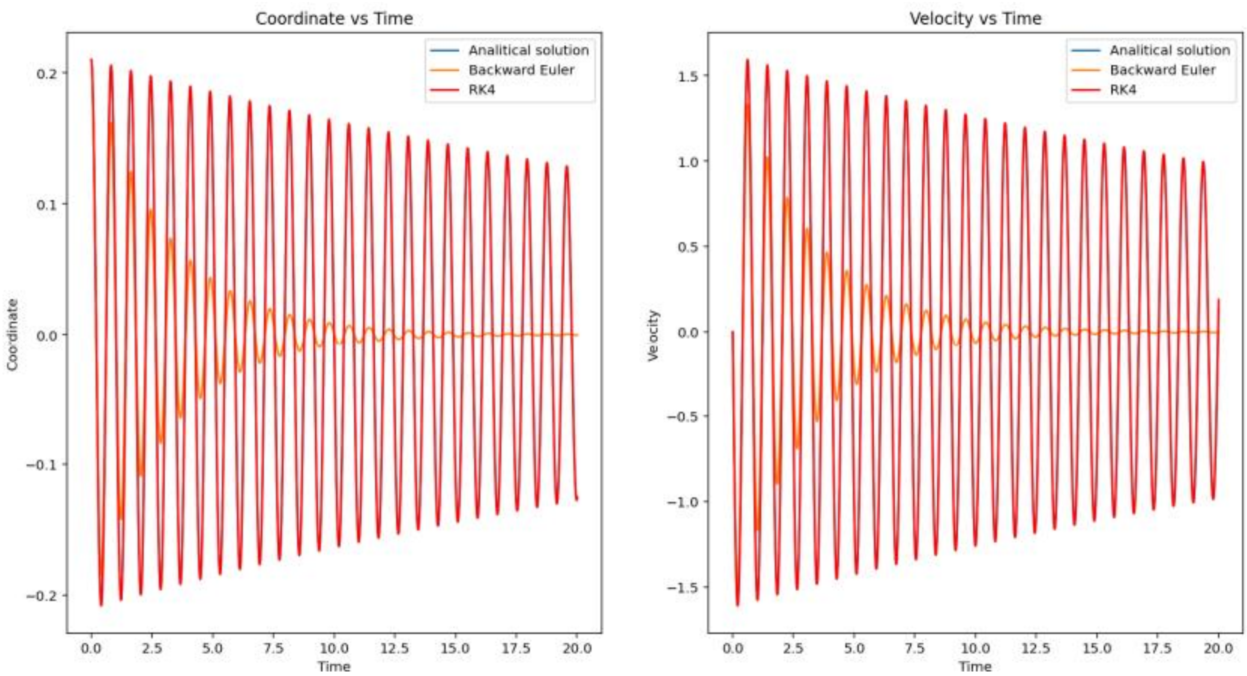

Рисунок 4 – Отображение без прямого метода Эйлера

Данные графики построены при шаге интегрирования, равном 0,01.

Графики, построенные при уменьшенном до 0,0005 шаге показаны на рисунке 4.

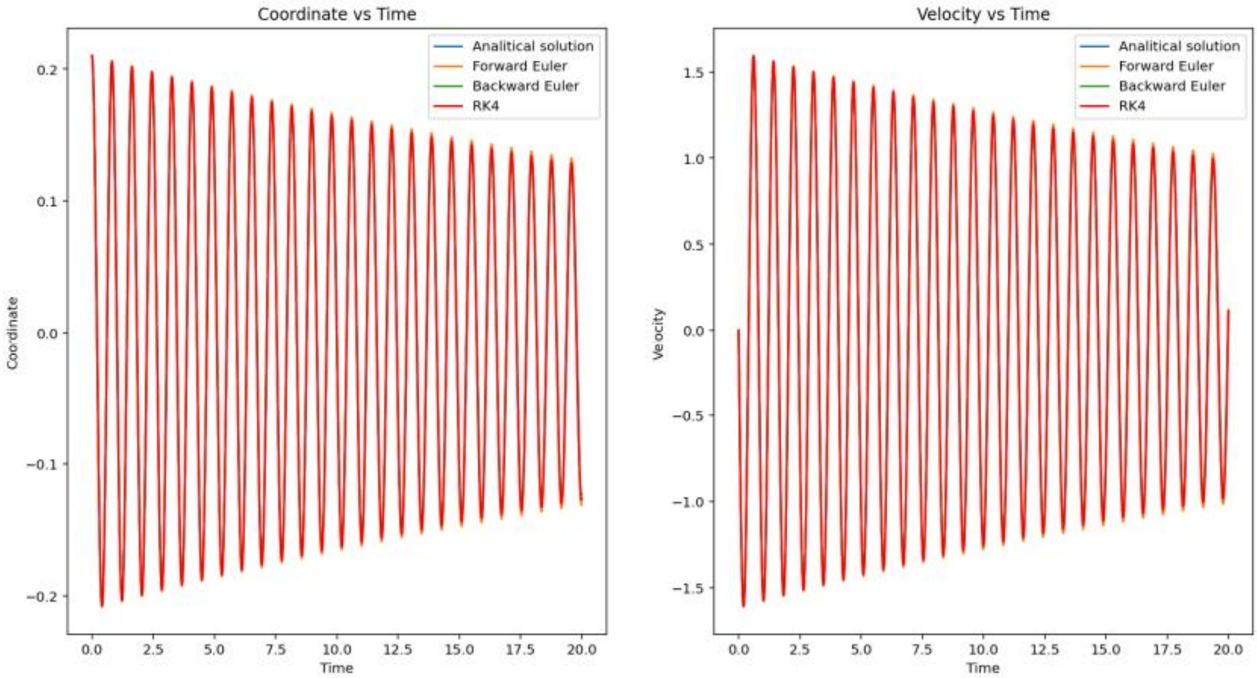

Рисунок 4 – Решения интеграторов при уменьшенном шаге

Вывод

При решении данного ДУ методы Эйлера значительно расходились с аналитическим решением при шаге интегрирования, равным 0,01.

При уменьшении шага интегрирования до 0,0005 все методы показали высокую точность, но значительно увеличилось время работы программы. Это говорит о неприменимости методов Эйлера при работе в реальном времени.

Метод Рунге-Кутты показывает высокую точность и скорость работы при большом значении шага интегрирования.