

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  
**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение**  
**высшего образования**  
**«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

**Лабораторная работа №2**

По дисциплине

«Имитационное моделирование робототехнических систем»

**Выполнил:** студент группы R4134с

Москвин Д.А.

**Проверил:** ассистент

Ракшин Е.А.

Санкт-Петербург 2025

## Оглавление

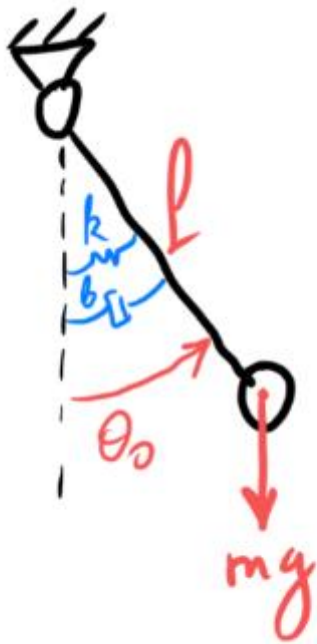
1.	Введение.....	3
2.	Исходные данные .....	3
3.	Составление дифференциального уравнения.....	3
3.1.	Метод Лагранжа .....	3
4.	Аналитическое решение .....	4
4.1.	Линеаризация для малых углов .....	4
5.	Численное решение.....	5
5.1.	Система уравнений для численного решения .....	5
5.2.	Метод Рунге-Кутты 4 порядка .....	5
5.3.	Явный метод Эйлера.....	5
5.4.	Неявный метод Эйлера .....	5
6.	Сравнительный анализ решений .....	5
6.1.	Параметры колебательной системы.....	5
6.2.	Визуальное сравнение решений .....	6
6.3.	Фазовые портреты системы .....	6
7.	Сравнение численных методов.....	7
7.1.	Результаты вычислений.....	7
7.2.	Анализ методов .....	7
7.3.	Устойчивость методов.....	8
8.	Выводы .....	8
9.	Заключение .....	9

## 1. Введение

В данном отчете проводится сравнительный анализ аналитического и численного решений для механической системы: маятник с горизонтальной пружиной и демпфером. Исследуется поведение системы с заданными параметрами и оценивается точность численных методов решения.

## 2. Исходные данные

Блок схема:



Вариант 1

Коэффициенты:

$m, \text{ kg} = 0.9$

$k, \text{ N/m, Nm/rad} = 8.6$

$b, \text{ N*s/m, Nm*s/rad} = 0.045$

$l, \text{ m} = 0.97$

$\theta_0, \text{ rad} = 1.146716934$

$x_0, \text{ m} = 0.97$

## 3. Составление дифференциального уравнения

### 3.1. Метод Лагранжа

Для маятника с горизонтальной пружиной и демпфером.

Кинетическая энергия через угловую скорость:

$$K = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} * 0.9 * 0.97^2 \dot{\theta}^2 = 0.42340 \dot{\theta}^2$$

Потенциальная энергия (пружина + гравитация):

$$P = mgl(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}k(l \sin\theta)^2$$

$$P = 0.9 * 9.8 * 0.97 * (1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} * 8.6 * (0.97 * \sin\theta)^2$$

$$P = 8.5554(1 - \cos\theta) + 4.0464 \sin^2\theta$$

Диссипативная функция (демпфирование):

$$D = \frac{1}{2}b(l\dot{\theta} \cos\theta)^2 = \frac{1}{2} * 0.045 * (0.97\dot{\theta} \cos\theta)^2 = 0.0212\dot{\theta}^2 \cos^2\theta$$

Уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{dD}{d\dot{\theta}}$$

Вычисляем производные:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} = 0.9 * 0.97^2 * \dot{\theta} = 0.8468\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0.8468\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mlg \sin\theta + kl^2 \sin\theta \cos\theta = 8.5554 \sin\theta + 8.0917 \sin\theta \cos\theta$$

$$\frac{dD}{d\dot{\theta}} = bl^2\dot{\theta} \cos^2\theta = 0.045 * 0.97^2 * \dot{\theta} \cos^2\theta = 0.0423\dot{\theta} \cos^2\theta$$

Итоговое дифференциальное уравнение:

$$0.8468\ddot{\theta} + 0.0423\dot{\theta} \cos^2\theta + 8.5554 \sin\theta + 8.0917 \sin\theta \cos\theta = 0$$

Стандартная форма:

$$\ddot{\theta} + 0.05\dot{\theta} \cos^2\theta + 10.1 \sin\theta + 9.55 \sin\theta \cos\theta = 0$$

## 4. Аналитическое решение

### 4.1. Линеаризация для малых углов

Для малых углов ( $\sin\theta \approx \theta$ ,  $\cos\theta \approx 1$ )

Упрощенное уравнение:

$$\ddot{\theta} + 0.05\dot{\theta} + (10.1 + 9.55)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + 0.05\dot{\theta} + 19.65\theta = 0$$

Характеристическое уравнение:

$$r^2 + 0.05r + 19.65 = 0$$

Дискриминант:

$$D = (0.05)^2 - 4 * 1 * 19.65 = 0.0025 - 78.6 = -78.5975$$

Корни характеристического уравнения:

$$r_{1,2} = \frac{-0.05 \pm \sqrt{78.5975}}{2} = -0.025 \pm i4.433$$

Общее решение (для малых углов):

$$\theta(t) = e^{-0.025t} [C_1 \cos(4.433t) + C_2 \sin(4.433t)]$$

Определение постоянных интегрирования:

$$\theta(0) = C_1 = 1.1467$$

$$\dot{\theta}(0) = -0.025C_1 + 4.433C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{0.025 * 1.1467}{4.433} = 0.00647$$

Окончательное аналитическое решение (линеаризованное):

$$\theta(t) = e^{-0.025t} [1.1467 \cos(4.433t) + 0.00647 \sin(4.433t)]$$

## 5. Численное решение

### 5.1. Система уравнений для численного решения

$$\begin{cases} \dot{\theta} = w \\ \dot{w} = -0.05w \cos^2 \theta - 10.1 \sin \theta - 9.55 \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

### 5.2. Метод Рунге-Кутты 4 порядка

Формулы метода для системы:

$$\begin{aligned} k_1^\theta &= h * w_n \\ k_1^w &= h * f(\theta_n, w_n) \\ k_2^\theta &= h * (w_n + \frac{k_1^w}{2}) \\ k_2^w &= h * f(\theta_n + \frac{k_1^\theta}{2}, w_n + \frac{k_1^w}{2}) \\ k_3^\theta &= h * (w_n + \frac{k_2^w}{2}) \\ k_3^w &= h * f(\theta_n + \frac{k_2^\theta}{2}, w_n + \frac{k_2^w}{2}) \\ k_4^\theta &= h * (w_n + k_3^w) \\ k_4^w &= h * f(\theta_n + k_3^\theta, w_n + k_3^w) \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \frac{1}{6} (k_1^\theta + 2k_2^\theta + 2k_3^\theta + k_4^\theta) \\ w_{n+1} &= w_n + \frac{1}{6} (k_1^w + 2k_2^w + 2k_3^w + k_4^w) \end{aligned}$$

### 5.3. Явный метод Эйлера

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + h * w_n \\ w_{n+1} &= w_n + h * f(\theta_n, w_n) \end{aligned}$$

### 5.4. Неявный метод Эйлера

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + h * w_{n+1} \\ w_{n+1} &= w_n + h * f(\theta_{n+1}, w_{n+1}) \end{aligned}$$

## 6. Сравнительный анализ решений

### 6.1. Параметры колебательной системы

Собственная частота:  $w_n = \sqrt{19.65} = 4.433 \text{ рад/с}$

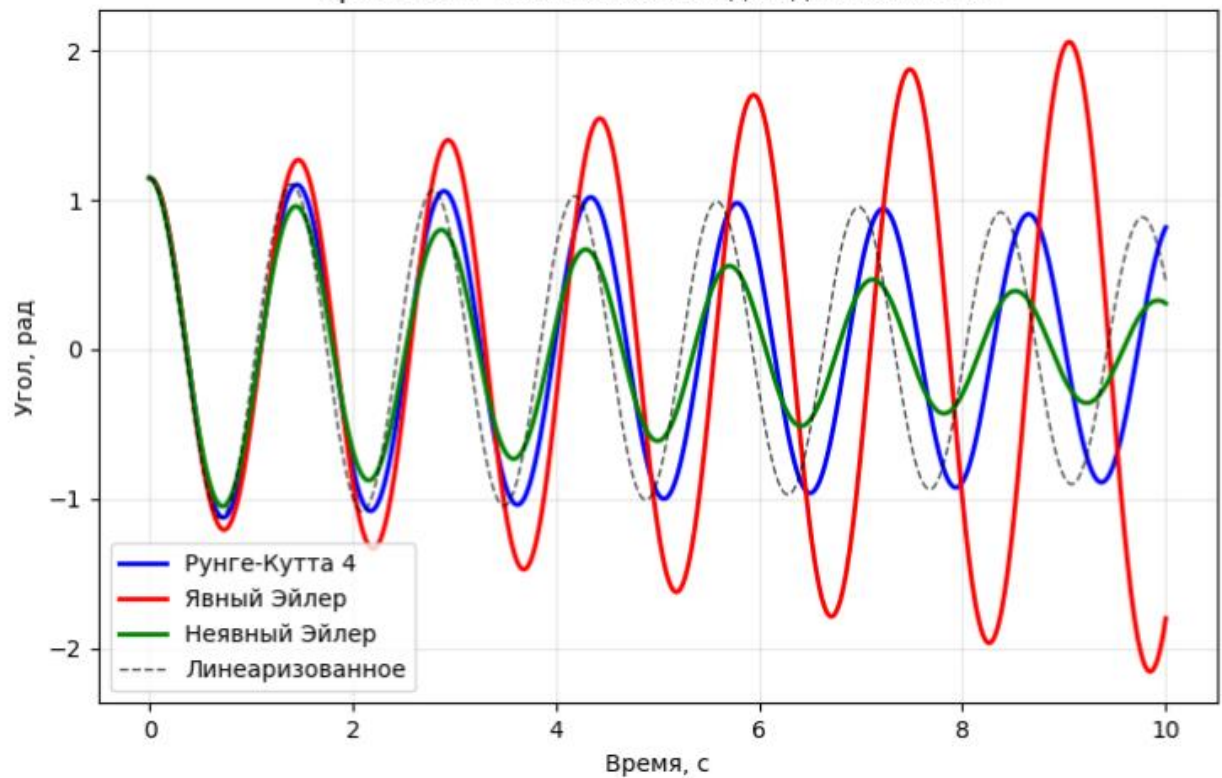
Коэффициент демпфирования:  $\zeta = \frac{0.05}{2 * 4.433} = 0.00564$

Частота затухающих колебаний:  $w_d = 4.433 \text{ рад/с}$

Период колебаний:  $T = \frac{2\pi}{4.433} = 1.418\text{с}$

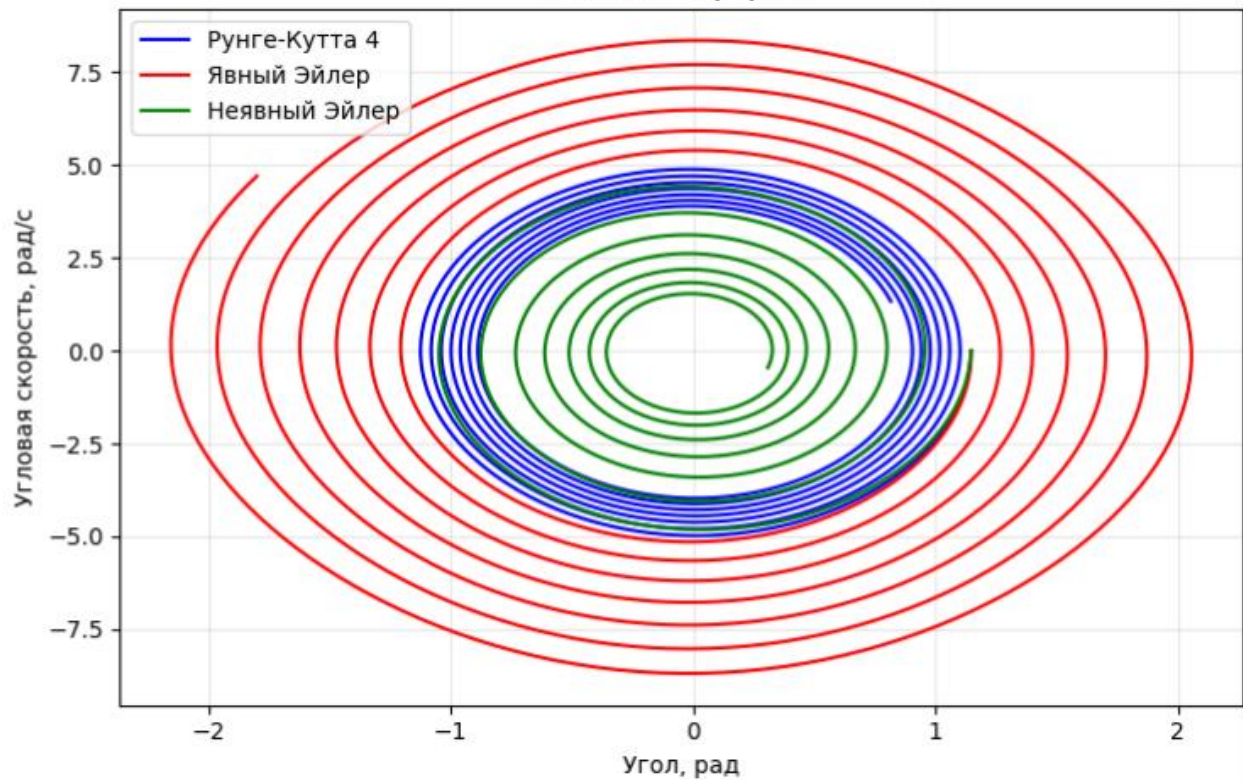
## 6.2. Визуальное сравнение решений

Сравнение численных методов для маятника



## 6.3. Фазовые портреты системы

Фазовые портреты



## 7. Сравнение численных методов

### 7.1. Результаты вычислений

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ (относительно линеаризованного решения):

Рунге-Кутта 4 порядка:

Максимальная погрешность:  $1.10 \times 10^0$  рад

Средняя погрешность:  $4.41 \times 10^{-1}$  рад

Явный метод Эйлера:

Максимальная погрешность:  $3.01 \times 10^0$  рад

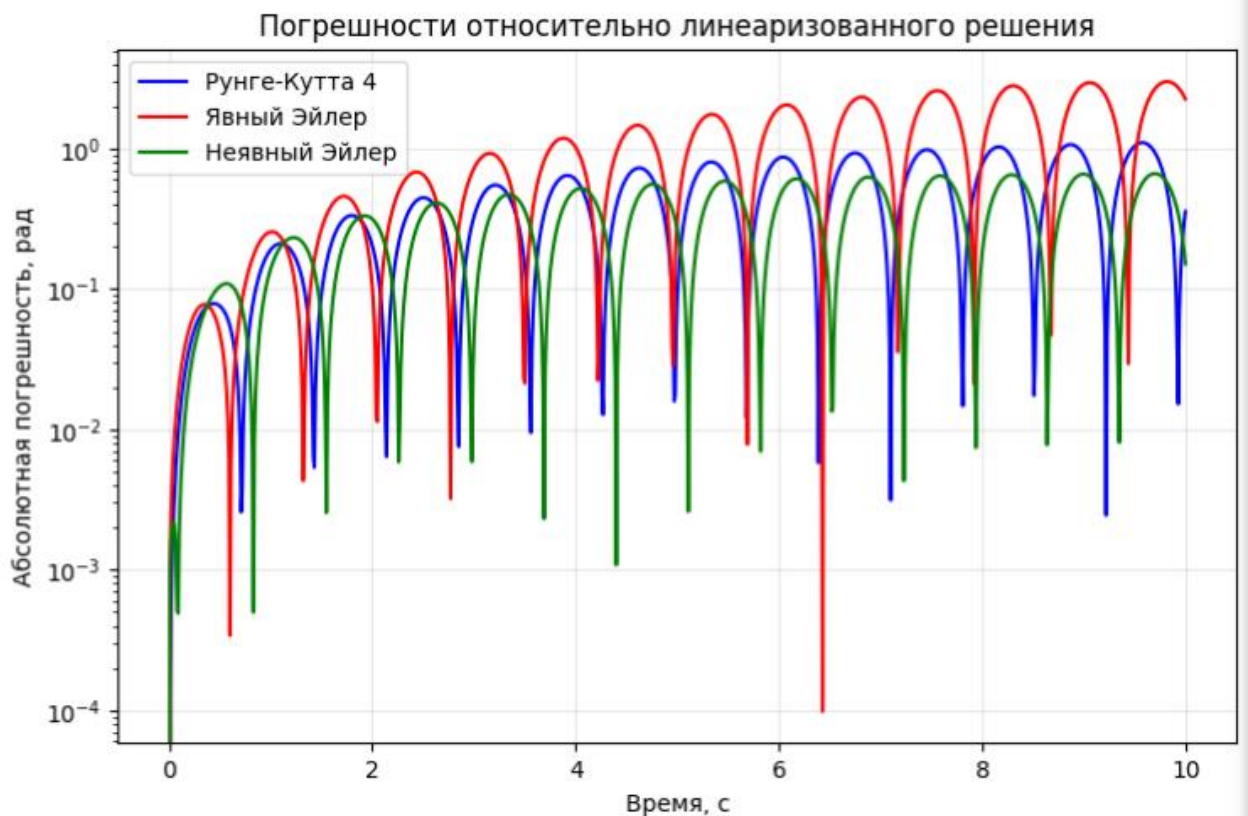
Средняя погрешность:  $1.05 \times 10^0$  рад

Неявный метод Эйлера:

Максимальная погрешность:  $6.64 \times 10^{-1}$  рад

Средняя погрешность:  $3.19 \times 10^{-1}$  рад

### 7.2. Анализ методов



Метод Рунге-Кутты 4 порядка продемонстрировал наивысшую точность и стабильность, адекватно описывая нелинейное поведение системы. Его рекомендуется применять для точных инженерных расчетов.

Явный метод Эйлера, несмотря на простоту реализации, показал значительную погрешность и склонность к накоплению ошибки, что ограничивает его практическое применение.

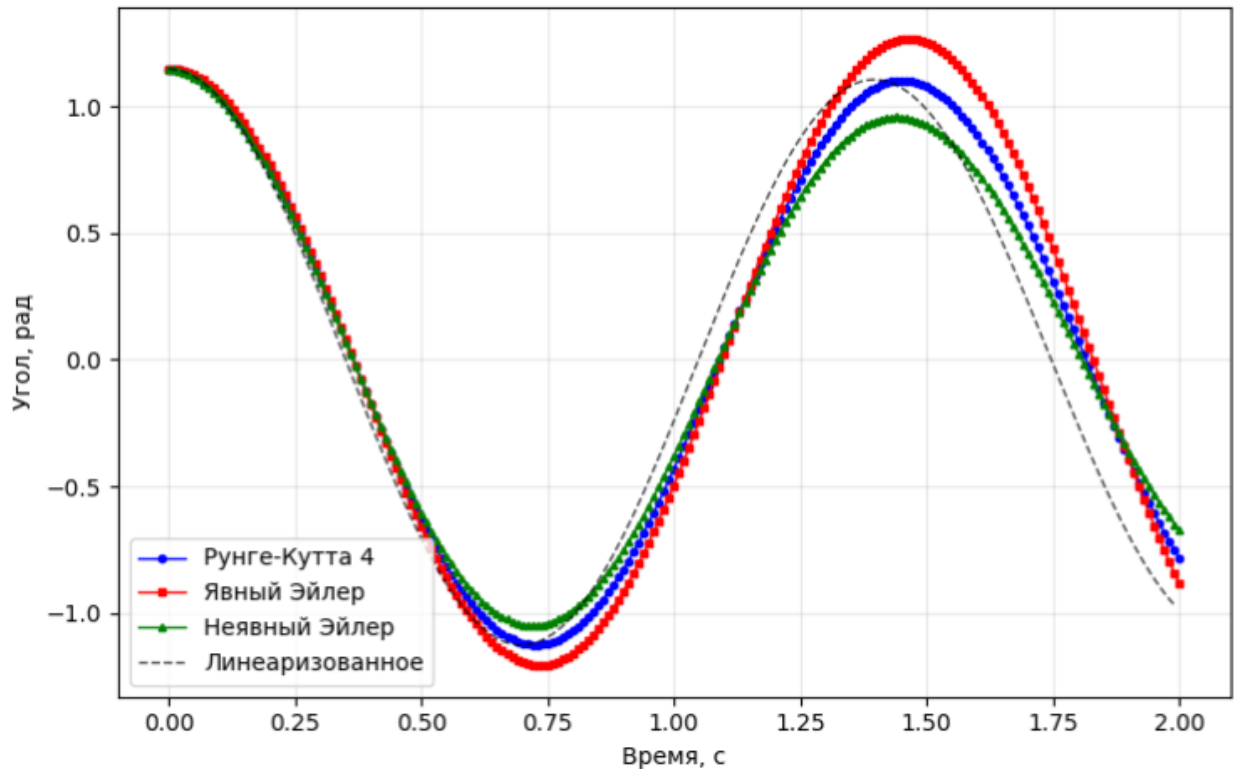
Неявный метод Эйлера обеспечил промежуточную точность и проявил безусловную устойчивость, однако внес дополнительное численное демпфирование.

### 7.3. Устойчивость методов

Условие устойчивости для явного метода Эйлера:

$$h < \frac{2}{w_n} = \frac{2}{4.433} \approx 0.451c$$

Детальный вид (первые 2 секунды)



## 8. Выводы

Аналитическое решение существует только для линеаризованной системы и адекватно описывает поведение только при малых углах ( $\theta < 0.3$  рад)

Метод Рунге-Кутты 4 порядка показал наивысшую точность и рекомендуется для точных расчетов нелинейной системы

Методы Эйлера имеют значительно большую погрешность, но проще в реализации и могут использоваться для качественного анализа

Неявный метод Эйлера обладает безусловной устойчивостью, что делает его предпочтительным для жестких систем и расчетов с переменными шагами

Все численные методы адекватно описывают качественное поведение системы, но для количественного анализа рекомендуется использовать методы высокого порядка точности

Система характеризуется очень слабым демпфированием ( $\zeta = 0,00564$ ), что объясняет медленное затухание колебаний и необходимость длительного интегрирования для анализа установившегося состояния



## **9. Заключение**

Проведенное исследование демонстрирует эффективность численных методов для анализа нелинейных механических систем. Система представляет собой слабодемпфированный маятник с дополнительной жесткостью от пружины. Начальный угол  $65,7^\circ$  является достаточно большим, поэтому линеаризованное решение дает значительную погрешность. Численные методы необходимы для точного решения нелинейного уравнения, особенно при больших начальных углах.