МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего
образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет Систем Управления И Робототехники

Практическое задание №2
по дисциплине
«Имитационное моделирование робототехнических систем»

Студент:
Группа № R4133C
Звонков Г.Е .

Преподаватель:
Ракшин. Е.А.

Санкт-Петербург
2025

Цели и задачи работы

1) Составить ДУ для системы приведённой на рисунке 1

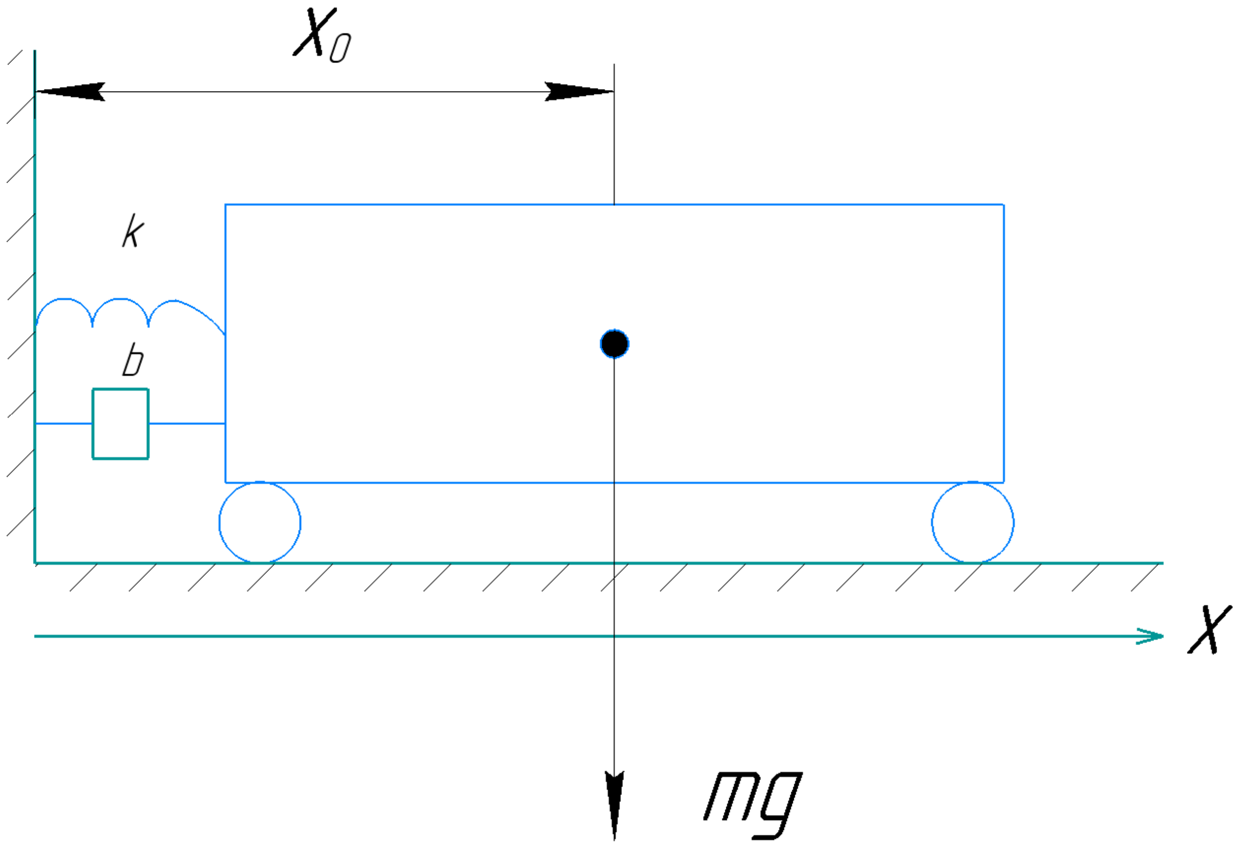

Рисунок 1 – Система масса пружина демпфер

2) Попытаться решить ДУ системы аналитически, если нельзя решить, объяснить почему?
3) Сравнить результат решения аналитического метода с интеграторами Прямого, обратного Эйлера и Рунге–Кутта (RK4).

Исходные данные приведены в таблице 1.

Таблица №1 – Исходные данные

m, кг	K, н/м	b, н*с/м	x(0), м
0,5	14,2	0,035	0,73

Составление уравнения динамики

Для составления уравнения динамики, воспользуемся методом Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=Q \tag{1}$$

Где $L=K-P$, K – кинетическая энергия система, P – потенциальная энергий, Q – обобщенные внешние силы. В нашем случае кинетическую и потенциальную энергию можно расписать как:

$$K=\frac{1}{2}m\dot{x}^2; P=\frac{1}{2}kx^2 \tag{2}$$

$$Q= -b\dot{x} \tag{3}$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим итоговое уравнение динамики системы:

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=0 \tag{4}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$0{,}5\lambda^2+0{,}035\lambda+14{,}2=0 \tag{5}$$

Корни:

$$\lambda_1=-0.0350- 5.3291i;\ \lambda_2=-0.0350 + 5.3291i;$$

Решение ДУ:

$$x(t)=e^{-0{,}035t}\left(C_1\cos(5{,}3291t)+C_2\sin(5{,}3291t)\right) \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)=-0{,}035e^{-0{,}035t}\left(C_1\cos(5{,}3291t)+C_2\sin(5{,}3291t)\right)\\ -5{,}3291e^{-0{,}035t}\left(C_1\,sin(5{,}3291t)-C_2\cos(5{,}3291t)\right)\end{aligned} \tag{7}$$

Теперь найдем коэффициенты, для этого подставим нулевые начальные условия в (6) и (7):

$$\begin{cases}x(0)=C_1\\ \dot{x}(0)=-0{,}035C_1+5{,}3291\mathrm{C}_2\end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases}C_1=x(0)\\ \mathrm{C}_2=\dfrac{0{,}035x(0)+\dot{x}(0)}{5{,}3291}\end{cases} \tag{9}$$

Построим график для (4) при $x_0 = 0{,}73$ и $\dot{x}_0 = 0$, результат на рисунке 2

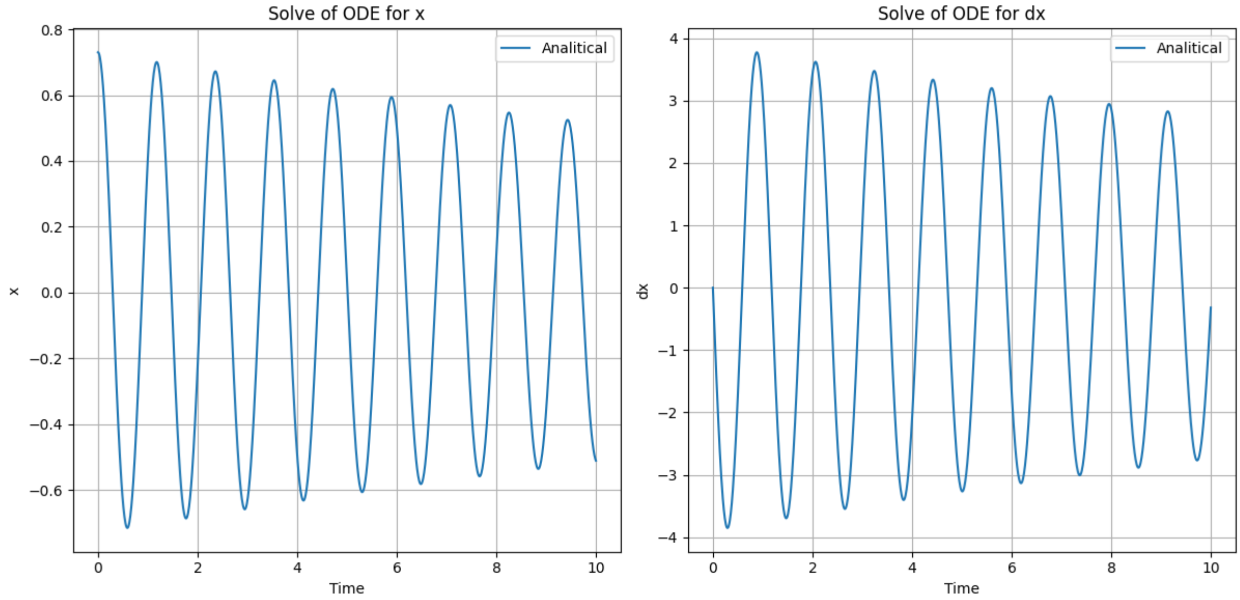

Рисунок 4 – Аналитическое решение ДУ системы

Сравнение результатов с интеграторами

Сравним результаты с методами численного интегрирования при шаге h = 0,01 результаты на рисунке 5 и6.

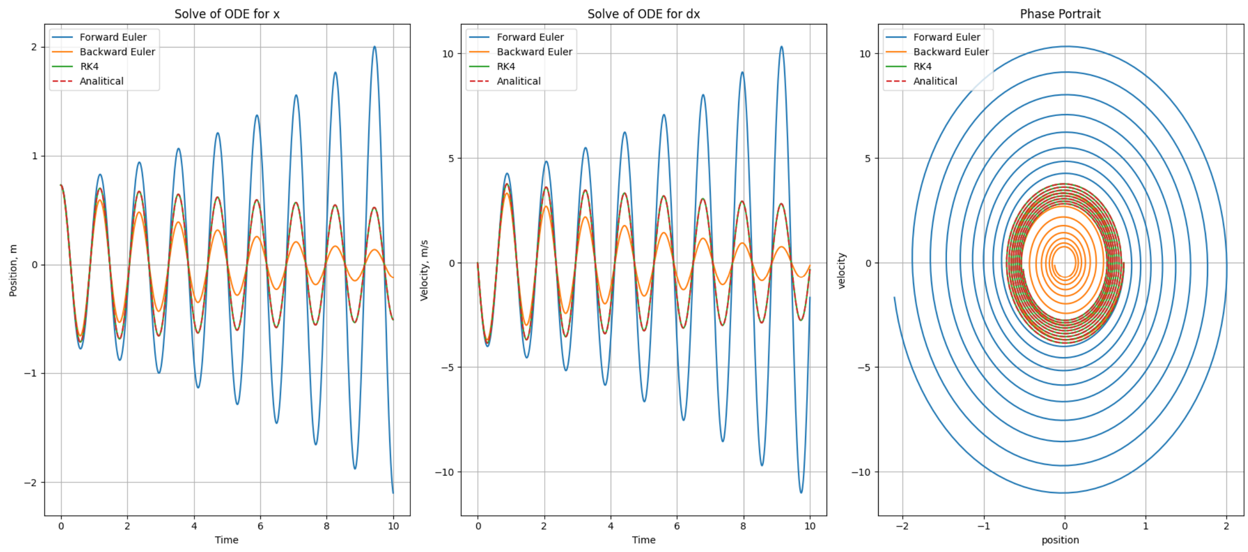

Рисунок 5 – Результаты интегрирования при h = 0,01 t = 10

Как видно из рисунка 5 при малом шаге интегрирования методы Эйлера некорректно отображают поведение системы: прямой Эйлер осциллирует систему, хотя она очевидно должна затухать, а обратный Эйлер её через чур демпфирует, RK4 хорошо справляется с интегрирование и имеет наименьшую ошибку, что видно из рисунка 6.

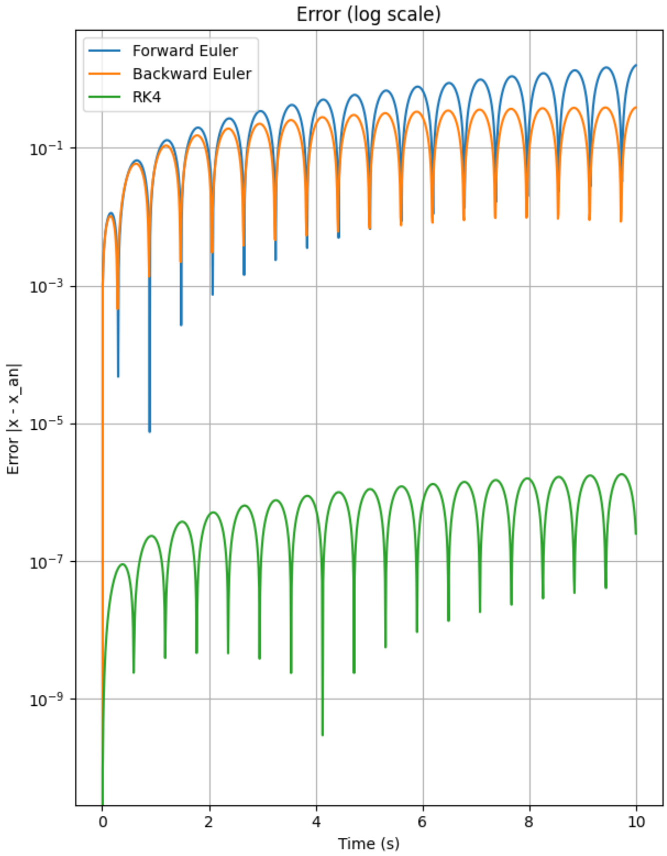

Рисунок 6 – Ошибка интегрирования при шаге h = 0,01 t = 10

Уменьшим h и еще раз снимем результаты (рис. 7, 8)

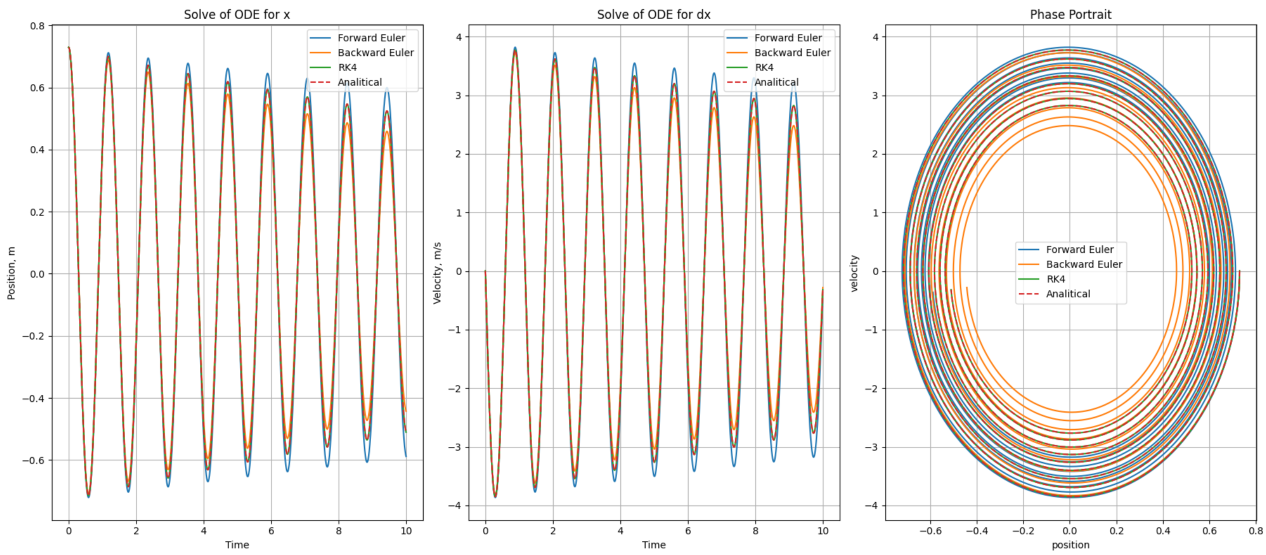

Рисунок 7 – Результаты интегрирования при h = 0,001 t = 10

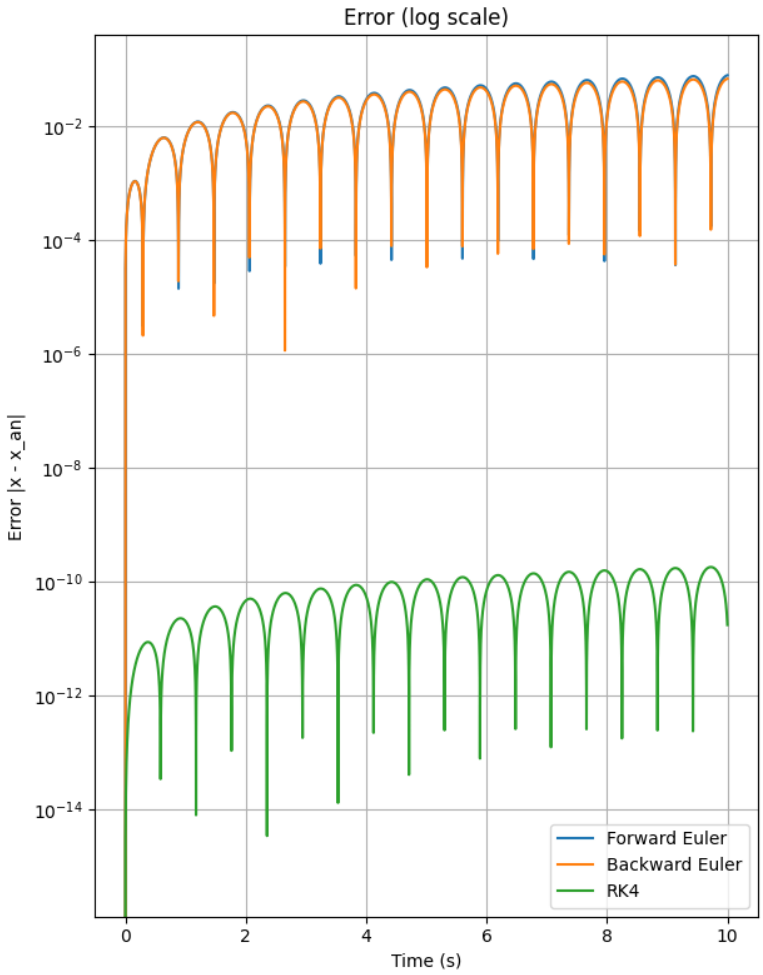

Рисунок 8 – Ошибка интегрирования при шаге h = 0,001 t = 10

Теперь все интеграторы более точно следуют действительному поведению системы и очевидно, что при дальнейшем уменьшении h, интеграторы будут все точнее решать ДУ.

Выводы

В ходе выполнения работы было составлено уравнение динамики системы «Масса – пружина–демпфер», для которого удалось получить аналитическое решение и также уравнение было проинтегрировано при помощи методов прямого и обратного Эйлера, а также метода Рунге–Кутта. Было установлено, что выбор интегратора зависит от свойств исходной системы. Метод прямого (явного) Эйлера является наименее предпочтительным, поскольку не гарантирует численной устойчивости. Неявный метод Эйлера, напротив, обеспечивает устойчивость, однако при больших шагах интегрирования может искажать реальное поведение системы. Метод Рунге–Кутта показал наилучшую точность и наиболее достоверно воспроизводит аналитическое решение, хотя и требует больших вычислительных затрат.