Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Отчет
по практической работе № 1
по дисциплине «Имитационное моделирование робототехнических систем»

Автор: Михин Н. С.
Факультет: СУиР
Группа: R4150
Вариант (ИСУ) № 335259
Преподаватель: Ракшин Е. А.

Санкт-Петербург, 2025

Условия варианта:
ОДУ:

$$a \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = d, \text{где}$$
$$\mathrm{a} = -6.43,$$
$$\mathrm{b} = 1.51$$
$$\mathrm{c} = 4.63,$$
$$\mathrm{d} = 5$$

Аналитическое решение ОДУ:

1. Частное решение (в точке равновесия)

Ищем решение в виде константы x_p:

$$c \cdot x_p = d \Rightarrow x_p = \frac{d}{c}$$
$$x_p = \frac{5.0}{4.63} \approx 1.0799136069$$

2. Решение однородной части

$$a \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = 0$$
$$a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c = 0, \quad \Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 1.51^2 - 4 \cdot (-6.43) \cdot (4.63) = 121.3637 \ (> 0)$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$\lambda_1 \approx 0.9740683837, \quad \lambda_2 \approx -0.7392316807$$

3. Общее решение

$$x(t) = x_p + C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

где $x_p = \frac{d}{c}$, λ_1 и λ_2 — корни, C_1 и C_2 — константы.

4. Выразим C_1 и C_2 через начальные условия

$$y(t) = x(t) - x_p = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$
$$v = \dot{x}$$
$$C_1 + C_2 = x_0 - x_p, \quad \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = v_0$$
$$C_1 = \frac{(x_0 - x_p)\lambda_2 - v_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$$
$$C_2 = \frac{v_0 - (x_0 - x_p)\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$
$$\lambda_2 - \lambda_1 \approx -1.7133000644$$

5. Пример (при начальных условиях $x_0 = 0.1, v_0 = 0.0$)

$$x_p \approx 1.0799136069, \quad y_0 = x_0 - x_p \approx -0.9799136069$$
$$C_1 \approx -0.4227999506, \quad C_2 \approx -0.5571136563$$
$$x(t) \approx 1.0799136069 + (-0.4227999506)e^{0.9740683837\,t} + (-0.5571136563)e^{-0.7392316807\,t}$$

Приведение к первому порядку для численных методов:

Обозначим $x_1 = x, x_2 = \dot{x}\ (= v)$. Тогда система первого порядка:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{d - b \cdot x_2 - c \cdot x_1}{a}$$

В матричном виде $\dot{x} = A\,x + g$, где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{bmatrix}$$

$$, g = \left[0, \frac{d}{a} \right]^T$$

Для коэффициентов a = −6.43, b = 1.51, c = 4.63, d = 5 получаем численно:

$$A \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.72 & 0.235 \end{bmatrix},$$

$$g \approx [\ 0.0, -0.778\ ]^T$$

Сравнение различных методов:

Для сравнения методов явного/неявного Эйлера и метода Рунге–Кутты с аналитическим решением воспользуемся функциями из integrators.ipynb, а также напишем код для построения графиков и представления полученных данных в task1.ipynb

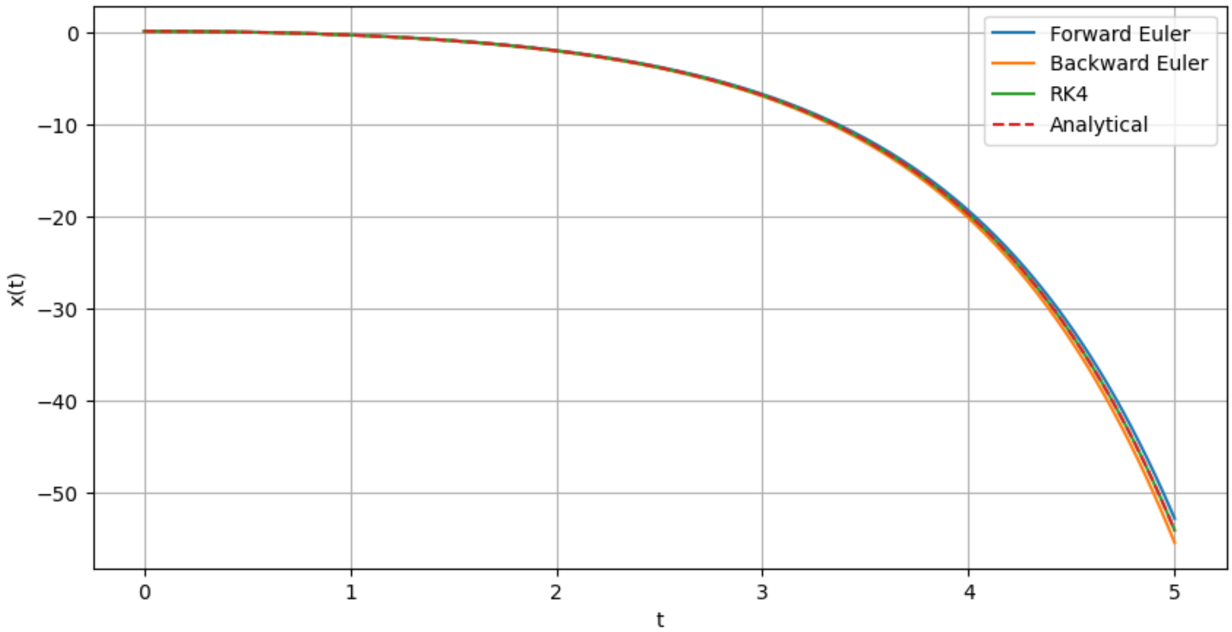

График 1 – Сравнение разных методов для $x(t)$

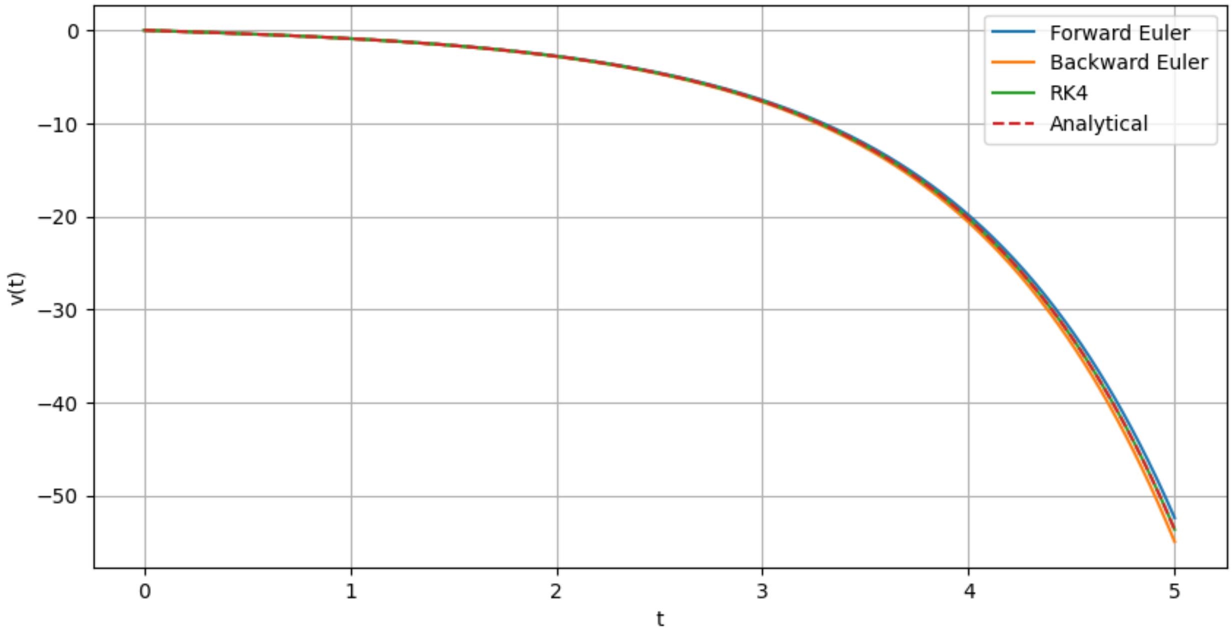

График 2 – Сравнение разных методов для $v(t)$

Таблица 1 - Сравнение ошибок разных методов

Метод	$max\|x_a - x\|$	$max\|v_a - v\|$	$L_2(x)$	$L_2(v)$
Forward Euler	1.2840	1.2504	0.3739	0.3639
Backward Euler	1.3320	1.2971	0.3871	0.3768
RK4	$1.9975 \cdot 10^{-8}$	$1.9459 \cdot 10^{-8}$	$5.8085 \cdot 10^{-9}$	$5.6598 \cdot 10^{-9}$

Вывод:

Был выполнен аналитический расчёт системы, один из её корней оказался положительным, из-за чего система расходится. Метод Рунге–Кутты четвёртого порядка показал почти полное совпадение с аналитическим решением. Ошибка минимальна, что делает данный метод лучшим выбором при используемом шаге интегрирования. Явный и неявный методы Эйлера дают заметные отклонения и в данном случае проявляют себя хуже по сравнению с методом Рунге–Кутты четвертого порядка.