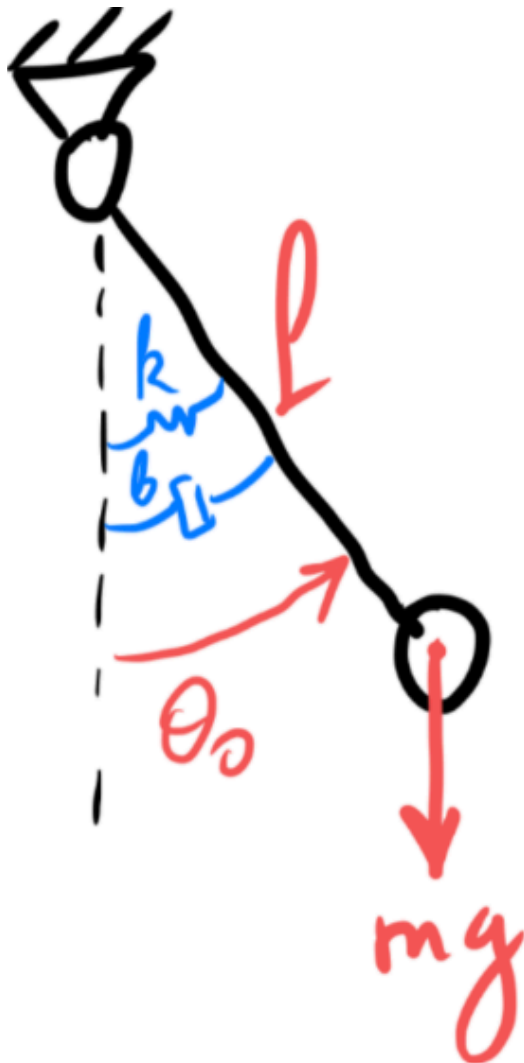


Вариант 1

1 Аналитическое решение для системы пружинно-массового демпфера



Вариант 1

График системы

Дано: $m, \text{ kg} = 0.7$, $k, \text{ N/m, Nm/rad} = 17.2$, $b, \text{ N*s/m, Nm*s/rad} = 0.035$, $l, \text{ m} = 0.25$, $\theta_0, \text{ rad} = 0.4555450833$, $x_0, \text{ m} = 0.45$

Уравнение Эйлера-Лагранжа для систем с диссипативными силами имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^{nc}$$

1.1. Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

1.2. Потенциальная энергия

$$y = -l \cos(\theta)$$

$$V_g = mgy = -mgl \cos(\theta)$$

$$V_k = \frac{1}{2}k\theta^2$$

$$V = V_g + V_k = -mgl \cos(\theta) + \frac{1}{2}k\theta^2$$

1.3. Функция Лагранжа

$$L = T - V = \left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \right) - \left(-mgl \cos(\theta) + \frac{1}{2}k\theta^2 \right)$$

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos(\theta) - \frac{1}{2}k\theta^2$$

1.4. Обобщенная диссипативная сила

$$Q_\theta = \frac{dW_{nc}}{d\theta} = -b\dot{\theta}$$

1.5. Уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos(\theta) - \frac{1}{2}k\theta^2 \right) = ml^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos(\theta) - \frac{1}{2}k\theta^2 \right) = -mgl \sin(\theta) - k\theta$$

$$(ml^2\ddot{\theta}) - (-mgl \sin(\theta) - k\theta) = -b\dot{\theta}$$

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) + k\theta = -b\dot{\theta}$$

В общем виде аналитическое решение для данного уравнения не существует в элементарных функциях. Наличие одновременно члена с демпфированием ($b\dot{\theta}$), линейного члена с жесткостью ($k\theta$) и нелинейного члена с синусом ($mgl \sin(\theta)$) делает задачу не решаемой аналитически.

2. Выводы

1. Уравнение движения: С помощью метода Лагранжа было получено точное нелинейное ОДУ, описывающее динамику системы:

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta + mgl \sin(\theta) = 0.$$

2. Аналитическое решение: Для полученного нелинейного уравнения не существует общего аналитического решения в замкнутой форме. Аналитическое решение можно найти только для линеаризованной модели, справедливой для малых углов отклонения.
3. Полученный график показывает проблемы, возникающих при моделировании динамических систем. Он демонстрирует важность выбора подходящего численного метода, так как простейший явный метод Эйлера оказался численно неустойчивым. Во-вторых, сравнивая результаты, полученные устойчивыми методами РК4 и неявный Эйлера с аналитическим решением для линеаризованной системы, мы подтверждаем, что упрощенная физическая модель вносит существенную погрешность в описание движения системы. Для получения достоверных результатов нужно решать полное нелинейное уравнение с использованием устойчивого численного метода, такого как Рунге-Кутты 4.

3 Сравнение результатов

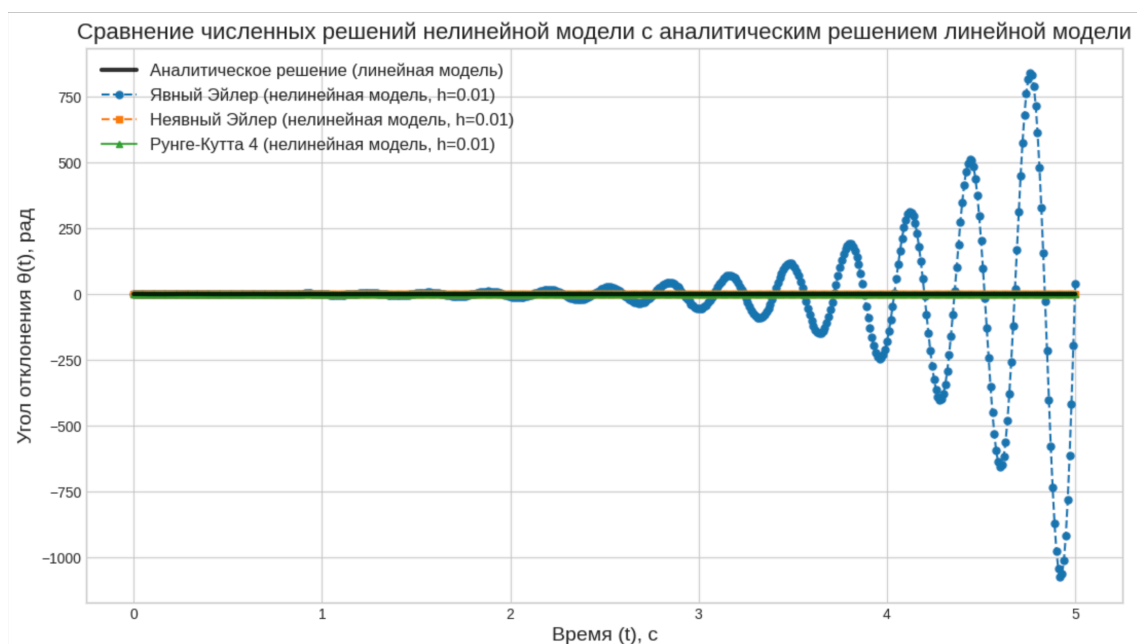


График сравнения методов

Анализ отклонения численных решений нелинейной модели от аналитического решения линейной модели:

RMSE Явный Эйлер vs Линейная модель: 217.628201 рад

RMSE Неявный Эйлер vs Линейная модель: 0.124899 рад

RMSE Рунге-Кутты 4 vs Линейная модель: 0.008701 рад