Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

Отчёт по лабораторной работе №4 (8)
по теме «Дифференциальные уравнения»
по дисциплине "Имитационное моделирование робототехнических систем"

Выполнил: студент гр.

Магазенков Е. Н.

Преподаватели:

Борисов И. И., Ракшин Е. А.

Санкт-Петербург, 2024-2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

Аналитическое решение уравнения **1**

Численное решение уравнения **1**

Результаты **2**

Выводы **3**

Таблица 1. Вариант задания

a	b	c	d
-7	-8.6	1.66	8.12

Аналитическое решение уравнения

Решим уравнение

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = d.$$

Для этого решим соответствующее однородное линейное уравнение:

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \Leftrightarrow \lambda_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Тогда решением однородного уравнения будет

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Правая часть исходного неоднородного уравнения имеет константный вид, поэтому будем искать частное решение в виде $x = D$. Очевидно, получается, что $D = \frac{d}{c}$.

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{d}{c}.$$

При подстановке значений из варианта, получаем уравнение

$$-7\ddot{x} - 8.6\dot{x} + 1.66x = 8.12$$

и $\lambda_1 = 0.1696$, $\lambda_2 = -1.3982$, а значит решение

$$x = C_1 e^{0.1696t} + C_2 e^{-1.3982t} + 4.8916.$$

Численное решение уравнения

Численно будем решать в виде системы уравнений первого порядка. Для этого приведем исходное уравнение к виду

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{a} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим методы:

- прямого Эйлера
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \cdot f(t_k, \mathbf{x}_k),$$
- обратного Эйлера
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \cdot f(t_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}),$$
- Рунге-Кутты 4-ого порядка
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right),$$
где $k_1 = f(t_k, \mathbf{x}_k)$, $k_2 = f(t_k + \frac{h}{2}, \mathbf{x}_k + \frac{h}{2}k_1)$, $k_3 = f(t_k + \frac{h}{2}, \mathbf{x}_k + \frac{h}{2}k_2)$, $k_4 = f(t_k + h, \mathbf{x}_k + hk_3)$.

Результаты

Промоделируем с произвольным зафиксированным начальным условием $x(0) = 452, \dot{x}(0) = 449$ и разными шагами $h \in \{0.1, 0.01, 0.001\}$. Результаты с графиками решений уравнения и графиками ошибок численного решения от аналитического представлены на рисунках 1-3.

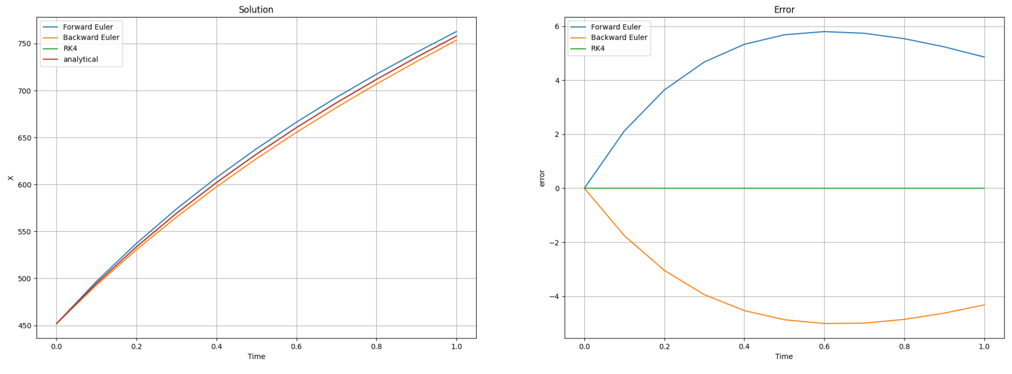

Рис. 1. Решение уравнения с шагом $h = 0.1$

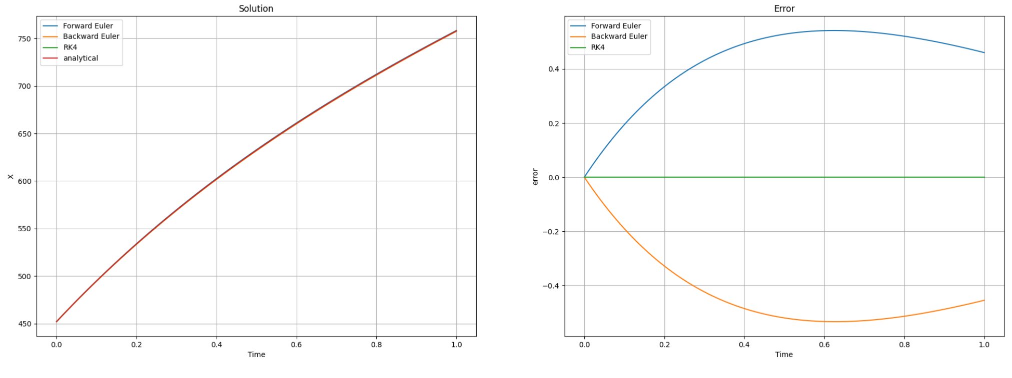

Рис. 2. Решение уравнения с шагом $h = 0.01$

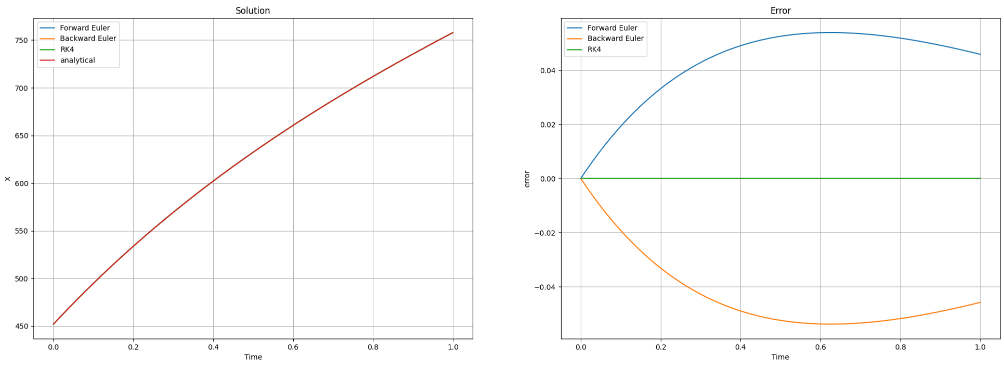

Рис. 3. Решение уравнения с шагом $h = 0.001$

Выводы

Из результатов видно подтверждение теоретических знаний об ошибках численных методов:

- С уменьшением величины шага h уменьшается ошибка решения.
- При этом у метода Рунге-Кутты ошибка сильно меньше, так как он четвертого порядка и имеет накопительную ошибку четвертого порядка от величины шага, в то время как методы прямого и обратного Эйлера имеют ошибку первого порядка (то есть сопоставимую с величиной шага).
- Также стоит отметить, что метод обратного Эйлера в данном уравнении не дает преимущества, а только увеличивает вычислительную сложность в силу своей неявности. В жестких системах он будет необходим, но тут не дает преимущества.