

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»



Отчет по практической работе №1

По дисциплине

Имитационное моделирование

робототехнических систем

На тему: «Сравнительный анализ методов интегрирования»

Студент:

Рязанцев Д.Л.

Группа:

R4134с

Преподаватель:

Ракшин Е.А.

Санкт-Петербург, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Постановка задачи.....	3
Часть 1. Аналитическое решение	3
Часть 2. Явный метод Эйлера	4
Часть 3. Неявный метод Эйлера	5
Часть 4. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка	6
Выводы	8

Цель работы: Аналитическое и численное решение линейного ОДУ второго порядка. Сравнительный анализ методов интегрирования.

Постановка задачи

Исходные данные берутся в соответствии с номером ИСУ 507578. Решается линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$7.43 \cdot x'' - 3.47 \cdot x' - 8.85 \cdot x = -7.63$$

с начальными условиями:

$$x(0) = 1.0, x'(0) = 0.0$$

Период интегрирования: $t \in [0, 5]$ с шагом $h = 0.01$

Часть 1. Аналитическое решение

1. Приведение к стандартному виду.

Разделим все коэффициенты на 7.43:

$$x'' - 0.4670 \cdot x' - 1.1911 \cdot x = -1.0269$$

2. Решение однородного уравнения.

Характеристическое уравнение:

$$r^2 - 0.4670 \cdot r - 1.1911 = 0$$

Дискриминант:

$$D = (-0.4670)^2 + 4 \cdot 1.1911 = 4.9825$$

$$\sqrt{D} \approx 2.2322$$

Корни:

$$r_1 \approx (0.4670 + 2.2322)/2 \approx 1.3496$$

$$r_2 \approx (0.4670 - 2.2322)/2 \approx -0.8826$$

Общее решение однородного уравнения:

$$x_h(t) = C_1 \cdot e^{1.3496t} + C_2 \cdot e^{-0.8826t}$$

3. Частное решение неоднородного уравнения.

Поскольку правая часть – константа, ищем $x_p = A$:

$$0 - 0 - 1.1911 \cdot A = -1.0269$$

$$A \approx 0.8622$$

$$x_p = 0.8622$$

4. Общее решение неоднородного уравнения.

$$x(t) = C_1 \cdot e^{1.3496t} + C_2 \cdot e^{-0.8826t} + 0.8622$$

5. Определение постоянных из начальных условий.

Из $x(0) = 1.0$:

$$C_1 + C_2 + 0.8622 = 1.0$$

$$C_1 + C_2 = 0.1378 \quad (1)$$

Из $x'(0) = 0.0$:

$$x'(t) = 1.3496 \cdot C_1 \cdot e^{1.3496t} - 0.8826 \cdot C_2 \cdot e^{-0.8826t}$$

$$1.3496 \cdot C_1 - 0.8826 \cdot C_2 = 0 \quad (2)$$

Решение системы:

$$\text{Из (2): } C_1 \approx 0.6540 \cdot C_2$$

Подставляем в (1):

$$0.6540 \cdot C_2 + C_2 = 0.1378$$

$$1.6540 \cdot C_2 = 0.1378$$

$$C_2 \approx 0.08328$$

$$C_1 \approx 0.05446$$

6. Окончательное аналитическое решение:

$$x(t) = 0.05446 \cdot e^{1.3496t} + 0.08328 \cdot e^{-0.8826t} + 0.8622$$

Часть 2. Явный метод Эйлера

Алгоритм:

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot f(t_n, x_n)$$

Преимущества:

- Простота реализации;
- Низкие вычислительные затраты на шаг.

Недостатки:

- Низкая точность;
- Условная устойчивость.

```
def forward_euler(fun, x0, Tf, h):
    """
    Явный метод Эйлера
    """
    t = np.arange(0, Tf + h, h)
    x_hist = np.zeros((len(x0), len(t)))
    x_hist[:, 0] = x0

    for k in range(len(t) - 1):
        x_hist[:, k + 1] = x_hist[:, k] + h * fun(x_hist[:, k])

    return x_hist, t
```

Рисунок 1. Кодовая реализация решения методом явного Эйлера

Часть 3. Неявный метод Эйлера

Алгоритм:

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot f(t_{n+1}, x_{n+1})$$

Особенности реализации:

- Использование метода простых итераций;
- Критерий остановки: $\|x_{n+1}^{k+1} - x_{n+1}^k\| < 10^{-8}$;
- Максимальное число итераций: 100.

Преимущества:

- Безусловная устойчивость;
- Лучшая устойчивость для жестких систем.

Недостатки:

- Требуется решение нелинейных уравнений на каждом шаге;
- Большие вычислительные затраты.

```
def backward_euler(fun, x0, Tf, h, tol=1e-8, max_iter=100):
    """
    Неявный метод Эйлера с итерационным решением
    """
    t = np.arange(0, Tf + h, h)
    x_hist = np.zeros((len(x0), len(t)))
    x_hist[:, 0] = x0

    for k in range(len(t) - 1):
        # Начальное приближение - значение на предыдущем шаге
        x_next = x_hist[:, k]

        # Итерационный процесс (простой итерационный метод)
        for i in range(max_iter):
            x_next_new = x_hist[:, k] + h * fun(x_next)
            error = np.linalg.norm(x_next_new - x_next)
            x_next = x_next_new

            if error < tol:
                break

        x_hist[:, k + 1] = x_next

    return x_hist, t
```

Рисунок 2. Кодовая реализация решения методом неявного Эйлера

Часть 4. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

Алгоритм:

$$k_1 = f(t_n, x_n)$$

$$k_2 = f(t_n + h/2, x_n + h \cdot k_1/2)$$

$$k_3 = f(t_n + h/2, x_n + h \cdot k_2/2)$$

$$k_4 = f(t_n + h, x_n + h \cdot k_3)$$

$$x_{n+1} = x_n + h/6 \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Преимущества:

- Высокая точность;
- Хорошая устойчивость;
- Широко применяется на практике.

Недостатки:

- Четыре вычисления функции на шаг;
- Большие вычислительные затраты.

```
def runge_kutta4(fun, x0, Tf, h):
    """
    Метод Рунге-Кутты 4-го порядка
    """
    t = np.arange(0, Tf + h, h)
    x_hist = np.zeros((len(x0), len(t)))
    x_hist[:, 0] = x0

    for k in range(len(t) - 1):
        k1 = fun(x_hist[:, k])
        k2 = fun(x_hist[:, k] + 0.5 * h * k1)
        k3 = fun(x_hist[:, k] + 0.5 * h * k2)
        k4 = fun(x_hist[:, k] + h * k3)

        x_hist[:, k + 1] = x_hist[:, k] + (h / 6.0) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)

    return x_hist, t
```

Рисунок 3. Кодовая реализация решения методом Рунге-Кутты 4-го порядка

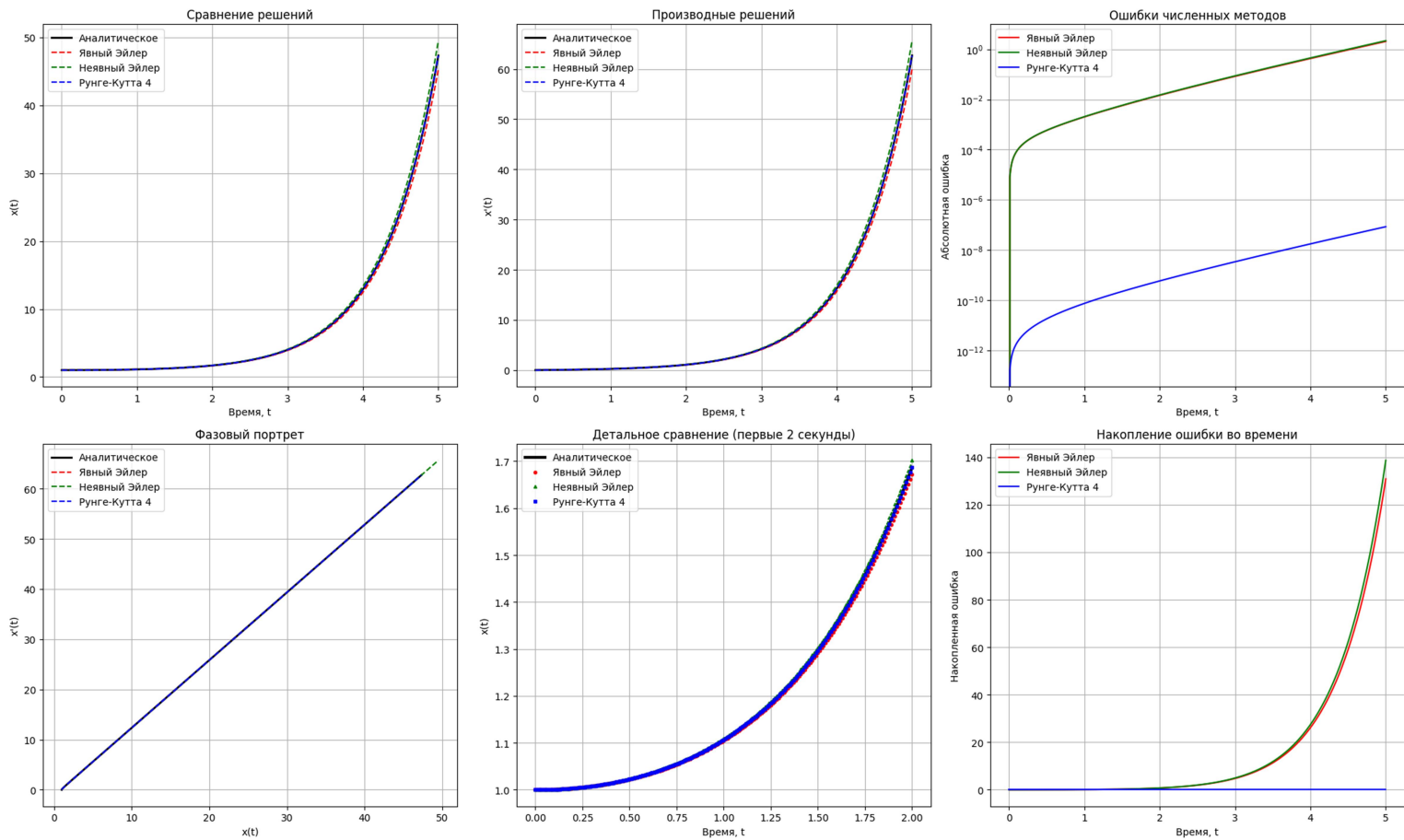


Рисунок 4. Сравнительный анализ методов интегрирования графически

Выводы

Проведенное исследование по решению линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$7.43 \cdot x'' - 3.47 \cdot x' - 8.85 \cdot x = -7.63$$

с начальными условиями $x(0) = 1.0$, $x'(0) = 0.0$ позволило получить исчерпывающие выводы о сравнительной эффективности различных численных методов интегрирования и их применимости для решения задач подобного типа.

Основной теоретический результат исследования заключается в том, что аналитическое решение показало принципиальную неустойчивость данной динамической системы. Наличие положительного характеристического корня $r_1 = 1.3496$ обуславливает экспоненциальный рост решения при $t \rightarrow \infty$, что является фундаментальным свойством системы, не зависящим от выбора численного метода. Этот факт имеет важное практическое значение, поскольку указывает на необходимость особого подхода к интегрированию таких систем.

Сравнительный анализ численных методов выявил существенные различия в их точности и устойчивости. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка продемонстрировал высокую точность, превышающую точность методов Эйлера на два порядка. Преимущество в точности делает метод Рунге-Кутты предпочтительным для задач, требующих высокой точности вычислений.

Вопрос устойчивости численных методов является важным для данной неустойчивой системы. Неявный метод Эйлера, обладающий свойством устойчивости, показал наилучшие результаты с точки зрения контроля накопления ошибки на больших интервалах времени. Это согласуется с теоретическими предсказаниями о преимуществах неявных схем при интегрировании жестких и неустойчивых систем. Практическая значимость работы заключается в разработке четких рекомендаций по выбору метода интегрирования в зависимости от требований конкретной прикладной задачи. Для быстрых оценок и вычислений на малых интервалах времени может

быть достаточно явного метода Эйлера благодаря его простоте и низким вычислительным затратам. Однако для серьезных научных и инженерных расчетов, особенно при работе с неустойчивыми системами, рекомендуется использование либо неявного метода Эйлера (при критической важности устойчивости), либо метода Рунге-Кутты 4-го порядка (при требовании высокой точности).