Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Факультет систем управления и робототехники

Отчёт по лабораторной работе №2
по дисциплине "Имитационное моделирование робототехнических систем"

Выполнил: студент гр.

Магазенков Е. Н.

Преподаватели:

Борисов И. И., Ракшин Е. А.

Санкт-Петербург, 2025-2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Таблица 1. Вариант задания

Вариант	m, kg	$k, \frac{N}{m}$	$b, \frac{N\cdot s}{m}$	x_0, m
2	0.3	19.2	0.025	0.28

Вывод уравнений системы

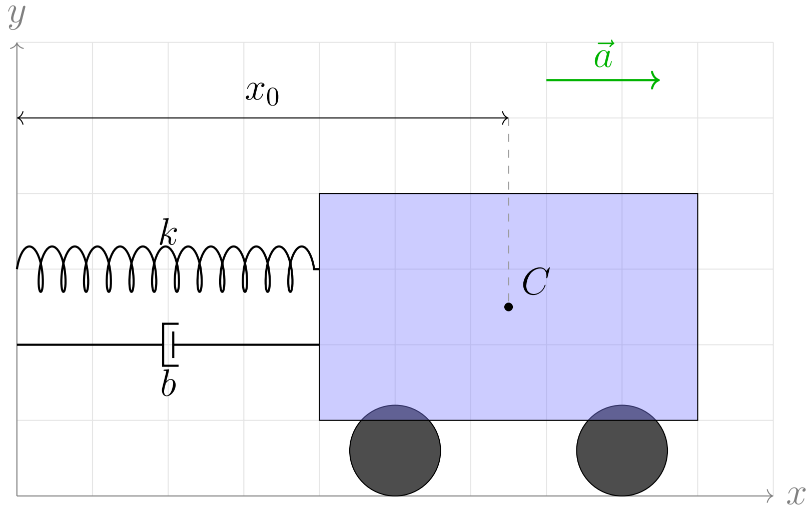

Рис. 1. Система с массой и демпфером

Запишем Лагранжиан системы

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2,$$

где x — смещение центра тяжести блока вдоль оси Ox из рисунка 1.

Из уравнения Эйлера-Лагранжа получаем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -b\dot{x},$$

$$m\ddot{x} - (-kx) = -b\dot{x} \Leftrightarrow \boxed{m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0}.$$

Аналитическое решение уравнения

Решим уравнение

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0 \Leftrightarrow \lambda_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}.$$

Тогда решением уравнения будет

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

При подстановке значений из варианта, получаем уравнение

$$0.3\ddot{x} + 0.025\dot{x} + 19.2x = 0$$

и $\lambda_1 = -0.042 - 8i$, $\lambda_2 = -0.042 + 8i$, а значит решение

$$x = C_1 e^{(-0.042+8i)t} + C_2 e^{(-0.042-8i)t} = \tilde{C}_1 e^{-0.042t}\sin(8t) + \tilde{C}_2 e^{-0.042t}\cos(8t).$$

Константы $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ определяются из начальных условий.

Численное решение уравнения

Численно будем решать в виде системы уравнений первого порядка. Для этого приведем исходное уравнение к виду

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим методы:

- прямого Эйлера
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \cdot f(t_k, \mathbf{x}_k),$$
- обратного Эйлера
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \cdot f(t_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}),$$
- Рунге-Кутты 4-ого порядка
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\right),$$
где $k_1 = f(t_k, \mathbf{x}_k)$, $k_2 = f(t_k + \frac{h}{2}, \mathbf{x}_k + \frac{h}{2}k_1)$, $k_3 = f(t_k + \frac{h}{2}, \mathbf{x}_k + \frac{h}{2}k_2)$, $k_4 = f(t_k + h, \mathbf{x}_k + hk_3)$.

Результаты

Промоделируем с произвольным зафиксированным начальным условием $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 449$ и разными шагами $h \in \{0.1, 0.01, 0.001\}$. Результаты с графиками решений уравнения и графиками ошибок численного решения от аналитического представлены на рисунках 2-4.

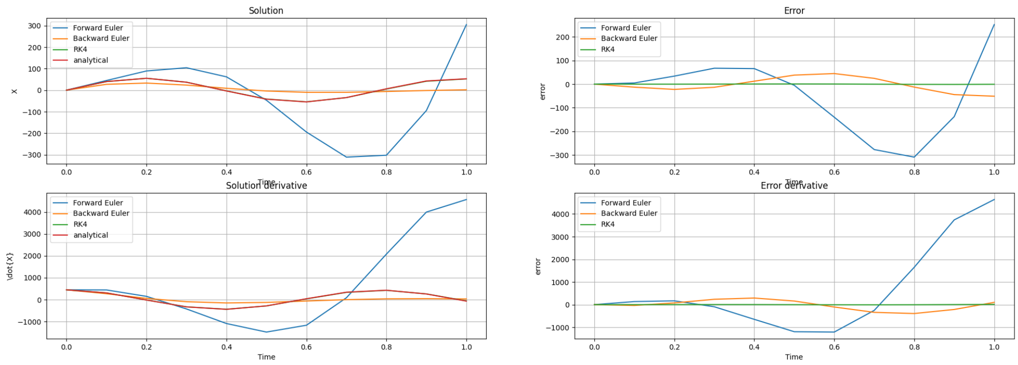

Рис. 2. Решение уравнения с шагом $h = 0.1$

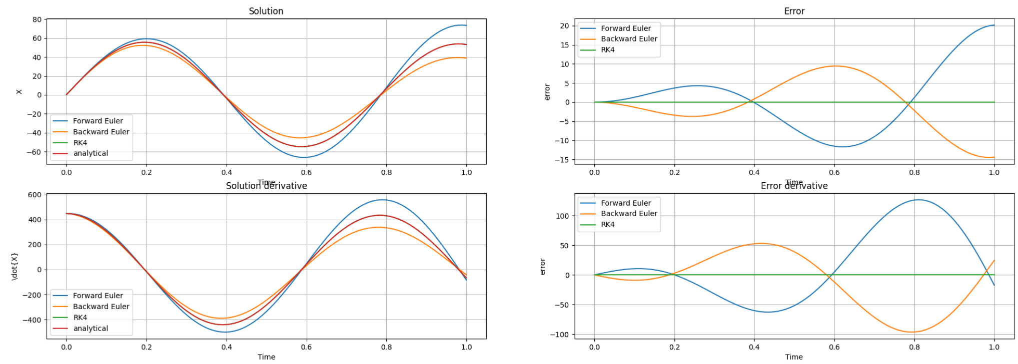

Рис. 3. Решение уравнения с шагом $h = 0.01$

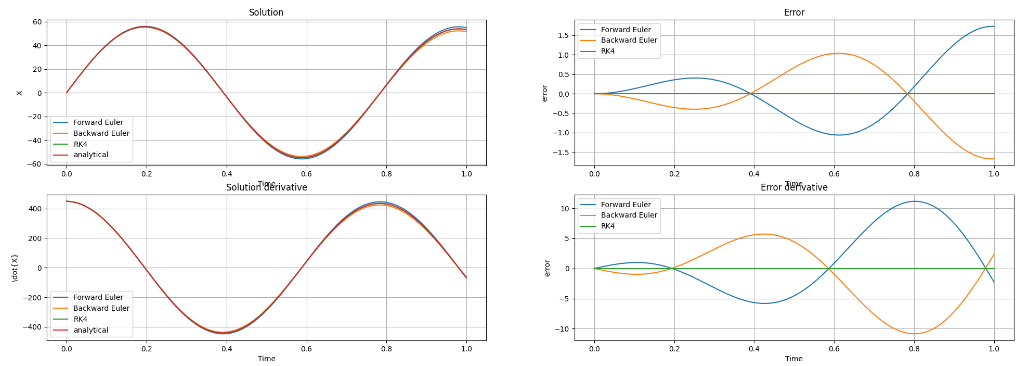

Рис. 4. Решение уравнения с шагом $h = 0.001$

Выводы

Из результатов видно подтверждение теоретических знаний об ошибках численных методов:

- С уменьшением величины шага h уменьшается ошибка решения.

- При этом у метода Рунге-Кутты ошибка сильно меньше, так как он четвертого порядка и имеет накопительную ошибку четвертого порядка от величины шага, в то время как методы прямого и обратного Эйлера имеют ошибку первого порядка (то есть сопоставимую с величиной шага). Однако при очень большом шаге (к примеру в нашем случае $h = 0.1$ обратный метод Эйлера спасается относительно сразу разлетающегося прямого Эйлера, так как система становится похожей на жесткую, с которой он борится в силу «предсказания» в будущий момент времени, заложенного внутри неявности метода).
- Также стоит отметить, что метод обратного Эйлера в данном уравнении не дает преимущества (кроме случаев большого шага, где метод Рунге-Кутты все равно дает лучшие результаты в силу более высокой степени), а только увеличивает вычислительную сложность в силу своей неявности. В жестких системах он будет необходим, но тут в целом не дает преимущества.