МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Лабораторная работа №1

по дисциплине
«Имитационное моделирование робототехнических систем»
Вариант 42

Студент:
Группа R4135c *Петрищев А.С.*

Преподаватель: *Ракшин Е.А.*

Санкт-Петербург 2025

Содержание

Постановка задачи

В данной лабораторной работе требуется решить однородное дифференциальное уравнение аналитическим способом, после чего сравнить решение с тремя методами: явный метод Эйлера, неявный метод Эйлера, метод Рунге-Кутты.

Однородное дифференциальное уравнение задается видом

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = d, \tag{1.1}$$

где a, b, c, d – коэффициенты, заданные по варианту:

$$\begin{aligned} a &= 5.34, \\ b &= 5.4, \\ c &= -8.22, \\ d &= -6.68. \end{aligned}$$

В итоге однородное дифференциальное уравнение будет иметь вид:

$$5.34\ddot{x} + 5.4\dot{x} - 8.22x = -6.68. \tag{1.2}$$

Ход работы

1.1 Аналитический метод

Для решения однородного дифференциального уравнения требуется:

- вывести характеристическое уравнение дифференциального уравнения;
- найти корни характеристического уравнения;
- получить общее решение дифференциального уравнения;

Однородное дифференциальное уравнение:

$$5.34\ddot{x} + 5.4\dot{x} - 8.22x = -6.68. \tag{1.3}$$

Для удобства уравнение приводится к стандартной форме:

$$\ddot{x} - \frac{5.4}{5.34}\dot{x} + \frac{8.22}{5.34}\dot{x} = \frac{6.68}{5.34}, \tag{1.4}$$

$$\ddot{x} - 1.011\dot{x} - 1.539\dot{x} = 0.5618. \tag{1.5}$$

Характеристическое уравнение для данного дифференциального уравнения:

$$\lambda^2 + 1.011\lambda - 1.539 = 0. \tag{1.6}$$

Корни характеристического уравнения λ_1 и λ_2:

$$\lambda_1 \approx 0.834 \tag{1.7}$$

$$\lambda_2 \approx -1.845 \tag{1.8}$$

Используя корни характеристического уравнения выводится общее решение однородного дифференциального уравнения:

$$x_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{1.9}$$

$$x_h(t) = C_1 e^{0.834t} + C_2 e^{-1.845t}, \tag{1.10}$$

где C_1 и C_2 – константы, определяемые начальными условиями.

Частное решение для однородного дифференциального уравнения:

$$x(t) = C_1 e^{0.834t} + C_2 e^{-1.845t} + A, \tag{1.11}$$

где A – постоянное для частного решения однородного дифференциального уравнения:

$$\ddot{x} + 1.011\dot{x} - 1.539\dot{x} = -1.251, \tag{1.12}$$

$$0 - 0 - 0.1.539A = -1.251, \tag{1.13}$$

$$A = \frac{1.251}{1.539}, \tag{1.14}$$

$$A \approx 0.813. \tag{1.15}$$

Итоговое общее решение однородного дифференциального уравнения:

$$x(t) = C_1 e^{0.834t} + C_2 e^{-1.845t} + 0.813. \tag{1.16}$$

Чтобы определить константы C_1 и C_2 задаются начальные условия:

$$x(0) = 0.1, \tag{1.17}$$

$$\dot{x}(0) = 0. \tag{1.18}$$

Для получения решения с начальными условиями требуется решить систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0.813, \\ 0.834C_1 - 1.845C_2 = 0 \end{cases} \tag{1.19}$$

$$\begin{cases} C_1 \approx -0.491 \\ C_2 \approx -0.222 \end{cases} \tag{1.20}$$

Общее решение с начальными условиями $x(0)$ и $\dot{x}(0)$:

$$x(t) = -0.491e^{0.834t} - 0.222e^{-1.845t} + 0.813. \tag{1.21}$$

1.2 Численные методы

В данной работе используются 3 численных метода: явный Эйлер, неявный Эйлер, Рунге-Кутты.

Для сравнения Аналитического и численных методов были промедлированы все 4 метода и выведены на графики:

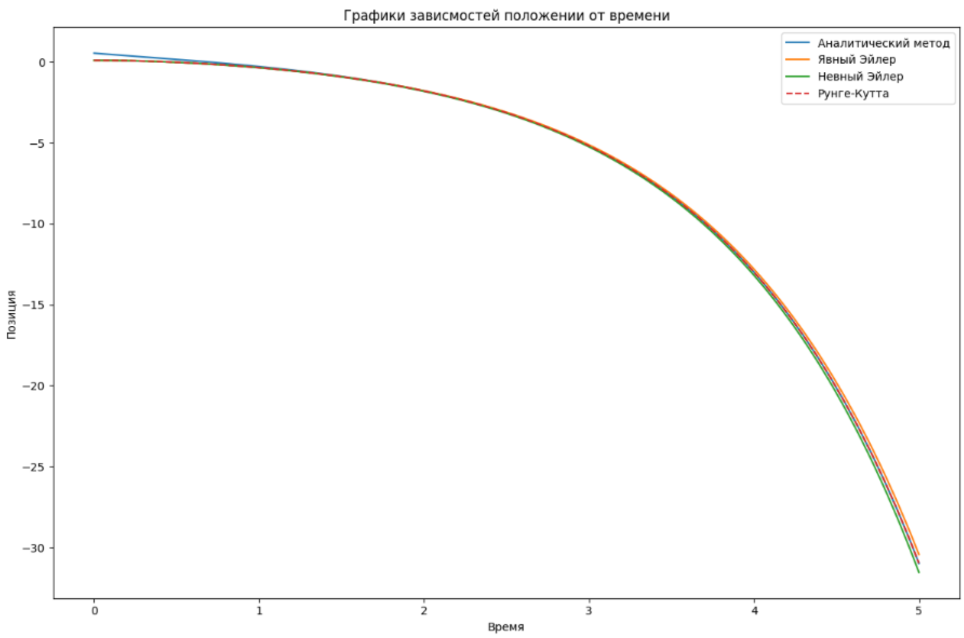

Рис. 1.1: Графики зависимостей положения от времени для аналитического и численных методов.

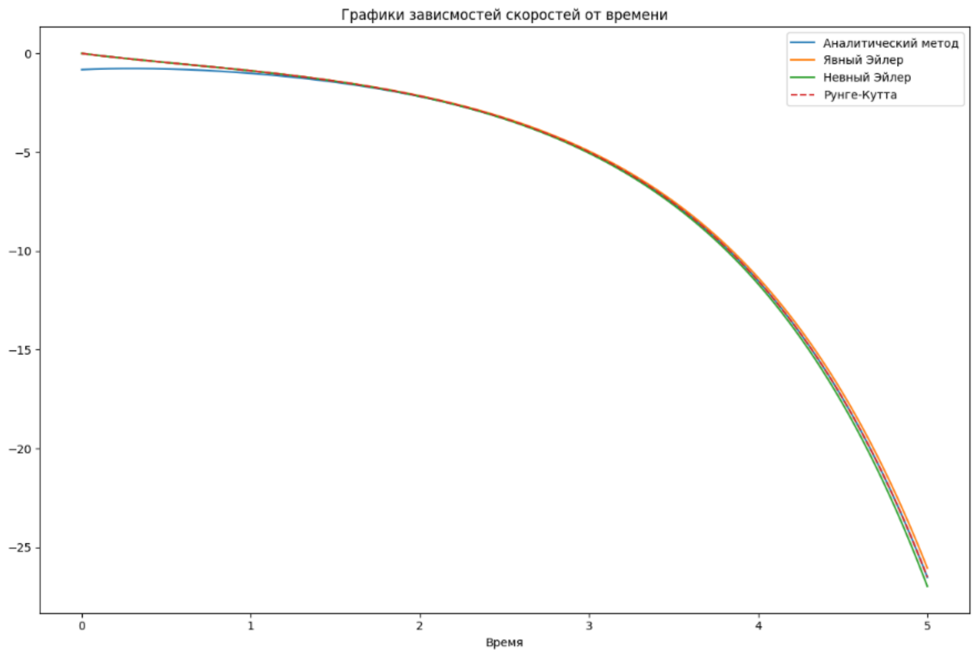

Рис. 1.2: Графики зависимостей скоростей от времени для аналитического и численных методов.

Для более лучшего анализа методов построены графики ошибок относительно аналитического метода:

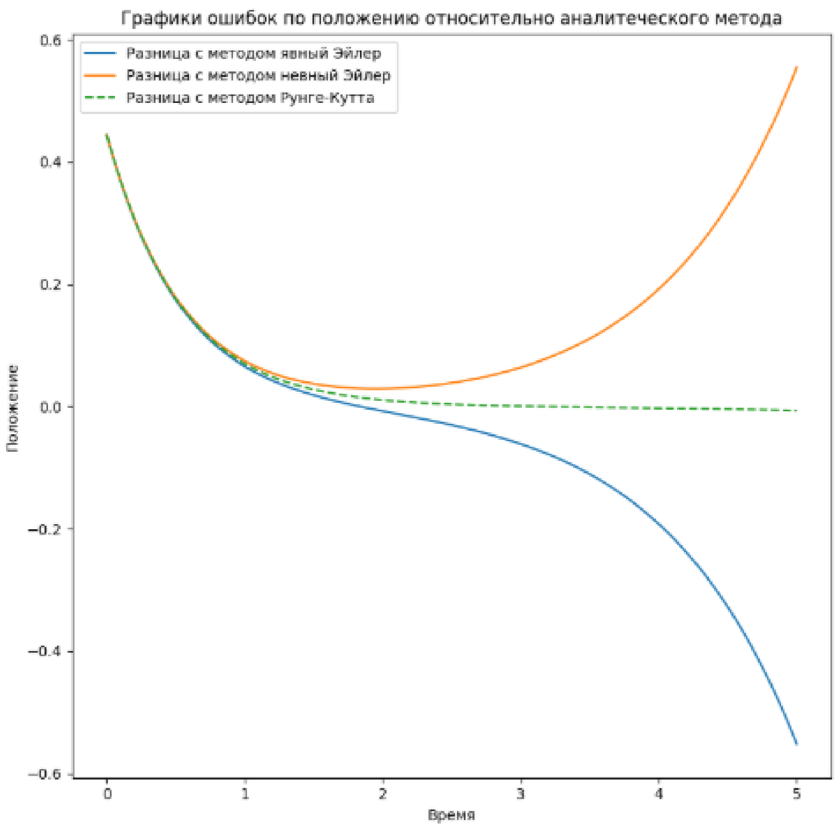

Рис. 1.3: Графики ошибок скоростей для различных численных методов.

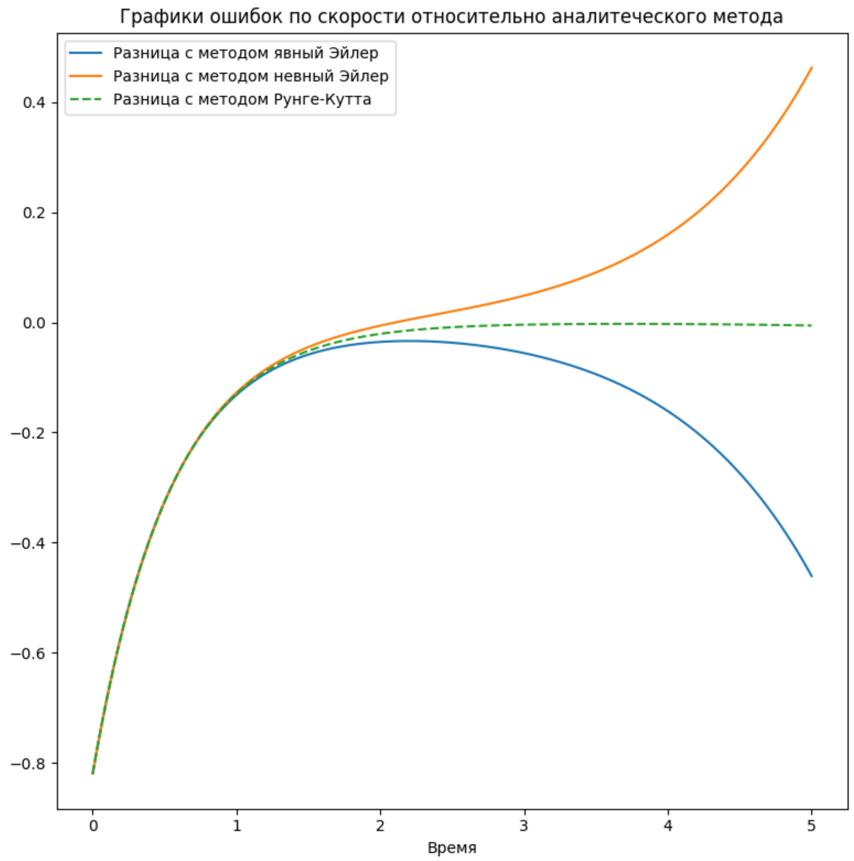

Рис. 1.4: Графики ошибок положений для различных численных методов.

Ниже приведена таблица, показывающая среднеквадратичную ошибку численных методов относительно аналитического:

	Явный Эйлер	Неявный Эйлер	Рунге-Кутта
Положение	0.039	0.041	0.010
Скорость	0.057	0.057	0.037

Таблица 1.1: СКО по положению и скорости для разных методов интегрирования

Вывод

В ходе исследования проводилось сравнение решений обыкновенного дифференциального уравнения, полученных аналитическим методом и различными численными методами. Результаты показали наилучшее соответствие между аналитическим решением и методом Рунге-Кутты. Методы Эйлера (явный и неявный) демонстрируют значительное накопление погрешности, что объясняется их алгоритмической природой: на каждом шаге эти методы выполняют лишь одно приближение. В отличие от них, метод Рунге-Кутты обеспечивает более высокую точность за счет использования четырех приближений на каждом шаге интегрирования. Следует отметить, что уменьшение величины шага интегрирования h позволяет снизить погрешность вычислений и в методах Эйлера, приблизив их точность к результатам, получаемым более сложными численными методами.