

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»



Отчет по практической работе №2

По дисциплине: Имитационное моделирование

робототехнических систем

На тему: «Составление и решение ОДУ для системы пружина —
масса — демпфер»

Студент:

Мирошниченко А. М.

Группа:

R4134c

Преподаватель:

Ракшин Е.А.

Санкт-Петербург, 2025

Цель работы: Составить ОДУ системы и сравнить методы его решения.

Ход работы:

Схема моделируемой системы представлена на рисунке 1:

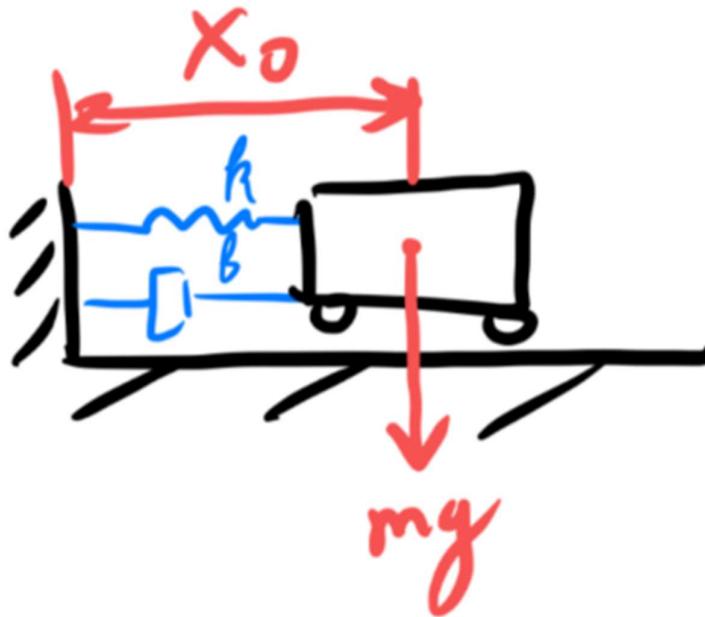


Рисунок 1 – схема системы для варианта 2

В таблице 1 приведены параметры моделируемой установки.

Таблица 1. Параметры установки.

m, кг	k, Н/м	b, Н·с/м	x(0), м
0,7	14	0,03	0,48

СОСТАВЛЕНИЕ ОДУ ИСТЕМЫ

1. Кинетическая энергия системы:

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

2. Потенциальная энергия системы:

$$P = \frac{1}{2} k x^2$$

3. Лангранжиан:

$$L = K - P = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

4. Составим уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q$$

5. $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$

6. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$

7. $\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$

8. $Q = -b\dot{x}$

9. Тогда уравнение Лагранжа имеет вид:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Составим характеристическое уравнение:

$$0,7\lambda^2 + 0,03\lambda + 14 = 0$$

$$D = 0,03^2 - 4 \cdot 14 \cdot 0,7 = -39,19$$

Дискриминант отрицательный, что свидетельствует о затухающих колебаниях.

$$\lambda = \frac{-0,03 \pm 6,26i}{1,4} = -0,021 \pm 4,472i$$

Корни характеристического уравнения получились комплексно-сопряженными, при этом их действительная часть отрицательная.

Общий вид решения дифференциального уравнения:

$$x(t) = e^{-0,021t}(C_1 \cos(4,472t) + C_2 \sin(4,472t))$$

Начальные условия:

$$x(0)=0,48, x'(0)=0;$$

C1=0.48;

$$x'(t) = e^{-\alpha t} [(-\alpha C_1 + \omega_d C_2) \cos(\omega_d t) + (-\alpha C_2 - \omega_d C_1) \sin(\omega_d t)]$$

При t=0: $x'(0) = -\alpha C_1 + \omega_d C_2 = 0$;

$$C_2 = \frac{\alpha C_1}{\omega_d} \approx \frac{0,021 \cdot 0,48}{4,472} \approx 0,0022$$

Получим:

$$x(t) = e^{-0,02} (0,48 \cos(4,472t) + 0,0022 \sin(4,472t))$$

График для полученного решения представлен на рисунке 2:

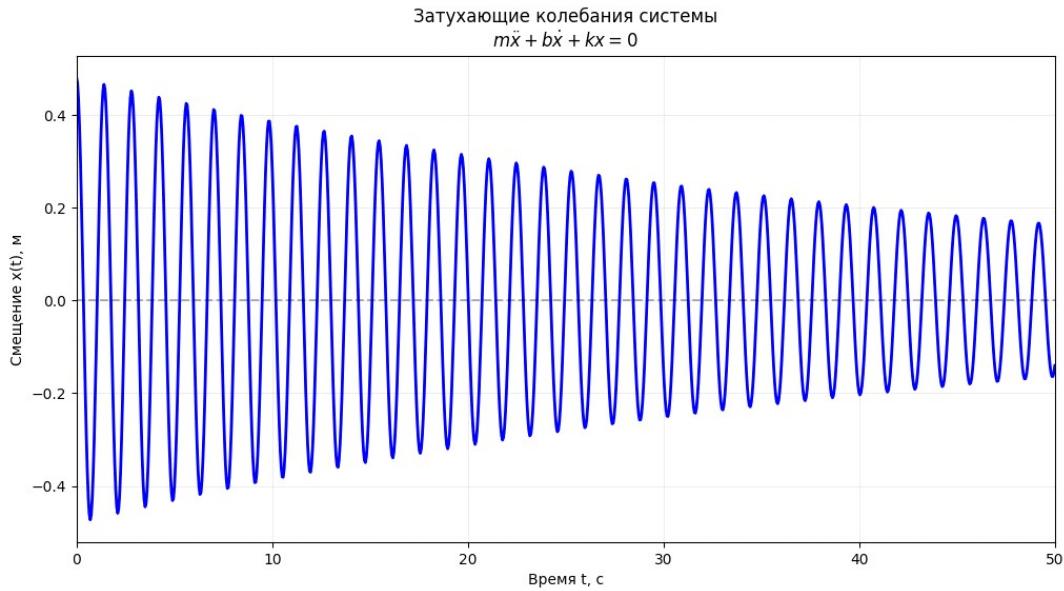


Рисунок 2 – график получившегося решения

РЕШЕНИЕ ОДУ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

Параметры моделирования системы представлены в таблице 2:

Таблица 2. Параметры моделирования.

h, шаг моделир.	T, время моделир.	$x'(0)$, м	$x(0)$, м
0,1	20	0,0	0,48

Применение численных методов проиллюстрировано на рисунке 3.

```

# Явный метод Эйлера
def explicit_euler(dt, T):
    n = int(T / dt)
    t = np.zeros(n)
    x = np.zeros(n)
    v = np.zeros(n)

    x[0] = x0
    v[0] = v0

    for i in range(n-1):
        t[i+1] = t[i] + dt
        # x' = v
        # v' = -(b*v + k*x)/m
        a = -(b * v[i] + k * x[i]) / m
        x[i+1] = x[i] + v[i] * dt
        v[i+1] = v[i] + a * dt

# Неявный метод Эйлера
def implicit_euler(dt, T):
    n = int(T / dt)
    t = np.zeros(n)
    x = np.zeros(n)
    v = np.zeros(n)

    x[0] = x0
    v[0] = v0

    # Коэффициенты для решения системы на каждом шаге
    denom = m + b*dt + k*dt**2

    for i in range(n-1):
        t[i+1] = t[i] + dt
        # Решение системы:
        # x_{n+1} = x_n + v_{n+1}*dt
        # v_{n+1} = v_n - (b*v_{n+1} + k*x_{n+1})*dt/m
        x[i+1] = (m*x[i] + m*v[i]*dt + b*x[i]*dt) / denom
        v[i+1] = (m*v[i] - k*x[i]*dt) / (m + b*dt)

    return t, x

# Метод Рунге-Кутты 4-го порядка
def runge_kutta_4(dt, T):
    n = int(T / dt)
    t = np.zeros(n)
    x = np.zeros(n)
    v = np.zeros(n)

    x[0] = x0
    v[0] = v0

    def derivatives(x_val, v_val):
        dxdt = v_val
        dvdt = -(b * v_val + k * x_val) / m
        return dxdt, dvdt

    for i in range(n-1):
        t[i+1] = t[i] + dt

        k1x, k1v = derivatives(x[i], v[i])
        k2x, k2v = derivatives(x[i] + 0.5*dt*k1x, v[i] + 0.5*dt*k1v)
        k3x, k3v = derivatives(x[i] + 0.5*dt*k2x, v[i] + 0.5*dt*k2v)
        k4x, k4v = derivatives(x[i] + dt*k3x, v[i] + dt*k3v)

        x[i+1] = x[i] + (dt/6) * (k1x + 2*k2x + 2*k3x + k4x)
        v[i+1] = v[i] + (dt/6) * (k1v + 2*k2v + 2*k3v + k4v)

    return t, x

```

Рисунок 3 – численные методы

Результат моделирования системы представлен на рисунке 4, также показано сравнение ошибок численных методов решения. Обратим внимание, что поведение у системы имеет колебательный и затухающий характер. В аналитическом решении это подтверждается тем, что характеристические корни уравнения системы являются комплексно-сопряженными с отрицательной действительной частью.

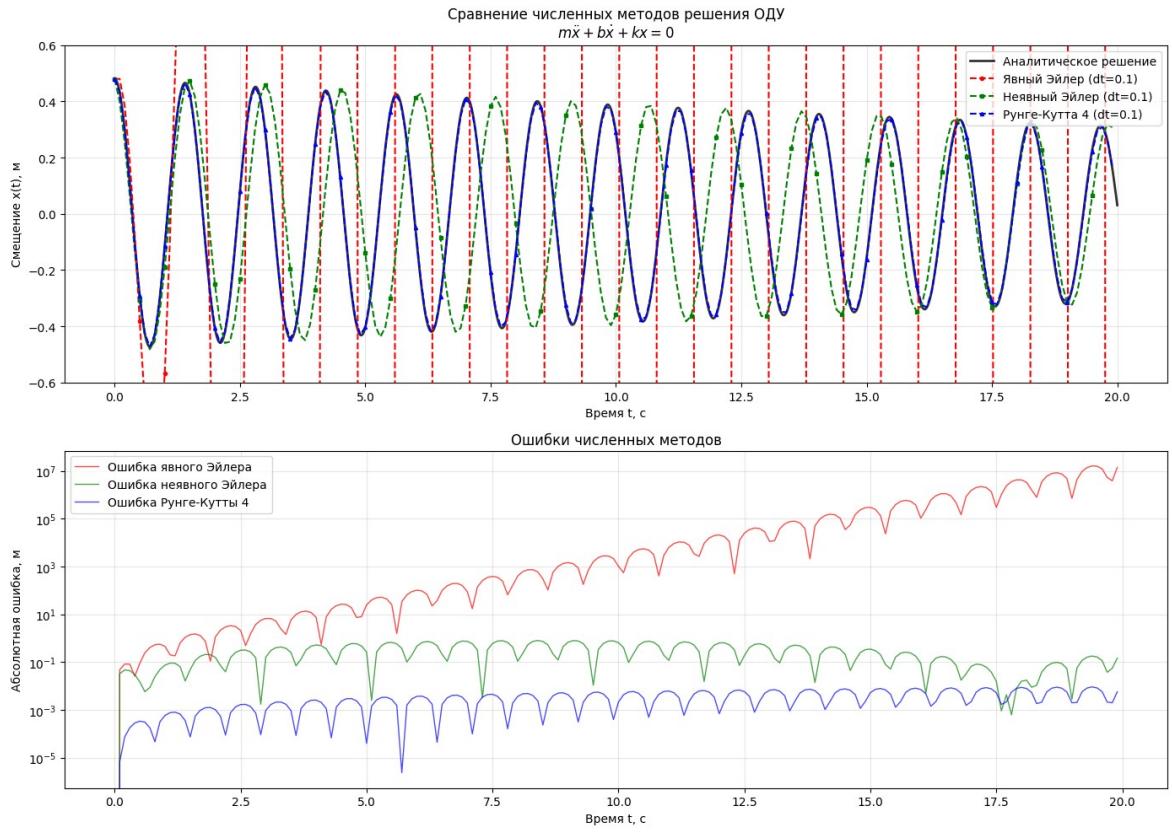


Рисунок 4 – сравнение численных методов

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование численного решения дифференциального уравнения колебательной системы позволило получить комплексную картину поведения различных методов интегрирования. Анализ результатов показывает, что хотя все три метода — явный Эйлер, неявный Эйлер и Рунге-Кутта 4-го порядка — в способны воспроизвести колебательный характер системы, их количественные характеристики существенно различаются.

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка демонстрирует превосходство в точности, следя за аналитическим решением с минимальными отклонениями. Его ошибка остается стабильно низкой на всем интервале интегрирования, что свидетельствует о хорошем сохранении энергии системы и отсутствии значительных фазовых накоплений. Этот метод оптимально подходит для задач, требующих высокой точности моделирования колебательных процессов.

Явный метод Эйлера, несмотря на свою простоту и минимальные вычислительные затраты, менее точен. Для него характерно прогрессирующее накопление фазовой ошибки, что приводит к постепенному расхождению с аналитическим решением. Хотя этот метод может быть полезен для быстрых оценок, его применение для точного моделирования колеблющихся систем ограничено.

Неявный метод Эйлера занимает промежуточное положение, демонстрируя лучшую точность по сравнению с явным методом, но уступая Рунге-Кутте. Особенностью неявного метода является проявление искусственного демпфирования — амплитуда колебаний уменьшается быстрее, чем в аналитическом решении.

В целом, исследование подтверждает, что выбор метода численного интегрирования должен определяться конкретными требованиями задачи. Для качественного анализа и быстрых оценок достаточно методов Эйлера, тогда как для точного количественного моделирования предпочтение следует отдавать методам высокого порядка, таким как Рунге-Кутта 4-го порядка.

Особенно это важно для систем с длительным временем моделирования, где накопление ошибок может стать критическим фактором.