МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
(Университет ИТМО)

Факультет систем управления и робототехники

Практическая работа №1
по дисциплине
«Имитационное моделирование робототехнических систем»

по теме:
«Численные методы интегрирования»

Студент:
Группа № R4136c Носов А.С.

Предподаватель:
Ассистент СУиР Ракшин Е.А.

Санкт-Петербург 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ЦЕЛИ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Исследование численных методов интегрирования.

В работе решаются следующие задачи:

– аналитическое решение дифференциального уравнения;
– исследование 3 методов численного интегрирования: метод явного Эйлера, метод неявного Эйлера, метод Рунге-Кутты 4-го порядка;

1 АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

1.1 Условие задания

Вывести аналитическое решение дифференциального уравнения;

$$a \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = d$$

Параметры варианта:

– $a = -0.11$
– $b = 1.21$
– $c = -0.41$
– $d = 1.16$

1.2 Решение

Составим характеристическое уравнение:

$$-0.11\lambda^2 + 1.21\lambda - 0.41 = 0$$

Найдем его корни:

$$\begin{cases} \lambda_1 \approx 0.35 \\ \lambda_2 \approx 10.65 \end{cases}$$

Корни действительные и различные, значит общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$x(t) = C_1 e^{0.35t} + C_2 e^{10.65t} + x_0$$

Частное решение

$$cx_0 = d$$

$$x_0 = \frac{d}{c} = \frac{1.16}{-0.41} \approx -2.83$$

$$x(t) = C_1 e^{0.35t} + C_2 e^{10.65t} - 2.83$$

Для дальнейшего аналитического решения необходимы начальные условия, пусть начальные условия

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

Соответственно получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2.83 \\ C_1 \cdot 0.35 + C_2 \cdot 10.65 = 0 \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$\begin{cases} C_1 = 2.926 \\ C_2 = -0.096 \end{cases}$$

И итоговое решение:

$$x(t) = 2.926 e^{0.35t} - 0.096 e^{10.65t} - 2.83$$

2 ИССЛЕДОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Для численного интегрирования преобразуем систему в вид State-Space:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = \frac{d - c \cdot x_1 - b \cdot x_2}{a} \end{cases}$$

Соответственно в матричном виде:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d}{a} \end{bmatrix}$$

$$\dot{X} = A \cdot X + B$$

В данной работе реализованы и исследованы следующие численные методы интегрирования:

Явный метод Эйлера

$$x_{k+1} = x_k + h \cdot f(x_k)$$

Неявный метод Эйлера

$$x_{k+1} = x_k + hf(x_{k+1})$$

Метод Рунге-Кутта 4-го порядка

$$f_1 = f(x_k)$$
$$f_2 = f(x_k + \frac{h}{2} \cdot f_1)$$
$$f_3 = f(x_k + \frac{h}{2} \cdot f_2)$$
$$f_4 = f(x_k + k \cdot f_3)$$
$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{6} \cdot (f_1 + 2 \cdot f_2 + 2 \cdot f_3 + f_4)$$

2.1 Графики моделирования

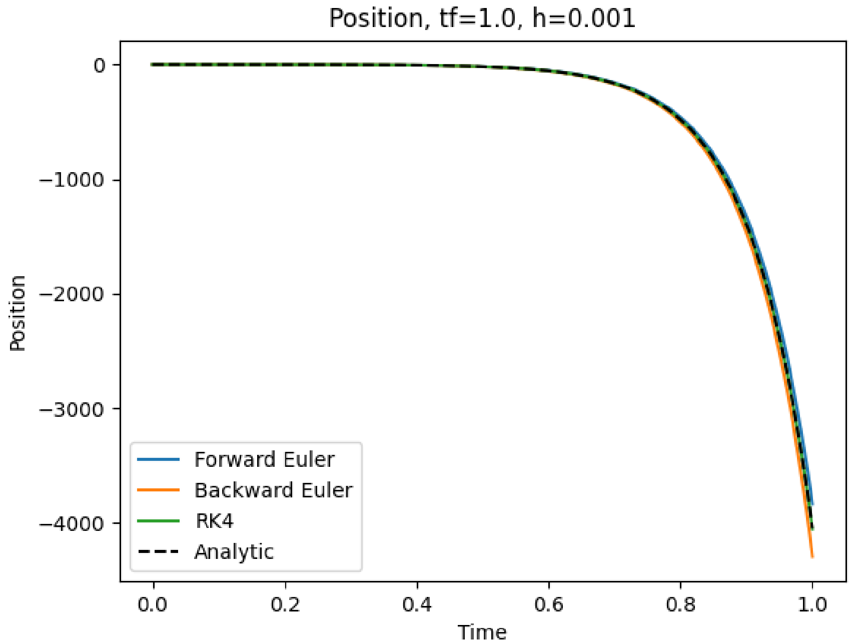

Рисунок 1 — График моделирования координаты при времени $T_f = 1.0$ с шагом $h = 0.001$

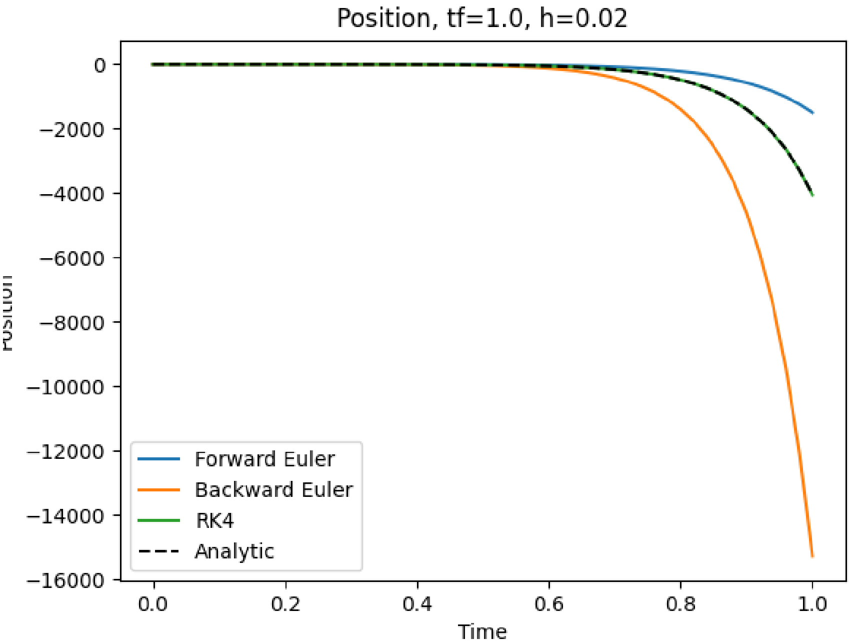

Рисунок 2 — График моделирования координаты при времени $T_f = 1.0$ с шагом $h = 0.02$

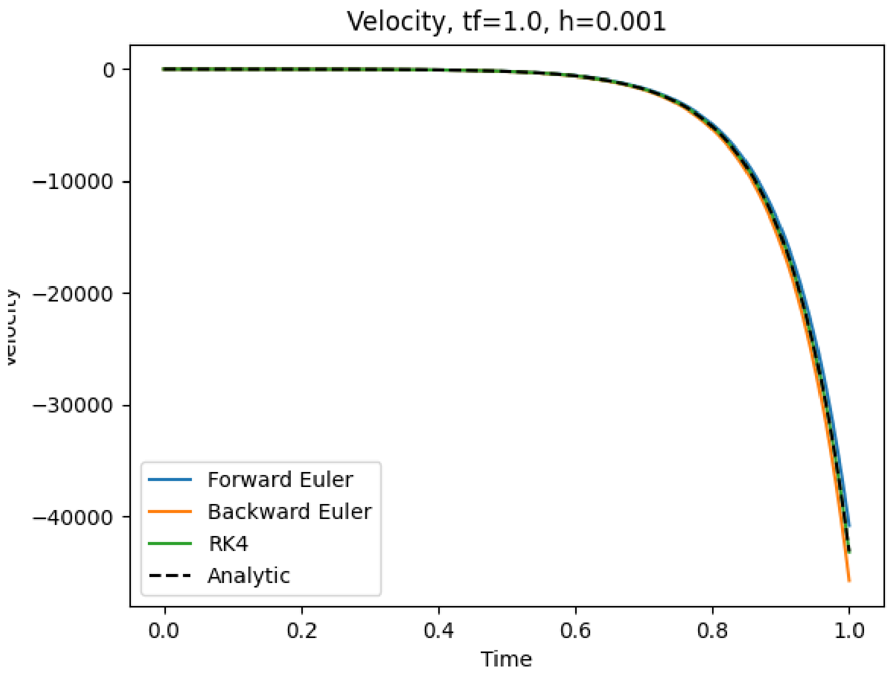

Рисунок 3 — График моделирования скорости при времени $T_f = 1.0$ с шагом $h = 0.001$

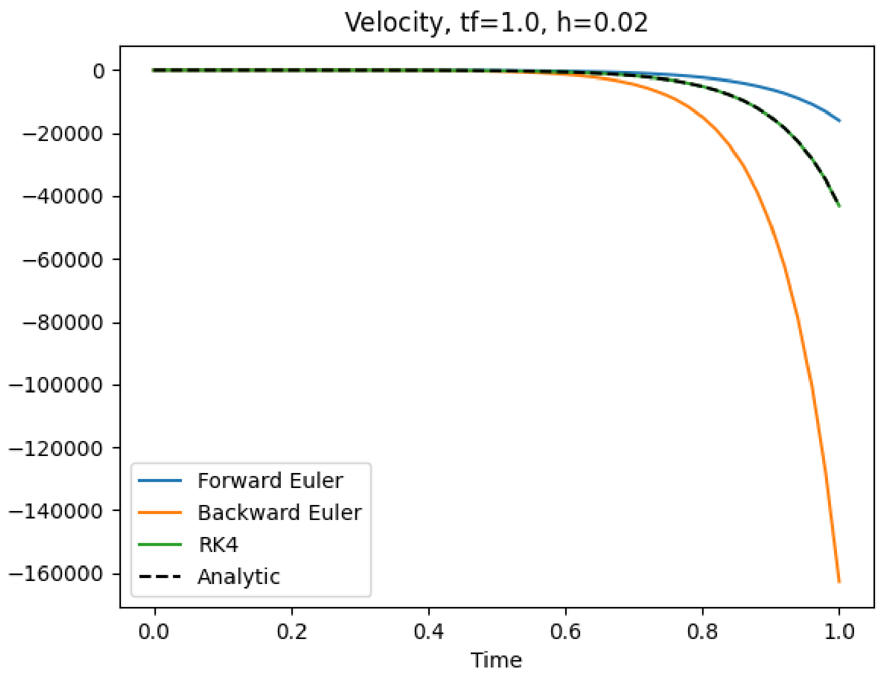

Рисунок 4 — График моделирования скорости при времени $T_f = 1.0$ с шагом $h = 0.02$

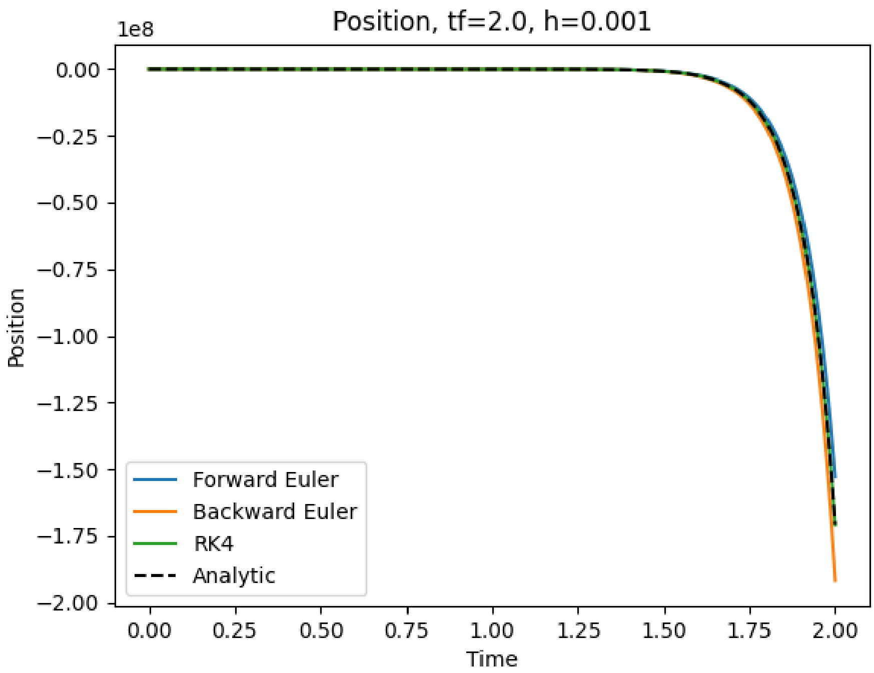

Рисунок 5 — График моделирования при времени $T_f = 2.0$ с шагом $h = 0.001$

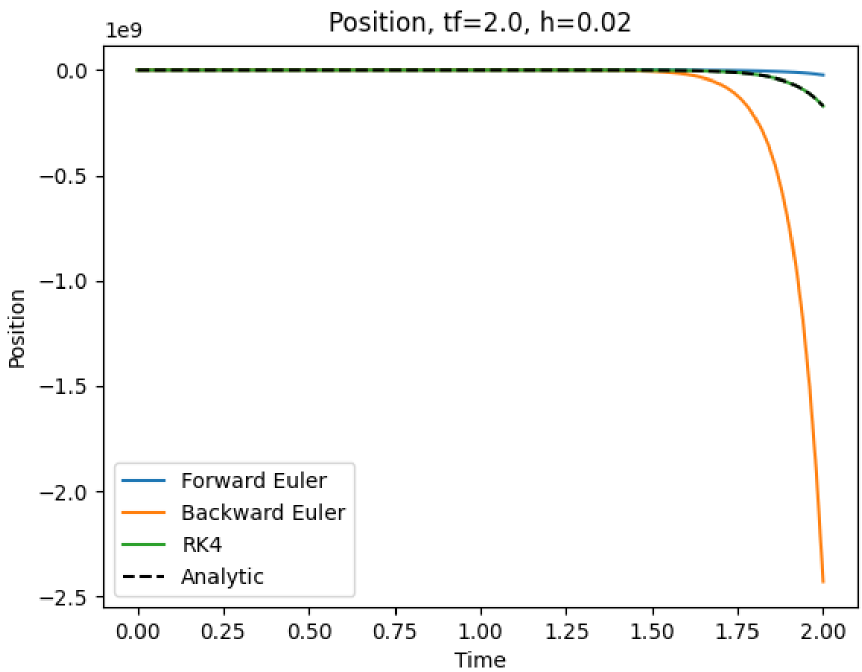

Рисунок 6 — График моделирования при времени $T_f = 2.0$ с шагом $h = 0.02$

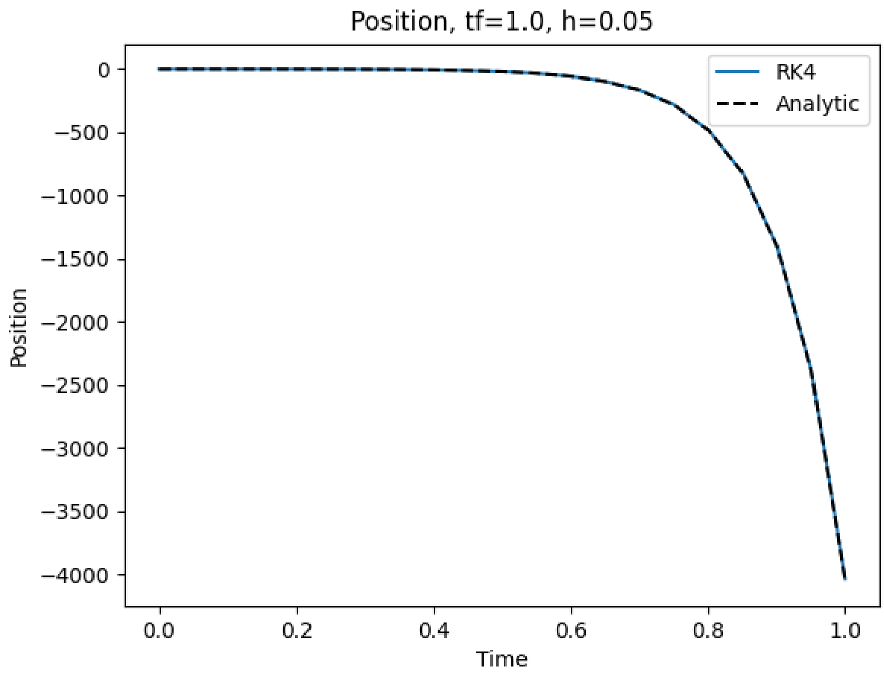

Рисунок 7 — График моделирования при использовании метода Рунге-Кутта 4-го порядка с шагом $h = 0.05$

2.2 Анализ графиков

Как видно из графиков точность моделирования сильно зависит от шага моделирования, чем меньше шаг, тем более точно выполняется моделирование. Однако метод Рунге Кутта 4-го порядка дает наиболее хорошее приближение, несмотря на шаг моделирования, особенно это видно на графике 7.

Также заметно, что вектор состояния системы при интегрировании методом явного Эйлера больше по модулю, система как бы расходится быстрее, чем в реальности, в то время как вектор состояния при интегрировании методом неявного эйлера наоборот меньше по модулю, система медленнее расходится, чем в реальности.

В лекциях моделирование с помощью этих трёх методов было аналогично, система расходилась, хотя была консервативной при интегрировании методом явного эйлера и затухала при интегрировании методом неявного Эйлера.

ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

В ходе практической работы были выполнены следующие задачи:

– аналитическое решение дифференциального уравнения;
– моделирование системы с помощью трёх численных методов интегрирования
– проведено сравнение результатов моделирования

Наиболее точным методом численного интегрирования является метод Рунге-Кутты 4-го порядка, который в не зависимости от величины шага интегрирования предоставляет достаточно точное решение дифференциального уравнения.