

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»  
(УНИВЕРСИТЕТ ИТМО)



Факультет Систем Управления и Робототехники

**ОТЧЁТ О ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЕ №1  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ: "ИМИТАЦИОННОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ РОБОТЕХНИЧЕСКИХ  
СИСТЕМ"**

**Выполнил**

Козлов Андрей Алексеевич<sup>1</sup>

<sup>1</sup>506004, @causeloveAA

**Проверил**

Ракшин Егор Александрович, ассистент

г. Санкт-Петербург  
6 ноября 2025 г.

# 1 Цель работы

Цель работы — изучить численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (явный и неявный метод Эйлера, метод Рунге–Кутты 4-го порядка) и сравнить их результаты с аналитическим решением заданного линейного ОДУ второго порядка.

## 2 Задание на работу

Решить уравнение аналитически, используя методы Эйлера и Рунге–Кута:

$$a x'' + b x' + c x = d$$

Коэффициенты согласно номеру ИСУ:

$$-6.95 x'' - 3.6 x' + 8.7 x = 8.14$$

## 3 Аналитическое решение

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$a x'' + b x' + c x = d.$$

Подставим коэффициенты варианта:

$$-6.95 x'' - 3.6 x' + 8.7 x = 8.14.$$

Разделим обе части уравнения на коэффициент при  $x''$ :

$$x'' + 0.518 x' - 1.252 x = -1.171.$$

Общее решение неоднородного уравнения представляется в виде

$$x(t) = x_h(t) + x_p,$$

где  $x_h(t)$  — решение соответствующего однородного уравнения, а  $x_p$  — частное решение.

### 1. Решение однородного уравнения

Рассмотрим однородное уравнение:

$$x'' + 0.518 x' - 1.252 x = 0.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$r^2 + 0.518 r - 1.252 = 0.$$

Корни:

$$r_{1,2} = \frac{-0.518 \pm \sqrt{(0.518)^2 + 4 \cdot 1.252}}{2}.$$

Численно:

$$r_1 \approx 0.88943, \quad r_2 \approx -1.40742.$$

Следовательно, общее решение однородной части:

$$x_h(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

## 2. Частное решение

Поскольку правая часть уравнения — постоянная величина  $d$ , то постоянное частное решение можно найти как

$$x_p = \frac{d}{c}.$$

Подставим коэффициенты:

$$x_p = \frac{8.14}{8.7} \approx 0.93621.$$

Таким образом, частное решение:

$$x_p = 0.93621.$$

## 3. Полное решение

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + x_p.$$

## 4. Определение констант $C_1$ и $C_2$

Используем начальные условия:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = \dot{x}_0.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} x(0) &= C_1 + C_2 + x_p = x_0, \\ x'(0) &= r_1 C_1 + r_2 C_2 = \dot{x}_0. \end{aligned}$$

Откуда получаем систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = x_0 - x_p, \\ r_1 C_1 + r_2 C_2 = \dot{x}_0. \end{cases}$$

Для начальных условий

$$x_0 = 0.01, \quad \dot{x}_0 = 0,$$

получаем:

$$C_1 \approx -0.5123, \quad C_2 \approx -0.3239.$$

## 5. Итоговое аналитическое решение

$$x(t) = -0.5123 e^{0.88943 t} - 0.3239 e^{-1.40742 t} + 0.93621$$

Таким образом, общее решение представляет собой сумму двух экспоненциальных переходных процессов и стационарного смещения  $x_p$ . Из двух мод характер движения определяется экспонентой с положительным корнем  $r_1$ , что приводит к неустойчивому росту решения.

Данная система неустойчива.

## 4 Решение с помощью методов Эйлера и Рунге-Кутты

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # parameters
5 a = -6.95
6 b = -3.6
7 c = 8.7
8 d = 8.14
9
10 # analytic constants
11 C1 = -0.5123
12 C2 = -0.3239
13 xp = 0.93621
14 r1 = 0.88943
15 r2 = -1.40742
16
17 def x_analytical(t):
18     return C1*np.exp(r1*t) + C2*np.exp(r2*t) + xp
19
20 # ODE in first order form
21 def system_dynamics(x):
22     x1 = x[0]
23     x2 = x[1]
24     dx1 = x2
25     dx2 = (d - c*x1 - b*x2) / a
26     return np.array([dx1, dx2])
27
28 def forward_euler(fun, x0, Tf, h):
29     t = np.arange(0, Tf + h, h)
30     x_hist = np.zeros((len(x0), len(t)))
31     x_hist[:, 0] = x0
32     for k in range(len(t) - 1):
33         x_hist[:, k + 1] = x_hist[:, k] + h * fun(x_hist[:, k])
34     return x_hist, t
35
36 def backward_euler(fun, x0, Tf, h, tol=1e-8, max_iter=100):
37     t = np.arange(0, Tf + h, h)
38     x_hist = np.zeros((len(x0), len(t)))
39     x_hist[:, 0] = x0
40     for k in range(len(t) - 1):
41         x_hist[:, k + 1] = x_hist[:, k]
42         for _ in range(max_iter):
43             x_next = x_hist[:, k] + h * fun(x_hist[:, k + 1])
44             if np.linalg.norm(x_next - x_hist[:, k + 1]) < tol:
45                 x_hist[:, k + 1] = x_next
46                 break
47         x_hist[:, k + 1] = x_next
48     return x_hist, t
49
50 def runge_kutta4(fun, x0, Tf, h):
51     t = np.arange(0, Tf + h, h)
52     x_hist = np.zeros((len(x0), len(t)))
53     x_hist[:, 0] = x0
54     for k in range(len(t) - 1):
55         k1 = fun(x_hist[:, k])
56         k2 = fun(x_hist[:, k] + 0.5 * h * k1)
57         k3 = fun(x_hist[:, k] + 0.5 * h * k2)
58         k4 = fun(x_hist[:, k] + h * k3)
```

```

59         x_hist[:, k + 1] = x_hist[:, k] + (h/6)*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)
60     return x_hist, t
61
62 # run
63 x0 = np.array([0.01, 0])
64 Tf = 10
65 h = 0.1
66
67 x_fe, t_fe = forward_euler(system_dynamics, x0, Tf, h)
68 x_be, t_be = backward_euler(system_dynamics, x0, Tf, h)
69 x_rk4, t_rk4 = runge_kutta4(system_dynamics, x0, Tf, h)
70
71 # analytic
72 t = t_fe
73 x_a = x_analytical(t)
74
75 # plots
76 plt.figure(figsize=(10,6))
77 plt.plot(t, x_a, 'k-', label='Analytical')
78 plt.plot(t_fe, x_fe[0], 'r--', label='Forward Euler')
79 plt.plot(t_be, x_be[0], 'b--', label='Backward Euler')
80 plt.plot(t_rk4, x_rk4[0], 'g--', label='RK4')
81 plt.xlabel("Time")
82 plt.ylabel("x(t)")
83 plt.legend()
84 plt.grid()
85 plt.show()

```

Для решения задачи был взят пример преподавателя и адаптирован под описанный выше случай.

После выполнения программы был получен следующий результат:

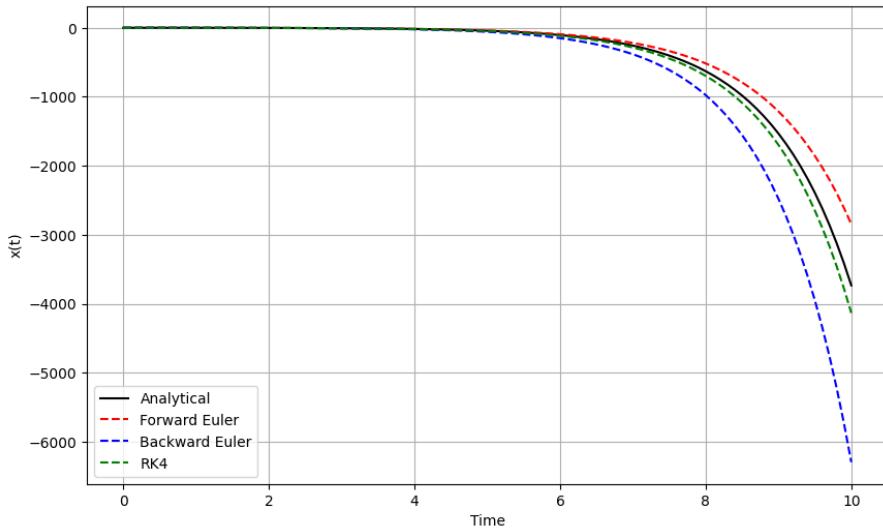


Рис. 1: Результат моделирования

На графике видно, что:

- решение по методу Рунге–Кутты 4-го порядка практически совпадает с аналитическим;
- метод прямого Эйлера демонстрирует заметное отклонение;
- метод обратного Эйлера более устойчив, но также даёт погрешность;

- вследствие наличия положительного корня характеристического уравнения система является неустойчивой, что отражается экспоненциальным ростом решения.

## 5 Вывод

В данной работе была проведена сравнительная численная интеграция линейного дифференциального уравнения второго порядка с использованием трёх методов: явного Эйлера (Forward Euler), неявного Эйлера (Implicit Euler) и метода Рунге–Кутта 4-го порядка (RK4). Также было построено аналитическое решение для сравнения.

Метод явного Эйлера показывает значительное расхождение с аналитическим решением на больших интервалах времени, метод обратного Эёлера демонстрирует более близкие значения к аналитическому методу, но сохраняет значительные расхождения с ним, метод Рунге–Кутта практически полностью совпадает с аналитическим решением.