

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**

Факультет систем управления и робототехники

Практическая работа №2

По дисциплине «Имитационное моделирование робототехнических систем»

Выполнил: студент гр. № R4133c _____ / Пивоварова И.К.

Проверил: ассистент _____ / Ракшин Е.А.

Санкт-Петербург
2025

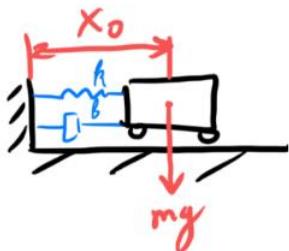
Входные данные:

Вариант 40 (2)

m, кг	k, Н/м,	b, Н·с/м	x_0, м
0,9	9,2	0,03	0,9

Задание:

1. Составьте дифференциальное уравнение (ОДЕ) для системы пружинного демпфера, используя варианты ниже, используя метод, описанный в [SRS/lecture_1/lecture_1.pdf] :

*Variant 2**variant 2*

Постарайтесь решить аналитически составленное вами дифференциальное уравнение. Если решить его не удаётся, опишите причину и почему.

Сравните результаты этих методов с аналитическим решением (если оно существует), обсудите и сделайте выводы в отчёте в формате .pdf.

Ход работы:

1. Вывод уравнения

Составим уравнение Эйлера-Лагранжа для заданного пружинного демпфера:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q$$

Его кинетическая энергия выражается:

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

Потенциальная энергия:

$$P = \frac{1}{2} k x^2$$

Тогда Лагранжиан системы будет иметь вид:

$$L = K - P = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Рассчитаем полные и частные производные Лагранжиана:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) &= m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -kx\end{aligned}$$

Сила вязкого трения в уравнении в уравнении

$$Q = -b\dot{x}$$

Тогда уравнение Эйлера-Лагранжа для пружинного демпфера примет вид:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

2. Аналитическое решение уравнения

Постараемся решить уравнение аналитически:

$$0,9\ddot{x} + 0,03\dot{x} + 9,2x = 0$$

Составим характеристическое уравнение:

$$0,9\lambda^2 + 0,03\lambda + 9,2x = 0$$

$$D = 0,03^2 - 4 * 9,2 * 0,9 = -33,1191$$

Дискриминант меньше нуля, поэтому будем искать решение в виде:

$$x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$$

Корни уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-0,03 \pm i\sqrt{-33,1191}}{2 * 0,9} = -0,0167 \pm i 3,1972$$

Тогда:

$$x(t) = e^{-0,0167t}(C_1 \cos 3,1972t + C_2 \sin 3,1972t)$$

В данном случае нам удалось аналитически решить уравнение.

Найдём C_1 и C_2 при начальных условиях $x = [0,9 \ 0]^T$

$$\begin{cases} C_1 = 0,9 \\ C_2 = 0,0047 \end{cases}$$

3. Сравнение аналитического решения с интегральными методами

Построим графики сравнения аналитического метода и методов прямого, обратного Эйлера и Рунге-Кутты.

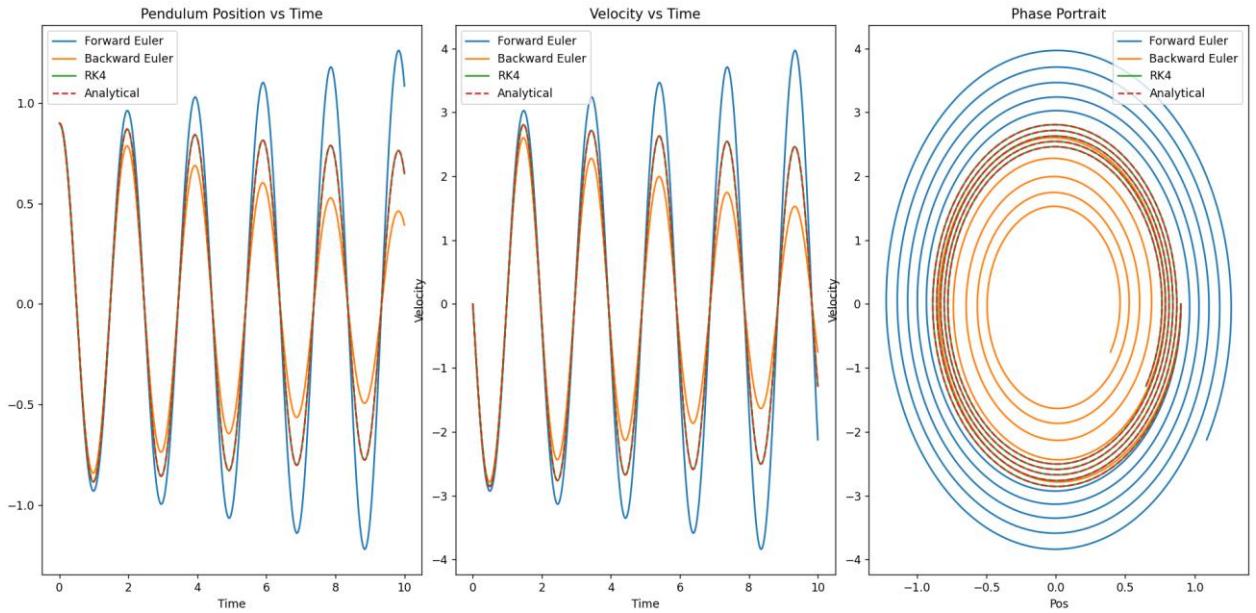


Рис. 1. Графики сравнения

Определим с помощью RMSE ошибку интегральных методов относительно аналитического решения.

RMSE Position: Forward Euler: 0.206749 Backward Euler: 0.140916 RK4: 0.000128	RMSE Velocity: Forward Euler: 0.631906 Backward Euler: 0.434896 RK4: 0.000409
RMSE Velocity: Forward Euler: 0.631906 Backward Euler: 0.434896 RK4: 0.000409	

Рис. 2. Ошибки по RMSE

Минимальная ошибка наблюдается у метода Рунге-Кутта. Это значит, что метод показывает наиболее приближённое решение к эталонному (аналитическому).

Вывод: в процессе выполнения практической работы было выведено уравнение Эйлера-Лагранжа для пружинного демпфера по данным, а также найдено его аналитическое решение. Также были найдены решения по методам прямого, обратного Эйлера и Рунге-Кутта и сравнены с ранее найденным эталонным решением. В итоге наилучший результат показал метод Рунге-Кутта, наихудший - метод прямого Эйлера.