Programmierung, Algorithmen, Datenstrukturen 2 -Hausübung 1

Entscheiden Sie für die folgenden Folgen (a_n) und (b_n) jeweils, welche der Beziehungen $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, $a_n = \mathrm{o}(b_n)$, $a_n = \Theta(b_n)$ gelten. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $a_n = 2n^3 - 5n$, $b_n = n^3$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-5n}{n^3} = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{5n}{n^3} = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{5}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{5}{\infty} = 2 - 0 = 2$$

Hier gilt $a_n = \Theta(b_n)$ und $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ Beziehungen.

- Begründung:

Big O (O()) beschreibt die Obergrenze der Komplexität. F wächst nicht wesentlich schneller als g.

$f \in O(g) \longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$

Theta (Θ()) beschreibt die genaue Grenze der Komplexität. F wächst genauso schnell wie g.

$f \in \Theta(g) \longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}_{>0}$

(b) $a_n = \frac{n^4+1}{n+4}$, $b_n = n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^4+1}{n+4}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4+1}{n^2+4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3}{2n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{12n^2}{2} = \infty$$

Hier gilt keine Beziehung. Weil es keine der folgenden Beschreibungen enthalte.

- Begründung:

$f \in o(g) \longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$f \in O(g) \longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$

$f \in \Theta(g) \longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}_{>0}$

(c) $a_n = \sqrt{n^2+1}\log_3 n$, $b_n = n^2 \log_2 n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}\,\log_3 n}{n^2 \log_2 n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2}\log_3 2 = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2+1}{n^4}}\log_3 2 = 0$$

Hier gilt $a_n = \mathrm{o}(b_n)$ und $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ Beziehung.

- Begründung

Little O (o()) beschreibt die Obergrenze ohne die exakte Grenze. F wächst langsamer als g.

$f \in o(g) \longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

$f \in O(g) \longrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$

Christian Vogel

Gülden Öykü Demirkol