Innlevering i DAFE 1000
Frist: 26. mars kl. 12:00

Alle svar skal begrunnes og mellomregninger skal vises. Når MATLAB blir brukt, skal du ta med ei utskrift av det som blir gjort i kommandovinduet og av eventuelle skript og plott du lager. Om du ønsker å løse oppgavene ved å bruke *Live Script*, er dette selvsagt helt ok. Andre språk/verktøy enn MATLAB kan også benyttes.

Vi minner om at MATLAB kan brukes til generere pdf-filer med kode og plott.

Det er ikke nødvendig å gjøre deloppgave 4 f) for å få innleveringa godkjent.

Oppgave 1

a) For funksjonen

$$f(x) = \sqrt{x+1},$$

bestem Taylor-polynomene av grad fra og med 0 til og med 3 omkring $x = 0$.

b) Lag et plott av Taylor-polynomene fra a) sammen med $f(x)$.

Oppgave 2

Løs disse likningssystemene ved å sette opp totalmatrisa og rekkeredusere denne til redusert trappeform. Kontrollér at du har fått rett redusert trappeform av totalmatrisa med `rref`-funksjonen i MATLAB. (Husk å ta med MATLAB-kontrollen i besvarelsen din.)

a) $$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 2x + y + z &= -2 \end{aligned}.$$

b) $A\vec{x} = \vec{b}$ med $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Oppgave 3

Et generelt likningssystem med n likninger og n variabler kan skrives på forma

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad ,$$

der koeffisentmatrisa A er ei $n \times n$-matrise, og søylevektoren $\vec{b}$ har n elementer.

Lag ei implementering som avgjør om et likningssystem har entydig løsning eller ikke. A og $\vec{b}$ skal være input. Dersom systemet *har* entydig løsning, skal implementeringa finne denne og skrive den til skjerm.

Du skal demonstrere at implementeringa fungerer ved å bruke den på et par eksempler du velger selv. Pass på at eksemplene dekker tilfeller både med og uten entydig løsning.

Løs denne oppgava ved å bruke innebygde funksjoner som `det`, `inv`, `rref`, `cond` eller `rank`.

Oppgave 4

I denne oppgava skal vi forsøke å bestemme en funksjon $f(x)$ som oppfyller denne likninga:

$$f'(x) + xf(x) = x^3 + 2x \tag{1}$$

for alle verdier av x. I tillegg krever vi at funksjonen skal være 2 når x er 0,

$$f(0) = 2.$$

Merk at likninga inneholder både den ukjente funksjonen $f(x)$ og den deriverte av denne funksjonen[1]. Vi kan estimere løsninga for $x \in [0, 2]$ ved å plukke ut 5 x-verdier i dette intervallet, $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1, x_3 = 1.5$ og $x_4 = 2$. Om vi bruker midtpunkts-formelen for numerisk derivasjon i likning (1), kan vi sette opp likninger som gir tilnærmede løsninger for funksjonsverdiene $f_1 = f(x_1), f_2 = f(x_2)$ og så videre ($f_0 = f(0)$ er alt gitt). Om vi i tillegg bruker denne formelen:

$$f'(a) \approx \frac{f(a-2h) - 4f(a-h) + 3f(a)}{2h} \quad ,$$

kan vi også sette opp et tilnærma uttrykk for $f'(x_4)$ ved hjelp av f_2, f_3 og f_4. Akkurat som med midtpunktsformelen har denne en feil som går som $f^{(3)}(c)h^2$ der $c \in [a - 2h, a]$.

Vi får da et likningssystem med fire likninger for de fire ukjente f_1, f_2, f_3 og f_4.

[1] Dette er ei *differensiallikning*.

a) Vis at dette likningssystemet blir

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 0.5f_1 & + & f_2 & & & & & = & 3.125 \\ -f_1 & + & f_2 & + & f_3 & & & = & 3 \\ & & -f_2 & + & 1.5f_3 & + & f_4 & = & 6.375 \\ & & f_2 & - & 4f_3 & + & 5f_4 & = & 12 \end{array} .$$

b) Bruk MATLAB til å finne løsninga av likningssystemet.

c) Denne funksjonen:

$$f(x) = x^2 + Ce^{-x^2/2} \tag{2}$$

oppfyller likning (1) – uansett hva konstanten C er.

Vis dette – altså, sett funksjonen i likning (2) over inn i venstresida i likning (1) og vis at vi får høgresida, $x^3 + 2x$, ut.

Hva må C være for at startkravet $f(0) = 2$ skal være oppfylt?

d) Plott den fulle løsninga – med rett C-verdi – sammen med de fire punktene du fant i b). Ser disse punktene ut til å ligge på mer eller mindre riktig sted?

e) Dersom vi i stedet for å kreve at $f(0) = 2$ hadde krevd at $f(0) = 0$, blir framgangsmåten vår fra a) eksakt riktig. Vis at dette stemmer numerisk – altså plott den numeriske løsninga du får med det nye startkravet sammen med den eksakte.

Hvorfor er det slik?

f) **Dette er ei ekstraoppgave for spesielt interesserte; det er ikke nødvendig å gjøre denne for å få innleveringa godkjent**:
Implementér metoden fra a), med startkravet $f(0) = 2$, på en slik måte at vi kan velge hvor mange punkter vi skal dele intervallet $[0, 2]$ opp i – altså, la tallet på punkter n, som var 4 over, være *input*. Bruk denne implementeringa til å estimere løsninga for stadig høyere n-verdier.

Nærmer den numeriske løsninga seg den eksakte? Hvor stor n trenger vi for at plottene skal se mer eller mindre like ut? Klarer du å lage implementeringa mer generell – slik at også startkravet og x-intervallet kan varieres? Prøv gjerne å implementere det for ei mer generell likning:

$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x),$$

der $f(x)$ er den ukjente funskjonen og du selv velger funksjonene $a(x)$ og $b(x)$.