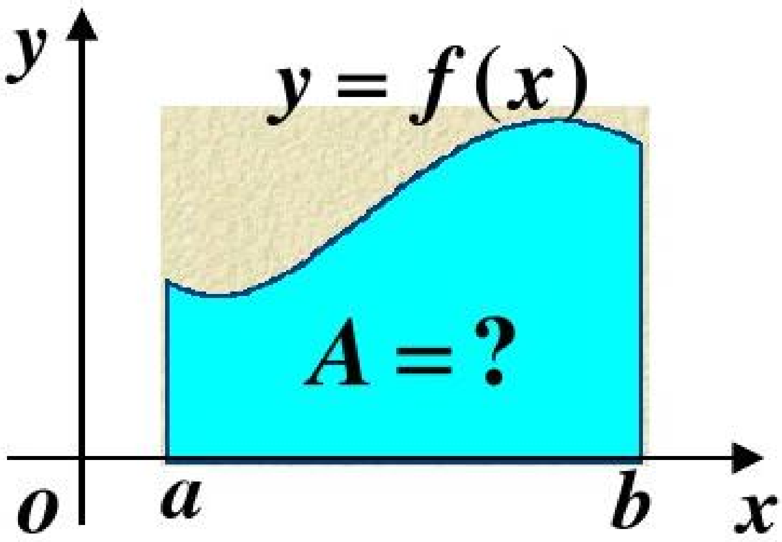
微积分

起源

微积分诞生于17世纪，主要帮助人们解决各种速度，面积等实际问题

如何求曲线的面积呢?

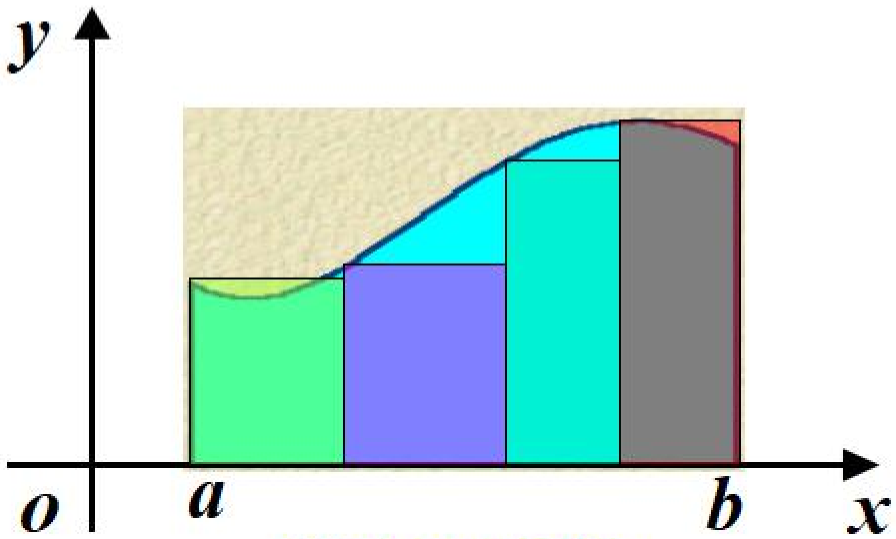


微积分

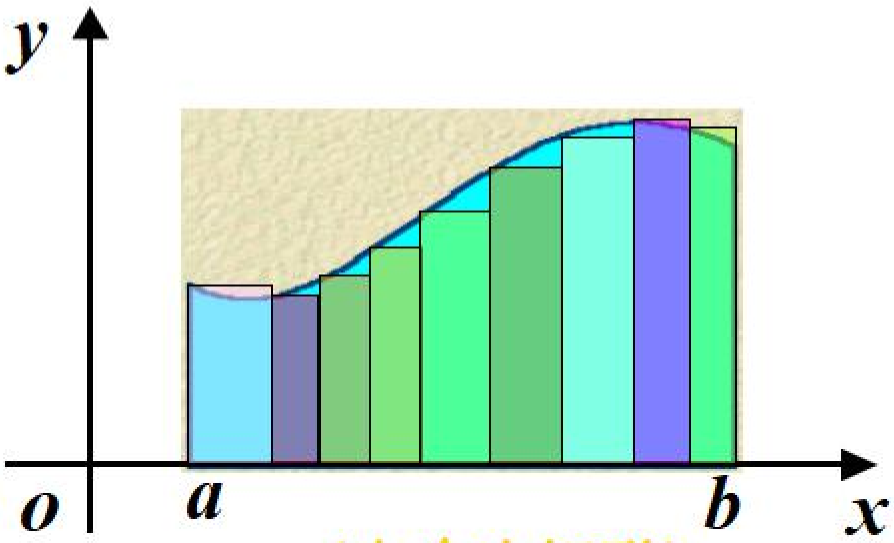
以直代曲

对于矩形，我们可以轻松求得其面积，能否用矩形代替曲线形状呢?

应该用多少个矩形来代替呢?



（四个小矩形）



（九个小矩形）

微积分

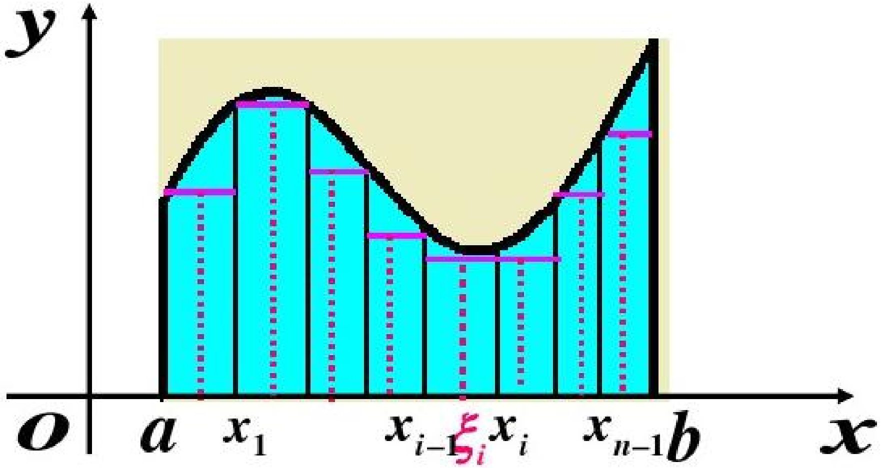
面积由来

在ab之间插入若干个点，这样就得到了n个小区间。

每一个小矩形面积为：$A_i = f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似得到曲线面积：$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

当分割无限加细，每个小区间的最大长度为 λ ,此时 $\lambda \to 0$

曲边面积：$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

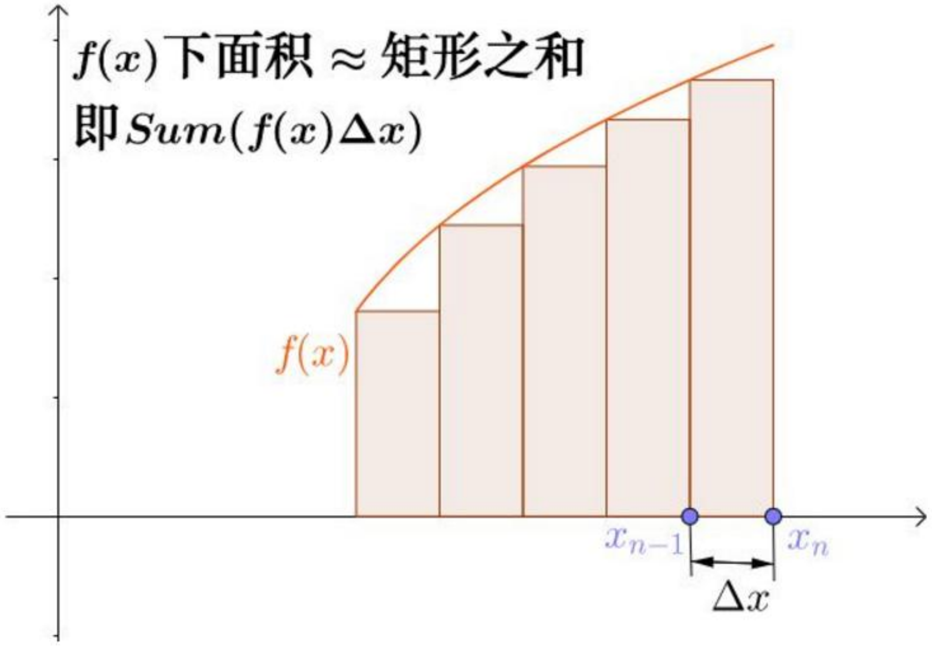


微积分

- 从求和出发

  - 我们需要尽可能的将每一个矩形的底边无穷小

  - 莱布尼兹为了体现求和的感觉，给S拉长了，简写成 $\int f(x)dx$



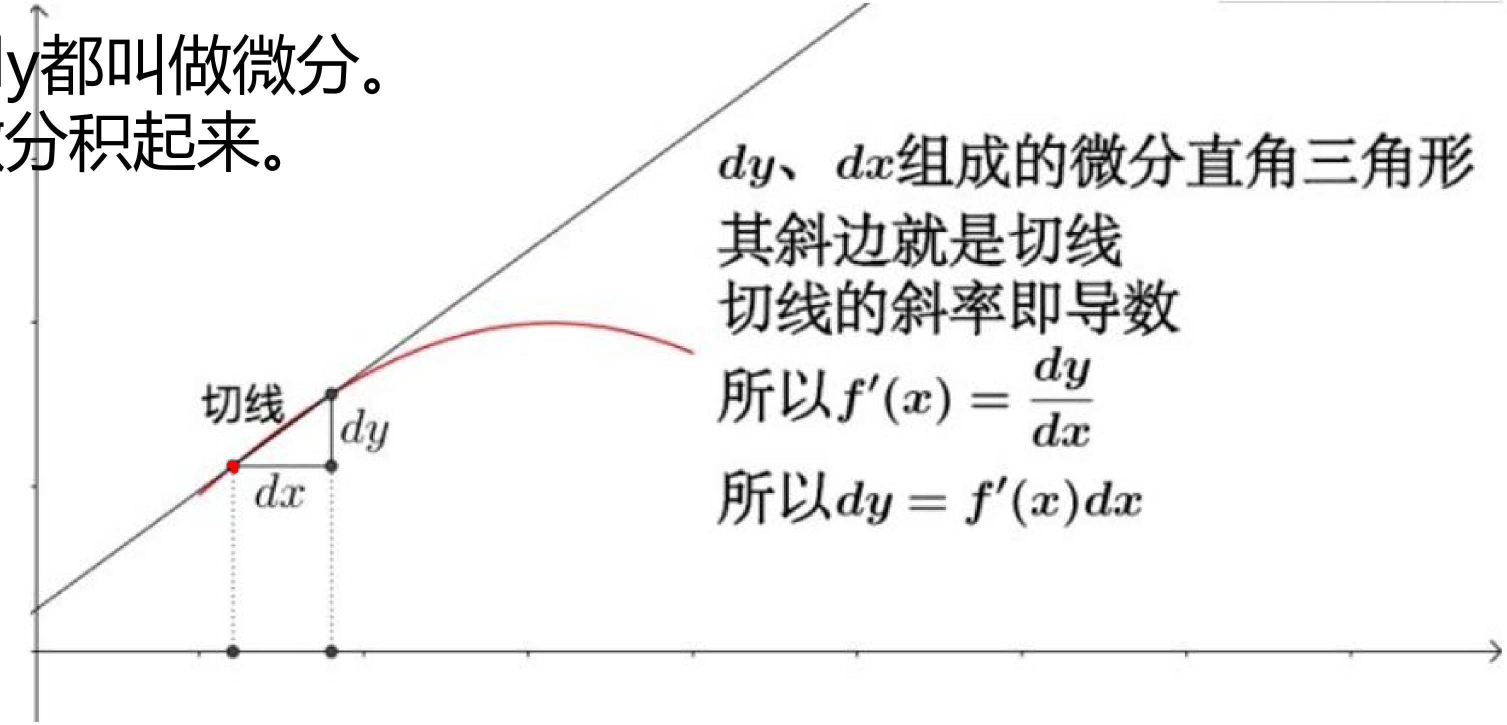
$$Sum(f(x)\Delta x) \Longrightarrow \int_{um} f(x)dx$$

微积分

- 切线的解释

  - 切线的斜率是什么?

  - 由于无穷小的概念，dx,dy都叫做微分。所谓微积分就是把这些微分积起来。



dy、dx组成的微分直角三角形
其斜边就是切线
切线的斜率即导数
所以$f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$
所以$dy=f'(x)dx$

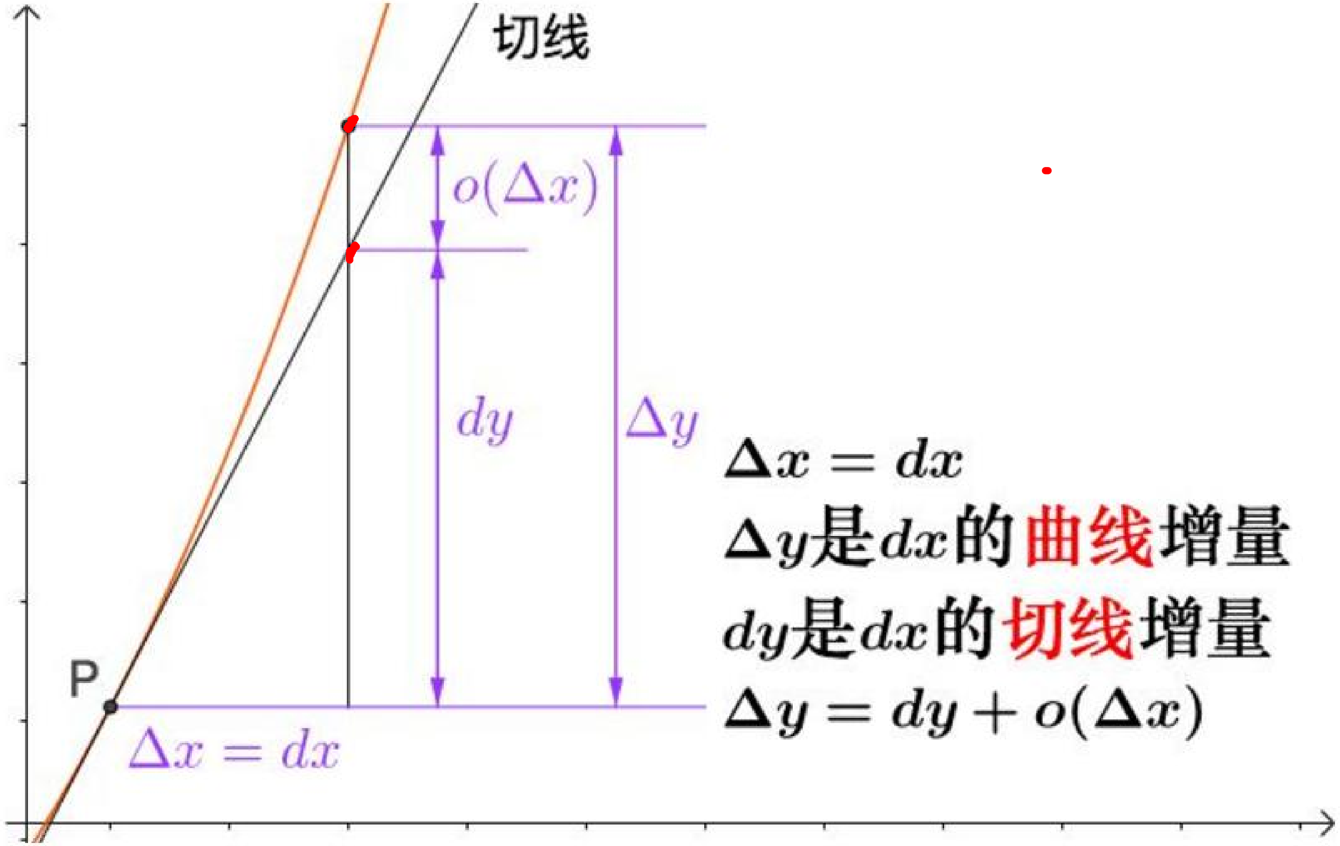
微积分

✓ 微分是什么？

✎ 几个指标的解释。

✎ 放大了给他们，其实依然：

$$\lim_{\Delta x \to 0} dy = 0, \lim_{\Delta x \to 0} dx = 0$$



$\Delta x = dx$

Δy是dx的曲线增量

dy是dx的切线增量

$\Delta y = dy + o(\Delta x)$

微积分

定积分

当 $\|\Delta x\| \to 0$时，总和S总是趋于确定的极限I，则称极限I为函数 $f(x)$ 在曲线[a,b]上的定积分。

$$\int_{\underset{\text{积分下限}}{a}}^{\overset{\text{积分上限}}{b}} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{被积函数}}\, d\underbrace{x}_{\text{积分变量}}}_{\text{被积表达式}} = I = \lim_{\lambda\to 0} \overbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}^{\text{积分和}}$$

$[a,b]$ 积分区间

微积分

定积分

积分值和被积函数与积分曲线有关，与积分变量字母无关。

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

当函数 $f(x)$ 在区间[a,b]上的定积分存在的时候，称 $f(x)$ 在区间[a,b]上可积

微积分

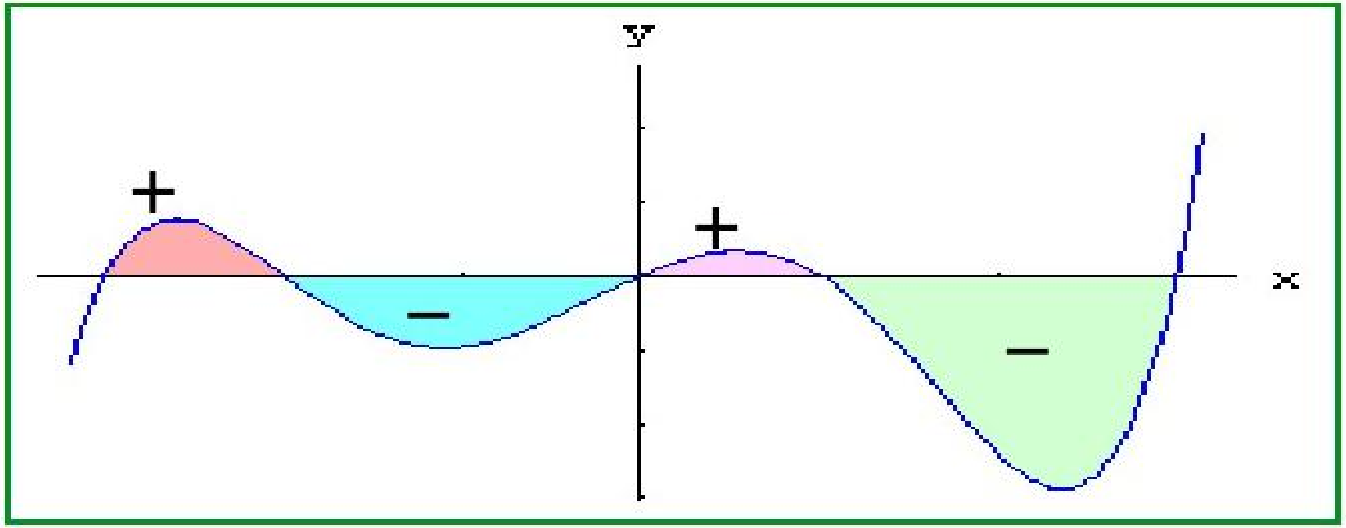
定积分的几何含义

面积的正负值：

$$f(x) > 0, \quad \int_a^b f(x)dx = A$$

$$f(x) < 0, \quad \int_a^b f(x)dx = -A$$

代数和，上方为正，下方为负。



微积分

- 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2 dx$.

将[0,1]n等分，分点为$x_i = \dfrac{i}{n}$，$(i = 1,2,\cdots,n)$

小区间$[x_{i-1}, x_i]$的长度$\Delta x_i = \dfrac{1}{n}$，$(i = 1,2,\cdots,n)$

取$\xi_i = x_i$，$(i = 1,2,\cdots,n)$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Delta x_i,$$

微积分

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right),\quad \|\Delta x\|\to 0\ \Rightarrow n\to\infty$$

$$\int_0^1 x^2dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\ \xi_i^{\,2}\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}.$$

微积分

定积分的性质

- $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad$ (k为常数).

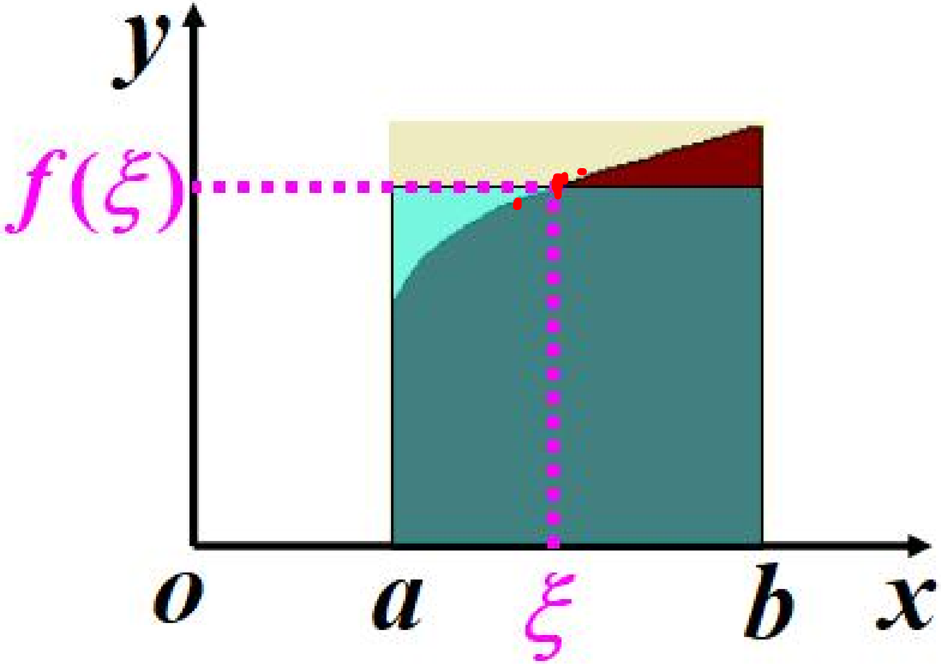
- 假设$a < c < b$ $\quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

- 如果在区间$[a,b]$上$f(x) \geq 0$，则$\int_a^b f(x)dx \geq 0. \quad (a < b)$

第一中值定理

如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则在积分区间$[a,b]$上至少存在一个点 ξ,

使$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.　　$(a \le \xi \le b)$



微积分

积分上限函数

- 函数 $f(x)$ 在区间[a,b]上连续，对于定积分 $\int_a^x f(x)dx$ 每一个取值的x都有一个对应的定积分值。
- 记作：$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$
- 如果 $f(x)$ 在区间[a,b]上连续，则积分上限函数就是 $f(x)$ 在[a,b]上的原函数。

微积分

- 牛顿—莱布尼茨公式

如果 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间[a,b]上的一个原函数则：

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

解释：一个连续函数在区间[a,b]上的定积分等于它的任意一个原函数在区间[a,b]上的增量

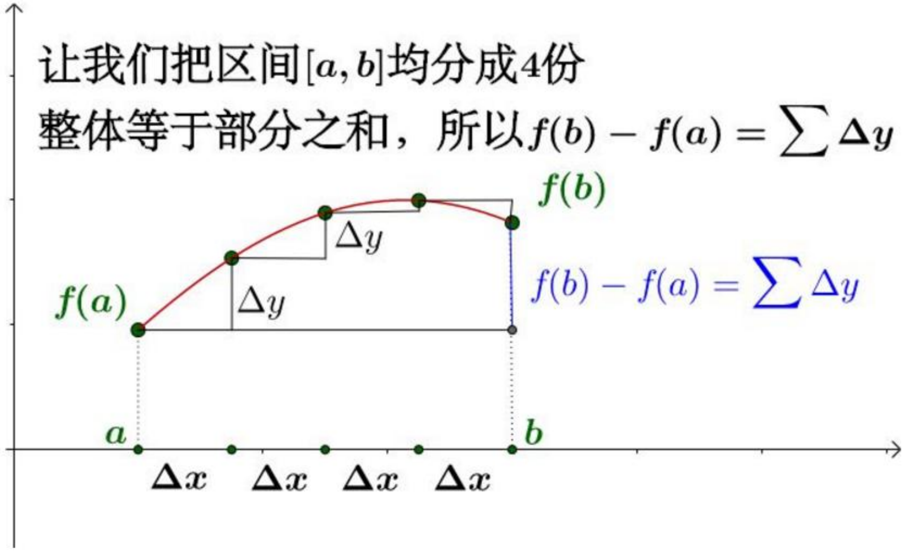
微积分

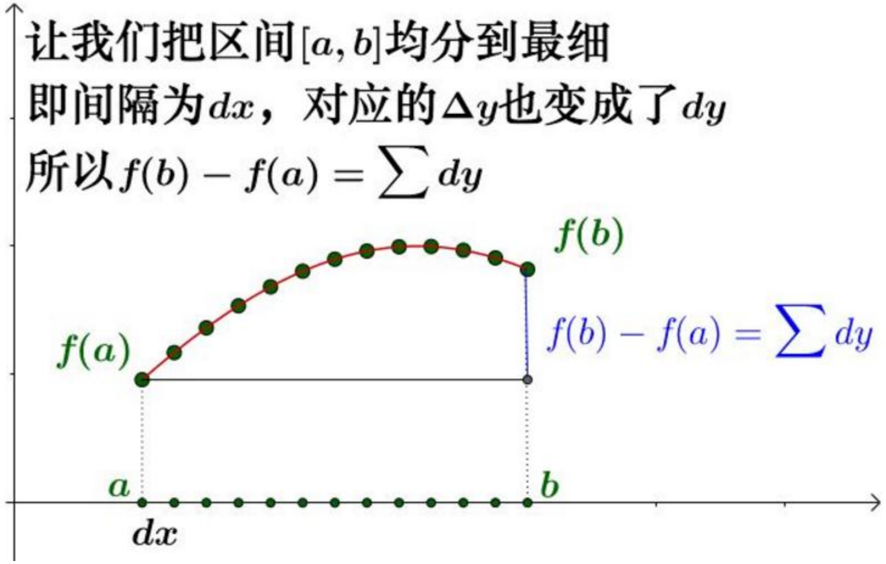
✓ 牛顿—莱布尼茨公式

✎ 几何解释：

✎ 可得：$f(b)-f(a)=\sum dy$ 由于 $dy=f'(x)dx$

$$f(b)-f(a)=\sum f'(x)dx=\int_a^b f'(x)dx$$





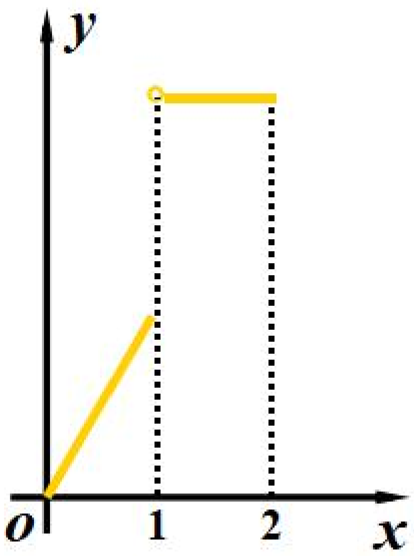
$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x+\sin x-1)dx.$

原式 $=\left[2\sin x-\cos x-x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=3-\dfrac{\pi}{2}.$

设 $f(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 5 & 1<x\le 2\end{cases}$, 求 $\int_{0}^{2}f(x)dx.$

在[1,2]上规定当 $x=1$ 时，$f(x)=5$,

原式 $=\int_{0}^{1}2xdx+\int_{1}^{2}5dx$



微积分

微积分基本公式

有 $f(x) \in C[a,b]$，且 $F'(x) = f(x)$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{f(\xi)(b-a)}_{\text{积分中值定理}} = \underbrace{F'(\xi)(b-a)}_{\text{微分中值定理}} = F(b) - F(a)$$

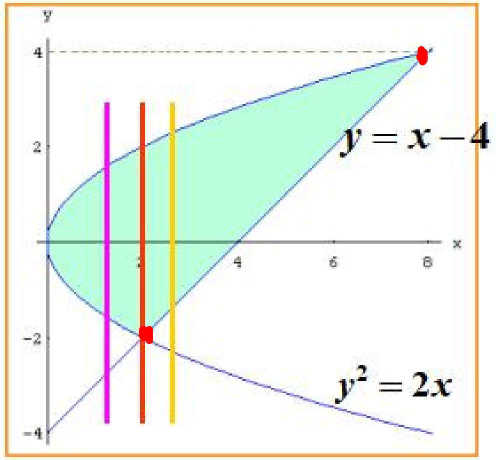
牛顿 – 莱布尼茨公式

计算由曲线 $y^2 = 2x$ 和直线 $y = x - 4$ 所围成的图形的面积.

解 两曲线的交点

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow (2,-2), (8,4).$



选 y 为积分变量 $y \in [-2, 4]$

$$dA = \left(y + 4 - \frac{y^2}{2} \right) dy \qquad A = \int_{-2}^{4} dA = 18.$$