泰勒公式

出发点

- 用简单的熟悉的多项式来近似代替复杂的函数
- 易计算函数值，导数与积分仍是多项式
- 多项式由它的系数完全确定，其系数又由它在一点的函数值及其导数所确定。

泰勒公式

回忆微分

若 $f'(x_0)$存在，在x0附近有 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$

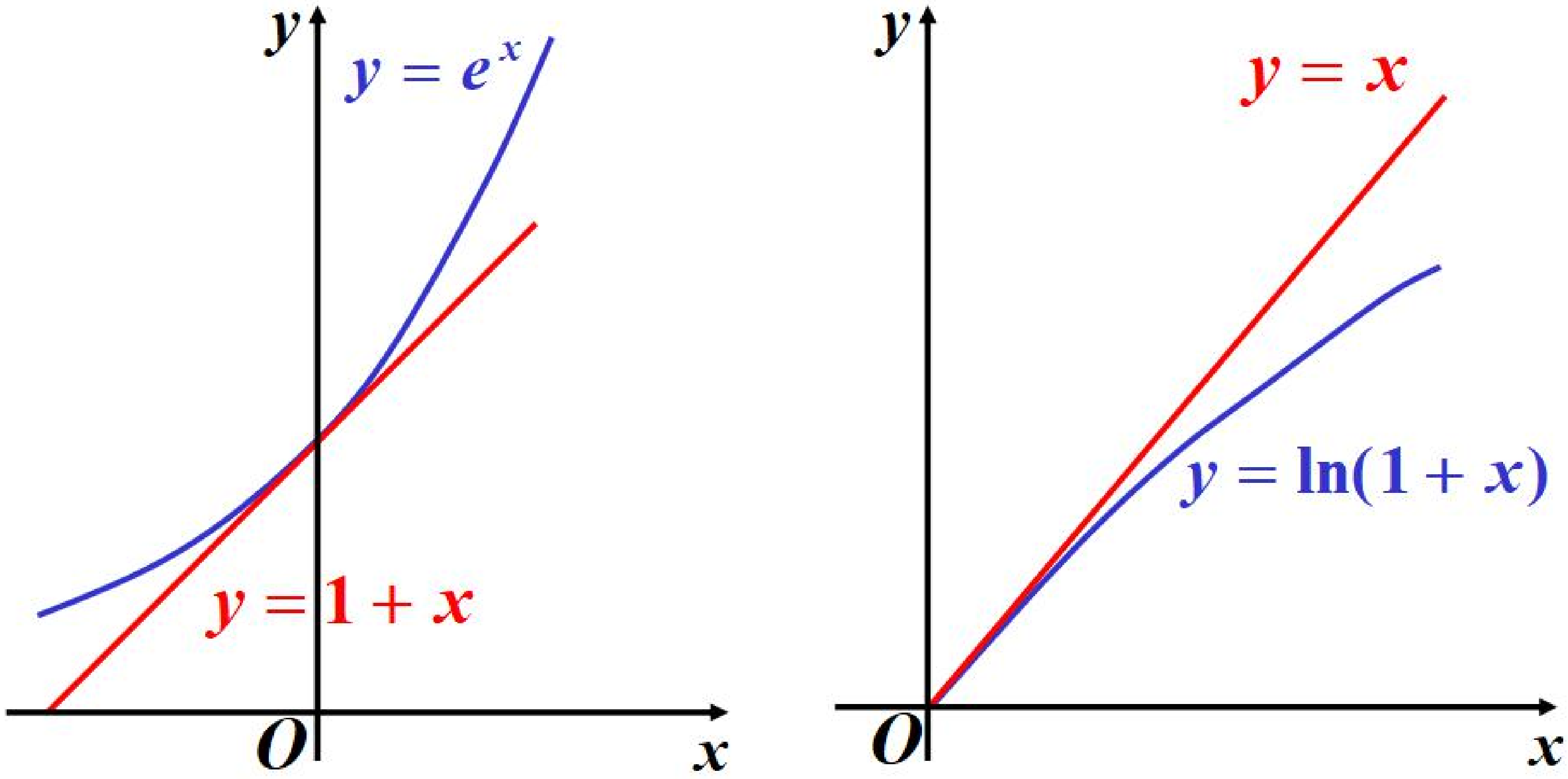
可以得到 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$

近似可得 $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

泰勒公式

- 以直代曲

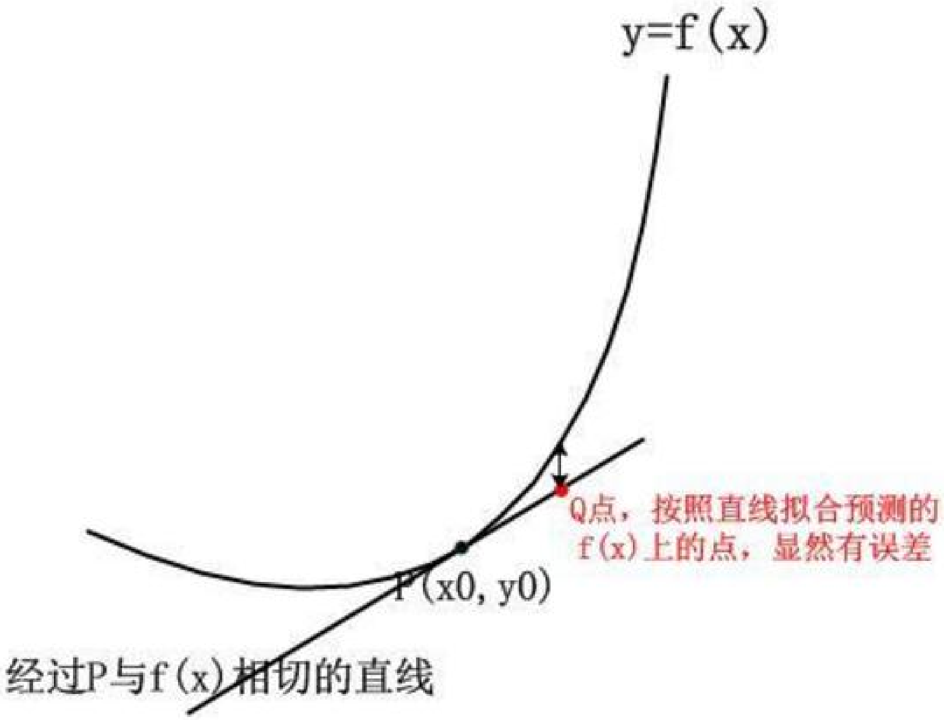
$$\text{当}\,|x|\,\text{很小时},\ e^x \approx 1 + x,\ \ln(1+x) \approx x$$

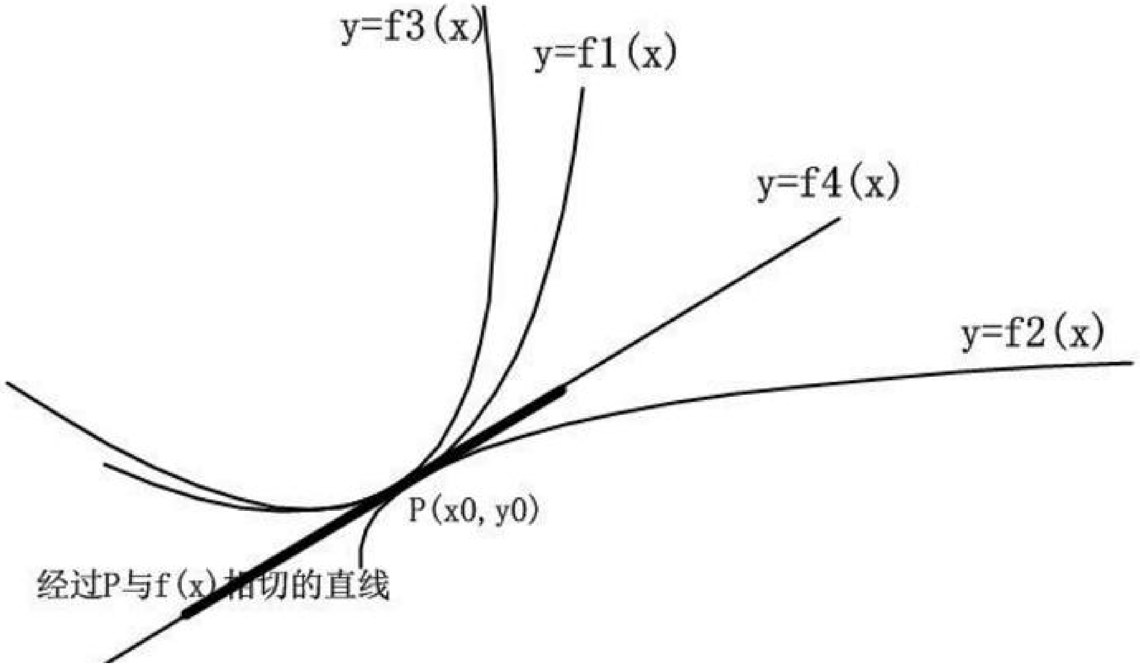


泰勒公式

- 一点一世界

只用一阶导数看起来有点不准呀，能不能再利用一些呢?

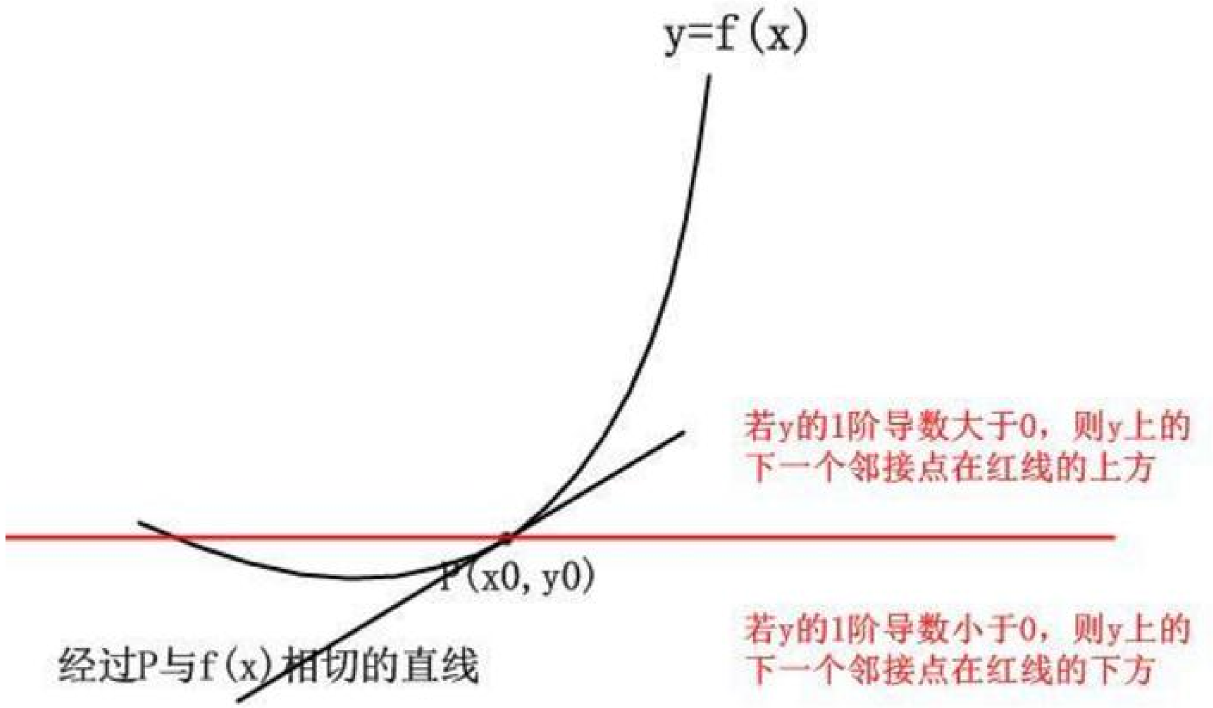




泰勒公式

- 一点一世界

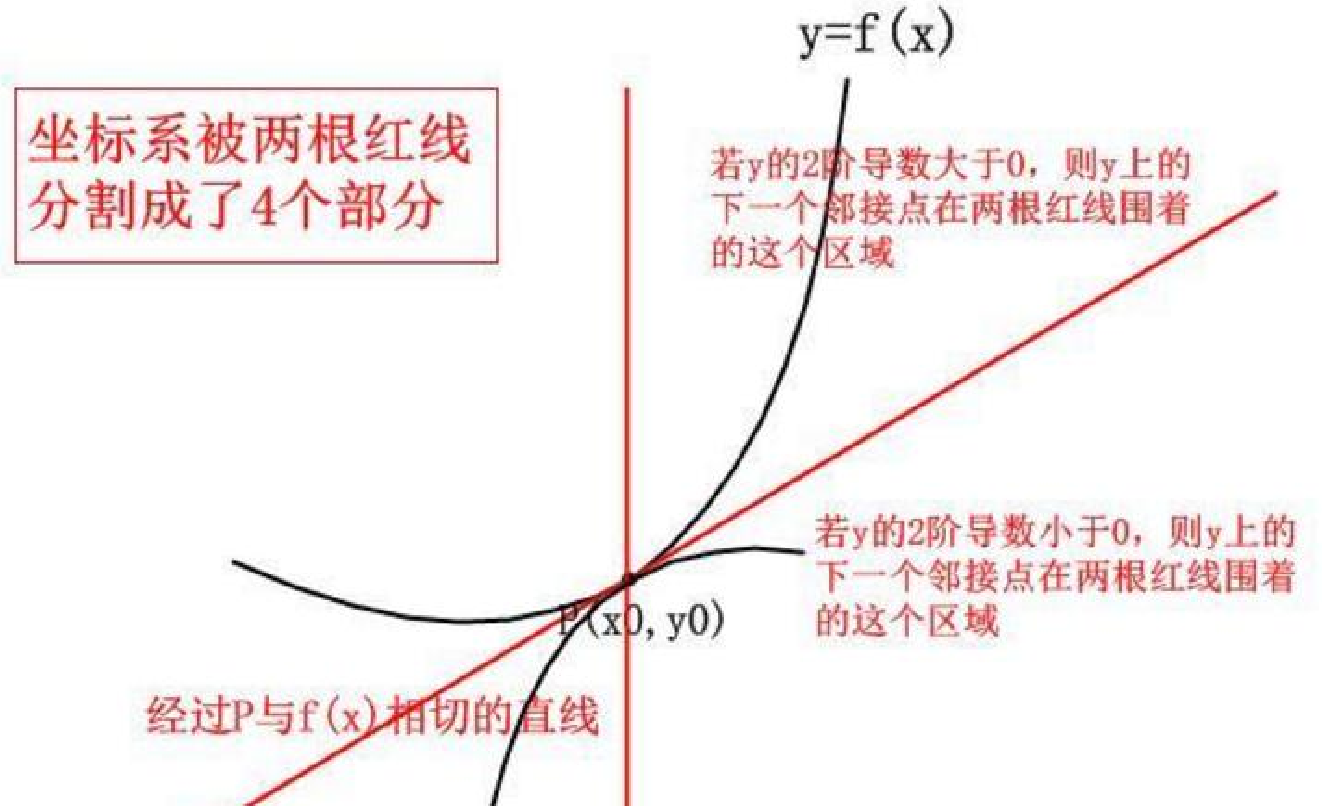
  一阶导数只帮我们定位了下一个点是上升还是下降对之后的趋势就很难把控了



泰勒公式

- 一点一世界

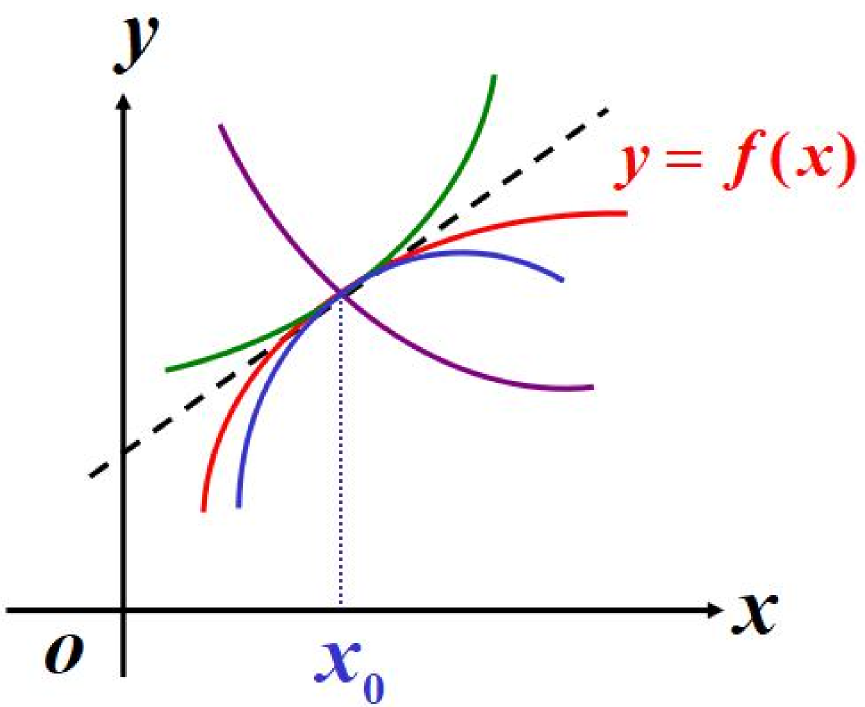
如何做的更准确一些呢？如果把二阶导利用上呢。



泰勒公式

✓ 一点一世界

- 如果在x0点相交 $P_n(x_0) = f(x_0)$
- 如果有相同的切线 $P_n'(x_0) = f'(x_0)$
- 如果弯曲方向相同 $P_n''(x_0) = f''(x_0)$



泰勒公式

泰勒多项式

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$\cdots \quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

称为 $f(x)$的在x0关于（x-x0）的n阶泰勒多项式

泰勒公式

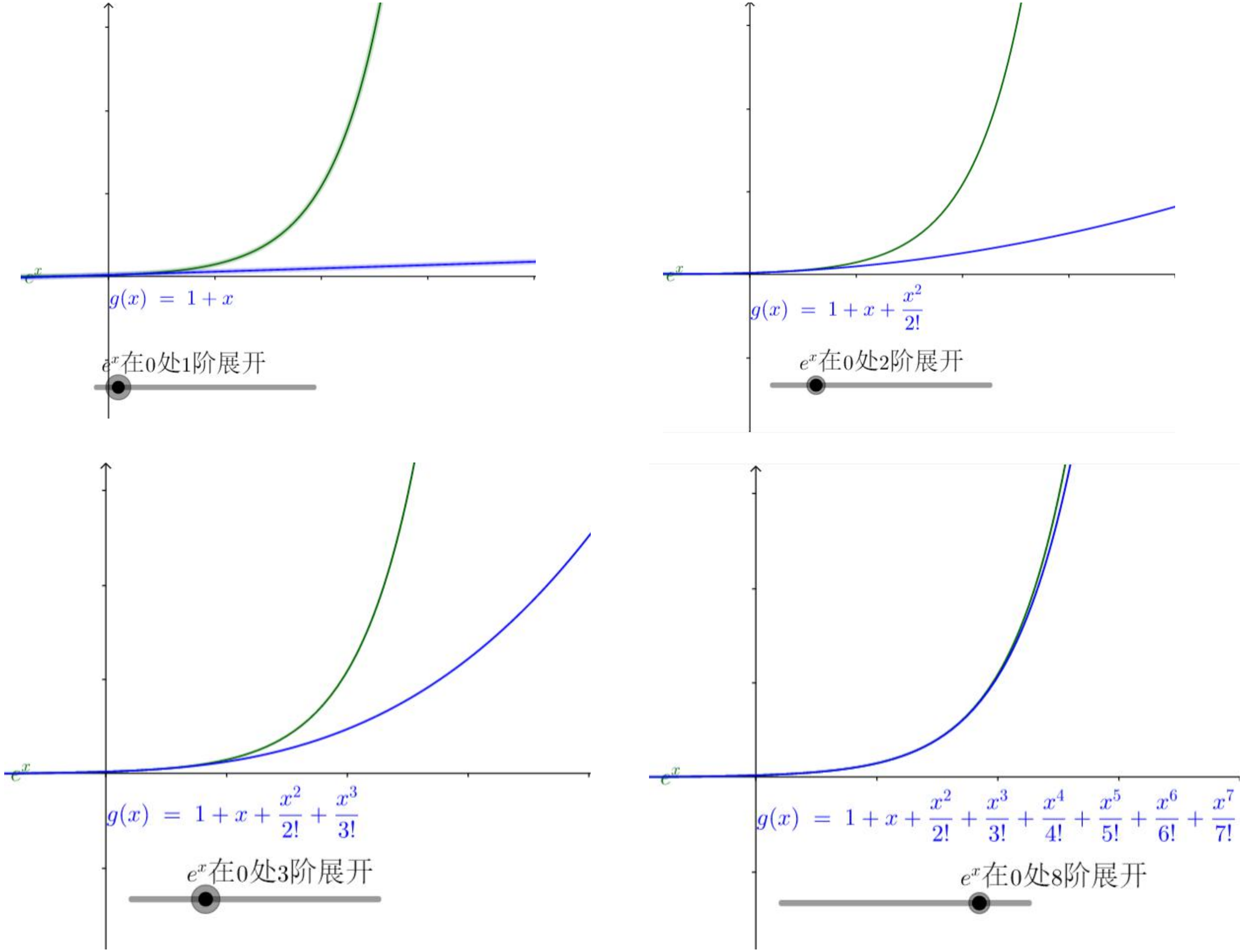
麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

近似可得：$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

泰勒公式

- 多项式逼近



e^x
$g(x) = 1 + x$
e^x在0处1阶展开
e^x
$g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$
e^x在0处2阶展开
e^x
$g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$
e^x在0处3阶展开
e^x
$g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!}$
e^x在0处8阶展开

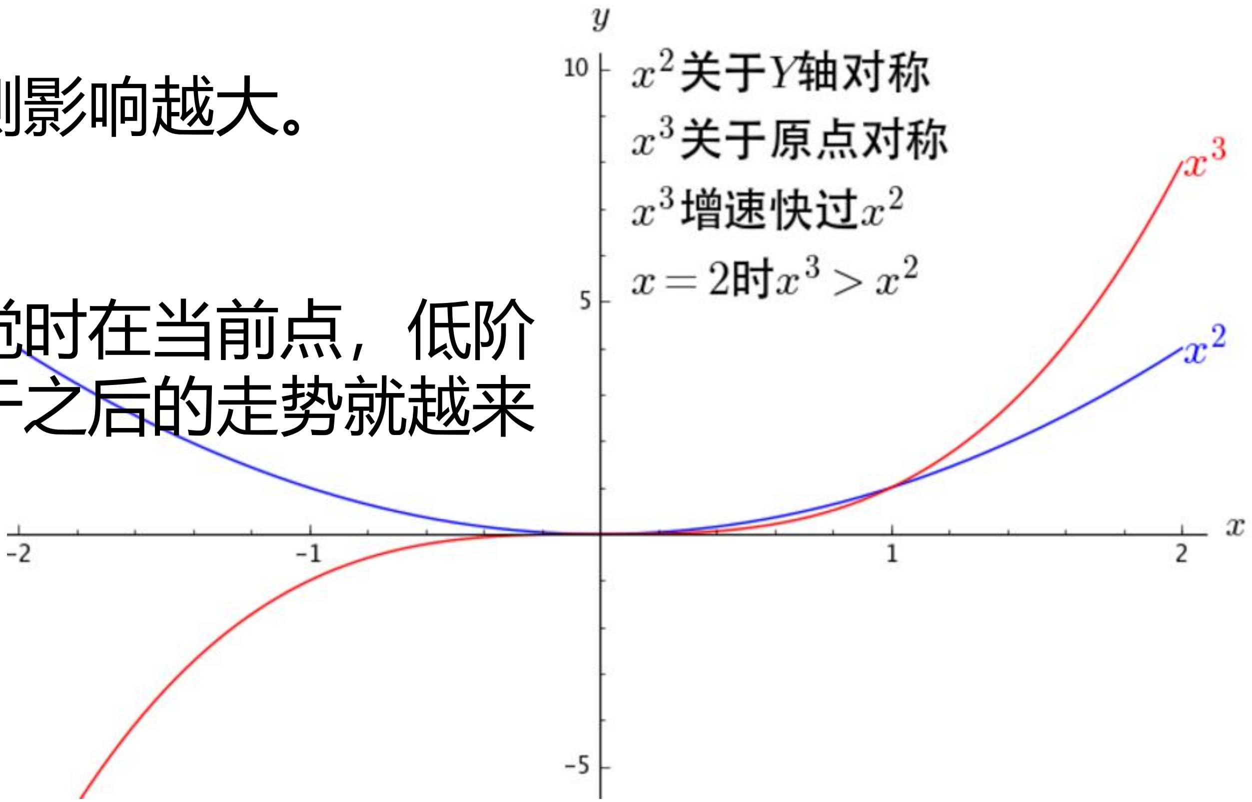
泰勒公式

- 阶数是什么意思呢?

- 阶数越高增长速度越快。

- 观察可发现，越高次项在越偏右侧影响越大。

- 对于一个复杂函数，给我们的感觉时在当前点，低阶项能更好的描述当前点附近，对于之后的走势就越来越依靠高阶的了。

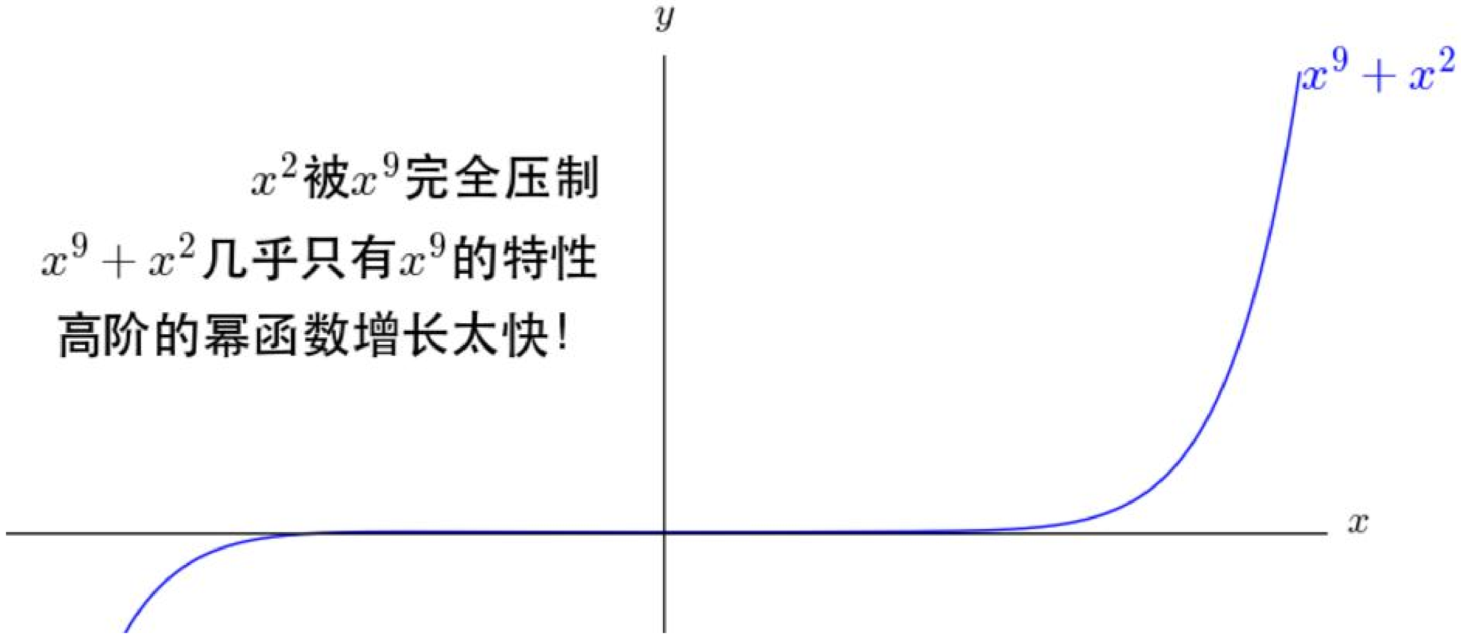


泰勒公式

- 阶乘是什么意思呢?

- 如果把9次的和2次的直接放在一起，那2次的就不用玩了。

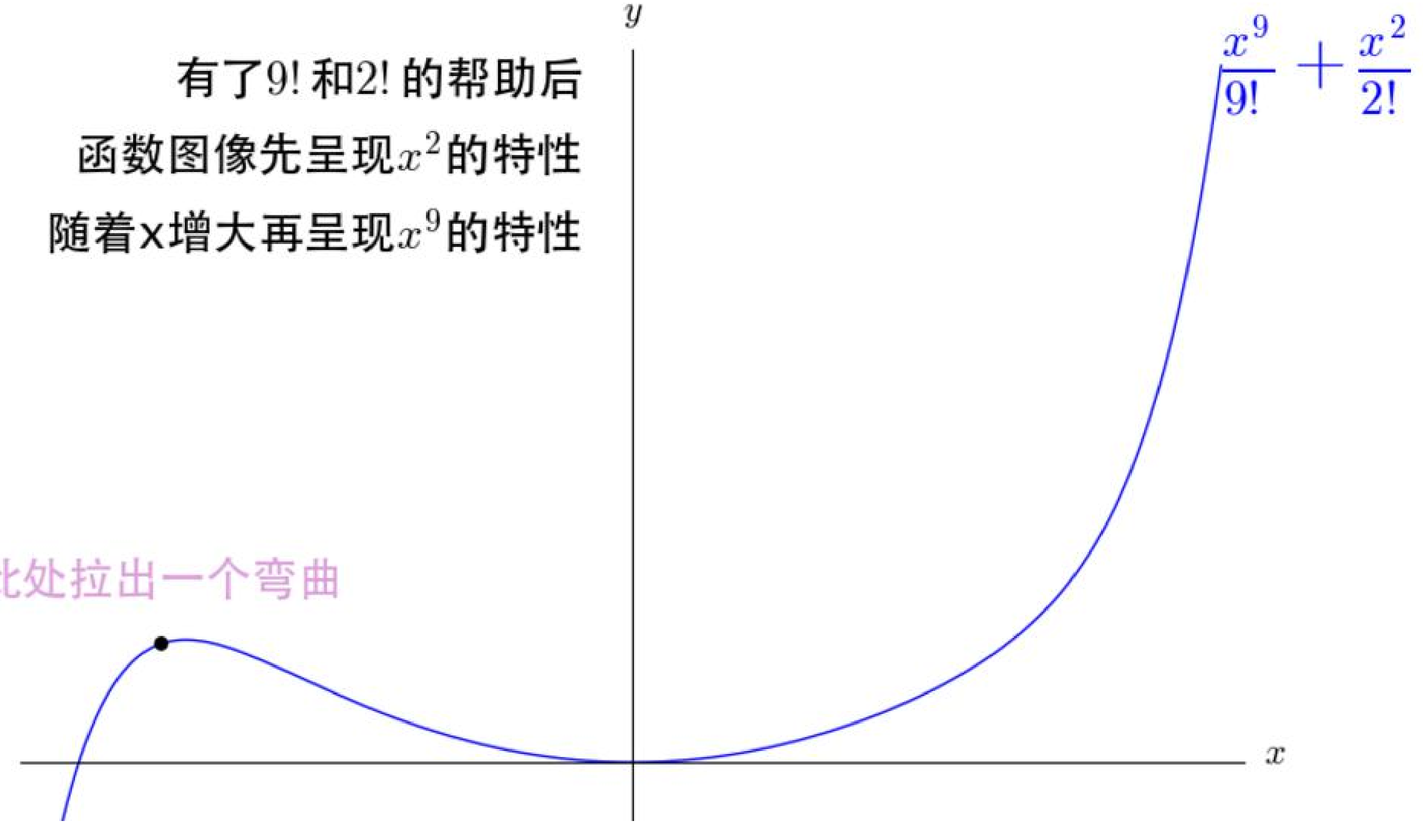
- 但是在开始的时候应该是2次的效果更好，之后才是慢慢轮到9次的呀!



泰勒公式

阶乘是什么意思呢?

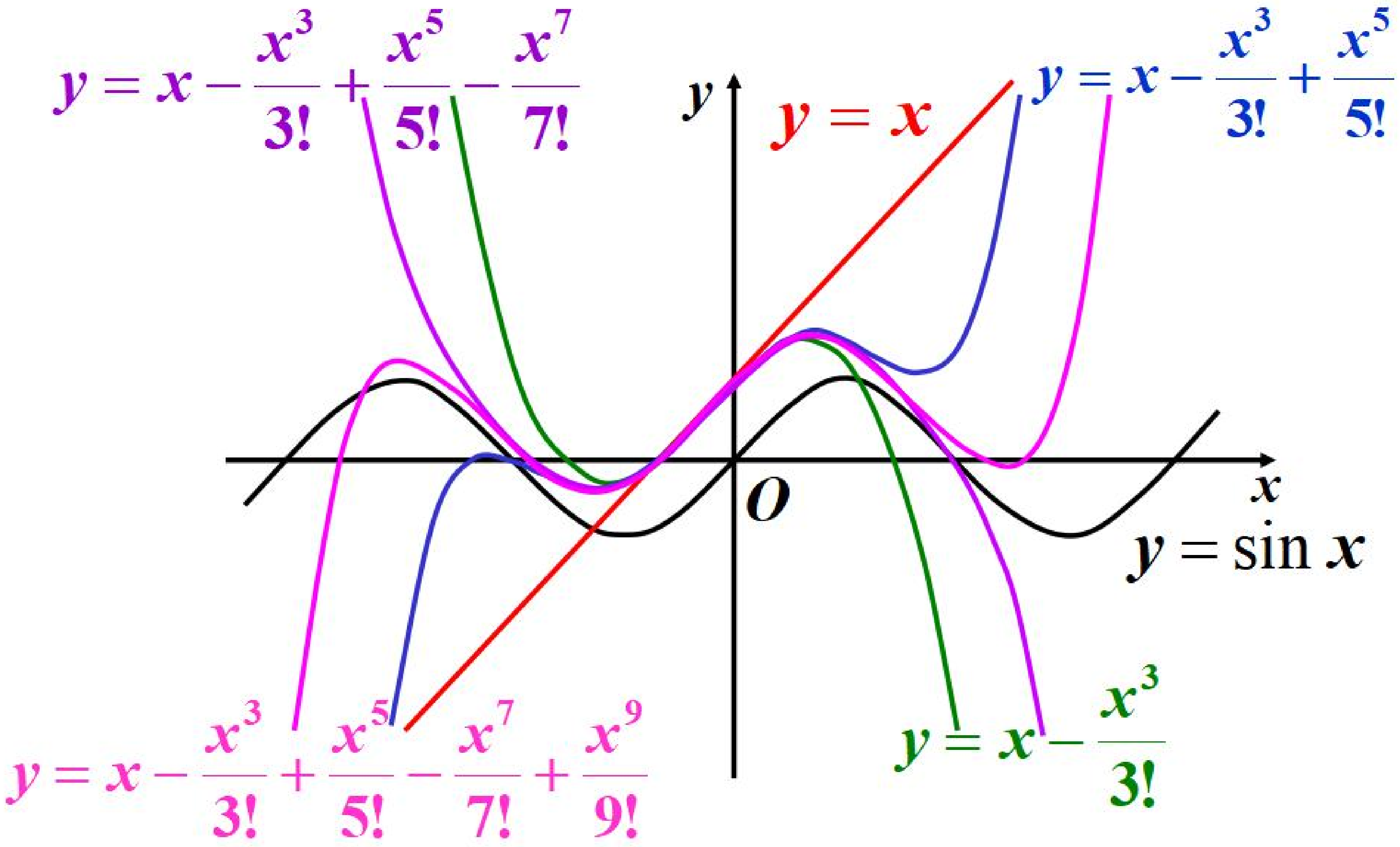
有了！之后，就帮助我们解决了这样的问题。



泰勒公式

- 多项式逼近

  - 逼近 $\sin x$



泰勒公式

例1: 求函数 $f(x)=e^x$ 的n阶麦克劳林展开式.

解: 因为 $f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$,

所以 $f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1.$

故

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

$$+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\qquad(0<\theta<1)$$

泰勒公式

例2：求函数 $f(x)=\sin x$ 的n阶麦克劳林展开式.

解：因为 $f'(x)=\cos x, f''(x)=-\sin x, f'''(x)=-\cos x,$

$$f^{(4)}(x)=\sin x,\cdots,f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

所以 $f^{(n+1)}(\theta x)=\sin\left(\theta x+\dfrac{n+1}{2}\cdot\pi\right),$

令$n=2m$，于是有

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x)$$

其中 $R_{2m}(x)=\dfrac{(-1)^m\cos(\theta x)}{(2m+1)!}x^{2m+1}\quad(0<\theta<1)$