拉格朗日乘子法

- 如何求极值?

给个函数: $z = f(x, y)$ 如何求其极值点呢?

简单来说直接求它的偏导不就OK啦嘛

$$f_x(x,y)=0,\quad f_y(x,y)=0$$

现在问题难度加大了，如果再加上约束条件呢？ 面积固定，求体积最大=？

$$V(x,y,z) = xyz$$

$$2xy + 2yz + 2zx = S$$

拉格朗日乘子法

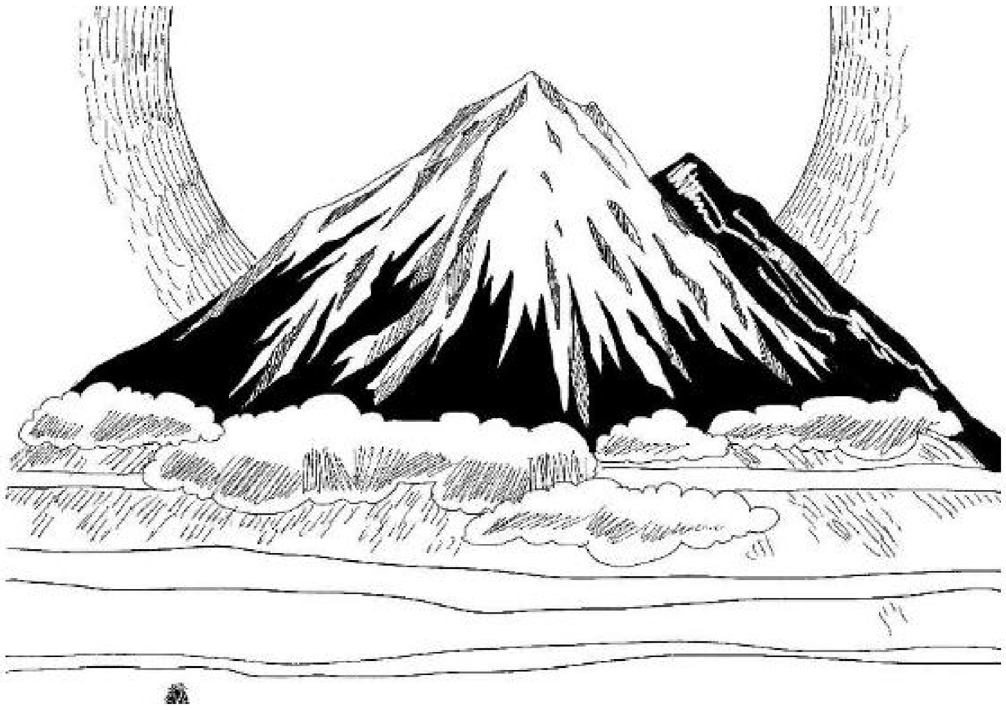
- 什么点是我们想要的?

  - 山峰的高度是 $f(x,y)$，其中有一条曲线是 $g(x,y)=C$

  - 曲线镶嵌在山上，如何找到曲线最低点呢?

  - 法向量平行：$\nabla f(x,y)=-\lambda\nabla g(x,y)$

  - 得到结论：$\nabla(f(x,y)+\lambda g(x,y))=0$



拉格朗日乘子法

- 求解

- 函数：$z = f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 条件下的极值。

- 构造函数：$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，其中 λ 为拉格朗日乘数

$$\begin{cases} f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0, \\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases}$$

- 其中(X,Y)就是极值点坐标。

拉格朗日乘子法

- 自变量多于两个条件下

函数: $u = f(x,y,z,t)$ 在条件 $\varphi(x,y,z,t)=0$，$\psi(x,y,z,t)=0$ 下的极值。

构造函数：$F(x,y,z,t)=f(x,y,z,t)+\lambda_1\varphi(x,y,z,t)+\lambda_2\psi(x,y,z,t)$

其中 λ_1,λ_2 均为拉格朗日乘数，同样通过偏导为0以及约束条件求解。

拉格朗日乘子法

实例

函数：$u = x^3y^2z$ 约束条件：x, y, z之和为12，求其最大值。

构造函数：$F(x,y,z) = x^3y^2z + \lambda(x+y+z-12)$

分别求偏导：
$$\begin{cases} F'_x = 3x^2y^2z + \lambda = 0 \\ F'_y = 2x^3yz + \lambda = 0 \\ F'_z = x^3y^2 + \lambda = 0 \\ x + y + z = 12 \end{cases}$$

唯一驻点（6,4,2）

$$u_{\max} = 6^3 \cdot 4^2 \cdot 2 = 6912$$

拉格朗日乘子法

例 在第一卦限内作椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的切平面，使切平面与三个坐标面所围成的四面体体积最小，求切点坐标.

解 设$P(x_0,y_0,z_0)$为椭球面上的一点，

令$F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$

则 $F'_x|_P=\frac{2x_0}{a^2}$，$F'_y|_P=\frac{2y_0}{b^2}$，$F'_z|_P=\frac{2z_0}{a^2}$

过$P(x_0,y_0,z_0)$的切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0$$

拉格朗日乘子法

化简为 $$\frac{x\cdot x_0}{a^2}+\frac{y\cdot y_0}{b^2}+\frac{z\cdot z_0}{c^2}=1$$

该切平面在三个轴上的截距各为

$$x=\frac{a^2}{x_0},\quad y=\frac{b^2}{y_0},\quad z=\frac{c^2}{z_0}$$

目标函数

所求四面体的体积 $$\boxed{V=\frac{1}{6}xyz=\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}}$$

约束条件

在条件 $\boxed{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1}$ 下求V 的最小值,

拉格朗日乘子法

目标函数$V=\dfrac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$，约束条件$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}=1$

令 $u=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0$

$$L(x_0,y_0,z_0)$$

$$=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0+\lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)$$

由 $\begin{cases} L'_{x_0}=0,\ L'_{y_0}=0,\ L'_{z_0}=0 \\ \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$

拉格朗日乘子法

$$L(x_0,y_0,z_0)=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0+\lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)$$

即 $$\begin{cases}\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{2\lambda x_0}{a^2}=0\\ \dfrac{1}{y_0}+\dfrac{2\lambda y_0}{b^2}=0\\ \dfrac{1}{z_0}+\dfrac{2\lambda z_0}{c^2}=0\\ \dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}+\dfrac{z_0^2}{c^2}-1=0\end{cases}$$ 可得 $$\begin{cases}x_0=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\\ y_0=\dfrac{b}{\sqrt{3}}\\ z_0=\dfrac{c}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

当切点坐标为 $\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$

四面体的体积最小 $V_{\min}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}abc$