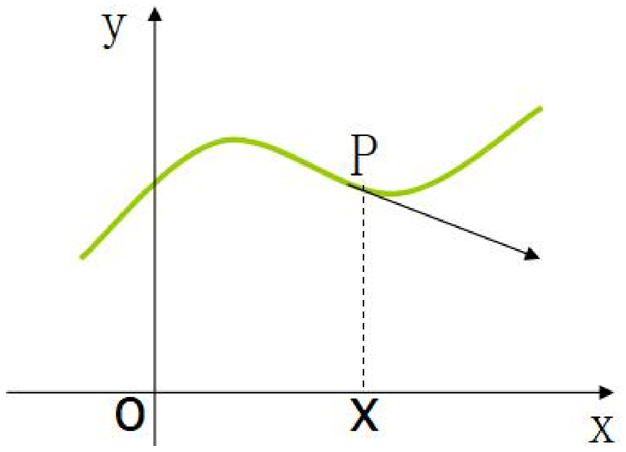
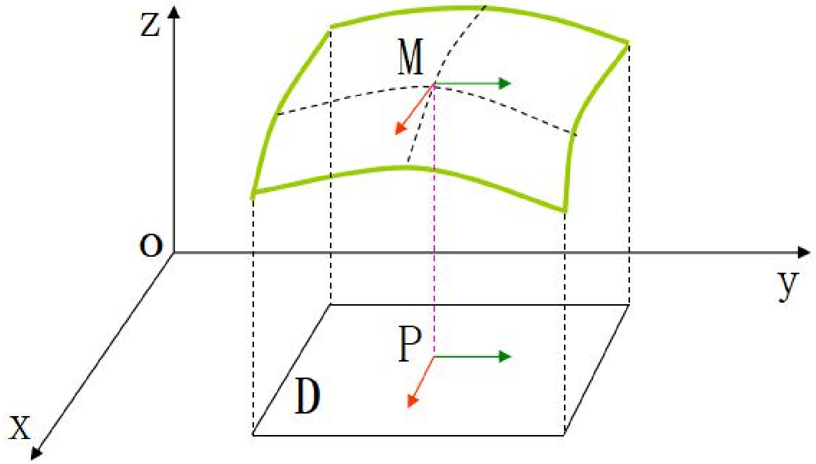
梯度

偏导数

对于一元函数y=f(x)只存在y随x的变化



二元函数z=f(x,y)存在z随x变化的变化率，随y变化的变化率，随x、y同时变化的变化率。



梯度

偏导数

定义：设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有定义

定 $y=y_0$， 一元函数 $f(x,y_0)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，即极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=A$$

则称 A为函数：$z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于自变量X的偏导数

记作：$f_x(x_0,y_0)$ 后或者 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ $\left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$

梯度

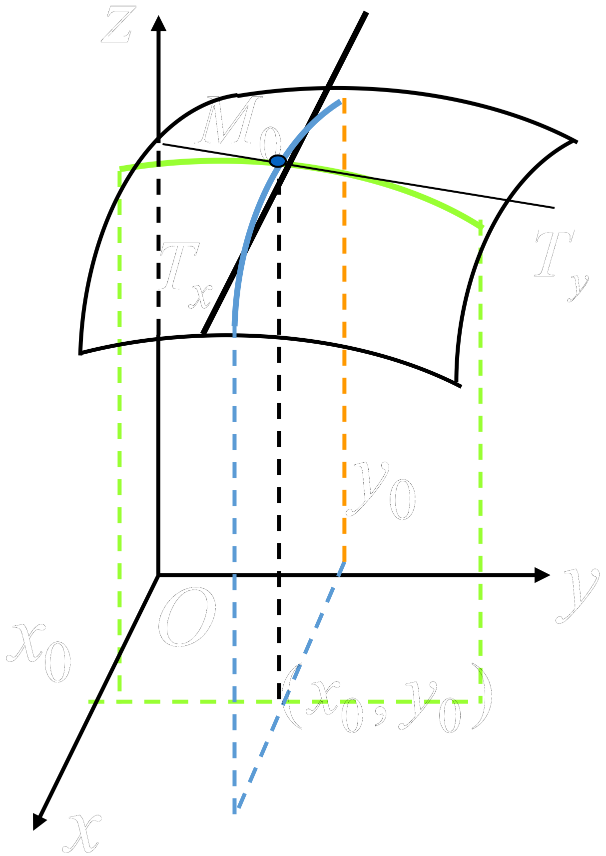
偏导数

几何意义：$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}$ 是曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases}$

在点M0处的切线 M_0T_x 对x轴的斜率。

几何意义：$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x_0,y)\right|_{y=y_0}$ 是曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ x=x_0 \end{cases}$

在点M0处的切线 M_0T_y 对y轴的斜率。



梯度

偏导数

求 $f(x,y)=x^2+3xy+y^2$ 在点（1,2）处的偏导数。

$$f_x(x,y)=2x+3y$$

$$f_y(x,y)=3x+2y$$

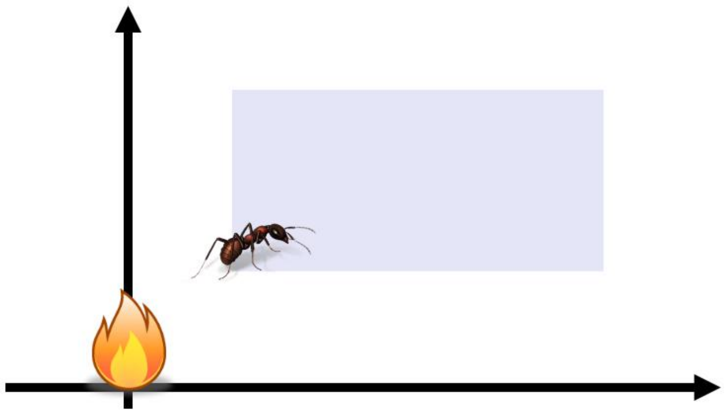
$$f_x(1,2)=(2x+3y)\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=8$$

$$f_y(1,2)=(3x+2y)\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=7$$

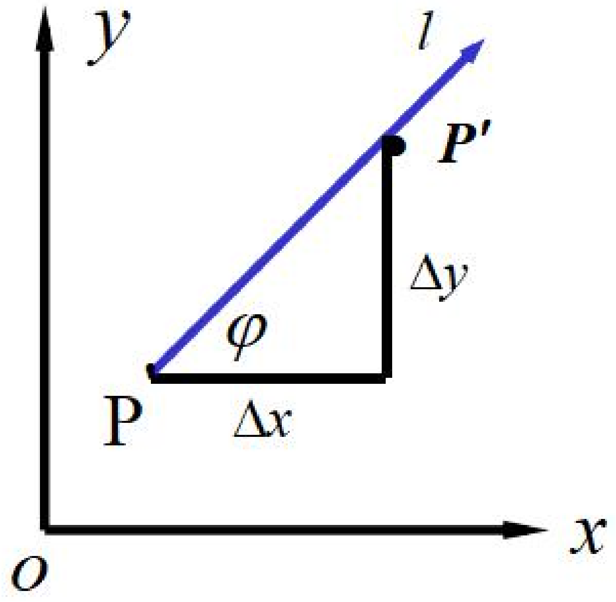
梯度

- 方向导数

蚂蚁沿什么方向跑路才能活?



函数: $z = f(x, y)$



$$|PP'| = \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

梯度

方向导数

如果函数的增量，与这两点距离的比例存在，则称此为在P点沿着L的方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}$$

函数：$f(x,y)$ 在X轴正向 $\vec{e}_1=\{1,0\}$，Y轴正向 $\vec{e}_2=\{0,1\}$ 的方向导数

分别为：f_x, f_y 负方向导数：$-f_x, -f_y$

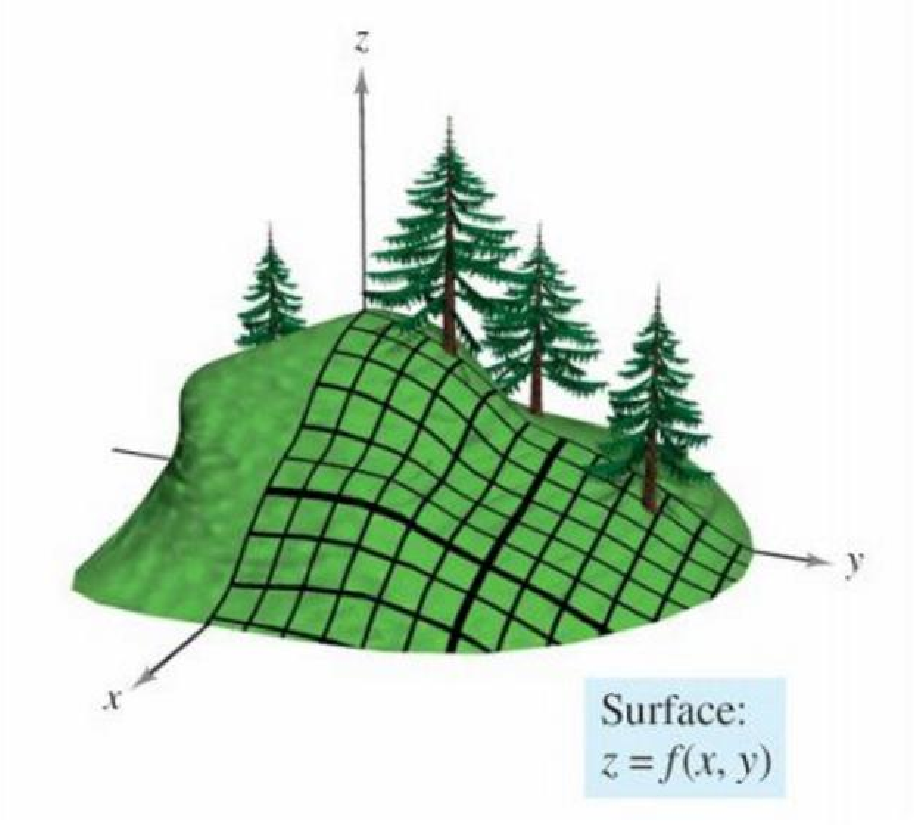
梯度

方向导数

定理：如果函数 $z=f(x,y)$ 在点$P(x,y)$ 是可微分的，那么在该点沿任意方向L的方向导数都存在。

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$$

φ 为X轴到L的角度



梯度

求函数$z = xe^{2y}$在点$P(1,0)$处沿从点$P(1,0)$到点$Q(2,-1)$的方向的方向导数.

解 这里方向$\vec{l}$ 即为$\overrightarrow{PQ} = \{1,-1\}$,

故x轴到方向$\vec{l}$ 的转角$\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$.

$$\because \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)} = \left.e^{2y}\right|_{(1,0)} = 1; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0)} = \left.2xe^{2y}\right|_{(1,0)} = 2,$$

所求方向导数

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \cos(-\frac{\pi}{4}) + 2\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

梯度

梯度

函数：$z = f(x,y)$ 在平面域内具有连续的一阶偏导数，对于其中每一个点 $P(x,y)$ 都有向量 $\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$，则其称为函数在点P的梯度。

$$grad f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

$\vec{e} = \cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\vec{j}$ 是方向L上的单位向量

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi = \{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\} \cdot \{\cos\varphi, \sin\varphi\}$$

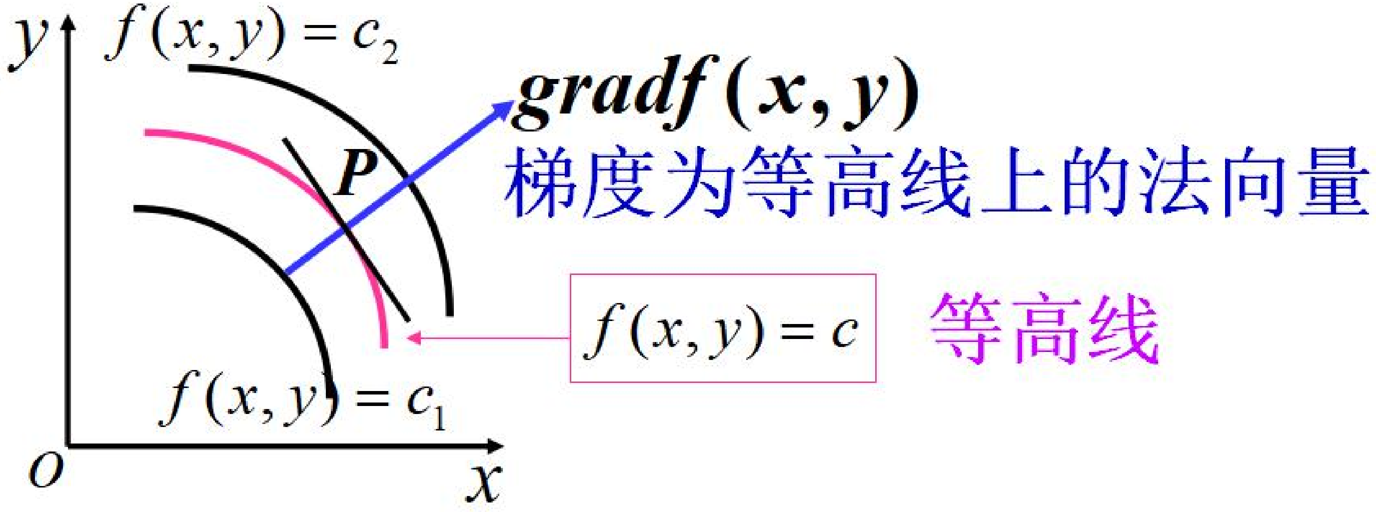
$$= grad f(x,y) \cdot \vec{e} \quad = |grad f(x,y)| \cos\theta \qquad \theta = (grad f(x,y), \vec{e})$$

梯度

- 梯度

- 只有当 $\cos(\mathbf{grad}f(x,y),\vec{e})=1$, $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ 才有最大值。

- 函数在某点的梯度是一个向量，它的方向与方向导数最大值取得的方向一致。其大小正好是最大的方向导数



梯度

设 $u = xyz + z^2 + 5$，求 $\operatorname{grad} u$，并求在

点 $M(0,1,-1)$ 处方向导数的最大(小)值.

$$\because \quad \frac{\partial u}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy + 2z,$$

$$\therefore \quad \operatorname{grad} u\Big|_{(0,1,-1)} = (yz, xz, xy + 2z)\Big|_{(0,1,-1)}$$

$$= (-1, 0, -2)$$

从而 $$\max\left\{\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_M\right\} = \|\operatorname{grad} u\| = \sqrt{5}$$

$$\min\left\{\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_M\right\} = -\|\operatorname{grad} u\| = -\sqrt{5}$$