矩阵

行列式

二元线性方程组的求解：$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 方程组有唯一解：

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

矩阵

行列式

看起来好像有些规律呀

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 即为二阶行列式。

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为元素。
i代表行标，j代表列标。

矩阵

三阶行列式

二阶看起来挺容易就算出来了，三阶的呢?

主对角线

副对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

矩阵

行列式

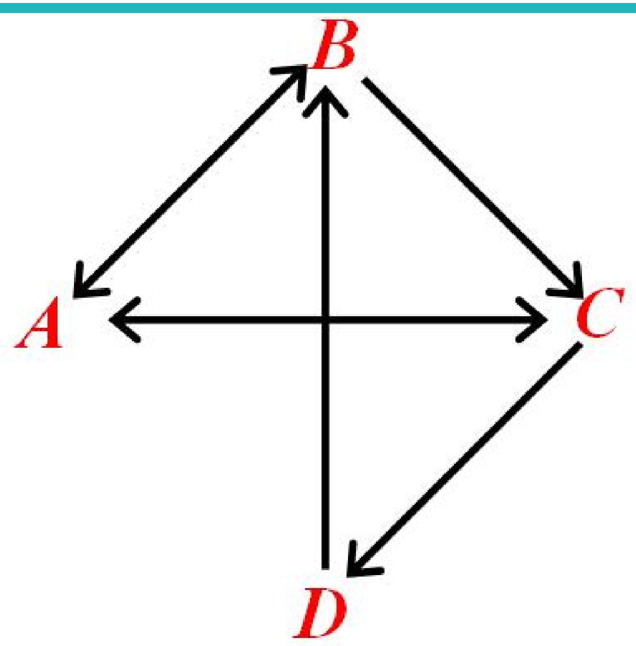
计算行列式：$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

$$D = 1\times2\times(-2) + 2\times1\times(-3) + (-4)\times(-2)\times4$$
$$-1\times1\times4 - 2\times(-2)\times(-2) - (-4)\times2\times(-3)$$
$$= -4 - 6 + 32 - 4 - 8 - 24$$
$$= -14.$$

矩阵

- 矩阵和数据之间的关系。

A B C D代表四座城市，它们之间可通行的关系：



如果有表格的形式来表示：

	A	B	C	D
A		√	√	
B	√		√	
C	√			√
D		√		

0	1	1	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0

矩阵

行列式与矩阵的区别

行列式	矩阵
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{t(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
■行数等于列数 ■共有n^2个元素	■行数不等于列数 ■共有$m \times n$个元素 ■本质上就是一个数表

矩阵

✓ 何为矩阵?

输入的数据就是矩阵，对数据做任何的操作都是矩阵的操作了。

	A	B	C	D
1	80	75	75	78
2	98	70	85	84
3	90	75	90	90
4	88	70	82	80

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 80 & 75 & 75 & 78 \\ 98 & 70 & 85 & 84 \\ 90 & 75 & 90 & 90 \\ 88 & 70 & 82 & 80 \end{pmatrix}$$

矩阵

矩阵的组成

矩阵是由行和列来组成的：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{array}{l} \longrightarrow \text{第一行} \\ \longrightarrow \text{第二行} \\ \\ \\ \end{array}$$

第一列 第二列

矩阵的特殊形式行向量与列向量：

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

矩阵

方阵是什么

行和列一样就是方阵啦，一般叫做n阶方阵。

$$A = A_{n\times n} = A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{n\times n}$$

矩阵

- 几种特别的东东

上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

下三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

矩阵

几种特别的东东

对角阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

单位矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵

同型矩阵和矩阵相等是一个事吗?

两个矩阵行列数相同的时候称为同型矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

在同型的前提下，并且各个元素相等，这就是矩阵相等了：

$$a_{ij} = b_{ij} \ (i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n)$$

矩阵

- 矩阵基本运算

  - 有两个m*n的矩阵 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$

  - 加减法：

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵

矩阵基本运算

数乘运算，数λ与矩阵A的乘积

$$\lambda A = A\lambda = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵

矩阵的乘法

两个商场，三种电视机，求销售额？ （A的列数和B的行数要相等）

$$A = \begin{array}{c c} \begin{pmatrix} 12 & 8 & 10 \\ 14 & 9 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{百佳} \\ \text{华润} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \text{长虹} & \text{康佳} & \text{创维} \end{array} & \end{array} \qquad B = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3.5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{长虹} \\ \text{康佳} \\ \text{创维} \end{array}$$

$$C = AB = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 10 \\ 14 & 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \\ 3.5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 \times 2.5 + 8 \times 3 + 10 \times 3.5 \\ 14 \times 2.5 + 9 \times 3 + 6 \times 3.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 89 \\ 83 \end{pmatrix}$$

矩阵

- 乘法没有交换律

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}\quad \mathbf{AB}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\ 8 & 16\end{pmatrix}\quad \mathbf{BA}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

但是可以这么玩：

$$(AB)C=A(BC)$$

$$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$$

$$A(B+C)=AB+AC$$

$$(B+C)A=BA+CA$$

矩阵

- 方程该怎么玩？A为系数矩阵，X是未知数矩阵，B是常数矩阵。

$$AX = b \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

矩阵

矩阵转置

就调换一下： $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$ $A^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

公式由来了：

$$(A^T)^T=A$$

$$(A+B)^T=A^T+B^T$$

$$(\lambda A)^T=\lambda A^T$$

$$(AB)^T=B^TA^T \Rightarrow (A_1A_2\cdots A_n)^T=A_n^T\cdots A_2^TA_1^T$$

矩阵

对称矩阵

如果满足 $A^T = A$ 那么A就是对阵矩阵。

$$a_{ij} = a_{ji} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 7 \\ -4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

矩阵

逆矩阵

A为n阶方阵，如果存在n阶方阵B，使得：AB=BA=I（单位阵）

记作：$B = A^{-1}$

性质（可逆前提）：$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

矩阵

矩阵的秩

对于一个S*N的矩阵：$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$

矩阵A的每一行可以看作一个N维向量：$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),\ i=1,2,\cdots,s$

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 叫作A的行向量

矩阵A的每一列可以看作一个S维向量：$\beta_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{sj} \end{pmatrix},\ j=1,2,\cdots,n$

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 叫作A的列向量

矩阵

矩阵的秩

秩表示什么呢?

行向量组: $\alpha_1 = (1, 1, 3, 1),\ \alpha_2 = (0, 2, -1, 4),$

$\alpha_3 = (0, 0, 0, 5),\ \alpha_4 = (0, 0, 0, 0).$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

求其极大线性无关组假设有: $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$

$$\begin{cases} k_1 = 0, \\ k_1 + 2k_2 = 0, \\ 3k_1 - k_2 = 0, \\ k_1 + 4k_2 + 5k_3 = 0 \end{cases}$$

解得: $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ 即: α_1 , α_2 , α_3 线性无关

矩阵

矩阵的秩

由于含有零向量，比线性相关。

所以向量组: α_1 , α_2 , α_3 , α_4 的秩为3

对于列向量组同理可得: $\beta_3 = \frac{7}{2}\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_2 + 0\beta_4$ 但 β_1 , β_2 , β_4 线性无关

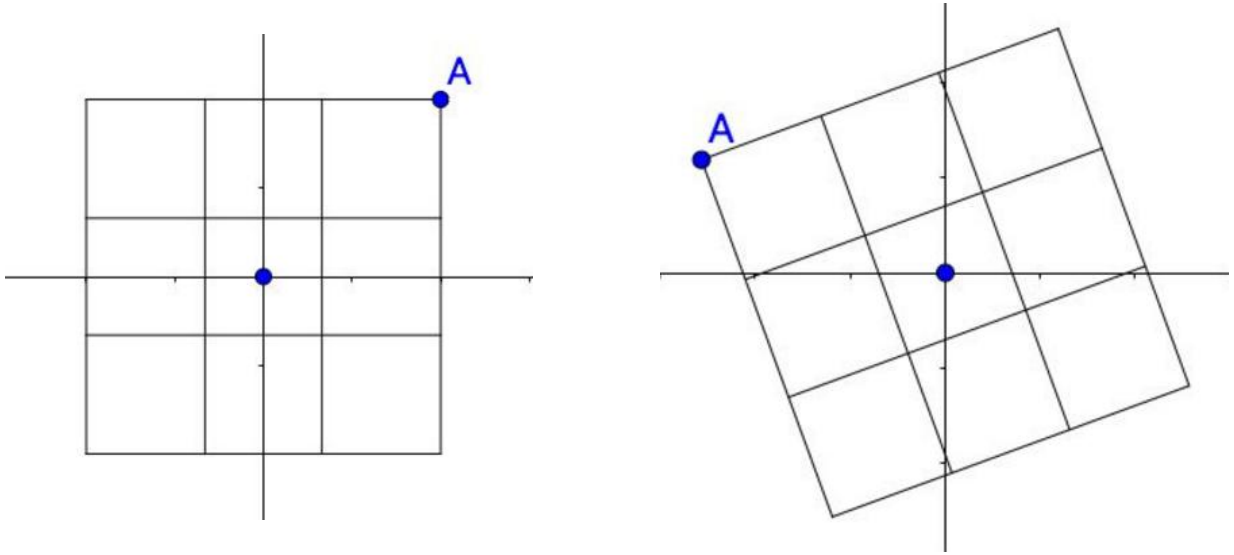
所以向量组: β_1 , β_2 , β_3 , β_4 的秩为3

矩阵的行秩=列秩

矩阵

秩该怎么理解

可以对二维图形进行旋转，比如用旋转矩阵：$\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$

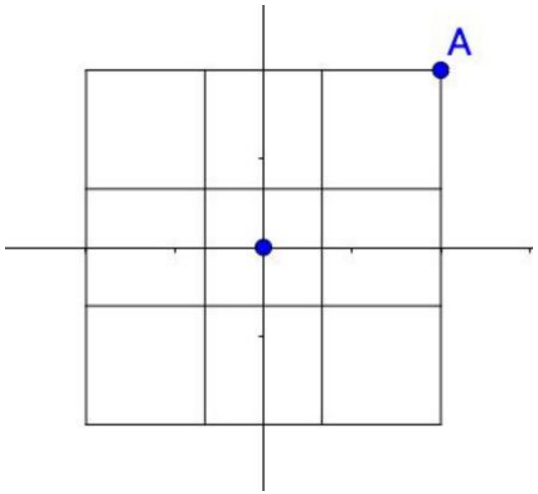


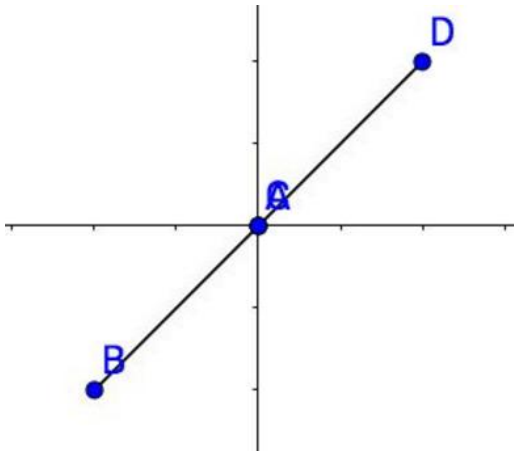
变换后依然是二维的，所以旋转矩阵的秩为2

矩阵

✓ 秩该怎么理解

如果通过这样的矩阵：$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$





变换后是一维的，所以矩阵的秩为1

矩阵

秩该怎么理解

矩阵中最大不相关向量的个数就是秩了。

比如咱们家中有很多张照片（N），但是一家只有三口（R），我们就把R当做矩阵的秩。



矩阵

向量的内积

设有n维向量： $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$

[x,y] = x1 y1 + x2 y2 + … + xn yn，此时我们就把[x,y]叫做向量的内积。

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=x^T y$$

对称性: $[x, y] = [y, x]$

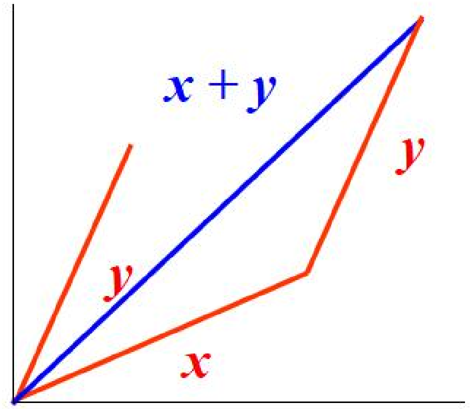
线性性质: $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$.

$[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$

矩阵

向量的长度

- n维向量x的长度: $\| x \| = \sqrt{[x,x]} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \geq 0$
- 当 $\| x \| = 1$ 称为单位向量。
- 齐次性: $\| \lambda x \| = |\lambda| \cdot \| x \|$
- 三角不等式: $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$



矩阵

向量的正交

两两正交的非零向量组成的向量组成为正交向量组。

若 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 是两两正交的非零向量，则 $a_1, a_2, \ldots, a_r$ 线性无关。

例： 已知3 维向量空间R^3中两个向量 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

正交，试求一个非零向量a_3，使a_1, a_2, a_3两两正交.

向量的正交

显然$a_1 \perp a_2$.

设$a_3 = (x_1, x_2, x_3)^T$，若$a_1 \perp a_3$， $a_2 \perp a_3$，则

$$[a_1, a_3] = a_1^T a_3 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$[a_2, a_3] = a_2^T a_3 = x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

矩阵

向量的正交

$$Ax=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -3 & 0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

得 $\begin{cases}x_1=-x_3\\ x_2=0\end{cases}$

从而有基础解系 $\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$，令 $a_3=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

矩阵

规范正交基

n 维向量$e_1, e_2, \dots, e_r$是向量空间$V \subset R^n$中的向量，

满足

- $e_1, e_2, \dots, e_r$是向量空间 V 中的一个基；
- $e_1, e_2, \dots, e_r$两两正交；
- $e_1, e_2, \dots, e_r$都是单位向量，

则称 $e_1, e_2, \dots, e_r$ 是V 的一个规范正交基.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ 是 R^4 的一个规范正交基