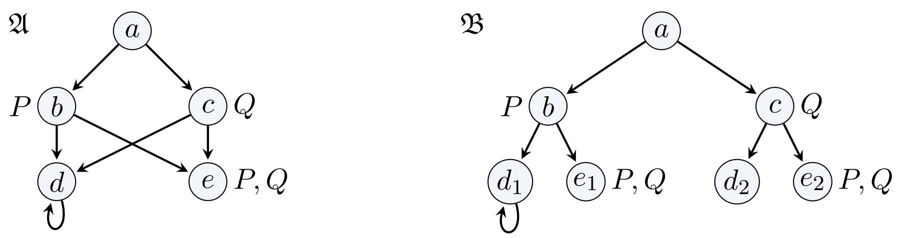
Prof. Dr. M. Grohe E. Fluck, L. Härtel, T. Novotny

Übungsblatt 11 mit Lösungen

Abgabetermin: Montag, der 22. Juli 2024 um 14:30

Hausaufgabe 4 (Modallogik) **4*+3* Punkte**

a) Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ die folgenden Kripkestrukturen



Geben Sie für die folgenden Spiele an, welcher Spieler eine Gewinnstrategie hat. Geben Sie diese Gewinnstrategie an.

(i) $\mathrm{BS}(\mathfrak{A}, c, \mathfrak{B}, c)$

(ii) $\mathrm{BS}(\mathfrak{A}, b, \mathfrak{B}, b)$

Folgern Sie daraus ob $\mathfrak{A}, a$ und $\mathfrak{B}, a$ bisimilar sind.

b) Sei $\sigma = \{P, Q, R\}$ und sei $\varphi \in \mathrm{ML}(\sigma)$ wie folgt:

$$\varphi = \Diamond R \rightarrow \Box(P \vee (\Diamond Q \wedge \Box R)).$$

Geben sie eine Formel $\psi \in L(\widetilde{\sigma})$ sodass für alle Kripkestrukturen $\mathfrak{A}$ und alle Welten $a \in A$ gilt:

$$\mathfrak{A}, a \models \varphi \Leftrightarrow \widetilde{\mathfrak{A}} \models \psi(a).$$

Lösung:

a) (i) Wir geben die Gewinnstrategie für (H). Erst zieht (H) das Element d in $\mathfrak{A}$, und (D) muss nach d_2 in $\mathfrak{B}$ ziehen; sonst gilt P in e_2 aber nicht in d. Dann zieht (H) wieder d in $\mathfrak{A}$, aber (D) kann nicht ziehen, da d_2 ein Endknoten ist.

(ii) Hier gewinnt (D), indem sie nach d zieht, wenn (H) nach d_1 gezogen hat und umgekehrt; und nach e zieht, wenn (H) nach e_1 gezogen hat und umgekehrt.

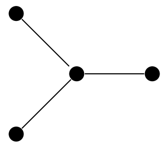
Wir folgern daraus, dass $\mathfrak{A}, a$ und $\mathfrak{B}, a$ nicht bisimilar sind. Der Herausforderer wählt als Nachfolger die Position $\mathfrak{B}, c$, hier muss Dublicatorin mit $\mathfrak{A}, c$ anworten um nicht sofort zu verlieren. Aus dieser Position hat Herausforderer eine Gewinnstrategie. Also hat Herausforderer eine Gewinnstrategie für das Spiel $\mathrm{BS}(\mathfrak{A}, a, \mathfrak{B}, a)$.

b) Wir verwenden die Konstruktion aus der Vorlesung:

$$\begin{aligned}\psi(x) :=& \exists x_1(E(x, x_1) \wedge R(x_1)) \rightarrow \forall x_2(E(x, x_2) \rightarrow (P(x_2) \vee \\ & (\exists x_3(E(x_2, x_3) \wedge Q(x_3)) \wedge \forall x_4(E(x_2, x_4) \rightarrow R(x_4))))))\end{aligned}$$

Hausaufgabe 5 (Endlichkeitssatz) 2*+2* Punkte

Ein Graph G ist *claw-free*, wenn für alle Knotenmengen $U \subseteq V(G)$ gilt $G[U] \ncong H$, wobei H der folgende Graph ist:



Also ist ein Graph G claw-free, wenn kein induzierter Subgraph von G isomorph zu H ist.

a) Sei G ein Graph mit abzählbarer Knotenmenge und $\sigma := \{E_{uv} \mid u, v \in V(G)\}$. Geben Sie eine Formelmenge $\Phi_G \in \mathrm{AL}(\sigma)$ an, sodass

$$\Phi_G \text{ ist erfüllbar } \Leftrightarrow G \text{ ist claw-free.}$$

Erläutern Sie ihre Idee.

b) Zeigen Sie die folgende Aussage mit Hilfe des Endlichkeitssatzes:

G ist claw-free genau dann wenn jeder endliche induzierte Subgraph von G claw-free ist.

Lösung:

a)

$$\Phi'_G := \{E_{uv} \mid uv \in E(G)\} \cup \{\neg E_{uv} \mid uv \notin E(G)\},$$

$$\Phi_G := \Phi'_G \cup \{\neg E_{u,x} \vee \neg E_{u,y} \vee \neg E_{u,x} \vee E_{x,y} \vee E_{x,z} \vee E_{y,z} \mid u \in V(G), \{x,y,z\} \in \binom{V(G) \setminus \{u\}}{3}\}.$$

Φ'_G sorgt dafür dass $[\![E_{uv}]\!]^{\mathfrak{A}} = 1$ genau dann wenn $uv \in E(G)$ und die dritte Formelmenge in Φ_G besagt, dass, für jede Auswahl eines "mittleren Knotens" und jede Auswahl von drei unterschiedlichen "äußeren Knoten", die entsprechende Abbildung von dem induzierten Subgraphen nach H kein Isomorphismus ist. Da wir alle möglichen Kombinationen von u und x, y, z in der Formelmenge testen ist also kein induzierter Subgraph aus 4 Knoten isomorph zu H und somit G claw-free.

b) **Claim:** Wenn G claw-free ist, dann sind auch alle endlichen induzierten Subgraphen claw-free.

Beweis: Sei G_0 ein endlicher induzierter Subgraph von G. Dann gilt $\Phi_{G_0} \subseteq \Phi_G$. Da wir annehmen, dass G claw-free ist, ist Φ_G erfüllbar. Da G_0 endlich ist, ist Φ_{G_0} endlich und somit nach dem Endlichkeitssatz erfüllbar. Also ist G_0 claw-free.

Claim: Wenn jeder endliche induzierte Subgraph claw-free ist, dann ist G claw-free.

Beweis: Sei $\Gamma \subseteq \Phi_G$ endlich. Dann ist die Menge $U_\Gamma := \{v \in V(G) \mid$ es existiert ein $u \in V(G),$ so dass $E_{uv} \in \mathrm{symb}(\Gamma)\}$ endlich. Wir definieren $G_\Gamma := G[U]$. Da G_Γ ein endlicher induzierter Subgraph von G ist, ist G_Γ nach unserer Annahme claw-free. Also gilt dass Φ_{G_Γ} erfüllbar ist. Da nach Konstruktion gilt dass $\Gamma \subseteq \Phi_{G_\Gamma}$, ist also auch Γ erfüllbar. Damit haben wir gezeigt dass alle endlichen Teilmengen von Φ_G erfüllbar sind und nach dem Endlichkeitssatz ist somit Φ_G erfüllbar. Also ist G claw-free.

Hausaufgabe 6 (Erststufige Definierbarkeit) **2*+2*+2* Punkte**

Zeigen oder widerlegen Sie dass die folgenden Formeln in der Logik erster Stufe existieren.

a) Eine Formel $\varphi_a \in \mathrm{L}(\{\dot{+}, \dot{0}\})$, sodass

$$\mathfrak{N}\restriction_{\{\dot{+},\dot{0}\}} \models \varphi_a(n) \Leftrightarrow n \text{ ist gerade.}$$

b) Eine Formel $\varphi_b \in \mathrm{L}(\{E\})$, sodass für jeden Graphen $\mathfrak{G}$ gilt:

$$\mathfrak{G} \models \varphi_b \Leftrightarrow G \text{ ist nicht claw-free.}$$

Die Definition von claw-free steht in Hausaufgabe 4 auf diesem Blatt.

c) Eine Formel $\varphi_c \in \mathrm{L}(\{E\})$, sodass

$$\mathfrak{G} \models \varphi_c \Leftrightarrow G \text{ enthält keinen gerichteten Kreis.}$$

Lösung:

a) Eine solche Formel gibt es.

$$\varphi_a(x) \coloneqq \exists y(y \dot{+} y \doteq x)$$

Die Idee ist eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist gerade genau dann wenn es ein $i \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $n = 2i = i + i$.

b) Eine solche Formel gibt es.

$$\varphi_b \coloneqq \exists x \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 (y_1 \dot{\neq} y_2 \wedge y_1 \dot{\neq} y_3 \wedge y_2 \dot{\neq} y_3 \wedge E(x, y_1) \wedge E(x, y_2) \wedge E(x, y_3) \wedge \\ \neg E(y_1, y_2) \wedge \neg E(y_1, y_3) \wedge \neg E(y_2, y_3))$$

Die Formel φ_b besagt dass es einen zentralen Knoten und drei unterschiedliche äußere Knoten gibt, sodass der induzierte Teilgraph genau eine claw ist. Da wir davon ausgehen dürfen dass der Graph ungerichtet ist, müssen wir nur jeweils eine Richtung jeder möglichen Kante beschreiben. Da der Graph außerdem keine self-loops enthält ist es nicht notwendig $x \dot{\neq} y_i$ zu erfordern. φ_b beschreibt demnach dass es eine claw gibt, also der Graph nicht claw-free ist.

c) Eine solche Formel kann es nicht geben.

Angenommen es gäbe eine solche Formel φ_c, dann besagt $\neg\varphi_c$ dass es einen gerichteten Kreis gibt. Wir definieren Formeln ψ_n, für alle $n > 0$, die besagen dass es keinen gerichteten Kreis der Länge maximal n gibt, wie folgt:

$$\psi_1 \coloneqq \neg \exists x E(x, x),$$
$$\psi_n \coloneqq \neg \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \left(E(x_n, x_1) \wedge \bigwedge_{0<i<n} E(x_i, x_{i+1}) \right).$$

Wir definieren die Formelmenge $\Phi \coloneqq \{\neg\varphi_c\} \cup \{\psi_n \mid n > 0\}$.

Claim: Jede endliche Teilmenge $\Gamma \subset \Phi$ ist erfüllbar.

Beweis: Wenn $\Gamma = \{\neg\varphi_c\}$, dann ist Γ erfüllbar durch den Graphen mit nur einem Knoten und einer self-loop. Sonst sei $\ell \coloneqq \max\{n \in \mathbb{N} \mid \psi_n \in \Gamma\}$. Dann ist Γ erfüllbar durch den folgenden Graphen: die Knoten sind die natürlichen Zahlen $\{0, \dots, \ell\}$ und die Kanten sind $(i, i+1)$, für alle $i < \ell$, und $(n, 0)$. Dieser graph enthält einen gerichteten Kreis der Länge $\ell + 1$, aber keinen kürzeren Kreis.

Aus dem Claim und dem Endlichkeitssatz folgt dass Φ erfüllbar ist. Sei also $\mathfrak{G}$, sodass $\mathfrak{G} \models \Phi$. Dann gilt auch $\mathfrak{G} \models \neg\varphi_c$, also enthält $\mathfrak{G}$ einen gerichteten Kreis. Dieser hat endliche Länge. Sei diese Länge k. Dann gilt aber $\mathfrak{G} \not\models \psi_k$, was ein Widerspruch ist zu $\mathfrak{G} \models \Phi$, da $\psi_k \in \Phi$. Also kann die Formel φ_c nicht existieren.

Hausaufgabe 7 (Ehrenfeucht Fraissé) **3* Punkte**

Sei σ eine endliche Symbolmenge. Zeigen Sie dass für jedes Paar $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ endlicher σ-Strukturen, mit $\mathfrak{A} \ncong \mathfrak{B}$, ein $r \in \mathbb{N}$ existiert, sodass Herausforderer eine Gewinnstrategie für das Spiel $\text{EF}_r(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ hat.

Lösung:

Die Aussage stimmt. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei endliche σ-Strukturen mit Universen A, B.

- Falls $|A| = |B|$, sei $r = |A|$. Dann gewinnt (H) das Spiel $\text{EF}_r(\mathfrak{A}, FB)$, indem er alle Elemente der Struktur $\mathfrak{A}$ auswählt. Da es keinen Isomorphismus zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gibt, kann es auch keinen lokalen Isomorphismus auf allen Elementen geben.
- Sonst, sei $r = \min\{|A|, |B|\} + 1$. Dann gewinnt (H) das Spiel $\text{EF}_r(\mathfrak{A}, FB)$, indem er alle Elemente der kleineren Struktur auswählt, und dann ein neues Element in der größeren Struktur.