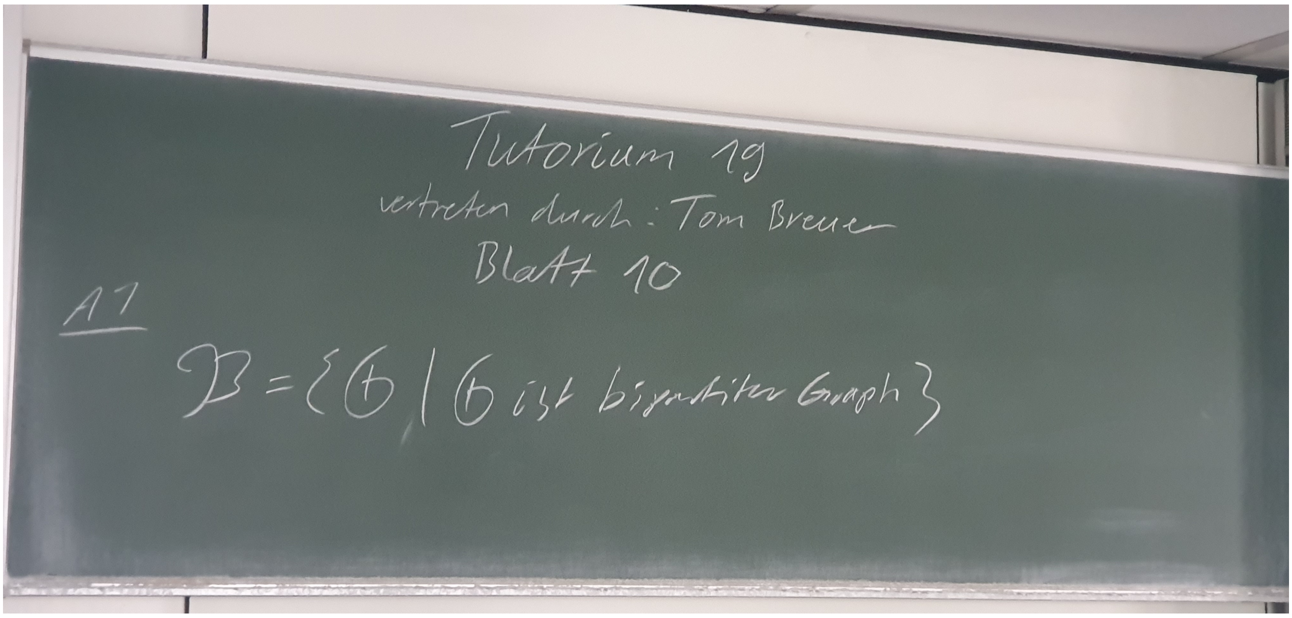
MaLo 10. Übungsblatt

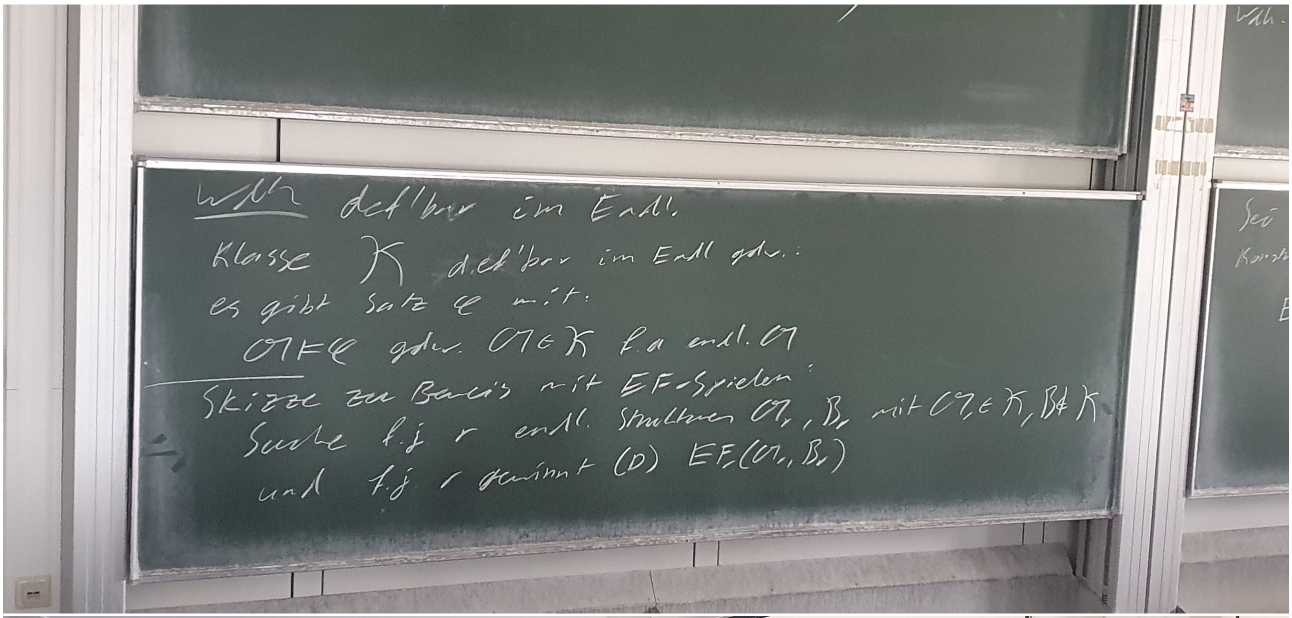
Vertretung: Tom Breuer
Tutorium 19

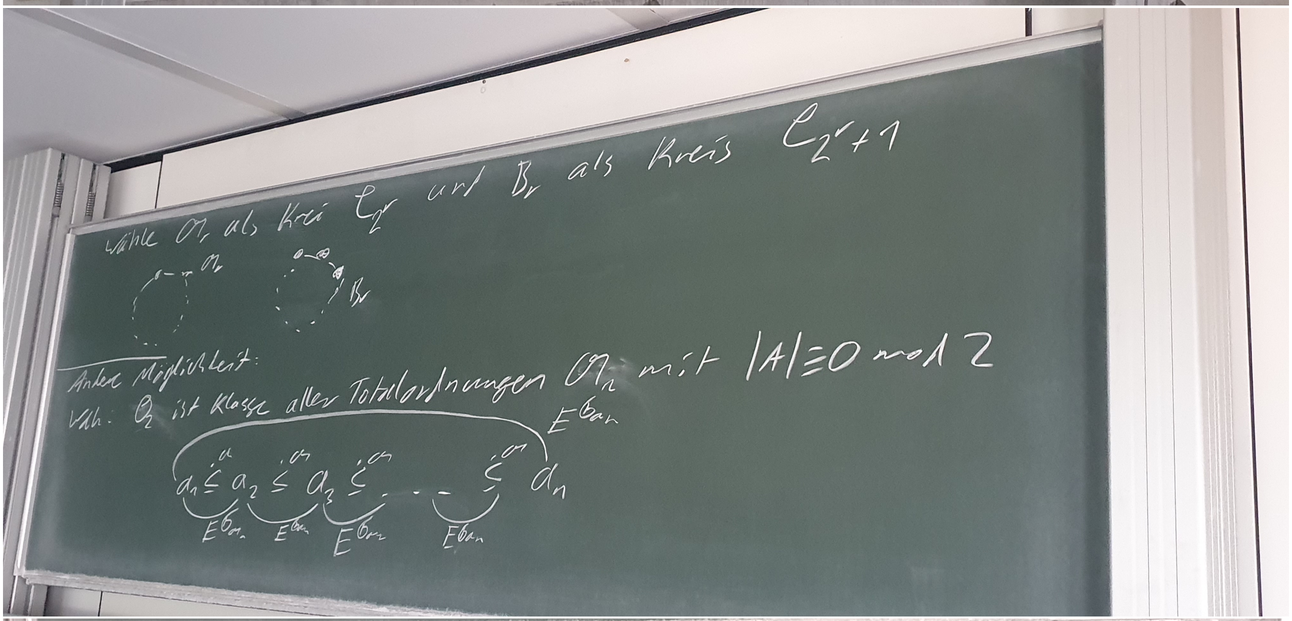
05. Juli 2024

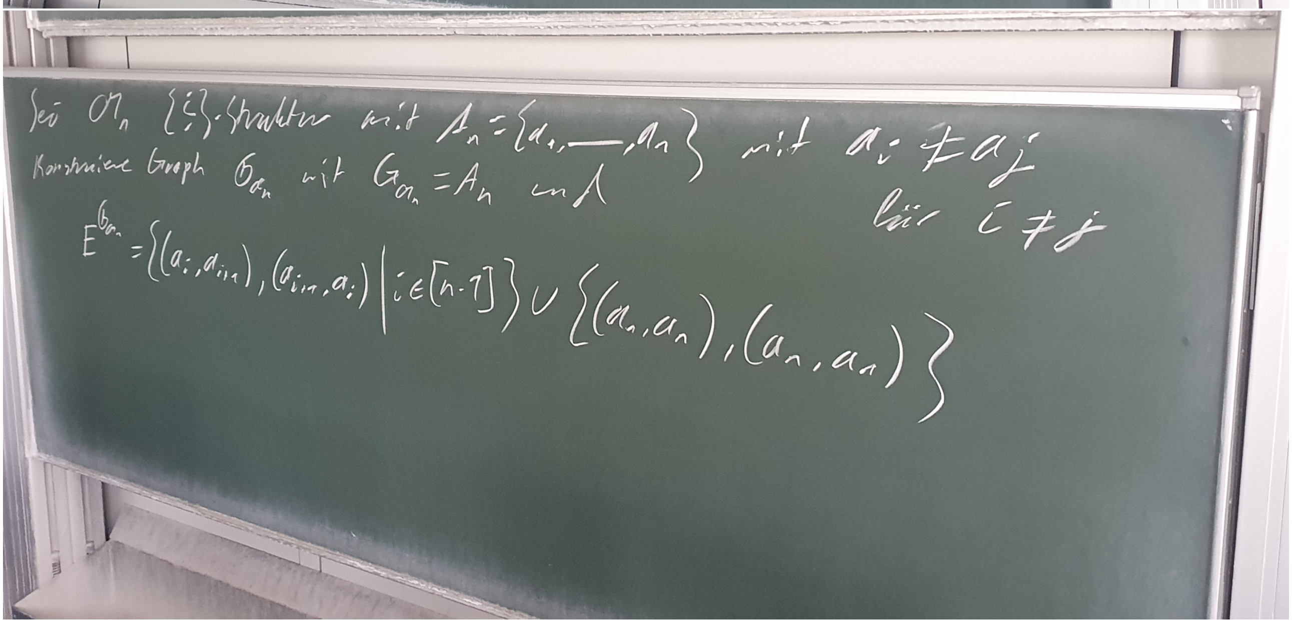
Im Folgenden finden sich Fotos der Tafelanschriften aus dem Tutorium. Diese sind als Notizen zu verstehen. Auch wenn ich diese überprüfe und nach bestem Wissen erstelle, so kann ich weder für Vollständigkeit noch für 100%ige Korrektheit garantieren. Insbesondere enthalten die Notizen keine mündlichen Erklärungen und Begründungen, welche in den Hausaufgaben teilweise (dann schriftlich) erforderlich sind.
Das bloße Sichten ersetzt definitiv nicht den Besuch des Tutoriums.

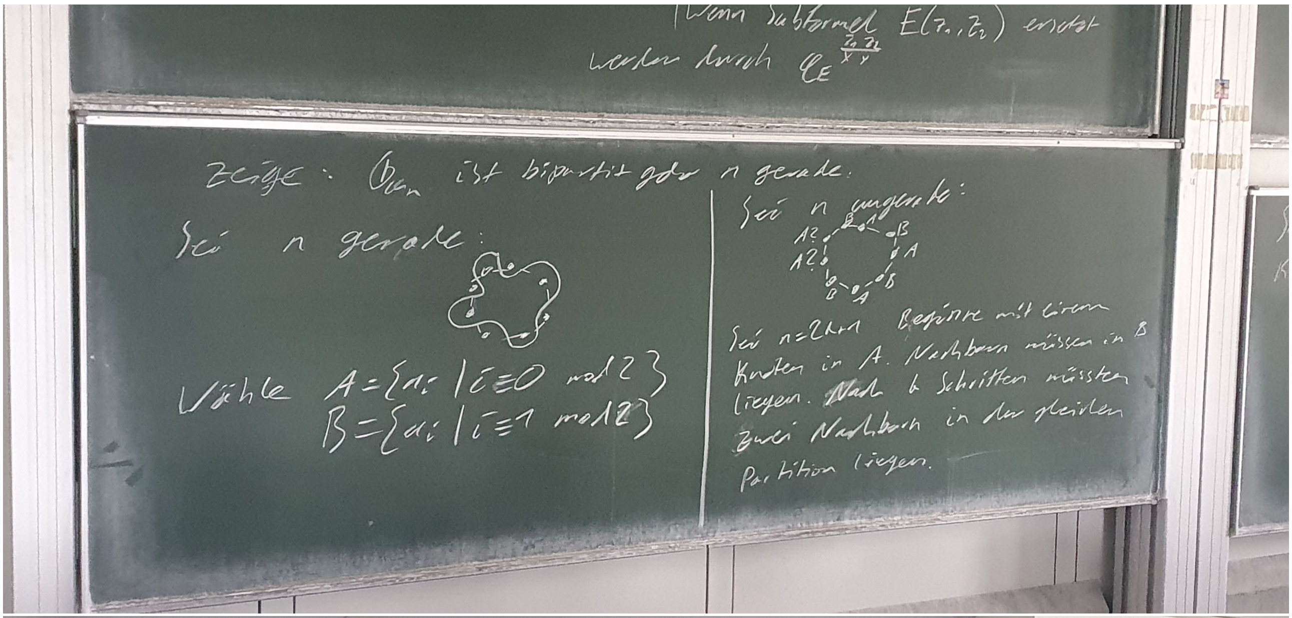
Viele Grüße
Tom Breuer

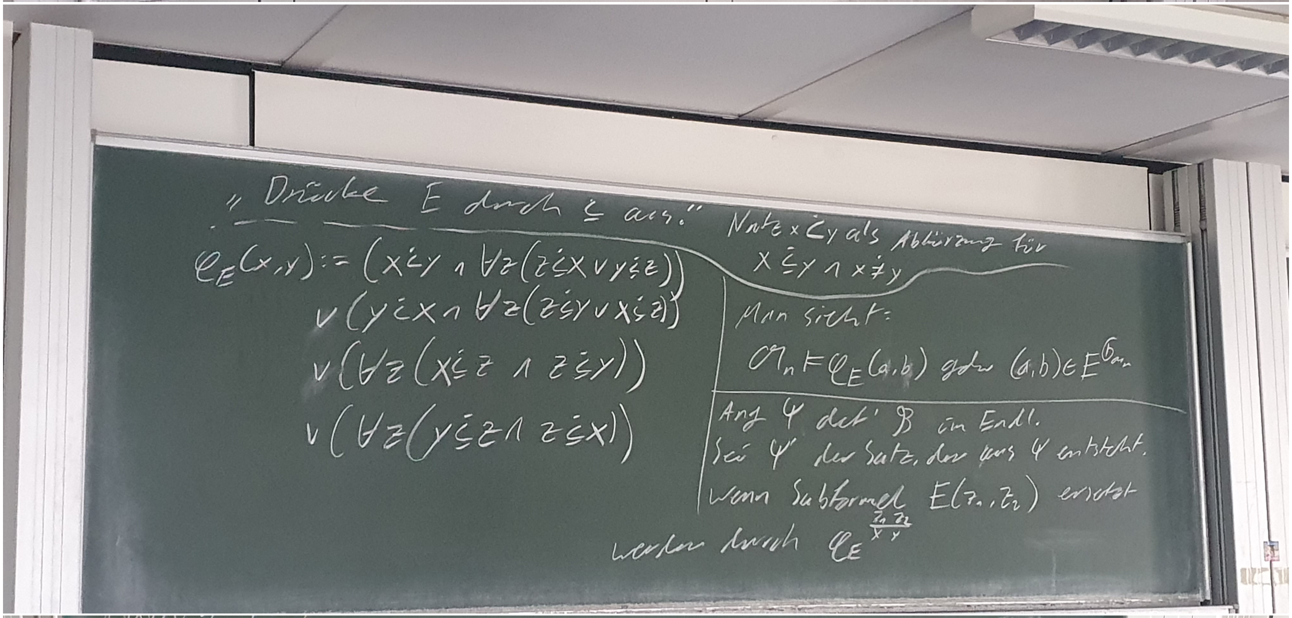


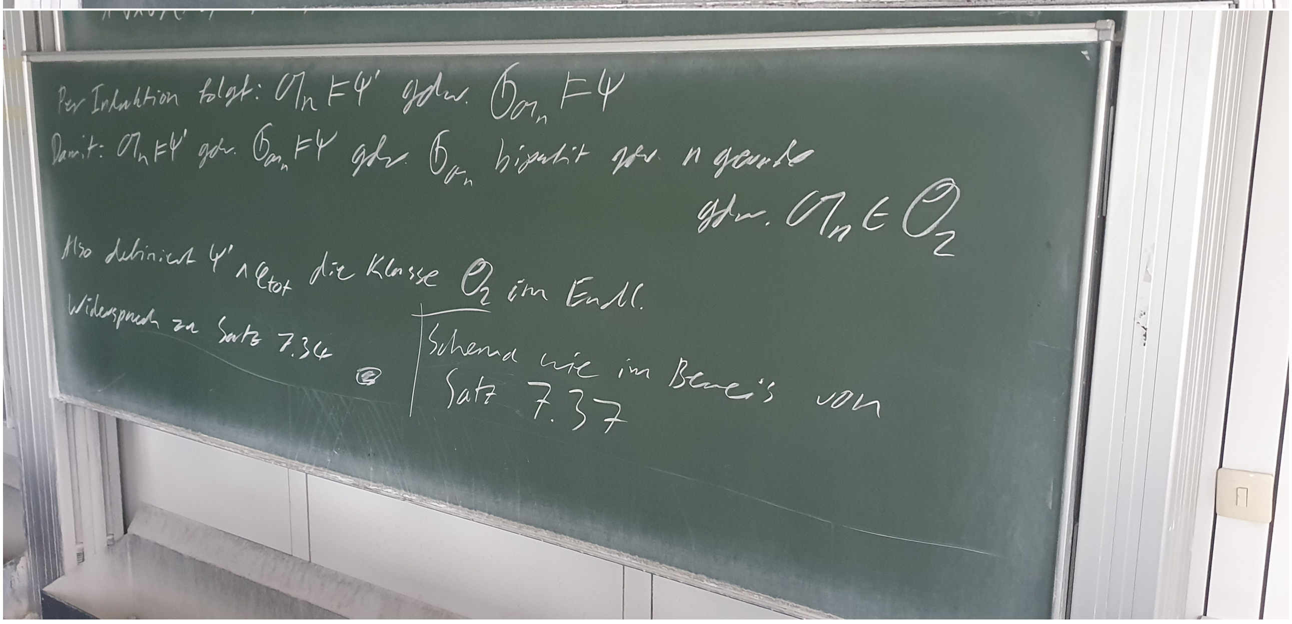

Wdh: def'bar im Endl.
Klasse K def'bar im Endl gdw.:
es gibt Satz φ mit:
$\mathfrak{A} \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{A} \in K$ f.a. endl. $\mathfrak{A}$
Skizze zu Beweis mit EF-Spielen:
Suche f.j. r endl. Strukturen $\mathfrak{A}_r$, $\mathfrak{B}_r$ mit $\mathfrak{A}_r \in K$, $\mathfrak{B}_r \notin K$
und f.j. r gewinnt (D) $EF_r(\mathfrak{A}_r, \mathfrak{B}_r)$

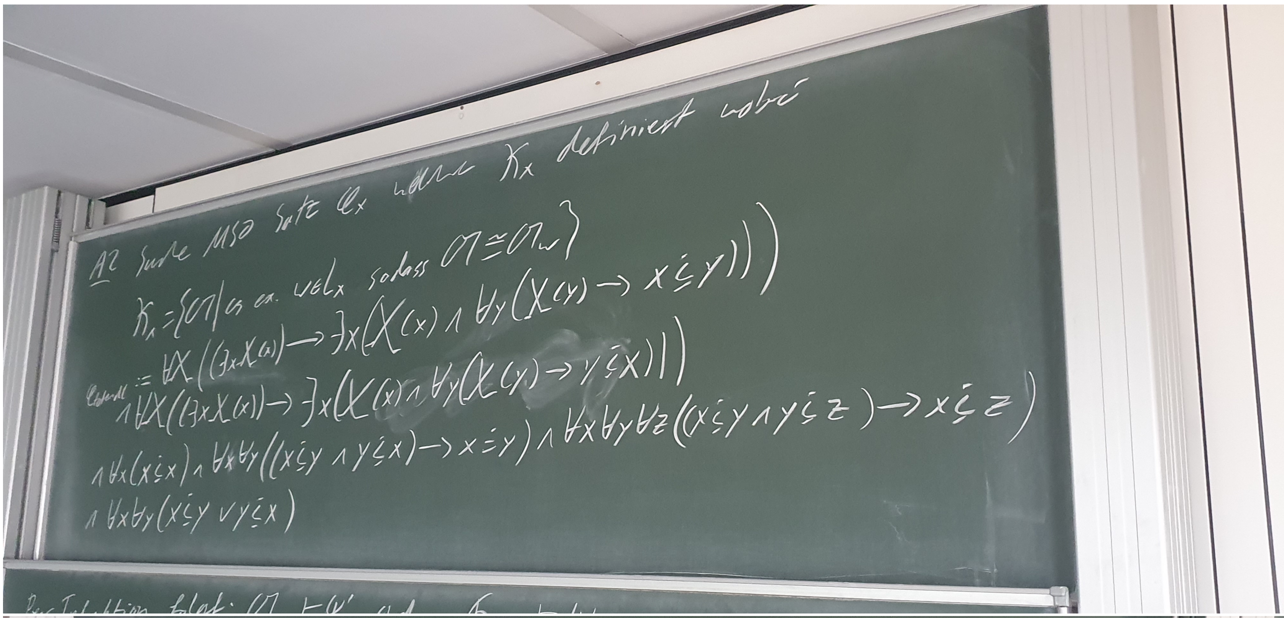

Wähle $\mathfrak{A}_r$ als Kreis C_{2^r} und $\mathfrak{B}_r$ als Kreis C_{2^r+1}
$\mathfrak{A}_r$
$\mathfrak{B}_r$
Andere Möglichkeit:
Wdh.: Q_2 ist Klasse aller Totalordnungen $\mathfrak{A}_n$ mit $|A| \equiv 0 \bmod 2$
$E^{G_{\mathfrak{A}_n}}$
$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$
$E^{G_{\mathfrak{A}_n}}$ $E^{G_{\mathfrak{A}_n}}$ $E^{G_{\mathfrak{A}_n}}$ $E^{G_{\mathfrak{A}_n}}$

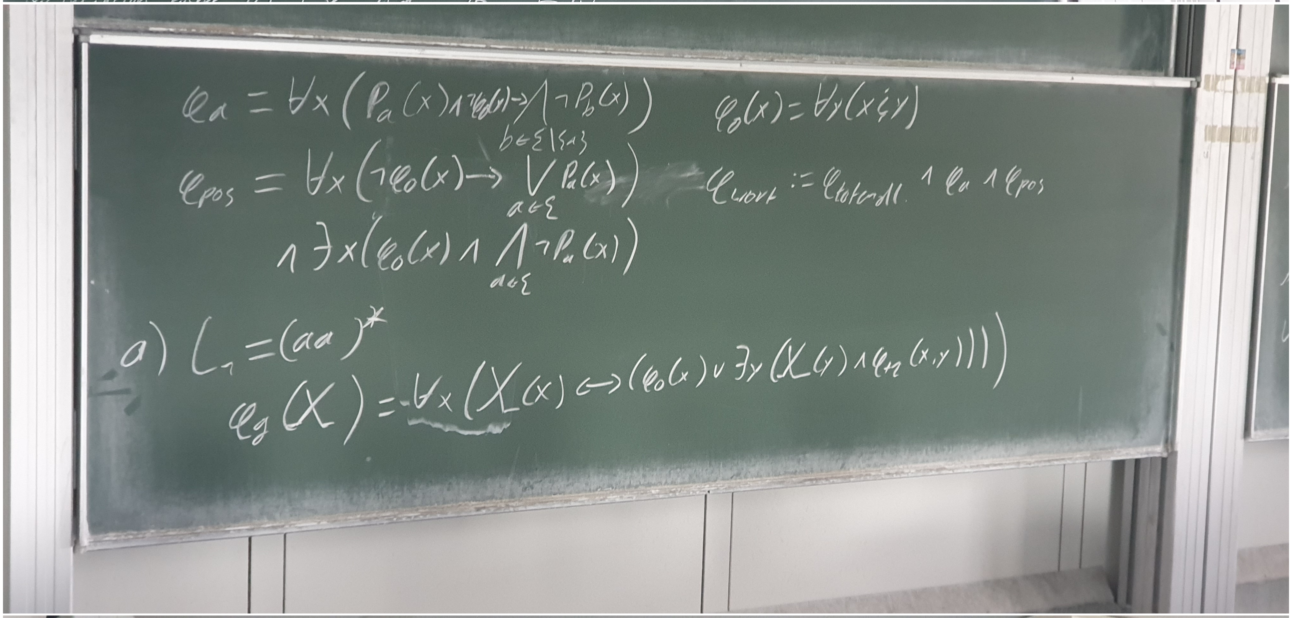

Sei $\mathfrak{A}_n$ $\{\leq\}$-Struktur mit $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ mit $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$
Konstruiere Graph $G_{\mathfrak{A}_n}$ mit $G_{\mathfrak{A}_n} = A_n$ und
$E^{G_{\mathfrak{A}_n}} = \{(a_i, a_{i+1}), (a_{i+1}, a_i) \mid i \in [n-1]\} \cup \{(a_1, a_n), (a_n, a_1)\}$

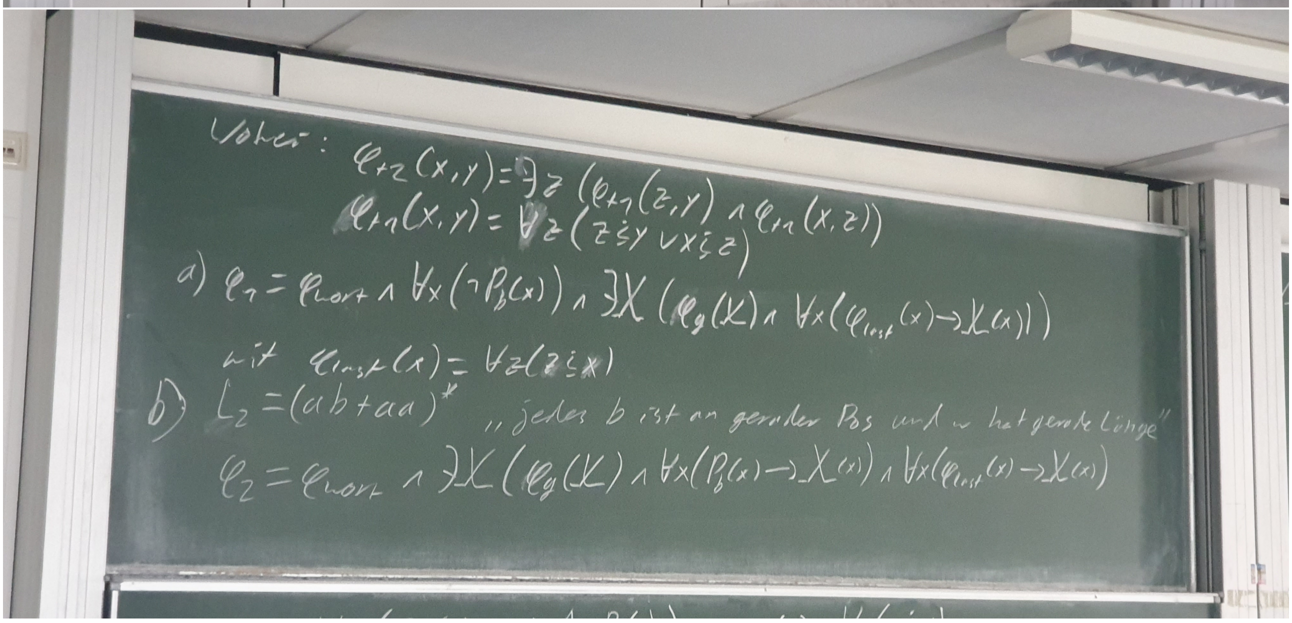

Wenn Subformel $E(z_1,z_2)$ ersetzt werden durch $\varphi_E\frac{z_1 z_2}{x\ y}$
Zeige: $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}_n}$ ist bipartit gdw n gerade.
Sei n gerade:
Wähle $A = \{a_i \mid i \equiv 0 \mod 2\}$
$B = \{a_i \mid i \equiv 1 \mod 2\}$
Sei n ungerade:
A? A? A B A B B A
Sei $n=2k+1$. Beginne mit einem Knoten in A. Nachbarn müssen in B liegen. Nach k Schritten müssten zwei Nachbarn in der gleichen Partition liegen.

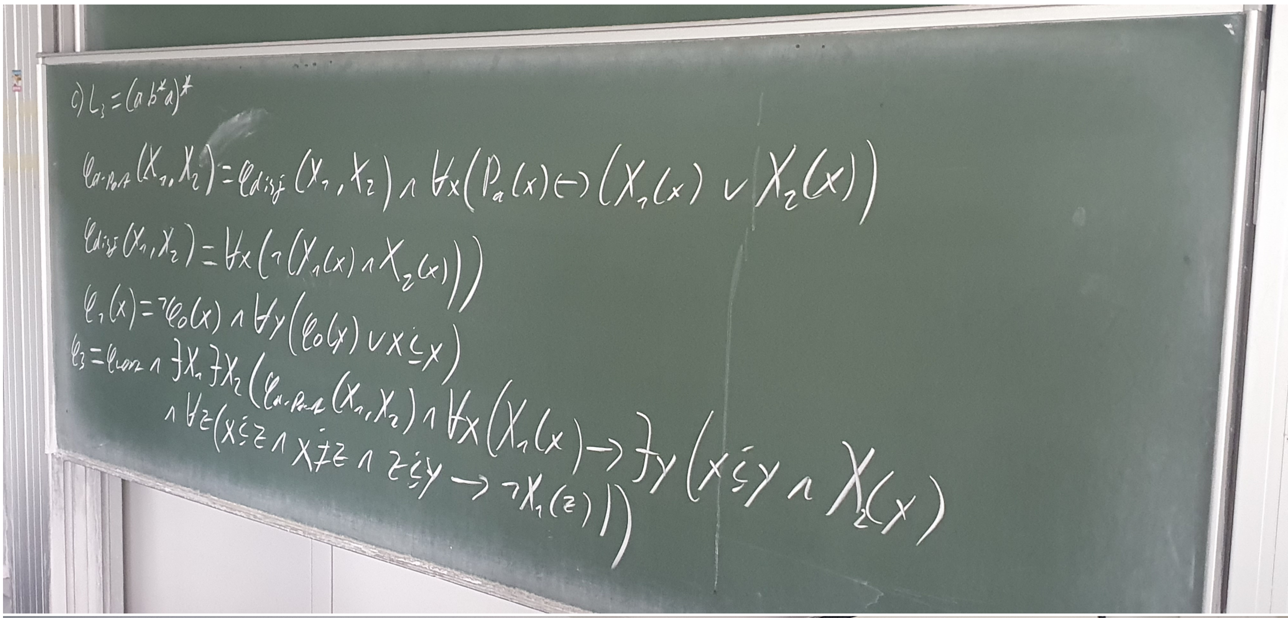

„Drücke E durch ≤ aus."
Notiere $x < y$ als Abkürzung für $x \leq y \wedge x \neq y$
$\varphi_E(x,y) := (x<y \wedge \forall z(z \leq x \vee y \leq z))$
$\vee (y<x \wedge \forall z(z \leq y \vee x \leq z))$
$\vee (\forall z(x \leq z \wedge z \leq y))$
$\vee (\forall z(y \leq z \wedge z \leq x))$
Man sieht:
$\mathfrak{A}_n \models \varphi_E(a,b)$ gdw $(a,b) \in E^{\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}_n}}$
Ang. ψ def. $\mathfrak{B}$ im Endl.
Sei ψ' der Satz, der aus ψ entsteht,
wenn Subformel $E(z_1,z_2)$ ersetzt werden durch $\varphi_E\frac{z_1 z_2}{x\ y}$

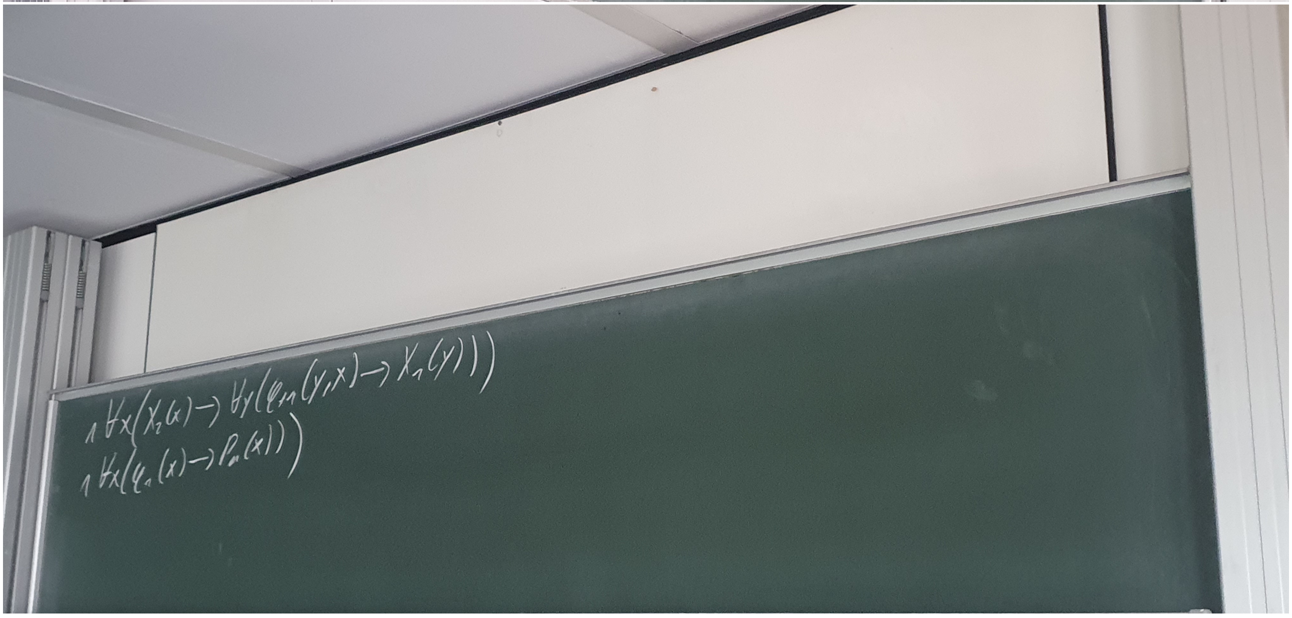

Per Induktion folgt: $\mathfrak{A}_n \models \psi'$ gdw. $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}_n} \models \psi$
Damit: $\mathfrak{A}_n \models \psi'$ gdw. $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}_n} \models \psi$ gdw. $\mathfrak{B}_{\mathfrak{A}_n}$ bipartit gdw. n gerade
gdw. $\mathfrak{A}_n \in \mathcal{O}_2$
Also definiert $\psi' \wedge \varphi_{tot}$ die Klasse $\mathcal{O}_2$ im Endl.
Widerspruch zu Satz 7.34
Schema wie im Beweis von Satz 7.37


A2 Suche MSO Satz φ_X welche K_X definiert wobei
K_X = {𝔄 | es ex. w∈L_X sodass 𝔄 ≅ 𝔄_w}
φ_endl := ∀X((∃x X(x)) → ∃x(X(x) ∧ ∀y(X(y) → x ≤ y)))
∧ ∀X((∃x X(x)) → ∃x(X(x) ∧ ∀y(X(y) → y ≤ x)))
∧ ∀x(x ≤ x) ∧ ∀x∀y((x ≤ y ∧ y ≤ x) → x = y) ∧ ∀x∀y∀z((x ≤ y ∧ y ≤ z) → x ≤ z)
∧ ∀x∀y(x ≤ y ∨ y ≤ x)


φ_a = ∀x(P_a(x) ∧ ¬φ_0(x) → ⋀_{b∈Σ\{a}} ¬P_b(x))
φ_0(x) = ∀y(x ≤ y)
φ_pos = ∀x(¬φ_0(x) → ⋁_{a∈Σ} P_a(x))
φ_wort := φ_totendl. ∧ φ_a ∧ φ_pos
∧ ∃x(φ_0(x) ∧ ⋀_{a∈Σ} ¬P_a(x))
a) L_1 = (aa)*
φ_g(X) = ∀x(X(x) ↔ (φ_0(x) ∨ ∃y(X(y) ∧ φ_+2(x,y))))


wobei: φ_+2(x,y) = ∃z(φ_+1(z,y) ∧ φ_+1(x,z))
φ_+1(x,y) = ∀z(z ≤ y ∨ x ≤ z)
a) φ_1 = φ_wort ∧ ∀x(¬P_b(x)) ∧ ∃X(φ_g(X) ∧ ∀x(φ_last(x) → X(x)))
mit φ_last(x) = ∀z(z ≤ x)
b) L_2 = (ab+aa)*
„jedes b ist an geraden Pos und w hat gerade Länge"
φ_2 = φ_wort ∧ ∃X(φ_g(X) ∧ ∀x(P_b(x) → X(x)) ∧ ∀x(φ_last(x) → X(x))


c) $L_3 = (a b^* a)^*$
$\varphi_{a\text{-Part}}(X_1, X_2) = \varphi_{disj}(X_1, X_2) \wedge \forall x(P_a(x) \leftrightarrow (X_1(x) \vee X_2(x)))$
$\varphi_{disj}(X_1, X_2) = \forall x(\neg(X_1(x) \wedge X_2(x)))$
$\varphi_1(x) = \neg\varphi_0(x) \wedge \forall y(\varphi_0(y) \vee x \leq x)$
$\varphi_3 = \varphi_{Lan} \wedge \exists X_1 \exists X_2 (\varphi_{a\text{-Part}}(X_1, X_2) \wedge \forall x(X_1(x) \rightarrow \exists y(x \leq y \wedge X_2(x)$
$\wedge \forall z(x \leq z \wedge x \neq z \wedge z \leq y \rightarrow \neg X_1(z)))$


$\wedge \forall x(X_2(x) \rightarrow \forall y(\varphi_{+1}(y, x) \rightarrow X_1(y)))$
$\wedge \forall x(\varphi_1(x) \rightarrow P_a(x)))$