wir benutzen: ex ein IS I' mit $|I'| \geq k \Leftrightarrow$ ex ein IS I mit $|I| = k$

Tutoriumsaufgabe 1 (Independent Set)

> **INDEPENDENT SET**
>
> **Eingabe:** Graph $G = (V, E)$ mit Knoten $V = \{0, \dots n-1\}$, $k \in \mathbb{N}$
>
> **Problem:** Gibt es eine Teilmenge $U \subseteq V$, mit $|U| \geq k$, sodass für alle $u, v \in U$ gilt dass $uv \notin E$.
> (i) (ii)

Konstruieren Sie zu einem beliebigen aber festen Graphen G und Konstante $k \in \mathbb{N}$ eine Formel φ_I, deren Modelle gereade den korrekten Lösungen von Independent Set entspricht. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Definieren Sie eine geeignete Symbolmenge und deren intendierte Semantik.

b) Nennen Sie geeignete Bedingungen und formalisieren Sie diese in der Aussagenlogik. Erklären Sie ihre Formeln kurz und begründen Sie deren Korrektheit in 1-2 Sätzen.

a) fa Knoten $i \in \{0, \dots, n-1\}$ Symbol P_i mit Semantik "Knoten i ist Teil des Independent Set"

b) (ii) diese Elemente sind nicht verbunden

fa $ij \in E$ $\varphi_{ij} := \neg(P_i \wedge P_j)$

(i) ~~es~~ ex $\geq k$ Elemente (k elementige Teilmeng)

$$\bigvee_{J \in \binom{V}{k}} \bigwedge_{j \in J} P_j$$

$$\varphi_I := \left(\bigwedge_{ij \in E} \neg P_i \vee \neg P_j\right) \wedge \left(\underbrace{\bigvee_{J \in \binom{V}{k}} \bigwedge_{j \in J}}_{O(n^k)} P_j\right)$$

KNF, DNF, NNF

gesucht φ_I' sodass $\mathcal{A} \models \varphi_I'$ dann können wir $I_{\mathcal{A}}$ berechnen und IS I können ~~$\mathcal{A}$~~ berech

$|\varphi_I'| \in poly(n,k)$ in poly time constr

a)
f.a. $v \in V, i \in [k]$ P_{vi} mit Semantik

"Knoten v ist das i-te Element von IS"

(i) ~~es~~ ex $\geq k$ Elemente (k elementige Teilmenge)

(i.1) jedem Element $i \in [k]$ ist ein Knoten zugeordnet

$$\varphi_{i\,min} := \bigvee_{v \in V} P_{vi} \qquad O(k \cdot n)$$

(i.2) jedem Element $i \in [k]$ ist höchstens ein Knoten zug

$$\varphi_{i\,max} := \bigwedge_{\substack{u,v \in V \\ u \neq v}} (\neg P_{ui} \vee \neg P_{vi}) \qquad O(k\, n^2)$$

(i.3) kein Knoten $v \in V$ wird mehreren Elementen $i \in [k]$ zugeordnet

$$\varphi_v := \neg \left(\bigvee_{\substack{i,j \in [k] \\ i \neq j}} (P_{vi} \wedge P_{vj}) \right) \equiv \bigwedge_{\substack{i,j\,[k] \\ i \neq j}} (\neg P_{vi} \vee \neg P_{vj}) \qquad O(n\, k^2)$$

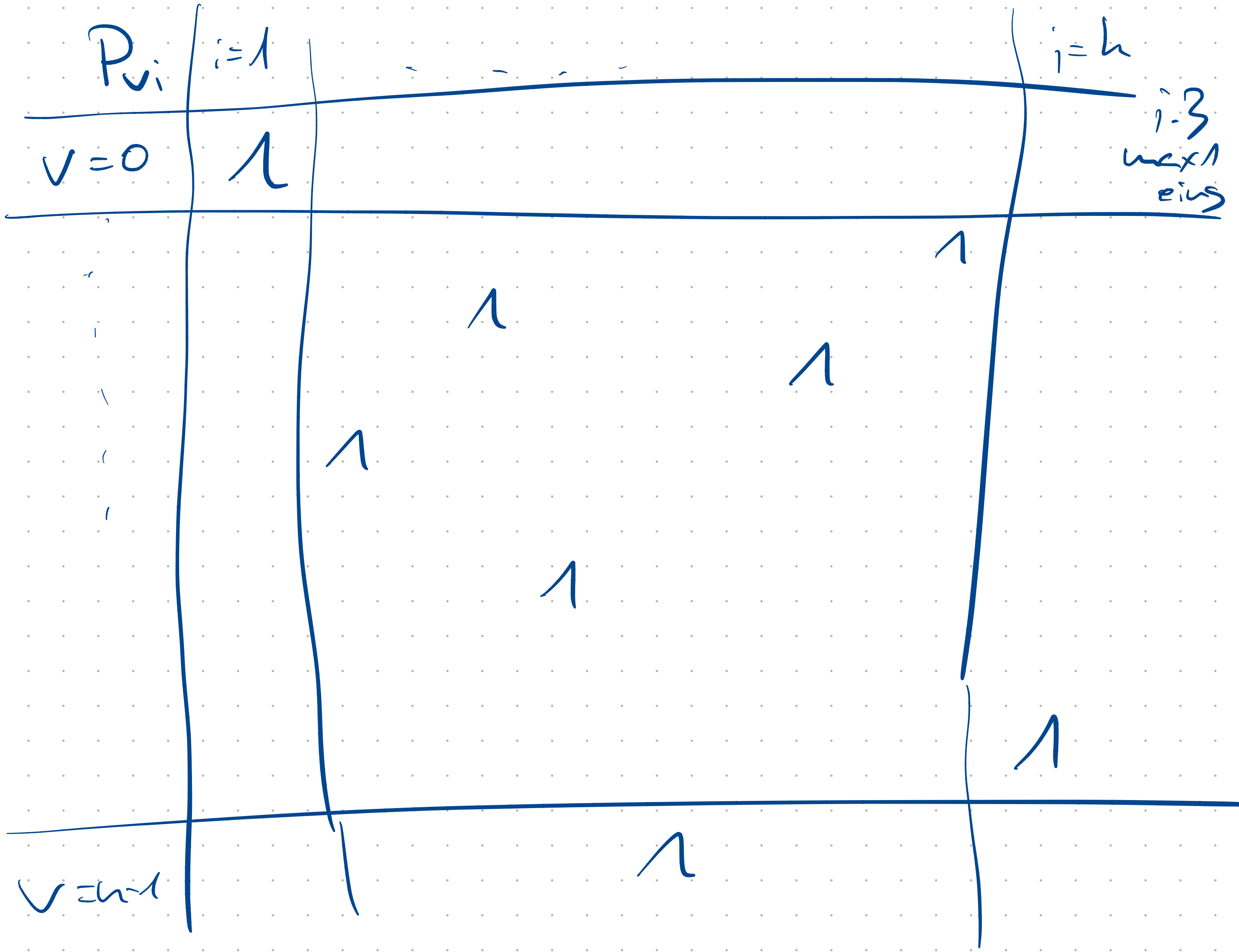
(ii) diese Elemente sind nicht verbunden

f.a. $uv \in E$

$$\varphi_{uv} := \neg \left(\bigvee_{i \in [k]} P_{ui} \wedge \bigvee_{j \in [k]} P_{vj} \right) \equiv \bigwedge_{i,j\,[k]} \neg P_{ui} \vee \neg P_{vj}$$

$$O(m\, k^2)$$

Gesamtlänge $O(n^2 k^2)$



i.1
min eine
1

i.2
max eine 1

⇓

genau eine 1

Tutoriumsaufgabe 2 (Funktional vollständige Junktorenmengen)

Die 3-steilligen Junktoren minority: $\{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ und select: $\{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ definieren wir wie folgt:

$$\text{minority}(x_1, x_2, x_3) = 1 \Leftrightarrow |\{i \in [3] \mid x_i = 1\}| < 2,$$

$$\text{select}(x_1, x_2, x_3) := \begin{cases} x_2 & \text{falls } x_1 = 0 \\ x_3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen oder wiederlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Die Junktorenmenge $\{\text{minority}, \text{select}\}$ ist funktional vollständig.

b) Die Junktorenmenge $\{\vee, \wedge, \top, \bot\}$ ist funktional vollständig.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Verkettung monotoner boolscher Funktionen wieder monoton ist. Eine boolsche Funktion $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ ist *monoton*, wenn für alle Tupel $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \{0,1\}^n$ aus $x_i \leq y_i$, für alle $i \in [n]$, folgt dass $f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(y_1, \ldots, y_n)$.

a) $\neg\varphi \equiv \text{minority}(\varphi, \varphi, \varphi)$

φ	$\neg\varphi$	$\text{minority}(\varphi\varphi\varphi)$
1	0	0
0	1	1

$\varphi \vee \psi \equiv \text{select}(\varphi, \psi, \varphi)$

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	$\text{select}(\varphi, \psi, \varphi)$
0	0	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

$\varphi \wedge \psi \equiv \text{select}(\varphi, \varphi, \psi)$

$\top \equiv \text{select}(\varphi, \text{minority}(\varphi, \varphi, \varphi), \varphi)$

b) Falsch

da: $\vee, \wedge, \top, \bot$ sind monoton aus claim folgt nach Hinweis dass alle Funktion die wir wir darstelle könne monoton sind. Aber $F_\neg$ ist nicht monoton

weil $F_\neg(1)=0$, $F_\neg(0)=1$

$F_\to(0,0) = 1$ aber $F_\to(1,0) = 0$

<u>Beweis claim:</u> $\top, \bot$ sind constant also monoton

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \vee \psi$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1