Tutoriumsaufgabe 1 (Endlichkeit von Graphen)

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es gibt eine Formelmenge $\Phi_1 \subseteq L(\{E\})$, die besagt dass ein Graph endlich ist.

b) Es gibt eine Formelmenge $\Phi_2 \subseteq L(\{E\})$, die besagt dass ein Graph unendlich ist.

b)

φ_n Semantik es ex ~~höchstens~~ mindestens n unterschiedliche Elemente

$\Phi_2 := \{ \varphi_n \mid n \in \mathbb{N} \}$

$\varphi_1 := \exists x_1 (x_1 \doteq x_1)$

$\varphi_n := \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \not\doteq x_j \right)$

Claim: Wenn $\mathfrak{A} \models \Phi$ dann hat A unendlich viele Elemente.

Beweis Ang A ist endlich. Also $k := |A|$.

Dann $\mathfrak{A} \not\models \varphi_{k+1}$ ↯

$\varphi_{Graph} := \forall x \neg E(x,x) \wedge \forall x \forall y (E(x,y) \rightarrow E(y,x))$

$\Phi' := \Phi_2 \cup \{\varphi_{Graph}\}$

a) Ang $\Phi_{endlich}$ ex, die besagt Graph ist endlich.

Dann $\Phi := \Phi_{\substack{unendlich \\ unendlich}} \cup \Phi_{\substack{endlich \\ endlich}} \cup \{\varphi_{Graph}\}$.

Wir nehmen an $\Phi_{endlich} \cup \{\varphi_{graph}\}$ wird (genau) von jeden endl Graphen erfüllt. Also wenn $\mathfrak{G}$ mit G endlich dann für endlichen $\Gamma \subseteq \Phi_{endl} \cup \{\varphi_{Graph}\}$ gilt $\mathfrak{G} \models \Gamma$.

Sei: $\Gamma \subseteq \Phi_{unend} \cup \Phi_{end} \cup \{\varphi_{Graph}\}$ endlich.

Wir wissen wenn $\Gamma \cap \Phi_{unend} = \emptyset$ dann ist Γ erfüllbar.

Also sei $\Gamma \cap \Phi_{unend} \neq \emptyset$ dann sei
$\ell(\Gamma) := \max\{n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n \in \Gamma\}$
Pfad der Länge n $\mathfrak{P}_n$ aus VL

Dann gilt $\mathfrak{P}_{\ell(\Gamma)} \models \Gamma$, weil
aus $\mathfrak{P}_n$ endlich folgt $\mathfrak{P}_{\ell(\Gamma)} \models \Gamma \cap (\Phi_{end} \cup \{\varphi_{Graph}\})$
und außerdem $\mathfrak{P}_{\ell(\Gamma)} \models \Gamma \cap \Phi_{unend} = \Gamma \cap \{\varphi_n / n \leq \ell(\Gamma)\}$

Also sind alle endl

$$\Gamma \subseteq \underline{\overline{\Phi}_{unendl}} \cup \overline{\Phi}_{endl} \cup \{\varphi_{Graph}\}$$

erfüllbar. Nach Endlichkeitssatz gilt

$$\overline{\Phi}_{unendl} \cup \overline{\Phi}_{endl} \cup \{\varphi_{Graph}\} \text{ erfüllbar.}$$

Sei $\mathfrak{A} \models \Phi_{unend} \cup \Phi_{endl} \cup \{\varphi_{Graph}\}$

Da $\mathfrak{A} \models \varphi_{Graph}$ ist $\mathfrak{A}$ ein Graph

Da $\mathfrak{A} \models \Phi_{endl}$ ex $k \in \mathbb{N}$ sd $k = |A|$

Dann gilt aber $\mathfrak{A} \not\models \varphi_{k+1}$.

Dies ist ein Widerspruch also kann es $\overline{\Phi}_{endlich}$ nicht geben.

Tutoriumsaufgabe 2 (Wortstruktur)

Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeigen oder widerlegen Sie, dass es eine Formel $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma_\Sigma)$ gibt, die besagt, dass eine Struktur ~~isomorph zu einer~~ ist eine Wortstruktur ist.

↖ geht nicht wegen Isomorphielemma
(es gibt σ_Σ-Strukturen die isomorph sind zu einer Wortstruk aber keine Wortstruk sind)

Semantik:

- lineare (totale) Ordnung: konex, reflexiv, antisym, transitiv
- jede Position kommt in genau einem $P_a, P_b, \dots$ vor (außer die kleinste Position)

$$\varphi_{\text{genau-einmal}} = \forall x \left(\varphi_{min}(x) \to \neg(P_a(x) \vee P_b(x) \vee \dots) \wedge \neg\varphi_{min}(x) \to (P_a(x) \vee P_b(x) \dots \right)$$

$$\bigwedge_{a \in \Sigma} P_a(x) \to \neg\Big(\bigwedge_{\substack{b \in \Sigma \\ b \neq a}} P_b(x)\Big)\Big)$$

- die kleinste Position $\varphi_{min}(x) = \forall y \; x \leq y$
- es gibt größte Position $\varphi_{max} = \exists x \forall y \; y \leq x$

$[0,1] \subset \mathbb{R}$ $\quad \{[0,1], \leq^{\mathfrak{A}}, P_a^{\mathfrak{A}}, P_b^{\mathfrak{A}}\}$

- $\leq$ ist nicht dicht: für je 2 unterschiedl Elemente ex ein Element dazwischen

$\mathbb{N} \cup \{\omega\}$ $\quad 0 \leq 1 \leq 2 \leq \dots \leq \omega$

egal was wir machen, es bleibt eine Lücke

Es kann keine solche Formel geben, wegen Endlichkeit.

Ang φ existiert

$\overline{\Phi} := \Phi_{unendl} \cup \{\varphi\}$

Sei $\Gamma \subseteq \overline{\Phi}$ endlich

case 1 : $\Gamma = \{\varphi\}$ ist erfüllbar

case 2 : sei $\ell(\Gamma) := \max\{n \mid \varphi_n \in \Gamma\}$

sei $w \in \Sigma^*$ mit $|w| = \ell(\Gamma)$

dann $\mathfrak{A}_w \models \varphi$

$\mathfrak{A}_w \models \{\varphi_n \mid n \leq \ell(\Gamma)\}$

also auch $\mathfrak{A}_w \models \Gamma$

Also sind alle endl $\Gamma \subseteq \Phi_{unendl} \cup \{\varphi\}$ erfüllbar. Nach Endlichkeitssatz ist $\Phi_{unendl} \cup \{\varphi\}$ erfüllbar

sei $\mathfrak{A} \models \Phi_{unendl} \cup \{\varphi\}$

Da $\mathfrak{A} \models \varphi$ existiert ein $w \in \Sigma^*$

so dass $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}^{w}$

also existiert $k := |A| = |w|$

aber dann gilt $\mathfrak{A} \not\models \varphi_{k+1}$.

Dies ist ein Wiederspruch, also kann φ nicht existieren.