Tutoriumsaufgabe 1 (Folgerungsbeziehung)

Sei σ eine beliebige Symbolmenge, seien $\varphi, \psi \in L(\sigma)$ Formeln der Logik der ersten Stufe, und sei $\Phi \subseteq L(\sigma)$ eine Formelmenge. Beweisen Sie oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

a) Wenn $\forall x\varphi \equiv \forall y\varphi$, dann auch $\exists x\varphi \equiv \exists y\varphi$.

b) Wenn $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \varphi \wedge \psi$, dann $\varphi \equiv \psi$.

c) Wenn $\Phi \models \varphi$ und $\forall x\varphi \equiv \forall x\psi$, dann $\Phi \models \psi$.

Interpretation $\mathfrak{J}$ ist ein Paar aus $\mathfrak{A}$ Struktur und Belegung $b: \mathrm{frei}(\varphi) \to A$

Struktur $\mathfrak{A}$ ist ein Paar aus Universum A und der freien Variablen

Belegung aller Symbole aus σ

a) Symbolmenge Konstanten c & d

$\varphi(x,y) := c \neq d \wedge x \doteq c \wedge y \doteq d$

Da c & d unterschiedlich interpretiert werden müssen gilt $\forall x\varphi$ und $\forall y\varphi$ ist unerfüllbar

also insbesondere $\forall x\varphi \equiv \forall y\varphi$

$\exists x(c \neq d \wedge x \doteq c \wedge y \doteq d) \equiv c \neq d \wedge y \doteq d$

$\exists y(c \neq d \wedge x \doteq c \wedge y \doteq d) \equiv c \neq d \wedge x \doteq c$

$\underbrace{\text{Interpretation: } (A = \{1,2\},\ c^{\mathfrak{A}} = 1,\ d^{\mathfrak{A}} = 2) \text{ Struktur} \quad b(x) = b(y) = 2}_{\text{Interpretation } \mathfrak{J}}$

$\mathfrak{J} \models \exists x\varphi$ aber $\mathfrak{J} \not\models \exists y\varphi$

also haben wir gezeigt $\exists x\varphi \not\equiv \exists y\varphi$

b) Symbolmenge $B/1$

$\psi := \top$ $\quad \varphi := \forall x\, B(x)$ $\quad \Phi = \{\forall x\, B(x)\}$

$\Phi \models \varphi$ offensichtlich

$\varphi \wedge \psi \equiv \varphi$ also $\Phi \models \varphi \wedge \psi$

aber $\top \not\equiv \forall x\, B(x)$

Interpret: Universum $\{1\}$ $\quad B^{\mathfrak{A}} = \emptyset$

2. Lösung: wähle Φ unerfüllbar und $\varphi \not\equiv \psi$ beliebig

c) Symbolmenge: Konstantensymbole c & d

$\varphi := x \doteq c$ $\quad \psi := x \doteq d$ $\quad \Phi := \{\varphi\}$

$\forall x\, (x \doteq c)$ & $\forall x\, (x \doteq d)$ sind genau in Strukturen mit 1 Element erfüllt

also gilt $\forall x\, \varphi \equiv \forall x\, \psi$

$\Phi \models \varphi$ gilt offensichtlich

x-elementige Struktur bedeutet genau x Elemente im Univers

$\Phi \not\models \psi$:

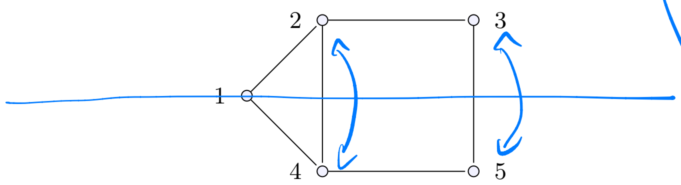
Interpretation $A = \{1, 2\}$ $\quad c^{\mathfrak{A}} = 1$ $\quad d^{\mathfrak{A}} = 2$

Belegung $b(x) = 1$

$\mathfrak{I} \models \Phi$ aber $\mathfrak{I} \not\models \psi$

Tutoriumsaufgabe 2 (Definierbarkeit)

Sei $\sigma = \{E/2\}$, sei $\mathfrak{G}$ die Graphstruktur, die durch den Graphen



Automorphismus (Isomorphismus von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{B}$) ist
$1 \mapsto 1$
$2 \mapsto 4$
$4 \mapsto 2$
$3 \mapsto 5$
$5 \mapsto 3$

definiert ist. Geben Sie eine Formel $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ mit einer freien Variable an, sodass gilt

a) $\mathfrak{G} \models \varphi(v)$ genau dann, wenn $v \in \{2, 4\}$,

b) $\mathfrak{G} \models \varphi(v)$ genau dann, wenn $v = 1$,

c) $\mathfrak{G} \models \varphi(v)$ genau dann, wenn $v = 3$,

oder beweisen Sie, dass es keine solche Formel gibt.

$\varphi_n(x) := \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \le i < j \le n} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{1 \le i \le n} E(x, x_i) \wedge \forall y \left(E(x,y) \to \bigvee_{1 \le i \le n} y = x_i \right) \right)$

den (ungerichtete) Graph hat x Grad genau n

a) $\varphi(x) := \varphi_3(x)$

b) $\varphi(x) := \varphi_2(x) \wedge \exists x_1 \exists x_2 \left(E(x, x_1) \wedge E(x, x_2) \wedge E(x_1, x_2) \right)$

c) Angenommen $\varphi(x)$ existiert. Sei $\pi: G \to G$ definiert wie oben. Dies ist offensichtlich ein Isomorphismus von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{B}$. Nach dem Isomorphielemma gilt $\mathfrak{B} \models \varphi(3) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(\pi(3))$ also $\mathfrak{B} \models \varphi(5)$. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass $\mathfrak{B} \models \varphi(v)$ genau dann wenn $v = 3$.