For an English version see below.

Bei dieser Mitschrift handelt es sich nicht um eine Musterlösung; ich garantiere weder Vollständigkeit noch Korrektheit. Falls ein Fehler gesichtet wird, gern mir per Mail (david.von.nobbe@rwth-aachen.de) Bescheid geben. Danke.

Zudem enthalten die Mitschriften nicht den Inhalt mündlicher Erklärungen und Begründungen. Das Durchlesen der Mitschriften ersetzt also insbesondere nicht den Besuch des Tutoriums, der sehr empfohlen wird.

This transcript is not a sample solution; I guarantee neither completeness nor correctness. If you spot an error, please let me know by mail (david.von.nobbe@rwth-aachen.de). Thanks.

Furthermore, the transcripts do not contain the content of oral explanations and justifications. Reading through the transcripts is therefore no substitute for attending the tutorial, which is highly recommended.

Tutoriumsaufgabe 1 (Endlichkeitssatz)

> Eine Ordnung $\leq$ ist *fundiert*, wenn es in dieser Ordnung keine unendlichen echt absteigenden Ketten gibt. Eine *Wohlordnung* ist eine totale fundierte Ordnung. (Siehe Definition 3.6.)

a) In welchen von den folgenden Strukturen ist $\dot{\leq}^{\mathfrak{A}}$ (wie üblich definiert) eine Wohlordnung?

$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}_{\geq 0}$	$\mathbb{R}_{\geq 0}$
✓	✗	✗	✗	✗	✗

b) Geben Sie eine Wohlordnung $(\mathbb{N}, \dot{\leq}^{\mathfrak{B}})$ an, die nicht isomorph zu der üblichen Wohlordnung $(\mathbb{N}, \dot{\leq}^{\mathfrak{A}})$ ist.

c) Zeigen Sie mithilfe des Endlichkeitssatzes, dass es keinen Satz $\varphi \in \mathrm{L}(\{\dot{\leq}\})$ gibt, sodass für alle $\{\dot{\leq}\}$-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt, dass

$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff \dot{\leq}^{\mathfrak{A}} \text{ ist eine Wohlordnung.}$$

a) · Sei $\mathfrak{A} := (\mathbb{N}, \leq^{\mathfrak{A}})$ mit $\leq^{\mathfrak{A}}$ wie üblich. Dann ist $\mathfrak{A}$ eine WO.
Angenommen dem ist nicht der Fall. Dann gibt es eine unendlich absteigende Kette

$a_1 > a_2 > a_3 > \dots$

Aber unter a_1 sind nur a_1 viele nat. Zahlen, also hat die Kette Länge max. a_1 und ist insb. endlich. Widerspruch.

· Für $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ betr. Folge $a_n := \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Also ist $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ keine WO und somit auch nicht $\mathbb{R}_{\geq 0}$, da $\mathbb{Q}_{\geq 0} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$.

b)

$0 \leq 1 \leq 2 \leq \dots$

$1 \leq 2 \leq \dots$

kein Urbild

$?$

≤ 0

Sei $\mathfrak{B} := (\mathbb{N}, \leq^{\mathfrak{B}})$ mit $\leq^{\mathfrak{B}} := \left(\leq^{\mathfrak{A}} \setminus \{(0,b) \mid b \in \mathbb{N}\}\right) \cup \{(b,0) \mid b \in \mathbb{N}\}$

Also $a \leq^{\mathfrak{B}} b \iff (a \neq 0 \text{ und } a \leq^{\mathfrak{A}} b)$ oder $b = 0$.

- Betr. Satz

$$\varphi := \exists x \, \forall y \, (y \dot{\leq} x) \quad \in L(\{\dot{\leq}\})$$

Da $\mathfrak{N} \not\models \varphi$ aber $\mathfrak{Z} \models \varphi$

Nach Isomorphismuslemma also $\mathfrak{N} \not\cong \mathfrak{Z}$.

- Ang. es gibt unendlich absteigende Kette

$$b_0 \overset{b_0 \dot{\geq} b_1 \wedge b_0 \neq b_1}{>} b_1 > b_2 > \dots \quad \text{in } \mathfrak{Z}.$$

Dann unterscheide:

1. Falls $b_0 \neq 0$, dann argumentiere wie in a).
2. Falls $b_0 = 0$, dann müsste die Kette

   $$b_1 > b_2 > \dots$$

   eine unendlich absteigende Kette sein.

   Aber $b_1 \neq 0$ und mit Argumentation wie in a) folgt der Widerspruch.

c) Sei $\sigma := \{\dot{\le}\}$. Ang. es gibt Satz $\varphi_{WO} \in L(\sigma)$, so dass f. alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{WO} \text{ gdw. } \mathfrak{A} \text{ ist WO.}$$

Aus pädagogischen Gründen (Es geht einfacher, indem man Sätze betr., die keine zusätzlichen Konstantensymbole brauchen ⇝ gute Übung)

Betr. $\tau := \sigma \cup \{\dot{c}_d \mid d \in \mathbb{N}\}$,

wird kleiner

$$\psi_d := c_{d+1} \dot{\le} c_d \wedge c_{d+1} \dot{\ne} c_d$$

Index wird größer

und Satzmenge

$$\Phi := \{\varphi_{WO}\} \cup \{\psi_d \mid d \in \mathbb{N}\}$$

↳ formalisiert unendliche Kette

$$\dots < c_{d(\Gamma)+1} < c_{d(\Gamma)} < c_{d(\Gamma)-1} < \dots < c_3 < c_2 < c_1 < c_0$$

Claim: Jede endl. TM $\Gamma \subseteq \Phi$ ist erfüllbar.

Sei $d(\Gamma) := \max\{d \in \mathbb{N} \mid \psi_d \in \Gamma\}$ → gilt es, da Γ endlich ist!

Das Universum ist also über die Indizes definiert

Sei $\mathfrak{B} := \left(\{-1, -2, \dots, -d(\Gamma)\}, \le^{\mathfrak{B}}, c^{\mathfrak{B}}_{i \in [d(\Gamma)]}\right)$

wobei $\le^{\mathfrak{B}}$ wie üblich und $c_i^{\mathfrak{B}} := -i$

Dann gilt $\mathfrak{B} \models \Gamma$.

Nach dem Endlichkeitssatz ist also auch Φ erfüllbar.

Sei $\mathfrak{A}' \models \Phi$. Da ψ_d für alle $d \in \mathbb{N}$ von $\mathfrak{A}'$ erfüllt ist, gibt es eine unendlich absteigende Kette. Seien $a_1, a_2, \dots$ die unendlich absteigende Kette in $\mathfrak{A}'$ und sei $\mathfrak{A}$ das σ-Redukt von $\mathfrak{A}'$. Dann gibt es in $\mathfrak{A}$ insb. weiterhin die unendlich absteigende Kette $a_1, a_2, \dots$ und, da $\mathfrak{A}' \models \varphi_{WO} \in \Phi$ gilt nach Koinzidenzlemma* auch $\mathfrak{A} \models \varphi_{WO}$ (*$\mathrm{symb}(\varphi_{WO}) = \{\dot{\le}\}$).

$\Phi \vdash \varphi$

- Sei $\Phi \subseteq L(\sigma)$, $\varphi \in L(\sigma)$. Wann ist φ beweisbar aus Φ? Notation?

  * Wenn es ein endliches $\Gamma \subseteq \Phi$, so dass die Seq. $\Gamma \vdash \varphi$ im Seq. Kalkül ableitbar ist

- $T(\sigma)$

- Termstruktur von Φ $\quad \mathfrak{T}_\Phi$

  - $A_\Phi := T(\sigma)$
  - Für alle n-stellige Fkt.-Symbole $f \in \sigma$ gilt

    $$f^{\mathfrak{T}_\Phi}(\theta_1, \ldots, \theta_n) := f(\theta_1, \ldots, \theta_n)$$

  - Für alle n-stellige Rel.-Symbole $R \in \sigma$ gilt

    $$R^{\mathfrak{T}_\Phi} := \{(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in T(\sigma)^n \mid \Phi \overset{*}{\vdash} R(\theta_1, \ldots, \theta_n)\}$$

Tutoriumsaufgabe 2 (Termstruktur und Faktorstruktur)

Sei $\sigma = \{f/1, R/2\}$. Seien

$$A := \{\forall x\big(f(f(f(x))) \doteq f(x)\big)\},$$
$$B := \{x \doteq y \mid x, y \in \mathrm{Var}\},$$
$$C := \{\forall x \forall y(f(x) \doteq y \rightarrow R(x, y))\}.$$

⇝ B ist unendlich, da es unendlich viele Variablen gibt.

Geben Sie für die folgenden Definitionen von Φ sowohl die Termstrukturen als auch die faktorisierten Termstrukturen an. Stellen Sie die faktorisierten Termstrukturen graphisch dar.

a) $\Phi_a = A \cup B$.

b) $\Phi = A \cup B \cup C$.

Zu den Termstrukturen

a) - $\mathfrak{A}_{\Phi_a} := (A_{\Phi_a}, f^{\mathfrak{A}_{\Phi_a}}, R^{\mathfrak{A}_{\Phi_a}})$, wobei

- $A_{\Phi_a} := T(\sigma)$ also

$A_{\Phi_a} = A_{\Phi_b}$

x_1	$f(x_1)$	$f(f(x_1))$	$\ldots$
x_2	$f(x_2)$	$f(f(x_2))$	$\ldots$
x_3	$f(x_3)$	$f(f(x_3))$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

mit $x_1, x_2, x_3, \ldots \in VAR$

- $f^{\mathfrak{A}_{\Phi_a}}(\theta) := f(\theta)$
- $R^{\mathfrak{A}_{\Phi_a}} := \emptyset$

b)

- $\mathfrak{A}_{\Phi_b} := (A_{\Phi_b} := A_{\Phi_a}, f^{\mathfrak{A}_{\Phi_b}} := f^{\mathfrak{A}_{\Phi_a}}, R^{\mathfrak{A}_{\Phi_b}})$, wobei

- $R^{\mathfrak{A}_{\Phi_b}} := \{(f^{(2m)}(x), f^{(2n+1)}(y)) \mid x, y \in VAR; m, n \in \mathbb{N}\}$

$\cup \{(f^{(2m+1)}(x), f^{(2n+2)}(y)) \mid x, y \in VAR; n, m \in \mathbb{N}\}$.

wobei $f^{(n)}(x) := \underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{n\text{-mal}}$, insb. $f^{(0)}(x) := x$

Wir zeigen nur für alle $\Theta \in A_{\Phi_a}$, dass $\Phi \vdash R(\Theta, f(\Theta))$, also $R(\Theta, f(\Theta))$ beweisbar aus Φ. Das ist der einfache Spezialfall für Paare der Form $(f^{(2n)}(x), f^{(2n+1)}(y)) \in R^{\mathfrak{T}_{\Phi_a}}$. Die Lösung ist also nicht vollständig!

Die anderen Fälle sind eine gute Übung.

Nach Def. von $\Phi \vdash R(\Theta, f(\Theta))$ wählen wir die endliche TM $C \subseteq \Phi$ und leiten ab:

Sei $\Theta \in A_{\Phi_a}$ beliebig, also $\Theta := f^{(n)}(x)$ f. ein $n \in \mathbb{N}$, $x \in VAR$.

- (Vor) S_1: $f(\Theta) \doteq f(\Theta) \vdash f(\Theta) \doteq f(\Theta)$
- (Erw) S_2: $f(\Theta) \doteq f(\Theta) \vdash f(\Theta) \doteq f(\Theta), R(\Theta, f(\Theta))$
- (Rf) S_3: $\vdash f(\Theta) \doteq f(\Theta), R(\Theta, f(\Theta))$
- (Vor) S_4: $R(\Theta, f(\Theta)) \vdash R(\Theta, f(\Theta))$
- $(\to L)$ S_5: $f(\Theta) \doteq f(\Theta) \to R(\Theta, f(\Theta)) \vdash R(\Theta, f(\Theta))$
- $(\forall L)$ $\frac{f(\Theta)}{y}$ S_6: $\forall y\, f(\Theta) \doteq y \to R(\Theta, y) \vdash R(\Theta, f(\Theta))$
- (Erw) $(\forall L)$ $\frac{\Theta}{x}$ S_7: $\forall x \forall y\, f(x) \doteq y \to R(x, y) \vdash R(\Theta, f(\Theta))$

Wir erhalten Ableitung $S_1, \ldots, S_7$.

Außerdem gilt $\Phi \nvdash R(\Theta, \Theta')$, falls $(\Theta, \Theta') \notin R^{\mathfrak{T}_{\Phi_a}}$. Als Gegenbeispiel betr. die faktorisierte Termstruktur $\widetilde{\mathfrak{T}_{\Phi_a}}$ (siehe unten). Dann gilt $\widetilde{\mathfrak{T}_{\Phi_a}} \models \Phi$, aber $\widetilde{\mathfrak{T}_{\Phi_a}} \not\models R(\Theta, \Theta')$, falls $(\Theta, \Theta') \notin R^{\mathfrak{T}_{\Phi_a}}$. Falls nun $\Phi \vdash R(\Theta, \Theta')$, dann nach Korrektheit d. Sequenzenkalküls auch $\mathfrak{T}_{\Phi_a} \models R(\Theta, \Theta')$. Widerspruch.

Zu den Faktorstrukturen

Nach VL-Def. 5.22 gilt

$$f^{(i)}(x) \sim f^{(j)}(y) \iff \Phi \vdash f^{(i)}(x) \doteq f^{(j)}(y)$$

$$\iff |i-j| \text{ ist gerade}$$

$$\text{und } i=0 \text{ oder } j=0.$$

Wir erhalten also folgende Äquivalenzklassen

1) $\tilde{x}$, die Klasse aller Variablen, also $x, y, z, \ldots \in VAR$
2) $\widetilde{f(x)}$, die Klasse aller Terme, die durch ungerade Anwendungen von f gebildet werden können, also z.B. $f(x)$, $f(y)$, $f^{(2)}(z)$, $f^{(77)}(x)$,
3) $\widetilde{f^{(2)}(x)}$, die Klasse aller Terme, die durch echt positiven und geraden Anwendungen von f gebildet werden können, also z.B. $f^{(2)}(x)$, $f^{70}(z)$

Die Faktorstrukturen sind also

a)

$$\widetilde{\Omega}_{\Phi_a} := \left(\widetilde{A}_{\Phi_a}, \widetilde{f^{\Omega_{\Phi_a}}}, \widetilde{R^{\Omega_{\Phi_a}}}\right) \text{ mit}$$

- $\widetilde{A}_{\Phi_a} := \left\{ \tilde{x}, \widetilde{f(x)}, \widetilde{f^{(2)}(x)} \right\}$
- $$f^{\widetilde{\Omega_\Phi}} : \widetilde{A}_{\Phi_a} \longrightarrow \widetilde{A}_{\Phi_a}, \; \Theta \longmapsto \begin{cases} \widetilde{f(x)}, & \text{falls } \Theta \in \left\{\tilde{x}, \widetilde{f^{(2)}(x)}\right\} \\ \widetilde{f^{(2)}(x)}, & \text{falls } \Theta = \widetilde{f(x)} \end{cases}$$

Denn

- $\widetilde{f^{\Omega_{\Phi_a}}}(\tilde{x}) \overset{\text{Def.}}{=} \widetilde{f^{\Omega_{\Phi_a}}(x)} = \widetilde{f(x)}$

- $\widetilde{f^{\Omega_{\Phi_a}}}\left(\widetilde{f^{(2)}(x)}\right) \overset{\text{Def.}}{=} \widetilde{f^{\Omega_{\Phi_a}}\left(f^{(2)}(x)\right)} = \widetilde{f^{(3)}(x)} = \widetilde{f(x)}$

- $\widetilde{f^{\Omega_{\Phi_a}}}\left(f(x)\right) \overset{\text{Def.}}{=} \widetilde{f^{\Omega_{\Phi_a}}\left(f(x)\right)} = \widetilde{f^{(2)}(x)}$

– $R^{\Omega_{\Phi_a}} := \emptyset$

---

b) $\widetilde{\Omega_{\Phi_b}} := \left(\widetilde{A_{\Phi_b}} := \widetilde{A_{\Phi_a}} ,\ \widetilde{f^{\Omega_{\Phi_b}}} := \widetilde{f^{\Omega_{\Phi_a}}} ,\ R^{\Omega_{\Phi_b}} \right)$

mit $R^{\Omega_{\Phi_b}} := \left\{ \left(\tilde{\theta}, \widetilde{f(\theta)} \right) \mid \theta \in A_{\Phi} \right\}$

Graphisch: