Malo Schmierzettel

Piccola Radge

21. Oktober 2021

1 Einfache Tautologien

- $X \vee \neg X \vee Z$
- $X \vee \neg X$
- $X \vee 1$
- $0 \to X$ (oder allgemeiner $0 \to \varphi$ für eine beliebige Formel φ)
- $\exists x(x = x)$
- $\forall x(x = x)$
- $\forall y \exists x x = y$
  (Der Satz sagt aus, dass für jedes Element ein gleiches existiert. Das gilt immer, nämlich x selber.)

2 Unerfüllbare Formeln aka. Kontradiktionen

- $X \wedge \neg X$
- $X \wedge \neg X \wedge Z$
- $X \wedge 0$
- $\forall x \forall y(x \neq y)$
- $\forall x x \neq x$
- $\exists x x \neq x$

3 Einfache Formeln in KNF

- $(X \vee Y) \wedge (Y \vee Z)$
- $X \wedge Y$
- $X \vee Y$

4 Einfache Formeln in DNF

- $(X \wedge Y) \vee (Y \wedge Z)$
- $X \wedge Y$
- $X \vee Y$

5 All about Horn-Formeln

5.1 Eigenschaften von Horn-Formeln

- Eine Horn-Formel ist eine AL-Formel in **KNF**,wobei jedes Disjunktionsglied **höchstens ein positives Literal** besitzt.
- **Modelle** von Horn-Formeln sind **unter Schnitt abgeschlossen**.

  D.h. für den Schnitt $(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)$ [1] zweier Interpretationen $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2$ und eine Horn-Formel φ soll gelten: Aus $\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ und $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$ folgt auch $(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2) \models \varphi$
- Eine Horn-Formel ist entweder **unerfüllbar** oder besitzt ein EINDEUTIGES **kleinstes Modell**.

  (Zu letzterem gilt die Umkehrung jedoch nicht, also aus kleinstem Modell folgt nicht automatisch Horn-Formel, Bsp. $\neg Z \vee X \vee Y$ mit kleinstem Modell $\mathfrak{I} : X \mapsto 0, Y \mapsto 0, Z \mapsto 0$. Beweis über Schnitt von Modellen.)
- Seien φ, ψ Horn-Formeln. Dann ist $\varphi \wedge \psi$ eine Horn-Formel. D.h. die Konjunktion zweier Horn-Formeln ist stets eine Horn-Formel.

5.2 Einfache Horn-Formeln

- 0

  (leere Disjunktion)
- 1

  (leere Konjunktion)
- X
- $\neg X$
- $X \wedge Y$

  (Auch wenn es erstmal nicht danach aussieht, aber diese Formel ist auch eine Horn-Formel sie ist in KNF mit höchstens einem positivem Literal pro Disjunktion und besitzt ein kleinstes Modell $\mathfrak{I}(X) = \mathfrak{I}(Y) = 1$)

[1] definiert als die Interpretation $(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2) : \tau \to \{0, 1\}$, $(\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2)(X) := \min(\mathfrak{I}_1(X), \mathfrak{I}_2(X))$ für alle $X \in \tau$

- $X \vee \neg X$

  (**Ergo**: Im Allgemeinen ist die Disjunktion zweier HF nicht immer eine HF, das hier ist eine Ausnahme.)

- $X \wedge \neg X$

- $\neg X \vee \neg Y$

5.3 Einfache zu Horn-Formeln logisch äquivalente Formeln

- $X \rightarrow Y$,

  da $X \rightarrow Y \equiv \neg X \vee Y$

- $1 \rightarrow 0$,

  da $1 \rightarrow 0 \equiv 0$

- $X \vee \neg X \vee Z$,

  da $X \vee \neg X \vee Z \equiv 1 \vee Z \equiv 1$

- $X \vee 0$,

  da $X \vee 0 \equiv X$

- $(X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y)$,

  da $(X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y) \equiv X \vee (Y \wedge \neg Y) \equiv X \vee 0 \equiv X$

- **Jede unerfüllbare Formel** ist äquivalent zu einer Horn-Formel.

5.4 (Un)Erfüllbarkeitstest von Horn-Formeln

- Der **Markierungsalgorithmus** ist der **Erfüllbarkeitstest** für Horn-Formeln. Der Algorithmus testet die Erfüllbarkeit in **Polynomialzeit**. (Algorithmus 1.1)

- Mit der **Einheitsresolution** für Horn-Formeln kann die **Unerfüllbarkeit** einer Horn-Formel festgestellt gemacht werden. Einheitsresolution testet die unerfüllbarkeit in **Polynomialzeit**. (Merke: Einheitsresolution für Horn-Formeln ist einfach der Markierungsalgorithmus rückwärts)

5.5 Für Horn-Formeln gilt NICHT...:

- **Abgeschlossenheit unter Disjunktion**.

  D.h. die Disjunktion von Horn-Formeln ist (im Allgemeinen) **nicht** stets eine Horn-Formel. Bsp: Sei $\varphi = X, \psi = Y$. Dann sind φ und ψ Horn-Formeln, aber die Disjunktion $X \vee Y$ ist keine Horn Formel.

- **Abgeschlossenheit unter Negation**.

  D.h. die Negation einer Horn-Formeln ist (im Allgemeinen) **nicht** stets eine Horn-Formel. Bsp.: Sei $\varphi = \neg X \wedge \neg Y$. Dann ist φ eine Horn-Formel, jedoch gilt für die Negation $\neg\varphi = X \vee Y$, dass sie keine Horn-Formel ist.

- Für die Modelle: Abgeschlossenheit unter Vereinigung.

6 Funktional vollständige Mengen

- $\{\wedge, \neg\}$
- $\{\vee, \neg\}$
- $\{\wedge, \vee, \neg\}$
- $\{\rightarrow, \neg\}$,

  da $\{\vee, \neg\}$ funktional vollständig ist und $\psi \vee \varphi \equiv \neg\psi \rightarrow \varphi$

- $\{\rightarrow, 0\}$

  da $\{\rightarrow, \neg\}$ funktional vollständig ist und $\neg\psi \equiv \psi \rightarrow 0$

- $\{\wedge, \oplus, 1\}$,

  da $\neg\psi \equiv 1 \oplus \psi$

- $\{\rightarrow, \oplus\}$

7 NICHT funktional vollständige Mengen

- $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$,

  da $1 \wedge 1 \equiv 1, 1 \vee 1 \equiv 1$ und $1 \rightarrow 1 \equiv 1$. **<u>Per Induktion über dem Formelaufbau</u>** [2], folgt, dass für jede aus $\wedge, \vee, \rightarrow$ und Variablen aufgebaute Formel $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ gilt: $[\![\varphi(1, \ldots, 1)]\!] = 1$. Damit ist die Negation nicht darstellbar.

  (Steckt man also nur 1en in alle Booleschen Funktionen aus der Menge rein, kommen nur 1en raus.)

- $\{\wedge, \vee, 0, 1\}$,

  da die Negation nicht allgemein darstellbar ist.

[2] die Induktion muss natürlich noch gezeigt werden

8 Entscheidbare Probleme in Malo

- **Gegeben**: Eine Horn-Formel ψ. Ist ψ erfüllbar?

  Algorithmus: Mit dem **Markierungsalgorithmus** können Horn-Formeln in **polynomieller** Zeit auf Erfüllbarkeit getestet werden.

- **Gegeben**: Eine **AL**-Formel φ. Ist φ eine Tautologie?

  Algorithmus: z.B. durch ausprobieren aller Interpretationen oder durch den **aussagenlogischen Sequenzenkalkül**
  ($\emptyset \Rightarrow \varphi$ *gültig* $\leftrightarrow \varphi$ *ist eine Tautologie.*)

- **Gegeben**: Eine **AL**-Formel φ. Ist φ erfüllbar/unerfüllbar?

  Algorithmus: Der **Sequenzenkalkül** liefert einen Algorithmus, der das Problem **für die Aussagenlogik entscheidet**.

  Im Sequenzenkalkül kann ein Beweis für die Sequenz $\varphi \Rightarrow \emptyset$ konstruiert werden, falls φ unerfüllbar ist. Im Sequenzenkalkül der Aussagenlogik kann eine falsifizierende Interpretation konstruiert werden, falls die Sequenz nicht gültig ist. (Das ist in der Prädikatenlogik im Allgemeinen nicht möglich.)

- **Gegeben**: Eine Formel φ in KNF. Ist φ **unerfüllbar**?

  Algorithmus: **Resolution** ist ein syntaktisches Verfahren, um die Unerfüllbarkeit von Formeln in KNF nachzuweisen. Dieser Algorithmus hat im (worst case) **exponentielle** Komplexität.

- Das Erfüllbarkeitsproblem für CTL ist entscheidbar in **exponentieller** Zeit. (S.136)

- Erfüllbarkeitsproblem für DNF-Formeln ist durch einen Algorithmus mit **linearer** Laufzeit lösbar.

9 Unentscheidbare Probleme in Malo

Folgende Probleme sind in Malo nicht (algorithmisch) entscheidbar.

- Das Erfüllbarkeitsproblem für die Prädikatenlogik ist unentscheidbar.

- **Gegeben**: Eine **FO**-Formel ψ. Ist ψ allgemeingültig?

  Das Gültigkeitsproblem der Prädikatenlogik ist nicht entscheidbar, d.h. dass kein Algorithmus die Gültigkeit von FO-Formeln entscheiden kann. (Satz 4.30)

- **Gegeben**: Eine endliche Menge Φ von **FO-Sätzen**. Besitzt Φ ein Modell?

- **Gegeben**: $\Phi \subseteq \mathbf{FO}(\tau)$ und $\varphi \in \mathbf{FO}(\tau)$. Gilt $\Phi \models \varphi$?
  (**RECALL**: $\Phi \models \varphi \leftrightarrow \Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar.)

- **Gegeben**: $\varphi \in$ **FO** ein **FO-Satz**. Ist die Sequenz $\varphi \Rightarrow \emptyset$ gültig?
  (**RECALL**: Diese Sequenz ist genau dann gültig, wenn φ unerfüllbar ist.)
- **Gegeben**: $\varphi \in$ **FO** ein **FO-Satz**. Ist die Sequenz $\emptyset \Rightarrow \varphi$ gültig?
  (**RECALL**: Diese Sequenz ist genau dann gültig, wenn φ allgemeingültig ist.)
- Das Postsche Korrespondenzproblem (PCP) ist unentscheidbar (Satz 4.29)

Beobachtung: logisches Schließen (Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit, semantische Folgerungsbeziehung) in der Prädikatenlogik ist unentscheidbar.

10 Modallogik (ML) Vokabeln

Im folgenden beziehen wir uns in dieser section immer auf ein Transitionssystem $\mathcal{K} = (V, E_a, P, Q)$. In ML gehen wir bei der Auswertung der Formeln immer vom „aktuellen" Knoten aus.

- $\Box 0$ „es gibt keine Nachfolger"
  (Die Formel beschreibt einen **Terminalknoten**)
- $\Box 1 \equiv 1$ d.h. allgemeingültig
- $\Diamond 0 \equiv 0$ d.h. unerfüllbar. ($\Diamond 0$ sagt: „es gibt Nachfolger, an $\underbrace{\text{dem 0 gilt}}_{\text{gilt nie!}}$")
- $\Diamond 1$ „es gibt **mindestens** einen Nachfolger"
- $[a]0$ „es gibt keinen a-Nachfolger"

  (d.h. es gibt keinen Nachfolgerknoten (direkter Nachbar) in die eine mit a beschriftete Kante führt.)
- $[a]1 \equiv 1$
- $\langle a \rangle 0 \equiv 0$
- $\langle a \rangle 1$ „es gibt einen a-Nachfolger"
- Allgemein gesprochen:
  - $\langle a \rangle \varphi$ bedeutet: „es gibt einen a-Nachfolger an dem φ gilt"
  - $[a]\varphi$ bedeutet „für alle/an allen a-Nachfolgern soll φ gelten"
- $\Box$P „alle Nachfolger sind in P"
- $\Diamond\Diamond\Diamond 1$ „es gibt einen Weg der Länge 3"
- P $\wedge \Box \Diamond$ Q „Der aktuelle Knoten ist in P **und** von jedem seiner Nachfolger gibt es eine Transition zu einem Knoten in Q"[3]

[3] $\text{P} \wedge \underbrace{\Box}_{\text{für alle NF}} \underbrace{\Diamond Q}_{\text{es gibt einen NF in Q}}$