Nicht in diese Ecke schreiben!

Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2021

2. Klausur Mathematische Logik

Nachname:	
Vorname:	
Matr.-Nr.:	
Studiengang:	

1	2	3	4	5	6	7
/22	/22	/15	/13	/15	/11	/22

Summe:	/120

Hinweise

Unsere Regeln für die Klausur: Es sind *keine* Hilfsmittel (Skripte, Bücher, Mitschriften oder dergleichen) zugelassen.

Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Es darf *kein* zusätzliches Papier ausgegeben werden. Der Platz zur Bearbeitung der Aufgaben ist daher großzügig bemessen. Wenn der Platz unter einer Aufgabe nicht ausreicht, können Sie die freien Seiten am *Ende* der Klausur nutzen und darauf *verweisen*.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Hiermit bestätige ich, dass ich obige Hinweise zur Kenntnis genommen habe und prüfungsfähig bin.

Unterschrift

Aufgabe 1 22 Punkte

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Behauptungen wahr sind. Begründen Sie Ihre Antworten durch kurze Beweisskizzen unter Einbeziehung von Ergebnissen aus der Vorlesung, oder durch geeignete Gegenbeispiele.

(a) Sei $\Phi := \{X_i \to X_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathsf{AL}$. Es gilt $\Phi \models X_{42}$.

Falsch. $\mathfrak{J}(X_i) = 0$ f.a. $i \in \mathbb{N}$ erfüllt φ aus Φ

Aber $\mathfrak{J}(X_{42}) = 0$

(b) Sei $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ und $\psi \in \mathsf{AL}$ mit $\Phi \models \psi$. Dann gilt $\Phi_0 \models \psi$ für jede endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$.

Falsch. Sei $\Phi = \{X\}$, $\psi = X$

$\{X\} \models X$ aber $\emptyset \not\models X$

da X keine Tautologie ist.

(c) Sei $\Gamma \Rightarrow \psi$ eine gültige aussagenlogische Sequenz. Dann gilt $\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \gamma \equiv \psi$.

Falsch. $\Gamma = \{X, Y\}$, $\psi = X$

$\{X, Y\} \Rightarrow X$

aber $X \wedge Y \not\equiv X$

$\mathfrak{J}(X) = 1$, $\mathfrak{J}(Y) = 0$

(d) Die FO($\{<\}$)-Formel $\overbrace{\exists x \exists y (x < y \wedge y < x)}^{\varphi}$ ist erfüllbar, aber keine Tautologie.

Wahr. $\mathfrak{A} = (\{1,2\}, <) \quad <^{\mathfrak{A}} = \{(1,2)\}$

$\mathfrak{B} = (\{1,2\}, <) \quad <^{\mathfrak{B}} = \{(1,2), (2,1)\}$

$\rightarrow \mathfrak{A} \not\models \varphi$

$\mathfrak{B} \models \varphi$

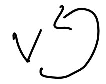
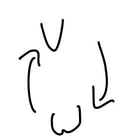
(e) Der FO($\{E\}$)-Satz $\varphi := \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow \forall z (Exz \vee Eyz))$ ist in der Theorie der vollständigen ungerichteten Graphen enthalten.

$\neg \varphi \equiv \exists x \exists y ((x = y) \wedge (\forall z Exz \vee Eyz))$

für G: gilt $G \models \neg \varphi$

$\rightarrow \neg \varphi \in T \rightarrow \varphi \notin T$

(f) Seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ Transitionssysteme und v, v' Zustände aus $\mathcal{K}$ bzw. $\mathcal{K}'$. Wenn $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$, dann gilt für alle FO-Formeln $\varphi(x)$, dass $\mathcal{K} \models \varphi(v)$ genau dann, wenn $\mathcal{K}' \models \varphi(v')$.

Falsch. Sei K  K' 

Dann ist $K, v \sim K', v'$

Aber für $\varphi(x) = \exists y (x \neq y)$

$K \not\models \varphi(v)$, $K' \models \varphi(v)$

Nicht in diese Ecke schreiben!

(g) Sei $\mathfrak{A} := (\mathbb{Z}, +, P)$, wobei $+$ wie üblich auf $\mathbb{Z}$ interpretiert wird und $P := \{0\}$ eine einstellige Relation ist. Sei $\sim \subseteq \mathbb{Z}^2$ definiert durch $a \sim b$ genau dann, wenn $|a - b|$ ein Vielfaches von 4 ist. Dann ist $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$.

Falsch. $4 \sim 0$ da $|4-0| = 1 \cdot 4$

aber $0 \in P$ und $4 \notin P$

(h) Seien $\mathfrak{A} = (A, \tau)$ und $\mathfrak{B} = (B, \tau)$ zwei τ-Strukturen und $a \in A$ in $\mathfrak{A}$ elementar definierbar. Wenn $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, dann gibt es ein $b \in B$, das in $\mathfrak{B}$ elementar definierbar ist.

Wahr. Sei $\mathfrak{A} \models \varphi(x)$ g.d.w. $x = a$

und π ein Isomormoph. von $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$

dann ist nach dem Isomorphielemma

$\mathfrak{B} \models \varphi(x)$ g.d.w. $x = \pi(a)$

(i) Sei ψ ein erfüllbarer FO(τ)-Satz, dessen Modelle alle isomorph zueinander sind. Sei $\mathcal{K}$ eine FO-axiomatisierbare Klasse von τ-Strukturen, die mindestens zwei verschieden große endliche Strukturen enthält. Dann gibt es *kein* Axiomensystem Φ für $\mathcal{K}$ mit $\psi \in \Phi$.

Wahr. Angenommen Φ ist ein solches Ax. S.

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K$ mit $|A| \neq |B|$

Dann sind beide Strukturen Modelle aller Formeln aus Φ Insb. φ und

Somit $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ $\lightning$ Da keine Bijektion von $A \to B$ ex.

Nicht in diese Ecke schreiben!

Aufgabe 2 22 Punkte

(a) Gibt es einen Algorithmus, der entscheidet, ob eine prädikatenlogische Sequenz gültig ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Ja, der Sequenzenkalkül ist vollständig und liefert somit einen solchen Algorithmus.

(b) (i) Verwenden Sie den Markierungsalgorithmus aus der Vorlesung, um zu zeigen, dass die folgende Folgerungsbeziehung gilt.

$$\underbrace{\{\neg X, (Y \wedge Z) \to X, Z\}}_{\Phi} \models \underbrace{\neg Y}_{\psi}$$

Stellen Sie dazu zunächst eine geeignete Horn-Formel auf und führen Sie darauf den Markierungsalgorithmus aus. Geben Sie dabei die Menge der markierten Variablen nach jedem Schritt an.

$\Phi \models \psi$ g.d.w. $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar

$\bigwedge \Phi \wedge \neg\psi \equiv \neg X \wedge ((Y \wedge Z) \to X) \wedge Z \wedge Y$

$\equiv \neg X \wedge (\neg Y \vee \neg Z \vee X) \wedge Z \wedge Y$ Horn-Formel

$\equiv (\underline{X} \to 0) \wedge (\underline{Z} \wedge \underline{Y} \to X) \wedge (1 \to \underline{Z}) \wedge (1 \to \underline{Y}) =: \varphi$

$M_0 = \emptyset$

$M_1 = \{Z, Y\}$

$M_2 = \{Z, Y, X\}$

$\to \varphi$ ist unerfüllbar $\to \Phi \models \psi$

(ii) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgende Formel logisch äquivalent zu einer Horn-Formel ist.

$$\psi := (X \vee Z) \to Y$$

$\psi \equiv \neg(X \vee Z) \vee Y$

$\equiv (\neg X \wedge \neg Z) \vee Y$

$\equiv (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Z \vee Y)$ Horn Formel

(c) Nutzen Sie die Resolutionsmethode aus der Vorlesung, um zu bestimmen, ob die folgende Klauselmenge erfüllbar ist.

$$K := \{ \quad \{C\}, \quad \{A, C\}, \quad \{B\}, \quad \{\neg A, \neg C\}, \quad \{A, \neg B\} \quad \}$$

$\{A\}$

$\{\neg A\}$

$\square$

Somit ist K unerfüllbar

(d) (i) Verwenden Sie den Sequenzenkalkül der Aussagenlogik, um zu bestimmen, ob die folgende Sequenz gültig ist.

$$X, (X \wedge Y) \rightarrow Z, X \rightarrow Y \;\Rightarrow\; Z$$

Nutzen Sie dabei ausschließlich die folgenden Schlussregeln aus der Vorlesung.

$$(\neg \Rightarrow): \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi}{\Gamma, \neg\psi \;\Rightarrow\; \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg): \frac{\Gamma, \psi \;\Rightarrow\; \Delta}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \neg\psi}$$

$$(\vee \Rightarrow): \frac{\Gamma, \psi \;\Rightarrow\; \Delta \qquad \Gamma, \vartheta \;\Rightarrow\; \Delta}{\Gamma, \psi \vee \vartheta \;\Rightarrow\; \Delta} \qquad (\Rightarrow \vee): \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi, \vartheta}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi \vee \vartheta}$$

$$(\wedge \Rightarrow): \frac{\Gamma, \psi, \vartheta \;\Rightarrow\; \Delta}{\Gamma, \psi \wedge \vartheta \;\Rightarrow\; \Delta} \qquad (\Rightarrow \wedge): \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi \qquad \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \vartheta}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi \wedge \vartheta}$$

$$(\rightarrow \Rightarrow): \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi \qquad \Gamma, \vartheta \;\Rightarrow\; \Delta}{\Gamma, \psi \rightarrow \vartheta \;\Rightarrow\; \Delta} \qquad (\Rightarrow \rightarrow): \frac{\Gamma, \psi \;\Rightarrow\; \Delta, \vartheta}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi \rightarrow \vartheta}$$

Ist die Sequenz gültig? Wenn nicht, geben Sie eine falsifizierende Interpretation an.

Axiome

Axion

Axiom

$$(\rightarrow \Rightarrow)\frac{(\rightarrow \Rightarrow)\dfrac{X \Rightarrow Z, (X \wedge Y), X \qquad \dfrac{X, Y \Rightarrow Z, X \qquad X, Y \Rightarrow Z, Y}{X, Y \Rightarrow Z, (X \wedge Y)}(\Rightarrow \wedge)}{X, X \rightarrow Y \Rightarrow Z, (X \wedge Y)} \qquad X, X \rightarrow Y, Z \Rightarrow Z}{X, (X \wedge Y) \rightarrow Z, X \rightarrow Y \Rightarrow Z}$$

Die Sequenz ist gültig

Nicht in diese Ecke schreiben!

(ii) Zeigen oder widerlegen Sie semantisch, dass die folgende *prädikatenlogische* Schlussregel korrekt ist. Verwenden Sie insbesondere *keine* Ableitungen im Sequenzenkalkül.

$$\frac{\Gamma, \exists x \varphi(x), \exists x(\neg\psi(x)) \;\Rightarrow\; \Delta}{\Gamma, \varphi(c) \;\Rightarrow\; \Delta, \psi(c)}$$

Sei die Prämisse gültig und $\mathfrak{J}$ Modell von $\bigwedge \Gamma \wedge \varphi(c)$

1. Fall $\mathfrak{J}$ Modell von $\psi(c)$ ✓

2. Fall $\mathfrak{J} \not\models \psi(c)$ dann gilt für $x = c^{\mathfrak{J}}$

$\neg\psi(x)$ und $\varphi(c)$

Also $\mathfrak{J} \models \exists x\, \varphi(x) \wedge \exists x\, (\neg\psi(x))$

Prämisse
$\longrightarrow$ $\mathfrak{J} \models \delta$ für ein $\delta \in \Delta$ ✓

In allen Fällen $\mathfrak{J} \models \bigvee \Delta \vee \psi(c)$

die Sequenz ist gültig

Nicht in diese Ecke schreiben!

Aufgabe 3 15 Punkte

(a) Formalisieren Sie die folgenden Eigenschaften von *ungerichteten* Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$ jeweils durch einen $\mathrm{FO}(\{E\})$-Satz. Die Korrektheit der Formeln muss nicht bewiesen werden.

Zur Erinnerung: Ungerichtete Graphen werden axiomatisiert durch

$$\Phi_{\text{Graph}} \coloneqq \{\forall x(\neg Exx), \forall x \forall y(Exy \to Eyx)\}.$$

(i) Es gibt einen Pfad *ohne* Knotenwiederholung der Länge 42.

Hinweis: Die *Länge* eines Pfades ist die Anzahl der *Kanten* auf dem Pfad.

$$\exists x_1 \dots \exists x_{43} \Big(\bigwedge_{\substack{1 \le i,j \le 43 \\ i \neq j}} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{1 \le i \le 42} E x_i x_{i+1} \Big)$$

(ii) Jeder Knoten hat mindestens Grad 2.

Hinweis: Der *Grad* eines Knotens ist die Anzahl seiner direkten Nachbarn.

$$\forall x \Big(\exists z \exists y \big(z \neq y \wedge Exz \wedge Exy \big) \Big)$$

(iii) Es gibt *genau* einen isolierten Knoten.

Hinweis: Ein Knoten ist *isoliert*, wenn er mit keinem anderen Knoten verbunden ist.

$$\exists x \Big(\forall y (\neg Exy) \wedge \forall z \big(z \neq y \to (\exists u (Ezu)) \big) \Big)$$

Nicht in diese Ecke schreiben!

(b) Wir betrachten nun *lineare* Ordnungen $(A, <)$. Lineare Ordnungen werden axiomatisiert durch den FO($\{<\}$)-Satz

$$\psi_< := \forall x(\neg\, x < x) \land \forall x \forall y \forall z((x < y \land y < z) \to x < z) \land \forall x \forall y(x < y \lor x = y \lor y < x).$$

Jeder der folgenden FO($\{<\}$)-Sätze drückt eine bestimmte Eigenschaft von Ordnungen aus.

$\psi_1 := \forall x \forall y(x < y \to \exists z(x < z \land z < y))$ Dicht

$\psi_2 := \forall x(\exists y(x < y) \to \exists y(x < y \land \neg \exists z(x < z \land z < y)))$ f.a. x falls $x<y$ ex. Dann auch $x<z$

$\psi_3 := \exists x \forall y(y < x \lor y = x)$ Maximum

$\psi_4 := \exists x \forall y(\neg\, x < y)$ Maximum

Geben Sie nun für alle unten angegebenen Sätze jeweils *ohne Beweis* ein Modell an oder begründen Sie *kurz*, warum der Satz kein Modell hat.

Hinweis: Es genügt, als Modell eine bekannte Struktur anzugeben oder die Ordnung graphisch zu skizzieren.

(i) $\psi_< \land \psi_2 \land \neg\psi_3$

$\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, <)$

(ii) $\psi_< \land \psi_1 \land \psi_4$

$\mathfrak{A} = ([0,1], <)$ < wie gewöhnlich

(iii) $\psi_< \land \neg\psi_3 \land \psi_4$

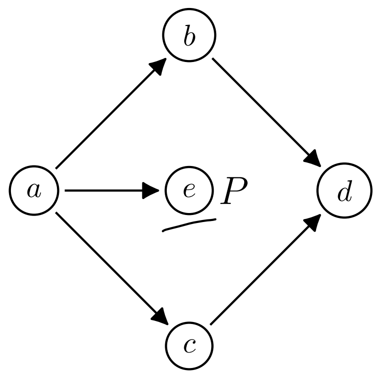
Ein solches Modell ex. nicht da

$\forall x \forall y(x < y \lor x = y \lor y < x)$ gilt.

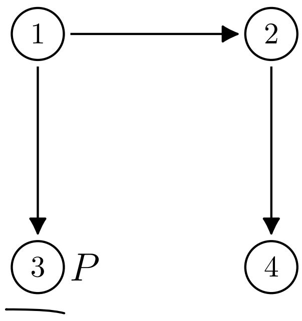
Aufgabe 4 13 Punkte

(a) Betrachten Sie die beiden Transitionssysteme $\mathcal{K}_1 := (V_1, E^{\mathcal{K}_1}, P^{\mathcal{K}_1})$ und $\mathcal{K}_2 := (V_2, E^{\mathcal{K}_2}, P^{\mathcal{K}_2})$.

$\mathcal{K}_1$:



$\mathcal{K}_2$:



Geben Sie ohne Beweis eine maximale Bisimulation $Z \subseteq V_1 \times V_2$ zwischen $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ an.

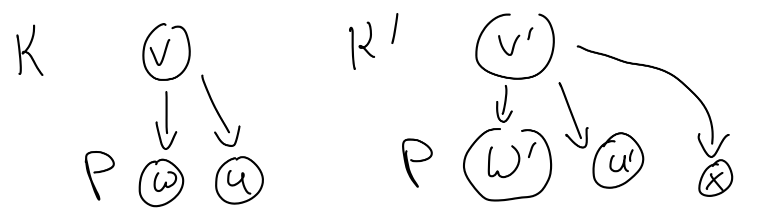
$Z = \{ (e,3), (a,1), (b,2), (c,2), (d,4) \}$

(b) Wir betrachten Transitionssysteme der Form $\mathcal{K} = (V, E, P)$, wobei V die Knotenmenge ist, E die einzige Kantenrelation ist und P eine atomare Eigenschaft ist.

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Eigenschaften von Transitionssystemen $\mathcal{K}$ mit ausgewähltem Knoten v durch eine modallogische Formel definierbar sind. (Falls Sie eine Formel angeben, erklären Sie kurz die Idee Ihrer Formel.)

(i) Die Anzahl der direkten Nachfolger von v, die in P sind, ist genau gleich der Anzahl der direkten Nachfolger von v, die *nicht* in P sind.

Sei



Dann gilt $K, v \sim K', v'$ | K erfüllt i, K' nicht

Sei $\psi \in ML$ die gesuchte Formel

$\rightarrow K, v \models \psi \xrightarrow{\text{Bis.}} K', v' \models \psi$ ↯

Nicht in diese Ecke schreiben!

(ii) Alle Nachfolger von v, die in P sind, müssen einen Nachfolger haben, der nicht in P ist.

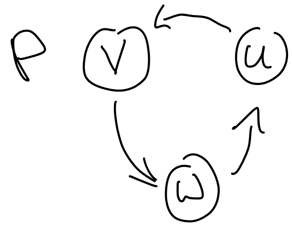
$\Box(P \to \Diamond \neg P)$

Für alle Nachfolger: folgt aus P, dass ein Nachfolger mit $\neg P$ ex.

(c) Geben Sie ohne Beweis ein Modell $\mathcal{K}, v$ der ML-Formel

$$\varphi := \Diamond\Diamond\Diamond P \land \Diamond(P \to \neg P)$$

mit *möglichst wenigen Zuständen* an.



Aufgabe 5 15 Punkte

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $\pi\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein Automorphismus von $(\mathbb{R}_{\geq 0}, \cdot)$ ist, dann auch $\sigma\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sigma(x) := \sqrt{\pi(x)}$.

Wahr. Da π ein Aut. gilt f.a. $x, y \in \mathbb{R}$

$$\pi(\underbrace{x \cdot y}_{\geq 0}) = \underbrace{\pi(x)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\pi(y)}_{\geq 0}$$

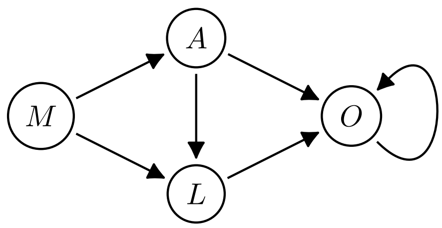
$$\Longleftrightarrow \sqrt{\pi(x \cdot y)} = \sqrt{\pi(x) \cdot \pi(y)}$$

$$= \sqrt{\pi x} \cdot \sqrt{\pi y}$$

Die Bij. folgt da $\sqrt{\cdot}\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ Bij.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, ob die angegebene Relation bzw. Funktion in der gegebenen Struktur elementar definierbar ist. Falls Sie als Teil Ihrer Lösung einen Automorphismus angeben, so müssen Sie nicht beweisen, dass es sich um einen Automorphismus handelt.

(i) Das Element A in folgendem gerichteten Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$:



$$\psi(x) := \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \, (x_1 \neq x_2 \land x_1 \neq x_3 \land x_2 \neq x_3 \land E x_1 x \land E x x_2 \land E x x_3 \,)$$

Nicht in diese Ecke schreiben!

(ii) Die Menge der Primzahlen in $\underbrace{(\mathbb{Q}, +, <, 0)}_{} = \mathfrak{A}$.

Sei $\pi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $q \mapsto 2x$ Automorphismus

Sei $\psi(x) \in FO(\{+, <, 0\})$ die gesuchte Formel

Dann gilt $\mathfrak{A} \models \psi(3) \xrightarrow{\text{Isomorph.}} \mathfrak{A} \models \psi(\pi(3))$

also $\mathfrak{A} \models \psi(6)$ $\lightning$

$\rightarrow$ nicht def.

(iii) Die Menge $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ in $\mathfrak{A} = (\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$.
Dabei bezeichnet $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge einer Menge M.

$\emptyset$, 1, 2, $\{1,2\}$

$$\psi(x) = \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \Big(\bigwedge_{\substack{1 \le i,j \le 4 \\ i \neq j}} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{1 \le i \le 4} x_i \subseteq x \Big)$$

$$\wedge \exists z \, (x \subseteq z \wedge z \neq x)$$

(iv) Das Element $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ in der Struktur $(\mathbb{Q}^{2\times 2}, +, E_2)$.

Hierbei ist $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ die Menge der (2×2)-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$ und E_2 ist die Einheitsmatrix der Größe 2×2.

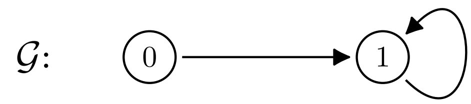
Sei $\pi : \mathbb{Q}^{2\times 2} \to \mathbb{Q}^{2\times 2}$, $q \mapsto q^{Tr}$ ← Transponiert Aut.

$$\pi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

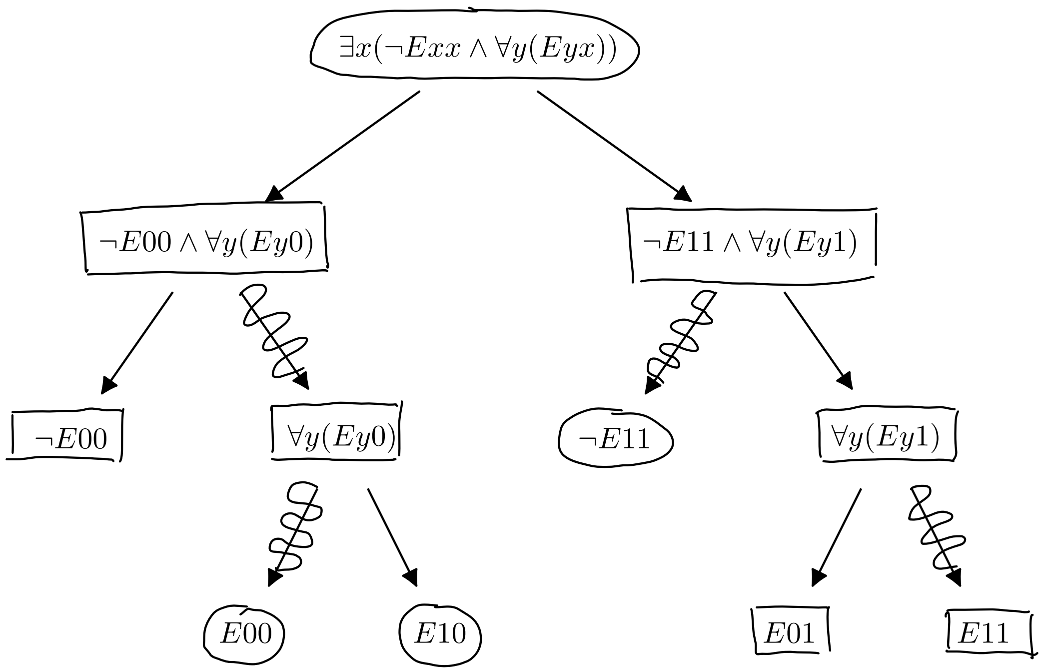
Analog zu ii) nicht definierbar

Aufgabe 6 11 Punkte

(a) Sei $\mathcal{G} = (V, E)$ der unten dargestellte gerichtete Graph und $\varphi := \exists x(\neg Exx \wedge \forall y(Eyx))$ ein Satz.



Vervollständigen Sie zuerst das folgende Auswertungsspiel $\mathsf{MC}(\mathcal{G}, \varphi)$, indem Sie für jeden Knoten *deutlich* kennzeichnen, wer am Zug ist. Bestimmen Sie, wer das Spiel gewinnt und geben Sie eine entsprechende Gewinnstrategie an.



Hinweis: Verifiziererin am Zug: rund | Falsifizierer am Zug: eckig

Achten Sie darauf, dass Ihre Markierung *eindeutig* ist. Sie können die Gewinnstrategie angeben, indem Sie die entsprechenden *Kanten markieren*:

Ggf. dürfen Sie falsche Markierungen korrigieren (bitte *deutlich*!), z.B.: Korrektur

Wer gewinnt das Spiel? Gilt $\mathcal{G} \models \varphi$?

Der Falsifizierer. Nein. $G \not\models \varphi$

Da F. $MC(G, \varphi)$ gewinnt

Nicht in diese Ecke schreiben!

(b) Sei $f\colon \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ die folgende Boolesche Funktion.

$$f(x_1, x_2, x_3) := \begin{cases} \max\{x_1, x_2\} & \text{falls } x_3 = 0, \\ \min\{x_1, x_2\} & \text{falls } x_3 = 1. \end{cases}$$

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Menge $\{0, 1, f\}$ funktional vollständig ist.

$f(X_1, X_2, 0)$ def. $X_1 \wedge X_2$

$f(X_1, X_2, 1)$ def $X_1 \vee X_2$

$f(0, 1, X)$ def $\neg X$

$\rightarrow \{0, 1, f\}$ ist vollständig

(c) Sei M eine Menge von Booleschen Funktionen, die *nicht* funktional vollständig ist. Geben Sie ohne Beweis eine Boolesche Funktion f an, die *nicht* aus Funktionen in M dargestellt werden kann, unabhängig davon, welche Funktionen in M sind.

$f: \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ $\quad f((a,b)) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } a = b = 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Nicht in diese Ecke schreiben!

Aufgabe 7 22 Punkte

Geben Sie für folgende Klassen von Strukturen jeweils ein, wenn möglich endliches, Axiomensystem an. Sollten Sie kein (endliches) Axiomensystem angeben, so beweisen Sie, dass es kein (endliches) Axiomensystem gibt.

(a) $\mathcal{K}_a := \{(A, +, f) \mid f$ ist ein Automorphismus auf $(A, +)\}$

Dabei ist f ein einstelliges Funktionssymbol und $+$ ein zweistelliges Funktionssymbol.

Surj Inj.

$\Phi = \{ \forall x \exists y\, (fy = x),\ \forall x \forall y\, (fx = fy \rightarrow x = y),$

$\forall x \forall y\, (f(x+y) = f(x) + f(y)) \}$

(b) $\mathcal{K}_b = \{(A, <) \mid (A, <) \cong (\mathbb{N}, <)$ oder $(A, <) \cong (\mathbb{R}, <)\}$

Sei $\Phi \subseteq FO(\{<\})$ mit $K_b = Mod(\Phi)$

dann besitz Φ ein unendliches Modell $((\mathbb{R}, <) \models \Phi)$

Nach $\uparrow$LS folgt, dass ein Modell $\mathfrak{D}$ von Φ

mit $|D| \geq |P(\mathbb{R})|$ ex.

$\rightarrow$ $\mathfrak{D} \not\cong (\mathbb{N}, <)$ und $\mathfrak{D} \not\cong (\mathbb{R}, <)$ $\lightning$

K_b ist nicht axiomatisierbar

Nicht in diese Ecke schreiben!

(c) Die Klasse $\mathcal{K}_c$ aller ungerichteten regulären Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$.

Hinweis: Ein ungerichteter Graph heißt *regulär*, wenn alle Knoten den gleichen (endlichen) Grad haben *oder* wenn alle Knoten unendlichen Grad haben.

Zur Erinnerung: Die Klasse der ungerichteten Graphen wird axiomatisiert durch

$$\Phi_{\text{Graph}} = \{\forall x(\neg Exx), \forall x \forall y(Exy \to Eyx)\}.$$

?

Nicht in diese Ecke schreiben!

(d) Die Klasse $\mathcal{S}$ aller „Mengensysteme“ $(S, \in)$. Dabei ist $\in$ ein zweistelliges Relationssymbol. Die Elemente aus S bezeichnen wir als „Mengen“ und wir sagen, dass eine Menge b die Menge a *enthält*, falls $a \in b$ gilt. Außerdem sollen folgende Eigenschaften erfüllt sein:

- Es gibt eine leere Menge (also eine Menge, die keine Elemente enthält).
- Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.

2

Nicht in diese Ecke schreiben!

(e) $\mathcal{K}_e := \{\mathcal{G} = (V, E, R, B) \in \mathcal{C} \mid$ in $\mathcal{G}$ sind nur endlich viele „rote“ Knoten$\}$

Dabei ist $\mathcal{C}$ die Klasse aller 2-*gefärbten* Graphen $\mathcal{G} = (V, E, R, B)$, das heißt, (V, E) ist ein ungerichteter Graph und R, B sind jeweils einstellige Relationen mit $V = R \mathbin{\dot\cup} B$. Knoten in R nennen wir „rote“ Knoten und Knoten in B nennen wir „blaue“ Knoten. Jeder Knoten ist demnach entweder rot oder blau *gefärbt*.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis das folgende (endliche) Axiomensystem Θ für die Klasse $\mathcal{C}$ der 2-gefärbten Graphen verwenden.

$$\Theta := \Phi_{\text{Graph}} \cup \{\forall x((Rx \lor Bx) \land \neg(Rx \land Bx))\}$$

?