Prof. Dr. M. Grohe
E. Fluck, L. Härtel, T. Novotny

Übungsblatt 4 mit Lösungen

Abgabetermin: Montag, der 3. Juni 2024 um 14:30

Hausaufgabe 3 (Homomorphismen) **2+2 Punkte**

Sei $\sigma = \{\dot{+}, \dot{*}, \dot{\leq}, \dot{0}, \dot{1}\}$ und sei $\mathfrak{A}$ die arithmetische Struktur mit Universum $\mathbb{N}$, die durch $\dot{\leq}^{\mathfrak{A}}$ total geordnet ist.
Finden Sie für die folgenden Definitionen von Abbildungen $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ alle Teilmengen $\sigma' \subseteq \sigma$, sodass für das σ'-Redukt von $\mathfrak{A}$ (also $\mathfrak{A}{\restriction}_{\sigma'}$) gilt, dass π ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}{\restriction}_{\sigma'}$ nach $\mathfrak{A}{\restriction}_{\sigma'}$.

a) Sei $\pi(n) := 42n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Sei $\pi(n) = \begin{cases} 2^m & \text{wobei } m \in \mathbb{N} \text{ die größte Zahl ist, sodass } 2^m \text{ teilt } n > 0, \\ 0 & \text{für } n = 0. \end{cases}$

Hinweis: Siehe Tutoriumsaufgabe 2 für die Definition von Homomorphismus.

Lösung:

Es geht nur darum, welche Funktionen und Relationen erhalten werden.

a) $\dot{+}^{\mathfrak{A}}$ wird erhalten. Für alle $x, y \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\pi(x \dot{+}^{\mathfrak{A}} y) = \pi(x + y) = 42(x + y) = 42x + 42y$$
$$\pi(x) \dot{+}^{\mathfrak{A}} \pi(y) = \pi(x) + \pi(y) = 42x + 42y.$$

$\dot{*}^{\mathfrak{A}}$ wird nicht erhalten. Es gilt

$$\pi(1 \dot{*}^{\mathfrak{A}} 1) = \pi(1 \cdot 1) = \pi(1) = 42$$
$$\pi(1) \dot{*}^{\mathfrak{A}} \pi(1) = \pi(1) \cdot \pi(1) = 42 \cdot 42 = 1764.$$

$\dot{\leq}^{\mathfrak{A}}$ wird erhalten. Für alle $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x \dot{\leq}^{\mathfrak{A}} y$ haben wir $\pi(x) = 42 \cdot x \dot{\leq}^{\mathfrak{A}} 42 \cdot y = \pi(y)$.

$\dot{0}^{\mathfrak{A}}$ wird erhalten. $\pi(\dot{0}^{\mathfrak{A}}) = \pi(0) = 42 \cdot 0 = 0 = \dot{0}^{\mathfrak{A}}$.

$\dot{1}^{\mathfrak{A}}$ wird nicht erhalten. $\pi(\dot{1}^{\mathfrak{A}}) = \pi(1) = 42 \neq 1 = \dot{1}^{\mathfrak{A}}$.

Die größte Teilmenge $\sigma' \subseteq \sigma$, sodass π ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}{\restriction}'_{\sigma}$ nach $\mathfrak{A}{\restriction}'_{\sigma}$ ist, ist $\sigma' = \{\dot{+}, \dot{\leq}, \dot{0}\}$.

b) $\dot{+}^{\mathfrak{A}}$ wird nicht erhalten.

$$\pi(3 \dot{+}^{\mathfrak{A}} 4) = \pi(3 + 4) = \pi(7) = 1$$
$$\pi(3) \dot{+}^{\mathfrak{A}} \pi(4) = \pi(3) + \pi(4) = 1 + 4 = 5.$$

$\dot{*}^{\mathfrak{A}}$ wird erhalten. Seien $x, y \in \mathbb{N}$. Falls x oder y ist 0, ist $\pi(x \dot{*}^{\mathfrak{A}} y) = \pi(x) \dot{*}^{\mathfrak{A}} \pi(y) = 0$. Nehmen wir also an, dass $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Dann

$$\pi(x \dot{*}^{\mathfrak{A}} y) = \pi(x \cdot y) = 2^{m_0}$$
$$\pi(x) \dot{*}^{\mathfrak{A}} \pi(y) = \pi(x) \cdot \pi(y) = 2^{m_1 + m_2},$$

wobei m_0, m_1, m_2 sind die größte Zahlen sodass 2^{m_0} teilt $x \cdot y$, 2^{m_1} teilt x, und 2^{m_2} teilt y. Das heißt, $x \cdot y$, x, y lassen sich wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= 2^{m_0} p_0 \\ x &= 2^{m_1} p_1 \\ y &= 2^{m_2} p_2 \end{aligned}$$

mit p_0, p_1, p_2 ungerade Zahlen. Die letzten zwei Zeilen ergeben $x \cdot y = 2^{m_1} p_1 \cdot 2^{m_2} p_2 = 2^{m_1 + m_2} p_1 p_2$. Da p_1, p_2 ungerade sind, muss auch $p_1 \cdot p_2$ ungerade sein. Da jede ganze Zahl eine eindeutige Darstellung als Produkt von Primzahlen hat [1], muss $m_1 + m_2 = m_0$.

$\dot{\leq}^{\mathfrak{A}}$ wird nicht erhalten. Es gilt $8 \dot{\leq}^{\mathfrak{A}} 9$, aber $\pi(8) = 8 \dot{\not\leq}^{\mathfrak{A}} 1 = \pi(9)$.

$\dot{0}^{\mathfrak{A}}$ wird nach Definition erhalten.

$\dot{1}^{\mathfrak{A}}$ wird erhalten, da $\pi(1) = 1$.

[1] eindeutig bis auf Permutation von den Primzahlen

Hausaufgabe 4 (Graphenhomomorphismen) 4 Punkte

Sei $\mathfrak{K}_3 = (\{1,2,3\}, E^{\mathfrak{K}_3})$ mit $E^{\mathfrak{K}_3} = \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$ der vollständige (ungerichtete) Graph auf 3 Knoten. Beweisen Sie, dass ein ungerichteter Graph $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$ genau dann 3-färbbar ist, wenn es einen Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{K}_3$ gibt.

Hinweis: Siehe Blatt 2 für die Definition von Dreifärbbarkeit.

Lösung:

Erst beweisen wir die Richtung von links nach rechts. Sei $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$ ein 3-färbbarer Graph und sei $c : G \to [3]$ die 3-Färbung. Das heißt also, dass für alle Kanten $\{u, v\} \in E^{\mathfrak{G}}$ gilt, dass $c(u) \neq c(v)$. Wir definieren die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi : G &\to [3] \\ v &\mapsto c(v) \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass π ein Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{K}_3$ ist. Sei $\{u, v\} \in E^{\mathfrak{G}}$ eine Kante in G. Dann ist $\{\pi(u), \pi(v)\} \in E^{\mathfrak{K}_3}$, da $\pi(u) = c(u) \neq c(v) = \pi(v)$.

Wir beweisen die Richtung von rechts nach links. Sei $\pi : G \to [3]$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{K}_3$. Wir definieren die Abbildung

$$\begin{aligned} c : G &\to [3] \\ v &\mapsto \pi(v) \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass c eine 3-Färbung von $\mathfrak{G}$ ist. Sei $\{u, v\} \in E^{\mathfrak{G}}$ eine Kante in $\mathfrak{G}$. Dann ist $c(u) = \pi(u) \neq \pi(v) = c(v)$, da $\{\pi(u), \pi(v)\} \in E^{\mathfrak{K}_3}$ (weil π ein Homomorphismus ist).

Hausaufgabe 5 (Substrukturen) **4+3 Punkte**

a) Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}\times\mathbb{N}, s^{\mathfrak{A}}, p_1^{\mathfrak{A}}, p_2^{\mathfrak{A}})$ die Struktur mit Universum $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, einer binären Funktion $s^{\mathfrak{A}}$ definiert durch

$$s^{\mathfrak{A}}((n_1, m_1), (n_2, m_2)) = (\max\{n_1, n_2\}, \max\{m_1, m_2\})$$

für alle $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, und zwei unären Funktionen $p_1^{\mathfrak{A}}$ und $p_2^{\mathfrak{A}}$ definiert durch

$$p_1^{\mathfrak{A}}(n, m) = (\max\{n - 1, 0\}, m),$$
$$p_2^{\mathfrak{A}}(n, m) = (n, \max\{m - 1, 0\})$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Beschreiben Sie alle Substrukturen der Struktur $\mathfrak{A}$. Beweisen Sie, dass es keine andere Substrukturen von $\mathfrak{A}$ gibt.

b) Sei $\mathfrak{K} = (\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \dot{0}^{\mathfrak{K}}, \dot{1}^{\mathfrak{K}}, \dot{+}^{\mathfrak{K}}, (f_q^{\mathfrak{K}})_{q\in\mathbb{Q}})$ eine Struktur mit Universum

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\},$$

mit Konstanten $\dot{0}^{\mathfrak{K}} = 0 + 0 \cdot \sqrt{2}$, $\dot{1}^{\mathfrak{K}} = 1 + 0 \cdot \sqrt{2}$ und der Funktion $\dot{+}^{\mathfrak{K}}$, die wie üblich definiert ist, und für jedes $q \in \mathbb{Q}$ ist die unäre Funktion $f_q^{\mathfrak{K}}$ definiert durch $f_q^{\mathfrak{K}}(x) = q \cdot x$.

Geben Sie eine Substruktur $\mathfrak{K}_0$ von $\mathfrak{K}$ an, sodass es keine echte Substruktur von $\mathfrak{K}_0$ gibt. Beweisen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

a) Nach Beobachtung 3.21 ist das Universum von einer Substruktur von $\mathfrak{A}$ abgeschlossen in $\mathfrak{A}$. Gleichzeitig gilt nach Lemma 3.22, dass jede in $\mathfrak{A}$ abgeschlossene Menge B eine eindeutige Substruktur induziert. Um also alle Substrukturen zu finden, reicht es, alle in $\mathfrak{A}$ abgeschlossene Mengen zu finden.

Sei B eine in $\mathfrak{A}$ abgeschlossene Menge. Erst beweisen wir folgende Hilfsaussage:

Claim 1. Sei $(x, y) \in B$. Für alle $(i, j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ mit $i \leq x, j \leq y$ gilt, dass $(i, j) \in B$.

Beweis. Da B in $\mathfrak{A}$ abgeschlossen ist, müssen Verkettungen von Funktionen $p_1^{\mathfrak{A}}, p_2^{\mathfrak{A}}$ angewendet auf (x, y) in B liegen. Insbesondere, durch die $x - i$-fache Verkettung von $p_1^{\mathfrak{A}}$ verkettet mit $y - j$-fache Verkettung von $p_2^{\mathfrak{A}}$ angewendet auf (x, y) bekommen wir, dass $(i, j) \in B$ gilt. □

Wir betrachten die folgende Fallunterscheidung.

1. Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ sodass für alle $(i, j) \in B$ gilt, dass $i \leq m$. Sei m die kleinste solche Zahl. Dann gibt es ein $m' \in \mathbb{N}$ mit $(m, m') \in B$: Sonst würde für alle $(i, j) \in B$ gelten, dass $i \leq m - 1$, was der Minimalität von m widerspricht.

i. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ sodass für alle $(i,j) \in B$ gilt, dass $j \leq n$. Sei n die kleinste solche Zahl. Es gilt analog, dass es ein $n' \in \mathbb{N}$ gibt mit $(n', n) \in B$.

Claim 2. Für jedes Element $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sodass $i \leq m, j \leq n$ gilt, dass $(i,j) \in B$.

Beweis. Da $(m, m') \in B$ und $(n', n) \in B$, ist auch $s^{\mathfrak{A}}((m,m'),(n',n)) = (m,n) \in B$. Aus Claim 1. folgt der Claim. □

Da die Menge $A_{m,n} := \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i \leq m \text{ und } j \leq n\}$ abgeschlossen in $\mathfrak{A}$ ist, gilt $B = A_{m,n}$.

ii. Es gibt kein solches $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element $(x,y) \in B$ mit $n < y$. Insbesondere ist B unendlich.

Claim 3. Für jedes $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $i \leq m$ gilt $(i,j) \in B$.

Beweis. Sei $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $i \leq m$. Dann gibt es ein Element $(x,y) \in B$ sodass $j < y$. Da B unter $\mathfrak{A}$ abgeschlossen ist, muss auch $s^{\mathfrak{A}}((m,m'),(x,y)) = (m, \max(m',y)) \in B$ sein. Da $i \leq m$ und $j < y \leq \max(m',y)$, muss nach Claim 1 auch $(i,j) \in B$ sein. □

Da die Menge $A_{m,\infty} := \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i \leq m\}$ abgeschlossen in $\mathfrak{A}$ ist, gilt $B = A_{m,\infty}$.

2. Es gibt kein solches $m \in \mathbb{N}$. Dann gibt es für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein Element $(x,y) \in B$ mit $m < x$. Insbesondere ist B unendlich.

i. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ sodass für alle $(i,j) \in B$ gilt, dass $j \leq n$.

Dieser Fall ist symmetrisch zu Fall 1.ii. Es gilt $B = A_{\infty,n} := \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid j \leq n\}$

ii. Es gibt kein solches $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element $(x,y) \in B$ mit $n < y$.

Claim 5. Für jedes $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gilt $(i,j) \in B$.

Beweis. Sei $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Dann gibt es ein Element $(x,x') \in B$ sodass $i < x$ und ein Element $(y',y) \in B$ sodass $j < y$. Da B unter $\mathfrak{A}$ abgeschlossen ist, muss auch $s^{\mathfrak{A}}((x,x'),(y',y)) = (\max(x,x'), \max(y',y)) \in B$ sein. Da $i < x \leq \max(x,x')$ und $j < y \leq \max(y',y)$, muss nach Claim 1 auch $(i,j) \in B$ sein. □

Da die Menge $A_{\infty,\infty} := \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid j \leq n\}$ abgeschlossen in $\mathfrak{A}$ ist, gilt $B = A_{\infty,\infty}$.

Wir haben also alle Möglichkeiten gefunden, wie eine in $\mathfrak{A}$ abgeschlossene Menge aussehen kann. Es gibt also vier Arten von Substrukturen:

- Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Substruktur $\mathfrak{A}_{m,n}$ mit Universum $A_{m,n}$. (Fall 1.i.)

- Für alle $m \in \mathbb{N}$ gibt es eine Substruktur $\mathfrak{A}_{m,\infty}$ mit Universum $A_{m,\infty}$. (Fall 1.ii.)
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Substruktur $\mathfrak{A}_{\infty,n}$ mit Universum $A_{\infty,n}$. (Fall 2.i.)
- Es gibt die Substruktur $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\infty,\infty}$ mit Universum $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. (Fall 2.ii.)

b) Sei $\mathfrak{K}$ die Struktur wie in der Aufgabestellung definiert. Sei $\mathfrak{K}'$ eine Substruktur mit Universum K'. Dann muss $\dot{1}^{\mathfrak{K}} \in K'$ sein. Da K' in $\mathfrak{K}$ abgeschlossen ist, muss auch für jedes $q \in \mathbb{Q}$ auch $c_q^{\mathfrak{K}}(\dot{1}^{\mathfrak{K}}) = q \in K'$ sein. Also $\mathbb{Q} \subseteq K'$.

Wir behaupten, dass $\mathbb{Q}$ in $\mathfrak{K}$ abgeschlossen ist. Es gilt $\dot{0}^{\mathfrak{K}} = 0 \in \mathbb{Q}$, $\dot{1}^{\mathfrak{K}} = 1 \in \mathbb{Q}$, und für jedes $r, q \in \mathbb{Q}$ gilt, dass $r \dot{+}^{\mathfrak{K}} q = r + q \in \mathbb{Q}$ und auch $f_q^{\mathfrak{K}}(r) = q \cdot r \in \mathbb{Q}$. Da $\mathbb{Q}$ unter allen Funktionen und Relationen abgeschlossen ist, ist $\mathbb{Q}$ abgeschlossen in $\mathfrak{K}$.

Nach Lemma 3.22 gibt es genau eine Struktur $\mathfrak{K}_0$ mit Universum $\mathbb{Q}$. Da wir bewiesen haben, dass für alle Substrukturen $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{K}$ gilt $\mathbb{Q} \subseteq K'$, kann es keine echte Substrukturen von $\mathfrak{K}_0$ geben.

Programmieraufgabe 6 (DPLL) 5 Punkte

- Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt über **Speichern** oder **Abgabe** in VPL. Bis zur Abgabefrist könnt ihr so oft abgeben, wie ihr wollt. Wir bewerten nur die aktuellste Abgabe.
- Ihr könnt in **assignment.py** euren eigenen Code schreiben und dabei die von uns zur Verfügung gestellten Bibliotheken benutzen. Achtet allerdings darauf, keine Dateien zu löschen und die Header der Funktionen unverändert zu lassen.
- Nicht alle Importe sind möglich, manche Bibliotheken werden also einen Fehler wie z.B. `Module assignment tries to import numpy, which does not exist` liefern, wenn ihr versucht diese zu verwenden.
- Wir empfehlen, den Code mindestens einmal zu testen, mit **Ausführen** oder Strg+F11. Dies kann einige Sekunden dauern.
- Punkte und Code sind automatisch mit eurer Abgabegruppe synchronisiert.

In dieser Woche schreiben wir die Hauptroutine des SAT-Solvers DPLL. Dieser soll für Eingaben der Klasse `CNF` in konjunktiver Normalform eine erfüllende `Interpretation` berechnen, oder `None` ausgeben, falls keine solche existiert.

Implementieren Sie zunächst die Heuristik zur Auswahl von Literalen `choose_literal(formula: CNF) -> LiteralFormula`, welche als Eingabe ein Objekt der Klasse `CNF` nimmt und entsprechend einer beliebigen Heuristik ein Literal der Formel ausgibt. Die Auswahl des Literals kann Auswirkungen auf die Effizienz von DPLL haben, ist aber im Vergleich zur Effizienz von `simplify` für unsere Anwendungen vernachlässigbar.

Schreiben Sie anschließend die Funktion `dpll(formula: CNF) -> Interpretation | None`, welche als Eingabe ein Objekt der Klasse `CNF` nimmt und, falls dieses eine erfüllbare Formel in konjunktiver Normalform ist, ein Modell als `Interpretation` ausgibt, oder sonst `None`. DPLL ist auf Seite 1.72 der Vorlesung dokumentiert.

Lösung: