Kapitel 4

Logik der 1. Stufe

Kontext und Ziele

Die Logik der 1. Stufe, auch Prädikatenlogik oder Prädikatenlogik der 1. Stufe genannt, ist die wichtigste formale Logik. Sie ist bereits so reichhaltig, dass sich in ihr die sowohl praktisch die gesamte Mathematik (über den Umweg der axiomatischen Mengenlehre) als auch zahlreiche Anwendungen in der Informatik formalisieren lassen.

In diesem Kapitel definieren wir formal die Syntax und Semantik der Logik der 1. Stufe. Wir leiten grundlegende Eigenschaften her und betrachten zahlreiche Beispiele, um uns mit der Modellierung in der Logik der 1. Stufe vertraut zu machen.

4.1 Syntax

Symbole, Variablen und Alphabet

- σ bezeichnet in diesem Kapitel immer eine Symbolmenge.
- Weiterhin bezeichnet Var eine feste abzählbar unendliche Menge, deren Elemente wir als Variablen bezeichnen.
- Wir nehmen an, dass die Mengen σ, Var, und $\{\bot, \top, \neg, \vee, \wedge, \to, \exists, \forall, \doteq, \,,\, , (,)\}$ disjunkt sind.
- Das Alphabet der Logik der 1. Stufe über σ ist

$$\Sigma_{\mathsf{L}(\sigma)} := \sigma \cup \mathrm{Var} \cup \{\bot, \top, \neg, \vee, \wedge, \to, \exists, \forall, \doteq, \,,\, , (,)\}.$$

Komma ist Teil des Alphabets

Definition 4.1

Die Menge $\mathrm{T}(\sigma) \subseteq \Sigma^*_{\mathrm{L}(\sigma)}$ aller σ-Terme ist rekursiv wie folgt definiert:

(i) $x \in \mathrm{T}(\sigma)$ für alle $x \in \mathrm{Var}$;

(ii) für alle $k \in \mathbb{N}$, alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$, und alle $\theta_1, \dots, \theta_k \in \Sigma^*_{\mathrm{L}(\sigma)}$, wenn $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathrm{T}(\sigma)$, dann $f(\theta_1, \dots, \theta_k) \in \mathrm{T}(\sigma)$.

Beispiele 4.2

Seien $f/2, g/1, c \in \sigma$, und $x, y, z \in \mathrm{Var}$. Weiterhin sei $0 \notin \sigma \cup \mathrm{Var}$

σ-Terme sind dann zum Beispiel

$$c, \quad x, \quad f(g(c), y), \quad g(g(g(g(g(g(g(c))))))).$$

Beachte: Bei Konstantensysmbolen c (also 0-stelligen Funktionssymbolen) schreiben wir einfach c statt $c()$ um den nach Regel (ii) geformten Term zu bezeichnen.

Keine σ-Terme sind $g(0), \quad f(c, g(c), y), \quad g^{\mathfrak{A}}(c), \quad g(g(g(g(g(g(g(c)))))))).$

Definition 4.3

Die Menge $\mathsf{L}(\sigma) \subseteq \Sigma^*_{\mathsf{L}(\sigma)}$ aller σ-Formeln der Logik der 1. Stufe ist rekursiv wie folgt definiert.

(i) Für alle $\theta_1, \theta_2 \in \mathsf{T}(\sigma)$ ist $\theta_1 \doteq \theta_2 \in \mathsf{L}(\sigma)$.

(ii) Für alle $k \in \mathbb{N}$, alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$ und alle $\theta_1, \ldots, \theta_k \in \mathsf{T}(\sigma)$ ist $R(\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \mathsf{L}(\sigma)$.

(iii) $\bot, \top \in \mathsf{L}(\sigma)$.

(iv) Wenn $\varphi, \psi \in \mathsf{L}(\sigma)$, dann $\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi) \in \mathsf{L}(\sigma)$.

(v) Für alle $x \in \mathrm{Var}$, wenn $\varphi \in \mathsf{L}(\sigma)$, dann $\exists x\varphi, \forall x\varphi \in \mathsf{L}(\sigma)$.

Ergänzungen zu Seite 4.6

Beachte

$\exists x \varphi \wedge \psi$ ist nicht die gleiche Formel wie $\exists x(\varphi \wedge \psi)$. Informell ist $\exists x \varphi \wedge \psi$ als $(\exists x \varphi) \wedge \psi$ zu lesen.

Bemerkungen

- $\exists$ und $\forall$ bezeichnen wir als Quantoren. Dabei ist $\exists$ der Existenzquantor („es existiert …“) und $\forall$ der Allquantor („für alle …“).
- σ-Formeln, die ausschließlich mit den Regeln (i)–(iv) gebildet werden, nennen wir quantorenfreie Formeln.
- σ-Formeln, die ausschließlich mit den Regeln (i)-(iii) gebildet werden, nennen wir atomare Formeln.

Beispiele 4.4

Seien $E/2, R/3, g/1, c \in \sigma$ und $x, y, z \in \mathrm{Var}$. Folgende Wörter über $\Sigma_{\mathsf{L}(\sigma)}$ sind dann σ-Formeln:

$$
\begin{gathered}
g(c) \doteq g(g(g(x))), \\
((E(x, y) \wedge g(x) \doteq y) \rightarrow E(y, x)), \\
\forall y \exists x g(x) \doteq y, \\
\forall x \forall y((E(x, c) \wedge E(y, c)) \rightarrow \exists z R(g(x), g(g(y)), z))
\end{gathered}
$$

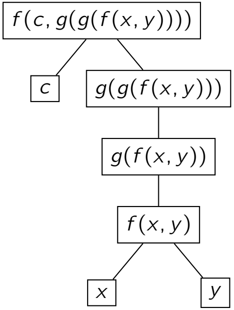
Syntaxbäume

Genau wie bei aussagenlogischen Formeln können wir die Struktur von Termen und Formeln der Logik der ersten Stufe anhand von Syntaxbäumen darstellen.

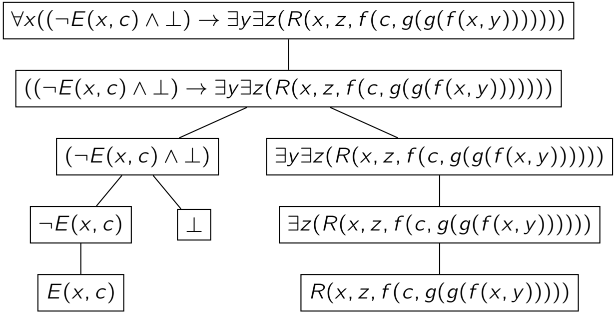
Beispiele 4.5

Seien $E/2, f/2, g/1, c, R/3 \in \sigma$ und $x, y, z \in \mathrm{Var}$.

σ-Term $f(c, g(g(f(x, y))))$:



σ-Formel $\forall x((\neg E(x, c) \wedge \bot) \to \exists y \exists z(R(x, z, f(c, g(g(f(x, y)))))))$:



Lemma 4.6

(1) *Jeder σ-Term hat genau einen Syntaxbaum.*

(2) *Jede σ-Formel hat genau einen Syntaxbaum.*

Lemma 4.7

(1) *Kein σ-Term ist Präfix eines anderen σ-Terms.*

(2) *Keine σ-Formel ist Präfix einer anderen σ-Formel.*

Bemerkung 4.8

Ein σ-Term kann Präfix einer σ-Formel sein.

Beispiel: $f(x)$ ist Präfix von $f(x) \doteq y$.

Ergänzungen zu Seite 4.10

Beide Lemmata lassen sich leicht per Induktion über den Aufbau der Terme bzw. Formeln beweisen. Wir verzichten auf die Beweise.

Subterme und Subformeln

- Die Terme η, die im Syntaxbaum eines σ-Terms θ als Knotenbeschriftung vorkommen, nennen wir Subterme von θ.
- Die Menge aller Subterme von θ bezeichnen wir mit $\mathrm{sub}(\theta)$, die Menge aller Symbole aus σ, die in θ vorkommen, mit $\mathrm{symb}(\theta)$ und die Menge aller Variablen aus Var, die in θ vorkommen, mit $\mathrm{var}(\theta)$.
- Die Formeln ψ, die im Syntaxbaum einer σ-Formel φ als Knotenbeschriftung vorkommen, nennen wir Subformeln von φ.
- Die Menge aller Subformeln von φ bezeichnen wir mit $\mathrm{sub}(\varphi)$, die Menge aller Symbole aus σ, die in φ vorkommen, mit $\mathrm{symb}(\varphi)$, die Menge aller Variablen aus Var, die in φ vorkommen, mit $\mathrm{var}(\varphi)$.
- Für eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$ setzen wir $\mathrm{var}(\Phi) := \bigcup_{\varphi \in \Phi} \mathrm{var}(\varphi)$.

Intuitive Bedeutung gebundener und freier Variablen

Sei φ eine σ-Formel, und sei $\exists x \psi$ oder $\forall x \psi$ eine Subformel von φ. Dann sind alle Vorkommen von x in ψ im Wirkungsbereich des Quantors $\exists$ bzw. $\forall$. Wir sagen, dass der Quantor alle Vorkommen von x in seinem Wirkungsbereich bindet.

Variablen, die auch nichtgebunden vorkommen sind frei.

Ergänzungen zu Seite 4.12

Man vergleiche freie und gebundene Variablen in Formeln mit globalen und lokalen Variablen in Programmen.

Definition 4.9

Die Menge $\mathrm{frei}(\varphi)$ der freien Variablen einer σ-Formel φ ist rekursiv wie folgt definiert:

(i) $\mathrm{frei}(\theta_1 \doteq \theta_2) := \mathrm{var}(\theta_1) \cup \mathrm{var}(\theta_2)$;

(ii) $\mathrm{frei}\big(R(\theta_1, \ldots, \theta_k)\big) := \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{var}(\theta_i)$;

(iii) $\mathrm{frei}(\bot) := \mathrm{frei}(\top) := \emptyset$;

(iv) $\mathrm{frei}(\neg\varphi) := \mathrm{frei}(\varphi)$; $\mathrm{frei}\big((\varphi * \psi)\big) := \mathrm{frei}(\varphi) \cup \mathrm{frei}(\psi)$ für $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$;

(v) $\mathrm{frei}(\exists x\varphi) := \mathrm{frei}(\forall x\varphi) := \mathrm{frei}(\varphi) \setminus \{x\}$.

Einen Term oder eine Formel ξ ohne freie Variablen (also mit $\mathrm{frei}(\xi) = \emptyset$) nennen wir geschlossen, einen Term oder eine Formel mit freien Variablen offen. Geschlossene Formeln nennen wir auch Sätze.

Für eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$ sei $\mathrm{frei}(\Phi) := \bigcup_{\varphi \in \Phi} \mathrm{frei}(\varphi)$.

Beispiele 4.10

Seien $R/3, f/2, c \in \sigma$, $x, y, z \in \mathrm{Var}$.

- $\varphi := f(x, c) \doteq y$

  $\mathrm{frei}(\varphi) = \mathrm{var}(\varphi) = \{x, y\}$
- $\varphi := \exists y f(x, c) \doteq y$

  $\mathrm{var}(\varphi) = \{x, y\}$, $\mathrm{frei}(\varphi) = \{x\}$
- $\varphi := \forall x\big(\exists y f(x, c) \doteq y \wedge \forall z R(x, y, z)\big)$

  $\mathrm{var}(\varphi) = \{x, y, z\}$, $\mathrm{frei}(\varphi) = \{y\}$

Konventionen zur Notation

- Variablen bezeichnen wir mit lateinischen Kleinbuchstaben: v, w, x, y, z (und Varianten wie v_1, x').
- Terme bezeichnen wir mit griechischen Kleinbuchstaben: θ, η, ζ.
- Formeln bezeichnen wir mit griechischen Kleinbuchstaben: φ, ψ, χ.
- Formelmengen bezeichnen wir mit griechischen Großbuchstaben: Φ, Ψ. Für endliche Formelmengen verwenden wir häufig Γ, Δ.
- Wir verwenden die Konventionen bezügliche Symbolmengen und Symbolen, die wir im letzten Kapitel eingeführt haben, etwa $R/2$ für eine zweistelliges Relationssymbol.
- Bei Symbolen wie beispielsweise $\dot{+}$ (2-stelliges Funktionssymbol), $\dot{\leq}$ (2-stelliges Relationssymbol) verwenden wir die Infixschreibweise auch in Termen und Formeln.

  Beispielsweise schreiben wir $(\theta_1 \dot{+} \theta_2)$ statt $\dot{+}(\theta_1, \theta_2)$ und $\theta_1 \dot{\leq} \theta_2$ statt $\dot{\leq}(\theta_1, \theta_2)$.
- Wir verwenden wieder $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ als Abkürzung für $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

Klammerkonventionen

Wir übernehmen alle Regeln zur Klammerung, die wir für die Aussagenlogik festgelegt haben. Außerdem legen wir fest, dass $\exists x, \forall x$ stärker binden als die Junktoren.

Insgesamt ergeben sich folgen Konventionen:

- $\exists x$, $\forall x$, $\neg$ binden stärker als $\vee, \wedge$, die wiederum stärker als $\rightarrow$ binden.
- Bei iterierten Disjunktionen oder Konjunktionen vereinbaren wir Linksklammerung.
- Wir schreiben $\bigwedge_{i=1}^{k} \varphi_i$ statt $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k$ und entsprechend für Disjunktionen $\bigvee$.

Wir lassen dann nach Möglichkeit überflüssige Klammern weg.

Computerlesbare Darstellung von Formeln

Wir erweitern unsere computerlesbare Syntax von aussagenlogischen Formeln auf Formeln der Logik der ersten Stufe.

- Für die booleschen Konstanten verwenden wir `0` statt $\bot$ und `1` statt $\top$.
- Für die Junktoren verwenden wir `~` statt $\neg$, `/\` statt $\wedge$, `\/` statt $\vee$, und `->` statt $\to$.
- Wir verwenden `ex` für $\exists$ und `fa` für $\forall$.
- Symbole sind alle Wörter über Σ_{ASCII}, die aus Groß- und Kleinbuchstaben, Ziffern, sowie Unter- und Bindestrich bestehen und die mit einem Großbuchstaben oder einem Unterstrich beginnen. Wir unterscheiden dabei nicht zwischen Relations-, Funktions- und Konstantensymbolen.
- Variablen sind alle Wörter über Σ_{ASCII}, die mit einem Dollarzeichen (‘`$`’) beginnen und danach aus Groß- und Kleinbuchstaben, Ziffern, Unterstrich und Bindestrich bestehen.

Beispiel 4.11

Die Formel $\exists x \forall y (R(x, f(x, y), c) \wedge \bot)$ könnte in dieser Syntax folgendermaßen aussehen

```
ex $x fa $y ( R( $x, F( $x, $y ), C ) /\ 0 )
```

4.2 Semantik

Wir interpretieren σ-Terme und σ-Formeln über σ-Strukturen, die die Bedeutung der Symbole aus σ festlegen. Allerdings müssen wir auch noch festlegen, wie wir die Variablen interpretieren. Das ist die Aufgabe der Belegungen.

Definition 4.12

Eine σ-Interpretation ist ein Paar $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$, bestehend aus einer σ-Struktur $\mathfrak{A}$ und einer Belegung $\mathfrak{b} : \mathsf{Var} \to A$ der Variablen in A.

Notation

Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ eine σ-Interpretation, $x \in \mathrm{Var}$ und $a \in A$.

- $\mathfrak{b}\frac{a}{x}$ ist die Belegung, die aus $\mathfrak{b}$ entsteht, wenn man den Wert von x auf a abändert.

  Formal: $\mathfrak{b}\frac{a}{x} : \mathrm{Var} \to A$ mit

$$\mathfrak{b}\frac{a}{x}(y) := \begin{cases} a & \text{wenn } y = x, \\ \mathfrak{b}(y) & \text{wenn } y \in \mathrm{Var} \setminus \{x\}. \end{cases}$$

- $\mathfrak{I}\frac{a}{x} := \left(\mathfrak{A}, \mathfrak{b}\frac{a}{x}\right)$ ist die entsprechende σ-Interpretation.
- Für $x_1, \ldots, x_k \in \mathrm{Var}$ und $a_1, \ldots, a_k \in A$ schreiben wir auch $\mathfrak{b}\frac{a_1 \ldots a_k}{x_1 \ldots x_k}$ statt $\left(\cdots\left(\left(\mathfrak{b}\frac{a_1}{x_1}\right)\frac{a_2}{x_2}\right)\cdots\right)\frac{a_k}{x_k}$ und entsprechend $\mathfrak{I}\frac{a_1 \ldots a_k}{x_1 \ldots x_k}$.

Definition 4.13

Wir definieren für jeden σ-Term $\theta \in \mathrm{T}(\sigma)$ und jede σ-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ einen Wert $[\![\theta]\!]^{\mathfrak{I}} \in A$ rekursiv wie folgt:

(i) $[\![x]\!]^{\mathfrak{I}} := \mathfrak{b}(x)$ für alle $x \in \mathrm{Var}$;

(ii) $[\![f(\theta_1, \dots, \theta_k)]\!]^{\mathfrak{I}} := f^{\mathfrak{A}}\Big([\![\theta_1]\!]^{\mathfrak{I}}, \dots, [\![\theta_k]\!]^{\mathfrak{I}}\Big)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, alle k-stelligen $f \in \sigma$ und alle $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathrm{T}(\sigma)$.

Beispiel 4.14

Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{N}, \mathfrak{b})$, wobei $\mathfrak{N}$ das Standardmodell der Arithmetik ist.

Für $x, y, z \in \mathrm{Var}$ seien $\mathfrak{b}(x) = 3, \mathfrak{b}(y) = 0, \mathfrak{b}(z) = 139$.

- $[\![z]\!]^{\mathfrak{I}} = 139$;
- $[\![\dot{1}]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$;
- $[\![y \dot{*} (z \dot{*} (\dot{1} \dot{+} \dot{1} \dot{+} \dot{1} \dot{+} \dot{1}) \dot{+} x) \dot{+} x \dot{*} (\dot{0} \dot{+} \dot{1})]\!]^{\mathfrak{I}} = 3$

  Hier verwenden wir die üblichen Klammerkonventionen für die Arithmetik.

Beispiel 4.15

Sei $M = \{a, b, c, d, e\}$, und sei $\mathfrak{I} = \left(\mathfrak{P}_M, \mathfrak{b}\right)$, wobei $\mathfrak{P}_M$ die Potenzmengenalgebra über M ist.

Für $x \in \mathrm{Var}$ sei $\mathfrak{b}(x) = \{a, b, c\}$.

- $[\![\dot{1}]\!]^{\mathfrak{I}} = M$;
- $[\![\dot{\sim}(x)]\!]^{\mathfrak{I}} = \{d, e\}$;
- $[\![(x \mathbin{\dot{\sqcup}} \dot{\sim}(x))]\!]^{\mathfrak{I}} = M$.

Beispiel 4.16

Seien $f/2, g/1, c \in \sigma$ und $x, y \in \mathrm{Var}$, und sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ eine σ-Interpretation mit

$$A = [4], \qquad \begin{array}{c|cccc} f^{\mathfrak{A}} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{array}, \qquad \begin{array}{c|cccc} g^{\mathfrak{A}} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline & 3 & 2 & 1 & 4 \end{array}, \qquad c^{\mathfrak{A}} = 4$$

und $\mathfrak{b}(x) = 1$, $\mathfrak{b}(y) = 3$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} [\![g(f(f(c,x),y))]\!]^{\mathfrak{I}} &= g^{\mathfrak{A}}\Big(f^{\mathfrak{A}}\big(f^{\mathfrak{A}}(\overbrace{c^{\mathfrak{A}}}^{=4}, \overbrace{\mathfrak{b}(x)}^{=1}), \overbrace{\mathfrak{b}(y)}^{=3} \big)\Big) \\ &= g^{\mathfrak{A}}\Big(f^{\mathfrak{A}}\big(\underbrace{f^{\mathfrak{A}}(4,1)}_{=4}, 3\big)\Big) = g^{\mathfrak{A}}\Big(\underbrace{f^{\mathfrak{A}}(4,3)}_{=4} \Big) = g^{\mathfrak{A}}(4) = 4. \end{aligned}$$

Definition 4.17

Wir definieren für jede σ-Formel $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ und jede σ-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ einen Wahrheitswert $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} \in \{0, 1\}$ rekursiv wie folgt:

(i) $$[\![\theta_1 \doteq \theta_2]\!]^{\mathfrak{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\theta_1]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\theta_2]\!]^{\mathfrak{I}}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{T}(\sigma)$;

(ii) $$[\![R(\theta_1, \ldots, \theta_k)]\!]^{\mathfrak{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } \left([\![\theta_1]\!]^{\mathfrak{I}}, \ldots, [\![\theta_k]\!]^{\mathfrak{I}}\right) \in R^{\mathfrak{A}}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, all k-stelligen $R \in \sigma$ und alle $\theta_1, \ldots, \theta_k \in \mathrm{T}(\sigma)$;

(iii) $[\![\bot]\!]^{\mathfrak{I}} := 0$, $[\![\top]\!]^{\mathfrak{I}} := 1$

(iv) $$\begin{aligned} [\![\neg\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} &:= 1 - [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}}, \\ [\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!]^{\mathfrak{I}} &:= \min\left\{ [\![\varphi_1]\!]^{\mathfrak{I}}, [\![\varphi_2]\!]^{\mathfrak{I}} \right\}, \\ [\![\varphi_1 \vee \varphi_2]\!]^{\mathfrak{I}} &:= \max\left\{ [\![\varphi_1]\!]^{\mathfrak{I}}, [\![\varphi_2]\!]^{\mathfrak{I}} \right\}, \\ [\![\varphi_1 \to \varphi_2]\!]^{\mathfrak{I}} &:= \max\left\{ 1 - [\![\varphi_1]\!]^{\mathfrak{I}}, [\![\varphi_2]\!]^{\mathfrak{I}} \right\} \end{aligned}$$

für alle $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{L}(\sigma)$;

Semantik der Formeln (Forts.)

Definition 4.17 (Forts.)

(iv) $$[\![\exists x \varphi]\!]^{\mathfrak{I}} := \max_{a \in A} [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}} = \begin{cases} 1 & \text{falls es ein } a \in A \text{ gibt, so dass } [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}} = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$[\![\forall x \varphi]\!]^{\mathfrak{I}} := \min_{a \in A} [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}} = \begin{cases} 1 & \text{falls für alle } a \in A \text{ gilt: } [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}} = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

für alle $x \in \mathrm{Var}$ und alle $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$.

Beispiel 4.18

Seien $R/3, f/2, c \in \sigma$ und $x, y, z \in \mathrm{Var}$, und sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ eine σ-Interpretation mit

$$A = [4], \quad \begin{array}{c|cccc} f^{\mathfrak{A}} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{array}, \quad R^{\mathfrak{A}} = \big\{(1,2,3), (2,3,4), (3,4,1), (4,1,2)\big\}, \qquad c^{\mathfrak{A}} = 4$$

und $\mathfrak{b}(x) = 1$, $\mathfrak{b}(y) = 3$.

Dann gilt

- $[\![f(y,y) \doteq x]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$;
- $[\![f(y,y) \doteq x \to R(f(y,y), x, c)]\!]^{\mathfrak{I}} = 0$;
- $\Big[\!\!\Big[\forall y \big(f(y,y) \doteq x \vee f(y,y) \doteq c \big) \Big]\!\!\Big]^{\mathfrak{I}} = 1$;
- $[\![\forall x \exists y \exists z R(x,y,z)]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$.

- Es gilt $[\![f(y,y)]\!]^{\mathfrak{I}} = f^{\mathfrak{A}}\big(\mathfrak{b}(y), \mathfrak{b}(y)\big) = f^{\mathfrak{A}}(3,3) = 1$ und $[\![x]\!]^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{b}(x) = 1$.
  Also $[\![f(y,y)]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![x]\!]^{\mathfrak{I}}$ und damit $[\![f(y,y) \doteq x]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$.
- Es gilt $\big([\![f(y,y)]\!]^{\mathfrak{I}}, [\![x]\!]^{\mathfrak{I}}, [\![c]\!]^{\mathfrak{I}}\big) = \big(f^{\mathfrak{A}}(\mathfrak{b}(y), \mathfrak{b}(y)), \mathfrak{b}(x), c^{\mathfrak{A}}\big) = (1,1,4) \notin R^{\mathfrak{A}}$. Also $[\![R(f(y,y),x,c)]\!]^{\mathfrak{I}} = 0$. Weil $[\![f(y,y) \doteq x]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
[\![f(y,y) \doteq x \to R(f(y,y),x,c)]\!]^{\mathfrak{I}} &= \max\big\{1 - [\![f(y,y) \doteq x]\!]^{\mathfrak{I}}, [\![R(f(y,y),x,c)]\!]^{\mathfrak{I}}\big\} \\
&= \max\{1-1, 0\} = 0.
\end{aligned}$$

- Es gilt $[\![f(y,y)]\!]^{\mathfrak{I}\frac{1}{y}} = f^{\mathfrak{A}}\big(\mathfrak{b}\frac{1}{y}(y), \mathfrak{b}\frac{1}{y}(y)\big) = f^{\mathfrak{A}}(1,1) = 1$ und $[\![x]\!]^{\mathfrak{I}\frac{1}{y}} = \mathfrak{b}\frac{1}{y}(x) = \mathfrak{b}(x) = 1$. Also $[\![f(y,y) \doteq x]\!]^{\mathfrak{I}\frac{1}{y}} = 1$ und damit

$$\begin{aligned}[\![f(y,y) \doteq x \vee f(y,y) \doteq c]\!]^{\mathfrak{I}\frac{1}{y}} &= \max\left\{ [\![f(y,y) \doteq x]\!]^{\mathfrak{I}\frac{1}{y}}, [\![f(y,y) \doteq c]\!]^{\mathfrak{I}\frac{1}{y}} \right\}\\ &= \max\left\{1, [\![f(y,y) \doteq c]\!]^{\mathfrak{I}\frac{1}{y}} \right\} = 1.\end{aligned}$$

Ähnlich gilt $[\![f(y,y) \doteq x]\!]^{\mathfrak{I}\frac{3}{y}} = 1$ und damit $[\![f(y,y) \doteq x \vee f(y,y) \doteq c]\!]^{\mathfrak{I}\frac{3}{y}} = 1$.
Außerdem gilt $[\![f(y,y)]\!]^{\mathfrak{I}\frac{2}{y}} = f^{\mathfrak{A}}(2,2) = 4$ und $[\![c]\!]^{\mathfrak{I}\frac{1}{y}} = c^{\mathfrak{A}} = 4$. Also $[\![f(y,y) \doteq c]\!]^{\mathfrak{I}\frac{2}{y}} = 1$ und damit

$$\begin{aligned}[\![f(y,y) \doteq x \vee f(y,y) \doteq c]\!]^{\mathfrak{I}\frac{2}{y}} &= \max\left\{ [\![f(y,y) \doteq x]\!]^{\mathfrak{I}\frac{2}{y}}, [\![f(y,y) \doteq c]\!]^{\mathfrak{I}\frac{2}{y}} \right\}\\ &= \max\left\{ [\![f(y,y) \doteq x]\!]^{\mathfrak{I}\frac{2}{y}}, 1\right\} = 1.\end{aligned}$$

Ähnlich gilt $[\![f(y,y) \doteq c]\!]^{\mathfrak{I}\frac{4}{y}} = 1$ und damit $[\![f(y,y) \doteq x \vee f(y,y) \doteq c]\!]^{\mathfrak{I}\frac{4}{y}} = 1$.
Insgesamt also

$$[\![\forall y(f(y,y) \doteq x \vee f(y,y) \doteq c)]\!]^{\mathfrak{I}} = \min\left\{ [\![f(y,y) \doteq x \vee f(y,y) \doteq c]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{y}} \;\middle|\; a \in [4]\right\} = 1.$$

- Es gilt

$$
\begin{aligned}
[\![\forall x \exists y \exists z R(x,y,z)]\!]^{\mathfrak{I}} &= \min_{a\in[4]} [\![\exists y \exists z R(x,y,z)]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}} \\
&= \min_{a\in[4]} \max_{b\in[4]} [\![\exists z R(x,y,z)]\!]^{\mathfrak{I}\frac{ab}{xy}} \\
&= \min_{a\in[4]} \max_{b,c\in[4]} [\![R(x,y,z)]\!]^{\mathfrak{I}\frac{abc}{xyz}} .
\end{aligned}
$$

Für $a = 1$ gilt

$$\max_{b,c\in[4]} [\![R(x,y,z)]\!]^{\mathfrak{I}\frac{1bc}{xyz}} \geq [\![R(x,y,z)]\!]^{\mathfrak{I}\frac{123}{xyz}} = 1.$$

Für $a = 2$ gilt

$$\max_{b,c\in[4]} [\![R(x,y,z)]\!]^{\mathfrak{I}\frac{2bc}{xyz}} \geq [\![R(x,y,z)]\!]^{\mathfrak{I}\frac{234}{xyz}} = 1.$$

Für $a = 3$ gilt

$$\max_{b,c\in[4]} [\![R(x,y,z)]\!]^{\mathfrak{I}\frac{3bc}{xyz}} \geq [\![R(x,y,z)]\!]^{\mathfrak{I}\frac{341}{xyz}} = 1.$$

Für $a = 4$ gilt

$$\max_{b,c\in[4]} [\![R(x,y,z)]\!]^{\mathfrak{I}\frac{4bc}{xyz}} \geq [\![R(x,y,z)]\!]^{\mathfrak{I}\frac{412}{xyz}} = 1.$$

Also

$$[\![\forall x \exists y \exists z R(x,y,z)]\!]^{\mathfrak{I}} = \min_{a \in [4]} \max_{b,c \in [4]} [\![R(x,y,z)]\!]^{\mathfrak{I}\frac{abc}{xyz}} = 1.$$

Beispiel 4.19

Sei $\sigma = \{E/2\}$, und sei

$$\varphi := \forall x \forall y (E(x,y) \to E(y,x)).$$

Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{G}, \mathfrak{b})$ eine σ-Interpretation. Dann gilt

$$\begin{aligned}
[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1 &\iff \text{für alle } a \in G \text{ gilt: } [\![\forall y(E(x,y) \to E(y,x))]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}} = 1 \\
&\iff \text{für alle } a, b \in G \text{ gilt: } [\![E(x,y) \to E(y,x)]\!]^{\mathfrak{I}\frac{ab}{xy}} = 1 \\
&\iff \text{für alle } a, b \in G \text{ gilt: wenn } [\![E(x,y)]\!]^{\mathfrak{I}\frac{ab}{xy}} = 1 \text{ dann } [\![E(y,x)]\!]^{\mathfrak{I}\frac{ab}{xy}} = 1 \\
&\iff \text{für alle } a, b \in G \text{ gilt: wenn } (a,b) \in E^{\mathfrak{G}} \text{ dann } (b,a) \in E^{\mathfrak{G}} \\
&\iff E^{\mathfrak{G}} \text{ ist symmetrisch.}
\end{aligned}$$

Zur Erinnerung

- 0-stellige Relationssymbole fassen wir als Aussagensymbole auf, die beiden möglichen 0-stelligen Relationen $\emptyset$ und $\{()\}$ identifizieren wir mit den Wahrheitswerten 0 und 1.
- Eine Symbolmenge, die nur 0-stellige Relationssymbole enthält, fassen wir dann als aussagenlogische Symbolmenge auf.
- Für eine aussagenlogische Symbolmenge entsprechen aussagenlogische σ-Interpretationen gerade den σ-Strukturen.

Notation

Für ein 0-stelliges Relationssystem P schreiben wir für die atomare $\mathsf{L}(\sigma)$-Formel $P()$ einfach P.

Beobachtung 4.20

Sei σ eine aussagenlogische Symbolmenge.

(1) *Die aussagenlogischen Formeln in* $\mathsf{AL}(\sigma)$ *sind genau die geschlossenen quantorenfreien Formeln in* $\mathsf{L}(\sigma)$.

(2) *Für jede* σ*-Interpretation* $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ *und jede aussagenlogischen Formel* φ *gilt:*

$$[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} \quad = \quad [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{A}}.$$

Auf der linken Seite betrachten wir φ *als geschlossene quantorenfreie Formel in* $\mathsf{L}(\sigma)$, *auf der rechten Seite betrachten wir* φ *als aussagenlogische Formel und* $\mathfrak{A}$ *als aussagenlogische Interpretation.*

Definition 4.21

(1) Eine σ-Interpretation $\mathfrak{I}$ erfüllt eine Formel $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$, wenn $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$.

(2) Eine σ-Interpretation $\mathfrak{I}$ erfüllt eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$, wenn $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$ für alle $\varphi \in \Phi$.

Statt $\mathfrak{I}$ erfüllt φ (bzw. Φ) sagen wir auch, $\mathfrak{I}$ ist ein Modell von φ (bzw. Φ) und schreiben

$$\mathfrak{I} \models \varphi \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{I} \models \Phi.$$

Definition 4.22

(1) Eine Formel $\varphi \in \mathsf{L}(\sigma)$ (bzw. eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{L}(\sigma)$) ist erfüllbar, wenn es eine σ-Interpretation $\mathfrak{I}$ gibt, die φ (bzw. Φ) erfüllt.

(2) Eine Formel $\varphi \in \mathsf{L}(\sigma)$ (bzw. eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{L}(\sigma)$) ist allgemeingültig, wenn alle σ-Interpretationen $\mathfrak{I}$ die Formel φ (bzw. die Formelmenge Φ) erfüllen.

Eine allgemeingültige Formel bezeichnet man auch als Tautologie.

Beobachtung 4.23

Für alle $\varphi \in \mathsf{L}(\sigma)$ gilt:

$$\varphi \textit{ ist unerfüllbar} \iff \neg\varphi \textit{ ist allgemeingültig}.$$

Ergänzungen zu Seite 4.31

Die Begriffe entsprechen genau den entsprechenden Begriffen für die Aussagenlogik.

Beispiel 4.24

Wir betrachten die Symbolmenge $\sigma_{\mathrm{Ar}} = \{\dot{+}, \dot{*}, \dot{0}, \dot{1}\}$ der Arithmetik.

- Die Formel $\forall x \exists y\, x \dot{+} \dot{0} \doteq y$ ist allgemeingültig, weil in jeder σ_{AR}-Struktur $\mathfrak{A}$ $\dot{+}^{\mathfrak{A}}$ eine 2-stellige Funktion ist, die für jedes $a \in A$ das Paar $(a, \dot{0}^{\mathfrak{A}})$ auf einen Wert $b \in A$ abbildet.
- Die Formel $\forall x \forall y\, x \dot{+} y \doteq y \dot{+} x$ gilt im Standardmodell $\mathfrak{N}$ der Arithmetik, ist also erfüllbar, aber sie ist nicht allgemeingültig.

Beispiel 4.25

Sei σ eine aussagenlogische Symbolmenge, und sei $\varphi \in \mathrm{AL}(\sigma)$ eine aussagenlogische Formel (also eine geschlossene quantorenfreie Formel in $\mathrm{L}(\sigma)$).

Dann ist φ erfüllbar (bzw. allgemeingültig) als aussagenlogische Formel, genau denn wenn φ erfüllbar (bzw. allgemeingültig) ist als σ-Formel.

Definition 4.26

Sei $\Phi \subseteq \mathsf{L}(\sigma)$ und $\psi \in \mathsf{L}(\sigma)$. Dann folgt ψ aus Φ (wir schreiben: $\Phi \models \psi$), wenn für alle σ-Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt: wenn $\mathfrak{I} \models \Phi$, dann $\mathfrak{I} \models \psi$.

Folgern, Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit

Lemma 4.27

Sei $\Phi \subseteq \mathsf{L}(\sigma)$ *und* $\psi \in \mathsf{L}(\sigma)$. *Dann gilt*

$$\Phi \models \psi \iff \Phi \cup \{\neg\psi\} \text{ ist unerfüllbar.}$$

Insbesondere gilt auch

$$\Phi \models \bot \iff \Phi \text{ ist unerfüllbar.}$$

Lemma 4.28

Sei $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subseteq \mathsf{L}(\sigma)$ *eine endliche Formelmenge und* $\psi \in \mathsf{L}(\sigma)$. *Dann gilt*

$$\Phi \models \psi \iff \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi \text{ ist allgemeingültig.}$$

Insbesondere gilt auch

$$\emptyset \models \psi \iff \psi \text{ ist allgemeingültig.}$$

Wir schreiben auch $\models \psi$ *statt* $\emptyset \models \psi$. *Dann bedeutet* $\models \psi$, *dass* ψ *allgemeingültig ist.*

Ergänzungen zu Seite 4.34

Die Begriffe und Lemmata entsprechen genau denen der Aussagenlogik, die Lemmata werden auch genauso bewiesen.

4.3 Zwei grundlegende Lemmata

Das Koinzidenzlemma (Intuitiv)

Das Koinzidenzlemma besagt, dass der Wert eines Terms bzw. einer Formel nur von den Symbolen des Terms bzw. der Formel und den Variablen des Terms bzw. den freien Variablen der Formel abhängt.

Das Koinzidenzlemma (Formal)

Lemma 4.29 (Koinzidenzlemma)

Seien $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ *und* $\mathfrak{I}' = (\mathfrak{A}', \mathfrak{b}')$ σ*-Interpretationen.*

(1) *Sei* $\theta \in \mathsf{T}(\sigma)$, *so dass* $\mathfrak{A}{\restriction}_{\mathsf{symb}(\theta)} = \mathfrak{A}'{\restriction}_{\mathsf{symb}(\theta)}$ *und* $\mathfrak{b}{\restriction}_{\mathsf{var}(\theta)} = \mathfrak{b}'{\restriction}_{\mathsf{var}(\theta)}$. *Dann gilt*

$$[\![\theta]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\theta]\!]^{\mathfrak{I}'}.$$

(2) *Sei* $\varphi \in \mathsf{L}(\sigma)$, *so dass* $\mathfrak{A}{\restriction}_{\mathsf{symb}(\varphi)} = \mathfrak{A}'{\restriction}_{\mathsf{symb}(\varphi)}$ *und* $\mathfrak{b}{\restriction}_{\mathsf{frei}(\varphi)} = \mathfrak{b}'{\restriction}_{\mathsf{frei}(\varphi)}$. *Dann gilt*

$$[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}'}.$$

Bemerkung 4.30

- $\mathfrak{A}{\restriction}_{\mathsf{symb}(\xi)} = \mathfrak{A}'{\restriction}_{\mathsf{symb}(\xi)}$ bedeutet, dass $A = A'$ und $S^{\mathfrak{A}} = S^{\mathfrak{A}'}$ für alle $S \in \mathsf{symb}(\xi)$.
- $\mathfrak{b}{\restriction}_{\mathsf{var}(\theta)} = \mathfrak{b}'{\restriction}_{\mathsf{var}(\theta)}$ bedeutet, dass $\mathfrak{b}(x) = \mathfrak{b}'(x)$ für alle $x \in \mathsf{var}(\theta)$. Entsprechend für $\mathfrak{b}{\restriction}_{\mathsf{frei}(\varphi)} = \mathfrak{b}'{\restriction}_{\mathsf{frei}(\varphi)}$.

Beweis.

Wir beweisen (1) per Induktion über den Aufbau von θ.

$\theta = x$ für ein $x \in \mathrm{Var}$:

Dann ist x in $\mathrm{var}(\theta)$, also gilt $\mathfrak{b}(x) = \mathfrak{b}'(x)$. Damit auch

$$[\![\theta]\!]^{\mathfrak{I}} = \mathfrak{b}(x) = \mathfrak{b}'(x) = [\![\theta]\!]^{\mathfrak{I}'} .$$

$\theta = f(\theta_1, \dots, \theta_k)$ für ein k-stelliges $f \in \sigma$ und $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathrm{T}(\sigma)$:

Dann gilt $f \in \mathrm{symb}(\theta)$ und damit $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{A}'}$. Außerdem gilt für all $i \in [k]$, dass $\mathrm{symb}(\theta_i) \subseteq \mathrm{symb}(\theta)$ und $\mathrm{var}(\theta_i) \subseteq \mathrm{var}(\theta)$. Also gilt nach Induktionsannahme $[\![\theta_i]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\theta_i]\!]^{\mathfrak{I}'}$. Daraus ergibt sich

$$[\![\theta]\!]^{\mathfrak{I}} = f^{\mathfrak{A}}\big([\![\theta_1]\!]^{\mathfrak{I}}, \dots, [\![\theta_k]\!]^{\mathfrak{I}} \big) = f^{\mathfrak{A}'}\big([\![\theta_1]\!]^{\mathfrak{I}'}, \dots, [\![\theta_k]\!]^{\mathfrak{I}'} \big) = [\![\theta]\!]^{\mathfrak{I}'} .$$

Das beweist Aussage (1).

Wir beweisen (2) per Induktion über den Aufbau von φ.

$\varphi = \theta_1 \doteq \theta_2$ für $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{T}(\sigma)$:
Für $i = 1, 2$ gilt dann $\mathrm{symb}(\theta_i) \subseteq \mathrm{symb}(\varphi)$ und $\mathrm{var}(\theta_i) \subseteq \mathrm{var}(\varphi) = \mathrm{frei}(\varphi)$ und damit $[\![\theta_i]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\theta_i]\!]^{\mathfrak{I}'}$ nach Aussage (1). Also

$$\begin{aligned}
[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1 &\iff [\![\theta_1]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\theta_2]\!]^{\mathfrak{I}} \\
&\iff [\![\theta_1]\!]^{\mathfrak{I}'} = [\![\theta_2]\!]^{\mathfrak{I}'} \iff [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}'} = 1.
\end{aligned}$$

$\varphi = R(\theta_1 \dots, \theta_k)$ für ein k-stelliges $R \in \sigma$ und $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathrm{T}(\sigma)$:
Dann gilt $R \in \mathrm{symb}(\theta)$ und damit $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{A}'}$. Außerdem gilt für $i \in [k]$, dass $\mathrm{symb}(\theta_i) \subseteq \mathrm{symb}(\varphi)$ und $\mathrm{var}(\theta_i) \subseteq \mathrm{frei}(\varphi)$ und damit $[\![\theta_i]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\theta_i]\!]^{\mathfrak{I}'}$ nach Aussage (1). Also

$$\begin{aligned}
[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1 &\iff \left([\![\theta_1]\!]^{\mathfrak{I}}, \dots, [\![\theta_k]\!]^{\mathfrak{I}}\right) \in R^{\mathfrak{A}} \\
&\iff \left([\![\theta_1]\!]^{\mathfrak{I}'}, \dots, [\![\theta_k]\!]^{\mathfrak{I}'}\right) \in R^{\mathfrak{A}'} \iff [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}'} = 1.
\end{aligned}$$

$\varphi = \bot$: Dann gilt $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = 0 = [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}'}$.

$\varphi = \top$: Dann gilt $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1 = [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}'}$.

$\varphi = \neg\psi$ für ein $\psi \in \mathrm{L}(\sigma)$:
Dann gilt $\mathrm{symb}(\psi) = \mathrm{symb}(\varphi)$ und $\mathrm{frei}(\psi) = \mathrm{frei}(\varphi)$ und damit nach Induktionsannahme $[\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}'}$. Also

$$[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1 - [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1 - [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}'} = [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}'} .$$

$\varphi = \psi_1 * \psi_2$ für ein $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ und $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{L}(\sigma)$:
Für $i = 1, 2$ gilt $\mathrm{symb}(\psi_i) \subseteq \mathrm{symb}(\varphi)$ und $\mathrm{frei}(\psi_i) \subseteq \mathrm{frei}(\varphi)$ und damit nach Induktionsannahme $[\![\psi_i]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\psi_i]\!]^{\mathfrak{I}'}$. Also

$$[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\psi_1]\!]^{\mathfrak{I}} \, [*] \, [\![\psi_2]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\psi_1]\!]^{\mathfrak{I}'} \, [*] \, [\![\psi_2]\!]^{\mathfrak{I}'} = [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}'} .$$

Hier steht $[*]$ für die korrekte Semantik des Junktors $*$.

$\varphi = \exists x \psi$ für ein $x \in \mathrm{Var}$ und ein $\psi \in \mathrm{L}(\sigma)$:
Dann gilt $\mathrm{symb}(\psi) = \mathrm{symb}(\varphi)$ und $\mathrm{frei}(\psi) \subseteq \mathrm{frei}(\varphi) \cup \{x\}$. Damit gilt zwar nicht $\mathfrak{b}(y) = \mathfrak{b}'(y)$ für alle $y \in \mathrm{frei}(\psi)$, aber für alle $a \in A$ gilt $\mathfrak{b}\frac{a}{x}(y) = \mathfrak{b}'\frac{a}{x}(y)$ für alle $y \in \mathrm{frei}(\psi)$. Also nach Induktionsannahme $[\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}} = [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}'\frac{a}{x}}$.

Es ergibt sich

$$[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = \max_{a \in A} [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}} = \max_{a \in A} [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}'\frac{a}{x}} = [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}'} .$$

$\varphi = \forall x \psi$ für ein $x \in \mathrm{Var}$ und ein $\psi \in \mathrm{L}(\sigma)$:

Analog zum Fall $\varphi = \exists x \psi$. $\square$

Terme

- Für einen Term $\theta \in \mathrm{T}(\sigma)$ und Variablen $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{Var}$ schreiben wir $\theta(x_1, \ldots, x_n)$, um auszudrücken, dass $\mathrm{var}(\theta) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.
- Für eine σ-Struktur $\mathfrak{A}$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$ schreiben wir $\theta^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k)$ statt $[\![\theta]\!]^{\mathfrak{I}}$ für ein $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ mit $\mathfrak{b}(x_i) = a_i$ für $i \in [n]$.

  Für geschlossene Terme θ (also $n = 0$) schreiben wir $\theta^{\mathfrak{A}}$.
- Diese Notation ist wohldefiniert, weil nach dem Koinzidenzlemma $[\![\theta]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\theta]\!]^{\mathfrak{I}'}$ für alle $\mathfrak{I}' = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}')$ mit $\mathfrak{b}'(x_i) = a_i$ für $i \in [n]$.

Formeln

- Für eine Formel $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ und Variablen $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{Var}$ schreiben wir $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, um auszudrücken, dass $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.
- Für eine σ-Struktur $\mathfrak{A}$ und $a_1, \ldots, a_n \in A$ schreiben wir $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ statt $\mathfrak{I} \models \varphi$ für ein $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ mit $\mathfrak{b}(x_i) = a_i$ für $i \in [n]$. Wie bei Termen ist diese Notation wohldefiniert.

  Für geschlossene Formeln φ schreiben wir $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Ergänzungen zu Seite 4.38

Man beachte, dass die Schreibweise $\theta^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_k)$ für Terme die übliche Notation

$$f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_k) = [\![f(x_1, \dots, x_k)]\!]^{\mathfrak{I}}$$

für Interpretationen $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ mit $\mathfrak{b}(x_i) = a_i$ für $i \in [k]$ verallgemeinert.

Das Isomorphielemma

Das Isomorphielemma besagt intuitiv, dass Terme und Formeln in isomorphen Strukturen den gleichen Wert annehmen.

Lemma 4.31 (Isomorphielemma)

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ isomorphe σ-Strukturen und $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$.

(1) *Für alle σ-Terme $\theta(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{T}(\sigma)$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt*

$$\pi\big(\theta^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)\big) \quad = \quad \theta^{\mathfrak{A}'}\big(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)\big).$$

(2) *Für alle σ-Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{L}(\sigma)$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in A$ gilt*

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \quad \iff \quad \mathfrak{A}' \models \varphi\big(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)\big).$$

Beweis.
Wir beweisen (1) per Induktion über den Aufbau von θ.

$\theta = x_i$:
Man beachte, dass die Schreibweise $\theta(x_1, \dots, x_n)$ nur festlegt, dass $\mathrm{var}(\theta)$ eine *Teilmenge* von $\{x_1, \dots, x_n\}$ ist, also können wir auch für $\theta = x_i$ schreiben: $\theta(x_1, \dots, x_n)$.
Es gilt $\theta^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = a_i$ und damit

$$\pi\big(\theta^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)\big) = \pi(a_i) = \theta^{\mathfrak{A}'}\big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)\big).$$

$\theta = f(\theta_1, \dots, \theta_k)$ für ein k-stelliges $f \in \sigma$ und $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathrm{T}(\sigma)$:
Weil $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$ gilt für alle $b_1, \dots, b_k \in A$:

$$\pi\big(f^{\mathfrak{A}}(b_1, \dots, b_k)\big) = f^{\mathfrak{A}'}\big(\pi(b_1), \dots, \pi(b_k)\big).$$

Nach Induktionsannahme gilt für alle $i \in [k]$

$$\pi\big(\theta_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)\big) \quad = \quad \theta_i^{\mathfrak{A}'}\big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)\big).$$

Also

$$
\begin{aligned}
\pi\big(\theta^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n)\big) &= \pi\Big(f^{\mathfrak{A}}\big(\theta_1^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n),\dots,\theta_k^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n)\big)\Big)\\
&= f^{\mathfrak{A}'}\Big(\pi\big(\theta_1^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n)\big),\dots,\pi\big(\theta_1^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n)\big)\Big)\\
&= f^{\mathfrak{A}'}\Big(\theta_1^{\mathfrak{A}'}\big(\pi(a_1),\dots,\pi(a_n)\big),\dots,\theta_k^{\mathfrak{A}'}\big(\pi(a_1),\dots,\pi(a_n)\big)\Big)\\
&= \theta^{\mathfrak{A}'}\big(\pi(a_1),\dots,\pi(a_n)\big).
\end{aligned}
$$

Das beweist Aussage (1).

Wir beweisen (2) per Induktion über den Aufbau von φ.

$\varphi(x_1,\dots,x_n) = \theta_1 \doteq \theta_2$ für $\theta_1,\theta_2 \in \mathrm{T}(\sigma)$:
Für $i = 1,2$ gilt dann $\mathrm{var}(\theta_i) \subseteq \{x_1,\dots,x_n\}$, also können wir $\theta_i(x_1,\dots,x_n)$ schreiben. Nach Aussage (1) gilt $\pi\big(\theta_i^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n)\big) = \theta_i^{\mathfrak{A}'}\big(\pi(a_1),\dots,\pi(a_n)\big)$. Also

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi(a_1,\dots,a_n) &\iff \theta_1^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n) = \theta_2^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n)\\
&\iff \pi\big(\theta_1^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n)\big) = \pi\big(\theta_2^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n)\big) && \text{weil } \pi \text{ bijektiv}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
< \iff \; & \theta_1^{\mathfrak{A}'}\big(\pi(a_1),\dots,\pi(a_n)\big) = \theta_2^{\mathfrak{A}'}\big(\pi(a_1),\dots,\pi(a_n)\big)\\
\iff \; & \mathfrak{A}' \models \varphi\big(\pi(a_1),\dots,\pi(a_n)\big).
\end{aligned}
$$

$\varphi = R(\theta_1 \dots, \theta_k)$ für ein k-stelliges $R \in \sigma$ und $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathrm{T}(\sigma)$:
Weil $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$ gilt für alle $b_1, \dots, b_k \in A$:

$$
(b_1, \dots, b_k) \in R^{\mathfrak{A}} \iff \big(\pi(b_1), \dots, \pi(b_k)\big) \in R^{\mathfrak{A}'}.
$$

Für $i \in [k]$ gilt nach Aussage (1) $\pi\big(\theta_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)\big) = \theta_i^{\mathfrak{A}'}\big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)\big)$. Also

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \; & \big(\theta_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n), \dots, \theta_k^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)\big) \in R^{\mathfrak{A}}\\
\iff \; & \Big(\pi\big(\theta_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)\big), \dots, \pi\big(\theta_k^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)\big)\Big) \in R^{\mathfrak{A}'}\\
\iff \; & \Big(\theta_1^{\mathfrak{A}'}\big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)\big), \dots, \theta_k^{\mathfrak{A}'}\big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)\big)\Big) \in R^{\mathfrak{A}'}\\
\iff \; & \mathfrak{A}' \models \varphi\big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)\big).
\end{aligned}
$$

$\varphi = \perp$: Dann gilt $\mathfrak{A} \not\models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ und $\mathfrak{A}' \not\models \varphi\big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)\big)$.

$\varphi = \top$: Dann gilt $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ und $\mathfrak{A}' \models \varphi\big(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)\big)$.

$\varphi = \neg\psi$ für ein $\psi \in \mathrm{L}(\sigma)$:
Dann gilt $\mathrm{frei}(\psi) = \mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, also können wir $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ schreiben. Nach Induktionsannahme gilt

$$\mathfrak{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n) \iff \mathfrak{A}' \models \psi\big(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)\big).$$

Also

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) &\iff \mathfrak{A} \not\models \psi(a_1, \ldots, a_n) \\
&\iff \mathfrak{A}' \not\models \psi\big(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)\big) \\
&\iff \mathfrak{A}' \models \varphi\big(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)\big).
\end{aligned}$$

$\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ für $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{L}(\sigma)$:
Für $i = 1, 2$ gilt dann $\mathrm{frei}(\psi_i) \subseteq \mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, also können wir $\psi_i(x_1, \ldots, x_n)$ schreiben. Nach Induktionsannahme gilt

$$\mathfrak{A} \models \psi_i(a_1, \ldots, a_n) \iff \mathfrak{A}' \models \psi_i\big(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)\big).$$

Also

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) &\iff \mathfrak{A} \models \psi_1(a_1, \dots, a_n) \text{ und } \mathfrak{A} \models \psi_2(a_1, \dots, a_n)\\ &\iff \mathfrak{A}' \models \psi_1\big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)\big) \text{ und } \psi_2\big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)\big)\\ &\iff \mathfrak{A}' \models \varphi\big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)\big).\end{aligned}$$

$\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$ für $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{L}(\sigma)$:
Analog zum Fall $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$.

$\varphi = \psi_1 \to \psi_2$ für $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{L}(\sigma)$:
Analog zum Fall $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$.

$\varphi = \exists y \psi$ für ein $y \in \mathrm{Var}$ und ein $\psi \in \mathrm{L}(\sigma)$:
Dann gilt $\mathrm{frei}(\psi) \subseteq \mathrm{frei}(\varphi) \cup \{y\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n, y\}$. Wir können also $\psi(x_1, \dots, x_n, y)$ schreiben. Nach Induktionsannahme gilt für alle $b \in A$

$$\mathfrak{A} \models \psi(a_1, \dots, a_n, b) \iff \mathfrak{A}' \models \psi\big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n), \pi(b)\big).$$

Also

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) &\iff \text{es gibt ein } b \in A \text{, so dass } \mathfrak{A} \models \psi(a_1, \dots, a_n, b) \\
&\iff \text{es gibt ein } b \in A \text{, so dass } \mathfrak{A}' \models \psi\big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n), \pi(b)\big) \\
&\iff \text{es gibt ein } b' \in A' \text{, so dass } \mathfrak{A}' \models \psi\big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n), b'\big) \qquad \text{weil } \pi \text{ bijektiv} \\
&\iff \mathfrak{A}' \models \varphi\big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)\big).
\end{aligned}
$$

$\varphi = \forall x \psi$ für ein $x \in \mathrm{Var}$ und ein $\psi \in \mathrm{L}(\sigma)$:
Analog zum Fall $\varphi = \exists x \psi$. $\square$

4.4 Modellierung in der Logik der 1. Stufe

Beispiel: Soziale Netzwerke

Wir modellieren ein soziales Netzwerk als eine $\{R_b/2, R_f/2\}$-Struktur $\mathfrak{A}$:

- A ist die Menge aller Mitglieder des sozialen Netzwerks;
- $(a, b) \in R_b^{\mathfrak{A}}$ wenn a und b befreundet sind;
- $(a, b) \in R_f^{\mathfrak{A}}$ wenn a b folgt.

Beispiel 4.32

Folgender Satz φ_1 besagt, dass die "befreundet" Relation symmetrisch ist: wenn a mit b befreundet ist ist auch b mit a befreundet.

$$\varphi_1 := \forall x \forall y \big(R_b(x, y) \to R_b(y, x)\big).$$

Formal gilt dann

$$\mathfrak{A} \models \varphi_1 \iff R_b^{\mathfrak{A}} \text{ ist symmetrisch.}$$

Beispiel 4.33

Folgender Satz φ_2 besagt, dass die "folgt" Relation nicht symmetrisch ist

$$\varphi_2 := \exists x \exists y \big(R_f(x, y) \wedge \neg R_f(y, x)\big).$$

Beispiel 4.34

$$\varphi_3 \coloneqq \forall x \forall y \big(R_b(x,y) \to R_f(x,y) \big).$$

φ_3 besagt: „wenn a mit b befreundet ist, dann folgt a b.“

Beobachtung:

$$\{\varphi_1, \varphi_3\} \models \forall x \forall y \big(R_b(x,y) \to R_f(y,x) \big).$$

Beispiel 4.35

$$\varphi_4(x) \coloneqq \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \big(\neg y_1 \doteq y_2 \wedge \neg y_1 \doteq y_3 \wedge \neg y_2 \doteq y_3 \wedge R_f(y_1,x) \wedge R_f(y_2,x) \wedge R_f(y_3,x) \big).$$

$\varphi_4(x)$ besagt intuitiv: „x hat mindestens 3 Follower“.

Formal gilt folgendes: für alle $a \in A$:

$\mathfrak{A} \models \varphi_4(a) \iff$ es gibt paarweise verschiedenene $b_1, b_2, b_3 \in A$, so dass $(b_1,a), (b_2,a), (b_3,a) \in R_f^{\mathfrak{A}}$.

Beispiel 4.36 (Small-World Phänomen)

$$\varphi_5 := \forall x \forall y \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 \big(R_b(x, z_1) \wedge R_b(z_1, z_2) \wedge R_b(z_2, z_3) \wedge R_b(z_3, y)\big)$$

soll besagen: "alle a, b sind über höchstens 3 Freunde miteinander verbunden".

Wir müssen aufpassen. Vermutlich wollen wir das nur für alle $a \neq b$ sagen. Also:

$$\varphi_5' := \forall x \forall y \Big(\neg x \doteq y \to \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 \big(R_b(x, z_1) \wedge R_b(z_1, z_2) \wedge R_b(z_2, z_3) \wedge R_b(z_3, y)\big)\Big).$$

Diese Formel ist immer noch nicht korrekt, denn es sollen ja *höchstens* drei Freunde sein. Besser ist folgende Formel:

$$\begin{aligned}\varphi_5'' := \forall x \forall y \exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 \Big(& \big(R_b(x, z_1) \vee x \doteq z_1\big) \wedge \big(R_b(z_1, z_2) \vee z_1 \doteq z_2\big) \\ & \wedge \big(R_b(z_2, z_3) \vee z_2 \doteq z_3\big) \wedge \big(R_b(z_3, y) \vee z_3 \doteq y\big)\Big).\end{aligned}$$

Ergänzungen zu Seite 4.43

Man beachte, dass wir in der Formel φ_5'' nicht mehr explizit $x = y$ ausschließen müssen, weil die Formel $\exists z_1 \exists z_2 \exists z_3 (\ldots)$ für $x = y$ automatisch auch erfüllt ist

Graphen und Digraphen

Wir betrachten Formeln und Strukturen über der Symbolmenge $\{E/2\}$.

Zur Erinnerung: $\{E\}$-Strukturen bezeichnen wir als Digraphen. Ein Digraph $\mathfrak{G}$ ist ein Graph, wenn $E^{\mathfrak{G}}$ symmetrisch und irreflexiv ist.

Im Folgenden sei $\mathfrak{G}$ immer ein Digraph.

Beispiel 4.37

$$\varphi_1 := \forall x \forall y \big(E(x,y) \to E(y,x)\big) \land \forall x \neg E(x,x)$$

besagt, dass $\mathfrak{G}$ ein Graph ist.

Formal heißt das:

$$\mathfrak{G} \models \varphi_1 \iff \mathfrak{G} \text{ ist ein Graph.}$$

Beispiel 4.38

Für $k \geq 2$ suchen wir eine Formel $\psi_k(x, y)$, die besagt, dass es einen Pfad der Länge genau k von x nach y gibt.

1. Versuch:

$$\psi_k(x, y) := \exists z_1 \ldots \exists z_{k-1} \left(E(x, z_1) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k-2} E(z_i, z_{i+1}) \wedge E(z_{k-1}, y) \right).$$

Problem: Auf diesem Weg könnten Knoten mehrfach vorkommen, aber bei einem Pfad verlangen wir, dass alle Knoten verschieden sind.

Beispiel 4.38 (Forts.)

2. Versuch:

$$\psi'_k(x,y) \coloneqq \exists z_1 \dots \exists z_{k-1} \Bigg(E(x,z_1) \wedge \neg x \doteq z_1 \wedge \bigwedge_{i=1}^{k-2} \big(E(z_i,z_{i+1}) \wedge \neg z_i \doteq z_{i+1} \big) \\ \wedge E(z_{k-1},y) \wedge \neg z_{k-1} \doteq y \Bigg).$$

Ist immer noch falsch, weil nur gesagt wird, dass aufeinanderfolgende Knoten verschieden sind.

Korrekte Formel:

$$\psi''_k(x,y) \coloneqq \exists z_1 \dots \exists z_{k-1} \Bigg(E(x,z_1) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k-2} E(z_i,z_{i+1}) \wedge E(z_{k-1},y) \\ \wedge \bigwedge_{i=1}^{k-1} \Big(\neg z_i \doteq x \wedge \bigwedge_{j=i+1}^{k-1} \neg z_i \doteq z_j \wedge \neg z_i \doteq y \Big) \wedge \neg x \doteq y \Bigg)$$

Beispiel 4.38 (Forts.)

Korrekte Formel:

$$\psi''_k(x,y) := \exists z_1 \dots \exists z_{k-1} \Bigg(E(x,z_1) \wedge \bigwedge_{i=1}^{k-1} E(z_i,z_{i+1}) \wedge E(z_{k-1},y)$$
$$\wedge \bigwedge_{i=1}^{k-1} \Big(z_i \dot{\neq} x \wedge \bigwedge_{j=i+1}^{k-1} z_i \dot{\neq} z_j \wedge z_i \dot{\neq} y \Big) \wedge x \dot{\neq} y \Bigg)$$

Hier und von nun an immer verwenden wir $x \dot{\neq} y$ als Abkürzung für $\neg x \doteq y$.

Alternative korrekte Formel:

$$\psi'''_k(x,y) := \exists z_0 \dots \exists z_k \Bigg(z_0 \doteq x \wedge z_k \doteq y \wedge \bigwedge_{0 \leq i < k} E(z_i,z_{i+1}) \wedge \bigwedge_{0 \leq i < j \leq k} z_i \dot{\neq} z_j \Bigg)$$

Graphen und Digraphen (Forts.)

Beispiel 4.39

$$\psi := \forall x \forall y \big(x \doteq y \vee E(x,y) \vee \psi_2''(x,y) \big),$$

wobei $\psi_2''(x,y)$ die Formel aus Beispiel 4.38 ist, die ausdrückt, dass es einen Pfad der Länge 2 von x nach y gibt.

Dann gilt $\mathfrak{G} \models \psi$ genau dann, wenn $\mathfrak{G}$ Durchmesser höchstens 2 hat, das heißt, alle Paare von Knoten sind durch einen Weg der Länge ≤ 2 verbunden.

Frage

Ist Graphzusammenhang in der Logik der ersten Stufe ausdrückbar?

Das heißt, gibt es eine Satz $\varphi \in \mathrm{L}(\{E\})$, so dass für alle Graphen $\mathfrak{G}$ gilt:

$$\mathfrak{G} \models \varphi \iff \mathfrak{G} \text{ ist zusammenhängend?}$$

Ergänzungen zu Seite 4.48

Wir werden diese Frage in Kapitel 5 beantworten.

Im Folgenden sei $\mathfrak{G}$ immer ein (ungerichteter) Graph.

Beispiel 4.40

Sei $d \geq 1$. Wir suchen eine Formel $\chi_d(x)$, die besagt, dass x den Grad d hat, also genau d Nachbarn.

$$\chi_d(x) := \exists y_1 \dots \exists y_d \Bigg(\bigwedge_{i=1}^{d} E(x, y_i) \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq d} y_i \mathrel{\dot{\neq}} y_j \Bigg) \wedge \forall z \Big(E(x, z) \to \bigvee_{i=1}^{d} z \doteq y_i \Big) \Bigg).$$

Dann besagt folgender Satz, dass $\mathfrak{G}$ d-regulär ist, das heißt, alle Knoten haben Grad d:

$$\forall x \, \chi_d(x).$$

Frage

Gibt es einen Satz $\varphi \in \mathrm{L}(\{E\})$, der besagt, dass ein Graph regulär ist, das heißt, d-regulär für irgendein $d \in \mathbb{N}$.

Wir betrachten im Folgenden Formeln über der Signatur $\sigma_{\text{Ar}} := \{\dot{+}, \dot{*}, \dot{0}, \dot{1}\}$, und ihre Bedeutung im Standardmodell $\mathfrak{N}$ der Arithmetik.

Beispiel 4.41

Wir suchen eine $\mathrm{L}(\sigma_{\text{Ar}})$-Formel $\varphi_{\text{sub}}(x, y, z)$, die besagt, dass $x - y = z$.

Formal soll also für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ gelten:

$$\mathfrak{N} \models \varphi_{\text{sub}}(a, b, c) \iff a - b = c.$$

Wir setzen

$$\varphi_{\text{sub}}(x, y, z) := y \dot{+} z \doteq x.$$

Beispiel 4.42

Wir suchen eine $\mathrm{L}(\sigma_{\text{Ar}})$-Formel $\varphi_{\text{div}}(x, y, z)$, die besagt, dass $\frac{x}{y} = z$.

Wir setzen

$$\varphi_{\text{div}}(x, y, z) := y \dot{\neq} \dot{0} \wedge y \dot{*} z \doteq x.$$

Beispiel 4.43

Wir suchen eine $L(\sigma_{Ar})$-Formel $\varphi_{teil}(x, y)$, die besagt, dass y Teiler von x ist.

Wir setzen

$$\varphi_{teil}(x, y) \coloneqq \exists z \varphi_{div}(x, y, z).$$

Beispiel 4.44

Wir suchen eine $L(\sigma_{Ar})$-Formel $\varphi_{prim}(x)$, die besagt, dass x Primzahl ist.

Wir setzen

$$\varphi_{prim}(x) \coloneqq x \dot{\neq} \dot{0} \wedge x \dot{\neq} \dot{1} \wedge \forall y \big(\varphi_{teil}(x, y) \to (y \doteq \dot{1} \vee y \doteq x)\big).$$

Beispiel 4.45

Wir suchen einen Satz $\psi_{\text{p-ord}} \in \mathrm{L}(\{\dot{\leq}\})$, der die partiell geordneten Mengen definiert, das heißt, für alle $\{\dot{\leq}\}$-Strukturen $\mathfrak{A}$ soll gelten

$$\mathfrak{A} \models \psi_{\text{p-ord}} \quad \iff \quad \dot{\leq}^{\mathfrak{A}} \text{ ist eine partielle Ordnung.}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} \psi_{\text{p-ord}} := {} & \forall x\, x \dot{\leq} x && \text{Reflexivität} \\ & \wedge \forall x \forall y (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} x \to x \doteq y) && \text{Anti-Symmetrie} \\ & \wedge \forall y \forall y \forall z (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} z \to x \dot{\leq} z) && \text{Transitivität.} \end{aligned}$$

Beispiel 4.46

Folgender Satz $\psi_{\text{ord}} \in \mathrm{L}(\{\dot{\leq}\})$ definiert dann die total geordneten Mengen:

$$\psi_{\text{ord}} := \psi_{\text{p-ord}} \wedge \forall x \forall y (x \dot{\leq} y \vee y \dot{\leq} x).$$

Wir betrachten das Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ und die Symbolmenge $\sigma_\Sigma = \{\dot{\leq}/2, P_a/1, P_b/1\}$.

Zur Erinnerung: Wir repräsentieren ein Wort $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$ durch die σ_Σ-Struktur $\mathfrak{A}_w$ mit Universum $A_w = \{0, \dots, n\}$, in der $\dot{\leq}^{\mathfrak{A}_w}$ die natürlichen Ordnung ist und bei der $P_a^{\mathfrak{A}_w}$ (bzw. $P_b^{\mathfrak{A}_w}$) aus allen Positionen i mit $a_i = a$ (bzw. $a_i = b$) besteht.

Beispiel 4.47

Wir suchen einen Satz $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma_\Sigma)$, der die vom regulären Ausdruck a^*b^* beschriebene Sprache definiert.

Das heißt, für alle $w \in \Sigma^*$ soll gelten:

$$\mathfrak{A}_w \models \varphi \iff w \text{ ist von der Form } a^*b^*.$$

Wir setzen

$$\forall x \forall y \big(P_a(x) \wedge P_b(y) \to x \,\dot{\leq}\, y\big).$$

Zur Erinnerung: Wir repräsentieren eine relationale Kinodatenbank, die Informationen über Kinos, Filme und das aktuelle Programm enthält, durch eine Struktur $\mathfrak{D}$ der Symbolmenge

$$\sigma_{\text{Kino}} := \{R_{\text{Kino}}/4, R_{\text{Film}}/3, R_{\text{Prog}}/3\} \cup \{c_x \mid x \in \Sigma^*_{\text{UTF8}}\}.$$

Kino			
Name	Adresse	Stadtteil	Telefonnummer
Babylon	Dresdner Str. 126	Kreuzberg	030 61 60 96 93
Casablanca	Friedenstr. 12-13	Adlershof	030 67 75 75 2
Filmtheater am Friedrichshain	Bötzowstr. 1-5	Prenzlauer Berg	030 42 84 51 88
Kino International	Karl-Marx-Allee 33	Mitte	030 24 75 60 11
Moviemento	Kotbusser Damm 22	Kreuzberg	030 692 47 85
Urania	An der Urania 17	Schöneberg	030 21 89 09 1

Film		
Name	Regisseur	Schauspieler
Alien	Ridley Scott	Sigourney Weaver
Blade Runner	Ridley Scott	Harrison Ford
Blade Runner	Ridley Scott	Sean Young
Brazil	Terry Gilliam	Jonathan Pryce
Brazil	Terry Gilliam	Kim Greist
Casablanca	Michael Curtiz	Humphrey Bogart
Casablanca	Michael Curtiz	Ingrid Bergmann
Gravity	Alfonso Cuaron	Sandra Bullock
Gravity	Alfonso Cuaron	George Clooney
Monuments Men	George Clooney	George Clooney
Monuments Men	George Clooney	Matt Damon
Resident Evil	Paul Anderson	Milla Jovovich
Terminator	James Cameron	Arnold Schwarzenegger
Terminator	James Cameron	Linda Hamilton
Terminator	James Cameron	Michael Biehn
...	...	...

Programm		
Kino	Film	Zeit
Babylon	Casablanca	17:30
Babylon	Gravity	20:15
Casablanca	Blade Runner	15:30
Casablanca	Alien	18:15
Casablanca	Blade Runner	20:30
Casablanca	Resident Evil	20:30
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	20:00
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	21:30
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	23:00
Kino International	Casablanca	18:00
Kino International	Brazil	20:00
Kino International	Brazil	22:00
Moviemento	Gravity	17:00
Moviemento	Gravity	19:30
Moviemento	Alien	22:00
Urania	Monuments Men	17:00
Urania	Monuments Men	20:00

Relationale Datenbanken (Forts.)

Beispiel 4.48

Die Anfrage

> *„Gib die Titel aller Filme aus, die um 22:00 Uhr beginnen."*

lässt sich durch folgende $\mathrm{L}(\sigma_{\mathrm{Kino}})$-Formel $\varphi_1(x_T)$ beschreiben:

$$\varphi_1(x_T) := \exists x_K \, R_{\mathrm{Prog}}(x_K, x_T, c_{\texttt{22:00}})$$

Beispiel 4.49

Die Anfrage

> *„Gib die Titel aller Filme aus, in denen George Clooney mitspielt oder Regie führt"*

lässt sich durch folgende $\mathrm{L}(\sigma_{\mathrm{Kino}})$-Formel $\varphi_2(x_T)$ beschreiben:

$$\varphi_2(x_T) := \exists x_R \, R_{\mathrm{Film}}(x_T, x_R, c_{\texttt{George Clooney}}) \lor \exists x_S \, R_{\mathrm{Film}}(x_T, c_{\texttt{George Clooney}}, x_S)$$

Beispiel 4.50

Die Anfrage

> *„Gib Name und Stadtteil aller Kinos aus, in denen ein Film läuft, in dem George Clooney mitspielt oder Regie führt"*

lässt sich durch folgende $L(\sigma_{\text{Kino}})$-Formel $\varphi_3(x_K, x_{St})$ beschreiben:

$$\begin{aligned}\varphi_3(x_K, x_{St}) := \quad & \exists x_A \exists x_{Tel} R_{\text{Kino}}(x_K, x_A, x_{St}, x_{Tel}) \\ & \wedge \exists x_T \exists x_Z \Big(R_{\text{Prog}}(x_K, x_T, x_Z) \\ & \qquad \wedge \big(\exists x_R R_{\text{Film}}(x_T, x_R, c_{\texttt{George Clooney}}) \vee \exists x_S R_{\text{Film}}(x_T, c_{\texttt{George Clooney}}, x_S)\big)\Big)\end{aligned}$$

Die erste Zeile der Formel stellt sicher, dass x_K ein Kino und x_S dessen Stadtteil ist; die Zeilen 2 und 3 stellen sicher, dass im Kino x_K ein Film läuft, in dem George Clooney mitspielt oder Regie führt.

Wissensbasen

- Eine relationale Datenbank lässt sich als eine Sammlung von Fakten auffassen, die geeignet relational repräsentiert werden.
- Komplexere Sachverhalte und Wissen über eine Anwendungsdomäne können wir durch Sätze der Logik der 1. Stufe repräsentieren.
- Eine Wissensbasis ist eine (endliche) Menge von Sätzen der Logik der 1. Stufe, wobei relationale Fakten durch atomare Sätze repräsentiert werden und komplexere Sachverhalte durch allgemeinere Sätze.
- Anfragen an eine solche Wissensbasis lassen sich auch als Sätze der Logik der 1. Stufe formulieren.
- Um eine Anfrage ψ an eine Wissensbasis Φ zu beantworten, müssen wir überprüfen, ob ψ aus Φ folgt.

Beispiel 4.51

Wir wollen eine Wissensbasis über Tiere aufbauen.

- Die Symbolmenge enthält für jeden UTF8-String w eine Konstante.
- Weiterhin führen wir zweistellige Relationen wie $\mathtt{GehörtZu}$, $\mathtt{StammtAbVon}$, $\mathtt{GrößerAls}$ und einstellige Relationen wie $\mathtt{IstTier}$, $\mathtt{IstTierart}$, $\mathtt{IstGruppe}$ ein.
- Fakten in unserer Wissensbasis könnten dann sein:

$$\mathtt{IstTier}(\mathtt{Karl}),\ \mathtt{IstTier}(\mathtt{Felix}),\ \mathtt{IstTierart}(\mathtt{Käfer}),\ \mathtt{IstTierart}(\mathtt{Katze}),\\ \mathtt{IstGruppe}(\mathtt{Insekt}),\ \mathtt{IstGruppe}(\mathtt{Säugetier}),\ \mathtt{GehörtZu}(\mathtt{Karl},\mathtt{Käfer}),\\ \mathtt{GehörtZu}(\mathtt{Felix},\mathtt{Katze}),\ \mathtt{GehörtZu}(\mathtt{Käfer},\mathtt{Insekt}),\ \mathtt{GehörtZu}(\mathtt{Katze},\mathtt{Säugetier}).$$

- Komplexere Zusammenhänge könnten sein:

$$\forall x \forall y \forall z \big(\mathtt{GehörtZu}(x,y) \wedge \mathtt{GehörtZu}(y,z) \to \mathtt{GehörtZu}(x,z)\big)$$
$$\forall x \forall y \big(\mathtt{GehörtZu}(x,\mathtt{Insekt}) \wedge \mathtt{GehörtZu}(y,\mathtt{Säugetier}) \to \mathtt{GrößerAls}(y,x)\big).$$

- Ein Anfrage könnte sein: $\mathtt{GrößerAls}(\mathtt{Felix},\mathtt{Karl})$.

Die Antwort auf die Anfrage ist „ja“, denn die Formel

$$\mathtt{GrößerAls}(\mathtt{Felix}, \mathtt{Karl})$$

folgt aus der Formelmenge

$$\begin{gathered}\big\{\mathtt{GehörtZu}(\mathtt{Karl}, \mathtt{Käfer}), \mathtt{GehörtZu}(\mathtt{Felix}, \mathtt{Katze}),\\ \mathtt{GehörtZu}(\mathtt{Käfer}, \mathtt{Insekt}), \mathtt{GehörtZu}(\mathtt{Katze}, \mathtt{Säugetier}),\\ \forall x \forall y \forall z \big(\mathtt{GehörtZu}(x, y) \wedge \mathtt{GehörtZu}(y, z) \rightarrow \mathtt{GehörtZu}(x, z)\big)\\ \forall x \forall y \big(\mathtt{GehörtZu}(x, \mathtt{Insekt}) \wedge \mathtt{GehörtZu}(y, \mathtt{Säugetier}) \rightarrow \mathtt{GrößerAls}(y, x)\big)\big\}.\end{gathered}$$

4.5 Substitution

Intuition

Unter Substitution verstehen wir das Ersetzen von (freien) Variablen in Termen und Formeln durch Terme. Der Term bzw. die Formel sollen sich dann verhalten, als ob die ersetzte Variable den Wert des Terms hätte, durch den wir sie ersetzt haben.

Beispiel 4.52

Wir betrachten die σ_{Ar}-Formel $\varphi_{\text{prim}}(x)$ aus Beispiel 4.44, die besagt, dass x eine Primzahl ist. Substituieren wir nun x durch den Term $\zeta := (y \ast y) \dotplus \dot{1}$, so besagt die resultierende Formel $\varphi_{\text{prim}}\frac{\zeta}{x}(y)$, dass $y^2 + 1$ eine Primzahl ist.

Leider ist die Substitution technisch komplizierter, als man denkt, weil es Konflikte zwischen den gebundenen Variablen der Formel und den Variablen des Substitutionsterms geben kann.

Lemma 4.53

Seien $\theta, \zeta \in \mathsf{T}(\sigma)$ *und* $z \in \mathsf{Var}$. *Dann gibt es einen Term* $\theta\frac{\zeta}{z} \in \mathsf{T}(\sigma)$, *so dass für alle* σ*-Interpretationen* $\mathfrak{I}$ *gilt:*

$$\left[\!\left[\theta\frac{\zeta}{z}\right]\!\right]^{\mathfrak{I}} \quad = \quad [\![\theta]\!]^{\mathfrak{I}\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z}}. \tag{$\star$}$$

Weiterhin gilt $\theta\frac{\zeta}{z} = \theta$ *falls* $z \notin \mathsf{var}(\theta)$ *oder* $\zeta = z$.

Beweis.
Wir definieren $\theta\frac{\zeta}{z}$ rekursiv über den Aufbau von θ und beweisen gleichzeitig $(\star)$ per Induktion.

$\theta = x$ für ein $x \in \mathrm{Var}$:
Falls $x \neq z$ setzen wir $\theta\frac{\zeta}{z} := \theta$. $(\star)$ gilt dann nach dem Koinzidenzlemma, weil $z \notin \mathrm{var}(\theta)$.

Falls $x = z$ setzen wir $\theta\frac{\zeta}{z} := \zeta$. Dann gilt

$$[\![\theta\tfrac{\zeta}{z}]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![z]\!]^{\mathfrak{I}\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z}} = [\![\theta]\!]^{\mathfrak{I}\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z}}$$

$\theta = f(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ für ein k-stelliges $f \in \sigma$ und Terme $\theta_1, \ldots, \theta_k \in \mathrm{T}(\sigma)$:
Wir setzen

$$\theta\tfrac{\zeta}{z} := f\Big(\theta_1\tfrac{\zeta}{z}, \ldots, \theta_k\tfrac{\zeta}{z}\Big).$$

Dann gilt für alle σ-Interpretationen $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$:

$$[\![\theta\tfrac{\zeta}{z}]\!]^{\mathfrak{I}} = f^{\mathfrak{A}}\Big([\![\theta_1\tfrac{\zeta}{z}]\!]^{\mathfrak{I}}, \ldots, [\![\theta_k\tfrac{\zeta}{z}]\!]^{\mathfrak{I}} \Big)$$

$$= f^{\mathfrak{A}}\Big([\![\theta_1]\!]^{\mathfrak{I}\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z}}, \dots, [\![\theta_k]\!]^{\mathfrak{I}\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z}} \Big) \qquad \text{Induktionsannahme}$$

$$= [\![\theta]\!]^{\mathfrak{I}\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z}}.$$

Die zusätzlich Aussage $\theta\frac{\zeta}{z} = \theta$ falls $z \notin \mathrm{var}(\theta)$ oder $\zeta = z$ lässt sich leicht durch Inspektion der rekursiven Definition verifizieren. $\square$

Lemma 4.54 (Substitutionslemma)

Seien $\varphi \in \mathsf{L}(\sigma)$, $\zeta \in \mathsf{T}(\sigma)$ *und* $z \in \mathsf{Var}$. *Dann gibt es eine Formel* $\varphi\frac{\zeta}{z} \in \mathsf{L}(\sigma)$, *so dass für alle* σ*-Interpretationen* $\mathfrak{I}$ *gilt:*

$$\mathfrak{I} \models \varphi\frac{\zeta}{z} \iff \mathfrak{I}\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z} \models \varphi. \qquad (\star\star)$$

Weiterhin gilt $\varphi\frac{\zeta}{z} = \varphi$, *falls* $z \notin \mathsf{frei}(\varphi)$ *oder* $\zeta = z$.

Notation

Für Terme $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \mathsf{T}(\sigma)$ und Variablen $z_1, \ldots, z_n$ schreiben wir

$$\varphi\frac{\zeta_1 \ldots \zeta_n}{z_1 \ldots z_n} \quad \text{statt} \quad \left(\cdots\left(\left(\varphi\frac{\zeta_1}{z_1}\right)\frac{\zeta_2}{z_2}\right)\cdots\right)\frac{\zeta_n}{z_n}.$$

Beweis.

Wir definieren $\varphi\frac{\zeta}{z}$ rekursiv über den Aufbau von φ und beweisen gleichzeitig ($\star\star$) per Induktion über den Aufbau von φ simultan für alle σ-Interpretationen $\mathfrak{I}$.

$\varphi = \theta_1 \doteq \theta_2$ für $\eta_1, \eta_2 \in \mathrm{T}(\sigma)$:

Für $i = 1, 2$ sei $\theta_i' := \theta_i\frac{\zeta}{z}$. Wir setzen $\varphi\frac{\zeta}{z} := \theta_1' \doteq \theta_2'$. Dann gilt für jede σ-Interpretation $\mathfrak{I}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} \models \varphi\frac{\zeta}{z} &\iff [\![\theta_1']\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\theta_2']\!]^{\mathfrak{I}} \\
&\iff [\![\theta_1]\!]^{\mathfrak{I}\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z}} = [\![\theta_2]\!]^{\mathfrak{I}\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z}} && \text{Lemma 4.53} \\
&\iff \mathfrak{I}\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z} \models \varphi.
\end{aligned}$$

$\varphi = R(\theta_1, \dots, \theta_k)$ für ein k-stelliges $R \in \sigma$ und $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathrm{T}(\sigma)$:

Für $i \in [k]$ sei $\theta_i' := \theta_i\frac{\zeta}{z}$. Wir setzen $\varphi\frac{\zeta}{z} := R(\theta_1', \dots, \theta_k')$. Dann gilt für jede σ-Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$:

$$\mathfrak{I} \models \varphi\frac{\zeta}{z} \iff \left([\![\theta_1']\!]^{\mathfrak{I}}, \dots, [\![\theta_k']\!]^{\mathfrak{I}}\right) \in R^{\mathfrak{A}}$$

$$\iff \left([\![\theta_1]\!]^{\mathfrak{I}\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z}}, \dots, [\![\theta_k]\!]^{\mathfrak{I}\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z}} \right) \in R^{\mathfrak{A}} \qquad \text{Lemma 4.53}$$

$$\iff \mathfrak{I}\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z} \models \varphi.$$

$\varphi = \bot$ oder $\varphi = \top$:
Wir setzen $\varphi\frac{\zeta}{z} := \varphi$. Dann gilt offensichtlich ($\star\star$).

$\varphi = \neg\psi$ für ein $\psi \in \mathrm{L}(\sigma)$:
Wir setzen $\varphi\frac{\zeta}{z} := \neg\left(\psi\frac{\zeta}{z}\right)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} \models \varphi\frac{\zeta}{z} &\iff \mathfrak{I} \not\models \psi\frac{\zeta}{z} \\
&\iff \mathfrak{I}\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z} \not\models \psi && \text{Induktionsannahme} \\
&\iff \mathfrak{I}\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z} \models \varphi.
\end{aligned}$$

$\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ für $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{L}(\sigma)$:
Wir setzen $\varphi\frac{\zeta}{z} := \psi_1\frac{\zeta}{z} \wedge \psi_2\frac{\zeta}{z}$. Dann gilt

$$\mathfrak{I} \models \varphi\frac{\zeta}{z} \iff \mathfrak{I} \models \psi_1\frac{\zeta}{z} \text{ und } \mathfrak{I} \models \psi_2\frac{\zeta}{z}$$

$$\iff \mathfrak{I}\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z} \models \psi_1 \text{ und } \mathfrak{I}\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z} \models \psi_2 \qquad \text{Induktionsannahme}$$

$$\iff \mathfrak{I}\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z} \models \varphi.$$

$\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$ für $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{L}(\sigma)$:
Analog.

$\varphi = \psi_1 \to \psi_2$ für $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{L}(\sigma)$:
Analog.

$\varphi = \exists x \psi$ für ein $x \in \mathrm{Var}$, $\psi \in \mathrm{L}(\sigma)$:
Falls $z \notin \mathrm{frei}(\varphi)$ setzen wir $\varphi\frac{\zeta}{z} := \varphi$.
Nehmen wir an, $z \in \mathrm{frei}(\varphi)$. Insbesondere gilt dann $z \neq x$. Falls $x \notin \mathrm{var}(\zeta)$ sei $x' := x$, ansonsten sei

$$x' \in \mathrm{Var} \setminus (\mathrm{frei}(\varphi) \cup \{z\} \cup \mathrm{var}(\zeta))$$

beliebig. Sei $\psi' := \psi\frac{x'}{x}$. Dann gilt für alle Interpretationen $\mathfrak{I}' = (\mathfrak{A}', \mathfrak{b}')$ und alle $a \in A'$:

$$\mathfrak{I}'\frac{a}{x'} \models \psi' \iff \mathfrak{I}'\frac{a}{x} \models \psi. \qquad (\dagger)$$

Das ist trivial, wenn $x' = x$ und damit auch $\psi' = \psi$. Falls $x' \neq x$, so gilt $x' \notin \mathrm{frei}(\psi)$ und damit

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}'\tfrac{a}{x'} \models \psi' &\iff \left(\mathfrak{I}'\tfrac{a}{x'}\right)\tfrac{a}{x} \models \psi && \text{Induktionsannahme}\\
&\iff \mathfrak{I}'\tfrac{a}{x} \models \psi && \text{Koinzidenzlemma.}
\end{aligned}$$

Das beweist (†).

Nach Induktionsannahme gibt es eine Formel $\psi'' := \psi'\tfrac{\zeta}{z}$, so dass für alle Interpretationen $\mathfrak{I}''$ gilt:

$$\mathfrak{I}'' \models \psi'' \iff \mathfrak{I}''\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}''}}{z} \models \psi'. \tag{††}$$

Wir setzen

$$\varphi\tfrac{\zeta}{z} := \exists x'\psi''.$$

Dann gilt für alle Interpretationen $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I} \models \varphi\tfrac{\zeta}{z} &\iff \text{ex. } a \in A, \text{ so dass } \mathfrak{I}\tfrac{a}{x'} \models \psi''\\
&\iff \text{ex. } a \in A, \text{ so dass } \left(\mathfrak{I}\tfrac{a}{x'}\right)\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x'}}}{z} \models \psi' && \text{wegen (††) mit } \mathfrak{I}'' := \mathfrak{I}\tfrac{a}{x'}\\
&\iff \text{ex. } a \in A, \text{ so dass } \left(\mathfrak{I}\tfrac{a}{x'}\right)\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z} \models \psi' && \text{weil } x' \notin \mathrm{frei}(\zeta)
\end{aligned}$$

$$\iff \text{ex. } a \in A \text{, so dass } \left(\mathfrak{I}\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z}\right)\frac{a}{x'} \models \psi' \qquad \text{weil } x' \neq z$$

$$\iff \text{ex. } a \in A \text{, so dass } \left(\mathfrak{I}\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z}\right)\frac{a}{x} \models \psi \qquad \text{wegen } (\dagger)$$

$$\iff \mathfrak{I}\frac{[\![\zeta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z} \models \varphi.$$

$\varphi = \forall x \psi$ für ein $x \in \mathrm{Var}$, $\psi \in \mathrm{L}(\sigma)$:
Analog.

Die zusätzlich Aussage $\varphi\frac{\zeta}{z} = \varphi$ falls $z \notin \mathrm{frei}(\varphi)$ oder $\zeta = z$ lässt sich leicht durch Inspektion der rekursiven Definition verifizieren. □

Beispiel 4.55

Sei $\zeta := (y \dot{*} y) \dot{+} \dot{1} \in \mathrm{T}(\sigma_{\mathrm{Ar}})$, und sei

$$\varphi_{\mathrm{prim}} = x \dot{\neq} \dot{0} \wedge x \dot{\neq} \dot{1} \wedge \forall y \Big(\exists z \big(y \dot{\neq} \dot{0} \wedge y \dot{*} z \doteq x \big) \to \big(y \doteq \dot{1} \vee y \doteq x \big) \Big)$$

die Formel aus Beispiel 4.44. Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathrm{prim}} \frac{\zeta}{x} = (y \dot{*} y) \dot{+} \dot{1} \neq \dot{0} \wedge (y \dot{*} y) \dot{+} \dot{1} \neq \dot{1} \\ \wedge \forall y' \Big(\exists z \big(y' \dot{\neq} \dot{0} \wedge y' \dot{*} z \doteq (y \dot{*} y) \dot{+} \dot{1} \big) \to \big(y' \doteq \dot{1} \vee y' \doteq (y \dot{*} y) \dot{+} \dot{1} \big) \Big) \end{aligned}$$

Sei $\mathfrak{b} : \mathrm{Var} \to \mathbb{N}$ eine Belegung, und sei $a := \mathfrak{b}(y)$. Dann gilt $[\![\zeta]\!]^{(\mathfrak{N},\mathfrak{b})} = \mathfrak{b}(y)^2 + 1 = a^2 + 1$ und

$$(\mathfrak{N}, \mathfrak{b}) \models \varphi_{\mathrm{prim}} \frac{\zeta}{x} \iff \Big(\mathfrak{N}, \mathfrak{b} \frac{a^2+1}{x} \Big) \models \varphi_{\mathrm{prim}} \iff a^2 + 1 \text{ ist eine Primzahl.}$$

4.6 Äquivalenz und Normalformen

Definition 4.56

Zwei σ-Formeln $\varphi, \psi \in \mathrm{L}(\sigma)$ sind äquivalent (wir schreiben $\varphi \equiv \psi$) wenn für alle σ-Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt:

$$\mathfrak{I} \models \varphi \quad \iff \quad \mathfrak{I} \models \psi.$$

Beispiel 4.57

Welche der folgenden Formeln sind äquivalent?

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \exists y\ E(x, y),\\
\varphi_2 &:= \exists z\ E(x, z),\\
\varphi_3 &:= \exists z\ E(y, z).
\end{aligned}$$

Antwort: φ_1, φ_2 sind äquivalent, aber sie sind nicht äquivalent zu φ_3.

Aussagenlogische Äquivalenzen

Lemma 4.58

Ersetzt man in äquivalenten aussagenlogischen Formeln alle Aussagensymbole durch $\mathsf{L}(\sigma)$*-Formeln, so erhält man äquivalente* $\mathsf{L}(\sigma)$*-Formeln.*

Beispiel 4.59

Aus der aussagenlogische Äquivalenz $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$ folgt, dass

$$\varphi \to \psi \quad \equiv \quad \neg\varphi \vee \psi$$

für alle $\varphi, \psi \in \mathsf{L}(\sigma)$.

Beweis von Lemma 4.58.

Seien $\alpha(P_1, \dots, P_n), \alpha'(P_1, \dots, P_n) \in \mathrm{AL}$ zwei aussagenlogische Formeln.

Zur Erinnerung: Die Notation impliziert, dass $\mathrm{symb}(\alpha), \mathrm{symb}(\alpha') \subseteq \{P_1, \dots, P_n\}$,

Für $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathrm{L}(\sigma)$ seien $\alpha(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ bzw. $\alpha'(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ die $\mathrm{L}(\sigma)$-Formeln, die aus α bzw. α' entstehen, wenn man jedes Vorkommen eines Aussagensymbols P_i (für $i \in [n]$) durch die $\mathrm{L}(\sigma)$-Formel φ_i ersetzt.

Sei $\mathfrak{I}$ eine σ-Interpretation. Wir müssen zeigen:

$$\mathfrak{I} \models \alpha(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \quad \iff \quad \mathfrak{I} \models \alpha'(\varphi_1, \dots, \varphi_n).$$

Sei $\mathfrak{A}$ eine aussagenlogische Interpretation mit $\mathfrak{A}(P_i) = [\![\varphi_i]\!]^{\mathfrak{I}}$ für jedes $i \in [n]$.

Per Induktion nach dem Aufbau von α bzw. α' lässt sich leicht zeigen (Details: Übung), dass Folgendes gilt:

$$\mathfrak{I} \models \alpha(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \iff \mathfrak{A} \models \alpha,$$
$$\mathfrak{I} \models \alpha'(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \iff \mathfrak{A} \models \alpha'.$$

Laut Voraussetzung sind α und α' äquivalente aussagenlogische Formeln. Daher gilt:

$$\mathfrak{A} \models \alpha \iff \mathfrak{A} \models \alpha'.$$

Somit gilt auch:

$$\mathfrak{I} \models \alpha(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \iff \mathfrak{I} \models \alpha'(\varphi_1, \dots, \varphi_n).$$

$\square$

Äquivalenzregeln für Quantoren

Lemma 4.60

Für alle $x \in \mathrm{Var}$ *und* $\varphi, \psi \in \mathrm{L}(\sigma)$ *gelten folgende Äquivalenzen:*

(1) $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi,$

(2) $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi,$

(3) $\exists x\varphi \wedge \psi \equiv \exists x(\varphi \wedge \psi)$ falls $x \notin \mathrm{frei}(\psi)$,

(4) $\forall x\varphi \wedge \psi \equiv \forall x(\varphi \wedge \psi)$ falls $x \notin \mathrm{frei}(\psi)$,

(5) $\exists x\varphi \vee \psi \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)$ falls $x \notin \mathrm{frei}(\psi)$,

(6) $\forall x\varphi \vee \psi \equiv \forall x(\varphi \vee \psi)$ falls $x \notin \mathrm{frei}(\psi)$.

Beweis.
Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ eine σ-Interpretation. Wir zeigen jeweils, dass die Formeln χ_L auf der linken und χ_R auf der rechten Seite der Äquivalenz den gleichen Wert in $\mathfrak{I}$ annehmen, also

$$[\![\chi_L]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\chi_R]\!]^{\mathfrak{I}} .$$

(1) Es gilt

$$[\![\neg\exists x\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1 - \max_{a\in A} [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}} = \min_{a\in A} \left(1 - [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}}\right) = \min_{a\in A} [\![\neg\varphi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}} = [\![\forall x\neg\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} .$$

(2) Analog zu (1).

Für (3)–(6) gelte $x \notin \text{frei}(\psi)$. Wir beachten zunächst, dass für alle $a \in A$ gilt:

$$[\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}} .$$

Das folgt aus dem Koinzidenzlemma, denn $x \notin \text{frei}(\psi)$. Damit gilt auch

$$[\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} = \min_{a\in A} [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}} = \max_{a\in A} [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}} . \qquad (\star)$$

(3) Es gilt

$$[\![\exists x\varphi \wedge \psi]\!]^{\mathfrak{I}} = \min\left\{ [\![\exists x\varphi]\!]^{\mathfrak{I}}, [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}}\right\} = \min\left\{ \max_{a\in A} [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}}, [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} \right\} = \max_{a\in A} \min\left\{ [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}}, [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} \right\}.$$

Wenn nämlich $[\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} = 0$, so $\min\left\{ \max_{a\in A} [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}}, [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} \right\} = 0$ und $\min\left\{ [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}}, [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} \right\} = 0$ für alle $a \in A$, also $\max_{a\in A} \min\left\{ [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}}, [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} \right\} = 0$. Wenn $[\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$, so
$\min\left\{ \max_{a\in A} [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}}, [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} \right\} = \max_{a\in A} [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}} = \max_{a\in A} \min\left\{ [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}}, [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} \right\}$.
Wegen $(\star)$ gilt weiter

$$\max_{a\in A} \min\left\{ [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}}, [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} \right\} = \max_{a\in A} \min\left\{ [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}}, [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}} \right\} = [\![\exists x(\varphi \wedge \psi)]\!]^{\mathfrak{I}}.$$

Die Beweise von (4)–(6) sind ähnlich. □

Anwendung der Äquivalenzregeln

Lemma 4.61 (Ersetzungslemma)

Ersetzt man in einer σ-Formel φ eine Subformel ψ durch eine äquivalente Formel ψ', so ist die entstehende Formel φ' äquivalent zu φ.

Korollar 4.62

Jede Formel $\varphi \in \mathsf{L}(\sigma)$ ist äquivalent zu einer Formel $\varphi' \in \mathsf{L}(\sigma)$, in der nur einer der beiden Quantoren und nur die Junktoren aus einer funktional vollständigen Menge vorkommen.

Beispiel 4.63

Es reichen $\{\exists, \wedge, \neg\}$ oder $\{\forall, \rightarrow, \bot\}$.

Beweis des Ersetzungslemmas.

Man zeigt zunächst, dass für alle $\psi, \psi', \chi \in \mathrm{L}(\sigma)$ und alle $x \in \mathrm{Var}$ aus $\psi \equiv \psi'$ folgende Äquivalenzen folgen:

$$
\begin{aligned}
\neg\psi &\equiv \neg\psi', && \\
\psi * \chi &\equiv \psi' * \chi && \text{für } * \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\} \\
Qx\psi &\equiv Qx\psi' && \text{für } Q \in \{\exists, \forall\}.
\end{aligned}
$$

Damit lässt sich das Ersetzungslemma dann leicht per Induktion beweisen. $\square$

Negationsnormalform

Definition 4.64

Eine Formel $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ ist in Negationsnormalform (kurz: NNF), wenn sie keine Implikationen ($\to$) enthält und wenn Negationszeichen nur unmittelbar vor atomaren Subformeln auftreten.

Satz 4.65

Jede Formel $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ ist äquivalent zu einer Formel in NNF.

Beispiel 4.66

$$\begin{aligned}
\exists y \big(R(x,y) \vee \neg Q(y)\big) \to \neg\forall y R(y,x) &\equiv \neg\exists y \big(R(x,y) \vee \neg Q(y)\big) \vee \neg\forall y R(y,x) \\
&\equiv \forall y \neg\big(R(x,y) \vee \neg Q(y)\big) \vee \exists y \neg R(y,x) \\
&\equiv \forall y \big(\neg R(x,y) \wedge \neg\neg Q(y)\big) \vee \exists y \neg R(y,x) \\
&\equiv \forall y \big(\neg R(x,y) \wedge Q(y)\big) \vee \exists y \neg R(y,x).
\end{aligned}$$

Ergänzungen zu Seite 4.69

Beweis.
Ähnlich wie für die Aussagenlogik definieren wir per Induktion über den Aufbau zu jeder Formel $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ zwei Formeln $\varphi', \varphi'' \in \mathrm{L}(\sigma)$ in NNF, so dass gilt: $\varphi \equiv \varphi'$ und $\neg\varphi \equiv \varphi''$.

Details: Übung. $\square$

Das Beispiel zeigt, wie man eine Formel in eine äquivalente Formel in NNF umwandelt, indem man erst die Implikationen eliminiert und dann die Negationszeichen “nach Innen” in Richtung der atomaren Formeln schiebt.

Umbenennung gebundener Variablen

Zur Erinnerung

$\varphi\frac{\theta}{x}$ ist die Formel, die wir aus dem Substitutionslemma erhalten, indem wir die Variable x durch den Term θ ersetzen. Im folgenden Lemma verwenden wir diese Notation für $\theta = y$.

Lemma 4.67

Sei $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ eine Formel der Gestalt $Qx\psi$ für ein $Q \in \{\exists, \forall\}$, und sei $y \in \mathrm{Var} \setminus \mathrm{frei}(\varphi)$. Dann gilt

$$\varphi \quad \equiv \quad Qy\psi\frac{y}{x}.$$

Beweis.
Nehmen wir an, $Q = \exists$, der Beweis für $Q = \forall$ ist völlig analog. Falls $y = x$, so ist nichts zu zeigen. Nehmen wir also an, $y \neq x$. Dann ist $y \notin \mathrm{frei}(\psi) \subseteq \mathrm{frei}(\varphi) \cup \{x\}$.

Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ eine σ-Interpretation. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left[\!\left[\exists y \psi \tfrac{y}{x}\right]\!\right]^{\mathfrak{I}} &= \max\nolimits_{a \in A} \left[\!\left[\psi \tfrac{y}{x}\right]\!\right]^{\mathfrak{I}\frac{a}{y}} && \\
&= \max_{a \in A} [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a\,a}{y\,x}} && \text{Substitutionslemma} \\
&= \max_{a \in A} [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}\frac{a}{x}} && \text{weil } y \notin \mathrm{frei}(\psi) \\
&= [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} .
\end{aligned}$$

□

Definition 4.68

Eine Formel $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ ist in pränexer Normalform (kurz: PNF), wenn sie die Form

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \ \psi$$

hat, wobei $Q_1, \dots, Q_n \in \{\exists, \forall\}$ und ψ quantorenfrei.

Satz 4.69

Jede Formel $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ ist äquivalent zu einer Formel $\varphi' \in \mathrm{L}(\sigma)$ in pränexer Normalform.

Beispiel 4.70

$$
\begin{aligned}
\forall x \neg\big(\exists y E(x,y) \to \exists x E(x,y)\big) &\equiv \forall x \neg\big(\neg\exists y E(x,y) \vee \exists x E(x,y)\big) && \text{Elimination der Implikation}\\
&\equiv \forall x\big(\exists y E(x,y) \wedge \forall x \neg E(x,y)\big) && \text{Umwandlung in NNF}\\
&\equiv \forall x\big(\exists z_1 E(x,z_1) \wedge \forall z_2 \neg E(z_2,y)\big) && \text{Gebundene Umbenennung}\\
&\equiv \forall x \exists z_1\big(E(x,z_1) \wedge \forall z_2 \neg E(z_2,y)\big) && \text{Lemma 4.60(3)}\\
&\equiv \forall x \exists z_1 \forall z_2\big(E(x,z_1) \wedge \neg E(z_2,y)\big) && \text{Lemma 4.60(4).}
\end{aligned}
$$

Beweis von Satz 4.69.

OBdA können wir annehmen, dass φ bereits in NNF ist. Wir führen den Beweis per Induktion über den Aufbau von φ.

φ atomare oder negiert atomare Formel:
Dann ist φ bereits in PNF, und es ist nichts zu zeigen.

$\varphi = \psi_1 * \psi_2$, wobei $* \in \{\vee, \wedge\}$:
Nach Induktionsannahme gibt es für $i = 1, 2$ eine Formel ψ'_i in PNF, die äquivalent zu ψ_i ist. Nach dem Ersetzungslemma gilt

$$\psi_1 * \psi_2 \equiv \psi'_1 * \psi'_2.$$

Sei

$$\psi'_i = Q_{i1}x_{i1} \dots Q_{in_i}x_{in_i}\chi_i$$

für ein quantorenfreies χ_i. Durch gebundene Umbenennung können wir erreichen, dass

$$\{x_{i1}, \dots, x_{in_i}\} \cap \big(\{x_{(3-i)1}, \dots, x_{(3-i)n_{3-i}}\} \cup \mathrm{frei}(\chi_{3-i})\big) = \emptyset.$$

Dann ergibt sich durch wiederholte Anwendung von Lemma 4.60, dass

$$\psi_1' * \psi_2' \equiv \underbrace{Q_{11}x_{11} \dots Q_{1n_1}x_{1n_1}Q_{21}x_{21} \dots Q_{2n_2}x_{2n_2}(\chi_1 * \chi_2)}_{=:\varphi'}.$$

Insgesamt $\varphi \equiv \varphi'$, und φ' is in PNF.

$\varphi = Qx\psi_1$, wobei $Q \in \{\exists, \forall\}$:
Nach Induktionsannahme gibt es eine Formel ψ' in PNF, die äquivalent zu ψ ist. Nach dem Ersetzungslemma gilt

$$\varphi = Qx\psi \equiv \underbrace{Qx\psi'}_{=:\varphi'}.$$

φ' ist in PNF. $\square$

4.7 Algorithmische Fragestellungen

Das Auswertungsproblem

Das Auswertungsproblem (oder Model-Checking Problem) für eine Logik L besteht darin, zu entscheiden, ob eine gegebene Interpretation eine gegebene L-Formel erfüllt.

- Für die Aussagenlogik ist das Auswertungsproblem leicht mit Hilfe des Syntaxbaums lösbar.
- Für die Logik der 1. Stufe ist das Problem zunächst nicht einmal vernünftig spezifiziert, weil die Eingabeinterpretation im allgemeinen unendlich ist.
- *Wir beschränken uns deswegen zunächst auf endliche Eingabestrukturen und endliche (partielle) Belegungen, die nur auf den freien Variablen der Eingabeformel definiert sind.*

Vereinbarung

Für den Rest dieses Kapitels nehmen wir an, dass σ eine endliche Symbolmenge ist.

Definition 4.71

(1) Eine σ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist endlich, wenn ihr Universum A endlich ist.

(2) Eine endliche σ-Interpretation ist ein Paar $(\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$, wobei $\mathfrak{A}$ eine endliche σ-Struktur ist und $\mathfrak{b} : V \to A$ für eine endliche Teilmenge $V \subseteq \mathrm{Var}$.

(3) Eine endliche σ-Interpretation $(\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ erfüllt eine Formel $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ (wir schreiben $(\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \models \varphi$), wenn $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \mathrm{def}(\mathfrak{b})$ und $(\mathfrak{A}, \widehat{\mathfrak{b}}) \models \varphi$ für ein $\widehat{\mathfrak{b}} : \mathrm{Var} \to A$ mit $\widehat{\mathfrak{b}}{\restriction}_{\mathrm{def}(\mathfrak{b})} = \mathfrak{b}$.

Beobachtung 4.72

Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ eine endliche σ-Interpretation, die eine σ-Formel φ erfüllt.

Dann gilt nach dem Koinzidenzlemma $(\mathfrak{A}, \widehat{\mathfrak{b}}) \models \varphi$ für alle $\widehat{\mathfrak{b}} : \mathrm{Var} \to A$ mit $\widehat{\mathfrak{b}}{\restriction}_{\mathrm{def}(\mathfrak{b})} = \mathfrak{b}$.

Das Auswertungsproblem auf Endlichen Strukturen

$\mathrm{AW}(\mathrm{L}(\sigma))$

Eingabe: Formel $\varphi \in \mathsf{L}(\sigma)$, endliche σ-Interpretation $\mathfrak{I}$.

Frage: Gilt $\mathfrak{I} \models \varphi$?

Bemerkungen 4.73

- Wir müssen auch für endliche Interpretationen noch festlegen, wie sie repräsentiert werden. Wir können einfach annehmen, dass das Universum der Struktur $\mathfrak{A}$ als Liste von Elementen gegeben ist und alle Relationen und Funktionen durch geeignete Tabellen repräsentiert werden. Die endliche Belegung $\mathfrak{b}$ ist ebenfalls durch eine Wertetabelle repräsentiert. (Details sind für diese Vorlesung nicht wichtig.)
- Die Eingabeformel ist als Wort über dem Alphabet $\Sigma_{\mathsf{L}(\sigma)}$ repräsentiert, wir können daraus aber leicht den Syntaxbaum konstruieren.

Die Komplexität des Auswertungsproblems

Satz 4.74

$\mathrm{AW}\big(\mathrm{L}(\sigma)\big)$ *ist lösbar in Zeit* $n^{O(|\varphi|)}$*, wobei* n *die Größe des Universums der Eingabestruktur ist.*

Vereinbarungen

(i) OBdA nehmen wir an, dass die Eingabeformel φ des Auswertungsproblems nur die Junktoren $\wedge, \neg$ und nur $\exists$-Quantoren enthält.

(ii) Weiterhin nehmen wir an, dass für die Eingabeinterpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ gilt: $\mathrm{def}(\mathfrak{b}) \supseteq \mathrm{frei}(\varphi)$.

Ergänzungen zu Seite 4.77

Als Länge $|\varphi|$ eine Formel $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ definieren wir ihre Länge als Wort über dem Alphabet $\Sigma_{\mathrm{L}(\sigma)}$. Im Wesentlichen entspricht das der Zahl der Knoten des Syntaxbaums.

Wir haben gesehen (Korollar 4.62), dass sich jede σ-Formel φ in eine äquivalente $\{\exists, \wedge, \neg\}$-Formel φ' umwandeln lässt. Es ist zudem leicht zu sehen, dass $|\varphi'| = O(\varphi)$ und dass sich φ' aus φ in Polynomialzeit berechnen lässt.

Deswegen ist Vereinbarung (i) gerechtfertigt.

Außerdem ist leicht zu sehen, dass wir in Polynomialzeit die Menge $\mathrm{frei}(\varphi)$ berechnen können. Wir können dann testen, ob $\mathrm{def}(\mathfrak{b}) \supseteq \mathrm{frei}(\varphi)$. Wenn dies nicht der Fall ist, können wir sofort den Wert 0 („nein“) zurückgeben.

Deswegen ist Vereinbarung (ii) gerechtfertigt.

Wir werden zwei verschiedene Algorithmen für das Auswertungsproblem betrachten. Die Laufzeit der Algorithmen werden wir nicht im Detail analysieren, es wird aber leicht zu sehen sein, dass sie in der angegebenen Zeit laufen.

Auswertung atomarer Formeln

Um eine atomare Formel $\theta_1 \doteq \theta_2$ oder $R(\theta_1, \dots, \theta_k)$ in einer Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ auszuwerten, müssen wir

(1) die Werte $[\![\theta_i]\!]^{\mathfrak{I}}$ berechnen;

(2) die Werte vergleichen bzw. testen, ob das Tupel der Werte in $R^{\mathfrak{A}}$ ist.

Beides lässt sich leicht in Polynomialzeit bewerkstelligen. Details hängen von der genauen Repräsentation der Struktur $\mathfrak{A}$ ab.

Wir nehmen im Folgenden an, dass wir eine entsprechende Funktion $\textsc{AtomicAW}(\varphi, \mathfrak{I})$ mit folgender Spezifikation implementiert haben.

Algorithm $\textsc{AtomicAW}(\varphi, \mathfrak{I})$

Eingabe: $\varphi \in \mathsf{L}(\sigma)$ atomare Formel, $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ so dass $\mathrm{def}(\mathfrak{b}) \supseteq \mathrm{frei}(\varphi)$

Ausgabe: 1 falls $\mathfrak{I} \models \varphi$, 0 sonst

Top-Down Algorithmus für das Auswertungsproblem

Algorithm $\textsc{TopAW}(\varphi, \mathfrak{I})$

Eingabe: $\varphi \in \mathsf{L}(\sigma)$, $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ so dass
def$(\mathfrak{b}) \supseteq$ frei(φ)

Ausgabe: 1 falls $\mathfrak{I} \models \varphi$, 0 sonst

1. if φ atomare Formel then
2. return $\textsc{AtomicAW}(\varphi, \mathfrak{I})$
3. else if $\varphi = \neg\psi$ für ein $\psi \in \mathsf{L}(\sigma)$ then
4. return $\textsc{NegAW}(\psi, \mathfrak{I})$
5. else if $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ für $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{L}(\sigma)$ then
6. return $\textsc{UndAW}(\psi_1, \psi_2, \mathfrak{I})$
7. else if $\varphi = \exists x \psi$ für $x \in$ Var, $\psi \in \mathsf{L}(\sigma)$ then
8. return $\textsc{ExAW}(x, \psi, \mathfrak{I})$

Algorithm $\textsc{NegAW}(\psi, \mathfrak{I})$

1. return $1 - \textsc{TopAW}(\psi, \mathfrak{I})$

Algorithm $\textsc{UndAW}(\psi_1, \psi_2, \mathfrak{I})$

1. if $\textsc{TopAW}(\psi_1, \mathfrak{I}) = 0$ then
2. return 0
3. else
4. return $\textsc{TopAW}(\psi_2, \mathfrak{I})$

Algorithm $\textsc{ExAW}(x, \psi, \mathfrak{I})$

1. for all $a \in A$ do
2. if $\textsc{TopAW}(\psi, \mathfrak{I}\frac{a}{x}) = 1$ then
3. return 1
4. return 0

Analyse des Top-Down Algorithmus

Korrektheit

Der Algorithmus folgt genau der rekursiven Definition der Semantik und ist deswegen korrekt.

Laufzeit

Die Tiefe des Rekursionsbaums ist durch die Länge $k := |\varphi|$ der Formel beschränkt, der maximale Verzweigungsgrad ist $n := |A|$. Also hat der Baum maximal $2n^k = n^{O(k)}$ Knoten.

An jedem Knoten müssen wir nur polynomiell viele Schritte durchführen, also ist die Laufzeit insgesamt $n^{O(k)} n^{O(1)} = n^{O(k)}$.

Der Relationale Algorithmus für das Auswertungsproblem

Idee

Sei $\mathfrak{A}$ eine endliche σ-Struktur und $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$.

- Wir berechnen für alle Subformeln ψ von φ die Menge $W(\mathfrak{A}, \psi)$ aller Belegungen $\mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\psi) \to A$, so dass $(\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \models \psi$.
- Wenn $\mathrm{frei}(\psi) = \{x_1, \dots, x_k\}$, so können wir die Belegungen $\mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\psi) \to A$ als k-Tupel $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_k) \in A^k$ mit $b_i = \mathfrak{b}(x_i)$ auffassen. Dann ist $W(\mathfrak{A}, \psi) \subseteq A^k$ eine k-stellige Relation.
- Um $W(\mathfrak{A}, \psi)$ zu berechnen, müssen wir überlegen, wie wir diese Relation aus den Relationen $W(\mathfrak{A}, \chi)$ für die Kinder χ von ψ im Syntaxbaum berechnen.
- Wenn wir schließlich an der Wurzel des Syntaxbaums $W(\mathfrak{A}, \varphi)$ berechnet haben, erhalten wir auch die Antwort für das Auswertungsproblem: $(\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \models \varphi \iff \mathfrak{b}{\restriction}_{\mathrm{frei}(\varphi)} \in W(\mathfrak{A}, \varphi)$.

Diese Art, Formeln auszuwerten, verwendet man in relationalen Datenbanksystemen, um Anfragen in der relationalen Algebra auszuwerten.

Relationaler Algorithmus (Forts.)

Sei $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$, und sei $\mathfrak{A}$ eine endliche σ-Struktur.

Notation

Für Mengen A, X ist A^X die Menge aller Funktion $X \to A$.

Ziel

Berechne

$$W(\mathfrak{A}, \varphi) := \left\{ \mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\varphi) \to A \;\middle|\; (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \models \varphi \right\} \subseteq A^{\mathrm{frei}(\varphi)}.$$

Wir berechnen $W(\mathfrak{A}, \varphi)$, indem wir geeignete Mengen- oder Relations-Operatoren auf die Mengen $W(\mathfrak{A}, \psi)$ für die Kinder ψ von φ im Syntaxbaum anwenden.

Relationaler Algorithmus (Forts.)

Negation = Komplement

Sei $\varphi = \neg\psi$. Dann ist $\text{frei}(\varphi) = \text{frei}(\psi)$ und

$$W(\mathfrak{A}, \varphi) = W(\mathfrak{A}, \psi)^{\complement} := A^{\text{frei}(\varphi)} \setminus W(\mathfrak{A}, \psi).$$

Konjunktion = Join

Sei $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$. Dann ist $\text{frei}(\varphi) = \text{frei}(\psi_1) \cup \text{frei}(\psi_2)$ und

$$\begin{aligned} W(\mathfrak{A}, \varphi) &= W(\mathfrak{A}, \psi_1) \bowtie W(\mathfrak{A}, \psi_2) \\ &:= \left\{ \mathfrak{b} : \text{frei}(\varphi) \to A \;\middle|\; \mathfrak{b}{\restriction}_{\text{frei}(\psi_1)} \in W(\mathfrak{A}, \psi_1) \text{ und } \mathfrak{b}{\restriction}_{\text{frei}(\psi_2)} \in W(\mathfrak{A}, \psi_2) \right\}. \end{aligned}$$

Existentielle Quantifizierung = Projektion

Sei $\varphi = \exists x \psi$. Dann ist $\text{frei}(\varphi) = \text{frei}(\psi) \setminus \{x\}$ und

$$W(\mathfrak{A}, \varphi) = \Pi_{\text{frei}(\varphi)}(W(\mathfrak{A}, \psi)) := \left\{ \mathfrak{b}{\restriction}_{\text{frei}(\varphi)} \;\middle|\; \mathfrak{b} \in W(\mathfrak{A}, \psi) \right\}.$$

Ergänzungen zu Seite 4.83

Die Korrektheit der Operationen folgt unmittelbar aus der Definition der Semantik der Junktoren und Quantoren.

Relationaler Algorithmus (Forts.)

Algorithm $\textsc{RelAW}(\varphi, \mathfrak{A})$

Eingabe: $\varphi \in \mathsf{L}(\sigma)$, $\mathfrak{A}$ endliche σ-Struktur

Ausgabe: $W(\mathfrak{A}, \varphi)$

1. if φ atomare Formel then
2.   return $\left\{\mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\varphi) \to A \;\middle|\; \textsc{AtomicAW}(\varphi, (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})) = 1\right\}$
3. else if $\varphi = \neg\psi$ für ein $\psi \in \mathsf{L}(\sigma)$ then
4.   return $\textsc{RelAW}(\psi, \mathfrak{A})^{\complement}$
5. else if $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$ für $\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{L}(\sigma)$ then
6.   return $\textsc{RelAW}(\psi_1, \mathfrak{A}) \bowtie \textsc{RelAW}(\psi_2, \mathfrak{A})$
7. else if $\varphi = \exists x \psi$ für $x \in \mathrm{Var}, \psi \in \mathsf{L}(\sigma)$ then
8.   return $\Pi_{\mathrm{frei}(\varphi)}\big(\textsc{RelAW}(\psi, \mathfrak{A})\big)$

Ergänzungen zu Seite 4.84

Die Implementierung der relationalen Operatoren $\cdot^{\complement}$, $\bowtie$, und Π_X ist eine Übungsaufgabe.

Analyse des Relationalen Algorithmus

Korrektheit

Die Korrektheit des Algorithmus folgt aus der Korrektheit der Operatoren für $\neg, \wedge, \exists$.

Laufzeit

Der Rekursionsbaum entspricht genau dem Syntaxbaum, hat also die Größe $O(|\varphi|)$.

Am Knoten für eine Subformel ψ berechnen wir eine Relation der Größe $\leq n^{|\operatorname{frei}(\psi)|} \leq n^{|\varphi|}$. Diese Berechnung ist in Zeit $n^{O(|\operatorname{frei}(\psi)|)} \leq n^{O(|\varphi|)}$ möglich.

Insgesamt ist die Laufzeit also $|\varphi| \cdot n^{O(|\varphi|)} = n^{O(|\varphi|)}$.

Bemerkung 4.75

In der Praxis ist der bottom-up Algorithmus (bei guter Implementierung) gewöhnlich effizienter und wird deswegen auch in relationalen Datenbanksysteme verwendet.

Auswertung in unendlichen Strukturen

- Das Auswertungsproblem für $\mathsf{L}(\sigma)$-Formeln in unendlichen σ-Interpretationen ist nicht wohldefiniert, weil sich die Eingabeinterpretationen im Allgemeinen nicht endlich repräsentieren lassen.
- Wir können aber versuchen, Formeln in festen unendlichen Strukturen wie dem Standardmodell $\mathfrak{N}$ der Arithmetik oder dem Körper $\mathfrak{R}$ der reellen Zahlen auszuwerten. Die Eingabe ist dann nur noch eine Formel.
- Weil wir Elemente der Struktur und damit Belegungen im allgemeinen nicht endlich repräsentieren können, beschränken wir uns auf Sätze (geschlossenen Formeln).

Für jede σ-Struktur $\mathfrak{A}$ erhalten wir folgendes Entscheidungsproblem:

$\mathrm{AW}_{\mathfrak{A}}(\mathrm{L}(\sigma))$

Eingabe: Satz $\varphi \in \mathsf{L}(\sigma)$.

Frage: Gilt $\mathfrak{A} \models \varphi$?

Die Theorie einer Struktur

Definition 4.76

Die Theorie einer σ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist die Menge $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ aller Sätze $\varphi \in \mathsf{L}(\sigma)$, für die gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Beobachtung 4.77

$\mathrm{AW}_{\mathfrak{A}}(\mathsf{L}(\sigma))$ *ist gerade das Entscheidungsproblem für die Sprache* $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \subseteq \Sigma^*_{\mathsf{L}(\sigma)}$.

Bemerkung 4.78

Der Einfachheit halber nehmen wir hier an, dass die Symbolmenge σ endlich ist. Dann ist $\Sigma_{\mathsf{L}(\sigma)}$ ein endliches Alphabet.

Entscheidbare und Unentscheidbare Theorien

Satz 4.79 (Church 1936, Turing 1936)

$\mathrm{Th}(\mathfrak{N})$, *die Theorie des Standardmodells der Arithmetik, ist unentscheidbar.*

Satz 4.80 (Tarski ∼1930)

$\mathrm{Th}(\mathfrak{R})$, *die Theorie des Körpers der reellen Zahlen, ist entscheidbar.*

Alonzo Church
(1903–1995)
Quelle: https://www.biografiasyvidas.com/biografia/c/fotos/church_alonzo.jpg

Alfred Tarski
(1901–1983)
Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Alfred_Tarski

Das Erfüllbarkeitsproblem und verwandte algorithmische Probleme

$\textsc{Erf}(\mathrm{L}(\sigma))$

Eingabe: Formel $\varphi \in \mathsf{L}(\sigma)$.

Frage: Ist φ erfüllbar?

$\textsc{Allg}(\mathrm{L}(\sigma))$

Eingabe: Formel $\varphi \in \mathsf{L}(\sigma)$.

Frage: Ist φ allgemeingültig?

$\textsc{Äq}(\mathrm{L}(\sigma))$

Eingabe: Formeln $\varphi, \psi \in \mathsf{L}(\sigma)$.

Frage: Gilt $\varphi \equiv \psi$?

Äquivalenz der Probleme

Satz 4.81

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) $\textsc{Erf}(\mathsf{L}(\sigma))$ *ist entscheidbar.*

(2) $\textsc{Allg}(\mathsf{L}(\sigma))$ *ist entscheidbar.*

(3) $\textsc{Äq}(\mathsf{L}(\sigma))$ *ist entscheidbar.*

Bemerkung 4.82

Wir werden in Kapitel 6 sehen, dass $\textsc{Erf}(\mathsf{L}(\sigma))$ unentscheidbar ist.

Beweis.

„(1) $\implies$ (2)“: Für alle $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ gilt:

$$\varphi \text{ allgemeingültig } \iff \neg\varphi \text{ nicht erfüllbar.}$$

Um also zu entscheiden, ob φ allgemeingültig ist, müssen wir entscheiden, ob $\neg\varphi$ erfüllbar ist (und geben dann die entgegengesetzte Antwort).

„(2) $\implies$ (3)“: Für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{L}(\sigma)$ gilt:

$$\varphi \equiv \psi \iff \varphi \leftrightarrow \psi \text{ allgemeingültig.}$$

Um also zu entscheiden, ob $\varphi \equiv \psi$, müssen wir entscheiden, ob $\varphi \leftrightarrow \psi$ allgemeingültig ist.

„(3) $\implies$ (1)“: Für alle $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi \text{ ist erfüllbar } &\iff \neg\varphi \text{ ist nicht allgemeingültig} \\ &\iff \neg\varphi \not\equiv \top. \end{aligned}$$

Um also zu entscheiden, ob φ erfüllbar ist, müssen wir entscheiden, ob $\neg\varphi \equiv \top$ (und geben dann die entgegengesetzte Antwort). $\square$