Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2020

2. Klausur Mathematische Logik

Name:
Vorname:
Matr.-Nr.:
Studiengang:

1	2	3	4	5	6	7
/ 25	/ 20	/ 15	/ 12	/ 15	/ 19	/ 14

Summe:	/ 120

Hinweise

Unsere Regeln für die Klausur: Es sind *keine* Hilfsmittel (Skripte, Bücher, Mitschriften oder dergleichen) zugelassen.

Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Es darf *kein* zusätzliches Papier ausgegeben werden. Der Platz zur Bearbeitung der Aufgaben ist daher großzügig bemessen.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Hiermit bestätige ich, dass ich obige Hinweise zur Kenntnis genommen habe und prüfungsfähig bin.

Unterschrift

Aufgabe 1 25 Punkte

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Behauptungen wahr sind. Begründen Sie Ihre Antworten durch kurze Beweisskizzen unter Einbeziehung von Ergebnissen aus der Vorlesung, oder durch geeignete Gegenbeispiele.

(a) Seien $\Phi, \Psi \subseteq \text{AL}$ und $\varphi, \psi \in \text{AL}$. Wenn $\Phi \models \varphi$ und $\Psi \models \psi$, dann auch $\Phi \cup \Psi \models \varphi \wedge \psi$.

(b) Seien φ und ψ logisch äquivalente AL-Formeln in KNF. Dann gilt $\varphi = \psi$.

(c) Die AL-Formel $\varphi = X \rightarrow \neg X$ ist erfüllbar.

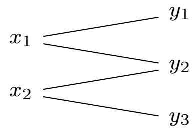
(d) Die Menge $\{\rightarrow, \oplus\}$ ist funktional vollständig (hierbei ist $\oplus$ das exklusive oder).

(e) $\exists x(x = y \rightarrow \forall y\,(\neg\, fyy = x \vee \neg\, x))$ ist eine $\mathrm{FO}(\{f\})$-Formel, wobei f ein zweistelliges Funktionssymbol ist.

(f) Folgende Sequenz ist gültig (hierbei ist E ein zweistelliges Relationssymbol und c, d sind Konstantensymbole):

$$\exists x Ecx, Edd \;\Rightarrow\; Ecd$$

(g) Sei $\mathfrak{G} = (V, E)$ der rechts angegebene ungerichtete Graph. Sei $\sim$ die kleinste Relation mit $x_i \sim x_j$ für alle $i, j \in \{1, 2\}$ und $y_i \sim y_j$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Dann ist $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{G}$.



(h) Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei $\{R\}$-Strukturen. Wenn R ein zweistelliges Relationssymbol ist, dann gewinnt die Duplikatorin das Spiel $G_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

(i) Sei $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine vollständige Theorie. Dann gibt es (bis auf Isomorphie) genau eine τ-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models T$.

(j) Die Abbildung $\pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto -a$ ist ein Automorphismus der Struktur $(\mathbb{R}, \cdot)$, wobei $\cdot$ die übliche Multiplikation auf den reellen Zahlen sei.

(k) Es gibt einen Algorithmus, der für eine AL-Formel φ entscheidet, ob es *genau ein* Modell über der Variablenmenge $\tau(\varphi)$ gibt.

(l) Seien $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ Transitionssysteme und v, v' Zustände aus $\mathcal{K}$ bzw. $\mathcal{K}'$. Wenn $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$, dann gilt für alle $\mathrm{FO}(\{E\})$-Formeln $\varphi(x)$, dass $\mathcal{K} \models \varphi(v)$ gdw. $\mathcal{K}' \models \varphi(v')$.

Aufgabe 2 20 Punkte

(a) Was besagt die Vollständigkeit des Resolutionskalküls?

(b) Wenden Sie den Markierungsalgorithmus an, um zu entscheiden, ob folgende Horn-Formel erfüllbar ist. Geben Sie dazu die Menge der markierten Variablen nach jedem Schritt an. Falls die Formel erfüllbar ist, geben Sie außerdem das berechnete minimale Modell an.

$$(X \to U) \wedge (\neg X \vee Y \vee \neg W) \wedge ((S \wedge Z) \to 0) \wedge X \wedge (1 \to W) \wedge ((U \wedge W) \to Z)$$

(c) Geben Sie für die folgende Sequenz im Sequenzenkalkül eine Ableitung aus Axiomen an. Verwenden Sie ausschließlich die aus der Vorlesung bekannten Schlussregeln.

$$\exists x(\varphi(x) \to \psi(x)) \Rightarrow \exists x\, \neg\varphi(x),\ \exists x\psi(x)$$

Zur Erinnerung einige der bekannten Schlussregeln:

$(S \Rightarrow)$ $\dfrac{\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta}$ $(\Rightarrow S)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}$

$(\neg \Rightarrow)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$ $(\Rightarrow \neg)$ $\dfrac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$

$(\vee \Rightarrow)$ $\dfrac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \vee \vartheta \Rightarrow \Delta}$ $(\Rightarrow \vee)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \vartheta}$

$(\to\Rightarrow)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \to \vartheta \Rightarrow \Delta}$ $(\Rightarrow\to)$ $\dfrac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \to \vartheta}$

$(\exists \Rightarrow)$ $\dfrac{\Gamma, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x\psi(x) \Rightarrow \Delta}$ * $(\Rightarrow \exists)$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\psi(x)}$

*wenn c in Γ, Δ und ψ nicht vorkommt

(d) Beweisen oder widerlegen Sie jeweils *semantisch* (d.h. *nicht* mittels Ableitung im Sequenzenkalkül), dass die folgenden Schlussregeln der Aussagenlogik korrekt sind.

(i) $$\frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \psi \to \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \psi \to \vartheta}$$

(ii) $$\frac{\Gamma, \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}$$

Aufgabe 3 15 Punkte

(a) Formalisieren Sie die folgenden Eigenschaften von partiellen Ordnungen $\mathfrak{A} = (A, <)$ jeweils durch einen FO($\{<\}$)-Satz. Die Korrektheit der Formeln muss nicht bewiesen werden.

Zur Erinnerung: Partielle Ordnungen werden axiomatisiert durch

$$\psi_{\text{PO}} \coloneqq \forall x \neg x < x \ \wedge \ \forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z).$$

(i) Es gibt ein Element, das größer ist als alle anderen.

(ii) Wenn es mindestens 150 Elemente gibt, dann gibt es (mindestens) ein Element, das mit keinem anderen in Relation steht.

(iii) Für je zwei verschiedene Elemente x, y gilt: Es gibt ein eindeutiges kleinstes Element, das größer ist als x und als y.

(b) Gilt $(\mathbb{N}, \cdot) \models \forall x \exists y \exists z(y \cdot z = x)$, wobei $\cdot$ die Multiplikation auf $\mathbb{N}$ bezeichnet? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Ein ungerichteter Graph $\mathfrak{G} = (V, E)$ ist 2-färbbar, wenn es eine Funktion $f \colon V \to \{\text{rot}, \text{blau}\}$ gibt, sodass $f(v) \neq f(w)$ für alle Kanten $(v, w) \in E$ gilt.

Geben Sie (ohne Beweis) an, welches der folgenden Axiomensysteme die Klasse der 2-färbbaren ungerichteten Graphen axiomatisiert. Begründen Sie mithilfe eines geeigneten Gegenbeispiels, warum die anderen Axiomensysteme die Klasse nicht axiomatisieren. Hierbei sei Φ_{Graph} das aus der Vorlesung bekannte Axiomensystem für ungerichtete Graphen. Wir definieren zunächst eine Hilfsformel:

$$\mathsf{Pfad}_n(x_1, \ldots, x_n) \coloneqq \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \ \wedge \bigwedge_{1 \leq i < n} E x_i x_{i+1}, \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

(i) $\Phi_{\text{Graph}} \cup \{\exists x_1 \ldots \exists x_n \, \mathsf{Pfad}_n(x_1, \ldots, x_n) \mid n \in \mathbb{N}_{>0}, n \text{ gerade}\}$.

(ii) $\Phi_{\text{Graph}} \cup \{\forall x \forall y \forall z(\neg Exy \vee \neg Exz \vee \neg Eyz)\}$.

(iii) $\Phi_{\text{Graph}} \cup \{\neg \exists x_1 \ldots \exists x_n(\mathsf{Pfad}_n(x_1, \ldots, x_n) \wedge E x_1 x_n) \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ ungerade}\}$.

(Leere Seite)

Aufgabe 4 12 Punkte

(a) Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen. Geben Sie die Definition eines Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ an.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, ob die angegebene Relation in der gegebenen Struktur elementar definierbar ist. Wenn Sie Automorphismen benutzen, genügt es, diese anzugeben. Sie müssen nicht formal beweisen, dass eine Abbildung ein Automorphismus ist.

(i) Die Menge $M = \{\mathsf{Lernen}, \mathsf{Machen}\}$ in folgendem gerichteten Graphen $\mathfrak{G} = (V, E)$:

$$\mathfrak{G}: \quad \begin{tikzcd} \mathsf{Lernen} \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \mathsf{Forschen} \arrow[r] & \mathsf{Machen} \end{tikzcd}$$

(ii) Die Menge aller Primzahlen in $(\mathbb{N}, Q)$, wobei $Q = \{q \in \mathbb{N} \mid q \text{ ist eine Quadratzahl}\}$.

(iii) Die Menge aller einelementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$, d.h. die Menge $\{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$, in $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$, wobei $\subseteq$ die übliche (nicht strikte) Teilmengenrelation ist. Dabei bezeichnet $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$.

Aufgabe 5 15 Punkte

(a) Geben Sie die Definition einer Theorie wieder.

(b) Sei τ endlich und relational. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen mit $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Begründen Sie, wer das Spiel $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt.

(c) Sei T die durch Φ axiomatisierte Theorie.

$$\begin{aligned}\Phi = \{&\forall x \forall y \forall z (Exy \wedge Eyz \rightarrow Exz),\ \forall x\, \neg Exx\} \\ \cup\, \{&\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (\bigwedge_{1 \leq i < j \leq 3} x_i \neq x_j\ \wedge\ \forall y \bigvee_{1 \leq i \leq 3} y = x_i)\}\end{aligned}$$

Geben Sie (ohne Beweis) für jede vollständige Erweiterung von T ein Modell an. Sie können die Modelle graphisch (als gerichtete Graphen) angeben.

Hinweis: Es gibt 5 vollständige Erweiterungen von T.

(d) Sei $\mathfrak{A} = (\{1,2,3,4\}, f^{\mathfrak{A}})$, wobei die einstellige Funktion $f^{\mathfrak{A}}$ wie folgt definiert ist:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, mapsto, "f^{\mathfrak{A}}"] & 2 \arrow[r, mapsto, "f^{\mathfrak{A}}"] & 3 \arrow[ll, mapsto, bend left, "f^{\mathfrak{A}}"] & 4 \arrow[l, mapsto, "f^{\mathfrak{A}}"'] \end{tikzcd}$$

Wir betrachten folgende Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$:

$$i \sim j \quad \text{gdw.} \quad i = j \text{ oder } i, j \in \{1,2,3\}$$

(i) Geben Sie die Faktorstruktur $\mathfrak{A}/_\sim$ an.

(ii) Geben Sie einen Satz mit minimalem Quantorenrang an, der zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}/_\sim$ unterscheidet. (Es muss nicht bewiesen werden, dass der Quantorenrang minimal ist.)

Aufgabe 6 19 Punkte

(a) Geben Sie den Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik an.

(b) Geben Sie den absteigenden Satz von Löwenheim-Skolem an.

(c) Geben Sie für folgende Klassen von Strukturen jeweils ein, wenn möglich endliches, Axiomensystem an. Sollten Sie kein (endliches) Axiomensystem angeben, so beweisen Sie, dass es kein (endliches) Axiomensystem gibt.

Dabei sei $<$ ein zweistelliges Relations- und $\cdot$ ein zweistelliges Funktionssymbol. Sie dürfen das aus der Vorlesung bekannte Axiomensystem $\Phi_<$ für lineare Ordnungen verwenden:

$$\Phi_< = \{\forall x\, \neg x < x,\ \forall x \forall y \forall z (x < y \land y < z \to x < z),\ \forall x \forall y (x < y \lor x = y \lor y < x)\}.$$

(i) Sei $\mathfrak{A} = (\{\mathsf{Lernen}, \mathsf{Forschen}, \mathsf{Machen}\}, <)$, wobei $<$ die lineare Ordnung mit $\mathsf{Lernen} < \mathsf{Forschen} < \mathsf{Machen}$ ist. Die Klasse aller zu $\mathfrak{A}$ isomorphen Strukturen.

(ii) Die Klasse aller linearen Ordnungen $\mathfrak{A} = (A, <)$, sodass es einen $\mathrm{FO}(\{<\})$-Satz gibt, der $\mathfrak{A}$ bis auf Isomorphie axiomatisiert.

(iii) Die Klasse aller $\{\cdot\}$-Strukturen $(A, \cdot)$ mit folgender Eigenschaft: Falls A endlich ist, so ist $|A|$ eine Primzahl.

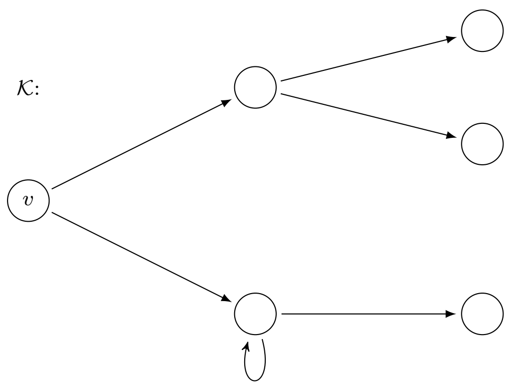
(iv) Die Klasse aller Substrukturen von $(\mathbb{R}, <)$ (mit der üblichen Ordnung $<$ auf den reellen Zahlen).

Aufgabe 7 14 Punkte

(a) Was besagt die Baummodell-Eigenschaft der Modallogik?

(b) Betrachten Sie die abgebildete Kripkestruktur $\mathcal{K}$ und ML-Formel φ. Beschriften Sie die Zustände in $\mathcal{K}$ so mit den atomaren Eigenschaften $\{P, Q\}$, dass $\mathcal{K}, v \models \varphi$ gilt.

$$\varphi := P \ \wedge \ \Diamond Q \ \wedge \ \Box(Q \rightarrow (\Diamond 1 \rightarrow \neg P)) \ \wedge \ \Diamond\Box P$$



(c) Geben Sie ein Modell $\mathcal{K}, v$ der CTL-Formel $\neg P \wedge \mathsf{EFAG}P$ an.

(d) Formulieren Sie folgende Aussagen als modallogische Formeln, oder zeigen Sie, dass dies nicht möglich ist.

(i) Wenn alle Nachfolger des aktuellen Knotens mit P beschriftet sind, dann hat der aktuelle Knoten eine Selbstkante.

(ii) Vom aktuellen Knoten aus ist in genau 3 Schritten ein Terminalknoten (ein Knoten ohne ausgehende Kanten) erreichbar.

(Leere Seite)