L: $\Gamma \vdash \Delta$ Sequenzen

- gültig : "Semantisch"
- ableitbar : Syntaktisch

$\Gamma, \Delta \subseteq L$

Ableitung:

1.
2.
3.

⋮

n.

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \quad \cdots}{\Gamma \vdash \Delta}$$

- Korrekt : "semantik"
- $\boxed{\text{ableitbar:}}$ Syntax

$\Phi \overset{\text{"beweisbar"}}{\vdash} \varphi$ gilt $\Longleftrightarrow$ es gibt endliche $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Phi_0 \vdash \varphi$ gültig

1.) Zeigen Sie für alle endlichen $\Gamma, \Delta \subseteq L(\sigma)$, alle $\varphi, \psi \in L(\sigma)$ Regeln ableitbar:

a)
$$\frac{\Gamma, \neg\psi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \psi}$$

1. $\Gamma, \neg\psi \vdash \Delta$ ( )
2. $\Gamma \vdash \Delta, \neg\neg\psi$ ($\neg R$, wobei $\varphi := \neg\psi$)

$$\boxed{\frac{}{\varphi \vdash \varphi}}$$

$$\cancel{\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \psi}}$$

$\cancel{\psi \equiv \varphi}$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi} \ (\neg R)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta} \ (\neg L)$$

$$(S) \ \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \quad \Gamma \vdash \varphi, \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

a) $$\frac{\Gamma, \neg\psi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \psi} \quad (\neg EL)$$

1. $\Gamma, \neg\psi \vdash \Delta$ (S_1)
2. $\Gamma, \neg\psi \vdash \Delta, \psi$ (Erw)
3. $\psi \vdash \psi$ (Vor)
4. $\Gamma, \psi \vdash \Delta, \psi$ (Erw)
5. $\Gamma, \vdash \Delta, \psi, \neg\psi$ $(\neg R)$
6. $\Gamma, \vdash \Delta, \psi$ (S) auf 2,5

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg\psi \vdash \Delta}\,(S_1)}{\Gamma, \neg\psi \vdash \Delta, \psi}\,(\mathrm{Erw}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\psi \vdash \psi}\,(\mathrm{Vor})}{\Gamma, \psi \vdash \Delta, \psi}\,(\mathrm{Erw})}{\Gamma \vdash \Delta, \psi, \neg\psi}\,(\neg R)}{\Gamma \vdash \Delta, \psi}\,(S)$$

b) $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi \qquad \Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \psi}$$

1. $\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi$
2. $\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta, \psi$
3. $\Gamma \vdash \Delta, \psi, \neg\varphi$ $(\neg R)$ auf 1
4. $\Gamma \vdash \Delta, \psi$ (S) auf 2, 3

Alternativ:

3. $\Gamma \vdash \Delta, \psi, \varphi$ $(\neg L)$

c) $$\frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta, \psi \qquad \Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta, \neg\psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}$$

$\Gamma, \neg(\varphi \wedge \psi) \vdash \Delta$ $(\neg EL)$

$\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi$) , alle $\varphi, \psi \in L(\tau)$

c)

1. $\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta, \psi$
2. $\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta, \neg\psi$
3. $\Gamma, \neg\varphi, \neg\psi \vdash \Delta$ $(\neg L)$ auf 1
4. $\Gamma, \neg\psi \vdash \Delta, \varphi$ $(\neg EL)$ 3
5. $\Gamma \vdash \Delta, \neg\psi, \varphi$ $(\neg EL)$ 2
6. $\Gamma \vdash \Delta, \varphi$ (S) auf 4,5

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi}\ (\neg R)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}\ (\neg L)$$

$$(S)\ \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \quad \Gamma \vdash \varphi, \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

4'. $\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta$ (S) auf 23

5'. $\Gamma \vdash \Delta, \varphi$ ($\neg$EL)

4'. $\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta$ (S) auf {}

5'. $\Gamma \vdash \Delta, \varphi$ ($\neg$EL)

Alle Sequenzen: Alle Interpret. ...

Es gibt $\mathcal{I}$ ...

b) $$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi}$$

$\Gamma = \{\varphi\frac{y}{x}\}$ $\varphi := x \doteq c$

$$\frac{y \doteq c \vdash y \doteq c}{y \doteq c \vdash \forall x (x \doteq c)}$$

$b(y) = 1$

c) $$\frac{\Gamma, \varphi\frac{\theta}{x} \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} \quad (\forall L)$$

Sei $(\mathfrak{A}, b) \models \Gamma, \forall x \varphi$.

$\theta = \ldots z \; y \; \ldots$

$(\mathfrak{A}, b) \models \Gamma$

$(\mathfrak{A}, b) \models \varphi\frac{\theta}{x}$

θ ist am Ende ein Element der Str.

Nach der Gültigkeit der 1. Seq.

$(\mathfrak{A}, b) \models \delta$ für ein $\delta \in \Delta$