Prof. Dr. M. Grohe
E. Fluck, L. Härtel, T. Novotny

Übungsblatt 6 mit Lösungen

Abgabetermin: Montag, der 17. Juni 2024 um 14:30

Hausaufgabe 3 (Normalformen) — 2+2 Punkte

Sei P ein einstelliges Relationssymbol, seien S, T zweistellige Relationssymbole, und sei c ein Konstantensymbol. Wandeln Sie die folgende Formel erst in die Negationsnormalform und dann in die Pränex-Normalform um.

a) $\varphi_1 := \forall x\Big(\big(\exists y(S(x,y) \vee T(x,y))\big) \to \big(\exists y \forall x(P(x) \to (S(y,x) \wedge S(x,c)))\big)\Big)$

b) $\varphi_2 := \exists x S(x,x) \to \forall x S(x,c)$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\equiv \forall x\Big(\neg\big(\exists y(S(x,y) \vee T(x,y))\big) \vee \big(\exists y \forall x(P(x) \to (S(y,x) \wedge S(x,c)))\big)\Big)\\
&\equiv \forall x\Big(\big(\forall y(\neg S(x,y) \wedge \neg T(x,y))\big) \vee \big(\exists y \forall x(P(x) \to (S(y,x) \wedge S(x,c)))\big)\Big)\\
&\equiv \forall x\Big(\big(\forall y(\neg S(x,y) \wedge \neg T(x,y))\big) \vee \big(\exists y \forall x(\neg P(x) \vee (S(y,x) \wedge S(x,c)))\big)\Big) && \text{(NNF)}\\
&\equiv \forall x\Big(\big(\forall y_1(\neg S(x,y_1) \wedge \neg T(x,y_1))\big) \vee \big(\exists y_2 \forall x_1(\neg P(x_1) \vee (S(y_2,x_1) \wedge S(x_1,c)))\big)\Big)\\
&\equiv \forall x \forall y_1 \exists y_2 \forall x_1\Big(\big(\neg S(x,y_1) \wedge \neg T(x,y_1)\big) \vee \big(\neg P(x_1) \vee (S(y_2,x_1) \wedge S(x_1,c))\big)\Big). && \text{(PNF)}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &\equiv (\exists x S(x,x)) \to \forall x S(x,c)\\
&\equiv (\neg\exists x S(x,x)) \vee \forall x S(x,c)\\
&\equiv (\forall x \neg S(x,x)) \vee \forall x S(x,c) && \text{(NNF)}\\
&\equiv (\forall x_1 \neg S(x_1,x_1)) \vee \forall x_2 S(x_2,c)\\
&\equiv \forall x_1 \forall x_2(\neg S(x_1,x_1) \vee S(x_2,c)). && \text{(PNF)}
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 4 (Definierbarkeit) **2+2+3 Punkte**

Sei $\mathfrak{R}$ der Körper der reelen Zahlen (siehe Seite 3.17) mit Symbolmenge $\sigma_{\mathrm{A}r} = \{\dot{*}, \dot{+}, \dot{0}, \dot{1}\}$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es gibt eine Formel $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma_{\mathrm{A}r})$ mit zwei freien Variablen x, y, sodass $\mathfrak{R} \models \varphi(a, b)$ genau dann, wenn $a \leq b$.

b) Es gibt eine Formel $\varphi \in \mathrm{L}(\{\dot{+}, \dot{0}\})$ mit zwei freien Variablen x, y, sodass $\mathfrak{R}\restriction_{\{\dot{+},\dot{0}\}} \models \varphi(a, b)$ genau dann, wenn $a \leq b$.

c) Es gibt eine Formel $\varphi \in \mathrm{L}(\{\dot{*}, \dot{0}, \dot{1}\})$ mit zwei freien Variablen x, y, sodass $\mathfrak{R}\restriction_{\{\dot{*},\dot{0},\dot{1}\}} \models \varphi(a, b)$ genau dann, wenn $a \leq b$.

Lösung:

a) Sei $\varphi(x, y) := \exists z(x \dot{+} z \dot{*} z = y)$. Dann ist $\mathfrak{R} \models \varphi(a, b)$ genau dann, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $a + c^2 = b$. Das ist aber genau dann, wenn $a \leq b$.

b) Wir betrachten die Funktion $\pi(x) = -x$.

Claim. π ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{R}\restriction_{\{\dot{+},\dot{0}\}}$ nach $\mathfrak{R}\restriction_{\{\dot{+},\dot{0}\}}$ (also ein Automorphismus).

Beweis. Es gilt $\pi(\dot{0}^{\mathfrak{R}}) = \pi(0) = 0 = \dot{0}^{\mathfrak{R}}$. Es gilt auch

$$\pi(x \dot{+}^{\mathfrak{R}} y) = \pi(x + y) = -(x + y) = -x + -y = \pi(x) + \pi(y) = \pi(x) \dot{+}^{\mathfrak{R}} \pi(y).$$

□

Nach dem Isomorphielemma (Lemma 4.31) muss gelten, dass $\mathfrak{R}\restriction_{\{\dot{+},\dot{0}\}} \models \varphi(a, b)$ genau dann, wenn $\mathfrak{R}\restriction_{\{\dot{+},\dot{0}\}} \models \varphi(\pi(a), \pi(b))$. Da $1 \leq 2$ ist, muss $\mathfrak{R}\restriction_{\{\dot{+},\dot{0}\}} \models \varphi(1, 2)$ und deswegen auch $\mathfrak{R}\restriction_{\{\dot{+},\dot{0}\}} \models \varphi(-1, -2)$. Das ist aber Widerspruch, weil das bedeuten würde, dass $-1 \leq -2$, was aber nicht stimmt.

c) Wir betrachten die Funktion $\pi(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \neq 0$ und $\pi(0) = 0$.

Claim. π ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{R}\restriction_{\{\dot{*},\dot{0},\dot{1}\}}$ nach $\mathfrak{R}\restriction_{\{\dot{*},\dot{0},\dot{1}\}}$ (also ein Automorphismus).

Beweis. Es gilt $\pi(\dot{0}^{\mathfrak{R}}) = \dot{0}^{\mathfrak{R}}, \pi(\dot{1}^{\mathfrak{R}}) = \dot{1}^{\mathfrak{R}}$, und

$$\pi(x \dot{*}^{\mathfrak{R}} y) = \pi(x \cdot y) = \frac{1}{x \cdot y} = \pi(x) \cdot \pi(y) = \pi(x) \dot{*}^{\mathfrak{R}} \pi(y)$$

für alle x, y sodass $x \cdot y \neq 0$, und

$$\pi(x \dot{*}^{\mathfrak{R}} y) = \pi(x \cdot y) = \pi(0) = 0 = \pi(x) \cdot \pi(y) = \pi(x) \dot{*}^{\mathfrak{R}} \pi(y)$$

für alle x, y mit $x \cdot y = 0$. □

Nach dem Isomorphielemma (Lemma 4.31) muss gelten, dass $\mathfrak{R}{\restriction}_{\{\dot{*},\dot{0},\dot{1}\}} \models \varphi(a,b)$ genau dann, wenn $\mathfrak{R}{\restriction}_{\{\dot{*},\dot{0},\dot{1}\}} \models \varphi(\pi(a),\pi(b))$. Da $1 \leq 2$, muss $\mathfrak{R}{\restriction}_{\{\dot{*},\dot{0},\dot{1}\}} \models \varphi(1,2)$ und deswegen auch $\mathfrak{R}{\restriction}_{\{\dot{*},\dot{0},\dot{1}\}} \models \varphi(1,\frac{1}{2})$. Das ist aber Widerspruch, weil das bedeuten würde, dass $1 \leq \frac{1}{2}$, was aber nicht stimmt.

Hausaufgabe 5 (Definierbarkeit von Relationen) **2+2 Punkte**

Für alle Strukturen $\mathfrak{A}$ und Formeln $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ der Logik der ersten Stufe, sei $W(\mathfrak{A}, \varphi)$ die Menge, wie in der Vorlesung auf der Seite 4.81 definiert. Weiterhin definieren wir für jede Menge von Variablen $X \subseteq \mathrm{Var}$

$$W(\mathfrak{A}, \varphi)^X := \{\mathfrak{b} : X \to A \mid \mathfrak{b}\restriction_{\mathrm{frei}(\varphi)} \in W(\mathfrak{A}, \varphi)\}.$$

a) Sei $\sigma = \{E/2\}$, sei $\mathfrak{G}$ die Graphstruktur aus Tutoriumsaufgabe 2, und sei

(i) $\varphi_1(x) := \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 (E(x, y_1) \wedge E(x, y_2) \wedge E(x, y_3))$

(ii) $\varphi_2(x) := \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 (y_1 \neq y_2 \wedge y_1 \neq y_3 \wedge y_2 \neq y_3 \wedge E(x, y_1) \wedge E(x, y_2) \wedge E(x, y_3))$

Geben Sie die Menge $W(\mathfrak{G}, \varphi_i)$ für $i \in \{1, 2\}$.

b) Sei σ eine Symbolmenge und seien $\psi_1, \psi_2 \in \mathrm{L}(\sigma)$. Geben Sie jeweils eine Formel φ an, sodass

(i) $W(\mathfrak{A}, \varphi) = W(\mathfrak{A}, \psi_1) \setminus W(\mathfrak{A}, \psi_2)$

(ii) $W(\mathfrak{A}, \varphi) = W(\mathfrak{A}, \psi_1)^{\mathrm{frei}(\varphi)} \setminus W(\mathfrak{A}, \psi_2)^{\mathrm{frei}(\varphi)}$

für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt.

Lösung:

a) (i) Die Formel φ_1 besagt, dass es mindestens einen Nachbarn von x gibt. (Wir beachten, dass die Formel nicht erfordert, dass y_1, y_2, y_3 unterschiedlich belegt sind.) Das gilt aber für alle Knoten, es ist also

$$\begin{aligned} W(\mathfrak{G}, \varphi_1) &= \{\mathfrak{b} : \{x\} \to G \mid (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \models \varphi\} \\ &= \{\mathfrak{b} : \{x\} \to G\}. \end{aligned}$$

(ii) Die Formel φ_2 besagt, dass es mindestens drei verschiedene Nachbarn von x gibt. Das gilt nur für Knoten 2 und 4, es ist also

$$\begin{aligned} W(\mathfrak{G}, \varphi_2) &= \{\mathfrak{b} : \{x\} \to G \mid (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \models \varphi\} \\ &= \{\mathfrak{b} : \{x\} \to G \mid \mathfrak{b}(x) \in \{2, 4\}\}. \end{aligned}$$

b) (i) Sei

$$\varphi := \begin{cases} \psi_1 \wedge \neg\psi_2 & \text{wenn } \mathrm{frei}(\psi_1) = \mathrm{frei}(\psi_2) \\ \psi_1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Falls $\mathrm{frei}(\psi_1) = \mathrm{frei}(\psi_2)$, dann ist auch $\mathrm{frei}(\varphi) = \mathrm{frei}(\psi_1)$ und

$$\begin{aligned}
W(\mathfrak{A}, \varphi) &= \{\mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\varphi) \to A \mid (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \models \varphi\} \\
&= \{\mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\varphi) \to A \mid (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \models \psi_1 \wedge \neg\psi_2\} \\
&= \{\mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\varphi) \to A \mid (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \models \psi_1 \text{ und } (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \not\models \psi_2\} \\
&= \{\mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\varphi) \to A \mid (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \models \psi_1 \text{ und } (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \not\models \psi_2\} \\
&= \{\mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\psi_1) \to A \mid (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \models \psi_1\} \cap \{\mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\psi_2) \to A \mid (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \not\models \psi_2\} \\
&= \{\mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\psi_1) \to A \mid (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \models \psi_1\} \setminus \{\mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\psi_2) \to A \mid (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \models \psi_2\} \\
&= W(\mathfrak{A}, \psi_1) \setminus W(\mathfrak{A}, \psi_2).
\end{aligned}$$

Falls $\mathrm{frei}(\psi_1) = \mathrm{frei}(\psi_2)$, dann gilt

$$\begin{aligned}
W(\mathfrak{A}, \varphi) &= \{\mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\varphi) \to A \mid (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \models \varphi\} \\
&= \{\mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\varphi) \to A \mid (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \models \psi_1\} \\
&= W(\mathfrak{A}, \psi_1) \\
&= W(\mathfrak{A}, \psi_1) \setminus W(\mathfrak{A}, \psi_2),
\end{aligned}$$

da $W(\mathfrak{A}, \psi_1)$ und $W(\mathfrak{A}, \psi_2)$ disjunkt sind.

(ii) Sei $\varphi = \psi_1 \wedge \neg\psi_2$. Dann ist

$$\begin{aligned}
W(\mathfrak{A}, \varphi) &= \{\mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\varphi) \to A \mid (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \models \varphi\} \\
&= \{\mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\varphi) \to A \mid (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \models \psi_1 \wedge \neg\psi_2\} \\
&= \{\mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\varphi) \to A \mid (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \models \psi_1 \text{ und } (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \not\models \psi_2\} \\
&= \{\mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\varphi) \to A \mid (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \models \psi_1 \text{ und } (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \not\models \psi_2\} \\
&= \{\mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\varphi) \to A \mid (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \models \psi_1\} \cap \{\mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\varphi) \to A \mid (\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \not\models \psi_2\} \\
&= \{\mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\varphi) \to A \mid \mathfrak{b}{\restriction}_{\mathrm{frei}(\psi_1)} \in W(\mathfrak{A}, \psi_1)\} \cap \{\mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\varphi) \to A \mid \mathfrak{b}{\restriction}_{\mathrm{frei}(\psi_2)} \notin W(\mathfrak{A}, \psi_2)\} \\
&= \{\mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\varphi) \to A \mid \mathfrak{b}{\restriction}_{\mathrm{frei}(\psi_1)} \in W(\mathfrak{A}, \psi_1)\} \setminus \{\mathfrak{b} : \mathrm{frei}(\varphi) \to A \mid \mathfrak{b}{\restriction}_{\mathrm{frei}(\psi_2)} \in W(\mathfrak{A}, \psi_2)\} \\
&= W(\mathfrak{A}, \psi_1)^{\mathrm{frei}(\varphi)} \setminus W(\mathfrak{A}, \psi_2)^{\mathrm{frei}(\varphi)}.
\end{aligned}$$

Programmieraufgabe 6 (Substitution) 5 Punkte

- Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt über **Speichern** oder **Abgabe** in VPL. Bis zur Abgabefrist könnt ihr so oft abgeben, wie ihr wollt. Wir bewerten nur die aktuellste Abgabe.
- Ihr könnt in **assignment.py** euren eigenen Code schreiben und dabei die von uns zur Verfügung gestellten Bibliotheken benutzen. Achtet allerdings darauf, keine Dateien zu löschen und die Header der Funktionen unverändert zu lassen.
- Nicht alle Importe sind möglich, manche Bibliotheken werden also einen Fehler wie z.B. `Module assignment tries to import numpy, which does not exist` liefern, wenn ihr versucht diese zu verwenden.
- Wir empfehlen, den Code mindestens einmal zu testen, mit **Ausführen** oder Strg+F11. Dies kann einige Sekunden dauern.
- Punkte und Code sind automatisch mit eurer Abgabegruppe synchronisiert.

Schreiben Sie die Funktion `substitute_term(term: Term, variable: Variable, replacement: Term) -> Term`, welche als Eingabe je ein Objekt der Klasse `Term`, ein Objekt der Klasse `Variable` und ein weiteres Objekt der Klasse `Term` als Substitutionsterm nimmt und den Term ausgibt der entsteht, wenn die Variable durch den Substitutionsterm ersetzt wird.

Schreiben Sie anschließend die Funktion `substitute_formula(formula: Formula, variable: Variable, replacement: Term) -> Formula`, welche als Eingabe je ein Objekt der Klasse `Formula`, ein Objekt der Klasse `Variable` und ein Objekt der Klasse `Term` als Substitutionsterm nimmt und die Formel ausgibt die entsteht, wenn alle freien Vorkommen der Variable durch den Substitutionsterm ersetzt werden. Falls die Variable ausschließlich gebunden vorkommt, soll die Formel unverändert zurückgegeben werden.

Achten Sie außerdem darauf, Variablen nur dann umzubenennen, wenn ein Konflikt zwischen gebundenen Variablen der Formel und Variablen des Substitutionsterms auftritt. Dieser Fall ist im Beweis von Lemma 4.52 beschrieben.

Lösung:

Eine Implementierung der Substitution für Terme und Formeln ist in `first_order.py` der neueren Aufgaben zu finden.