**Tutoriumsaufgabe 1 (Ableitbarkeit Sequenzen)**

Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$. Geben Sie eine Ableitung für die folgende Sequenz an:

$$\varphi \to \psi \vdash \neg\varphi \lor \psi.$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\,(\text{Vor})}{\varphi \vdash \psi, \varphi}\,(\text{Erw}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\psi \vdash \psi}\,(\text{Vor})}{\psi, \varphi \vdash \psi}\,(\text{Erw})}{\varphi \to \psi, \varphi \vdash \psi}\,(\to L)}{\varphi \to \psi \vdash \neg\varphi, \psi}\,(\neg R)}{\varphi \to \psi \vdash \neg\varphi \lor \psi}\,(\lor R)$$

1. $\varphi \vdash \varphi$ (Vor)
2. $\varphi \vdash \psi, \varphi$ (Erw)
3. $\psi \vdash \psi$ (Vor)
4. $\psi, \varphi \vdash \psi$ (Erw)
5. $\varphi \to \psi, \varphi \vdash \psi$ $(\to L)$ auf 2,4
6. $\varphi \to \psi \vdash \neg\varphi, \psi$ $(\neg R)$
7. $\varphi \to \psi \vdash \neg\varphi \lor \psi$ $(\lor R)$

Die Lösung der Aufgabe

Wir haben gezeigt:
für Interpret. $\mathfrak{A}$ gilt

$$\mathfrak{A} \models \varphi \to \psi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \neg \varphi \lor \psi$$

1. $\psi \vdash \psi$ (Vor)

2.=* $\psi, \varphi \vdash \psi$ (Erw)

3. $\varphi \to \varphi$ (Vor)

4.=Δ $\varphi \to \psi, \varphi$ (Erw)

5. $\varphi \to \psi, \varphi \vdash \psi$ $(\to L)$ auf 2, 4

6. $\varphi \to \psi \vdash \neg \varphi, \psi$ $(\neg R)$

7. $\varphi \to \psi \vdash \neg \varphi \lor \psi$ $(\lor R)$

**Tutoriumsaufgabe 2 (Korrektheit Regeln)**

Zeigen Sie die Korrektheit der Sequenzenregel ($\vee$L), also ergänzen Sie den Beweis von Lemma 2.18 aus der Vorlesung.

$$(\vee\mathrm{L}) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}$$

wir müssen zeigen
aus ($\Gamma, \varphi \vdash \Delta$ ist gültig) & ($\Gamma, \psi \vdash \Delta$ ist gültig)
folgt $\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta$ ist gültig

Seq $\Gamma \vdash \Delta$ ist gültig wenn f.a. Interpret $\mathfrak{A}$ gilt
$\mathfrak{A} \models \Gamma \Rightarrow$ ex $\varphi \in \Delta$ $\mathfrak{A} \models \varphi$

also müssen wir zeigen: fa Interpret $\mathfrak{A}$ gilt
$\mathfrak{A} \models \Gamma, \varphi \vee \psi \Rightarrow$ ex $\varphi \in \Delta$, $\mathfrak{A} \models \varphi$

Sei $\mathfrak{A}$ eine Interpret die $\Gamma, \varphi \vee \psi$ erfüllt
also $\mathfrak{A} \models \Gamma, \varphi$ oder $\mathfrak{A} \models \Gamma, \psi$

case 1 $\mathfrak{A} \models \Gamma, \varphi$ dann folgt wenn $\Gamma, \varphi \vdash \Delta$ gültig ist dass es ein $\chi \in \Delta$ gibt s.d. $\mathfrak{A} \models \chi$

Case 2 $\mathfrak{A} \models \Gamma, \psi$ dann folgt wenn

$\Gamma, \Psi \vdash \Delta$ gültig ist dass es ein $\chi \in \Delta$ gibt s.d. $\mathcal{A} \models \chi$

daraus folgt es ex $\chi \in \Delta$ sd $\mathcal{A} \models \chi$

Da $\mathcal{A}$ beliebig ist die Regel korrekt

$$\Gamma, \Psi := \Gamma \cup \{\Psi\}$$

**Tutoriumsaufgabe 3 (Ableitbarkeit Regeln)**

Seien $S_1, \dots, S_k, S$ Sequenzen. Eine Ableitung von $S$ aus $S_1, \dots, S_k$ im Sequenzenkalkül ist eine endliche Folge $S'_1, \dots, S'_n$ von Sequenzen, so dass

(i) für alle $i \in [n]$ ist

  (1) entweder $S'_i = S_j$ für ein $j \in [k]$,

  (2) oder $\overline{S'_i}$ ist Regel des Sequenzenkalküls,

  (3) oder es gibt $\ell \geq 1$, $1 \leq j_1, \dots, j_\ell < i$, so dass $\frac{S'_{j_1} \cdots S'_{j_\ell}}{S'_i}$ eine Regel des Kalküls ist;

(ii) $S'_n = S$.

Die Sequenzenregel $\frac{S_1 \quad \cdots \quad S_k}{S}$ ist ableitbar im Sequenzenkalkül, wenn es eine Ableitung von $S$ aus $S_1, \dots, S_k$ gibt.
Seien $\Gamma, \Delta \subset \mathrm{AL}$ endliche Formelmengen und $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$ Formeln. Zeigen Sie, dass die folgende Regel im Sequenzenkalkül ableitbar ist:

$$(\leftrightarrow R)\ \frac{\overset{=:S_1}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi} \qquad \overset{=:S_2}{\Gamma, \psi \vdash \Delta, \varphi}}{\Gamma \vdash \Delta, (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)}$$

*Hinweis*: Da $\leftrightarrow$ eine Kurzschreibweise ist und es gilt $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ dürften wir auch schreiben

$$(\leftrightarrow R)\ \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \leftrightarrow \psi}$$

Da (i1) nicht angewendet werden muss gilt (für $S_1 .. S_n \in Seq(AL)$ und für $S \in Seq(AL)$ mit $S$ ist gültig) gilt $\frac{S_1 - S_n}{S}$ ist ableitbar

insb $\frac{}{S}$ ist ableitbar

wir haben also schon gezeigt

$\overline{\varphi \to \psi \vdash \neg\varphi \vee \psi}$ ableitbar ist

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, (\varphi \to \psi)}(\to R) \qquad \dfrac{\Gamma, \psi \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, (\psi \to \varphi)}(\to R)}{\Gamma \vdash \Delta, (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)}(\wedge R)$$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi$ | $S_1' = S_1$ |
| 2. | $\Gamma \vdash \Delta, (\varphi \to \psi)$ | $(\to R)$ |
| 3. | $\Gamma, \psi \vdash \Delta, \varphi$ | $S_3' = S_2$ |
| 4. | $\Gamma \vdash \Delta, (\psi \to \varphi)$ | $(\to R)$ |
| 5. | $\Gamma \vdash \Delta, (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ | $(\wedge R)$ auf 2, 4 |

Diese Folge zeigt dass die Regel ableitbar ist

Das ist die Lösung der Aufgabe

aus der Def folgt direkt

wenn eine Regel ableitbar ist, dann ist sie korrekt.