Kapitel 2

Folgern und Beweisen in der Aussagenlogik

Kontext und Ziele

In diesem Kapitel untersuchen wir den Folgerungsbegriff: was bedeutet es, dass eine Formel aus einer Formelmenge folgt?

„Folgern“ ist ein semantischer Begriff, wir werden aber sehen, dass wir den Begriff rein syntaktisch nachbilden können und damit „mechanisch“ feststellen können, ob eine Formel aus einer Formelmenge folgt.

Ein wichtiges Ergebnis, das uns das Übertragen der Resultate auch auf unendliche Formelmengen erlaubt, ist in diesem Zusammenhang der Endlichkeitssatz.

Vereinbarung

In diesem Kapitel halten wir weiter eine abzählbar unendliche aussagenlogische Symbolmenge σ fest und schreiben AL statt AL(σ).

2.1 Folgern

Definition 2.1

Sei $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ und $\psi \in \mathrm{AL}$. Dann **folgt** ψ aus Φ (wir schreiben: $\Phi \models \psi$), wenn für alle Interpretationen $\mathfrak{A}$ gilt: wenn $\mathfrak{A} \models \Phi$, dann $\mathfrak{A} \models \psi$.

Beispiele 2.2

(1) $\{P, P \to Q\} \models Q$.

(2) Sei

$$\Phi := \big\{(P_i \leftrightarrow P_{i+1}) \to \neg(P_i \leftrightarrow P_{i+2}) \wedge \neg(P_{i+1} \leftrightarrow P_{i+3}) \;\big|\; i \in \mathbb{N}\big\}.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\Phi \models P_0 \wedge P_1 \to P_{4n} \wedge P_{4n+1}.$$

Zur Erinnerung: $\varphi \leftrightarrow \psi$ verwenden wir als Abkürzung für $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$.

Beweis der Aussage in Beispiel 2.2(2).

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\psi_n := P_0 \wedge P_1 \to P_{4n} \wedge P_{4n+1}$

Zu zeigen: Für alle Interpretation $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \Phi$ gilt $\mathfrak{A} \models \psi_n$.

Sei $\mathfrak{A}$ eine Interpretation mit $\mathfrak{A} \models \Phi$. Falls $\mathfrak{A} \not\models P_0 \wedge P_1$, so $\mathfrak{A} \models \psi_n$. Nehmen wir also an, dass $\mathfrak{A} \models P_0 \wedge P_1$. Damit $\mathfrak{A} \models \psi_n$ müssen wir noch zeigen, dass $\mathfrak{A} \models P_{4n} \wedge P_{4n+1}$.

Wir zeigen per Induktion über $k \in \mathbb{N}$, dass

$$\mathfrak{A} \models P_{4k} \wedge P_{4k+1} \wedge \neg P_{4k+2} \wedge \neg P_{4k+3}. \tag{$\star$}$$

Insbesondere gilt also $\mathfrak{A} \models P_{4n} \wedge P_{4n+1}$.

Induktionsanfang: $k = 0$.

Wir wissen bereits, dass $\mathfrak{A} \models P_0 \wedge P_1$. Also auch $\mathfrak{A} \models P_0 \leftrightarrow P_1$. Weil $\mathfrak{A} \models \Phi$ gilt $(P_0 \leftrightarrow P_1) \to \neg(P_0 \leftrightarrow P_2) \wedge \neg(P_1 \leftrightarrow P_3)$. Also $\mathfrak{A} \models \neg(P_0 \leftrightarrow P_2)$ und $\mathfrak{A} \models \neg(P_1 \leftrightarrow P_3)$. Weil $\mathfrak{A} \models P_0$ und $\mathfrak{A} \models P_1$ folgt $\mathfrak{A} \models \neg P_2$ und $\mathfrak{A} \models \neg P_3$. Insgesamt also

$$\mathfrak{A} \models P_0 \wedge P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \neg P_3.$$

Induktionsschritt: $k \to k+1$.

Nach Induktionsannahme gilt $\mathfrak{A} \models \neg P_{4k+2} \wedge \neg P_{4k+3}$. Also auch $\mathfrak{A} \models P_{4k+2} \leftrightarrow P_{4k+3}$. Weil $\mathfrak{A} \models \Phi$ gilt

$$(P_{4k+2} \leftrightarrow P_{4k+3}) \to \neg(P_{4k+2} \leftrightarrow P_{4(k+1)}) \wedge \neg(P_{4k+3} \leftrightarrow P_{4(k+1)+1}).$$

Also $\mathfrak{A} \models \neg(P_{4k+2} \leftrightarrow P_{4(k+1)})$ und $\mathfrak{A} \models \neg(P_{4k+3} \leftrightarrow P_{4(k+1)+1})$. Weil $\mathfrak{A} \models \neg P_{4k+2}$ und $\mathfrak{A} \models \neg P_{4k+3}$ folgt $\mathfrak{A} \models P_{4(k+1)}$ und $\mathfrak{A} \models P_{4(k+1)+1}$.

Also gilt auch $\mathfrak{A} \models P_{4(k+1)} \leftrightarrow P_{4(k+1)+1}$. Weil $\mathfrak{A} \models \Phi$ gilt

$$(P_{4(k+1)} \leftrightarrow P_{4(k+1)+1}) \to \neg(P_{4(k+1)} \leftrightarrow P_{4(k+1)+2}) \wedge \neg(P_{4(k+1)+1} \leftrightarrow P_{4(k+1)+3}).$$

Also $\mathfrak{A} \models \neg(P_{4(k+1)} \leftrightarrow P_{4(k+1)+2})$ und $\mathfrak{A} \models \neg(P_{4(k+1)+1} \leftrightarrow P_{4(k+1)+3})$. Weil $\mathfrak{A} \models P_{4(k+1)}$ und $\mathfrak{A} \models P_{4(k+1)+1}$ folgt $\mathfrak{A} \models \neg P_{4(k+1)+2}$ und $\mathfrak{A} \models \neg P_{4(k+1)+3}$. Insgesamt also

$$\mathfrak{A} \models P_{4(k+1)} \wedge P_{4(k+1)+1} \wedge \neg P_{4(k+1)+2} \wedge \neg P_{4(k+1)+3}.$$

$\square$

Typische Anwendungen der Folgerungsbeziehung

Beispiel 2.3

Φ spezifiziert ein System. ψ beschreibt eine Eigenschaft, die dieses System haben soll. Dann bedeutet $\Phi \models \psi$, dass das System in der Tat die gewünschte Eigenschaft hat.

Beispiel 2.4

Φ_P ist eine logische Beschreibung des Verhaltens eines Programms, Φ_V beschreibt Vorbedingungen, die eine Eingabe des Programms haben soll. ψ beschreibt eine Nachbedingung, also eine Eigenschaft, die die Ausgabe haben soll. Dann bedeutet $\Phi_P \cup \Phi_V \models \psi$, dass die Ausgabe die Nachbedingung erfüllt, wenn das Programm auf einer Eingabe ausgeführt wird, die die Vorbedingungen erfüllt.

Beispiel 2.5

Φ beschreibt unser Wissen über ein Situation, ψ eine Aussage, die wir treffen möchten. Dann bedeutet $\Phi \models \psi$, dass wir die Aussage auf Grund unseres Wissens treffen können.

Ergänzungen zu Seite 2.6

Diese Beispiele beziehen sich nicht speziell auf die Aussagenlogik, sondern ganz allgemein auf das logische Folgern. Typischerweise verwendet man in diesen Anwendungsszenarien reichhaltigere Logiken wie die Logik der 1. Stufe oder temporale Logiken.

Lemma 2.6

Sei $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ *und* $\psi \in \mathsf{AL}$. *Dann gilt*

$$\Phi \models \psi \iff \Phi \cup \{\neg\psi\} \text{ ist unerfüllbar.}$$

Insbesondere gilt auch

$$\Phi \models \bot \iff \Phi \text{ ist unerfüllbar.}$$

Lemma 2.7

Sei $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq \mathsf{AL}$ *eine endliche Formelmenge und* $\psi \in \mathsf{AL}$. *Dann gilt*

$$\Phi \models \psi \iff \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi \text{ ist allgemeingültig.}$$

Insbesondere gilt auch

$$\emptyset \models \psi \iff \psi \text{ ist allgemeingültig.}$$

Wir schreiben auch $\models \psi$ *statt* $\emptyset \models \psi$. *Dann bedeutet* $\models \psi$, *dass* ψ *allgemeingültig ist.*

Beweis von Lemma 2.6.

„$\Longrightarrow$“: Gelte $\Phi \models \psi$. Sei $\mathfrak{A}$ eine Interpretation.

Zu zeigen: $\mathfrak{A} \not\models \Phi \cup \{\neg\psi\}$.

Falls $\mathfrak{A} \not\models \Phi$, so $\mathfrak{A} \not\models \Phi \cup \{\neg\psi\}$.
Falls $\mathfrak{A} \models \Phi$, so $\mathfrak{A} \models \psi$ (weil $\Phi \models \psi$). Also $\mathfrak{A} \not\models \neg\psi$ und damit $\mathfrak{A} \not\models \Phi \cup \{\neg\psi\}$.

„$\Longleftarrow$“: Sei $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar. Sei $\mathfrak{A}$ eine Interpretation.

Zu zeigen: Wenn $\mathfrak{A} \models \Phi$ dann $\mathfrak{A} \models \psi$.

Nehmen wir also an, dass $\mathfrak{A} \models \Phi$. Dann gilt $\mathfrak{A} \not\models \neg\psi$, denn $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ ist unerfüllbar. Also gilt $\mathfrak{A} \models \psi$.

Die zweite Äquivalenz des Lemmas folgt:

$$\begin{aligned} \Phi \models \bot &\iff \Phi \cup \{\neg\bot\} \text{ ist unerfüllbar} \\ &\iff \Phi \text{ ist unerfüllbar.} \end{aligned}$$

Die zweite Äquivalenz gilt, weil jede Interpretation $\neg\bot$ erfüllt. $\square$

Beweis von Lemma 2.7.

Übung.

2.2 Der Endlichkeitssatz

Satz 2.8 (Endlichkeitssatz der Aussagenlogik)

(1) *Für jede Formelmenge* $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ *gilt:*

$$\Phi \textit{ ist erfüllbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{jede endliche Teilmenge von } \Phi \textit{ ist erfüllbar.}$$

(2) *Für alle* $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ *und* $\psi \in \mathrm{AL}$ *gilt:*

$$\Phi \models \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{es gibt eine endliche Teilmenge } \Gamma \subseteq \Phi, \textit{ so dass } \Gamma \models \psi$$

Bemerkung 2.9

Der Endlichkeitssatz ist auch als Kompaktheitssatz bekannt. Das liegt daran, dass er auch eine topologische Interpretation hat — Kompaktheit ist ein zentraler Begriff der Topologie.

Beweis von (2) unter Verwendung von (1).

Es gilt

$\Phi \models \psi$	$\iff$	$\Phi \cup \{\neg\psi\}$ ist unerfüllbar	Lemma 2.6
	$\iff$	es gibt eine endliche Teilmenge Γ von Φ, so dass $\Gamma \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar ist	Endlichkeitssatz Teil (1)
	$\iff$	es gibt eine endliche Teilmenge Γ von Φ, so dass $\Gamma \models \psi$	Lemma 2.6.

$\square$

Beweis von (1).

„$\Longrightarrow$“: Offensichtlich, denn eine Interpretation, die Φ erfüllt, erfüllt auch jede Teilmenge von Φ.

„$\Longleftarrow$“: Sei jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar.

Zu zeigen: Φ ist erfüllbar.

Nehmen wir an,

$$\sigma = \{P_0, P_1, P_2, \ldots\}.$$

Wir definieren rekursiv für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Menge Ψ_i.

Wir setzen $\Psi_0 := \Phi$. Für $i \in \mathbb{N}$ definieren wir Ψ_{i+1} wie folgt:

- Falls jede endliche Teilmenge von $\Psi_i \cup \{P_i\}$ erfüllbar ist, so setzen wir $\Psi_{i+1} := \Psi_i \cup \{P_i\}$,
- ansonsten, falls jede endliche Teilmenge von $\Psi_i \cup \{\neg P_i\}$ erfüllbar ist, so setzen wir $\Psi_{i+1} := \Psi_i \cup \{\neg P_i\}$,
- ansonsten setzen wir $\Psi_{i+1} := \Psi_i$.

Außerdem setzen wir
$$\Psi := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Psi_i.$$

Dann gilt
$$\Phi = \Psi_0 \subseteq \Psi_1 \subseteq \Psi_2 \subseteq \Psi_3 \subseteq \cdots \subseteq \Psi.$$

Behauptung 1

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ gilt: Jede endliche Teilmenge von Ψ_i ist erfüllbar.

Beweis.

Per Induktion nach i.

Induktionsanfang $i = 0$:

Es gilt $\Psi_0 = \Phi$, und nach Voraussetzung ist jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar.

Induktionsschritt $i \to i + 1$:

Falls $\Psi_{i+1} = \Psi_i$, so ist gemäß Induktionsannahme jede endliche Teilmenge von Ψ_{i+1} erfüllbar.
Ansonsten ist per Definition von Ψ_{i+1} jede endliche Teilmenge von Ψ_{i+1} erfüllbar. ⌟

Behauptung 2

Jede endliche Teilmenge von Ψ ist erfüllbar.

Beweis.

Jede endliche Teilmenge von Ψ ist in einem Ψ_i (für ein $i \in \mathbb{N}$) enthalten und daher gemäß Behauptung 1 erfüllbar. ⌟

Behauptung 3

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $P_n \in \Psi$ oder $\neg P_n \in \Psi$ (aber nicht beides, weil gemäß Behauptung 2 jede endliche Teilmenge von Ψ erfüllbar ist).

Beweis.

Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass weder P_n noch $\neg P_n$ zur Menge Ψ gehört. Weil $\Psi_{n+1} \subseteq \Psi$ gilt damit auch $P_n \notin \Psi_{n+1}$ und $\neg P_n \notin \Psi_{n+1}$. Daher gibt es gemäß der Definition von Ψ_{n+1} endliche Teilmengen Γ_+ und Γ_- von Ψ_n, so dass weder $\Gamma_+ \cup \{P_n\}$ noch $\Gamma_- \cup \{\neg P_n\}$ erfüllbar ist.

Weil $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$ eine endliche Teilmenge von Ψ_n ist, ist $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$ gemäß Behauptung 1 erfüllbar. Sei also $\mathscr{I}$ ein Modell von $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$. Falls $\mathscr{I}(P_n) = 1$, so gilt $\mathscr{I} \models \Gamma_+ \cup \{P_n\}$. Falls $\mathscr{I}(P_n) = 0$, so gilt $\mathscr{I} \models \Gamma_- \cup \{\neg P_n\}$. Also ist doch eine der beiden Mengen erfüllbar. *Widerspruch*. $\square$

Gemäß Behauptung 3 können wir nun eine Interpretation $\mathfrak{A} : \sigma \to \{0, 1\}$ definieren, indem wir für alle $i \in \mathbb{N}$ setzen:

$$\mathfrak{A}(P_i) := \begin{cases} 1 & \text{falls } P_i \in \Psi, \\ 0 & \text{falls } \neg P_i \in \Psi. \end{cases}$$

Behauptung 4

$$\mathfrak{A} \models \Psi.$$

Beweis.

Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann gibt es eine Formel $\psi \in \Psi$, so dass $\mathfrak{A} \not\models \psi$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\mathrm{symb}(\psi) \subseteq \{P_0, P_1, \dots, P_n\}.$$

Für $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ sei $\varphi_i := P_i$ falls $P_i \in \Psi$, und $\varphi_i := \neg P_i$ falls $\neg P_i \in \Psi$. Dann ist $\Gamma := \{\psi, \varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ eine endliche Teilmenge von Ψ und daher gemäß Behauptung 2 erfüllbar. Sei $\mathfrak{B}$ also ein Modell von Γ. Für jedes $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ gilt $\mathfrak{B} \models \varphi_i$, und daher $\mathfrak{B}(P_i) = \mathfrak{A}(P_i)$. Wegen $\mathfrak{B} \models \psi$ folgt aus dem Koinzidenzlemma (Lemma 1.14), dass $\mathfrak{A} \models \psi$. *Widerspruch*. ⌟

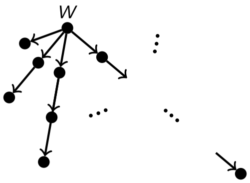
Gemäß Behauptung 4 ist $\mathfrak{A}$ ein Modell von Ψ und wegen $\Phi \subseteq \Psi$ auch ein Modell von Φ. Daher ist Φ erfüllbar. □

Ein Baum mit Wurzel ist ein Paar (T, w), wobei $T = (V, E)$ ein gerichteter Graph ist und $w \in V$ ein Knoten (die Wurzel), so dass es für alle $v \in V$ genau eine gerichteten Weg von w nach v gibt.

(T, w) hat endlichen Verzweigungsgrad, wenn jeder Knoten von T einen endlichen Ausgangsgrad hat.

Beispiel 2.10

Ein Baum mit unendlichem Verzweigungsgrad:



Anwendung: Lemma von König

Lemma 2.11 (Lemma von König)

Sei (T, w) ein Baum mit Wurzel, der endlichen Verzweigungsgrad hat und beliebig lange endliche Wege enthält. Dann enthält (T, w) einen unendlichen Weg.

Bemerkung 2.12

Beispiel 2.10 zeigt einen Baum mit beliebig langen endlichen Wegen, aber keinem unendlichen Weg. Der Baum hat aber unendlichen Verzweigungsgrad. Auf die Annahme endlichen Verzweigungsgrads kann im Lemma von König also nicht verzichtet werden.

Beweis.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei

$$V_n := \{v \in V \mid \text{der Weg von } w \text{ nach } v \text{ hat Länge } n\}.$$

Nach der Annahme, dass es in T beliebig lange endliche Wege gibt, sind alle V_n nichtleer.

Behauptung 1

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist V_n eine endlich Menge.

Beweis.
Induktion über n.

Induktionsannahme $n = 0$:
$V_0 = \{w\}$ ist offensichtlich endlich.

Induktionsschritt $n \to n + 1$:
Sei d_n der maximale Ausgangsgrad der Knoten in V_n. Das Maximum existiert, weil nach Induktionsannahme V_n endlich ist. Dann gilt

$$|V_{n+1}| \leq d_n |V_n|.$$

Also ist auch V_{n+1} eine endliche Menge. ⌟

Die Knotenmenge eines unendlichen Weges in T, der in der Wurzel w anfängt, ist eine Menge $W \subseteq V$, die die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $|W \cap V_n| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Wenn $v \in W$ und $(u, v) \in E$, dann gilt $u \in W$.

Wir zeigen, dass so eine Menge W existiert.

Wir führen für alle $v \in \tilde{V} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ ein Aussagensymbol P_v ein. Beachte dazu, dass die Menge $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ abzählbar unendlich ist, weil alle V_n nichtleer und endlich sind.

Ziel: Konstruktion einer erfüllbaren Formelmenge Φ, so dass für alle $\mathfrak{A} \models \Phi$ gilt:

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $v \in V_n$, so dass $\mathfrak{A}(P_v) = 1$.

(iv) Für alle $u, v \in \tilde{V}$ mit $(u, v) \in E$ gilt: wenn $\mathfrak{A}(P_v) = 1$, dann auch $\mathfrak{A}(P_u) = 1$.

Wenn wir so eine Menge Φ konstruiert haben, sind wir fertig: Für eine Interpretation $\mathfrak{A} \models \Phi$ setzen wir

$$W := \left\{ v \in V \;\middle|\; \mathfrak{A}(P_v) = 1 \right\}.$$

Weil $\mathfrak{A}$ (iii) erfüllt, erfüllt W (i), und weil $\mathfrak{A}$ (iv) erfüllt, erfüllt W (ii).

Die Menge Φ besteht aus folgenden Formeln:

- für all $n \in \mathbb{N}$ die Formel
$$\varphi_n := \bigvee_{v \in V_n} P_v \wedge \bigwedge_{\substack{v,v' \in V_n \\ v \neq v'}} \neg(P_v \wedge P_{v'}),$$
- für alle $u, v \in \tilde{V}$ mit $(u, v) \in E$ die Formel
$$\psi_{(u,v)} := P_v \to P_u.$$

φ_n besagt, dass genau ein P_v mit $v \in V_n$ wahr wird. Gilt also $\mathfrak{A} \models \varphi_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so erfüllt $\mathfrak{A}$ (iii).
$\psi_{(u,v)}$ besagt: wenn P_v wahr wird, dann auch P_u. Gilt also $\mathfrak{A} \models \psi_{(u,v)}$ für all $(u,v) \in E$, so erfüllt $\mathfrak{A}$ (iv).
Es folgt, dass alle $\mathfrak{A} \models \Phi$ die Bedingungen (iii) und (iv) erfüllen.

Es bleibt also zu zeigen, dass Φ erfüllbar ist. Nach dem Endlichkeitssatz reicht es dafür zu zeigen, dass alle endlichen Teilmengen Γ von Φ erfüllbar sind.
Sei $\Gamma \subseteq \Phi$, und sei

$$m := \max\left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \text{es gibt ein } v \in V_n \text{ und ein } \varphi \in \Gamma\text{, so dass } P_v \in \text{symb}(\varphi)\right\}.$$

Dann gilt

$$\Gamma \subseteq \{\varphi_n \mid 0 \leq n \leq m\} \cup \left\{\psi_{(u,v)} \;\middle|\; (u,v) \in E \text{ und } u,v \in \bigcup_{i=0}^{m} V_i\right\}. \tag{$\star$}$$

Sei $v_m \in V_m$, und seien $v_0 := w, v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}, v_m$, mit $v_i \in V_i$, die Knoten auf dem eindeutigen Weg von w nach v_m. Wir definieren eine Interpretation $\mathfrak{B}$ durch

$$\mathfrak{B}(P_u) := \begin{cases} 1 & \text{falls } u \in \{v_0, \ldots, v_m\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $\mathfrak{B} \models \varphi_n$ für $0 \leq n \leq m$ und $\mathfrak{B} \models \psi_{(u,v)}$ für alle $(u, v) \in E$ mit $u, v \in \bigcup_{i=0}^{m} V_i$. Also $\mathfrak{B} \models \Gamma$ wegen $(\star)$.

Damit ist Γ erfüllbar. $\square$

2.3 Beweisen

Wir führen ein rein syntaktisches Gegenstück zum (semantischen) Folgern ein: für eine Formelmenge $\Phi \subseteq \text{AL}$ und eine Formel $\psi \in \text{AL}$ wird

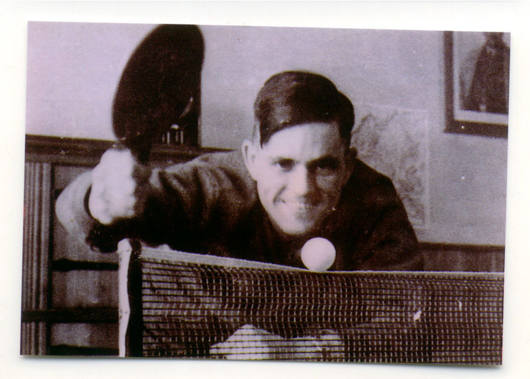
$$\Phi \vdash \psi$$

bedeuten, dass ψ aus Φ beweisbar ist.

Beweisbarkeit wird als Ableitbarkeit bezüglich einer rekursiven Definition definiert, die wir in diesem Kontext als Beweiskalkül bezeichnen.

Ergänzungen zu Seite 2.13

Es gibt zahlreiche verschieden Beweiskalküle für die Aussagenlogik, sogar grundsätzlich verschiedene Typen von Beweiskalkülen. Wir werden einen sogenannten Sequenzenkalkül verwenden. Solche Sequenzenkalküle wurden zuerst vom Logiker Gerhard Gentzen eingeführt.



Gerhard Karl Erich Gentzen (1909 – 1945)
Quelle: `https://live.staticflickr.com/5640/22525146050_bddb611c22_b.jpg`

Definition 2.13

Eine (aussagenlogische) Sequenz ist ein Ausdruck der Gestalt

$$\Gamma \vdash \Delta,$$

wobei Γ, Δ endliche Formelmengen sind.

Definition 2.14

Seine Sequenz $\Gamma \vdash \Delta$ ist gültig, wenn für jede Interpretation $\mathfrak{A}$ gilt: wenn $\mathfrak{A} \models \gamma$ für alle $\gamma \in \Gamma$ (also $\mathfrak{A} \models \Gamma$), dann gibt es ein $\delta \in \Delta$, so dass $\mathfrak{A} \models \delta$.

Beobachtung 2.15

Eine Sequenz $\Gamma \vdash \Delta$ mit $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ ist genau dann gültig, wenn

$$\Gamma \models \bigvee_{i=1}^{n} \delta_i.$$

Notation

- Wir schreiben $\Gamma \vdash$ statt $\Gamma \vdash \emptyset$ und $\vdash \Delta$ statt $\emptyset \vdash \Delta$.
- Für eine Formel φ schreiben wir $\Gamma \vdash \varphi$ statt $\Gamma \vdash \{\varphi\}$ und $\varphi \vdash \Delta$ statt $\{\varphi\} \vdash \Delta$.
- Wir verwenden ein Komma („$,$“) an Stelle des Vereinigungszeichens („$\cup$“), um die Vereinigung der endlichen Formelmengen in den Sequenzen zu beschreiben, also $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2$ statt $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \Delta_1 \cup \Delta_2$.
- Wir kombinieren diese Schreibweisen auch, etwa schreiben wir $\Gamma, \varphi \vdash \psi_1, \psi_2$ statt $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \{\psi_1, \psi_2\}$.

Achtung

In einer Sequenz $\Gamma \vdash \Delta$ sind Γ und Δ Mengen von Formeln, es kommt also auf die Reihenfolge und die Vielfachheit der Formeln nicht an.

Beispielsweise sind folgende Sequenzen gleich:

$$\{\varphi_1, \varphi_2\} \vdash \{\psi_1, \psi_2\}, \qquad \varphi_1, \varphi_2 \vdash \psi_1, \psi_2, \qquad \varphi_2, \varphi_1 \vdash \psi_1, \psi_2, \qquad \varphi_1, \varphi_2 \vdash \psi_1, \psi_1, \psi_2.$$

Sequenzenregeln

Wir werden rekursiv eine Menge von ableitbaren Sequenzen definieren, in dem wir Basisregeln der Gestalt

$$\frac{}{S} \qquad \text{“}S \text{ ist ableitbar”}$$

für eine Sequenz S und rekursive Regeln der Gestalt

$$\frac{S_1 \quad S_2 \quad \cdots \quad S_k}{S} \qquad \text{“Wenn } S_1, \dots, S_k \text{ ableitbar sind, dann ist auch } S \text{ ableitbar”}$$

für Sequenzen $S, S_1, \dots, S_k$ angeben.

Die Menge aller dieser Sequenzenregeln, die wir auf der nächsten Seite angeben, bildet unseren aussagenlogischen Sequenzenkalkül.

Aussagenlogischer Sequenzenkalkül

Grundregeln

Für alle endlichen Formelmengen $\Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta' \subseteq \mathrm{AL}$ und alle Formeln $\varphi \in \mathrm{AL}$.

$$(\mathrm{Vor}) \quad \frac{}{\varphi \vdash \varphi} \qquad\qquad (\mathrm{Erw}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

Junktorenregeln

Für alle endlichen Formelmengen $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{AL}$ und alle Formeln $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$.

$$(\wedge\mathrm{L}) \quad \frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta} \qquad\qquad (\wedge\mathrm{R}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi}$$

$$(\vee\mathrm{L}) \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta} \qquad\qquad (\vee\mathrm{R}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\to\mathrm{L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \Delta} \qquad\qquad (\to\mathrm{R}) \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \to \psi}$$

$$(\neg\mathrm{L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta} \qquad\qquad (\neg\mathrm{R}) \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi}$$

$$(\bot\mathrm{L}) \quad \frac{}{\bot \vdash} \qquad\qquad (\top\mathrm{R}) \quad \frac{}{\vdash \top}$$

Man beachte, dass formal jede der ersten 1 „Regeln" (Vor), . . . , (→R) des aussagenlogischen Sequenzenkalküls (alle Regeln außer ($\bot$L) und ($\top$R)) in Wirklichkeit ein „Regelschema" ist, das eine unendliche Familie von Regeln beschreibt. Beispielsweise umfasst ($\wedge$L) je eine Regel, also eine „Instanziierung des Regelschemas", für alle $\Gamma, \Delta, \varphi, \psi$. Wir werden es aber im folgenden mit der Unterscheidung von „Regelschema" und „Regel", d.h., „Instanziierung des Regelschemas" nicht so genau nehmen und meistens in beiden Fällen einfach von „Regeln" sprechen. Es wird dann immer aus dem Kontext ersichtlich sein, was gemeint ist.

Wir nennen (Vor) die Voraussetzungsregel und (Erw) die Erweiterungsregel. Für jeden Junktor und die Booleschen Konstanten haben wir jeweils eine linke und ein rechte Einführungsregel.

Ableitbare Sequenzen

Der Sequenzenkalkül, aufgefasst als rekursive Definition, beschreibt eine Menge von ableitbaren Sequenzen.

Eine Ableitung einer Sequenz S ist einfach eine endliche Folge $S_1, \dots, S_n$ von Sequenzen, so dass

(i) für alle $i \in [n]$ ist entweder $\frac{}{S_i}$ eine Sequenzenregel (Basisregel) oder es gibt $k \geq 1$, $1 \leq j_1, \dots, j_k < i$, so dass $\frac{S_{i_1} \cdots S_{i_k}}{S_i}$ eine (rekursive) Sequenzenregel ist;

(ii) $S_n = S$.

Dann ist eine Sequenz S ableitbar, wenn es eine Ableitung von S gibt.

Beispiel 2.16

Die Sequenz $\neg P \to \neg Q \vdash \neg(\neg P \wedge Q)$ ist ableitbar.

1.	$Q \vdash Q$	(Vor)
2.	$\neg P, Q \vdash Q$	(Erw)
3.	$\neg P, Q, \neg Q \vdash$	($\neg$L)
4.	$\neg P \vdash \neg P$	(Vor)
5.	$\neg P, Q \vdash \neg P$	(Erw)
6.	$\neg P \to \neg Q, \neg P, Q \vdash$	($\to$L) auf 5,3
7.	$\neg P \to \neg Q, \neg P \wedge Q \vdash$	($\wedge$L)
8.	$\neg P \to \neg Q \vdash \neg(\neg P \wedge Q)$	($\neg$R).

Um eine Ableitung zu konstruieren, ist es am einfachsten, sie rückwärts zu bilden, also mit der Sequenz zu beginnen und sie schrittweise zu vereinfachen. In unserem Beispiel können wir wie folgt vorgehen.

Wir wollen die Sequenz $\neg P \to \neg Q \ \vdash \ \neg(\neg P \wedge Q)$ ableiten.

Schritt 1.

Die rechte Seite der Sequenz enthält eine Formel der Gestalt $\neg\varphi$. Also können wir die Regel ($\neg$R) (rückwärts) anwenden:

$$\frac{\neg P \to \neg Q,\ \neg P \wedge Q \ \vdash}{\neg P \to \neg Q \ \vdash \ \neg(\neg P \wedge Q)}.$$

Wir müssen jetzt also noch eine Ableitung der Sequenz $\neg P \to \neg Q,\ \neg P \wedge Q \ \vdash$ finden.

Schritt 2.

Die linke Seite der Sequenz enthält eine Formel der Gestalt $\varphi \wedge \psi$. Also können wir die Regel ($\wedge$L) (rückwärts) anwenden:

$$\frac{\dfrac{\neg P \to \neg Q,\ \neg P,\ Q \ \vdash}{\neg P \to \neg Q,\ \neg P \wedge Q \ \vdash}}{\neg P \to \neg Q \ \vdash \ \neg(\neg P \wedge Q)}.$$

Wir müssen jetzt also noch eine Ableitung der Sequenz $\neg P \to \neg Q,\ \neg P,\ Q \vdash$ finden.

Schritt 3.

Die linke Seite der Sequenz enthält eine Formel der Gestalt $\varphi \to \psi$. Also können wir die Regel ($\to$L) (rückwärts) anwenden:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg P,\ Q \vdash \neg P \qquad \neg P,\ Q,\ \neg Q \vdash}{\neg P \to \neg Q,\ \neg P,\ Q \vdash}}{\neg P \to \neg Q,\ \neg P \wedge Q \vdash}}{\neg P \to \neg Q \vdash \neg(\neg P \wedge Q)}\,.$$

Wir müssen jetzt also noch Ableitungen der Sequenzen $\neg P,\ Q \vdash \neg P$ und $\neg P,\ Q,\ \neg Q \vdash$ finden.

Schritt 4.

Wir betrachten zunächst die Sequenz $\neg P,\ Q \vdash \neg P$, bei der die linke und die rechte Seite eine gemeinsame Formel habe. Wir diese Sequenz mit (Vor) und (Erw) ableiten.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\neg P \vdash \neg P}}{\neg P,\ Q \vdash \neg P} \qquad \neg P,\ Q,\ \neg Q \vdash}{\neg P \to \neg Q,\ \neg P,\ Q \vdash}}{\neg P \to \neg Q,\ \neg P \wedge Q \vdash}}{\neg P \to \neg Q \vdash \neg(\neg P \wedge Q)}\,.$$

Wir müssen also jetzt noch eine Ableitung der Sequenz $\neg P,\ Q,\ \neg Q\ \vdash$ finden.

Schritt 5.

Die linke Seite der Sequenz enthält eine Formel der Gestalt $\neg\varphi$. Also können wir die Regel $(\neg \mathrm{L})$ (rückwärts) anwenden:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg P\ \vdash\ \neg P}}{\neg P,\ Q\ \vdash \neg P} \qquad \dfrac{\neg P,\ Q\ \vdash\ Q}{\neg P,\ Q,\ \neg Q\ \vdash}}{\neg P \to \neg Q,\ \neg P,\ Q\ \vdash}}{\neg P \to \neg Q,\ \neg P \wedge Q\ \vdash}}{\neg P \to \neg Q\ \vdash\ \neg(\neg P \wedge Q)}.$$

Wir müssen also jetzt noch eine Ableitung der Sequenz $\neg P,\ Q\ \vdash\ Q$ finden.

Schritt 6.

Die linke und die rechte Seite der Sequenz enthalten eine gemeinsame Formel. Wir können also die Regeln (Erw) und (Vor) anwenden.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg P \ \vdash \ \neg P}}{\neg P,\ Q \ \vdash \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{Q \ \vdash \ Q}}{\neg P,\ Q \ \vdash \ Q}}{\neg P,\ Q,\ \neg Q \ \vdash}}{\dfrac{\neg P \to \neg Q,\ \neg P,\ Q \ \vdash}{\neg P \to \neg Q,\ \neg P \wedge Q \ \vdash}}}{\neg P \to \neg Q \ \vdash \ \neg(\neg P \wedge Q)}\,.$$

Insgesamt erhalten wir also einen Ableitungsbaum, den wir jetzt „linearisieren“ können, um eine Ableitung zu erhalten.

Definition 2.17

Eine Sequenzenregel

$$\frac{S_1 \quad \cdots \quad S_k}{S}, \tag{$\star$}$$

ist korrekt, wenn gilt: wenn $S_1, \ldots, S_k$ gültig sind, dann ist auch S gültig.

Lemma 2.18

Alle Regeln des aussagenlogischen Sequenzenkalküls sind korrekt.

Korollar 2.19 (Korrektheit des aussagenlogischen Sequenzenkalküls)

Alle ableitbaren Sequenzen sind gültig.

Man beachte, dass eine Sequenzenregel $\overline{S}$ (also eine Regel $\frac{S_1 \quad \cdots \quad S_k}{S}$ für $k = 0$) genau dann korrekt ist, wenn S gültig ist.

Beweis von Lemma 2.18.

Wir müssen alle 12 Regelschemata des Sequenzenkalküls durchgehen und zeigen, dass alle ihre Instanziierungen korrekt sind. Wir tun dies exemplarisch für (Vor), (Erw), ($\wedge$L), ($\to$R), und ($\perp$L) und lassen die verbleibenden 7 Schemata als Übungen.

(Vor) Wir müssen zeigen, dass für alle $\varphi \in \mathrm{AL}$ die Regel

$$\overline{\varphi \ \vdash \ \varphi}$$

korrekt ist. Dafür reicht es zu zeigen, dass die Sequenz $\varphi \ \vdash \ \varphi$ gültig ist. Das ist in der Tat der Fall, denn jede Interpretation, die $\{\varphi\}$ erfüllt, erfüllt mindestens eine Formel in $\{\varphi\}$.

(Erw) Wir müssen zeigen, dass für alle endlichen $\Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta' \subseteq \mathrm{AL}$ die Regel

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \Gamma' \ \vdash \ \Delta, \Delta'}$$

korrekt ist.Nehmen wir also an, $\Gamma \vdash \Delta$ ist gültig.

Um zu zeigen, dass $\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'$ gültig ist, sei dazu $\mathfrak{A}$ eine Interpretation mit $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \Gamma'$. Dann gilt insbesondere $\mathfrak{A} \models \Gamma$, und weil $\Gamma \vdash \Delta$ gültig ist, erfüllt $\mathfrak{A}$ mindestens eine Formel in Δ. Also erfüllt $\mathfrak{A}$ auch mindestens eine Formel in $\Delta \cup \Delta'$.

($\wedge$R) Wir müssen zeigen, dass für alle endlichen $\Gamma, \Delta \subseteq$ AL und alle $\varphi, \psi \in$ AL die Regel

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi}$$

korrekt ist, das heißt, wenn $\Gamma \vdash \Delta, \varphi$ und $\Gamma \vdash \Delta, \psi$ gültig sind, dann ist auch $\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi$ gültig. Nehmen wir also an, $\Gamma \vdash \Delta, \varphi$ und $\Gamma \vdash \Delta, \psi$ sind gültig.

Um zu zeigen, dass $\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi$ gültig ist, sei $\mathfrak{A}$ eine Interpretation, und gelte $\mathfrak{A} \models \Gamma$. Wir müssen zeigen, dass $\mathfrak{A}$ mindestens eine Formel aus $\Delta \cup \{\varphi \wedge \psi\}$ erfüllt. Nehmen wir an, $\mathfrak{A}$ erfüllt keine Formel aus Δ (sonst sind wir fertig). Weil $\Gamma \vdash \Delta, \varphi$ gültig ist, gilt dann $\mathfrak{A} \models \varphi$. Weil $\Gamma \vdash \Delta, \psi$ gültig ist, gilt $\mathfrak{A} \models \psi$. Also $\mathfrak{A} \models \varphi \wedge \psi$. Also erfüllt $\mathfrak{A}$ mindestens eine Formel aus $\Delta \cup \{\varphi \wedge \psi\}$.

($\rightarrow$R) Wir müssen zeigen, dass für alle endlichen $\Gamma, \Delta \subseteq$ AL und alle $\varphi, \psi \in$ AL die Regel

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

korrekt ist. Nehmen wir an, $\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi$ ist gültig.

Um zu zeigen, dass $\Gamma \vdash \Delta, \varphi \to \psi$ gültig ist, sei $\mathfrak{A}$ eine Interpretation, und gelte $\mathfrak{A} \models \Gamma$. Wir müssen zeigen, dass $\mathfrak{A}$ mindestens eine Formel in $\Delta \cup \{\varphi \to \psi\}$ erfüllt. Nehmen wir an, $\mathfrak{A} \not\models \varphi \to \psi$ (sonst sind wir fertig). Dann gilt $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{A} \not\models \psi$. Also $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\varphi\}$. Weil $\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi$ gültig ist, erfüllt $\mathfrak{A}$ mindestens eine Formel aus $\Delta \cup \{\psi\}$. Weil $\mathfrak{A} \not\models \psi$, erfüllt $\mathfrak{A}$ mindestens eine Formel aus Δ. Also auch mindestens eine Formel aus $\Delta \cup \{\varphi \to \psi\}$.

($\perp$L) Wir müssen zeigen, dass die Regel

$$\frac{}{\perp \vdash}$$

korrekt ist. Dafür reicht es zu zeigen, dass die Sequenz $\perp \vdash$ gültig ist, dass heißt, jede Interpretationen $\mathfrak{A}$, die $\perp$ erfüllt, erfüllt auch mindestens eine Formel in $\emptyset$. Weil es keine Interpretationen gibt, die $\perp$ erfüllen, ist das in der Tat der Fall. $\square$

Beweis von Korollar 2.19.

Sei $S_1, \ldots, S_n$ eine Ableitung von $S = S_k$ im Sequenzenkalkül. Wir zeigen per Induktion über $i \in [k]$, dass S_i gültig ist.

$i = 1$: Nach der Definition einer Ableitung ist $\frac{}{S_1}$ ist eine Regel des Sequenzenkalküls. Nach Lemma 2.18 ist diese Regel korrekt. Also ist S_1 gültig.

$1, \ldots, i-1 \to i$: Nach der Definition einer Ableitung gibt es ein $k \geq 0$ und $1 \leq j_1, \ldots, j_k < i$, so dass $\frac{S_{j_1} \cdots S_{j_k}}{S_i}$ eine Regel des Sequenzenkalküls ist. Nach Lemma 2.18 ist diese Regel korrekt. Nach Induktionsannahme sind $S_{j_1}, \ldots, S_{j_k}$ gültig. Also ist S_i gültig. $\square$

Lemma 2.20 (Vollständigkeit des aussagenlogischen Sequenzenkalküls)

Alle gültigen Sequenzen sind ableitbar.

Beweis der Vollständigkeit — Länge der Sequenzen

Die Länge $|\varphi|$ einer Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ ist einfach die Länge von φ als Wort über dem Alphabet

$$\Sigma_{\mathrm{AL}(\sigma)} := \sigma \cup \{\bot, \top, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, (,)\}.$$

Die Länge einer Sequenz $\Gamma \vdash \Delta$ definieren wir als

$$|\Gamma \vdash \Delta| := \sum_{\gamma \in \Gamma} |\gamma| + \sum_{\delta \in \Delta} |\delta|.$$

Beobachtung 2.21

Für alle Regeln $\frac{S_1 \cdots S_k}{S}$ des aussagenlogischen Sequenzenkalküls gilt $|S_i| < |S|$ für alle $i \in [k]$.

Beweis der Vollständigkeit — Eigenschaften der Sequenzenregeln

Lemma 2.22

Sei S *eine gültige Sequenz, und sei* $\frac{S_1 \cdots S_k}{S}$ *eine Regel des aussagenlogischen Sequenzenkalküls außer (Erw). Dann sind auch* $S_1, \dots, S_k$ *gültig.*

Lemma 2.23

Sei $S := \Gamma \vdash \Delta$ *eine gültige Sequenz. Dann gilt* $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$ *oder* $\bot \in \Gamma$ *oder* $\top \in \Delta$, *oder es gibt ein* $k \in \{1, 2\}$ *und Sequenzen* $S_1, \dots, S_k$, *so dass* $\frac{S_1 \cdots S_k}{S}$ *eine Junktorenregel des aussagenlogischen Sequenzenkalküls ist.*

Beweis von Lemma 2.22.

Der Beweis ist ähnlich wie der Beweis der Korrektheit der Regeln (es handelt sich ja hier um eine Art "umgekehrte Korrektheit").

Für alle Instanziierungen der Regelschemata (Vor), ($\bot$L), ($\top$R) ist nichts zu zeigen, weil es sich um Basisregeln ohne Prämissen handelt (d.h., $k = 0$). Stellvertretend für die verbleibenden Regelschemata betrachten wir ($\to$L) und ($\neg$R), den Rest lassen wir wieder als Übung.

($\to$L) Seien $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{AL}$ endlich und $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$, so dass die Sequenz $\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \Delta$ gültig ist. Wir müssen zeigen, dass die Sequenzen $\Gamma \vdash \Delta, \varphi$ und $\Gamma, \psi \vdash \Delta$ gültig sind.

Betrachten wir zunächst $\Gamma \vdash \Delta, \varphi$. Sei $\mathfrak{A}$ eine Interpretation mit $\mathfrak{A} \models \Gamma$. Wir müssen zeigen, dass $\mathfrak{A}$ mindestens eine Formel aus $\Delta \cup \{\varphi\}$ erfüllt. Nehmen wir an, $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ (sonst sind wir fertig). Dann gilt $\mathfrak{A} \models \varphi \to \psi$ und damit $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\varphi \to \psi\}$. Weil $\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \Delta$ gültig ist, erfüllt $\mathfrak{A}$ mindestens eine Formel aus Δ und damit mindestens eine Formel aus $\Delta \cup \{\varphi\}$.

Betrachten wir jetzt $\Gamma, \psi \vdash \Delta$. Sei $\mathfrak{A}$ eine Interpretation mit $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\psi\}$. Wir müssen zeigen, dass $\mathfrak{A}$ mindestens eine Formel aus Δ erfüllt. Weil $\mathfrak{A} \models \psi$ gilt $\mathfrak{A} \models \varphi \to \psi$. Also $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\varphi \to \psi\}$. Weil $\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \Delta$ gültig ist, erfüllt $\mathfrak{A}$ mindestens eine Formel aus Δ.

($\neg$R) Seien $\Gamma, \Delta \subseteq \text{AL}$ endlich und $\varphi \in \text{AL}$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi$ gültig ist. Wir müssen zeigen, dass die Sequenz $\Gamma, \varphi \vdash \Delta$ gültig ist.

Sei $\mathfrak{A}$ eine Interpretation mit $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\varphi\}$. Wir müssen zeigen, dass $\mathfrak{A}$ mindestens eine Formel aus Δ erfüllt. Weil $\mathfrak{A} \models \Gamma$ und $\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi$ ist, erfüllt $\mathfrak{A}$ mindestens eine Formel aus $\Delta \cup \{\neg\varphi\}$. Weil $\mathfrak{A} \models \varphi$ gilt $\mathfrak{A} \not\models \neg\varphi$, also erfüllt $\mathfrak{A}$ mindestens eine Formel aus Δ. $\square$

Beweis von Lemma 2.23.

Wir unterscheiden zwei Fälle.

Angenommen, es gilt $\Gamma \subseteq \sigma \cup \{\top\}$ und $\Delta \subseteq \sigma \cup \{\bot\}$. Weil $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$, gibt es eine Interpretation $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}(P) = 1$ für alle $P \in \Gamma$ und $\mathfrak{A}(Q) = 0$ für alle $Q \in \Delta$. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \Gamma$, aber $\mathfrak{A}$ erfüllt keine Formel aus Δ. Also ist $\Gamma \vdash \Delta$ nicht gültig, ein *Widerspruch*.

Also gilt $\Gamma \not\subseteq \sigma \cup \{\top\}$ oder $\Delta \not\subseteq \sigma \cup \{\bot\}$. Dann können wir mindestens eine der Junktorenregeln anwenden. $\square$

Beweis von Lemma 2.20.

Wir führen den Beweis per Induktion über die Länge ℓ der Sequenzen.

$\ell = 0$: Die einzige Sequenz der Länge 0 ist $\emptyset \vdash \emptyset$, aber diese Sequenz ist nicht gültig. Also gilt die Behauptung für alle gültigen Sequenzen der Länge $\ell = 0$.

$0, \dots, \ell - 1 \to \ell$: Sei $S := \Gamma \ \vdash \ \Delta$ eine gültige Sequenz der Länge $\ell := |S|$. Falls $\Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$ oder $\bot \in \Gamma$ oder $\top \in \Delta$ ist S mit den Regeln (Vor) und (Erw) bzw. ($\bot$L) und (Erw) bzw. ($\top$R) und (Erw) ableitbar. Ansonsten enthält der Sequenzenkalkül nach Lemma 2.23 eine Junktorenregel $\frac{S_1 \cdots S_k}{S}$ für ein $k \in \{1, 2\}$

Sei $i \in [k]$. Nach Beobachtung 2.21 gilt $|S_i| < \ell$. Nach Lemma 2.22 ist S_i gültig. Also hat S_i nach Induktionsannahme eine Ableitung $S_{i1}, \dots, S_{in_i}$, wobei $S_{in_i} = S_i$. Dann ist

$$S_{11}, \dots, S_{1n_1}, S$$

(falls $k = 1$) bzw.

$$S_{11}, \dots, S_{1n_1}, S_{21}, \dots, S_{2n_2}, S$$

(falls $k = 2$) eine Ableitung von S. Im letzten Schritt dieser Ableitung wenden wir die Regel $\frac{S_1 \cdots S_k}{S}$ an. $\square$

Definition 2.24

Seien $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ und $\psi \in \mathrm{AL}$. Dann ist ψ beweisbar aus Φ (wir schreiben $\Phi \vdash \psi$), wenn es ein endliches $\Gamma \subseteq \Phi$ gibt, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \psi$ im aussagenlogischen Sequenzenkalkül ableitbar ist.

Satz 2.25 (Vollständigkeitssatz der Aussagenlogik)

Für alle Formelmengen $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ *und Formeln* $\psi \in \mathrm{AL}$ *gilt:*

$$\Phi \models \psi \quad \iff \quad \Phi \vdash \psi.$$

Unsere Notation ist hier nicht eindeutig: für eine endliche Formelmenge Φ bezeichnet $\Phi \vdash \psi$ zum einen eine (beliebige, also nicht notwendigerweise ableitbare) Sequenz, zum anderen bedeutet $\Phi \vdash \psi$, dass ψ aus Φ beweisbar ist. Es geht aber immer aus dem Kontext hervor, was gemeint ist.

Beweis des Vollständigkeitssatzes.

„$\Longrightarrow$“: Nehmen wir an, $\Phi \models \psi$. Nach dem Endlichkeitssatz gibt es ein endliches $\Gamma \subseteq \Phi$, so dass $\Gamma \models \psi$. Nach Beobachtung 2.15 ist dann die Sequenz $\Gamma \vdash \psi$ gültig. Dann ist sie nach Lemma 2.20 ableitbar. Also gilt $\Phi \vdash \psi$.

„$\Longleftarrow$“: Nehmen wir an, $\Phi \vdash \psi$. Dann gibt es ein endliches $\Gamma \subseteq \Phi$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \psi$ ableitbar ist. Nach Korollar 2.19 ist die Sequenz gültig. Nach Beobachtung 2.15 gilt damit $\Gamma \models \psi$. Also gilt auch $\Phi \models \psi$. $\square$

Definition 2.26

Eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ ist widersprüchlich (oder inkonsistent), wenn es eine Formel $\psi \in \mathrm{AL}$ gibt, so dass $\Phi \vdash \psi$ und $\Phi \vdash \neg\psi$.

Φ ist widerspruchsfrei (oder konsistent), wenn es nicht widersprüchlich ist.

Korollar 2.27

Für $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ gilt:

$$\Phi \textit{ erfüllbar} \iff \Phi \textit{ widerspruchsfrei}.$$

Korollar 2.28

Für alle $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) *Φ ist widersprüchlich.*

(ii) $\Phi \vdash \bot$.

(iii) *Für alle $\psi \in \mathrm{AL}$ gilt $\Phi \vdash \psi$.*

Beweis von Korollar 2.27.

„$\Longrightarrow$“: Sei Φ erfüllbar, und sei $\mathfrak{A} \models \Phi$. Dann gilt für jede Formel $\psi \in \mathrm{AL}$ entweder $\mathfrak{A} \not\models \psi$ oder $\mathfrak{A} \not\models \neg\psi$. Also $\Phi \not\models \psi$ oder $\Phi \not\models \neg\psi$. Die Behauptung folgt dann aus dem Vollständigkeitssatz.

„$\Longleftarrow$“: Nehmen wir an, Φ ist unerfüllbar. Dann gilt $\Phi \models \chi$ für alle $\chi \in \mathrm{AL}$, denn jede Interpretation $\mathfrak{A}$, die Φ erfüllt (keine!) erfüllt auch χ. Also gilt nach dem Vollständigkeitssatz, dass $\Phi \vdash \chi$ für alle $\chi \in \mathrm{AL}$. Das impliziert, dass Φ widersprüchlich ist. □

Beweis von Korollar 2.28.

„(i)$\Longrightarrow$(iii)“: Wenn Φ widersprüchlich ist, ist Φ unerfüllbar, und damit gilt $\Phi \models \psi$ für alle $\psi \in \mathrm{AL}$ (vgl. Beweis von Korollar 2.27). Dann folgt (iii) aus dem Vollständigkeitssatz.

„(iii)$\Longrightarrow$(ii)“: Trivial.

„(ii)$\Longrightarrow$(i)“: Wenn $\Phi \vdash \bot$ gilt nach dem Vollständigkeitssatz $\Phi \models \bot$. Also ist Φ unerfüllbar. Nach Korollar 2.27 ist Φ dann widersprüchlich. □