Prof. Dr. M. Grohe

E. Fluck, L. Härtel, T. Novotný

Mathematische Logik

Probeklausur, 24. Dezember 2000

Nachname: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

Studiengang: ______________________

Hinweise

- Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf **jedes Blatt** (inklusive zusätzliche Blätter).
- Bitte beantworten Sie die Aufgaben auf den Aufgabenblättern. Sprechen Sie uns an, wenn Sie zusätzliches Papier benötigen. Benutzen Sie **kein eigenes Papier** und geben Sie am Ende der Klausur **alle Blätter zusammen mit den Aufgabenblättern** ab.
- Schreiben Sie ausschließlich mit **dokumentenechten Stiften** in **schwarzer** oder **blauer** Farbe. Benutzen Sie insbesondere **keine Bleistifte**.
- Streichen Sie nicht zu wertende Antworten durch. Bei mehreren Antworten für eine Aufgabe wird die schlechteste gewertet.
- Die Bearbeitungszeit beträgt **120 Minuten**. Zum Bestehen der Klausur reichen **50 Punkte**.

Hiermit bestätige ich, dass ich obige Hinweise zur Kenntnis genommen habe und prüfungsfähig bin.

____

(Unterschrift)

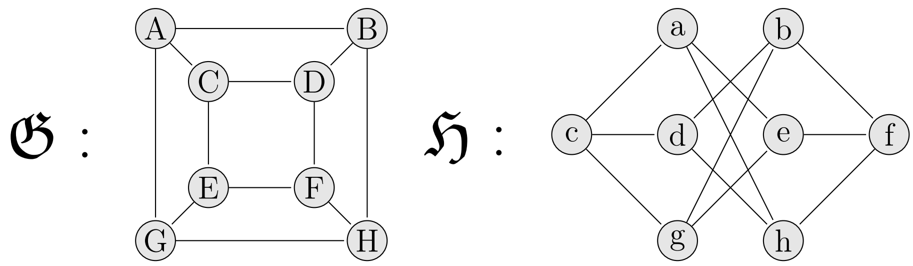
Bitte unterhalb dieser Linie nichts eintragen.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Punkte	/ 26	/ 18	/ 20	/ 22	/ 6	/ 8

$\sum$	/ 100

Aufgabe 1 4+4+5+9+4 = 26 Punkte

a) Seien $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ die durch die folgende Abbildung definierte Graphen (also $\{E/2\}$-Strukturen).



Die Graphen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ sind isomorph. Geben Sie einen Isomorphismus von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$ an.

b) Sei $\Sigma := \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Für jedes Wort $w \in \Sigma^*$, sei $\mathfrak{A}_w$ die Wortstruktur von w, wie in der Vorlesung definiert. Geben Sie für die folgenden Worteigenschaften jeweils einen $\mathrm{L}(\{\dot{\leq}, P_a, P_b, P_c\})$-Satz φ an, sodass für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\mathfrak{A}_w \models \varphi \iff w \text{ hat die angegebene Eigenschaft.}$$

(i) Nach jedem b muss direkt danach ein c vorkommen.

(ii) Es gibt kein aba-Teilwort.

c) (i) Sei $\sigma \coloneqq \{P\}$. Geben Sie eine Formel $\varphi \in \mathrm{AL}(\sigma)$ an, die unerfüllbar ist, aber nicht die Symbole $\top, \bot, \wedge$ enthält.

(ii) Sei $\sigma \coloneqq \{P, Q, R\}$. Sei

$$\varphi \coloneqq (P \leftrightarrow R) \wedge (\neg Q \wedge (R \vee \neg P)) \wedge \neg(Q \wedge \neg P) \in \mathrm{AL}(\sigma).$$

Geben Sie ein Modell von φ an.

(iii) Sei $\sigma_n \coloneqq \{P_i \mid i \leq n\}$. Begründen Sie, warum für alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$\varphi_n \coloneqq P_0 \wedge \neg P_n \wedge \bigwedge_{i<n} P_i \leftrightarrow P_{i+1} \in \mathrm{AL}(\sigma_n)$$

unerfüllbar ist.

d) Seien $x, y, z \in \mathrm{Var}$.

(i) Sei $\varphi_1 \in L(\sigma)$ wie folgt:

$$\varphi_1 \coloneqq x \doteq y \to \neg(x \doteq y).$$

Geben Sie ein Modell an oder begründen Sie kurz, warum φ_1 unerfüllbar ist.

(ii) Sei $\sigma \coloneqq \{\dot{+}/2, \dot{1}/0, \dot{2}/0\}$ und $\varphi_2 \in L(\sigma)$ wie folgt:

$$\varphi_2 \coloneqq \forall x (x \dot{+} \dot{1} \doteq \dot{2}).$$

Geben Sie ein Modell an oder begründen Sie kurz, warum φ_2 unerfüllbar ist.

(iii) Seien $\sigma \coloneqq \{E/2\}$ und $\varphi_3 \in L(\sigma)$ wie folgt:

$$\varphi_1 \coloneqq \forall x \Big(\forall y \big(E(x,y) \to \forall z \neg \big(E(x,z) \wedge E(y,z) \big) \big) \Big)$$
$$\wedge\, \exists x \Big(\exists y \big(\exists z \big(E(x,y) \wedge E(y,z) \wedge \exists x (E(z,x)) \big) \big) \Big).$$

Geben Sie ein Modell für φ_3 an, das ein Graph ist.

(iv) Seien $\sigma \coloneqq \{m/2, e/0\}$ und $\varphi_4 \in L(\sigma)$ wie folgt:

$$\begin{aligned}\varphi_4 \coloneqq \forall x \Big(\forall y \big(\forall z \big(m(x, m(y,z)) \doteq m(m(x,y),z) \big) \big) \Big) \\ \wedge \forall x \big(m(x,e) \doteq m(e,x) \wedge m(e,x) \doteq x \big) \\ \wedge \forall x \big(\exists y \big(m(x,y) \doteq e \big) \big) \\ \wedge \exists x \big(\exists y (x \dot{\neq} y) \big).\end{aligned}$$

Geben Sie ein Modell für φ_4 an.

e) Sei $\sigma \coloneqq \{P, Q, R\}$.

(i) Sei $\varphi_1 \in \mathrm{ML}(\sigma)$ wie folgt:

$$\varphi_1 \coloneqq \Diamond\Diamond P \wedge \Diamond(\Diamond P \to \Box\neg P).$$

Geben Sie ein Modell an oder begründen Sie kurz, warum φ_1 unerfüllbar ist.

(ii) Sei $\varphi_2 \in \mathrm{ML}(\sigma)$ wie folgt:

$$\varphi_2 \coloneqq \Diamond\Box P \wedge (\Diamond\Box P \to \Diamond\Diamond\neg P).$$

Geben Sie ein Modell an oder begründen Sie kurz, warum φ_2 unerfüllbar ist.

Aufgabe 2 2+3+2+3+3+5 = 18 Punkte

a) Sei σ eine beliebige Symbolmenge. Vervollständigen Sie die folgende Definition.

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ σ-Strukturen. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sind elementar Äquivalent (wir schreiben $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), wenn …

b) Beschreiben Sie alle Substrukturen und Redukte des Standardmodells der Arithmetik $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, \dot{+}^{\mathfrak{N}}, \dot{*}^{\mathfrak{N}}, \dot{0}^{\mathfrak{N}}, \dot{1}^{\mathfrak{N}})$. Geben Sie jeweils an, wie viele es gibt.

c) Sei $\mathfrak{A}$ die $\{R/3\}$-Struktur mit Universum $\{a, b, c\}$ und Relation

$$R^{\mathfrak{A}} = \{(a, a, b), (c, b, c)\}.$$

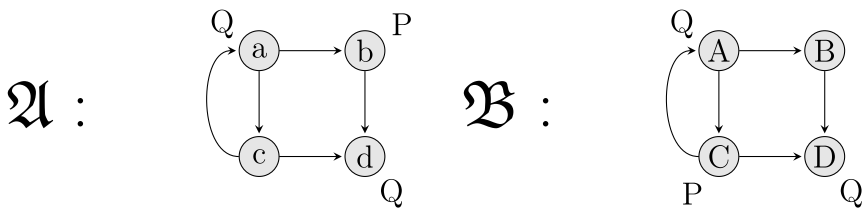
Sei $\mathfrak{B}$ die $\{R/3\}$-Struktur mit Universum $\{A, B, C\}$ und Relation

$$R^{\mathfrak{B}} = \{(A, B, C), (C, C, B)\}.$$

Sei $\mathbf{p} \coloneqq \big((a, C), (b, B)\big)$. Wer gewinnt die Partie $\mathbf{p}$ des Spiels $\mathrm{EF}_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$?

d) Zeigen Sie oder widerlegen Sie: Seien $\mathfrak{A}$ eine endliche, und $\mathfrak{B}$ eine unendliche relationale σ-Strukturen. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}$, sodass (H) eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_r(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ hat.

e) Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ die wie folgt definierte Kripkestrukturen.



Geben Sie eine Gewinnstrategie für (H) in dem Bisimulationsspiel $\mathrm{BS}(\mathfrak{A}, a, \mathfrak{B}, A)$.

f) Geben Sie jeweils eine modallogische Formel φ an, sodass $\mathcal{K}, v \models \varphi$ genau dann, wenn die folgende Aussagen über die Kripkestruktur $\mathcal{K}$ und Welt $v \in \mathcal{K}$ gelten, oder beweisen Sie durch eine Gewinnstrategie für (D) in einem passenden Bisimulationsspiel, dass keine solche Formel existiert.

(i) Es ist möglich, von v unendlich viele verschiedene Welten zu erreichen.

(ii) Von v ist eine Welt erreichbar, von welchem ist eine Endwelt erreichbar, aber es ist keine Endwelt von v erreichbar. (Eine Endwelt ist eine Welt mit keinen erreichbaren Welten; oder äquivalent, in dem Digraphen der Kripkestruktur ist es ein Knoten ohne ausgehenden Kanten.)

Aufgabe 3 $4+3+7+6 = 20$ Punkte

a) Füllen Sie die folgende Definition aus.

Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von σ-Strukturen.

(i) $\mathcal{K}$ ist **erstufig definierbar**, wenn

(ii) $\mathcal{K}$ ist **erstufig definierbar im Endlichen**, wenn

b) Zeigen Sie oder widerlegen Sie: Seien $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ zwei Klassen von σ-Strukturen. Wenn $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ beide erststufig definierbar sind, dann ist auch $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$ erststufig definierbar.

c) Geben Sie für die folgende Klassen von Strukturen jeweils einen Satz an, der sie **erststufig definiert**, oder beweisen Sie, dass die Klasse nicht erststufig definierbar ist. Falls Sie eine Formel angeben, erklären Sie, warum sie die Klasse definert.

(i) Die Klasse aller Graphen, die einen Dreieck enthalten

(ii) Die Klasse aller linearen Ordnungen $(A, \dot{\leq})$ mit einem überabzählbaren Universum A.

(iii) Die Klasse aller 3-regulären Graphen

d) Geben Sie für die folgende Klassen von Strukturen jeweils einen Satz an, der sie **erststufig im Endlichen definiert**, oder beweisen Sie, dass die Klasse nicht erststufig definierbar im Endlichen ist. Falls Sie eine Formel angeben, erklären Sie, warum sie die Klasse definert.

(i) Die Klasse aller $\{P\}$-Strukturen, die nur endlich viele verschiedene Substrukturen haben. Dabei ist P ein zweistelliges Relationssymbol.

(ii) Die Klasse aller ungeraden Cliquen

Aufgabe 4 2+4+4+2+3+7 = 22 Punkte

a) Zeigen Sie indem Sie eine Ableitung einer geeigneten Sequenz angeben, dass die folgende Formel $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ allgemeingültig ist:

$$\varphi = \forall x\ x \doteq x.$$

b) Seien $\Gamma, \Delta \subset \mathrm{L}(\sigma)$ endlich, sei $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ und sei $y \notin \mathrm{frei}(\Gamma \cup \Delta \cup \{\forall x \varphi\})$. Geben Sie eine Ableitung für die folgende Regel:

$$\frac{\Gamma\ \vdash\ \Delta, \exists x \varphi}{\Gamma\ \vdash\ \Delta, \varphi\frac{y}{x}}. \qquad (\exists \mathrm{ER})$$

c) Sei $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$. Geben Sie eine Ableitung für die folgende Sequenz:

$$\forall x\, x \doteq y \;\vdash\; \exists y \varphi \rightarrow \forall y \varphi.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die folgende Regel, für alle endlichen $\Gamma, \Delta \subset \mathrm{L}(\sigma)$, für alle $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ und für alle $\theta, \eta \in \mathrm{T}(\sigma)$, ableitbar ist:

$$\frac{\Gamma, \theta \doteq \eta \;\vdash\; \Delta, \varphi\frac{\theta}{x}}{\Gamma, \theta \doteq \eta \;\vdash\; \Delta, \varphi\frac{\eta}{x}} \qquad \text{(SubR)}$$

d) Ergänzen Sie die Definition einer *negationstreuen* Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$.

Eine Formelmenge $\Psi \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$ ist negationstreu, wenn...

e) Geben Sie den Beweis wieder dass für alle negationstreuen $\Phi \subseteq \mathrm{L}$ und alle $\psi \in \mathrm{L}$ gilt: $\Phi \vdash \varphi \vee \psi$ genau dann wenn $\Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \psi$.

Hinweis: Die Aussage ist Teil des Beweises des Vollständigkeitssatzes, dieser darf im Beweis also nicht verwendet werden.

f) Ergänzen Sie den folgenden Lückentext über die Vollständigkeit des aussagenlogischen Sequenzenkalküls.

Das Lemma *Vollständigkeit des aussagenlogischen Sequenzenkalküls* besagt:

Alle $\boxed{}$ Sequenzen sind $\boxed{}$.

Um dieses Lemma zu beweisen zeigen wir zuerst Lemma 2.22 das besagt, dass für alle Regeln $\frac{S_1 \ldots S_k}{S}$ des aussagenlogischen Sequenzenkalküls außer $\boxed{}$ gilt, dass wenn S $\boxed{}$ ist, dann auch $S_1, \ldots, S_k$.

Dann zeigen wir Lemma 2.23 das besagt,dass für alle gültigen Sequenzen $S := \Gamma \vdash \Delta$ gilt, dass

(i) entweder $\Gamma \boxed{} \Delta \boxed{} \emptyset$

(ii) oder $\boxed{} \in \Gamma$

(iii) oder $\boxed{} \in \Delta$

(iv) oder es gibt ein $k \in \{1, 2\}$ und Sequenzen $S_1, \ldots, S_k$, sodass $\frac{S_1 \ldots S_k}{S}$ eine $\boxed{}$ ist.

Mit Hilfe dieser Aussagen zeigen wir die Vollständigkeit des aussagenlogischen Sequenzenkalküls mit Hilfe von Induktion über [ ] der Sequenzen ℓ. Für $\ell = 0$ zeigen wir dass die einzige mögliche Sequenz [ ] ist, welche [ ] ist. Also sind alle gültigen Sequenzen ableitbar für $\ell = 0$. Dann nehmen wir an für $0, \ldots, \ell - 1$ sind alle gültigen Sequenzen ableitbar und zeigen dann dass auch alle gültigen Sequenzen mit [ ] ℓ ableitbar sind. Wenn die Eigenschaft (i),(ii) oder (iii) aus Lemma 2.23 gilt, so kann man die Ableitung direkt angeben. Wenn keine der drei Eigenschaften gilt, so gilt nach Lemma 2.23 Eigenschaft (iv). Sei $k \in \{1, 2\}$ und $S_1, \ldots, S_k$ entsprechend Eigenschaft (iv). Sei $i \in [k]$. Nach Lemma 2.22 gilt dass S_i [ ] ist. Außerdem beobachten wir dass [ ] $\leq \ell$. Also gibt es nach Induktionsannahme eine [ ] $S_{i1}, \ldots, S_{in_i}$ mit $S_{in_i} = S_i$. Für $k = 1$ ist [ ] und für $k = 2$ ist [ ] eine Ableitung von S.

Die Regeln des Sequenzenkalküls der Logik der ersten Stufe sind die folgenden: Für alle endlichen Formelmengen $\Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta' \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$, alle Formeln $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$, alle Variablen $x \in \mathrm{Var}$ und $y \in \mathrm{Var} \setminus \mathrm{frei}(\Gamma \cup \Delta \cup \{\exists x \varphi\})$, und alle Terme $\theta, \eta \in \mathrm{T}(\sigma)$:

(Vor) $$\frac{}{\varphi \vdash \varphi}$$

(Erw) $$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

($\wedge$L) $$\frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}$$

($\wedge$R) $$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi}$$

($\vee$L) $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}$$

($\vee$R) $$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi}$$

($\rightarrow$L) $$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \rightarrow \psi \vdash \Delta}$$

($\rightarrow$R) $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

($\neg$L) $$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}$$

($\neg$R) $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi}$$

($\bot$L) $$\frac{}{\bot \vdash}$$

($\top$R) $$\frac{}{\vdash \top}$$

($\exists$L) $$\frac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta}$$

($\exists$R) $$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi\frac{\theta}{x}}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi}$$

($\forall$L) $$\frac{\Gamma, \varphi\frac{\theta}{x} \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta}$$

($\forall$R) $$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi}$$

(Rf) $$\frac{\Gamma, \theta \doteq \theta \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

(Sub) $$\frac{\Gamma, \theta \doteq \eta, \varphi\frac{\theta}{x} \vdash \Delta}{\Gamma, \theta \doteq \eta, \varphi\frac{\eta}{x} \vdash \Delta}$$

(S) $$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \quad \Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

Aufgabe 5 2+4 = 6 Punkte

a) Geben Sie eine nichtleere Formel $\varphi \in \mathrm{AL}$ in KNF an, bei der Simplify nicht anwendbar ist.

b) Sei folgende Formel gegeben:

$$\begin{aligned}\varphi := &(P_1 \vee \neg P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4) \wedge (\neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3)\\ &\wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3 \vee \neg P_4) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4)\\ &\wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \neg P_3) \wedge (P_1 \vee \neg P_2 \vee P_3).\end{aligned}$$

Wenden Sie den DPLL-Algorithmus der Vorlesung auf φ an. Geben Sie die Zwischenschritte kurz an.

Aufgabe 6 8 Punkte

Sei $L_{\text{ohne}}(\sigma) \coloneqq \{\varphi \in L(\sigma) \mid \varphi \in (\Sigma_{L(\sigma)} \setminus \{\doteq\})^*\}$ die Menge aller σ-Formeln der Logik der ersten Stufe, die ohne $\doteq$ gebildet werden können.

Beweisen Sie, dass es entscheidbar ist, ob für Formeln $\varphi, \psi \in L_{\text{ohne}}(\sigma)$ gilt, dass

$$\varphi \equiv \psi \text{ oder } \operatorname{qr}(\varphi) + \operatorname{qr}(\psi) > 0.$$

Hinweis: Die Äquivalenz von aussagenlogischen Formeln ist entscheidbar.