Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2020

Klausur Mathematische Logik

Lösung

Name:	
Vorname:	
Matr.-Nr.:	
Studiengang:	

1	2	3	4	5	6	7
/25	/15	/15	/14	/14	/22	/15

Summe:	/120

Hinweise

Unsere Regeln für die Klausur: Es sind *keine* Hilfsmittel (Skripte, Bücher, Mitschriften oder dergleichen) zugelassen.

Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Es darf *kein* zusätzliches Papier ausgegeben werden. Der Platz zur Bearbeitung der Aufgaben ist daher großzügig bemessen.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Hiermit bestätige ich, dass ich obige Hinweise zur Kenntnis genommen habe und prüfungsfähig bin.

Unterschrift

Aufgabe 1 25 Punkte

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Behauptungen wahr sind. Begründen Sie Ihre Antworten durch kurze Beweisskizzen unter Einbeziehung von Ergebnissen aus der Vorlesung, oder durch geeignete Beispiele bzw. Gegenbeispiele.

(a) Seien φ, ψ AL-Formeln. Wenn φ unerfüllbar ist und $\varphi \not\equiv \psi$, dann ist ψ erfüllbar.

Lösung (2 Punkte):

Ja. Wenn $\varphi \not\equiv \psi$, dann gibt es ein Modell $\mathfrak{I}$ mit $\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathfrak{I}} \neq \llbracket\psi\rrbracket^{\mathfrak{I}}$. Da φ unerfüllbar ist, gilt $\llbracket\varphi\rrbracket^{\mathfrak{I}} = 0$ und damit $\llbracket\psi\rrbracket^{\mathfrak{I}} = 1$, also $\mathfrak{I} \models \varphi$.

(b) Seien $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{AL}$ und $\vartheta \in \mathrm{AL}$. Wenn $\Phi \models \vartheta$ und $\Psi \models \vartheta$, dann auch $\Phi \cap \Psi \models \vartheta$.

Lösung (2 Punkte):

Nein. Gegenbeispiel: $\Phi = \{X\}$, $\Psi = \{Y\}$, $\vartheta = X \vee Y$. Dann gilt $\{X\} \models X \vee Y$ und $\{Y\} \models X \vee Y$, jedoch nicht $\varnothing \models X \vee Y$, da $X \vee Y$ keine Tautologie ist.

(c) Die Menge $\{\rightarrow, \vee\}$ ist funktional vollständig.

Lösung (2 Punkte):

Nein. Es gilt $1 \rightarrow 1 \equiv 1$ und $1 \vee 1 \equiv 1$. Per Induktion über den Formelaufbau folgt, dass für jede aus $\rightarrow$, $\vee$ und Variablen aufgebaute Formel $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ gilt: $\llbracket\varphi(1, \ldots, 1)\rrbracket = 1$. Damit ist die Negation nicht darstellbar.

(d) Die Formel $\forall x \exists y (x < y)$ hat ein endliches Modell (hierbei ist $<$ ein zweistelliges Relationssymbol).

Lösung (2 Punkte):

Ja. Zum Beispiel ist $\mathfrak{A} = (\{1\}, <^{\mathfrak{A}})$ *mit* $<^{\mathfrak{A}} = \{(1,1)\}$ *ein Modell.*

(e) Folgende Sequenz ist gültig (hierbei ist E ein zweistelliges Relationssymbol und c, d sind Konstantensymbole):

$$\exists x Ecx,\ \neg Edd\ \Rightarrow\ \forall x Edx,\ \exists x Ecx,\ Edd$$

Lösung (2 Punkte):

Ja. Es handelt sich um ein Axiom des Sequenzenkalküls, da die Formel $\exists x Ecx$ *auf beiden Seiten auftaucht.*

(f) Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, +, 0)$ mit der üblichen Interpretation von $+$ und 0.
Die Relation $\sim := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$.

Lösung (2 Punkte):

Ja. Da alle Elemente in Relation stehen, ist $\sim$ *trivialerweise reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine Äquivalenzrelation (mit genau einer Äquivalenzklasse). Weiter ist* $\sim$ *eine Kongruenzrelation: Für* 0 *ist nichts zu zeigen und wenn* $a \sim a'$ *und* $b \sim b'$*, dann gilt (trivialerweise) auch* $a + b \sim a' + b'$*.*

(g) Sei $\mathfrak{A}$ eine endliche Struktur mit Universum A und $B \subseteq A$. Wenn jedes Element aus B in $\mathfrak{A}$ elementar definierbar ist, dann ist auch B in $\mathfrak{A}$ elementar definierbar.

Lösung (3 Punkte):

Ja. Für $b \in B$ sei $\varphi_b(x)$ eine Formel, die b definiert. Sei $\psi(x) := \bigvee_{b \in B} \varphi_b(x)$. Da B endlich ist, ist $\psi(x)$ eine wohldefinierte Formel und definiert die Menge B (es gilt $\mathfrak{A} \models \psi(a)$ genau dann, wenn $\mathfrak{A} \models \varphi_b(a)$ und damit $a = b$ für ein $b \in B$).

(h) Sei T eine Theorie und $\mathfrak{A} \models T$ ein Modell. Wenn $\varphi \notin T$, dann gilt $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$.

Lösung (3 Punkte):

Nein, da Theorien nicht vollständig sein müssen. Gegenbeispiel: Sei T die Theorie der linearen Ordnungen (LO), $\mathfrak{A} = (\{1,2,3\}, <)$ eine LO mit Maximum und $\varphi = \exists x \forall y (x = y \lor y < x)$ („es gibt ein Maximum"). Da es LO ohne Maximum gibt, z.B. $(\mathbb{N}, <)$, ist $\varphi \notin T$. Weiter gilt $\mathfrak{A} \models T$, jedoch $\mathfrak{A} \not\models \neg\varphi$.

(i) Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei $\{E\}$-Strukturen. Wenn die Duplikatorin $G_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt und $\mathfrak{A}$ ein vollständiger ungerichteter Graph ist, dann ist auch $\mathfrak{B}$ ein vollständiger ungerichteter Graph.

Lösung (2 Punkte):

Ja. Vollständige ungerichtete Graphen lassen sich durch Sätze mit Quantorenrang ≤ 2 axiomatisieren, etwa durch $\Phi_{Graph} \cup \{\forall x \forall y (x = y \lor Exy)\}$. Da die Duplikatorin gewinnt, gilt $\mathfrak{A} \equiv_2 \mathfrak{B}$. Also ist auch $\mathfrak{B}$ Modell des Axiomensystems und damit ein vollständiger ungerichteter Graph.

(j) Es gibt mindestens zwei verschiedene Herbrandstrukturen $\mathfrak{H}$ über der Signatur $\tau = \{R, c\}$, wobei R ein einstelliges Relations- und c ein Konstantensymbol ist.

Lösung (2 Punkte):

Ja. Das Universum einer Herbrandstruktur $\mathfrak{H}$ über τ ist $\{c\}$, daher gibt es für die Interpretation der Relation R genau zwei Möglichkeiten: $R^{\mathfrak{H}} = \varnothing$ oder $R^{\mathfrak{H}} = \{c\}$.

(k) Es gibt einen Algorithmus, der für zwei FO-Sätze φ und ψ entscheidet, ob die Sequenz $\varphi \Rightarrow \varphi \wedge \psi$ gültig ist.

Lösung (3 Punkte):

Nein. Sei φ eine Tautologie, etwa $\varphi = \exists x\, x = x$. Dann ist $\varphi \Rightarrow \varphi \wedge \psi$ genau dann gültig, wenn ψ eine Tautologie ist. Wir könnten mithilfe des Algorithmus also entscheiden, ob ψ eine Tautologie ist, und damit das Gültigkeitsproblem für FO entscheiden. Nach VL ist das aber unentscheidbar.

Aufgabe 2 15 Punkte

(a) Was besagt die Korrektheit des Resolutionskalküls?

Lösung (2 Punkte):

Wenn die leere Klausel aus einer Klauselmenge K mittels Resolution ableitbar ist (kurz: $\Box \in \mathrm{Res}^*(K)$) dann ist K unerfüllbar.

(b) Zeigen Sie mit der Resolutionsmethode, dass die folgende Folgerungsbeziehung gilt:

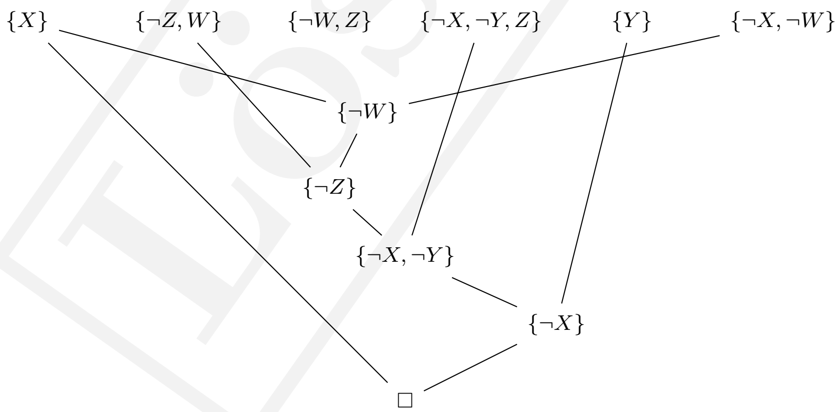
$$\underbrace{\{X,\, Z \to W,\, \neg W \vee Z,\, X \wedge Y \to Z\}}_{\Phi} \models \underbrace{\neg Y \vee (X \wedge W)}_{\psi}$$

Lösung (6 Punkte):

Die Folgerung $\Phi \models \psi$ gilt genau dann, wenn $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar ist. Wir erhalten die folgende Klauselmenge K aus $\Phi \cup \{\neg\psi\}$.

$$K = \{\{X\}, \{\neg Z, W\}, \{\neg W, Z\}, \{\neg X, \neg Y, Z\}, \{Y\}, \{\neg X, \neg W\}\}$$

Mittels Resolution leiten wir die leere Klausel ab:



Da $\Box \in \mathrm{Res}^*(K)$, ist K unerfüllbar und die Folgerung gilt.

(c) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die angegebene Formel logisch äquivalent zu einer Horn-Formel ist.

$$\varphi = (Z \vee \neg Y) \wedge (\neg X \to (Y \wedge Z)) \wedge Z$$

Lösung (3 Punkte):

Nicht äquivalent zu einer Horn-Formel. Betrachte die Interpretationen:

$$\mathfrak{I}_1 \colon X \mapsto 0, Y \mapsto 1, Z \mapsto 1, \qquad \mathfrak{I}_2 \colon X \mapsto 1, Y \mapsto 0, Z \mapsto 1.$$

Beides sind Modelle von φ, der Schnitt $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2 \colon X \mapsto 0, Y \mapsto 0, Z \mapsto 1$ jedoch nicht. Da Horn-Formeln unter Schnitt abgeschlossen sind, kann φ nicht äquivalent zu einer Horn-Formel sein.

(d) Beweisen oder widerlegen Sie *semantisch* (d.h. *nicht* mittels Ableitung im Sequenzenkalkül), dass die folgende Schlussregel korrekt ist:

$$\frac{\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \;\Rightarrow\; \Delta}{\forall x\, \varphi(x) \;\Rightarrow\; \exists x\, \neg\psi(x), \Delta}$$

Lösung (4 Punkte):

Die Schlussregel ist korrekt.

Beweis: Sei die Prämisse gültig. Wir wollen zeigen, dass dann auch die Konklusion gültig ist. Sei $\mathfrak{A}$ Modell von $\forall x \varphi(x)$. Falls $\mathfrak{A} \models \exists x \neg\psi(x)$, so ist nichts mehr zu zeigen. Andernfalls gibt es kein $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \neg\psi(a)$. Also gilt $\mathfrak{A} \models \psi(a)$ für alle $a \in A$. Nach Annahme gilt außerdem $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$ für alle $a \in A$, insgesamt also $\mathfrak{A} \models \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$. Damit ist die Prämisse anwendbar und es folgt, dass $\mathfrak{A} \models \delta$ für ein $\delta \in \Delta$. Somit ist gezeigt, dass die Konklusion gültig ist.

Aufgabe 3 15 Punkte

(a) Formalisieren Sie die folgenden Eigenschaften von *gerichteten* Graphen $\mathfrak{G} = (V, E)$ durch eine prädikatenlogische Formel. Die Korrektheit der Formeln muss nicht bewiesen werden.

(i) Es gibt einen Knoten, der eine Kante zu allen anderen Knoten hat.

Lösung (2 Punkte):

$\exists x \forall y (x \neq y \rightarrow Exy)$

(ii) Jeder Knoten, der keine Schlinge (Kante zu sich selbst) hat, hat genau eine ausgehende Kante.

Lösung (2 Punkte):

$\forall x (\neg Exx \rightarrow \exists y (Exy \wedge \forall z (Exz \rightarrow y = z)))$

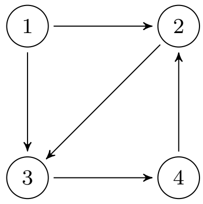
(iii) Für je zwei verschiedene Knoten x, y gilt: Wenn ein Weg beliebiger Länge von x zu y existiert, dann gibt es auch eine direkte Kante von x zu y.

Lösung (3 Punkte):

$\forall x \forall y (x \neq y \wedge \exists z (Exz \wedge Ezy) \ \rightarrow \ Exy)$

Bemerkung: Die Formel fordert, dass die Kantenrelation transitiv ist (d.h. wenn ein Weg $x \rightarrow y \rightarrow z$ existiert, dann auch eine Kante $x \rightarrow z$). Das ist äquivalent zur geforderten Bedingung.

(b) Betrachten Sie den Graphen $\mathfrak{G} = (\{1, 2, 3, 4\}, E^{\mathfrak{G}})$, dessen Kantenrelation Sie folgendem Bild entnehmen können. Gilt $\mathfrak{G} \models \psi_i$ für $i = 1, 2$? Begründen Sie Ihre Antwort.



(i) $\psi_1 = \forall x \exists y\, Eyx$

Lösung (2 Punkte):

Nein. Die Formel fordert, dass jeder Knoten (x) einen Vorgänger (y) hat. In $\mathfrak{G}$ *hat Knoten 1 jedoch keinen Vorgänger.*

(ii) $\psi_2 = \exists y \forall x (x \neq y \rightarrow (Exy \vee \exists z (Exz \wedge Ezy)))$

Lösung (3 Punkte):

Ja. Die Formel fordert, dass es einen Knoten y gibt, sodass jeder andere Knoten (x) direkt oder über einen Zwischenknoten (z) mit y verbunden ist. Das ist in $\mathfrak{G}$ *der Fall, z.B. für Knoten 3 (über die Wege* $1 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 3$, $4 \rightarrow 2 \rightarrow 3$*).*

(c) Betrachten Sie die Struktur $(A, \circ)$, wobei $A = \{a, b, c\}$ und $\circ$ eine zweistellige Funktion ist, die der beistehenden Tabelle entnommen werden kann (z.B. gilt $a \circ b = b$). Gilt $(A, \circ) \models \forall x((x \circ x) \circ x = x)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	c	a	b
c	c	b	a

Lösung (3 Punkte):

Ja. Auf der Diagonalen steht nur a, d.h. $x \circ x = a$ *für alle* $x \in A$*. Außerdem gilt* $a \circ x = x$ *für alle* $x \in A$ *gemäß der ersten Zeile. Insgesamt gilt also* $(x \circ x) \circ x = x$ *für alle* $x \in A$*.*

Aufgabe 4 14 Punkte

(a) Geben Sie die Aussage des Isomorphielemmas wieder.

Lösung (2 Punkte):

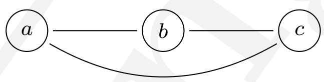
Wenn $\pi\colon \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}$ *ein Isomorphismus von* τ*-Strukturen ist, dann gilt für alle* $\mathrm{FO}(\tau)$*-Formeln* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *und alle* $a_1, \ldots, a_n \in A$*:*

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \quad \textit{gdw.} \quad \mathfrak{B} \models \varphi(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n)).$$

(b) Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, ob die angegebene Relation in der gegebenen Struktur elementar definierbar ist. Wenn Sie Automorphismen benutzen, genügt es, diese anzugeben. Sie müssen nicht formal beweisen, dass eine Abbildung ein Automorphismus ist.

(i) Die einstellige Relation $R = \{a, c\}$ in folgendem ungerichteten Graphen $\mathfrak{G} = (V, E)$:

$\mathfrak{G}$:



Lösung (3 Punkte):

Nicht definierbar. Die Abbildung $\pi\colon a \mapsto b, b \mapsto c, c \mapsto a$ *ist ein Automorphismus von* $\mathfrak{G}$*. Angenommen,* $\varphi(x)$ *definiert* R*. Dann gilt* $\mathfrak{G} \models \varphi(a)$*. Nach Isomorphielemma gilt dann auch* $\mathfrak{G} \models \varphi(b)$*. Aber* $b \notin R$*, Widerspruch.*

(ii) Die einstellige Relation $\mathbb{N}$, d.h. die Menge der natürlichen Zahlen, in der Struktur $(\mathbb{Q}, +)$ (wobei $+$ die übliche Addition auf $\mathbb{Q}$ sei).

Lösung (3 Punkte):

Nicht definierbar. Die Abbildung $\pi\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, x \mapsto -x$ *ist ein Automorphismus von* $\mathbb{Q}$*. Jedoch ist* $42 \in \mathbb{N}$*, aber* $\pi(42) = -42 \notin \mathbb{N}$*. Nach dem Isomorphielemma kann die Menge* $\mathbb{N}$ *daher nicht elementar definierbar sein.*

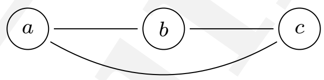
(iii) Die dreistellige Relation $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid z - y = y - x\}$ in $(\mathbb{Q}, +)$.

Lösung (3 Punkte):

Definierbar durch $\varphi(x, y, z) \coloneqq z + x = y + y$.

(c) Geben Sie eine Formel an, die eine zweistellige Relation R mit $|R| = 3$ im Graphen $\mathfrak{G}$ definiert.

$\mathfrak{G}$:



Lösung (3 Punkte):

$\varphi(x, y) \coloneqq x = y$

Aufgabe 5 14 Punkte

(a) Definieren Sie den Begriff der m-Äquivalenz zweier τ-Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$.

Lösung (2 Punkte):

Zwei τ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sind m-äquivalent (kurz $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$), wenn für alle $\mathrm{FO}(\tau)$*-Sätze φ mit Quantorenrang* $\mathrm{qr}(\varphi) \leq m$ *gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi$ gdw. $\mathfrak{B} \models \varphi$.*

(b) Sei τ endlich und relational und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen. Stellen Sie einen Bezug zu Ehrenfeucht-Fraissé-Spielen her, indem Sie folgenden Satz vervollständigen:

Es gilt $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$ genau dann, wenn ...

Lösung (2 Punkte):

... die Duplikatorin das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt.

(c) Sei $\sim_n$ die Äquivalenz modulo n, das heißt für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $a \sim_n b$ genau dann, wenn $n \mid a - b$. Wir betrachten die $\{\sim\}$-Strukturen $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, \sim_2)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{N}, \sim_5)$.

Geben Sie einen Satz mit minimalem Quantorenrang an, der zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unterscheidet. Es muss nicht bewiesen werden, dass der Quantorenrang minimal ist.

Lösung (4 Punkte):

$\psi := \exists x \exists y \exists z (\neg\, x \sim y \;\wedge\; \neg\, x \sim z \;\wedge\; \neg\, y \sim z)$

(d) Geben Sie eine Gewinnstrategie für einen der Spieler im Spiel $G_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ an. Dabei sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die unten angegebenen gerichteten Graphen. Es muss nicht bewiesen werden, dass es sich um eine Gewinnstrategie handelt.

$$\mathfrak{A}: \quad a \longrightarrow b \longrightarrow c$$

$$\mathfrak{B}: \quad 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4$$

Lösung (4 Punkte):

Gewinnstrategie für den Herausforderer

- *Zug 1: Wähle b in $\mathfrak{A}$. Duplikatorin antwortet mit i aus $\mathfrak{B}$.*
- *Zug 2: Wähle einen Knoten aus $\mathfrak{B}$, der mit i nicht über eine Kante verbunden ist: Für $i \in \{1, 2\}$ wähle 4, für $i \in \{3, 4\}$ wähle 1.*

Bemerkung: Die Duplikatorin kann nicht passend antworten, da in $\mathfrak{A}$ alle noch nicht gewählten Knoten direkt mit b verbunden sind.

(e) Geben Sie einen gerichteten Graphen $\mathfrak{G}'$ mit zwei Knoten an, sodass $\mathfrak{G} \equiv_1 \mathfrak{G}'$, aber $\mathfrak{G} \not\equiv_2 \mathfrak{G}'$. Dabei ist $\mathfrak{G}$ durch folgendes Diagramm vorgegeben:

$$\mathfrak{G}: \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

Lösung (2 Punkte):

Wir definieren $\mathfrak{G}'$ durch folgendes Diagramm:

$$\mathfrak{G}': \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] & \bullet \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Aufgabe 6 22 Punkte

(a) Geben Sie den Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik an.

Lösung (2 Punkte):

Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ *und* $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$*. Dann gilt:*

(i) $\Phi \models \psi$ *gdw. eine endliche Teilmenge* $\Phi_0 \subseteq \Phi$ *mit* $\Phi_0 \models \psi$ *existiert,*

(ii) Φ *ist erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge von* Φ *erfüllbar ist.*

(b) Vervollständigen Sie die Definition des Ableitungsbegriffs:
Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\sigma)$ eine Satzmenge und ψ ein Satz. Dann gilt $\Phi \vdash \psi$ genau dann, wenn …

Lösung (2 Punkte):

… es eine endliche Teilmenge $\Gamma \subseteq \Phi$ *gibt, sodass die Sequenz* $\Gamma \Rightarrow \psi$ *im Sequenzenkalkül ableitbar ist.*

(c) Geben Sie für folgende Klassen von Strukturen jeweils ein, wenn möglich endliches, Axiomensystem an. Sollten Sie kein (endliches) Axiomensystem angeben, so beweisen Sie, dass es kein (endliches) Axiomensystem gibt.

Dabei sei f ein einstelliges Funktions- und c ein Konstantensymbol. Weiter sei $<$ ein zweistelliges und P, RWTH einstellige Relationssymbole. Sie dürfen das aus der Vorlesung bekannte Axiomensystem $\Phi_<$ für lineare Ordnungen verwenden:

$$\Phi_< = \{\forall x\, \neg x < x,\ \forall x \forall y \forall z (x < y \land y < z \to x < z),\ \forall x \forall y (x < y \lor x = y \lor y < x)\}.$$

(i) Die Klasse aller linearen Ordnungen $(A, <)$ mit maximalem Element und $|A| > |\mathbb{N}|$.

Lösung (3 Punkte):

Nicht axiomatisierbar.

Beweis: Angenommen, Φ *wäre ein Axiomensystem für die Klasse. Dann ist* Φ *abzählbar (da die Signatur* $\{<\}$ *endlich ist) und hat mit* $(\mathbb{R}_{\leq 0}, <)$ *ein unendliches Modell. Nach dem absteigenden Satz von Löwenheim-Skolem hat* Φ *dann auch ein abzählbares Modell. Die Klasse enthält (wegen der Bedingung* $|A| > |\mathbb{N}|$*) aber nur überabzählbar große Modelle, Widerspruch.*

(ii) Die Klasse $\{(A, <, P) : (A, <)$ ist eine lineare Ordnung und für alle Elemente in P gibt es unendlich viele kleinere Elemente, die auch in P sind$\}$.

Lösung (3 Punkte):

Endlich axiomatisierbar durch $\Phi_< \cup \{\forall x(Px \rightarrow \exists y(y < x \wedge Py))\}$.

Bemerkung: Wenn für jedes $x \in P$ *ein kleineres* $y \in P$ *existiert, dann gibt es auch für* y *ein kleineres* $z \in P$ *und so weiter. Es gibt dann also bereits unendlich viele kleinere Elemente in* P.

(iii) Die Klasse aller zu $(\mathbb{Q}, <)$ isomorphen Strukturen.

Lösung (3 Punkte):

Nicht axiomatisierbar.

Beweis: $(\mathbb{Q}, <)$ *ist unendlich groß und nach VL ist die Isomorphieklasse einer unendlichen Struktur nicht axiomatisierbar.*

(iv) Die Klasse $\mathcal{K} = \{(A, f, c) : \text{Es gibt nur endlich viele } a \in A \text{ mit } f(a) = c\}$.

Lösung (4 Punkte):

Nicht axiomatisierbar.

Beweis: Angenommen, Φ *axiomatisiert die Klasse. Wir definieren*

$$\psi_n := \exists x_1 \ldots \exists x_n \Big(\bigwedge_{1 \le i < j \le n} x_i \neq x_j \wedge \bigwedge_{1 \le i \le n} f(x_i) = c \Big)$$

und betrachten $\Psi = \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$*. Dann fordert* Ψ*, dass es unendlich viele* $a \in A$ *mit* $f(a) = c$ *gibt. Also ist* $\Phi \cup \Psi$ *unerfüllbar. Nach KS gibt es dann eine endliche unerfüllbare Teilmenge von* $\Phi \cup \Psi$*. Diese hat die Gestalt* $\Phi_0 \cup \Psi_0$ *mit* $\Phi_0 \subseteq \Phi$ *und* $\Psi_0 \subseteq \Psi$*. Sei* n *maximal mit* $\psi_n \in \Psi_0$ *(oder* $n = 0$*, falls* $\Psi_0 = \varnothing$*). Wir betrachten die Struktur* $\mathfrak{A} = (\{1, \ldots, n+1\}, f^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}})$ *mit* $f^{\mathfrak{A}}(i) = c^{\mathfrak{A}} = 1$ *für alle* $i \in \{1, \ldots, n+1\}$*. Dann ist* $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ *und damit* $\mathfrak{A} \models \Phi$*, also auch* $\mathfrak{A} \models \Phi_0$*. Nach Wahl von* n *ist außerdem* $\mathfrak{A} \models \Psi_0$*. Widerspruch zur Unerfüllbarkeit von* $\Phi_0 \cup \Psi_0$*. Also ist* $\mathcal{K}$ *nicht axiomatisierbar.*

(v) Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, \mathrm{RWTH})$ mit $\mathrm{RWTH} = \{150\}$. Die Klasse aller zu $\mathfrak{A}$ elementar äquivalenten Strukturen.

Lösung (5 Punkte):

Die Klasse enthält genau die Strukturen mit unendlichem Universum und einelementiger Relation. Das lässt sich axiomatisieren durch

$$\Phi := \Phi_\infty \cup \{\underbrace{\exists x \forall y (\mathrm{RWTH}\, x \wedge (\mathrm{RWTH}\, y \to x = y))}_{\psi}\},$$

wobei $\Phi_\infty = \{\varphi_{\geq n} \mid n \in \mathbb{N}_{>0}\}$ *mit* $\varphi_{\geq n} = \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j$.

Die Klasse ist jedoch nicht endlich axiomatisierbar. Wir geben zwei mögliche Beweise an.

Variante 1*: Angenommen doch, dann gäbe es (wie aus der Übung bekannt) bereits eine endliche Teilmenge* $\Phi_0 \subseteq \Phi$*, die die Klasse axiomatisiert. Wir zeigen, dass das nicht der Fall ist. Sei dazu* $\Phi_0 \subseteq \Phi$ *eine beliebige endliche Teilmenge und sei* n *maximal mit* $\varphi_{\geq n} \in \Phi$ *(oder* $n = 0$*, falls* $\Phi = \varnothing$*). Sei* $\mathfrak{B} = (\{1, \dots, n+1\}, \{1\})$*. Da die Relation genau ein Element enthält, gilt* $\mathfrak{B} \models \psi$*. Nach Wahl von* n *folgt* $\mathfrak{B} \models \Phi_0$*. Jedoch ist* $\mathfrak{B}$ *nicht in der Klasse enthalten, da* $\varphi_{\geq n+2}$ *die Strukturen* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *trennt. Widerspruch.*

Variante 2*: Sei* $m \in \mathbb{N}_{>0}$ *beliebig und sei* $\mathfrak{B}_m = (\{0, \dots, m\}, \{0\})$*. Die Duplikatorin gewinnt das EF-Spiel* $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_m)$ *mit folgender Gewinnstrategie: Wenn* 150 *in* $\mathfrak{A}$ *oder* 0 *in* $\mathfrak{B}$ *gewählt wird, antworte mit dem jeweils anderen Element. Ansonsten antworte mit einem noch nicht gewählten Element, das nicht in der jeweiligen Relation liegt. Da beide Relationen einelementig sind und es in beiden Strukturen mindestens* m *Elemente gibt, die nicht in der Relation liegen, gewinnt die Duplikatorin auf diese Weise nach* m *Zügen. Die Strukturen* $\mathfrak{B}_m$ *sind (für alle* m*) nicht in der Klasse enthalten, da das Universum stets endlich ist. Da* m *beliebig war, folgt aus den Resultaten der VL, dass die Klasse nicht endlich axiomatisierbar ist.*

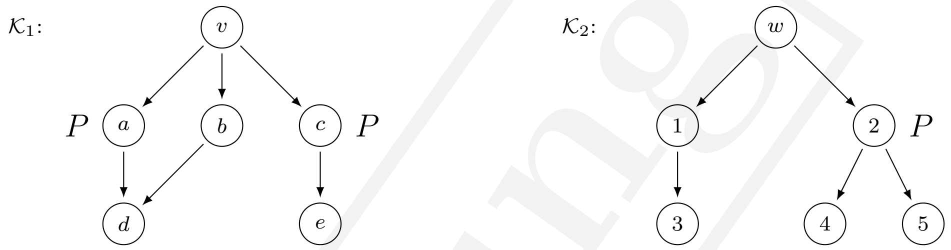
Aufgabe 7 15 Punkte

(a) Formulieren Sie den Satz über die Bisimulationsinvarianz der Modallogik.

Lösung (2 Punkte):

Seien $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ Kripkestrukturen und v, v' Zustände aus $\mathcal{K}$ bzw. $\mathcal{K}'$. Sei weiter ψ eine ML-Formel. Wenn $\mathcal{K}, v \models \psi$ und $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$, dann auch $\mathcal{K}', v' \models \psi$.

(b) Geben Sie eine Bisimulation Z an, die zeigt, dass $\mathcal{K}_1, v \sim \mathcal{K}_2, w$ gilt.



Lösung (4 Punkte):

$Z = \{(v, w), (a, 2), (c, 2), (b, 1), (d, 3), (d, 4), (d, 5), (e, 4), (e, 5)\}$

(c) Formulieren Sie folgende Aussagen als modallogische Formeln, oder zeigen Sie, dass dies nicht möglich ist.

(i) Wenn jeder Nachfolger des aktuellen Knotens einen mit P beschrifteten Nachfolger hat, dann ist auch der aktuelle Knoten mit P beschriftet.

Lösung (3 Punkte):

Lässt sich ausdrücken durch $\psi \coloneqq \Box\Diamond P \to P$.

(ii) Der aktuelle Knoten hat einen mit P beschrifteten Nachfolger, der genau zwei Nachfolger hat.

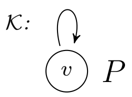
Lösung (4 Punkte):

Nicht möglich. Wir betrachten die folgenden Kripkestrukturen:

Dann gilt $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$, eine ML-Formel kann aufgrund der Bisimulationsinvarianz also nicht zwischen $\mathcal{K}, v$ und $\mathcal{K}', v'$ unterscheiden. Jedoch hat nur $\mathcal{K}, v$ die gewünschte Eigenschaft.

(d) Geben Sie ein Modell $\mathcal{K}, v$ der CTL-Formel $\mathsf{AGEX}P$ an.

Lösung (2 Punkte):



Bemerkung: Die Formel verlangt, dass auf jedem Pfad jederzeit gilt, dass es einen P-Nachfolger gibt. Hier gibt es nur einen Knoten, und dieser hat einen P-Nachfolger. Somit ist die Formel erfüllt.