Kapitel 3
Strukturen

Kontext und Ziele

Die zentralen Objekte, die in der Mathematik untersucht werden, sind Strukturen wie der Körper der reellen Zahlen oder der Ring der ganzen Zahlen, oder Klassen von Strukturen wie Gruppen, Graphen oder Vektorräume.

Viele wichtige Modelle der Informatik wie Transitionssysteme, endliche Automaten, Wörter und Sprachen, relationale Datenbanken, Wissensgraphen, neuronale Netze lassen sich ebenfalls als Strukturen beschreiben.

In diesem Kapitel führen wir einen allgemeinen Strukturbegriff ein, der all diese Strukturen aus Mathematik und Informatik umfasst.

Diese Strukturen bilden die Grundlage für die Semantik der Logik der 1. Stufe, die wir in den folgenden Kapiteln betrachten werden.

3.1 Symbolmengen und Strukturen

Definition 3.1

Eine Symbolmenge (auch Vokabular oder Signatur genannt) ist eine Menge σ von Relations- und Funktionssymbolen.

Jedes Symbol $S \in \sigma$ hat eine Stelligkeit (bzw. Arität, engl. arity)

$$\mathrm{stell}(S) \in \mathbb{N}$$

Ein Relations- bzw. Funktionssymbol S mit $\mathrm{stell}(S) = k$ nennen wir k-stelliges Relationssymbol bzw. k-stelliges Funktionssymbol.

Vereinbarung

In dieser Vorlesung nehmen nehmen wir immer an, dass Symbolmengen abzählbar sind.

Notation

- In diesem Kapitel bezeichnet σ immer eine Symbolmenge (ohne dass wir das jedesmal dazusagen).
- Üblicherweise bezeichnen wir Relationssymbole mit Großbuchstaben wie P, Q, R, E und Funktionssymbole mit Kleinbuchstaben f, g, h. Im Spezialfall 0-stelliger Funktionssymbole, die wir später als Konstantensymbole bezeichnen werden, verwenden wir häufig c, d.
- Gelegentlich verwenden wir als Relations- und Funktionssymbole auch Zeichen wie $\dot{\leq}$ (2-stelliges Relationssymbol) und $\dot{+}, \dot{*}$ (2-stellige Funktionssymbole). Wir deuten dann durch einen Punkt über dem Zeichen an, dass es sich um Symbol und nicht eine Relation bzw. Funktion handelt.

  Beispiel: $\dot{\leq}$ ist ein 2-stelliges Relationssymbol, $\leq$ bezeichnet die Kleinerrelation über $\mathbb{N}$.
- Die Stelligkeit eines Symbols deuten wir häufig an, indem wir sie mit Schrägstrich hinter das Symbol schreiben.

  Beispiel: Die Notation $R/2$ deutet an, dass R ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

Definition 3.2

Eine σ-Struktur ist ein Paar $\mathfrak{A} = (A, \mathfrak{a})$ bestehend aus

- einer nichtleeren Menge A, dem Universum (oder Träger) von $\mathfrak{A}$,
- einer Abbildung $\mathfrak{a}$ mit Definitionsbereich σ, die jedem k-stelligen Relationssymbol $R \in \sigma$ eine k-stellige Relation $\mathfrak{a}(R) \subseteq A^k$ und jedem k-stelligen Funktionssymbol $f \in \sigma$ eine k-stellige Funktion $\mathfrak{a}(f) : A^k \to A$ zuordnet.

In der Regel geben wir die "Interpretationsfunktion" $\mathfrak{a}$ nicht explizit an, sondern bezeichnen die Relationen $\mathfrak{a}(R)$ mit $R^{\mathfrak{A}}$ und die Funktionen $\mathfrak{a}(f)$ mit $f^{\mathfrak{A}}$.

Bemerkung 3.3

- Strukturen, deren Symbolmenge nur Relationssymbole enthält, nennt man relationale Strukturen.
- Strukturen, deren Symbolmenge nur Funktionssymbole enthält, nennt man Algebren.

Notation

- Wir beschreiben σ-Strukturen oft in Tupelschreibweise: $\mathfrak{A} = \big(A,\ (S^{\mathfrak{A}})_{S \in \sigma}\big)$.
- Falls $\sigma = \{S_1, \ldots, S_k\}$ endlich ist, schreiben wir auch $\mathfrak{A} = \big(A, S_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, S_k^{\mathfrak{A}}\big)$.
- Wir bezeichnen σ-Strukturen meistens mit Großbuchstaben in Frakturschrift $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$.
- Die Universen der Strukturen bezeichnen wir dann mit den entsprechenden lateinischen Großbuchstaben, also $A, B, C \ldots$.

Das Frakturalphabet:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{C}$	$\mathfrak{D}$	$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{F}$	$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{H}$	$\mathfrak{I}$	$\mathfrak{J}$	$\mathfrak{K}$	$\mathfrak{L}$	$\mathfrak{M}$

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
$\mathfrak{N}$	$\mathfrak{O}$	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{Q}$	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{S}$	$\mathfrak{T}$	$\mathfrak{U}$	$\mathfrak{V}$	$\mathfrak{W}$	$\mathfrak{X}$	$\mathfrak{Y}$	$\mathfrak{Z}$

3.2 Beispiele

Für die leere Signatur $\sigma := \emptyset$ bestehen σ-Strukturen nur aus ihrem Universum, sind also einfach nichtleere Mengen.

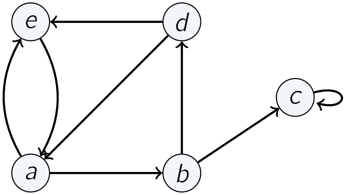
Beispiel 3.4

Die Menge der natürlichen Zahlen können wir als die $\emptyset$-Struktur $\mathfrak{A}$ mit Universum $A = \mathbb{N}$ auffassen.

In diesem Kapitel bezeichnet E immer ein zweistelliges Relationssymbol.

- Ein gerichteter Graph (kurz: Digraph) ist eine $\{E\}$-Struktur $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$. Dabei ist das Universum G die Knotenmenge des Graphen und die Relation $E^{\mathfrak{G}} \subseteq G^2$ die Kantenrelation.
- Ein (ungerichteter) Graph ist eine $\{E\}$-Struktur $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$, bei der die Relation $E^{\mathfrak{G}}$ symmetrisch und irreflexiv ist.

Beispiel 3.5



Digraph $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$ mit

$$\begin{aligned} G &= \{a, b, c, d, e\}, \\ E^{\mathfrak{G}} &= \big\{(a, b), (a, e), (b, c), (b, d), \\ &\qquad (c, c), (d, a), (d, e), (e, a)\big\}. \end{aligned}$$

Ergänzungen zu Seite 3.10

- Üblicherweise verwendet man für Digraphen und Graphen Notationen wie $G = (V, E)$ statt $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$. Wir bleiben aber hier bei unserer Standardnotation für Strukturen.
- Bei (ungerichteten) Graphen wird die Kantenmenge oft als Menge von ungeordneten Paaren aufgefasst, während unsere Kantenrelation eine Menge von geordneten Paaren ist, bei der ein ungeordnetes Paar $\{u, v\}$ durch die beiden geordneten Paare $(u, v), (v, u)$ repräsentiert wird.
- Man beachte, dass in ungerichteten Graphen keine Schleifen (Kanten von einem Knoten zu sich selbst) und keine Mehrfachkanten zwischen den gleichen Knoten erlaubt sind. Man spricht üblicherweise von einfachen Graphen.

  In Digraphen sind Schleifen erlaubt, aber keine Mehrfachkanten.

Exkurs: Eigenschaften zweistelliger Relationen

Definition 3.6

Sei $\mathscr{R} \subseteq A^2$ eine 2-stellige Relation über einer Menge A.

(1) $\mathscr{R}$ ist reflexiv, wenn für alle $a \in A$ gilt: $(a, a) \in \mathscr{R}$.
$\mathscr{R}$ ist irreflexiv, wenn für alle $a \in A$ gilt: $(a, a) \notin \mathscr{R}$.

(2) $\mathscr{R}$ ist symmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$ gilt: $(a, b) \in \mathscr{R} \implies (b, a) \in \mathscr{R}$.
$\mathscr{R}$ ist antisymmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$, $a \neq b$ gilt: $(a, b) \in \mathscr{R} \implies (b, a) \notin \mathscr{R}$.

(3) $\mathscr{R}$ ist transitiv, wenn für alle $a, b, c \in A$ gilt: $(a, b) \in \mathscr{R}$ und $(b, c) \in \mathscr{R} \implies (a, c) \in \mathscr{R}$.

(4) $\mathscr{R}$ ist konnex, wenn für alle $a, b \in A$, $a \neq b$ gilt: $(a, b) \in \mathscr{R}$ oder $(b, a) \in \mathscr{R}$.

(5) $\mathscr{R}$ ist eine partielle Ordnung, wenn $\mathscr{R}$ reflexiv, antisymmetrisch, und transitiv ist.
$\mathscr{R}$ ist eine totale Ordnung (oder lineare Ordnung), wenn $\mathscr{R}$ eine konnexe partielle Ordnung ist.

(6) $\mathscr{R}$ ist eine Äquivalenzrelation, wenn $\mathscr{R}$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Sei $\dot{\leq}$ ein zweistelliges Relationssymbol. Eine $\{\dot{\leq}\}$-Struktur $\mathfrak{A} = (A, \dot{\leq}^{\mathfrak{A}})$ ist eine partiell geordnete Menge (engl. partially ordered set, poset), wenn $\dot{\leq}^{\mathfrak{A}}$ eine partielle Ordnung auf A ist.

$\mathfrak{A}$ ist eine total geordnete Menge, wenn $\dot{\leq}^{\mathfrak{A}}$ eine totale Ordnung auf A ist.

Beispiele 3.7

(1) Die $\{\dot{\leq}\}$-struktur $\mathfrak{A}$ mit Universum $A = \mathbb{N}$ und Relation $\dot{\leq}^{\mathfrak{A}} = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \leq b\}$ ist eine total geordnete Menge.

(2) Die $\{\dot{\leq}\}$-struktur $\mathfrak{B}$ mit Universum $B = \mathbb{N}$ und Relation $\dot{\leq}^{\mathfrak{B}} = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \text{ teilt } b\}$ ist eine partiell geordnete Menge.

Nullstellige Relationen und Aussagenlogische Interpretationen

Nullstellige Relationen

- Für jede Menge A hat A^0 genau eine Element, das leere Tupel $()$.
- Es gibt also genau zwei nullstellige Relationen: $\emptyset$ (die leere Menge) und $\{()\}$ (die Menge, die aus dem leeren Tupel besteht).
- Identifizieren wir $\emptyset$ mit 0 („falsch“) und $\{()\}$ mit 1 („wahr“), so können wir nullstellige Relationen als Aussagen (im Sinne der Aussagenlogik) auffassen und damit 0-stellige Relationssymbole als Aussagensymbole.

Aussagenlogische Interpretationen als Strukturen

- Eine aussagenlogische Symbolmenge ist eine Symbolmenge, die nur aus nullstelligen Relationssymbolen besteht.
- Eine aussagenlogische Interpretation ist eine σ-Struktur für eine aussagenlogische Symbolmenge σ.

Nullstellige Funktionen und Konstanten

Nullstellige Funktionen

Sei A eine nichtleere Menge.

- Weil $A^0 = \{()\}$, ist eine nullstellige Funktion $f : A^0 \to A$ ist durch einen einzigen Wert bestimmt: $f(())$, den Wert des leeren Tupels.
- Wir identifizieren deswegen die nullstellige Funktion $f : A^0 \to A$ mit dem Wert $f(()) \in A$ und nennen 0-stellige Funktionen auch Konstanten.
- Nullstellige Funktionssymbole nennen wir auch Konstantensymbole, und wir bezeichnen sie typischerweise mit c, d, e.
- Gelegentlich bezeichnen wir Konstantensymbole auch mit Symbolen wie $\dot{0}$, $\dot{1}$. Wir verwenden einen Punkt, um anzudeuten, dass es sich nicht um Zahlen, sondern um Konstantensymbole handelt.

Ergänzungen zu Seite 3.14

Wenn wir die Interpretation eines Konstantensymbols $c \in \sigma$ in einer σ-Struktur $\mathfrak{A}$ festlegen, so geben wir einfach den Wert $c^{\mathfrak{A}} := a \in A$ an, anstatt zu sagen, dass $c^{\mathfrak{A}} : A^0 \to A$ die nullstellige Funktion mit $c^{\mathfrak{A}}\big(()\big) := a$ ist.

Obwohl wir künftig meistens explizit von Konstantensymbolen sprechen, ist es manchmal auch nützlich, sich zu erinnern, dass Konstantensymbole eigentlich spezielle Funktionssymbole sind.

Sei $\sigma_{\text{Grp}} := \{\dot{\circ}, e\}$, wobei $\dot{\circ}$ ein zweistelliges Funktionssymbol ist e ein Konstantensymbol.
Für $\dot{\circ}$ verwenden wir Infixschreibweise.

- Ein Monoid ist eine σ_{Grp}-Struktur $\mathfrak{M}$, die für alle $m, n, p \in M$ folgende Axiome erfüllt:

$$m \,\dot{\circ}^{\mathfrak{M}} (n \,\dot{\circ}^{\mathfrak{M}}\, p) = (m \,\dot{\circ}^{\mathfrak{M}}\, n) \,\dot{\circ}^{\mathfrak{M}}\, p \qquad \text{(Assoziativität von } \dot{\circ}^{\mathfrak{M}}\text{)}$$

$$m \,\dot{\circ}^{\mathfrak{M}}\, e^{\mathfrak{M}} = e^{\mathfrak{M}} \,\dot{\circ}^{\mathfrak{M}}\, m = m \qquad (e^{\mathfrak{M}} \text{ ist neutrales Element).}$$

- Eine Gruppe ist ein Monoid $\mathfrak{G}$, für den für alle $g \in G$ ein $g' \in G$ existiert, so dass

$$g \,\dot{\circ}^{\mathfrak{G}}\, g' = e^{\mathfrak{G}} \qquad \text{(Inverses).}$$

Beispiel 3.8

Für jedes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist die σ_{Grp}-Struktur $\mathfrak{Z}_n$ mit Universum $Z_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$, Verknüpfung $\dot{\circ}^{\mathfrak{Z}_n} : Z_n^2 \to Z_n$ definiert durch

$$i \,\dot{\circ}^{\mathfrak{Z}_n}\, j \;:=\; i + j \bmod n \;=\; \text{Rest von } i + j \text{ by ganzzahliger Division durch } n$$

und Konstante $e^{\mathfrak{Z}_n} := 0$ eine Gruppe.

Beispiel 3.9

Sei Σ ein Alphabet (nichtleere Menge). Dann ist die σ_{Grp}-Struktur $\mathfrak{M}_\Sigma$ mit Universum $M_\Sigma := \Sigma^*$ (die Menge aller Wörter über Σ), Verknüpfung $\dot{\circ}^{\mathfrak{M}_\Sigma} : M_\Sigma^2 \to M_\Sigma$ definiert durch

$$v \,\dot{\circ}^{\mathfrak{M}_\Sigma}\, w \;:=\; vw \;=\; \text{Verkettung von } v \text{ und } w$$

und Konstante $e^{\mathfrak{M}_\Sigma} := \varepsilon$ (leeres Wort) eine Monoid.

Sei $\sigma_{\text{Ar}} := \{\dot{+}, \dot{*}, \dot{0}, \dot{1}\}$, wobei $\dot{+}, \dot{*}$ zweistellige Funktionssymbole sind und $\dot{0}, \dot{1}$ Konstantensymbole. Für $\dot{+}, \dot{*}$ verwenden wir Infixschreibweise.

Ähnlich wie Monoide und Gruppen als σ_{Grp}-Strukturen können wir Ringe und Körper als σ_{Ar}-Strukturen axiomatisieren.

Beispiele 3.10

- Der Körper der reellen Zahlen ist die σ_{Ar}-Struktur $\mathfrak{R}$ mit Universum $R := \mathbb{R}$, Funktionen $\dot{+}^{\mathfrak{R}} := +$ (Addition über $\mathbb{R}$), $\dot{*}^{\mathfrak{R}} := \cdot$ (Multiplikation über $\mathbb{R}$), und $\dot{0}^{\mathfrak{R}} := 0$, $\dot{1}^{\mathfrak{R}} := 1$.

Ähnlich definieren wir folgende σ_{Ar}-Strukturen:

- den Ring der ganzen Zahlen $\mathfrak{Z}$ mit Universum $\mathbb{Z}$,
- das Standardmodell der Arithmetik $\mathfrak{N}$ mit Universum $\mathbb{N}$,
- für jede Primzahlpotenz q den q-elementigen Körper $\mathfrak{F}_q$.

Man beachte, dass das Standardmodell der Arithmetik weder ein Körper noch ein Ring ist

Der 2-elementige Körper $\mathfrak{F}_2$ ist die σ_{Ar}-Struktur mit

- Universum $F_2 := \{0, 1\}$,
- Addition $\dot{+}^{\mathfrak{F}_2} : \{0, 1\}^2 \to \{0, 1\}$ definiert durch $\begin{array}{c|cc} \dot{+}^{\mathfrak{F}_2} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$,
- Multiplikation $\dot{*}^{\mathfrak{F}_2} : \{0, 1\}^2 \to \{0, 1\}$ definiert durch $\begin{array}{c|cc} \dot{*}^{\mathfrak{F}_2} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$,
- Konstanten $\dot{0}^{\mathfrak{F}_2} := 0$, $\dot{1}^{\mathfrak{F}_2} := 1$.

Sei $\sigma_{\text{BA}} := \{\dot\sqcap, \dot\sqcup, \dot\sim, \dot 0, \dot 1\}$, wobei $\dot\sqcap, \dot\sqcup$ zweistellige Funktionssymbole (Infixschreibweise), $\dot\sim$ ein einstelliges Funktionssymbol, und $\dot 0, \dot 1$ Konstantensymbole sind.

Boolesche Algebren sind σ_{BA}-Strukturen, die gewisse Axiome erfüllen.

Beispiel 3.11

Die zweielementige boolesche Algebra ist die σ_{BA}-Struktur $\mathfrak{B}_2$ mit

- Universum $B_2 := \{0, 1\}$,
- $\dot\sqcap^{\mathfrak{B}_2} : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ definiert durch $\begin{array}{c|cc} \dot\sqcap^{\mathfrak{B}_2} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$,
- $\dot\sqcup^{\mathfrak{B}_2} : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ definiert durch $\begin{array}{c|cc} \dot\sqcup^{\mathfrak{B}_2} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$,
- $\dot\sim^{\mathfrak{B}_2} : \{0,1\} \to \{0,1\}$ definiert durch $\dot\sim^{\mathfrak{B}_2}(0) := 1$, $\dot\sim^{\mathfrak{B}_2}(1) := 0$,
- $\dot 0^{\mathfrak{B}_2} := 0$, $\dot 1^{\mathfrak{B}_2} := 1$.

Beispiel 3.12

Sei M eine Menge. Die Potenzmengenalgebra über M ist die σ_{BA}-Struktur $\mathfrak{P}_M$ mit

- Universum $P_M := 2^M = \{N \mid N \subseteq M\}$,
- $\dot{\sqcap}^{\mathfrak{P}_M} : (2^M)^2 \to 2^M$ definiert durch $N \dot{\sqcap}^{\mathfrak{P}_M} N' := N \cap N'$,
- $\dot{\sqcup}^{\mathfrak{P}_M} : (2^M)^2 \to 2^M$ definiert durch $N \dot{\sqcup}^{\mathfrak{P}_M} N' := N \cup N'$,
- $\dot{\sim}^{\mathfrak{P}_M} : 2^M \to 2^M$ definiert durch $\dot{\sim}^{\mathfrak{P}_M}(N) := M \setminus N$,
- $0^{\mathfrak{P}_M} := \emptyset$, $1^{\mathfrak{P}_M} := M$.

Dann ist $\mathfrak{P}_M$ für alle Mengen M eine Boolesche Algebra.

Wörter als Strukturen

Sei Σ ein endliches, nicht-leeres Alphabet. Für jedes $a \in \Sigma$ sei P_a ein einstelliges Relationssymbol, und es sei

$$\sigma_\Sigma \quad := \quad \{\dot{\leq}\} \cup \{P_a \mid a \in \Sigma\}.$$

Für jedes Wort $w := a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$ mit $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$ sei $\mathfrak{A}_w$ folgende σ_Σ-Struktur:

- Das Universum ist $A_w := \{0, \ldots, n\}$.
- $\dot{\leq}^{\mathfrak{A}_w}$ ist die natürliche lineare Ordnung auf A_w, d.h.,

$$\dot{\leq}^{\mathfrak{A}_w} = \big\{(i,j) \bigm| 0 \leq i \leq j \leq n\big\}.$$

- Für jedes $a \in \Sigma$ ist $P_a^{\mathfrak{A}_w} := \big\{i \in [n] \bigm| a_i = a\big\}$.

Ergänzungen zu Seite 3.20

Der einzige Grund, 0 zum Universum einer Wortstruktur $\mathfrak{A}_w$ hinzuzunehmen, besteht darin, dass wir auf diese Weise auch das leere Wort durch eine Struktur mit nichtleerem Universum repräsentieren können.

Sei $\Sigma := \{a, b, c\}$

Beispiel 3.13

Sei ε das leere Wort über dem Alphabet Σ. Dann ist $\mathfrak{A}_\varepsilon$ folgende σ_Σ-Struktur:

- $A_\varepsilon = \{0\}$,
- $\dot{\leq}^{\mathfrak{A}_\varepsilon} = \{(0, 0)\}$,
- $P_a^{\mathfrak{A}_\varepsilon} = P_b^{\mathfrak{A}_\varepsilon} = P_c^{\mathfrak{A}_\varepsilon} = \emptyset$.

Beispiel 3.14

Für $w := abacaba$ ist $\mathfrak{A}_w$ die folgende σ_Σ-Struktur:

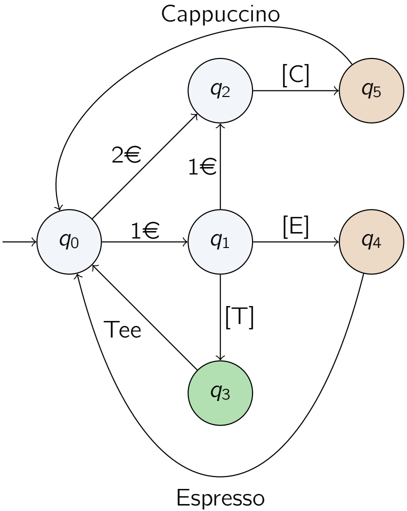
- $A_w = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
- $\dot{\leq}^{\mathfrak{A}_w} = \{(0, 0), (0, 1), \dots, (0, 7), (1, 1), (1, 2), \quad \dots \quad, (7, 7)\}$,
- $P_a^{\mathfrak{A}_w} = \{1, 3, 5, 7\}$, $\quad P_b^{\mathfrak{A}_w} = \{2, 6\}$, $\quad P_c^{\mathfrak{A}_w} = \{4\}$.

- Sei σ_A eine Menge von zweistelligen Relationssymbolen, die wir als Aktionen bezeichnen und σ_P eine Menge von einstelligen Relationssymbolen, die wir als Propositionen oder Eigenschaften bezeichnen.
- Ein Transitionssystem über (σ_A, σ_P) ist eine $(\sigma_A \cup \sigma_P)$-Struktur $\mathfrak{T}$.
- Die Elemente des Universums T von $\mathfrak{T}$ bezeichnen wir als Zustände des Systems.
- Die Tripel (s, R, t), wobei $(s, t) \in R^{\mathfrak{T}}$ für ein $R \in \sigma_A$, bezeichnen wir als die Übergänge oder Transitionen des Systems.
- Sei c ein Konstantensymbol. Ein Transitionssystem mit Anfangszustand über (σ_A, σ_P) ist eine $(\sigma_A \cup \sigma_P \cup \{c\})$-Struktur $\mathfrak{T}$. Den Zustand $c^{\mathfrak{T}}$ bezeichnen wir als den Anfangszustand des Systems.

Ergänzungen zu Seite 3.22

Nichtdeterministische endliche Automaten (NFAs) sind Transitionssysteme mit Anfangszustand, bei denen die Aktionen den Zeichen des Eingabealphabets entsprechen und bei denen wir eine Eigenschaft "Endzustand" haben.

Beispiel 3.15 (Getränkeautomat)



- Aktionen $\sigma_A = \{ R_{1€}, R_{2€}, R_{[C]}, R_{[E]}, R_{[T]}, R_{\text{Cappuccino}}, R_{\text{Espresso}}, R_{\text{Tee}} \}$,
- Eigenschaften $\sigma_P = \{ P_{\text{Kaffee}}, P_{\text{Tee}} \}$,

Transitionssystem $\mathfrak{T}$ mit Anfangszustand über (σ_A, σ_P):

- $T = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$,
- $R^{\mathfrak{T}}_{1€} = \{(q_0, q_1), (q_1, q_2)\}$, $R^{\mathfrak{T}}_{2€} = \{(q_0, q_2)\}$, $R^{\mathfrak{T}}_{[C]} = \{(q_2, q_5)\}$, $R^{\mathfrak{T}}_{[E]} = \{(q_1, q_4)\}$, $R^{\mathfrak{T}}_{[T]} = \{(q_1, q_3)\}$, $R^{\mathfrak{T}}_{\text{Cappuccino}} = \{(q_5, q_0)\}$, $R^{\mathfrak{T}}_{\text{Espresso}} = \{(q_4, q_0)\}$, $R^{\mathfrak{T}}_{\text{Tee}} = \{(q_3, q_0)\}$,
- ${P_{\text{Kaffee}}}^{\mathfrak{T}} = \{q_4, q_5\}$, ${P_{\text{Tee}}}^{\mathfrak{T}} = \{q_3\}$,
- Anfangszustand $c^{\mathfrak{T}} = q_0$.

Ergänzungen zu Seite 3.23

Informelle Beschreibung des Transitionssystems

Getränkeautomat, der Tee, Espresso, und Cappuccino verkauft.

- Tee und Espresso kosten je 1€, Cappuccino kostet 2€.
- Die Nutzerin kann entweder 1€ oder 2€ einwerfen.
- Wirft sie 2€ ein, so kann sie die Taste [C] drücken, und erhält einen Cappuccino.
- Wirft sie 1€ ein, so kann sie entweder die Taste [T] drücken und erhält einen Tee, oder sie kann die Taste [E] drücken und erhält einen Espresso, oder sie kann einen weiteren Euro einwerfen und dann die Taste [C] drücken, dann erhält sie einen Cappuccino.

Relationale Datenbanken

- Relationale Datenbanken bestehen aus endlich vielen endlichen Tabellen.
- Jede solche Tabelle lässt sich als Relation auffassen, die Zeilen der Tabelle entsprechen dabei den Tupeln in der Relation.
- Eine relationale Datenbank entspricht dann einer Struktur, deren Universum aus allen potentiellen Einträgen in den Zellen der Tabellen besteht, und die für jede Tabelle in der Datenbank eine Relation enthält.

Beispiel 3.16 (Kinodatenbank)

Kino			
Name	Adresse	Stadtteil	Telefonnummer
Babylon	Dresdner Str. 126	Kreuzberg	030 61 60 96 93
Casablanca	Friedenstr. 12-13	Adlershof	030 67 75 75 2
Filmtheater am Friedrichshain	Bötzowstr. 1-5	Prenzlauer Berg	030 42 84 51 88
Kino International	Karl-Marx-Allee 33	Mitte	030 24 75 60 11
Moviemento	Kotbusser Damm 22	Kreuzberg	030 692 47 85
Urania	An der Urania 17	Schöneberg	030 21 89 09 1

Beispiel (Forts.)

Film		
Name	Regisseur	Schauspieler
Alien	Ridley Scott	Sigourney Weaver
Blade Runner	Ridley Scott	Harrison Ford
Blade Runner	Ridley Scott	Sean Young
Brazil	Terry Gilliam	Jonathan Pryce
Brazil	Terry Gilliam	Kim Greist
Casablanca	Michael Curtiz	Humphrey Bogart
Casablanca	Michael Curtiz	Ingrid Bergmann
Gravity	Alfonso Cuaron	Sandra Bullock
Gravity	Alfonso Cuaron	George Clooney
Monuments Men	George Clooney	George Clooney
Monuments Men	George Clooney	Matt Damon
Resident Evil	Paul Anderson	Milla Jovovich
Terminator	James Cameron	Arnold Schwarzenegger
Terminator	James Cameron	Linda Hamilton
Terminator	James Cameron	Michael Biehn
...	...	...

Programm		
Kino	Film	Zeit
Babylon	Casablanca	17:30
Babylon	Gravity	20:15
Casablanca	Blade Runner	15:30
Casablanca	Alien	18:15
Casablanca	Blade Runner	20:30
Casablanca	Resident Evil	20:30
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	20:00
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	21:30
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	23:00
Kino International	Casablanca	18:00
Kino International	Brazil	20:00
Kino International	Brazil	22:00
Moviemento	Gravity	17:00
Moviemento	Gravity	19:30
Moviemento	Alien	22:00
Urania	Monuments Men	17:00
Urania	Monuments Men	20:00

Beispiel (Forts.)

Symbolmenge

$$\sigma_{\text{Kino}} := \{R_{\text{Kino}}/4, R_{\text{Film}}/3, R_{\text{Prog}}/3\} \cup \{c_x \mid x \in \Sigma^*_{\text{UTF8}}\}.$$

Hier bezeichnet Σ_{UTF8} das UTF8-Alphabet. Wir nehmen an, dass alle Einträge in der Datenbank Wörter über diesem Alphabet sind.

Beispiel (Forts.)

Datenbank als Struktur

Die Kinodatenbank wird dargestellt als folgende σ_{Kino}-Struktur $\mathfrak{D}$:

- Universum $D := \Sigma^*_{\text{UTF8}}$,
- Relationen:

$$
\begin{aligned}
R^{\mathfrak{D}}_{\text{Kino}} := \Big\{ & (\text{Babylon, Dresdner Str. 126, Kreuzberg, 030 61 60 96 93}),\\
& (\text{Casablanca, Friedenstr. 12-13, Adlershof, 030 67 75 75 2}),\\
& \ldots\\
& (\text{Urania, An der Urania 17, Schöneberg, 030 21 89 09 1})\Big\}\\
R^{\mathfrak{D}}_{\text{Film}} := \Big\{ & (\text{Alien, Ridley Scott, Sigourney Weaver}),\\
& (\text{Blade Runner, Ridley Scott, Harrison Ford}), \cdots\\
R^{\mathfrak{D}}_{\text{Prog}} := \Big\{ & (\text{Babylon, Casablanca, 17:30}), (\text{Babylon, Gravity, 20:15}), \cdots
\end{aligned}
$$

- Konstanten:

$$c^{\mathfrak{D}}_x := x \qquad \text{für alle } x \in \Sigma^*_{\text{UTF8}}.$$

3.3 Teile und Erweiterungen von Strukturen

Definition 3.17

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ σ-Strukturen. Dann ist $\mathfrak{A}$ eine Substruktur von $\mathfrak{B}$ (wir schreiben $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $A \subseteq B$,

(ii) Für alle $k \in \mathbb{N}$, alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$ und alle $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_k) \in A^k$ gilt:

$$\boldsymbol{a} \in R^{\mathfrak{A}} \quad \iff \quad \boldsymbol{a} \in R^{\mathfrak{B}}.$$

(iii) Für alle $k \in \mathbb{N}$, alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$ und alle $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_k) \in A^k$ gilt:

$$f^{\mathfrak{A}}(\boldsymbol{a}) = f^{\mathfrak{B}}(\boldsymbol{a}).$$

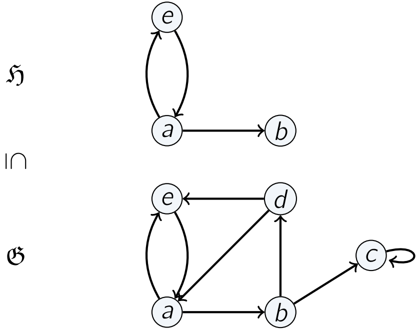
Wenn $\mathfrak{A}$ eine Substruktur von $\mathfrak{B}$ ist, nennen wir $\mathfrak{B}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{A}$.

Beispiel 3.18

Seien $\mathfrak{N}$ das Standardmodell der Arithmetik, $\mathfrak{Z}$ der Ring der ganzen Zahlen und $\mathfrak{R}$ der Körper der reellen Zahlen. Dann gilt

$$\mathfrak{N} \quad \subseteq \quad \mathfrak{Z} \quad \subseteq \quad \mathfrak{R}.$$

Beispiel 3.19



$\mathfrak{H} = (H, E^{\mathfrak{H}})$ mit

$$H = \{a, b, e\},$$
$$E^{\mathfrak{H}} = \big\{(a, b), (a, e), (e, a)\big\}.$$

$\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$ mit

$$G = \{a, b, c, d, e\},$$
$$E^{\mathfrak{G}} = \big\{(a, b), (a, e), (b, c), (b, d), (c, c), (d, a), (d, e), (e, a)\big\}.$$

Abgeschlossenen Mengen

Definition 3.20

Sei $\mathfrak{B}$ eine σ-Struktur und $A \subseteq B$. Dann ist A abgeschlossen in $\mathfrak{B}$, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$, alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$, und alle $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in A^k$ gilt: $f^{\mathfrak{B}}(\boldsymbol{a}) \in A$.

Beobachtung 3.21

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen mit $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Dann ist A abgeschlossen in $\mathfrak{B}$.

Lemma 3.22

Sei $\mathfrak{B}$ eine σ-Struktur, und sei $A \subseteq B$ abgeschlossen in $\mathfrak{B}$. Dann gibt es genau eine Substruktur $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ mit Universum A.

Ergänzungen zu Seite 3.32

Beweis des Lemmas als Übung.

Korollar 3.23

Sei $\mathfrak{B}$ eine relationale Struktur. Dann gibt es für jedes nichtleere $A \subseteq B$ genau eine Substruktur $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ mit Universum A.

Bemerkung 3.24

Bei relationalen Strukturen, insbesondere bei Graphen und Digraphen, ist ein schwächerer Substrukturbegriff üblich, bei dem die Bedingung (ii) durch folgende Bedingung ersetzt wird:

(ii') Für alle Relationssymbole $R \in \sigma$ gilt $R^{\mathfrak{A}} \subseteq R^{\mathfrak{B}}$.

Substrukturen in unserem Sinne nennt man dann induzierte Substrukturen.

Wir verwenden in dieser Vorlesung ausschließlich den in Definition 3.17 eingeführten Begriff von Substruktur (auch für relationale Strukturen).

Definition 3.25

Seien σ und τ Symbolmengen mit $\sigma \subseteq \tau$.

(1) Das σ-Redukt einer τ-Struktur $\mathfrak{B}$ ist die σ-Struktur $\mathfrak{B}{\restriction}_\sigma$ mit Universum $B{\restriction}_\sigma := B$ und $S^{\mathfrak{B}\restriction_\sigma} := S^{\mathfrak{B}}$ für jedes $S \in \sigma$.

Ist also $\mathfrak{B} = \big(B, (S^{\mathfrak{B}})_{S\in\tau}\big)$, so ist $\mathfrak{B}{\restriction}_\sigma = \big(B, (S^{\mathfrak{B}})_{S\in\sigma}\big)$.

(2) Eine τ-Struktur $\mathfrak{B}$ ist eine τ-Expansion einer σ-Struktur $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}{\restriction}_\sigma$.

Ergänzungen zu Seite 3.34

Bei Substrukturen bleibt also die Symbolmenge gleich und das Universum wird kleiner. Bei Redukten bleibt das Universum gleich und die Symbolmenge wird kleiner.

Beispiel 3.26

Das $\{\dot{+}, \dot{0}\}$-Redukt des Standardmodells der Arithmetik, das heißt, der $\{\dot{+}, \dot{*}, \dot{0}, \dot{1}\}$-Struktur $\mathfrak{N}$, ist die $\{\dot{+}, \dot{0}\}$-Struktur $\mathfrak{N}{\restriction}_{\{\dot{+},\dot{0}\}}$ mit Universum $\mathbb{N}$, in der $\dot{+}^{\mathfrak{N}{\restriction}_{\{\dot{+},\dot{0}\}}}$ die natürliche Addition auf $\mathbb{N}$ ist und $\dot{0}^{\mathfrak{N}{\restriction}_{\{\dot{+},\dot{0}\}}}$ die natürliche Zahl 0.

Man bezeichnet $\mathfrak{N}{\restriction}_{\{\dot{+},\dot{0}\}}$ als das Standardmodell der Presburger Arithmetik.

Beispiel 3.27

Ein geordneter Graph ist eine $\{E, \dot{\leq}\}$-Expansion $\mathfrak{G}_{\leq}$ eines Graphen $\mathfrak{G}$, in der $\dot{\leq}^{\mathfrak{G}_{\leq}}$ eine totale Ordnung auf G ist.

Beispiel 3.28

Der geordneter Körper der reellen Zahlen ist die $\{\dot{+}, \dot{*}, \dot{0}, \dot{1}, \dot{\leq}\}$-Expansion $\mathfrak{R}_{\leq}$ des Körpers der reellen Zahlen, in der $\dot{\leq}^{\mathfrak{R}_{\leq}}$ die natürliche Ordnung auf $\mathbb{R}$ ist.

3.4 Isomorphie

Strukturelle Gleichheit von Strukturen

Frage

Wann sind zwei σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ „im Wesentlichen gleich“?

Antwort

Wenn $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{A}$ entsteht, indem man die Elemente des Universums von $\mathfrak{A}$ umbenennt.

Begründung

Was wir mit dem Strukturbegriff erfassen wollen sind die Beziehungen zwischen den Elementen einer Struktur, nicht die Namen der Elemente.

Definition 3.29

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ σ-Strukturen. Ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist eine Abbildung $\pi : A \to B$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) π ist bijektiv.

(ii) Für alle $k \in \mathbb{N}$, alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$ und alle k-Tupel $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathfrak{A}} \iff \big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_k)\big) \in R^{\mathfrak{B}}.$$

(iii) Für alle $k \in \mathbb{N}$, alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$ und alle k-Tupel $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$ gilt:

$$\pi\big(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_k)\big) = f^{\mathfrak{B}}\big(\pi(a_1), \dots, \pi(a_k)\big).$$

Im Spezialfall $k = 0$ bedeutet dies für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$:

$$\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}.$$

Isomorphie

Notation

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ σ-Strukturen. Wir schreiben $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, um anzudeuten, dass π ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist.

Definition 3.30

Zwei σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen isomorph (wir schreiben: $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$), wenn es einen Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ gibt.

Beispiele: Mengen und Ordnungen

Beispiel 3.31

Seien A, B nichtleere Mengen. Dann sind die $\emptyset$-Strukturen $\mathfrak{A} := (A)$ und $\mathfrak{B} := (B)$ genau dann isomorph, wenn A und B gleichmächtig sind.

Beispiel 3.32

Sei $\sigma := \{\dot{\leq}, \min, \max\}$, wobei $\dot{\leq}$ ein 2-stelliges Relationssymbol ist und $\min, \max$ Konstantensymbole sind. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ die folgendermaßen definierten σ-Strukturen:

- $A := [4]$, $\dot{\leq}^{\mathfrak{A}}$ ist die natürliche Ordnung auf $[4]$, $\min^{\mathfrak{A}} := 1$, $\max^{\mathfrak{A}} := 4$.
- $B := \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$,

$$\dot{\leq}^{\mathfrak{B}} := \{(\diamondsuit,\diamondsuit),(\diamondsuit,\heartsuit),(\diamondsuit,\spadesuit),(\diamondsuit,\clubsuit),(\heartsuit,\heartsuit),(\heartsuit,\spadesuit),(\heartsuit,\clubsuit),(\spadesuit,\spadesuit),(\spadesuit,\clubsuit),(\clubsuit,\clubsuit)\},$$

$$\min^{\mathfrak{B}} := \diamondsuit, \ \max^{\mathfrak{B}} := \clubsuit.$$

Dann ist die Abbildung $\pi : A \to B$ mit $\pi(1) := \diamondsuit, \pi(2) := \heartsuit, \pi(3) := \spadesuit, \pi(4) := \clubsuit$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$

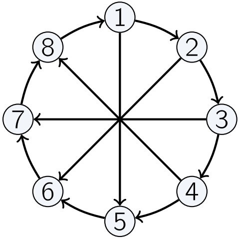
Ergänzungen zu Seite 3.40

Zur Erinnerung

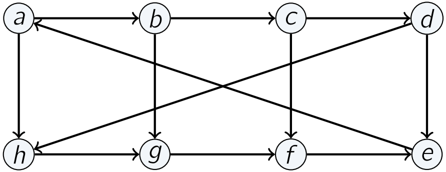
Zwei Mengen A, B sind gleichmächtig, wenn es eine Bijektion von A nach B gibt. Für endliche Mengen bedeutet das, dass A und B die gleich Anzahl von Elementen haben.

Beispiel 3.33

Seien $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ die beiden folgenden Digraphen:



$\mathfrak{G}$



$\mathfrak{H}$

Dann ist $\pi : A \to B$ mit

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(i)$	a	b	c	d	h	g	f	e

ein Isomorphismus von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$.

Beispiel: Boolesche Algebren

Beispiel 3.34

Sei $A = \{a\}$ eine beliebige einelementige Menge. Dann sind die boolesche Algebra $\mathfrak{B}_2$ und die Potenzmengenalgebra $\mathfrak{P}_A$ isomorph. Die Abbildung $\pi : \{0, 1\} \to 2^{\{a\}}$ mit $\pi(0) \coloneqq \emptyset$, $\pi(1) \coloneqq \{a\}$ ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{B}_2$ nach $\mathfrak{P}_A$.

Beweis, dass $\pi : \mathfrak{B}_2 \cong \mathfrak{P}_A$.

- Es gilt $2^A = \big\{\emptyset, \{a\}\big\}$, also ist π eine Bijektion.
- Für das zweistellige Funktionssymbol $\dot{\sqcap}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\pi\big(0 \,\dot{\sqcap}^{\mathfrak{B}_2}\, 0\big) &= \pi(0) = \emptyset = \emptyset \cap \emptyset = \pi(0) \,\dot{\sqcap}^{\mathfrak{P}_A}\, \pi(0),\\
\pi\big(0 \,\dot{\sqcap}^{\mathfrak{B}_2}\, 1\big) &= \pi(0) = \emptyset = \emptyset \cap \{a\} = \pi(0) \,\dot{\sqcap}^{\mathfrak{P}_A}\, \pi(1),\\
\pi\big(1 \,\dot{\sqcap}^{\mathfrak{B}_2}\, 0\big) &= \pi(0) = \emptyset = \{a\} \cap \emptyset = \pi(1) \,\dot{\sqcap}^{\mathfrak{P}_A}\, \pi(0),\\
\pi\big(1 \,\dot{\sqcap}^{\mathfrak{B}_2}\, 1\big) &= \pi(1) = \{a\} = \{a\} \cap \{a\} = \pi(1) \,\dot{\sqcap}^{\mathfrak{P}_A}\, \pi(1).
\end{aligned}
$$

- Für das zweistellige Funktionssymbol $\dot\sqcup$ gilt:

$$\begin{aligned}
\pi\big(0 \mathbin{\dot\sqcup}^{\mathfrak{B}_2} 0\big) &= \pi(0) = \emptyset = \emptyset \cup \emptyset = \pi(0) \mathbin{\dot\sqcup}^{\mathfrak{P}_A} \pi(0),\\
\pi\big(0 \mathbin{\dot\sqcup}^{\mathfrak{B}_2} 1\big) &= \pi(1) = \{a\} = \emptyset \cup \{a\} = \pi(0) \mathbin{\dot\sqcup}^{\mathfrak{P}_A} \pi(1),\\
\pi\big(1 \mathbin{\dot\sqcup}^{\mathfrak{B}_2} 0\big) &= \pi(1) = \{a\} = \{a\} \cup \emptyset = \pi(1) \mathbin{\dot\sqcup}^{\mathfrak{P}_A} \pi(0),\\
\pi\big(1 \mathbin{\dot\sqcup}^{\mathfrak{B}_2} 1\big) &= \pi(1) = \{a\} = \{a\} \cup \{a\} = \pi(1) \mathbin{\dot\sqcup}^{\mathfrak{P}_A} \pi(1).
\end{aligned}$$

- Für das einstellige Funktionssymbol $\dot\sim$ gilt:

$$\begin{aligned}
\pi\big(\dot\sim^{\mathfrak{B}_2}(0)\big) &= \pi(1) = \{a\} = A \setminus \emptyset = \dot\sim^{\mathfrak{P}_A}\big(\pi(0)\big),\\
\pi\big(\dot\sim^{\mathfrak{B}_2}(1)\big) &= \pi(0) = \emptyset = A \setminus \{a\} = \dot\sim^{\mathfrak{P}_A}\big(\pi(1)\big).
\end{aligned}$$

- Für die Konstantensymbole $0, 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\pi(0^{\mathfrak{B}_2}) &= \pi(0) = \emptyset = 0^{\mathfrak{P}_A},\\
\pi(1^{\mathfrak{B}_2}) &= \pi(1) = \{a\} = 1^{\mathfrak{P}_A}.
\end{aligned}$$

$\square$

Beobachtung 3.35

Seien A, B endliche Mengen und $\mathfrak{A} = (A, \dot{\leq}^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (B, \dot{\leq}^{\mathfrak{B}})$, wobei $\dot{\leq}^{\mathfrak{A}}$ und $\dot{\leq}^{\mathfrak{B}}$ totale Ordnungen auf A bzw. B sind. Dann gilt

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \quad \Longleftrightarrow \quad |A| = |B|.$$

Beispiel 3.36

Betrachte die total geordneten Mengen $\mathfrak{A} = (A, \dot{\leq}^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (B, \dot{\leq}^{\mathfrak{B}})$ mit

- $A = \mathbb{N}$ und $\dot{\leq}^{\mathfrak{A}}$ ist die natürliche Ordnung auf $\mathbb{N}$,
- $B = \mathbb{Z}$ und $\dot{\leq}^{\mathfrak{A}}$ ist die natürliche Ordnung auf $\mathbb{Z}$.

Dann sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ *nicht* isomorph, obwohl A und B gleichmächtig sind.

Beweis der Behauptung in Beispiel 3.36.

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ die Strukturen aus Beispiel 3.36.

Angenommen, $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$. Sei $n := \pi(0)$. Da π surjektiv ist, muss es ein $m \in \mathbb{N}$ geben, so dass $\pi(m) = n - 1$. Dann gilt $0 \mathrel{\dot{\leq}^{\mathfrak{A}}} m$, aber

$$\pi(0) = n \mathrel{\dot{\not\leq}^{\mathfrak{B}}} n - 1 = \pi(m).$$

Das ist ein *Widerspruch*. $\square$

Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation

Lemma 3.37

Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse aller σ-Strukturen.

Das heißt, für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ gilt:

(1) $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}$ *(Reflexivität),*

(2) $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \implies \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$ *(Symmetrie),*

(3) $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{C} \implies \mathfrak{A} \cong \mathfrak{C}$ *(Transitivität).*

Beweis.

Übung.