Prof. Dr. M. Grohe
E. Fluck, L. Härtel, T. Novotny

Übungsblatt 7 mit Lösungen

Abgabetermin: Montag, der 24. Juni 2024 um 14:30

Hausaufgabe 3 (Ableitbarkeit von Regeln) **2+2 Punkte**

Zeigen Sie dass für alle endlichen $\Gamma, \Delta \subset L(\sigma)$, alle $\varphi, \psi \in L(\sigma)$ und alle $\theta \in T(\sigma)$ die folgenden Regeln im Sequenzenkalkül der Logik 1. Stufe ableitbar sind.

a) Die "Elimination des Allquantors rechts":

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi\frac{\theta}{x}} \qquad (\forall\text{ER})$$

b)

$$\frac{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma, \exists x\psi \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x(\varphi \vee \psi) \vdash \Delta}$$

Hinweis: Überlegen Sie sich erst eine Regel zur Elimination des Existenzquantors links.

Lösung:

a) Die Ableitung sieht wie folgt aus:

1.	$\varphi\frac{\theta}{x} \vdash \varphi\frac{\theta}{x}$	(Vor)
2.	$\forall x\varphi \vdash \varphi\frac{\theta}{x}$	($\forall$L)
3.	$\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta, \varphi\frac{\theta}{x}$	(Erw)
4.	$\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi$	
5.	$\Gamma \vdash \Delta, \varphi\frac{\theta}{x}, \forall x\varphi$	(Erw)
6.	$\Gamma \vdash \Delta, \varphi\frac{\theta}{x}$	(S) auf 3,5.

b) Wir zeigen zuerst dass die "Elimination des Existenzquantors links" ableitbar ist:

$$\frac{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi\frac{\theta}{x} \vdash \Delta} \qquad (\exists\text{EL})$$

Die Ableitung dazu sieht wie folgt aus:

1.	$\varphi\frac{\theta}{x} \vdash \varphi\frac{\theta}{x}$	(Vor)
2.	$\varphi\frac{\theta}{x} \vdash \exists x\varphi$	($\exists$R)
3.	$\Gamma, \varphi\frac{\theta}{x} \vdash \Delta, \exists x\varphi$	(Erw)
4.	$\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$	
5.	$\Gamma, \exists x\varphi, \varphi\frac{\theta}{x} \vdash \Delta$	(Erw)
6.	$\Gamma, \varphi\frac{\theta}{x} \vdash \Delta$	(S) auf 3,5.

Sei $y \notin \text{frei}(\Gamma \cup \Delta \cup \{\exists x\varphi\})$. Die gesuchte Ableitung lässt sich nun deutlich kompakter aufschreiben:

1.	$\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$	
2.	$\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \Delta$	($\exists$EL) mit $\theta = y$
3.	$\Gamma, \exists x\psi \vdash \Delta$	
4.	$\Gamma, \psi\frac{y}{x} \vdash \Delta$	($\exists$EL) mit $\theta = y$
5.	$\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vee \psi\frac{y}{x} \vdash \Delta$	($\vee$L) auf 2,4
6.	$\Gamma, \exists x(\varphi \vee \psi) \vdash \Delta$	($\exists$L).

Hausaufgabe 4 (Korrektheit von Regeln) 2+2 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie dass für alle endlichen $\Gamma, \Delta \subset \mathrm{L}(\sigma)$, alle $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ und alle $\theta, \eta \in \mathrm{T}(\sigma)$ die folgenden Regeln im Sequenzenkalkül der Logik 1. Stufe korrekt sind. Beweisen Sie rein semantisch, dass heißt geben sie keine Ableitung an.

a)

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \theta \doteq \eta, \varphi\frac{\theta}{x}}{\Gamma \vdash \Delta, \theta \doteq \eta, \varphi\frac{\eta}{x}}$$

b)

$$\frac{\Gamma, \theta \doteq \eta \vdash \Delta, \varphi\frac{\theta}{x}}{\Gamma, \theta \doteq \eta \vdash \Delta, \varphi\frac{\eta}{x}}$$

Lösung:

a) Diese Regel ist nicht korrekt.

Sei $\sigma = \{c, d\}$, wobei c, d nullstellige Funktionssymbole sind. Sei $\Gamma := \{c \dot{\neq} d, y \doteq c\}, \Delta := \emptyset, \theta := c, \eta := d$ und $\varphi := x \doteq y$. Dann ist

$$c \dot{\neq} d, y \doteq c \vdash c \doteq d, y \doteq c$$

offensichtlich gültig, da auf der rechten Seite eine Formel vorkommt, die auf der linken Seite auch vorkommt. Allerdings ist

$$c \dot{\neq} d, y \doteq c \vdash c \doteq d, y \doteq d$$

nicht gültig. Dazu definieren wir eine Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$, mit $\mathfrak{A} := (A := \{1, 2\}, c^{\mathfrak{A}} := 1, d^{\mathfrak{A}} := 2)$ und $\mathfrak{b}(y) := 1$. Offensichtlich gilt $\mathfrak{I} \models \{c \dot{\neq} d, y \doteq c\}$, aber $\mathfrak{I} \not\models c \doteq d$ und $\mathfrak{I} \not\models y \doteq d$.

b) Diese Regel ist korrekt.

Sei $\mathfrak{I}$ eine Interpretation, sodass $\mathfrak{I} \models \Gamma \cup \{\theta \doteq \eta\}$. Wenn $\Gamma, \theta \doteq \eta \vdash \Delta, \varphi\frac{\theta}{x}$ gültig ist, gibt es entweder ein $\psi \in \Delta$ sodass $\mathfrak{I} \models \psi$ oder es gilt $\mathfrak{I} \models \varphi\frac{\theta}{x}$. Wenn es ein $\psi \in \Delta$ gibt, sodass $\mathfrak{I} \models \psi$, sind wir fertig. Es gelte also $\mathfrak{I} \models \varphi\frac{\theta}{x}$. Nach dem Substitutionslemma (4.52) gilt dass $\mathfrak{I}\frac{[\![\theta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z} \models \varphi$. Da $\mathfrak{I} \models \theta \doteq \eta$ gilt außerdem dass $[\![\theta]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\eta]\!]^{\mathfrak{I}}$ und somit auch $\mathfrak{I}\frac{[\![\eta]\!]^{\mathfrak{I}}}{z} \models \varphi$. Nach dem Substitutionslemma (4.52) gilt also dass $\mathfrak{I} \models \varphi\frac{\eta}{x}$. Wir haben also gezeigt dass jede solche Interpretation $\mathfrak{I}$ eine Formel aus $\Delta \cup \{\varphi\frac{\eta}{x}\}$ erfüllt also ist $\Gamma, \theta \doteq \eta \vdash \Delta, \varphi\frac{\eta}{x}$ gültig.

Hausaufgabe 5 (Erweiterung des Sequenzenkalküls) **2+2+3 Punkte**

a) Ist für alle endlichen $\Gamma \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$, $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ und $x \in \mathrm{Var}$ die Sequenzenregel

$$\frac{}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \forall x\varphi} \qquad (\exists\forall)$$

ableitbar?

b) Gibt es ein endliches erfüllbares $\Gamma \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$, so dass für alle $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ und $x \in \mathrm{Var}$ die Regel $(\exists\forall)$ aus (a) ableitbar ist?

Hinweis: Wir weisen darauf hin, dass es nicht verlangt ist, dass das *Regelschema* ableitbar ist, sondern die Regel für beliebige aber feste φ und x.

c) Sei $K_{\exists\forall}$ die Erweiterung des üblichen Sequenzenkalküls um das Regelschema $(\exists\forall)$. Das heißt, zusätzlich zu den Regeln des Sequenzenkalküls aus der Vorlesung enthält $K_{\exists\forall}$ für alle endlichen $\Gamma \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$, $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ und $x \in \mathrm{Var}$ die Regel $(\exists\forall)$ aus (a).

Lassen sich in $K_{\exists\forall}$ alle Sequenzen ableiten?

Lösung:

a) Sei $\sigma := \{P/1\}$, $\Gamma := \emptyset$, und $\varphi := P(x)$. Dann ist die Sequenz $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \forall x\varphi$, also $\exists x P(x) \vdash \forall x P(x)$ nicht gültig, denn für die σ-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $A = \{1, 2\}$ und $P^{\mathfrak{A}} = \{1\}$ gilt $\mathfrak{A} \models \exists x P(x)$ und $\mathfrak{A} \not\models \forall x P(x)$. Also ist die Sequenz $\exists x P(x) \vdash \forall x P(x)$ nicht ableitbar und damit die Regel $\frac{}{\exists x P(x) \vdash \forall x P(x)}$ auch nicht.

b) Sei $\chi_1 := \forall x \forall y\, x \doteq y$. Dieser Satz gilt gerade in allen 1-elementigen Interpretationen, also Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ mit $|A| = 1$. Für 1-elementige Interpretation $\mathfrak{I}$ gilt aber auch: wenn $\mathfrak{I} \models \exists x\varphi$, dann $\mathfrak{I} \models \forall x\varphi$, für alle $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ und $x \in \mathrm{Var}$. Also ist für alle Γ mit $\chi_1 \in \Gamma$ die Sequenz $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \forall x\varphi$ gültig. Nach dem Vollständigkeitssatz ist die Sequenz dann auch ableitbar, also ist auch die Regel $\frac{}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \forall x\varphi}$ ableitbar.

c) Wir zeigen, dass die Sequenz $\vdash \bot$ nicht in $K_{\exists\forall}$ ableitbar ist.

Angenommen, $\vdash \bot$ ist in $K_{\exists\forall}$ ableitbar. Sei $S_1, \ldots, S_n$ eine Ableitung von $S_n = \vdash \bot$. Für alle $i \in [n]$ sei $S_i = \Gamma_i \vdash \Delta_i$.

Sei $\Gamma'_i := \Gamma_i \cup \{\chi_1\}$ für die Formel χ_1 aus (b). Weietrhin sei $S'_i := \Gamma'_i \vdash \Delta_i$. Dann ist $S'_1, \ldots, S'_n$ eine Ableitung der Sequenz $\chi_1 \vdash \bot$ im Kalkül $K_{\exists\forall}$. Das folgt aus der Beobachtung, dass für alle Regeln

$$\frac{\Gamma^1 \vdash \Delta^1 \cdots \Gamma^k \vdash \Delta^k}{\Gamma \vdash \Delta}$$

des Kalküls $K_{\exists\forall}$ auch

$$\frac{\Gamma^1 \cup \{\chi_1\} \vdash \Delta^1 \cdots \Gamma^k \cup \{\chi_1\} \vdash \Delta^k}{\Gamma \cup \{\chi_1\} \vdash \Delta}$$

eine Regel des Kalküls ist. (Hier ist es wichtig, dass χ_1 ein Satz ist, denn sonst könnte es Probleme bei den Regeln ($\exists$L) und ($\forall$R) geben.)

In (b) haben wir gezeigt, dass die Regel $\dfrac{}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \forall x\varphi}$ korrekt ist, wenn $\chi_1 \in \Gamma$. Also verwenden wir in der Ableitung $S'_1, \ldots, S'_n$ nur korrekte Sequenzenregeln. Daraus folgt, dass $S'_n = \chi_1 \vdash \perp$ eine gültige Sequenz ist. Das ist ein *Widerspruch*, denn diese Sequenz ist nicht gültig: jede 1-elementige Interpretation erfüllt χ_1, aber nicht $\perp$.

Programmieraufgabe 6 (Pränexe Normalform) 5 Punkte

- Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt über **Speichern** oder **Abgabe** in VPL. Bis zur Abgabefrist könnt ihr so oft abgeben, wie ihr wollt. Wir bewerten nur die aktuellste Abgabe.
- Ihr könnt in **assignment.py** euren eigenen Code schreiben und dabei die von uns zur Verfügung gestellten Bibliotheken benutzen. Achtet allerdings darauf, keine Dateien zu löschen und die Header der Funktionen unverändert zu lassen.
- Nicht alle Importe sind möglich, manche Bibliotheken werden also einen Fehler wie z.B. `Module assignment tries to import numpy, which does not exist` liefern, wenn ihr versucht diese zu verwenden.
- Wir empfehlen, den Code mindestens einmal zu testen, mit **Ausführen** oder Strg+F11. Dies kann einige Sekunden dauern.
- Punkte und Code sind automatisch mit eurer Abgabegruppe synchronisiert.

Schreiben Sie die Funktion `prenex_normal_form(formula: Formula) -> Formula`, welche als Eingabe ein Objekt der Klasse `Formel` nimmt und eine äquivalente Formel in pränexer Normalform ausgibt, die entsteht, wenn so wie im Beweis per Induktion über den Aufbau von Satz 4.67 vorgegangen wird. Die Bezeichnungen gebundener Variablen können beliebig gewählt werden.

Beachten Sie, dass Formeln die anders erzeugt wurden nicht als gültige Lösung erkannt werden, auch wenn diese äquivalent sind und sich ebenfalls in pränexer Normalform befinden.

Lösung:

Wir überführen die Formel zunächst in Negationsnormalform, z.B. wieder mit zwei Funktionen `nnf` und `nnf_negative` die sich gegenseitig aufrufen.

Die pränexe Normalform von Formeln in NNF lässt sich dann rekursiv definieren. Für binäre Operatoren werden die PNF von `first` und `second` ohne deren Quantorenpräfix miteinander verknüpft, diesen entfernen wir also gezielt, um anschließend die verknüpften quantorenfreien Formeln an den kombinierten Quantorenpräfix anzuhängen. Nur in diesem Fall ist eventuell auf eine Umbenennung der gebundenen Variablen zu achten.

Das Codegerüst von Aufgabe 8 enthält eine vollständige Implementierung der Funktionen `as_nnf` und `_nnf_to_pnf`.