Tutoriumsaufgabe 1 (Eigenschaften von Digraphen) $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$

Geben Sie für die folgenden $\{E/2\}$-Sätze an, was diese besagen. Dass heißt, vervollständigen Sie die folgende Aussage für $x \in [5]$:

$$\mathfrak{G} \models \varphi_x \Leftrightarrow \dots$$

a) $\varphi_1 = \forall x \forall y\, (E(x,y) \to \neg E(y,x))$ der Digraph hat keine selfloops & alle Kanten sind "echt" gerichtet (max eine Richtung existiert) antisymmetrisch ∧ keine selfloops

b) $\varphi_2 = \exists x \exists y\, (E(x,y) \to \neg E(y,x))$ $\equiv \exists x \exists y\, (\neg E(x,y) \lor \neg E(y,x))$ $E^{\mathfrak{G}} \neq G \times G$

c) $\varphi_3 = \exists x \exists y\, (E(x,y) \land \neg E(y,x))$ existiert eine Kante die "echt" gerichtet ist, ist nicht symmetrisch

d) $\varphi_4 = \exists x \forall y\, (E(x,y) \land \neg E(y,x))$ es existiert ein Knoten der zu ALLEN Knoten eine "echt" gerichtete Kante hat, dies ist unerfüllbar weil $x=y$ sein könnte

e) $\varphi_5 = \forall x \exists y\, (E(x,y) \land \neg E(y,x))$ jeder Knoten hat eine ausgehende "echt" gerichtete Kante

antisymmetrisch ist nicht das Gegenteil von symmetrisch

$\varphi_1 \land \varphi_3$: ist antisymmetrisch, enthält keine self-loops aber mindestens eine Kante

$\varphi_6 := \forall x \forall y\, (E(x,y) \land \neg E(y,x))$

für alle $u, v \in G$ gilt $(u,v) \in E^{\mathfrak{G}}$ & $(v,u) \notin E^{\mathfrak{G}}$

ist unerfüllbar weil $x=y$ sein könnte

$\varphi_7 := \forall x \forall y\, (x = y \lor (E(x,y) \land \neg E(y,x)))$

ist immer noch unerfüllbar da u, v beliebig also $(u,v) \in E^{\mathfrak{G}}$ & $(v,u) \notin E^{\mathfrak{G}}$ & $(v,u) \in E^{\mathfrak{G}}$ & $(u,v) \notin E^{\mathfrak{G}}$

Tutoriumsaufgabe 2 (Eigenschaften von Wortstrukturen)

Sei $w \in \{a,b\}^*$ und $\mathfrak{A}_w$ die dazugehörige Wortstruktur. Geben Sie $\sigma_{\{a,b\}}$-Sätze an, so dass für $x \in [4]$ gilt

$$\mathfrak{A}_w \models \varphi_x \Leftrightarrow w \in L_x.$$

a) $L_1 := (a^*b)^*$

das Wort muss mit b enden (wenn nicht-leer)

wenn es ein a gibt dann gibt es eine spätere Position mit b

$$\varphi_1 := \forall x\,(P_a(x) \rightarrow \exists y\,(x \dot{\leq} y \wedge P_b(y)))$$

b) $L_2 := (ab^*)^*$

wenn es ein b gibt dann gibt es eine früher Position mit a

$$\varphi_2 := \forall x\,(P_b(x) \rightarrow \exists y\,(y \dot{\leq} x \wedge P_a(y)))$$

c) $L_3 := (aa^*bb^*)^*$

wenn das Wort nicht leer ist, muss es mit a anfangen & mit b enden

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \equiv \varphi_3 := \forall x\,((P_a(x) \rightarrow \exists y\,(x \dot{\leq} y \wedge P_b(y))) \wedge (P_b(x) \rightarrow \exists y\,(y \dot{\leq} x \wedge P_a(y))))$$

d) $L_4 := (ab)^*$

für alle a ist der direkte Nachfolger b und für alle b ist der direkte Vorgänger a

$\varphi_4 :=$ ____________________

x ist direkter Nachfolger von y

$$\varphi_{dir\text{-}Nach}(x,y) := \neg \exists z\,(z \dot{\leq} x \wedge y \dot{\leq} z \wedge x \dot{\neq} z \wedge y \dot{\neq} z)$$

$$\equiv \forall z\,(x \dot{\leq} z \vee z \dot{\leq} y)$$

$$\varphi_{dir\text{-}Vor}(x,y) := \varphi_{dir\text{-}Nach}(y,x)$$

$$\varphi_4 := \forall x\,((P_a(x) \rightarrow \exists y\,(\varphi_{dir\text{-}Nach}(x,y) \wedge P_b(y))) \wedge (P_b(x) \rightarrow \exists y\,(\varphi_{dir\text{-}Vor}(x,y) \wedge P_a(y))))$$

$$\varphi_3 := \forall x\, \exists y_1 \exists y_2\, ((P_a(x) \rightarrow (x \dot{\leq} y_1 \wedge P_b(y_1))) \wedge (P_b(x) \rightarrow (y_2 \dot{\leq} x \wedge P_a(y_2))))$$

problematische Formel:

$$\forall x\, \exists y_1 \exists y_2\, ((P_a(x) \rightarrow (x \dot{\leq} y_1 \wedge P_b(y_1))) \wedge (P_a(x) \rightarrow (y_2 \dot{\leq} x \wedge P_a(y_2))))$$

$$\equiv \forall x\, \exists y_1 \exists y_2\, (P_a(x) \rightarrow (x \dot{\leq} y_1 \wedge P_b(y_1) \wedge y_2 \dot{\leq} x \wedge P_a(y_2)))$$

Tutoriumsaufgabe 3 (Eigenschaften von Ordnungen)

Geben Sie einen $\{\dot{\leq}/2\}$-Satz φ an, sodass für alle $\{\dot{\leq}/2\}$-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \dot{\leq}^{\mathfrak{A}} \text{ ist eine partielle Ordnung.}$$

$\varphi := \varphi_{reflexiv} \wedge \varphi_{antisymmetrisch} \wedge \varphi_{transitiv}$

$\varphi_{reflexiv} := \forall x\, (x \,\dot{\leq}\, x)$

$\dot{\leq}(x, x)$

$\varphi_{antisymmetrisch} := \forall x \forall y\, ((x \,\dot{\neq}\, y \wedge x \,\dot{\leq}\, y) \rightarrow \neg\, y \,\dot{\leq}\, x)$

$\forall x \forall y\, (x \,\dot{=}\, y \vee (x \,\dot{\leq}\, y \rightarrow \neg\, y \,\dot{\leq}\, x))$

$\varphi_{transitiv} := \forall x \forall y \forall z\, ((x \,\dot{\leq}\, y \wedge y \,\dot{\leq}\, z) \rightarrow x \,\dot{\leq}\, z)$