Prof. Dr. M. Grohe
E. Fluck, L. Härtel, T. Novotny

Übungsblatt 8 mit Lösungen

Abgabetermin: Montag, der 01. Juli 2024 um 14:30

Hausaufgabe 3 (Endlichkeitssatz) 7 Punkte

Zeigen Sie mithilfe des Endlichkeitssatzes, dass es keinen Satz $\varphi \in \mathrm{L}(\{E\})$ gibt, der besagt, dass ein Graph ein Baum ist.

Lösung:

Sei

$$\varphi_{\text{Graph}} \coloneqq \forall x \neg E(x,x) \wedge \forall x \forall y (E(x,y) \to E(y,x)).$$

(Diese Formel wurde in dem Beweis vom Satz 5.48 eingeführt.)

Angenommen, $\varphi \in \mathrm{L}(\{E\})$ besagt, dass ein Graph ein Baum ist, das heißt, für alle Graphen $\mathfrak{G}$ gilt

$$\mathfrak{G} \models \varphi \iff \mathfrak{G} \text{ ist ein Baum.}$$

Für alle $d \in \mathbb{N}, d > 0$ sei

$$\psi_d(x,y) \coloneqq \exists x_1 \dots \exists x_{d+1} \left(\left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq d+1} x_i \dot{\neq} x_j \right) \wedge x \doteq x_1 \wedge y \doteq x_{d+1} \wedge \bigwedge_{i=1}^{d} E(x_i, x_{i+1}) \right).$$

Die Formel $\psi_d(x,y)$ besagt, dass es in G einen Pfad der Länge d von x nach y gibt, also eine Folge von Kanten der Länge d, die $d+1$ unterschiedliche Knoten beinhaltet. Betrachte die Formelmenge

$$\Phi \coloneqq \{\varphi_{\text{Graph}}, \varphi\} \cup \{\neg \psi_d(x,y) \mid d \in \mathbb{N}, d > 0\}.$$

Jede endliche Teilmenge von Φ ist erfüllbar: Denn sei $\Gamma \subseteq \Phi$ endlich. Sei $d(\Gamma) \coloneqq \max\{d \in \mathbb{N} \mid \neg\psi_d(x,y) \in \Gamma\}$. Sei $\mathfrak{P}$ der Pfad der Länge $d(\Gamma)+1$ und seien $\mathfrak{b}(x), \mathfrak{b}(y)$ die zwei Endpunkte des Pfades. Dann $\mathfrak{P}, \mathfrak{b} \models \Gamma$.

Nach dem Endlichkeitssatz ist also Φ erfüllbar. Sei $\mathfrak{G}, \mathfrak{b} \models \Phi$. Es folgt aus $\mathfrak{G}, \mathfrak{b} \models \{\varphi_{\text{Graph}}, \varphi\}$, dass der Graph $\mathfrak{G}$ ein Baum ist. Da $\mathfrak{G}, \mathfrak{b} \models \neg\psi_d(x,y)$ für alle $d \in \mathbb{N}$, gilt, dass die Knoten $\mathfrak{b}(x)$ und $\mathfrak{b}(y)$ nicht verbunden sind. Das ist aber ein Widerspruch, da Bäume zusammenhängend sind.

Hausaufgabe 4 (Termstruktur und faktorisierte Termstruktur) 8 Punkte

Sei $\sigma = \{f/1, R/1\}$. Seien

$$\begin{aligned}
A &:= \left\{\exists x\left(\forall y(f(y) \dot{\neq} x) \wedge \forall z\Big((\forall y(f(y) \dot{\neq} z)) \to z \doteq x\Big)\right), R(f^{(3)}(x))\right\} \\
B &:= \{x \doteq y \mid x, y \in \mathrm{Var}\} \\
C &:= \{\forall x\left(f^{(9)}(x) \doteq x\right), R(f^{(6)}(x)), \forall x(R(x) \to R(f^{(6)}(x)))\},
\end{aligned}$$

wobei

$$f^{(n)}(x) := \underbrace{f(f(\dots f}_{n \text{ mal}}(x)\dots))$$

als die n-fache Verkettung von f angewendet auf x definiert ist. Geben Sie für die folgenden Definitionen von Φ sowohl die Termstrukturen als auch die faktorisierten Termstrukturen an. Stellen Sie die faktorisierten Termstrukturen graphisch dar.

a) $\Phi = A$.

b) $\Phi = B \cup C$.

Lösung:

a) Die Termstruktur $\mathfrak{A}_\Phi$ sieht wie folgt aus:

- Universum $A_\Phi = T(\sigma)$, also zum Beispiel $f(x), f(y), f(f(x)), z$.
- Funktion $f^{\mathfrak{A}_\Phi}$ definiert durch $f^{\mathfrak{A}_\Phi}(\theta) := f(\theta)$ für alle $\theta \in A_\Phi$.
- Relation $R^{\mathfrak{A}_\Phi}$ definiert durch $R^{\mathfrak{A}_\Phi} := \{f^{(3)}(x)\}$.

Weil $R(f^{(3)}(x)) \in A$, folgt direkt, dass $A \vdash R(f^{(3)}(x))$.

Um zu zeigen, dass keine anderen Elemente in $R^{\mathfrak{A}_\Phi}$ enthalten sind, geben wir ein Modell $\mathfrak{A}' \models A$ an, in dem $\mathfrak{A}' \not\models R(\theta)$ für alle $\theta \neq f^{(3)}(x)$ gilt. Hier funktioniert z.B. die Substruktur der Termstruktur mit Universum $\{x, f(x), f(f(x)), \dots\}$, also der Kette, die das Element $f^{(3)}(x)$ für $R(f^{(3)}(x))$ enthält. Angenommen, $A \vdash R(\theta)$ gilt für ein $\theta \neq R(f^{(3)}(x))$. Mit der Korrektheit des Sequenzenkalküls folgt also aus $\mathfrak{A} \models A$, dass $\mathfrak{A} \models R(\theta)$. Dann müsste aber ebenfalls $\mathfrak{A}' \models R(\theta)$ gelten, was ein Widerspruch ist.

Jeder Term hat die folgende Form: $f^{(i)}(x)$ für ein $x \in \mathrm{Var}$ und $i \in \mathbb{N}$. Die Äquivalenz $\sim$ definiert durch $\theta \sim \eta \iff \Phi \vdash \theta \doteq \eta$ hat die folgende Bedeutung:

$$f^{(i)}(x) \sim f^{(j)}(y) \iff x = y \text{ und } i = j.$$

Das heißt, dass alle Äquivalenzklassen die Größe 1 haben, nämlich $\widetilde{\theta} = \{\theta\}$.

Die faktorisierte Termstruktur $\widetilde{\mathfrak{A}_\Phi}$ sieht also wie folgt aus:

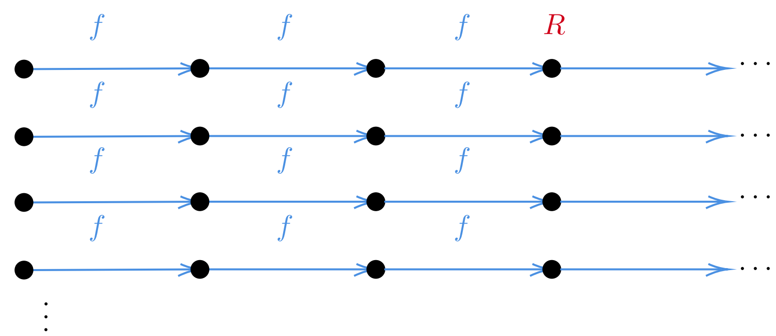
- Universum $\widetilde{A_\Phi} = \{\widetilde{\theta} \mid \theta \in A_\Phi\}$.

- Funktion $f^{\widetilde{\mathfrak{A}_\Phi}}$ definiert durch

$$f^{\widetilde{\mathfrak{A}_\Phi}}(\theta) := \widetilde{f(\theta)},$$

- Relation $R^{\widetilde{\mathfrak{A}_\Phi}}$ definiert durch $R^{\widetilde{\mathfrak{A}_\Phi}} := \{\widetilde{f^{(3)}(x)}\}$.

Graphisch dargestellt wären es abzählbar unendlich viele abzählbar unendliche Ketten, wobei bei einer Kette das dritte Element markiert ist:



b) Das Universum und Definition von $f^{\mathfrak{A}_\Phi}$ sieht in der Termstruktur genau so aus wie in a). Wir definieren $\Phi := B \cup C$.

Behauptung 1. Für alle $x, y \in \text{Var}$, $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \in \{m, m+9\}$ oder $n + 9 = m$ gilt, dass $\Phi \vdash f^{(n)}(x) \doteq f^{(m)}(y)$.

Beweis.

$$\begin{array}{lrcll}
1. & x \doteq y & \vdash & f^{(0)}(x) \doteq f^{(0)}(y) & \text{(Vor)} \\
 & & & & [n = 0,\, m = 0] \\
1. & f^{(n)}(x) \doteq f^{(m)}(y) & \vdash & f^{(n)}(x) \doteq f^{(n)}(y) & \text{(Vor)} \\
2. & x \doteq y, f^{(n)}(x) \doteq f^{(n)}(y) & \vdash & f^{(n)}(x) \doteq f^{(n)}(y) & \text{(Erw)} \\
3. & x \doteq y, f^{(n)}(y) \doteq f^{(n)}(y) & \vdash & f^{(n)}(x) \doteq f^{(n)}(y) & \text{(Sub)} \\
4. & x \doteq y & \vdash & f^{(n)}(x) \doteq f^{(n)}(y) & \text{(Rf)} \\
 & & & & [n = m] \\
1. & f^{(m+9)}(x) \doteq f^{(m)}(y) & \vdash & f^{(m+9)}(x) \doteq f^{(m)}(y) & \text{(Vor)} \\
2. & x \doteq y, f^{(m+9)}(x) \doteq f^{(m)}(y) & \vdash & f^{(m+9)}(x) \doteq f^{(m)}(y) & \text{(Erw)} \\
3. & x \doteq y, f^{(m+9)}(y) \doteq f^{(m)}(y) & \vdash & f^{(m+9)}(x) \doteq f^{(m)}(y) & \text{(Sub)} \\
4. & x \doteq y, \forall x\big(f^{(9)}(x) \doteq x\big) & \vdash & f^{(m+9)}(x) \doteq f^{(m)}(y) & (\forall L) \\
 & & & & [n = m+9] \\
1. & f^{(n)}(x) \doteq f^{(n+9)}(y) & \vdash & f^{(n)}(x) \doteq f^{(n+9)}(y) & \text{(Vor)} \\
2. & x \doteq y, f^{(n)}(x) \doteq f^{(n+9)}(y) & \vdash & f^{(n)}(x) \doteq f^{(n+9)}(y) & \text{(Erw)} \\
3. & x \doteq y, f^{(n)}(y) \doteq f^{(n+9)}(y) & \vdash & f^{(n)}(x) \doteq f^{(n+9)}(y) & \text{(Sub)} \\
4. & x \doteq y, f^{(n)}(y) \doteq f^{(n+9)}(y), f^{(n+9)}(y) \doteq f^{(n)}(y) & \vdash & f^{(n)}(x) \doteq f^{(n+9)}(y) & \text{(Erw)} \\
5. & x \doteq y, f^{(n)}(y) \doteq f^{(n)}(y), f^{(n+9)}(y) \doteq f^{(n)}(y) & \vdash & f^{(n)}(x) \doteq f^{(n+9)}(y) & \text{(Sub)} \\
6. & x \doteq y, f^{(n+9)}(y) \doteq f^{(n)}(y) & \vdash & f^{(n)}(x) \doteq f^{(n+9)}(y) & \text{(Refl)} \\
7. & x \doteq y, \forall x\big(f^{(9)}(x) \doteq x\big) & \vdash & f^{(n)}(x) \doteq f^{(n+9)}(y) & (\forall L) \\
 & & & & [n + 9 = m]
\end{array}$$

□

Behauptung 2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathrm{Var}$ gilt, dass $\Phi \vdash R(f^{(6n)}(y))$.

Beweis. Wir beweisen per vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $\Phi \vdash R(f^{(6n)}(y))$ gilt.

$$\begin{array}{lrl}
1. & R(f^{(6)}(y)) & \vdash R(f^{(6)}(y))(\text{Vor}) \\
2. & y \doteq x, R(f^{(6)}(y)) & \vdash R(f^{(6)}(y))(\text{Erw}) \\
3. & y \doteq x, R(f^{(6)}(x)) & \vdash R(f^{(6)}(y))(\text{Sub}) \\
 & & \qquad [n = 0]
\end{array}$$

Sei per Induktionsannahme die Sequenz $\Phi' \vdash R(f^{(6n)}(y))$ ableitbar, für ein endliches $\Phi' \subseteq \Phi$ und ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{lrll}
0. & \Phi' & \vdash R(f^{(6n)}(y)) & \\
1. & \Phi' & \vdash R(f^{(6n)}(y)), R(f^{(6n+6)}(y))(\text{Erw}) & \\
2. & R(f^{(6n+6)}(y)) & \vdash R(f^{(6n+6)}(y)) & (\text{Vor}) \\
3. & \Phi', R(f^{(6n+6)}(y)) & \vdash R(f^{(6n+6)}(y)) & (\text{Erw}) \\
4. & \Phi', R(f^{(6n)}(y)) \to R(f^{(6n+6)}(y)) & \vdash R(f^{(6n+6)}(y)) & (\to L \text{ auf 1.,3.}) \\
5. & \Phi', \forall x\big(R(x) \to R(f^{(6)}(x))\big) & \vdash R(f^{(6n+6)}(y)) & (\forall L) \\
 & & & [n \to n+1]
\end{array}$$

Somit ist für
$$\Phi'' := \Phi' \cup \{\forall x\big(R(x) \to R(f^{(6)}(x))\big)\} \subseteq \Phi$$
die Sequenz $\Phi'' \vdash R(f^{(6(n+1))}(y))$ ableitbar, mit dem Induktionsprinzip folgt die Behauptung. □

Behauptung 3. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathrm{Var}$ gilt $\Phi \vdash R(f^{(3n)}(y))$.

Beweis. Falls n gerade ist, folgt dies bereits mit Behauptung 2.

Sei n also ungerade. Dann gilt $3n + 9 = 6(\frac{n+3}{2})$ und mit Behauptung 2 ist $\Phi \vdash R(f^{(3n+9)}(y))$. Wir definieren $\varphi_= := f^{(3n)}(y) \doteq f^{(3n+9)}(y)$ und $\varphi_R := R(f^{(3n+9)}(y))$.

$$\begin{array}{lrll}
1. & \Phi & \vdash \varphi_= & \text{Beh. 1} \\
2. & \Phi & \vdash \varphi_R & \text{Beh. 2} \\
3. & \Phi & \vdash \varphi_= \wedge \varphi_R & (\wedge\text{R auf 1.,2.}) \\
4. & \Phi & \vdash \varphi_= \wedge \varphi_R, R(f^{(3n)}(y)) & (\text{Erw}) \\
5. & R(f^{(3n)}(y)) & \vdash R(f^{(3n)}(y)) & (\text{Vor}) \\
6. & \Phi, \varphi_=, R(f^{(3n)}(y)) & \vdash R(f^{(3n)}(y)) & (\text{Erw}) \\
7. & \Phi, \varphi_=, \varphi_R & \vdash R(f^{(3n)}(y)) & (\text{Sub}) \\
8. & \Phi, \varphi_= \wedge \varphi_R & \vdash R(f^{(3n)}(y)) & (\wedge\text{L auf 7.}) \\
9. & \Phi & \vdash R(f^{(3n)}(y)) & (\text{S auf 4.,8.})
\end{array}$$

□

Behauptung. Für alle $\theta \in T(\{\sigma\})$ mit $\Phi \vdash R(\theta)$ gilt, dass $n \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathrm{Var}$ existieren, sodass $\theta = f^{(3n)}(y)$.

Beweis. Wir nehmen an, dass $\Phi \vdash R(\theta)$ für ein $\theta = R(f^{(3n+a)}(x))$ mit $a \in \{1,2\}$ gilt. Dann müsste nach der Korrektheit des Sequenzenkalküls $\Phi \models R(\theta)$ gelten und deswegen $\Phi \cup \{\neg R(f^{(3n+a)}(x))\}$ unerfüllbar sein. Aber $\mathfrak{B} := (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, f^{\mathfrak{B}}, R^{\mathfrak{B}})$ mit $f^{\mathfrak{B}}(x) = x + 1$ und $R^{\mathfrak{B}} = \{0, 3, 6\}$ erfüllt diese Formelmenge. Das ist ein Widerspruch. $\square$

Warum wurde hier zunächst syntaktisch ("$\Phi \vdash R(\theta)$") und dann semantisch (Konstruktion von $\mathfrak{B}$) argumentiert?

- Um semantisch zu argumentieren, dass $R(\theta)$ aus Φ beweisbar ist, müssten wir bereits den Vollständigkeitssatz annehmen. Das wäre in Ordnung, weil diese Aufgabe bloß ein Beispiel ist und nicht auf dessen Beweis aufbaut – aber ein bisschen wie mit Kanonen auf Spatzen zu schießen.
- Umgekehrt, wenn wir syntaktisch beweisen wollen, dass $\Phi \nvdash R(\theta')$ gilt, müssten wir ein Argument finden, das für alle möglichen Ableitungen im Sequenzenkalkül funktioniert. Diese können jedoch beliebig lang und kompliziert sein; wenn die Formelmenge Φ z.B. unerfüllbar wäre, dann auch ein endliches $\Phi' \subseteq \Phi$, also müssten wir die Sequenz $\Phi' \vdash R(\theta')$ dann ableiten können. Jeder Beweis von $\Phi \nvdash R(\theta')$ impliziert also ohnehin die Erfüllbarkeit der Formelmenge Φ. Die Korrektheit des Sequenzenkalküls haben wir für alle Regelschemata, damit per Induktion für alle Ableitungen, bewiesen.

Die Relation $R^{\mathfrak{A}_\Phi}$ ist jetzt also definiert durch

$$R^{\mathfrak{A}_\Phi} := \{f^{3n}(x) \mid n \in \mathbb{N}, x \in \mathrm{Var}\}.$$

Damit ist die Termstruktur $\mathfrak{A}_\Phi$ definiert.

Die Äquivalenz $\sim$ definiert durch $\theta \sim \eta \iff \Phi \vdash \theta \doteq \eta$ hat folgende Bedeutung:

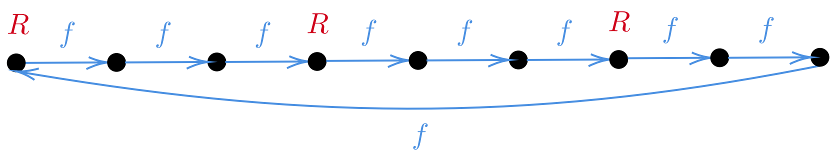
$$f^{(i)}(x) \sim f^{(j)}(y) \iff |i - j| \text{ ist durch 9 teilbar.}$$

Es gibt also insgesamt 9 Äquivalenzklassen (abhängig davon, welchen Rest nach Division durch 9 die Anzahl an f's in dem Term ergibt).

Die faktorisierte Termstruktur $\widetilde{\mathfrak{A}_\Phi}$ sieht also wie folgt aus:

- Universum $\widetilde{A_\Phi} = \{\widetilde{\theta} \mid \theta \in A_\Phi\}$.
- Funktion $f^{\widetilde{\mathfrak{A}_\Phi}}$ definiert durch
$$f^{\widetilde{\mathfrak{A}_\Phi}}(\theta) := \widetilde{f(\theta)},$$
- Relation $R^{\widetilde{\mathfrak{A}_\Phi}}$ definiert durch $R^{\widetilde{\mathfrak{A}_\Phi}} := \{\widetilde{f^{(3n)}(x)} \mid x \in \mathrm{Var}, n \in \mathbb{N}\}$.

Graphisch dargestellt sieht die faktorisierte Termstruktur also wie folgt aus:



Programmieraufgabe 5 (Relationaler Algorithmus) 5 Punkte

- Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt über **Speichern** oder **Abgabe** in VPL. Bis zur Abgabefrist könnt ihr so oft abgeben, wie ihr wollt. Wir bewerten nur die aktuellste Abgabe.
- Ihr könnt in **assignment.py** euren eigenen Code schreiben und dabei die von uns zur Verfügung gestellten Bibliotheken benutzen. Achtet allerdings darauf, keine Dateien zu löschen und die Header der Funktionen unverändert zu lassen.
- Nicht alle Importe sind möglich, manche Bibliotheken werden also einen Fehler wie z.B. `Module assignment tries to import numpy, which does not exist` liefern, wenn ihr versucht diese zu verwenden.
- Wir empfehlen, den Code mindestens einmal zu testen, mit **Ausführen** oder Strg+F11. Dies kann einige Sekunden dauern.
- Punkte und Code sind automatisch mit eurer Abgabegruppe synchronisiert.

In der Vorlesung wurden zwei unterschiedliche Verfahren präsentiert, Formeln der Logik der ersten Stufe auszuwerten. Der *Top-Down Algorithmus* folgt der rekursiven Definition der Semantik, genau wie der Algorithmus der Aussagenlogik. Wir möchten zur Auswertung den *relationalen Algorithmus* implementieren, der ungefähr so auch in Datenbanksystemen verwendet wird.

Schreiben Sie die Funktion `compute_values(formula: Formula, structure: Structure[T]) -> Values[T]`, welche als Eingabe je ein Objekt der Klasse `Formula` und ein Objekt der Klasse `Structure[T]` nimmt und ein Objekt der Klasse `Values[T]` mit den Werten der Belegungen ausgibt, die in der gegebenen Struktur die Formel erfüllen, und sich beliebig verhalten darf, wenn die Symbolmengen von Formel und Struktur nicht zueinander passen.

Schreiben Sie die Funktion `relational_evaluate(formula: Formula, interpretation: Interpretation[T]) -> bool`, welche als Eingabe je ein Objekt der Klasse `Formula` und ein Objekt der Klasse `Interpretation[T]` nimmt und den Wahrheitswert der Formel unter der gegebenen Interpretation ausgibt und sich beliebig verhalten darf, wenn Formel und Interpretation nicht zueinander passen.

Lösung:

Um `relational_evaluate(formula,interpretation)` zu implementieren, rufen wir zunächst `compute_values(formula)` auf und berechnen die Menge erfüllender Belegungen. Anschließend überprüfen wir, ob die Belegung der freien Variablen von `formula` durch die `interpretation` in dieser Menge enthalten ist.

Die Implementierung von `compute_values(formula)` ist auf Seite 4.83 der Vorlesung beschrieben. Die relationalen Operatoren lassen sich wie folgt umsetzen:

- $\cdot^{\complement}$ (Komplement), falls $\varphi(x_1,\dots,x_k) = \neg\psi(x_1,\dots,x_k)$: die Menge aller k-Tupel des Universums erzeugen und Elemente ausgeben, die nicht in `compute_values`$(\psi(x_1,\dots,x_k))$ enthalten sind;

- $\bowtie$ (Join), falls $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$: die Mengen `compute_values`$(\psi_1)$ und `compute_values`(ψ_2) berechnen, deren Elemente paarweise vergleichen, und je nach freien Variablen passende Tupel zusammenfügen und diese ausgeben;
- $\sqcap$ (Projektion), falls $\varphi(\overline{x}) = \exists y \psi(\overline{x}, y)$: die Menge `compute_values`$(\psi(\overline{x}, y))$ berechnen und die Menge dieser Tupel eingeschränkt auf die Variablen $\overline{x}$ ausgeben.