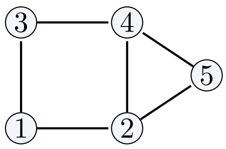
Tutoriumsaufgabe 1 (Substrukturen und Redukte)

Beschreiben Sie für die folgenden Strukturen alle Substrukturen und Redukte.

a) Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$, sei $w = abacaba$ und sei $\mathfrak{A}_w$ die Wortstruktur wie in der Vorlesung definiert.

b) Sei $\mathfrak{G} = (G, E^{\mathfrak{G}})$ die Struktur definiert durch den folgenden Graphen:



Graphentheorienotation

$U \subseteq V$

$G[U] := (U, E \cap (U \times U))$

c) Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, p^{\mathfrak{A}})$ die Struktur mit Universum $\mathbb{N}$ und einem unären Funktionssymbol p definiert durch $p^{\mathfrak{A}}(n) = n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $p^{\mathfrak{A}}(0) = 0$.

a) $A_w = \{0, 1, \dots, 7\}$

$\leq^{\mathfrak{A}_w} := \{(0,0), (0,1), \dots, (1,1), \dots, (6,7), (7,7)\}$

$P_a^{\mathfrak{A}_w} := \{1, 3, 5, 7\}$

$P_b^{\mathfrak{A}_w} := \{2, 6\}$

$P_c^{\mathfrak{A}_w} := \{4\}$

Jede Teilmeng $A \subseteq A_w$ ist abgeschlossen in $\mathfrak{A}_w$ da σ_Σ relational ist.

Beispiel $A = \{0, 3, 6\}$

$\leq^{\mathfrak{A}} := \{(0,0), (0,3), (0,6), (3,3), (3,6), (6,6)\} = \leq^{\mathfrak{A}_w} \cap (A \times A)$

$P_a^{\mathfrak{A}} := \{3\}$

$P_b^{\mathfrak{A}} := \{6\}$

$P_c^{\mathfrak{A}} := \emptyset$

abacaba

Beispiel $\quad B = \{3,4,6\}$

$\dot{\leq}^B := \{(3,3),(3,4),(3,6),(4,4),(4,6),(6,6)\}$

$P_a^B := \{3\}$

$P_b^B := \{6\}$

$P_c^B := \{4\}$

$\mathfrak{A}$ mit $A \subseteq A_w$ ist isomorph zu einer Wortstruktur $\mathfrak{A}_{w'}$ gdw $0 \in A$

$A = \{0, i_1, \dots, i_k\}$ mit $0 \dot{\leq}^{\mathfrak{A}} i_1 \dot{\leq}^{\mathfrak{A}} \dots \dot{\leq}^{\mathfrak{A}} i_k$

mit $|A| = k+1$

mit $w' := a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k}$

Isomorphismus $\pi : \mathfrak{A}_{w'} \to \mathfrak{A}$

$\pi(0) = 0$

$\pi(j) = i_j \quad$ für $j > 0$

$\mathfrak{A}$ mit $A \subseteq A_w$ sodass

$A = \{0, 1, \dots, k\}$ sind eine Wortstruktur

dies sind genau die $\mathfrak{A}_{w'}$ mit

w' Prefix von w

Redukte von $\mathfrak{A}_\omega$

$\mathfrak{A}_\omega$ selbst

$(A, P_a^{\mathfrak{A}}, P_b^{\mathfrak{A}}, P_c^{\mathfrak{A}})$

$(A, \subseteq^{\mathfrak{A}}, P_b^{\mathfrak{A}}, P_c^{\mathfrak{A}})$

$\vdots$

(A)

alle Subsets

$\sigma' \subseteq \sigma$

c) $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, p^{\mathfrak{A}})$

Substrukturen $\mathfrak{A}$ & f.a. $n \in \mathbb{N}$ $\mathfrak{A}_n := (\overset{A_n}{\{0,\dots,n\}}, p^{\mathfrak{A}_n})$

Aufgabe: Beweisen dass $\mathbb{N}$ & A_n alle abgeschlossenen Teilmengen sind

Beweisidee

Ang $B \subseteq \mathbb{N}$ ist abgeschlossen in $\mathfrak{A}$

Fallunterscheidung über die Existenz Größtes Elementes

wenn eins existiert m

Induktion & $p^{\mathfrak{A}}$ auf m $\rightsquigarrow$ $B = A_m$

wenn keins existiert

fa $i \in \mathbb{N}$ ex $m \geq i$

$m-i$ mal $p^{\mathfrak{A}}$ auf m $\rightsquigarrow i \in B \Rightarrow B = \mathbb{N}$

Beweis: Sei $\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{N}$ in $\mathfrak{A}$ abgeschlossen

Claim 1 Sei $x \in B$, dann gilt f.a. $i \in \mathbb{N}$ mit $i \leq x$, dass $i \in B$.

Beweis des Claim: Da B abgeschlossen ist in $\mathfrak{A}$ und da $x \in B$, so ist auch

$$\underbrace{p^{\mathfrak{A}}(p^{\mathfrak{A}}(\dots p^{\mathfrak{A}}}_{x-i \text{ Anwendungen}}(x) \dots)) = \max(0, x-(x-i)) = i \in B \quad \blacksquare$$

Wir machen eine Fallunterscheidung:

Fall 1: Sei B endlich. Dann existiert ein $x \in B$, so dass fa $i \in B$ gilt $i \leq x$.
dies ist $\leq$ wie wir es für natürliche Zahlen kennen.
Nach Claim 1 gilt also, dass f.a. $i \in \mathbb{N}$ mit $i \leq x$ gilt dass $i \in B$. Somit ist $B = A_x := \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq x\}$

Fall 2: Sei B unendlich. Dann folgt, dass B kein größtes Element hat. Insbesondere enthält B beliebig große Elemente, das heißt fa $i \in \mathbb{N}$ ex $x \in B$ so dass $i \leq x$. Nach Claim 1 gilt also auch $i \in B$. Daraus folgt dass $\mathbb{N} \subseteq B$. Da nach Definition $B \subseteq \mathbb{N}$ folgt also $B = \mathbb{N}$.

Redukte

$\mathfrak{A} \;\&\; (\mathbb{N})$

b) Da die Struktur relationell ist gilt f.a $H \subseteq G$ ist $\mathfrak{H} = (H, E^{\mathfrak{H}} := E^{\mathfrak{G}} \cap (H \times H))$ eine Substruktur.
Diese Substrukturen entsprechen genau den induzierten Subgraphen.

Redukte: $\mathfrak{G} \;\&\; (G)$

A eine Menge

$A^k := \{(x_1, \ldots, x_k)) \text{ mit } x_i \in A \text{ für } i \in [k]\}$

Stuktur $\mathfrak{A} = (A, (R^{\mathfrak{A}})_{R \in \sigma})$ $\quad \sigma \supseteq \sigma'$ $\quad$ Redukt $\mathfrak{A}|$:

$(A, (R^{\mathfrak{A}})_{R \in \sigma'})$

$$A \supseteq B$$

Substruktur $\mathfrak{B} = (B, (R^{\mathfrak{B}})_{R \in \sigma})$

Tutoriumsaufgabe 2 (Homomorphismen)

Definition. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ σ-Strukturen. Ein *Homomorphismus* von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist eine Abbildung $\pi : A \to B$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $k \in \mathbb{N}$, alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$ und alle k-Tupel $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathfrak{A}} \Rightarrow (\pi(a_1), \dots, \pi(a_k)) \in R^{\mathfrak{B}}.$$

(ii) Für alle $k \in \mathbb{N}$, alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$ und alle k-Tupel $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$ gilt:

$$\pi\left(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_k)\right) = f^{\mathfrak{B}}\left(\pi(a_1), \dots, \pi(a_k)\right).$$

Im Spezialfall $k = 0$ bedeutet dies für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$:

$$\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}.$$

Sei $\sigma = \{\dot{+}, \dot{*}, \dot{\leq}, \dot{0}, \dot{1}\}$ und sei $\mathfrak{A}$ die arithmetische Struktur mit Universum $\mathbb{Z}$, die durch $\dot{\leq}^{\mathfrak{A}}$ total geordnet ist.
Finden Sie alle Teilmengen $\sigma' \subseteq \sigma$, sodass für das σ'-Redukt von $\mathfrak{A}$ (also $\mathfrak{A}\restriction_{\sigma'}$) gilt, dass die Abbildung $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert durch $\pi(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{Z}$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}\restriction_{\sigma'}$ nach $\mathfrak{A}\restriction_{\sigma'}$ ist.

$\dot{+}^{\mathfrak{A}}$ ✗ Frage fa x, y, Z $\quad (x+y)^2 \cancel{\stackrel{?}{=}} x^2 + y^2$

Gegenbeispiel $x = y = 3$ $\quad (x+y)^2 = 36 \quad x^2 + y^2 = 18$

$\dot{\leq}^{\mathfrak{A}}$ ✗ Frage fa $x, y \in Z$ $\quad x \dot{\leq}^{\mathfrak{A}} y \Leftrightarrow x \leq y$

$\pi(x) \dot{\leq}^{\mathfrak{A}} \pi(y) \quad x^2 \not\leq y^2$

Gegenbeispie $x = -2$, $y = -1$

$x^2 = 4 \quad y^2 = 1$

$\dot{1}^{\mathfrak{A}}$ ✓ $\quad 1^2 = 1 \quad \dot{1}^{\mathfrak{A}} = 1$

$\dot{0}^{\mathfrak{A}}$ ✓ $\quad 0^2 = 0$

$\dot{*}^{\mathfrak{A}}$ ✓ weil $(x \dot{*}^{\mathfrak{A}} y)^2 = (x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2 = x^2 \dot{*}^{\mathfrak{A}} y^2$

also sind die gesuchten Teilmenge σ' genau alle Teilmenge von $\{\dot{*}, \dot{1}, \dot{0}\}$