Herzlich willkommen zur 8. Übung

Präskriptive Entscheidungstheorie

Bitte halten Sie jede dritte Reihe im Hörsaal frei.

Übersicht der 8. Übung – Präskriptive Entscheidungstheorie

- Zielgewichte und Trade-off-Verfahren
- Aufgabe 4

- Bandbreiteneffekt
- Aufgabe 5

Zielgewichtung mit dem Trade-off-Verfahren

$$u(a) = \sum_{r=1}^{m} w_r u_r(a_r)$$

Ermittlung über „Trade-offs“ zwischen jeweils zwei Zielen

Beispiel eines Trade-offs („Jobwahl“):

(60 Stunden, 50.000 €) ~ (40 Stunden, 35.000 €)

Bei *m* Zielen genügen *m*-1 Trade-offs, um alle Zielgewichte zu ermitteln

Der Ermittlungsprozess bei einer Worst-Best-Eingrenzung

Mit Vergleich (x_1^+, x_2^-) vs. (x_1^-, x_2^+) starten,

bis Indifferenzaussage $\underbrace{(a_1, x_2^-) \sim (x_1^-, x_2^+)}$ oder $(x_1^+, x_2^-) \sim (x_1^-, a_2)$ gefunden ist.

$$w_1 = \frac{u_2(x_2^+) - u_2(x_2^-)}{u_1(a_1) - u_1(x_1^-)} w_2 = \frac{1}{u_1(a_1)} w_2$$

allgemein

$$w_1 = \frac{u_2(b_2) - u_2(a_2)}{u_1(a_1) - u_1(b_1)} w_2$$

Die Zielgewichte w_r sind lediglich Parameter, die Austauschraten zwischen Zielen beschreiben und nicht pauschal interpretiert werden können

Aufgabe 4 (Lehrbuch Teil III, S. 211-214)

Der Autofahrer Ulrich B. möchte sich einen neuen Pkw kaufen. Nach gründlicher Recherche im Internet kommen für ihn nur noch **drei Autos (A, B und C)** in Frage. Ulrich bewertet die Autos anhand der **Ziele „Preis“, „PS-Zahl“ und „Aussehen“**. Während Preis und PS direkt als Wert erfassbar sind, wird das Aussehen auf Basis einer subjektiven 10-Punkte-Skala angegeben, wobei 0 die schlechteste und 10 die beste Bewertung darstellt. Die folgende Tabelle fasst die Ausprägungen aller Pkw zusammen:

Pkw-Typ	**Preis** (in €)	**PS**	**Aussehen** (in Pkt.)
A	9000	60	4
B	17000	90	5
C	23000	125	7

Aufgabe 4 (Lehrbuch Teil III, S. 211-214)

Ulrich B. möchte die Pkw auf der Basis einer **additiven Nutzenfunktion** bewerten. Die Nutzenfunktion für das Ziel „Aussehen“ soll linear in der Bandbreite 0 und 10, die für den Preis linear in der Bandbreite 8.000 € und 28.000 € sein. Für die Nutzenfunktion der PS-Zahl wurden folgende Stützstellen ermittelt:

u(60 PS) = 0,2 | u(90 PS) = 0,5 | u(125 PS) = 0,7

Weiterhin hält Ulrich B. ein Auto, das 90 PS hat, und ein anderes Auto, das 60 PS hat, für gleichwertig, wenn das schwächere dafür um 4.000 € günstiger ist.

Ebenso ist er sich sicher, dass ein um einen Punkt besseres Aussehen einen Mehrpreis von 2.000 € rechtfertigt.

a) Bestimmen sie die Zielgewichte der additiven Nutzenfunktion!
b) Welcher Bewertungsaspekt ist Ulrich B. am wichtigsten?
c) Für welches Auto wird er sich entscheiden?

Aufgabe 4a – Lösung

a) Gegeben:

	Ziele	Bandbreite	Nutzenfunktion
1	Preis (in €)	[8.000; 28.000]	$u_1(8.000) = 1$, $u_1(28.000) = 0$, linear
2	PS-Zahl	n. bekannt	Stützstellen gegeben
3	Aussehen (in Pkt.)	[0; 10]	$u_3(0) = 0$, $u_3(10) = 1$, linear

2 Trade-offs (additive Nutzenfunktion):

- Preis vs. PS-Zahl
- Preis vs. Aussehen

Aufgabe 4a – Lösung Fortsetzung

Preis vs. PS-Zahl

(x €, 90 PS) ~ (x - 4000 €, 60 PS)

⇨ w_1u_1(x €) + w_2u_2(90 PS) = w_1u_1(x - 4000 €) + w_2u_2(60 PS)

⬄ $w_2[u_2$(90 PS) – u_2(60 PS)] = $w_1[u_1$(x - 4000 €) – u_1(x €)]

⬄ $w_2 = \frac{u_1(x-4000€)-u_1(x)}{u_2(90PS)-u_2(60PS)} w_1$

⬄ $w_2 = \frac{\Delta u_1(4000€)}{0{,}5-0{,}2} w_1$

⬄ $w_2 = \frac{0{,}2}{0{,}3} w_1$ ⬄ $w_2 = \frac{2}{3} w_1$

$\Delta u_1(4000€)$ muss noch bestimmt werden:

$$u(x) = mx + b$$

hier: $u(8000)$ =1 und $u(28000)$ =0

- $u_1(8000) = 8000m + b = 1$
- $u_1(28000) = 28000m + b = 0$

⬄ $m = -\frac{1}{20000}$ und b = $\frac{7}{5}$

Geradengleichung: $u_1(x) = -\frac{1}{20000}x + \frac{7}{5}$

→ $\Delta u_1(4000€) = 0{,}2$

EFi Entscheidungs-forschung & Finanzdienst-leistungen | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Aufgabe 4a – Lösung Fortsetzung

Preis vs. Aussehen

(x €, y Pkte.) ~ (x + 2000 €, y + 1 Pkte.)

⇔ w_1u_1(x €) + w_3u_3(y Pkte.) = w_1u_1(x + 2000 €) + w_3u_3(y+1 Pkt.)

⇔ w_3[u_3(y Pkte.) – u_3(y+1 Pkte.)] = w_1[u_1(x + 2000 €) – u_1(x €)]

$$w_3 = \frac{u_1(x+2000€) - u_1(x)}{u_3(y\ Pkte.) - u_3(y+1\ Pkte.)} w_1$$

$$w_3 = \frac{\Delta u_1(2000€)}{\Delta u_3(1\ Pkt.)} w_1$$

⇨ Da $\Delta u_1(2000€) = 0{,}1$ und $\Delta u_3(1\ Pkt.) = 0{,}1$ verfügen beide Ziele über das gleiche Gewicht. (Sonst wäre die Indifferenz nicht möglich.)

⇨ $w_3 = w_1$

Aufgabe 4a – Lösung Fortsetzung

Normierung:

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

$$\Rightarrow w_1 + \frac{2}{3} w_1 + w_1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{3} w_1 = 1$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{w_1 = \frac{3}{8} \Rightarrow w_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow w_3 = \frac{3}{8}}}$$

Aufgabe 4b – Lösung

b) Aussagen, ob ein Ziel „am wichtigsten“ im Vgl. zu anderen ist, sind nie möglich!

Beispiel:

Aussage des Entscheiders beim Autokauf: „Mir ist der Preis doppelt so wichtig wie die PS-Zahl.“

2 Alternativen:

Auto 1: 20.000 €, 120 PS
Auto 2: 19.999 €, 80 PS

Macht die Aussage noch Sinn?

➢ „Zielgewichte“ w_i können nicht als Wichtigkeiten interpretiert werden (es gibt kein wichtigstes Ziel).

Definition:

Zielgewicht = relative Bedeutung des Ziels für den Entscheider in Abhängigkeit von der Bandbreite

Aufgabe 4c – Lösung

c) Anwendung des additiven Modells:

$$u(A) = 0{,}375 \cdot 0{,}95 + 0{,}25 \cdot 0{,}2 + 0{,}375 \cdot 0{,}4 \approx 0{,}556$$

$$u(B) = 0{,}375 \cdot 0{,}55 + 0{,}25 \cdot 0{,}5 + 0{,}375 \cdot 0{,}5 \approx 0{,}519$$

$$u(C) = 0{,}375 \cdot 0{,}25 + 0{,}25 \cdot 0{,}7 + 0{,}375 \cdot 0{,}7 \approx 0{,}531$$

- Er sollte sich für Pkw A entscheiden!

Übersicht der 8. Übung – Präskriptive Entscheidungstheorie

✓Zielgewichte und Trade-off-Verfahren

✓Aufgabe 4

- Bandbreiteneffekt
- Aufgabe 5

Bandbreiten-Effekt

Die Veränderung einer Bandbreite in einer Präferenzmodellierung darf nicht zu anderen Entscheidungsrangfolgen führen

Geschieht dies dennoch, so liegt in der Methodik ein **Bandbreiten-Effekt** vor und die Entscheidungsempfehlung ist willkürlich!

- Vorsicht bei einer Zielgewichtung mit pauschaler Interpretation der Zielgewichte
- Im Trade-off-Verfahren gibt es keinen Bandbreiten-Effekt

Beispiel zum Bandbreiten-Effekt

Beispiel: $a = (35.000\ €, 50\ Std) \sim (30.000\ €, 40\ Std) = b$

	Fall A	Fall B
Anfangsgehalt	[30.000 €, 35.000 €]	[30.000 €, 40.000 €]
Arbeitszeit	[40 Std., 50 Std.]	

	Anfangsgehalt			**Arbeitszeit**			
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	$u(a)$-$u(b)$
	w_1	$u_1(35)$-$u_1(30)$	$= (1) \cdot (2)$ $w_1\ (u_1(35)$-$u_1(30))$	w_2	$u_2(50)$-$u_2(40)$	$= (4) \cdot (5)$ $w_2\ (u_2(50)$-$u_2(40))$	=(3)+(6)
Fall A	0,5	1	0,5	0,5	-1	-0,5	0
Fall B1	0,5	0,5	0,25	0,5	-1	-0,5	-0,25
Fall B2	1	0,5	0,5	0,5	-1	-0,5	0
Fall B3	2/3	0,5	1/3	1/3	-1	-1/3	0

Zielgewichte müssen sich immer Veränderungen in den Bandbreiten anpassen

Aufgabe 5 (Lehrbuch Teil III, S. 215-218)

Der preisbewusste und groß gewachsene Urlauber Peter K. möchte einen Flug nach Malaga buchen. Da ihm Zusatzleistungen wie Verpflegung an Bord egal sind, zählt für ihn primär der Preis, wobei er den Sitzabstand im Flugzeug aufgrund seiner langen Beine auch nicht unberücksichtigt lassen möchte.
Da er ein abgebrochenes BWL-Studium hinter sich hat, kommt er auf die Idee, sich systematisch zwischen den Angeboten der einzelnen Airlines zu entscheiden. Aufgrund ausführlicher Internetrecherchen weiß er bereits, dass der Flugpreis je nach Airline zwischen 100 € und 400 € liegen wird und der Sitzabstand bei den Gesellschaften zwischen 74 cm und 90 cm schwankt. Für ihn kommen drei Flugangebote in Frage:

Fluggesellschaft	Flugpreis (in €)	Sitzabstand (in cm)
SunAir (S)	195	78
AirSpain (A)	310	86
FlyAndalucia (F)	150	74

Aufgabe 5 (Lehrbuch Teil III, S. 215-218)

a) Peter denkt sich, dass ihm der Preis zwei Mal wichtiger als der Sitzabstand ist. Leider fiel sein Studienabbruch in das Entscheidungslehre-Semester. Wie wird er wahrscheinlich rechnen?

b) Weshalb kann aus den bisherigen Angaben keine fundierte Flugentscheidung resultieren?

c) Nach Durcharbeiten der alten Studienunterlagen überlegt sich Peter, dass er für 50 € Ersparnis auf 4 cm Beinfreiheit verzichtet. Er erachtet für beide Ziele eine lineare Nutzenfunktion für sinnvoll. Bestimmen Sie die Zielgewichte! (Es gelten o.g. Bandbreiten.) Für welche Airline wird sich Peter entscheiden?

d) Aufgrund einer neuen EU-Verordnung zur Senkung des CO_2-Ausstoßes wurde ein Mindestpreis für innereuropäische Flüge i.H.v. 150 € eingeführt. Welcher Flug ist für Peter nun am attraktivsten?

e) Ab welcher Bandbreite des Preises würde sich seine Entscheidung ändern?

Fluggesellschaft	Flugpreis (in €)	Sitzabstand (in cm)
SunAir (S)	195	78
AirSpain (A)	310	86
FlyAndalucia (F)	150	74

Aufgabe 5a und b – Lösung

a) Festlegung: Ziel 1: Preis

Ziel 2: Sitzabstand

Vermutl. Rechnung:

$w_1 = 2\, w_2$ mit $w_1 + w_2 = 1$

$\Rightarrow 2w_2 + w_2 = 1$

$\Leftrightarrow w_1 = 2/3 \Rightarrow w_2 = 1/3$

b) Weil pauschale Wichtigkeitsaussagen ohne explizite Berücksichtigung der Ausprägungen nur wenig Sinn machen. Es existiert stets eine Abhängigkeit der Zielgewichte von der Bandbreite!

Aufgabe 5c – Lösung

c) Gegebene Bandbreiten: Preis (in €): [100; 400]

Sitzabstand (in cm): [74; 90]

Lineare Nutzenfunktionen bestimmen:

$$u_1(100€) = 1,\ u_1(400€) = 0,\ u_1(x) = m \cdot x + t$$

$$\Rightarrow\ \underline{\underline{u_1(x) = -\frac{1}{300} \cdot x + \frac{4}{3}}}$$

$$u_2(90cm) = 1;\ u_2(74cm) = 0;\ u_2(x) = m \cdot x + t$$

$$\Rightarrow\ \underline{\underline{u_2(x) = \frac{1}{16} \cdot x - 4{,}625}}$$

Nutzenwerte:

Ges.	Preis	$u_1(x)$	Abst.	$u_2(x)$
S	195 €	0,683	78 cm	0,25
A	310 €	0,3	86 cm	0,75
F	150 €	0,833	74 cm	0

Trade-off: (x € Flugpreis; y cm Abstand) ~ (x - 50 € Flugpreis; y - 4 cm Abstand)

Aufgabe 5c – Lösung Fortsetzung

Zielgewichte per Direktformel (siehe Lehrbuch S. 212)

$$w_1 = \frac{u_2(y-4)-u_2(y)}{u_1(x)-u_1(x-50)} w_2 = \frac{\frac{1}{16}(y-4)-4{,}625-\left(\frac{1}{16}y-4{,}625\right)}{-\frac{1}{300}x+\frac{4}{3}-\left(-\frac{1}{300}(x-50)+\frac{4}{3}\right)} w_2 = \frac{-\frac{4}{16}}{-\frac{50}{300}} w_2 = 1{,}5 w_2$$

Mit $w_1 + w_2 = 1$

⇨ $1{,}5w_2 + w_2 = 1$ ⇨ $\mathbf{w_2 = 0{,}4}$ ⇨ $\mathbf{w_1 = 0{,}6}$

Nutzen der Flugangebote mittels des additiven Modells: $u(a) = \sum_{r=1}^{m} w_r u_r(a_r);$

$$u(S) = 0{,}6 \cdot 0{,}683 + 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}5098$$

$$u(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}75 = 0{,}48$$

$$u(F) = 0{,}6 \cdot 0{,}833 + 0{,}4 \cdot 0 = 0{,}4998$$

- Er wird das Flugangebot der SunAir wählen!

Aufgabe 5d – Lösung

d) Neue Bandbreite im Ziel Preis (in €): [150; 400]

Neue Nutzenfunktionen 1: $u_1(150€) = 1,\ u_1(400€) = 0,\ u_1(x) = m \cdot x + t$

$$\Rightarrow u_1(x) = -\frac{1}{250} \cdot x + 1{,}6$$

(Nutzenfunktion 2 bleibt gleich)

Neue Nutzenwerte:

Ges.	Preis	$u_1(x)$	Abst.	$u_2(x)$
S	195 €	***0,82***	78 cm	0,25
A	310 €	***0,36***	86 cm	0,75
F	150 €	***1***	74 cm	0

Aufgabe 5d – Lösung Fortsetzung

Trade-off: (x € Flugpreis; y cm Abstand) ~ (x – 50 € Flugpreis; y - 4 cm Abstand)

$$w_1 = \frac{u_2(y-4)-u_2(y)}{u_1(x)-u_1(x-50)}w_2 = \frac{\frac{1}{16}(y-4)-4{,}625-\left(\frac{1}{16}y-4{,}625\right)}{-\frac{1}{250}x+1{,}6-\left(-\frac{1}{250}(x-50)+1{,}6\right)}w_2 = \frac{-\frac{4}{16}}{-\frac{50}{250}}w_2 = 1{,}25w_2$$

Mit $w_1 + w_2 = 1$

⇨ $1{,}25w_2 + w_2 = 1$ ⇔ $\underline{\underline{w_2 = 4/9}}$ ⇨ $\underline{\underline{w_1 = 5/9}}$

Nutzen der Flugangebote:

$$u(S) = \frac{5}{9}\cdot 0{,}82 + \frac{4}{9}\cdot 0{,}25 = 0{,}567$$

$$u(A) = \frac{5}{9}\cdot 0{,}36 + \frac{4}{9}\cdot 0{,}75 = 0{,}533$$

$$u(F) = \frac{5}{9}\cdot 1 + \frac{4}{9}\cdot 0 = 0{,}556$$

➢ Er wird nach wie vor SunAir wählen!

Aufgabe 5e – Lösung

e) Die Entscheidung ist robust gegenüber der Bandbreite des Preises, da das Trade-off-Verfahren den Bandbreiteneffekt ausschließt und somit die relative Bewertung der Alternativen stets konstant bleibt. Es existiert daher keine Bandbreite des Preises, die seine Entscheidung ändern würde.

Übersicht der 8. Übung – Präskriptive Entscheidungstheorie

- ✓ Zielgewichte und Trade-off-Verfahren
- ✓ Aufgabe 4

- ✓ Bandbreiteneffekt
- ✓ Aufgabe 5