z.z. / Methode	Idee / Ansatz	Begründung / Argumentation	Beispiel
gar nicht axiomatisierbar (KS)	Finde ein unendliches Axiomensystem Ψ für eine Strukturklasse $\mathcal{K}' \subseteq \mathsf{Str}(\tau) - \mathcal{K}$, so dass jede endliche Teilmenge von Ψ ein Modell aus $\mathcal{K}$ besitzt (axiomatisiere also "gegenteilige Aussagen" durch Ψ).	• Angenommen Φ axiomatisiert $\mathcal{K}$; dann ist $\Phi \cup \Psi$ unerfüllbar! • Nach KS gibt es endliches unerfüllbares $\Phi_0 \subseteq \Phi \cup \Psi$. • Nach Wahl von Ψ gibt es ein Modell von Φ_0; Widerspruch.	$\mathcal{K}$: Klasse aller endlichen Mengen; wähle $\Psi = \Phi_\infty$.
nicht endlich axiomatisierbar (KS)	Wir nehmen an, ein unendliches Axiomensystem Φ für $\mathcal{K}$ zu kennen, welches aus gutem Grund unendlich viele Sätze benutzt. Genauer unterstellen wir, dass für jede endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ gilt: $\mathcal{K} \subsetneq \mathsf{Mod}(\Phi_0)$.	• Ang. φ axiomatisiert $\mathcal{K}$; dann $\mathsf{Mod}(\neg\varphi) = \mathsf{Str}(\tau) - \mathcal{K}$. • Demnach ist $\{\neg\varphi\} \cup \Phi$ unerfüllbar! • Nach KS gibt es endliches unerfüllbares $\Phi_0 \subseteq \{\neg\varphi\} \cup \Phi$. • Gebe nun ein Modell von Φ_0 an; Widerspruch.	$\mathcal{K}$: Klasse aller unendlichen Mengen; wähle $\Phi = \Phi_\infty$.
gar nicht axiomatisierbar (EF-Spiele)	Sei τ relational und abzählbar. Dann finde τ-Strukturen $(\mathfrak{A}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}_m \in \mathcal{K}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ aber $\mathfrak{B} \notin \mathcal{K}$. Um $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}$ zu zeigen, finde Gewinnstrategie für Duplikatorin in $G_m(\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B})$ (insb. für eine konstante Folge $\mathfrak{A}_m = \mathfrak{A}$ anwendbar, d.h. man findet $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}, \mathfrak{B} \notin \mathcal{K}$ mit $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$)	• Angenommen Φ axiomatisiert $\mathcal{K}$; dann $\mathfrak{B} \not\models \Phi$. • Wähle $\psi \in \Phi$ mit $\mathfrak{B} \not\models \psi$. Sei $m := \mathsf{qr}(\psi)$. • Wegen $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}$ gilt $\mathfrak{A}_m \not\models \psi$, also $\mathfrak{A}_m \not\models \Phi$; Widerspruch.	$\mathcal{K}$: Klasse aller abzählbaren Mengen; wähle $\mathfrak{A} = \mathbb{N}$, $\mathfrak{B} = \mathbb{R}$.
nicht endlich axiomatisierbar (EF-Spiele)	Wieder τ relational und abzählbar. Finde zwei Familien von τ-Strukturen $(\mathfrak{A}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(\mathfrak{B}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}_m$ und $\mathfrak{A}_m \in \mathcal{K}$ sowie $\mathfrak{B}_m \notin \mathcal{K}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Um $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}_m$ zu zeigen, finde Gewinnstrategie für Duplikatorin in $G_m(\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m)$.	• Angenommen φ axiomatisiert $\mathcal{K}$; wähle $l := \mathsf{qr}(\varphi)$. • Wegen $\mathfrak{A}_l \equiv_l \mathfrak{B}_l$ gilt also $\mathfrak{A}_l \models \varphi \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{B}_l \models \varphi$. • Wegen $\mathfrak{A}_l \in \mathcal{K}$ und $\mathfrak{B}_l \notin \mathcal{K}$: Widerspruch.	$\mathcal{K}$: Klasse aller unendlichen Mengen; wähle $\mathfrak{A}_m = \mathbb{N}$ und $\mathfrak{B}_m = \{1, \ldots, m\}$.
nicht axiomatisierbar (aufsteig. Löw.-Skolem)	Beinhaltet $\mathcal{K}$ beliebig große endliche aber keine unendlichen Strukturen, so kann man sofort den aufsteigenden Satz Löw.-Skolem benutzen.	• Angenommen Φ axiomatisiert eine solche Strukturklasse $\mathcal{K}$. • Nach dem aufsteigenden Satz von Löw.-Skolem hat Φ ein unendliches Modell $\mathfrak{A}$. • Da keine unendliche Struktur in $\mathcal{K}$ enthalten ist: Widerspruch.	$\mathcal{K}$: Klasse aller endlichen Mengen.
nicht axiomatisierbar (Löw.-Skolem)	Beinhaltet $\mathcal{K}$ unendliche Strukturen und zwar ausschließlich solche, deren Kardinalität sich global "beschränken" lässt, so kann man die Löw.-Skolem-Sätze verwenden. Für jedes Axiomensystem findet man dann nämlich sehr kleine unendliche (abzählbare) Modelle und beliebig große unendliche Modelle.	• Beinhaltet $\mathcal{K}$ nur unendliche Strukturen $\mathfrak{A}$ mit Mächtigkeit $\lvert A\rvert < \lvert M\rvert$ für feste Menge M, so verwende aufsteigenden Satz von Löw.-Skolem und erhalte für hypoth. Axiomensystem Φ ein Modell mit Mächtigkeit $\geq \lvert M\rvert$; Widerspruch. • Beinhaltet $\mathcal{K}$ nur unendliche Strukturen $\mathfrak{A}$ mit Mächtigkeit $\lvert A\rvert > \lvert\mathbb{N}\rvert$, verwende absteigenden Satz von Löw.-Skolem und erhalte für hypoth. Axiomensystem Φ ein abzählbares Modell; Widerspruch.	$\mathcal{K}$: die Isomorphieklasse einer unendlichen Struktur.