Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2021

Klausur Mathematische Logik

Nachname:	
Vorname:	
Matr.-Nr.:	
Studiengang:	

1	2	3	4	5	6	7
/22	/21	/16	/13	/14	/10	/24

Summe:	/120

Hinweise

Unsere Regeln für die Klausur: Es sind *keine* Hilfsmittel (Skripte, Bücher, Mitschriften oder dergleichen) zugelassen.

Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Es darf *kein* zusätzliches Papier ausgegeben werden. Der Platz zur Bearbeitung der Aufgaben ist daher großzügig bemessen. Wenn der Platz unter einer Aufgabe nicht ausreicht, können Sie die freien Seiten am *Ende* der Klausur nutzen und darauf *verweisen.*

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Hiermit bestätige ich, dass ich obige Hinweise zur Kenntnis genommen habe und prüfungsfähig bin.

Unterschrift

Aufgabe 1 22 Punkte

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Behauptungen wahr sind. Begründen Sie Ihre Antworten durch kurze Beweisskizzen unter Einbeziehung von Ergebnissen aus der Vorlesung, oder durch geeignete Gegenbeispiele.

(a) $T = \{\exists x(x = x), \forall x(x = x)\}$ ist eine Theorie.

(b) $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} Ex_nx_{n+1}$ ist eine FO($\{E\}$)-Formel. Dabei ist E ein zweistelliges Relationssymbol.

(c) Sei Φ eine Menge von FO-Sätzen, sodass jeder FO-Satz ψ, der logisch äquivalent zu einer beliebigen Teilmenge $\Psi \subseteq \Phi$ ist, erfüllbar ist. Dann ist Φ erfüllbar.

(d) Es gibt einen Algorithmus, der einen FO-Satz φ als Eingabe bekommt und entscheidet, ob die Sequenz $\varphi \wedge \neg\varphi \Rightarrow \varphi$ gültig ist.

(e) Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei nicht-isomorphe relationale τ-Strukturen. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, sodass der Herausforderer eine Gewinnstrategie im Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ hat.

(f) Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, in dem genau ein Knoten den Grad 3 hat. Dann ist G starr.

(g) Sei τ endlich, $\mathfrak{A}$ eine endliche τ-Struktur und φ, ψ $\mathrm{FO}(\tau)$-Sätze. Wenn der Falsifizierer das Spiel $\mathsf{MC}(\mathfrak{A}, \varphi)$ gewinnt und die Verifiziererin das Spiel $\mathsf{MC}(\mathfrak{A}, \psi)$ gewinnt, dann gilt $\mathfrak{A} \models \varphi \to \psi$.

(h) Die aussagenlogische Sequenz $(X \vee Y), (Z \to (W \to X)) \Rightarrow W, \neg Z$ ist gültig.

(i) Seien $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ zwei Klassen von τ-Strukturen und sei Φ_1 ein Axiomensystem für $\mathcal{K}_1$ sowie Φ_2 ein Axiomensystem für $\mathcal{K}_2$. Dann ist $\Phi_1 \cup \Phi_2$ ein Axiomensystem für $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$.

Aufgabe 2 21 Punkte

(a) Gibt es einen Algorithmus, der entscheidet, ob eine aussagenlogische Sequenz gültig ist? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

(b) (i) Verwenden Sie den Markierungsalgorithmus aus der Vorlesung, um zu entscheiden, ob die folgende Horn-Formel erfüllbar ist. Geben Sie dazu die Menge der markierten Variablen nach jedem Schritt an. Falls die Formel erfüllbar ist, geben Sie am Ende das berechnete kleinste Modell an. Falls die Formel unerfüllbar ist, geben Sie an, wie der Algorithmus dies feststellt.

$$(A \to D) \wedge (1 \to C) \wedge (A \wedge B \wedge C \to E) \wedge (A \wedge B \to 0) \wedge (1 \to A) \wedge (B \to D) \wedge (C \wedge D \to A)$$

(ii) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgende Formel logisch äquivalent zu einer Horn-Formel ist.

$$\psi := (X \vee Y) \wedge (1 \to Y) \wedge (\neg Y \vee \neg Z \vee X)$$

(c) Verwenden Sie die Resolutionsmethode aus der Vorlesung, um zu zeigen, dass die folgende Folgerungsbeziehung gilt.

$$\underbrace{\{X \to Z, \neg Y \wedge \neg Z\}}_{\Phi} \models \underbrace{\neg(X \vee Y)}_{\psi}$$

(d) (i) Verwenden Sie den Sequenzenkalkül der Prädikatenlogik, um zu zeigen, dass die folgende Sequenz gültig ist.

$$\forall x(fx < x) \;\Rightarrow\; \exists x \exists y(x < y)$$

Nutzen Sie dabei ausschließlich die folgenden Schlussregeln aus der Vorlesung.

$$(=) : \frac{\Gamma, t = t \;\Rightarrow\; \Delta}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta}$$

$$(S \Rightarrow) : \frac{\Gamma, \psi(t) \;\Rightarrow\; \Delta}{\Gamma, t \doteq t', \psi(t') \;\Rightarrow\; \Delta} \qquad (\Rightarrow S) : \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi(t)}{\Gamma, t \doteq t' \;\Rightarrow\; \Delta, \psi(t')}$$

$$(\neg \Rightarrow) : \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi}{\Gamma, \neg\psi \;\Rightarrow\; \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg) : \frac{\Gamma, \psi \;\Rightarrow\; \Delta}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \neg\psi}$$

$$(\vee \Rightarrow) : \frac{\Gamma, \psi \;\Rightarrow\; \Delta \qquad \Gamma, \vartheta \;\Rightarrow\; \Delta}{\Gamma, \psi \vee \vartheta \;\Rightarrow\; \Delta} \qquad (\Rightarrow \vee) : \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi, \vartheta}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi \vee \vartheta}$$

$$(\wedge \Rightarrow) : \frac{\Gamma, \psi, \vartheta \;\Rightarrow\; \Delta}{\Gamma, \psi \wedge \vartheta \;\Rightarrow\; \Delta} \qquad (\Rightarrow \wedge) : \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi \qquad \Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \vartheta}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi \wedge \vartheta}$$

$$(\rightarrow \Rightarrow) : \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi \qquad \Gamma, \vartheta \;\Rightarrow\; \Delta}{\Gamma, \psi \rightarrow \vartheta \;\Rightarrow\; \Delta} \qquad (\Rightarrow \rightarrow) : \frac{\Gamma, \psi \;\Rightarrow\; \Delta, \vartheta}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi \rightarrow \vartheta}$$

$$(\exists \Rightarrow) : \frac{\Gamma, \psi(c) \;\Rightarrow\; \Delta}{\Gamma, \exists x \psi(x) \;\Rightarrow\; \Delta} \quad (*) \qquad (\Rightarrow \exists) : \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi(t)}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \exists x \psi(x)}$$

$$(\forall \Rightarrow) : \frac{\Gamma, \psi(t) \;\Rightarrow\; \Delta}{\Gamma, \forall x \psi(x) \;\Rightarrow\; \Delta} \qquad (\Rightarrow \forall) : \frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \psi(c)}{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \forall x \psi(x)} \quad (*)$$

$(*)$ wenn c in Γ, Δ und ψ nicht vorkommt

(ii) Zeigen oder widerlegen Sie semantisch, dass die folgende *aussagenlogische* Schlussregel korrekt ist. Verwenden Sie insbesondere *keine* Ableitungen im Sequenzenkalkül.

$$\frac{\Gamma \;\Rightarrow\; \Delta, \varphi \qquad \Gamma', \varphi \;\Rightarrow\; \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \;\Rightarrow\; \Delta, \Delta'}$$

Aufgabe 3 16 Punkte

(a) Formalisieren Sie die folgenden Eigenschaften von partiellen Ordnungen $\mathfrak{A} = (A, <)$ jeweils durch einen FO$(\{<\})$-Satz. Die Korrektheit der Formeln muss nicht bewiesen werden.

Zur Erinnerung: Partielle Ordnungen werden axiomatisiert durch

$$\psi_{\text{PO}} := \forall x(\neg\, x < x) \wedge \forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z).$$

(i) Es gibt eine Kette mit 42 Elementen.

Hinweis: Eine *Kette* C in einer Ordnung $(A, <)$ ist eine durch $<$ linear geordnete Teilmenge $C \subseteq A$.

(ii) Es gibt zwei minimale Elemente.

(b) Sei $\Sigma := \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Für nicht-leere Wörter $w = w_0 \dots w_{n-1} \in \Sigma^*$ der Länge n definieren wir jeweils die *Wortstruktur*

$$\mathfrak{B}(w) = (\{0, 1, \dots, n-1\}, <, 0, P_a, P_b, P_c),$$

wobei 0 und $<$ wie üblich definiert sind. Die Relationen P_a, P_b und P_c enthalten jeweils die Indizes der Stellen, an denen der jeweilige Buchstabe steht.

Formal ist $P_s = \{i < n \mid w_i = s\}$ für $s \in \Sigma$. Für das Wort $abbcab$ erhalten wir zum Beispiel $P_a = \{0, 4\}$, $P_b = \{1, 2, 5\}$ und $P_c = \{3\}$.

Formalisieren Sie die folgenden Worteigenschaften jeweils durch einen FO$(\{<, 0, P_a, P_b, P_c\})$-Satz. Die Korrektheit der Formeln muss nicht bewiesen werden.

(i) Direkt nach jedem a muss ein c stehen.

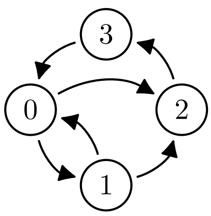
(ii) Falls im Wort ein b vorkommt, dann nur an der ersten Stelle.

(c) Betrachten Sie die folgende Formelmenge. *(Bitte die Negation nicht übersehen!)*

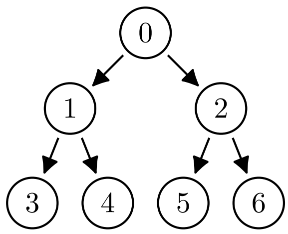
$$\Phi := \left\{ \neg \underbrace{\exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{i=1}^{n-1} E x_i x_{i+1} \wedge E x_n x_1 \right)}_{=:\varphi_n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \right\}$$

Geben Sie jeweils *mit kurzer Begründung* an, welche der folgenden vier Strukturen Φ erfüllen und welche nicht.

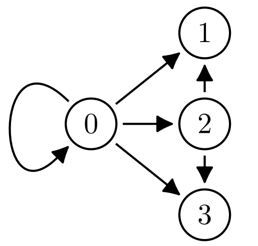
(i) $\mathcal{G}_1 = (V_1, E_1)$:



(ii) $\mathcal{G}_2 = (V_2, E_2)$:



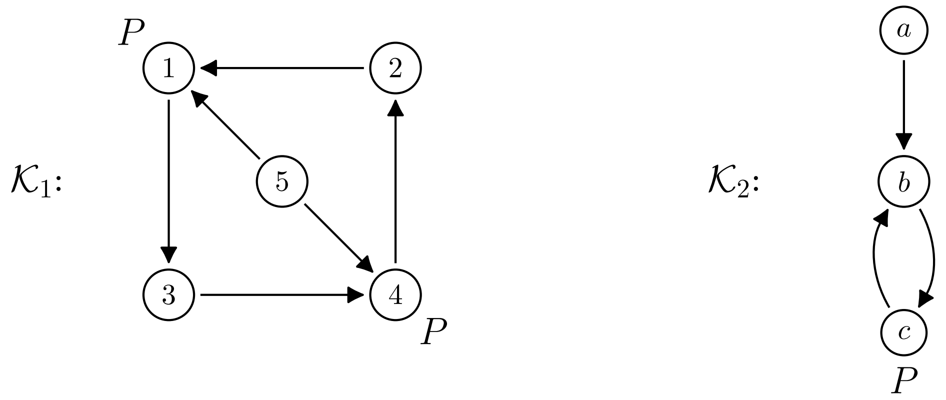
(iii) $\mathcal{G}_3 = (V_3, E_3)$:



(iv) $\mathcal{G}_4 := (\mathbb{N}, E_4)$ mit $E_4 := \{(i, i+1) \in \mathbb{N}^2 \mid i \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 4 13 Punkte

(a) Betrachten Sie die beiden Transitionssysteme $\mathcal{K}_1 := (V_1, E^{\mathcal{K}_1}, P^{\mathcal{K}_1})$ und $\mathcal{K}_2 := (V_2, E^{\mathcal{K}_2}, P^{\mathcal{K}_2})$.



Geben Sie ohne Beweis eine maximale Bisimulation $Z \subseteq V_1 \times V_2$ zwischen $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ an.

(b) Wir betrachten Transitionssysteme der Form $\mathcal{K} = (V, E, P, Q)$, wobei V die Knotenmenge ist, E die einzige Kantenrelation ist und P und Q atomare Eigenschaften sind.

Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Eigenschaften von Transitionssystemen $\mathcal{K}$ mit ausgewähltem Knoten v durch eine modallogische Formel definierbar sind. (Falls Sie eine Formel angeben, erklären Sie kurz die Idee Ihrer Formel.)

(i) Von v ist ein Knoten erreichbar, der eine direkte Kante zu v hat.

(ii) Alle Nachfolger von v, die Terminalknoten sind, müssen in Q sein.
Hinweis: Ein Terminalknoten ist ein Knoten ohne Nachfolger.

(iii) Alle Nachfolger von v sind in P und v hat mindestens zwei Nachfolger.

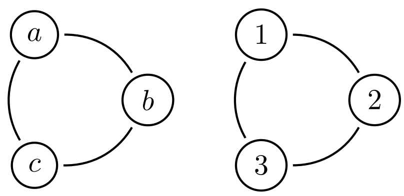
Aufgabe 5 14 Punkte

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn eine Menge M in einer Struktur $\mathfrak{A}$ elementar definierbar ist, dann gilt für jeden Automorphismus π von $\mathfrak{A}$ und alle $m \in M$, dass $\pi(m) \in M$.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, ob die angegebene Relation in der gegebenen Struktur elementar definierbar ist. Wenn Sie Automorphismen benutzen, genügt es, diese anzugeben. Sie müssen nicht formal beweisen, dass eine Abbildung ein Automorphismus ist.

(i) Die Relation $R = \{(v, w) \mid w \text{ ist von } v \text{ aus erreichbar}\}$ in folgendem ungerichteten Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$.

$\mathcal{G}$:

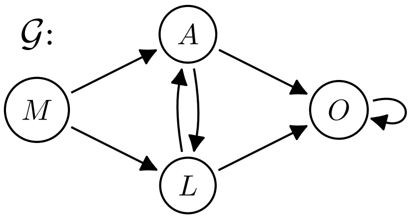


(ii) Das Element 2 in $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, \mathsf{cube}, +)$ mit $\mathsf{cube}(x) := x^3$.

(iii) Die unten angegebene Funktion f in folgendem gerichteten Graphen $\mathcal{G} = (V, E)$.

$$f\colon \begin{array}{c} M \mapsto A \\ A \mapsto L \\ L \mapsto O \\ O \mapsto O \end{array}$$

$\mathcal{G}$:



(iv) Die Menge $\mathbb{N}$ in $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, \mathsf{abs})$, wobei $\mathsf{abs}(z) := |z|$ die Betragsfunktion ist.

Aufgabe 6 10 Punkte

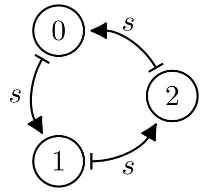
(a) Betrachten Sie die Strukturen $\mathfrak{A}_3 := (A_3 = \{0,1,2\}, s^{\mathfrak{A}_3})$ und $\mathfrak{A}_4 := (A_4 = \{0,1,2,3\}, s^{\mathfrak{A}_4})$ mit den *Funktionen* $s^{\mathfrak{A}_3} \colon A_3 \to A_3$ und $s^{\mathfrak{A}_4} \colon A_4 \to A_4$, die definiert sind als

$$s^{\mathfrak{A}_3}(x) := (x+1) \mod 3 \quad \text{und} \quad s^{\mathfrak{A}_4}(x) := (x+1) \mod 4.$$

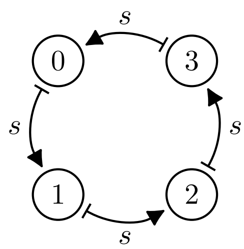
(i) Geben Sie zunächst einen Satz $\psi \in \mathrm{FO}(\{s\})$ mit möglichst kleinem Quantorenrang an, der $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{A}_4$ trennt. Sie brauchen die Korrektheit nicht zu beweisen.

(ii) Betrachten Sie nun die beiden Graphen $\mathfrak{A}'_3 = (A_3, E^{\mathfrak{A}_3})$ und $\mathfrak{A}'_4 = (A_4, E^{\mathfrak{A}_4})$, wobei die Kantenrelationen $E^{\mathfrak{A}_i}$ jeweils die Funktionsgraphen der Funktionen $s^{\mathfrak{A}_i}$ für $i \in \{3,4\}$ sind.

$\mathfrak{A}'_3$:



$\mathfrak{A}'_4$:



Geben Sie eine Gewinnstrategie an, mit der der Herausforderer das Ehrenfeucht–Fraïssé-Spiel $G(\mathfrak{A}'_3, \mathfrak{A}'_4)$ in möglichst wenigen Zügen gewinnt. Begründen Sie kurz, warum diese Strategie tatsächlich immer zum Sieg des Herausforderers führt.

(iii) Der Satz von Ehrenfeucht–Fraïssé besagt, dass für zwei τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Duplikatorin genau dann eine Gewinnstrategie im Ehrenfeucht–Fraïssé-Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ hat, wenn $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$ gilt.

Der Satz gilt jedoch nicht für beliebige Signaturen τ. Welche Eigenschaften muss τ laut Vorlesung erfüllen, damit der Satz von Ehrenfeucht–Fraïssé gilt?

(b) Sei T die Theorie der *gerichteten* Graphen *ohne* Schleifen mit *genau zwei* Knoten. T wird axiomatisiert durch

$$\Phi := \{\forall x(\neg Exx), \exists x_1 \exists x_2 (x_1 \neq x_2 \wedge \forall y(y = x_1 \vee y = x_2))\}.$$

Geben Sie für jede vollständige Erweiterung von T jeweils ein *endliches Axiomensystem* an.

Aufgabe 7 24 Punkte

(a) Geben Sie für folgende Klassen von Strukturen jeweils ein, wenn möglich endliches, Axiomensystem an. Sollten Sie kein (endliches) Axiomensystem angeben, so beweisen Sie, dass es kein (endliches) Axiomensystem gibt.

(i) $\mathcal{K}_1 := \{(A, \sim, P) \mid \sim \subseteq (A \setminus P) \times (A \setminus P)$ und $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation$\}$

(ii) Die Klasse $\mathcal{K}_2$ aller überabzählbaren Gruppen über $\tau = \{+\}$.

Zur Erinnerung: Die Klasse der Gruppen über $\{+\}$ wird axiomatisiert durch

$$\Phi_{\text{Gruppe}} = \{\forall x \forall y \forall z((x + y) + z = x + (y + z)), \exists x \forall y(x + y = y \wedge \exists z(z + y = x))\}.$$

(iii) Die Klasse $\mathcal{K}_3$ aller deterministischen, endlichen Automaten $(A, Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Genauer bedeutet dies $A = Q \cup \Sigma$, δ ist der Graph einer Funktion $Q \times \Sigma \to Q$, $q_0 \in Q$ und $F \subseteq Q$. Dabei ist die Signatur $\tau = \{Q, \Sigma, \delta, q_0, F\}$, wobei Q, Σ, F einstellige Relationssymbole sind, δ ein dreistelliges Relationssymbol und q_0 ein Konstantensymbol.

(iv) Die Klasse $\mathcal{K}_4$ aller ungerichteten Graphen (V, E), sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $m > n$ existiert, für welches eine Clique der Größe m ein Teilgraph von (V, E) ist.

Zur Erinnerung: Die Klasse der ungerichteten Graphen wird axiomatisiert durch

$$\Phi_{\text{Graph}} = \{\forall x(\neg Exx), \forall x \forall y(Exy \to Eyx)\}.$$

(b) Wir wollen die Klasse $\mathcal{K}$ aller $\{f\}$-Strukturen axiomatisieren, für die es zu jedem Element a eine natürliche Zahl $n > 0$ gibt sodass $f^n(a) = a$ gilt. Hierbei ist f eine einstellige Funktion und f^n eine Kurzschreibweise für die n-fache Hintereinanderausführung von f. Wir haben zwei verschiedene Axiomensysteme Ψ_1 und Ψ_2 aufgestellt. Leider enthalten beide Systeme einen Fehler, sodass $\mathsf{Mod}(\Psi_1) \subsetneq \mathcal{K}$ und $\mathsf{Mod}(\Psi_2) \supsetneq \mathcal{K}$ gilt.

Beweisen Sie diese beiden Behauptungen, indem Sie (i) eine Struktur aus $\mathcal{K}$ angeben, die Ψ_1 nicht erfüllt und (ii) ein Modell von Ψ_2 angeben, welches nicht in $\mathcal{K}$ liegt.

(i) $\Psi_1 := \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, wobei

$$\varphi_n := \forall a(f^n a = a).$$

(ii) $\Psi_2 := \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 2}\}$, wobei

$$\psi_n := \forall a \left(\Big(\bigvee_{0<k<m\leq n} f^k a = f^m a \Big) \rightarrow \bigvee_{0<m\leq n} f^m a = a \right).$$

(c) Zeigen Sie, dass das Vorhaben aus der vorigen Teilaufgabe zum Scheitern verurteilt war, indem Sie beweisen, dass die Klasse

$$\mathcal{K} = \{(A, f) \mid \text{für alle } a \in A \text{ gibt es ein } n > 0 \text{ mit } f^n(a) = a\}$$

nicht FO-axiomatisierbar ist.