Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2020

2. Klausur Mathematische Logik

Name:	
Vorname:	
Matr.-Nr.:	
Studiengang:	

1	2	3	4	5	6	7
/ 25	/ 20	/ 15	/ 12	/ 15	/ 19	/ 14

Summe:	/ 120

Lösung

Hinweise

Unsere Regeln für die Klausur: Es sind *keine* Hilfsmittel (Skripte, Bücher, Mitschriften oder dergleichen) zugelassen.

Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Es darf *kein* zusätzliches Papier ausgegeben werden. Der Platz zur Bearbeitung der Aufgaben ist daher großzügig bemessen.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Hiermit bestätige ich, dass ich obige Hinweise zur Kenntnis genommen habe und prüfungsfähig bin.

Unterschrift

Aufgabe 1 25 Punkte

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Behauptungen wahr sind. Begründen Sie Ihre Antworten durch kurze Beweisskizzen unter Einbeziehung von Ergebnissen aus der Vorlesung, oder durch geeignete Gegenbeispiele.

(a) Seien $\Phi, \Psi \subseteq \text{AL}$ und $\varphi, \psi \in \text{AL}$. Wenn $\Phi \models \varphi$ und $\Psi \models \psi$, dann auch $\Phi \cup \Psi \models \varphi \wedge \psi$.

Lösung (2 Punkte):

Wahr. Angenommen, die Folgerungen $\Phi \models \varphi$ und $\Psi \models \psi$ gelten. Sei $\mathfrak{I}$ eine zu Φ, Ψ, φ und ψ passende Interpretation, sodass $\mathfrak{I} \models \Phi \cup \Psi$. Dann erfüllt $\mathfrak{I}$ insbesondere die Teilmengen Φ und Ψ. Nach Annahme gilt damit $\mathfrak{I} \models \varphi$ bzw. $\mathfrak{I} \models \psi$. Also $\mathfrak{I} \models \varphi \wedge \psi$ und die Folgerung gilt.

(b) Seien φ und ψ logisch äquivalente AL-Formeln in KNF. Dann gilt $\varphi = \psi$.

Lösung (2 Punkte):

Falsch. Gegenbeispiel: $\varphi = X$, $\psi = X \wedge X$. Die Formeln sind beide in KNF und logisch äquivalent, jedoch syntaktisch verschieden.

(c) Die AL-Formel $\varphi = X \to \neg X$ ist erfüllbar.

Lösung (2 Punkte):

Wahr. Die Interpretation $\mathfrak{I} : X \mapsto 0$ ist ein Modell von φ.

(d) Die Menge $\{\rightarrow, \oplus\}$ ist funktional vollständig (hierbei ist $\oplus$ das exklusive oder).

Lösung (2 Punkte):

Wahr. Zunächst ist $0 \equiv X \oplus X$. *Damit können wir* $\neg\varphi \equiv \varphi \rightarrow 0$ *darstellen, dann* $\psi \vee \varphi \equiv \neg\psi \rightarrow \varphi$. *Die Menge* $\{\vee, \neg\}$ *ist (nach VL) funktional vollständig.*

Bemerkung: Auch die Mengen $\{\rightarrow, 0\}$ *und* $\{\rightarrow, \neg\}$ *sind nach VL bereits funktional vollständig, der Beweis kann also abgekürzt werden.*

(e) $\exists x(x = y \rightarrow \forall y\,(\neg\, fyy = x \,\vee\, \neg\, x))$ ist eine $\mathrm{FO}(\{f\})$-Formel, wobei f ein zweistelliges Funktionssymbol ist.

Lösung (2 Punkte):

Falsch. Der Teilausdruck $\neg\, x$ *ist keine syntaktisch korrekte FO-Formel (bei* x *handelt es sich um einen Term, jedoch nicht um eine FO-Formel).*

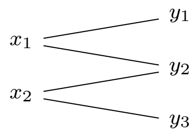
(f) Folgende Sequenz ist gültig (hierbei ist E ein zweistelliges Relationssymbol und c, d sind Konstantensymbole):

$$\exists x Ecx, Edd \;\Rightarrow\; Ecd$$

Lösung (2 Punkte):

Falsch. Eine falsifizierende Interpretation ist $\mathfrak{A} = (\{0,1\}, E^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}}, d^{\mathfrak{A}})$ *mit* $c^{\mathfrak{A}} = 0$, $d^{\mathfrak{A}} = 1$ *und* $E^{\mathfrak{A}} = \{(0,0),(1,1)\}$. *Dann gilt* $\mathfrak{A} \models Ecc$ *(und damit* $\mathfrak{A} \models \exists x\, Ecx$*) sowie* $\mathfrak{A} \models Edd$*, jedoch* $\mathfrak{A} \not\models Ecd$.

(g) Sei $\mathfrak{G} = (V, E)$ der rechts angegebene ungerichtete Graph. Sei $\sim$ die kleinste Relation mit $x_i \sim x_j$ für alle $i, j \in \{1, 2\}$ und $y_i \sim y_j$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Dann ist $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{G}$.



Lösung (2 Punkte):

Falsch. Wegen $x_1 \sim x_1$ und $y_1 \sim y_3$ müsste für eine Kongruenzrelation gelten, dass $(x_1, y_1) \in E$ gdw. $(x_1, y_3) \in E$. Es jedoch $(x_1, y_1) \in E$ und $(x_1, y_3) \notin E$. Somit ist $\sim$ keine Kongruenzrelation.

(h) Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei $\{R\}$-Strukturen. Wenn R ein zweistelliges Relationssymbol ist, dann gewinnt die Duplikatorin das Spiel $G_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Lösung (2 Punkte):

Falsch. Gegenbeispiel: $\mathfrak{A} = (\{150\}, R^{\mathfrak{A}})$ mit $R^{\mathfrak{A}} = \varnothing$ und $\mathfrak{B} = (\{150\}, R^{\mathfrak{B}})$ mit $R^{\mathfrak{B}} = \{(150, 150)\}$. Der Satz $\exists x\, Rxx$ gilt nur in $\mathfrak{B}$ und hat Quantorenrang 1, somit gewinnt der Herausforderer $G_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

(i) Sei $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ eine vollständige Theorie. Dann gibt es (bis auf Isomorphie) genau eine τ-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models T$.

Lösung (3 Punkte):

Falsch. Wir geben zwei mögliche Argumentationen an:

- *Über LS: Sei $\mathfrak{A}$ eine unendliche Struktur. Die Theorie $Th(\mathfrak{A})$ ist vollständig (nach VL). Da $Th(\mathfrak{A})$ mit $\mathfrak{A}$ ein unendliches Modell hat, gibt es nach aufsteigendem Satz von Löwenheim-Skolem beliebig große (und damit nicht zu $\mathfrak{A}$ isomorphe) Modelle von $Th(\mathfrak{A})$.*
- *Konkretes Beispiel: Die Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte ist nach VL/Übung vollständig und hat die Modelle $(\mathbb{Q}, <)$ und $(\mathbb{R}, <)$, die aufgrund der unterschiedlichen Mächtigkeit nicht isomorph sind.*

(j) Die Abbildung $\pi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto -a$ ist ein Automorphismus der Struktur $(\mathbb{R}, \cdot)$, wobei $\cdot$ die übliche Multiplikation auf den reellen Zahlen sei.

Lösung (2 Punkte):

Falsch. Die Abbildung ist nicht verträglich mit $\cdot$, z.B. ist $\pi(2) \cdot \pi(3) = 6$, aber $\pi(2 \cdot 3) = -6$.

(k) Es gibt einen Algorithmus, der für eine AL-Formel φ entscheidet, ob es *genau ein* Modell über der Variablenmenge $\tau(\varphi)$ gibt.

Lösung (2 Punkte):

Wahr. Über der endlichen Variablenmenge $\tau(\varphi)$ gibt es $2^{|\tau(\psi)|}$ mögliche Interpretationen, also nur endlich viele. Wir können daher alle Interpretationen durchgehen und zählen, wie viele davon Modell von φ sind.

(l) Seien $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ Transitionssysteme und v, v' Zustände aus $\mathcal{K}$ bzw. $\mathcal{K}'$. Wenn $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$, dann gilt für alle $\mathrm{FO}(\{E\})$-Formeln $\varphi(x)$, dass $\mathcal{K} \models \varphi(v)$ gdw. $\mathcal{K}' \models \varphi(v')$.

Lösung (2 Punkte):

Falsch. Gegenbeispiel:

Es gilt $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$, jedoch gilt für $\varphi(x) = Exx$ nur $\mathcal{K} \models \varphi(v)$.

Aufgabe 2 20 Punkte

(a) Was besagt die Vollständigkeit des Resolutionskalküls?

Lösung (2 Punkte):

Aus jeder unerfüllbaren Klauselmenge K lässt sich mittels Resolventenbildung die leere Klausel ableiten (d.h. $\square \in Res^*(K)$).

(b) Wenden Sie den Markierungsalgorithmus an, um zu entscheiden, ob folgende Horn-Formel erfüllbar ist. Geben Sie dazu die Menge der markierten Variablen nach jedem Schritt an. Falls die Formel erfüllbar ist, geben Sie außerdem das berechnete minimale Modell an.

$$(X \to U) \land \underbrace{(\neg X \lor Y \lor \neg W)}_{(X \land W \to Y)} \land ((S \land Z) \to 0) \land X \land (1 \to W) \land ((U \land W) \to Z)$$

Lösung (5 Punkte):

Markierte Variablen nach jedem Schritt:

- $M_0 = \varnothing$ *(muss nicht angegeben werden),*
- $M_1 = M_0 \cup \{X, W\}$,
- $M_2 = M_1 \cup \{U, Y\}$,
- $M_3 = M_2 \cup \{Z\}$,
- $M_4 = M_3$, *d.h. es werden keine weiteren Variablen markiert.*

Damit ist die Formel erfüllbar und hat das folgende minimale Modell:

$$\mathfrak{I} : \{X, Y, Z, U, W, S\} \to \{0, 1\},\ v \mapsto \begin{cases} 0, & \textit{falls } v = S, \\ 1, & \textit{sonst} \end{cases}$$

(c) Geben Sie für die folgende Sequenz im Sequenzenkalkül eine Ableitung aus Axiomen an. Verwenden Sie ausschließlich die aus der Vorlesung bekannten Schlussregeln.

$$\exists x(\varphi(x) \to \psi(x)) \Rightarrow \exists x\, \neg\varphi(x),\ \exists x \psi(x)$$

Zur Erinnerung einige der bekannten Schlussregeln:

$$(S \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow S)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}$$

$$(\neg \Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma, \neg\psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg)\ \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \vee \vartheta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \vartheta}$$

$$(\to\Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \to \vartheta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\to)\ \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \to \vartheta}$$

$$(\exists \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta}\ ^{*} \qquad (\Rightarrow \exists)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)}$$

*wenn c in Γ, Δ und ψ nicht vorkommt

Lösung (5 Punkte):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi(c) \Rightarrow \exists x\psi(x), \varphi(c)}{\varnothing \Rightarrow \neg\varphi(c),\ \exists x\psi(x), \varphi(c)}\ (\Rightarrow \neg)}{\varnothing \Rightarrow \exists x\, \neg\varphi(x),\ \exists x\psi(x), \varphi(c)}\ (\Rightarrow \exists) \qquad \dfrac{\psi(c) \Rightarrow \exists x\, \neg\varphi(x),\ \psi(c)}{\psi(c) \Rightarrow \exists x\, \neg\varphi(x),\ \exists x\psi(x)}\ (\Rightarrow \exists)}{\varphi(c) \to \psi(c) \Rightarrow \exists x\, \neg\varphi(x),\ \exists x\psi(x)}\ (\to\ \Rightarrow)}{\exists x(\varphi(x) \to \psi(x)) \Rightarrow \exists x\, \neg\varphi(x),\ \exists x\psi(x)}\ (\exists \Rightarrow)$$

(d) Beweisen oder widerlegen Sie jeweils *semantisch* (d.h. *nicht* mittels Ableitung im Sequenzenkalkül), dass die folgenden Schlussregeln der Aussagenlogik korrekt sind.

(i) $\dfrac{\Gamma, \psi \Rightarrow \psi \to \vartheta}{\Gamma \Rightarrow \psi \to \vartheta}$

Lösung (4 Punkte):

Korrekt. Sei die Prämisse gültig und sei $\mathfrak{I}$ *eine (zu* Γ, ψ, ϑ *passende) Interpretation mit* $\mathfrak{I} \models \Gamma$. *Falls* $\mathfrak{I} \not\models \psi$, *so gilt bereits* $\mathfrak{I} \models \psi \to \vartheta$. *Andernfalls gilt* $\mathfrak{I} \models \psi$ *und aus der Prämisse folgt wiederum* $\mathfrak{I} \models \psi \to \vartheta$. *Somit ist die Konklusion gültig und die Schlussregel korrekt.*

(ii) $\dfrac{\Gamma, \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}$

Lösung (4 Punkte):

Nicht korrekt. Gegenbeispiel: $\Gamma = \Delta = \varnothing$, $\varphi = 1$, $\psi = 0$. *Die Prämisse ist gültig, da die linke Seite mit* $\varphi \wedge \psi$ *unerfüllbar ist. Jedoch ist die Konklusion* $1 \Rightarrow 0$ *nicht gültig.*

Aufgabe 3 15 Punkte

(a) Formalisieren Sie die folgenden Eigenschaften von partiellen Ordnungen $\mathfrak{A} = (A, <)$ jeweils durch einen FO($\{<\}$)-Satz. Die Korrektheit der Formeln muss nicht bewiesen werden.

Zur Erinnerung: Partielle Ordnungen werden axiomatisiert durch

$$\psi_{\mathrm{PO}} \coloneqq \forall x \neg x < x \;\wedge\; \forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z).$$

(i) Es gibt ein Element, das größer ist als alle anderen.

Lösung (2 Punkte):

$\exists x \forall y (x \neq y \rightarrow x > y)$.

(ii) Wenn es mindestens 150 Elemente gibt, dann gibt es (mindestens) ein Element, das mit keinem anderen in Relation steht.

Lösung (3 Punkte):

$$\Big(\exists x_1 \ldots \exists x_{150} \bigwedge_{1 \leq i < j \leq 150} x_i \neq x_j\Big) \;\rightarrow\; \exists x \forall y (\neg x < y \wedge \neg y < x)$$

(iii) Für je zwei verschiedene Elemente x, y gilt: Es gibt ein eindeutiges kleinstes Element, das größer ist als x und als y.

Lösung (3 Punkte):

$\forall x \forall y \exists z (x < z \wedge y < z \wedge \forall z' (z \neq z' \wedge x < z' \wedge y < z' \rightarrow z < z'))$

(b) Gilt $(\mathbb{N}, \cdot) \models \forall x \exists y \exists z (y \cdot z = x)$, wobei $\cdot$ die Multiplikation auf $\mathbb{N}$ bezeichnet? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung (2 Punkte):

Ja. Für jede Wahl von $\beta(x) \in \mathbb{N}$ können wir $\beta(y) = 1$ und $\beta(z) = \beta(x)$ wählen, sodass $(\mathbb{N}, \cdot), \beta \models y \cdot z = x$ gilt.

(c) Ein ungerichteter Graph $\mathfrak{G} = (V, E)$ ist 2-färbbar, wenn es eine Funktion $f \colon V \to \{\mathrm{rot}, \mathrm{blau}\}$ gibt, sodass $f(v) \neq f(w)$ für alle Kanten $(v, w) \in E$ gilt.

Geben Sie (ohne Beweis) an, welches der folgenden Axiomensysteme die Klasse der 2-färbbaren ungerichteten Graphen axiomatisiert. Begründen Sie mithilfe eines geeigneten Gegenbeispiels, warum die anderen Axiomensysteme die Klasse nicht axiomatisieren. Hierbei sei Φ_{Graph} das aus der Vorlesung bekannte Axiomensystem für ungerichtete Graphen. Wir definieren zunächst eine Hilfsformel:

$$\mathsf{Pfad}_n(x_1, \ldots, x_n) \coloneqq \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \ \wedge \bigwedge_{1 \leq i < n} E x_i x_{i+1}, \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_{>0}.$$

(i) $\Phi_{\mathrm{Graph}} \cup \{\exists x_1 \ldots \exists x_n \, \mathsf{Pfad}_n(x_1, \ldots, x_n) \mid n \in \mathbb{N}_{>0}, n \text{ gerade}\}$.

(ii) $\Phi_{\mathrm{Graph}} \cup \{\forall x \forall y \forall z (\neg Exy \vee \neg Exz \vee \neg Eyz)\}$.

(iii) $\Phi_{\mathrm{Graph}} \cup \{\neg \exists x_1 \ldots \exists x_n (\mathsf{Pfad}_n(x_1, \ldots, x_n) \wedge E x_1 x_n) \mid n \in \mathbb{N}, n \text{ ungerade}\}$.

Lösung (5 Punkte):

- *Axiomensystem (iii) ist korrekt (keine Begründung nötig).*
- *Axiomensystem (i) fordert die Existenz beliebig langer gerader Pfade (ohne Wiederholung von Knoten). Damit ist ein Pfad der Länge 2 kein Modell (da es nur endlich viele Knoten gibt). Allerdings ist ein solcher Pfad offensichtlich 2-färbbar.*
- *Axiomensystem (ii) verbietet lediglich Kreise der Länge 3. Ein Kreis der Länge 5 ist daher Modell, obwohl ein solcher Kreis nicht 2-färbbar ist (die Knoten entlang eines Kreises müssen abwechselnd gefärbt sein, bei 5 Knoten geht das nicht auf).*

(Leere Seite)

Aufgabe 4 12 Punkte

(a) Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen. Geben Sie die Definition eines Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ an.

Lösung (3 Punkte):

Ein Isomorphismus ist eine Bijektion $\pi : A \to B$, sodass gilt:

- *für jedes n-stellige Relationssymbol $R \in \tau$ und $a_1, \dots, a_n \in A$:*

$$(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \text{ gdw. } (\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}},$$

- *für jedes n-stellige Funktionssymbol $f \in \tau$ und $a_1, \dots, a_n \in A$:*

$$\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)).$$

(b) Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, ob die angegebene Relation in der gegebenen Struktur elementar definierbar ist. Wenn Sie Automorphismen benutzen, genügt es, diese anzugeben. Sie müssen nicht formal beweisen, dass eine Abbildung ein Automorphismus ist.

(i) Die Menge $M = \{\mathsf{Lernen}, \mathsf{Machen}\}$ in folgendem gerichteten Graphen $\mathfrak{G} = (V, E)$:

$$\mathfrak{G}: \quad \begin{tikzcd} \mathsf{Lernen} \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \mathsf{Forschen} \arrow[r] & \mathsf{Machen} \end{tikzcd}$$

Lösung (3 Punkte):

Definierbar durch $\varphi(x) = \neg\exists y\, Eyx \ \vee\ \neg\exists y\, Exy$.

(ii) Die Menge aller Primzahlen in $(\mathbb{N}, Q)$, wobei $Q = \{q \in \mathbb{N} \mid q \text{ ist eine Quadratzahl}\}$.

Lösung (3 Punkte):

Nicht definierbar. Wir betrachten den Automorphismus $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, der lediglich die Zahlen* 7 *und* 150 *vertauscht (beides sind keine Quadratzahlen). Dann ist* 7 *prim, aber* $\pi(7) = 150$ *nicht. Die Menge der Primzahlen kann nach dem Isomorphielemma also nicht elementar definierbar sein.*

(iii) Die Menge aller einelementigen Teilmengen von $\mathbb{N}$, d.h. die Menge $\{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$, in $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$, wobei $\subseteq$ die übliche (nicht strikte) Teilmengenrelation ist. Dabei bezeichnet $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ die Potenzmenge von $\mathbb{N}$.

Lösung (3 Punkte):

Elementar definierbar durch $\varphi(x) = \forall y(\underbrace{y \subseteq x \wedge y \neq x}_{\textit{Für jede echte Teilmenge } y} \to \underbrace{\forall z\, y \subseteq z}_{y=\varnothing})$.

Aufgabe 5 15 Punkte

(a) Geben Sie die Definition einer Theorie wieder.

Lösung (2 Punkte):

Eine Theorie ist eine erfüllbare, unter Folgerung (d.h. unter $\models$) abgeschlossene Satzmenge.

(b) Sei τ endlich und relational. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen mit $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. Begründen Sie, wer das Spiel $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt.

Lösung (3 Punkte):

Die Duplikatorin gewinnt das Spiel wie folgt. Sei $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ein Isomorphismus. Wenn der Herausforderer ein Element $a \in A$ wählt, so antwortet die Duplikatorin mit $\pi(a)$ aus $\mathfrak{B}$. Wird $b \in B$ gewählt, so antwortet sie mit dem eindeutigen a aus $\mathfrak{A}$, sodass $\pi(a) = b$. Die gewählten Elemente erfüllen nach jedem Zug die Bedingungen für einen lokalen Isomorphismus, da sie gemäß des (globalen) Isomorphismus π gewählt werden.

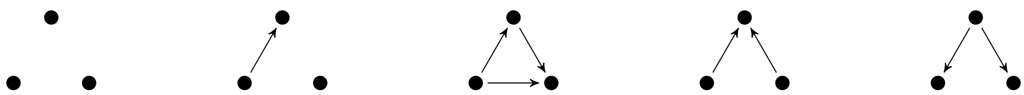
(c) Sei T die durch Φ axiomatisierte Theorie.

$$\begin{aligned}\Phi = \{&\forall x \forall y \forall z (Exy \wedge Eyz \to Exz),\ \forall x \neg Exx\} \\ &\cup \{\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (\bigwedge_{1 \leq i < j \leq 3} x_i \neq x_j \ \wedge\ \forall y \bigvee_{1 \leq i \leq 3} y = x_i)\}\end{aligned}$$

Geben Sie (ohne Beweis) für jede vollständige Erweiterung von T ein Modell an. Sie können die Modelle graphisch (als gerichtete Graphen) angeben.

Hinweis: Es gibt 5 vollständige Erweiterungen von T.

Lösung (5 Punkte):



(d) Sei $\mathfrak{A} = (\{1,2,3,4\}, f^{\mathfrak{A}})$, wobei die einstellige Funktion $f^{\mathfrak{A}}$ wie folgt definiert ist:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, mapsto, "f^{\mathfrak{A}}"] & 2 \arrow[r, mapsto, "f^{\mathfrak{A}}"] & 3 \arrow[ll, mapsto, bend left, "f^{\mathfrak{A}}"] & 4 \arrow[l, mapsto, "f^{\mathfrak{A}}"'] \end{tikzcd}$$

Wir betrachten folgende Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$:

$$i \sim j \quad \text{gdw.} \quad i = j \text{ oder } i, j \in \{1,2,3\}$$

(i) Geben Sie die Faktorstruktur $\mathfrak{A}/_{\sim}$ an.

Lösung (3 Punkte):

$$\begin{tikzcd} \{1,2,3\} \arrow[loop above, mapsto, "f^{\mathfrak{A}/\sim}"] & & & \{4\} \arrow[lll, mapsto, "f^{\mathfrak{A}/\sim}"'] \end{tikzcd}$$

(ii) Geben Sie einen Satz mit minimalem Quantorenrang an, der zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}/_{\sim}$ unterscheidet. (Es muss nicht bewiesen werden, dass der Quantorenrang minimal ist.)

Lösung (2 Punkte):

$\exists x\, fx = x$

Aufgabe 6 19 Punkte

(a) Geben Sie den Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik an.

Lösung (2 Punkte):

Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ *und* $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$. *Dann gilt:*

(i) $\Phi \models \psi$ *gdw.* $\Phi \vdash \psi$*;*

(ii) Φ *ist genau dann konsistent, wenn* Φ *erfüllbar ist.*

(b) Geben Sie den absteigenden Satz von Löwenheim-Skolem an.

Lösung (2 Punkte):

Jede erfüllbare, abzählbare Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ *hat ein abzählbares Modell.*

(c) Geben Sie für folgende Klassen von Strukturen jeweils ein, wenn möglich endliches, Axiomensystem an. Sollten Sie kein (endliches) Axiomensystem angeben, so beweisen Sie, dass es kein (endliches) Axiomensystem gibt.

Dabei sei $<$ ein zweistelliges Relations- und $\cdot$ ein zweistelliges Funktionssymbol. Sie dürfen das aus der Vorlesung bekannte Axiomensystem $\Phi_<$ für lineare Ordnungen verwenden:

$$\Phi_< = \{\forall x\, \neg x < x,\ \forall x \forall y \forall z (x < y \land y < z \to x < z),\ \forall x \forall y (x < y \lor x = y \lor y < x)\}.$$

(i) Sei $\mathfrak{A} = (\{\mathsf{Lernen}, \mathsf{Forschen}, \mathsf{Machen}\}, <)$, wobei $<$ die lineare Ordnung mit $\mathsf{Lernen} < \mathsf{Forschen} < \mathsf{Machen}$ ist. Die Klasse aller zu $\mathfrak{A}$ isomorphen Strukturen.

Lösung (3 Punkte):

Endlich axiomatisierbar durch:

$$\Phi_< \cup \{\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (\bigwedge_{1 \leq i < j \leq 3} x_i \neq x_j \ \land\ \forall y \bigvee_{1 \leq i \leq 3} y = x_i)\}$$

Bemerkung: Jede lineare Ordnung mit 3 Elementen ist isomorph zu $\mathfrak{A}$*, indem das Minimum auf* Lernen*, das Maximum auf* Machen *und das mittlere Element auf* Forschen *abgebildet wird.*

(ii) Die Klasse aller linearen Ordnungen $\mathfrak{A} = (A, <)$, sodass es einen $\mathrm{FO}(\{<\})$-Satz gibt, der $\mathfrak{A}$ bis auf Isomorphie axiomatisiert.

Lösung (4 Punkte):

Nicht axiomatisierbar.

Beweis: Nach VL ist die Isomorphieklasse einer unendlichen Struktur nicht axiomatisierbar. Die Isomorphieklasse einer endlichen Struktur über einer endlichen Signatur (wie z.B. $\{<\}$) lässt sich dagegen nach VL durch einen einzelnen Satz axiomatisieren (wir fordern, dass es genau n Elemente $x_1, \dots, x_n$ gibt und legen dann fest, wie diese sich bzgl. $<$ zueinander verhalten). Die Klasse enthält also genau die endlichen linearen Ordnungen.

Damit ist die Klasse nicht axiomatisierbar nach dem aufsteigenden Satz von Löwenheim-Skolem: Sie enthält beliebig große endliche Strukturen, etwa die lineare Ordnung $(\{0, \dots, n\}, <)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Sie enthält jedoch keine unendlichen Strukturen.

(iii) Die Klasse aller $\{\cdot\}$-Strukturen $(A, \cdot)$ mit folgender Eigenschaft: Falls A endlich ist, so ist $|A|$ eine Primzahl.

Lösung (5 Punkte):

Axiomatisierbar, aber nicht endlich.

Unendliches Axiomensystem:

$$\Phi = \{\neg\varphi_n \mid n \in \mathbb{N},\ n \text{ ist keine Primzahl}\},$$
$$\varphi_n = \exists x_1 \dots \exists x_n \forall y \Big(\bigwedge_{1 \le i < j \le n} x_i \neq x_j \wedge \bigvee_{1 \le i \le n} y = x_i \Big)$$

Nicht endlich axiomatisierbar: Falls doch, so gäbe es nach Übung eine Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$, die die Klasse axiomatisiert. Sei n maximal mit $\neg\varphi_n \in \Phi_0$ (oder $n = 0$, falls $\Phi_0 = \varnothing$). Betrachte $\mathfrak{A} = (\{1, \dots, 2(n+1)\}, \min)$. Da $\mathfrak{A}$ mehr als n Elemente hat, gilt $\mathfrak{A} \models \neg\varphi_k$ für alle $k \le n$ und damit $\mathfrak{A} \models \Phi_0$. Jedoch ist $|A| = 2(n+1)$ keine Primzahl und damit $\mathfrak{A}$ nicht in der Klasse enthalten. Widerspruch.

(iv) Die Klasse aller Substrukturen von $(\mathbb{R}, <)$ (mit der üblichen Ordnung $<$ auf den reellen Zahlen).

Lösung (3 Punkte):

Nicht axiomatisierbar.

Beweis: Die Klasse enthält insbesondere die Struktur $(\mathbb{R}, <)$ *selber. Wäre die Klasse axiomatisierbar durch* Φ*, so hätte* Φ *also ein unendliches Modell. Nach aufsteigendem Satz von Löwenheim-Skolen hätte* Φ *dann auch beliebig große unendliche Modelle. Die Substrukturen können aber höchstens so mächtig sein wie die Struktur selber, Widerspruch.*

Aufgabe 7 14 Punkte

(a) Was besagt die Baummodell-Eigenschaft der Modallogik?

Lösung (2 Punkte):

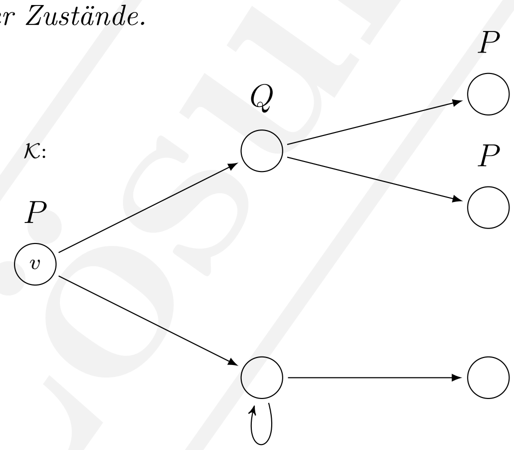
Jede erfüllbare ML-Formel hat ein Modell, das ein Baum ist (d.h. die Kantenrelationen sind disjunkt und ergeben zusammen einen Baum im Sinne der Graphentheorie).

(b) Betrachten Sie die abgebildete Kripkestruktur $\mathcal{K}$ und ML-Formel φ. Beschriften Sie die Zustände in $\mathcal{K}$ so mit den atomaren Eigenschaften $\{P, Q\}$, dass $\mathcal{K}, v \models \varphi$ gilt.

$$\varphi := P \ \wedge \ \Diamond Q \ \wedge \ \Box(Q \to (\Diamond 1 \to \neg P)) \ \wedge \ \Diamond\Box P$$

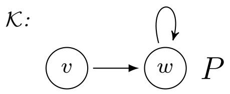
Lösung (3 Punkte):

Siehe Beschriftung der Zustände.



(c) Geben Sie ein Modell $\mathcal{K}, v$ der CTL-Formel $\neg P \wedge \mathsf{EFAG}P$ an.

Lösung (2 Punkte):



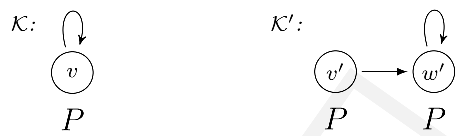
Bemerkung: Die Formel verlangt, dass am aktuellen Knoten nicht P gilt. Außerdem soll ein Zustand erreichbar sein, sodass in allen von dort erreichbaren Zuständen immer P gilt. Das ist hier für Zustand w der Fall.

(d) Formulieren Sie folgende Aussagen als modallogische Formeln, oder zeigen Sie, dass dies nicht möglich ist.

(i) Wenn alle Nachfolger des aktuellen Knotens mit P beschriftet sind, dann hat der aktuelle Knoten eine Selbstkante.

Lösung (4 Punkte):

Nicht möglich. Wir betrachten die folgenden Kripkestrukturen:



Dann gilt $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$, *eine ML-Formel kann aufgrund der Bisimulationsinvarianz also nicht zwischen* $\mathcal{K}, v$ *und* $\mathcal{K}', v'$ *unterscheiden. Jedoch hat nur* $\mathcal{K}, v$ *die gewünschte Eigenschaft.*

(ii) Vom aktuellen Knoten aus ist in genau 3 Schritten ein Terminalknoten (ein Knoten ohne ausgehende Kanten) erreichbar.

Lösung (3 Punkte):

$\varphi \coloneqq \Diamond\Diamond\Diamond\Box 0$

(Leere Seite)