Prof. Dr. M. Grohe
E. Fluck, L. Härtel, T. Novotny

Übungsblatt 3 mit Lösungen

Abgabetermin: Montag, der 27. Mai 2024 um 14:30

Hausaufgabe 4 (Ableitbarkeit Sequenzen) **5+1=6 Punkte**

Seien $\varphi, \psi, \chi \in \mathrm{AL}$.

a) Geben Sie eine Ableitung für die folgenden Sequenzen an:

(i) $\varphi \lor (\psi \land \chi) \ \vdash \ (\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \chi)$

(ii) $(\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \chi) \ \vdash \ \varphi \lor (\psi \land \chi)$

Geben Sie dabei immer an, welche Regeln des aussagenlogischen Sequenzenkalküls Sie auf welche Zeilen angewendet haben.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe (a) dass $\varphi \lor (\psi \land \chi) \equiv (\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \chi)$.

Lösung:

Seien $\varphi, \psi, \chi \in \mathrm{AL}$.

a) (i) Erst bilden wir den Ableitungsbaum ab. Dieser ist nicht notwendig für die Lösung und wird hier nur angegeben damit man die Lösung einfacher nachvollziehen kann.

$$\text{(}\lor\text{L)}\ \dfrac{\text{(}\land\text{L)}\ \dfrac{\text{(}\land\text{R)}\ \dfrac{\text{(}\lor\text{R)}\ \dfrac{\text{(Erw)}\ \dfrac{\text{(Vor)}\ \dfrac{}{\chi \vdash \chi}}{\psi,\chi \vdash \varphi,\chi}}{\psi,\chi \vdash \varphi \lor \chi} \qquad \text{(}\lor\text{R)}\ \dfrac{\text{(Erw)}\ \dfrac{\text{(Vor)}\ \dfrac{}{\psi \vdash \psi}}{\psi,\chi \vdash \varphi,\psi}}{\psi,\chi \vdash \varphi \lor \psi}}{\psi,\chi \vdash (\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \chi)}}{\psi \land \chi \vdash (\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \chi)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\text{(Vor)}}{\varphi \vdash \varphi,\chi}\text{(Erw)}}{\varphi \vdash \varphi \lor \chi}\text{(}\lor\text{R)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\text{(Vor)}}{\varphi \vdash \varphi,\psi}\text{(Erw)}}{\varphi \vdash \varphi \lor \psi}\text{(}\lor\text{R)}}{\varphi \vdash (\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \chi)}\text{(}\land\text{R)}}{\varphi \lor (\psi \land \chi) \vdash (\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \chi)}$$

Die Ableitung sieht also wie folgt aus:

1.	$\chi \vdash \chi$	(Vor)
2.	$\psi, \chi \vdash \varphi, \chi$	(Erw)
3.	$\psi, \chi \vdash \varphi \lor \chi$	($\lor$R)
4.	$\psi \vdash \psi$	(Vor)
5.	$\psi, \chi \vdash \varphi, \psi$	(Erw)
6.	$\psi, \chi \vdash \varphi \lor \psi$	($\lor$R)
7.	$\psi, \chi \vdash (\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \chi)$	($\land$R) auf 3,6
8.	$\psi \land \chi \vdash (\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \chi)$	($\land$L)
9.	$\varphi \vdash \varphi$	(Vor)
10.	$\varphi \vdash \varphi, \chi$	(Erw)
11.	$\varphi \vdash \varphi \lor \chi$	($\lor$R)
12.	$\varphi \vdash \varphi, \psi$	(Erw) auf 9
13.	$\varphi \vdash \varphi \lor \psi$	($\lor$R)
14.	$\varphi \vdash (\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \chi)$	($\land$R) auf 11,13
15.	$\varphi \lor (\psi \land \chi) \vdash (\varphi \lor \psi) \land (\varphi \lor \chi)$	($\lor$L) auf 7,14.

(ii) Erst bilden wir den Ableitungsbaum ab. Dieser ist nicht notwendig für die Lösung und wird hier nur angegeben damit man die Lösung einfacher nachvollziehen kann.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\text{(Erw)}\,\dfrac{\text{(Vor)}\,\dfrac{}{\chi \vdash \chi}}{\varphi \vee \psi, \chi \vdash \varphi, \chi}
\qquad
\text{(Erw)}\,\dfrac{\text{(Vor)}\,\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}}{\varphi \vee \psi, \varphi \vdash \varphi, \chi}
}{\varphi \vee \psi, \varphi \vee \chi \vdash \varphi, \chi}\,(\vee\text{L})
\qquad
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{\psi \vdash \psi}\,\text{(Vor)}}{\psi, \varphi \vee \chi \vdash \varphi, \psi}\,\text{(Erw)}
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\,\text{(Vor)}}{\varphi, \varphi \vee \chi \vdash \varphi, \psi}\,\text{(Erw)}
}{\varphi \vee \psi, \varphi \vee \chi \vdash \varphi, \psi}\,(\vee\text{L})
}{\dfrac{\varphi \vee \psi, \varphi \vee \chi \vdash \varphi, \psi \wedge \chi}{\varphi \vee \psi, \varphi \vee \chi \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \chi)}\,(\vee\text{R})}\,(\wedge\text{R})
}{(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \chi)}\,(\wedge\text{L})
$$

Die Ableitung sieht also wie folgt aus:

1.	$\chi \vdash \chi$	(Vor)
2.	$\varphi \vee \psi, \chi \vdash \varphi, \chi$	(Erw)
3.	$\varphi \vdash \varphi$	(Vor)
4.	$\varphi \vee \psi, \varphi \vdash \varphi, \chi$	(Erw)
5.	$\varphi \vee \psi, \varphi \vee \chi \vdash \varphi, \chi$	($\vee$L) auf 2,4
6.	$\psi \vdash \psi$	(Vor)
7.	$\psi, \varphi \vee \chi \vdash \varphi, \psi$	(Erw)
8.	$\varphi, \varphi \vee \chi \vdash \varphi, \psi$	(Erw) auf 3
9.	$\varphi \vee \psi, \varphi \vee \chi \vdash \varphi, \psi$	($\vee$L) auf 7,8
10.	$\varphi \vee \psi, \varphi \vee \chi \vdash \varphi, \psi \wedge \chi$	($\wedge$R) auf 5,9
11.	$\varphi \vee \psi, \varphi \vee \chi \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \chi)$	($\vee$R)
12.	$(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \vdash \varphi \vee (\psi \wedge \chi)$	($\wedge$L).

b) In **a)** haben wir gezeigt, dass die Sequenzen ableitbar sind. Nach Korollar 2.19 aus der Vorlesung gilt, dass diese Sequenzen gültig sind. Nach der Definition von Gültigkeit gilt, dass für alle Interpretationen $\mathfrak{A}$ gilt

- (nach (i)): wenn $\mathfrak{A} \models \varphi \vee (\psi \wedge \chi)$, dann $\mathfrak{A} \models (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$, und
- (nach (ii)): wenn $\mathfrak{A} \models (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$, dann $\mathfrak{A} \models \varphi \vee (\psi \wedge \chi)$.

Das ist genau die Definition von der Äquivalenz $\equiv$, also $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$.

Hausaufgabe 5 (Ableitbarkeit Regeln) **3 Punkte**

Seien $\Gamma, \Delta \subset \mathrm{AL}$ endliche Formelmengen und $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$ Formeln. Zeigen Sie, dass die folgende Regel im Sequenzenkalkül ableitbar ist:

$$(\leftrightarrow L)\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi \qquad \Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, (\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi) \vdash \Delta}$$

Lösung:

Als Hilfestellung konstruieren wir einen Ableitungsbaum (dieser ist nicht Teil der Lösung).

$$
(\wedge\mathrm{L})\ \dfrac{(\to \mathrm{L})\ \dfrac{(\to\mathrm{L})\ \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi \qquad (\mathrm{Erw})\ \dfrac{(\mathrm{Vor})\ \dfrac{}{\psi \vdash \psi}}{\Gamma, \psi \vdash \Delta, \psi}}{\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \Delta, \psi} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi}\ (\mathrm{Vor})}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi}\ (\mathrm{Erw}) \qquad \Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi, \varphi \to \psi \vdash \Delta}\ (\to\mathrm{L})}{\Gamma, \varphi \to \psi, \psi \to \varphi \vdash \Delta}}{\Gamma, (\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi) \vdash \Delta}
$$

Die folgende Folge von Sequencen ist eine Ableitung von $S := \Gamma, (\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi) \vdash \Delta$ aus $S_1 := \Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi$ und $S_2 := \Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta$.

1.	$\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi$	$S'_1 = S_1$
2.	$\psi \vdash \psi$	(Vor)
3.	$\Gamma, \psi \vdash \Delta, \psi$	(Erw)
4.	$\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \Delta, \psi$	$(\to\mathrm{L})$ auf 1,3
5.	$\varphi \vdash \varphi$	(Vor)
6.	$\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi$	(Erw)
7.	$\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta$	$S'_7 = S_2$
8.	$\Gamma, \varphi, \psi \to \varphi \vdash \Delta$	$(\to\mathrm{L})$ auf 6,7
9.	$\Gamma, \varphi \to \psi, \psi \to \varphi \vdash \Delta$	$(\to\mathrm{L})$ auf 4,8
10.	$\Gamma, (\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi) \vdash \Delta$	$(\wedge\mathrm{L})$

Hausaufgabe 6 (Korrektheit Regeln) **3+3=6 Punkte**

Seien $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{AL}$ endliche aussagenlogische Formelmengen und $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}$ aussagenlogische Formeln. Zeigen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Sequenzenregeln:

a)

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma \vdash \Delta}$$

b)

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi}$$

Lösung:

a) Um zu beweisen, dass die Regel korrekt ist, müssen wir beweisen, dass unter der Annahme, dass alle Prämissen gültig sind, ist auch die Konklusion gültig.

Sei $\mathfrak{A}$ eine Interpretation sodass $\mathfrak{A} \models \Gamma$.

- Es sei $\mathfrak{A} \models \varphi$. Da $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\varphi\}$, gilt nach der linken Prämisse, dass $\mathfrak{A}$ mindestens eine Formel aus Δ erfüllt.
- Es sei $\mathfrak{A} \not\models \varphi$. Dann gilt nach der rechten Prämisse, dass $\mathfrak{A}$ mindestens eine Formel aus Δ erfüllt (weil $\mathfrak{A}$ mindestens eine Formel aus $\Delta \cup \{\varphi\}$ erfüllen muss, aber $\mathfrak{A} \not\models \varphi$).

Da in allen Fällen $\mathfrak{A}$ mindestens eine Formel aus Δ erfüllt, ist die Konklusion gültig.

b) Seien $\varphi := \bot$, $\psi := \bot$, $\Gamma := \{X\}$ und $\Delta := \emptyset$. Dann sind beide Prämissen gültig, da $\Gamma \cup \{\varphi\} = \Gamma \cup \{\psi\} = \{X, \bot\}$ eine unerfüllbare Formelmenge ist, die Konklusion aber nicht, da die Interpretation $\mathfrak{A}$, definiert durch $\mathfrak{A}(X) = 1$, erfüllt alle Formeln aus $\Gamma = \{X\}$, erfüllt aber aber keine Formel aus der Menge $\Delta \cup \{\varphi \wedge \psi\} = \{\bot \wedge \bot\}$.

Programmieraufgabe 7 (Simplify) 5 Punkte

- Die Abgabe der Programmieraufgabe erfolgt über **Speichern** oder **Abgabe** in VPL. Bis zur Abgabefrist könnt ihr so oft abgeben, wie ihr wollt. Wir bewerten nur die aktuellste Abgabe.
- Ihr könnt in **assignment.py** euren eigenen Code schreiben und dabei die von uns zur Verfügung gestellten Bibliotheken benutzen. Achtet allerdings darauf, keine Dateien zu löschen und die Header der Funktionen unverändert zu lassen.
- Nicht alle Importe sind möglich, manche Bibliotheken werden also einen Fehler wie z.B. `Module assignment tries to import numpy, which does not exist` liefern, wenn ihr versucht diese zu verwenden.
- Wir empfehlen, den Code mindestens einmal zu testen, mit **Ausführen** oder Strg+F11. Dies kann einige Sekunden dauern.
- Punkte und Code sind automatisch mit eurer Abgabegruppe synchronisiert.

In dieser und der nächsten Woche schreiben wir eine eigene Implementierung des SAT-Solvers DPLL. Dieser soll für Eingaben der Klasse `BigAnd` in konjunktiver Normalform eine erfüllende `Interpretation` berechnen, oder `None` ausgeben, falls keine solche existiert.

Implementieren Sie zunächst die Vereinfachungsregeln `pure_literal_rule(formula: BigAnd) -> tuple(BigAnd, Interpretation)` und `unit_propagation_rule(formula: BigAnd) -> tuple(BigAnd, Interpretation)`, welche als Eingabe ein Objekt der Klasse `BigAnd` nehmen und, falls dieses eine Formel in konjunktiver Normalform ist, als `tuple(BigAnd, Interpretation)` die entsprechenden Vereinfachungen der Formel berechnen und die zugehörige Interpretation ausgeben. Das genaue Verhalten der Regeln ist auf Seite 1.75 der Vorlesung und im Quellcode dokumentiert.

Schreiben Sie anschließend die Funktion `simplify(formula: BigAnd) -> tuple(BigAnd, Interpretation)`, welche als Eingabe ein Objekt der Klasse `BigAnd` nimmt und, falls dieses eine Formel in konjunktiver Normalform ist, solange wie möglich versucht immer wieder `unit_propagation_rule` und `pure_literal_rule` anzuwenden, um schließlich das Ergebnis als `tuple(BigAnd, Interpretation)` auszugeben.

Bei der Modellierung von Sudoku konnten wir beobachten, dass für Anwendungen interessante Formeln häufig zahlreiche Klauseln enthalten. Achtet daher auf die **Effizienz eurer Implementierung** der Funktionen.

Lösung:

Die Pure Literal Rule (PLR) lässt sich mit einer Iteration über die Literale, die man z.B. mit `literals = {literal for clause in formula for literal in clause}` erzeugen kann, umsetzen. Bei Vorkommen des ersten Literals, dessen Komplement nicht in dieser Menge enthalten ist, erstellen wir entsprechend eine neue Formel und geben diese mit einer Interpretation zurück; sonst, `None`.

Für die Unit Propagation Rule (UPR) iterieren wir über Klauseln, und bei der ersten Klausel die genau ein Literal enthält, erstellen wir entsprechend eine neue Formel und geben diese mit einer Interpretation zurück; sonst, `None`.

Simplify lässt sich mit einer `while`-Schleife implementieren, die Regeln anwendet, solange deren Ergebnis nicht `None` ist. Außerdem lässt sich hier benutzen, dass nachdem UPR nicht mehr anwendbar ist, durch PLR keine weiteren Klauseln erzeugt werden können, die nur ein Literal enthalten.