Kapitel 5

# Der Vollständigkeitssatz

# Kontext und Ziele

In diesem Kapitel führen wir einen formalen Beweisbegriff für die Logik der 1. Stufe ein und beweisen den Vollständigkeitssatz, der besagt, dass Beweisen und semantisches Folgern übereinstimmen.

Als Korollar zum Vollständigkeitssatz erhalten wir auch einen Endlichkeitssatz für die Logik der 1. Stufe.

# Vereinbarung

Wir halten in diesem Kapitel eine feste abzählbare Symbolmenge $\sigma$ fest.

# 5.1 Ein Sequenzenkalkül für die Logik der 1. Stufe

## Definition 5.1

Eine Sequenz ist ein Ausdruck der Gestalt

$$\Gamma \vdash \Delta,$$

wobei $\Gamma, \Delta$ endliche Mengen von $\sigma$-Formeln sind.

## Definition 5.2

Seine Sequenz $\Gamma \vdash \Delta$ ist gültig, wenn für jede $\sigma$-Interpretation $\mathfrak{I}$ gilt: wenn $\mathfrak{I} \models \Gamma$, dann gibt es ein $\delta \in \Delta$, so dass $\mathfrak{I} \models \delta$.

## Notation

Wir verwenden für Sequenzen die gleichen Notationskonventionen wie in der Aussagenlogik (siehe S.2.16).

Beispiele: $\vdash \Delta, \quad \Gamma \vdash \psi, \quad \Gamma, \varphi_1, \varphi_2 \vdash \Delta, \psi_1, \psi_2.$

# Sequenzenregeln und ableitbare Sequenzen

Wie für Aussagenlogik definieren wir auch für die Logik der 1. Stufe einen Sequenzenkalkül bestehend aus einer Menge von Sequenzenregeln der Gestalt

$$\frac{S_1 \quad \cdots \quad S_k}{S}, \qquad (\star)$$

für ein $k \in \mathbb{N}$ und Sequenzen $S_1, \dots, S_k, S \in \text{Seq}$.

Dieser Sequenzenkalkül definiert rekursiv eine Menge von ableitbaren Sequenzen:

- Eine Sequenzenregel der Gestalt $(\star)$ für $k = 0$ ist eine Basisregel, die besagt: *$S$ ist ableitbar.*
- Eine Sequenzenregel der Gestalt $(\star)$ für $k \geq 1$ ist eine rekursive Regel, die besagt: *Wenn $S_1, \dots, S_k$ ableitbar sind, dann ist auch $S$ ableitbar.*

Eine Ableitung einer Sequenz $S$ ist eine endliche Folge $S_1, \dots, S_n$ von Sequenzen, so dass

(i) für alle $i \in [n]$ ist entweder $\frac{}{S_i}$ eine Basisregel des Sequenzenkalküls, oder es gibt $k \geq 1$, $1 \leq j_1, \dots, j_k < i$, so dass $\frac{S_{i_1} \cdots S_{i_k}}{S_i}$ eine rekursive Regel des Kalküls ist;

(ii) $S_n = S$.

# Regeln des Sequenzenkalküls I

Der Sequenzenkalkül besteht aus folgenden Sequenzenregeln.

## Grundregeln

Für alle endlichen Formelmengen $\Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta' \subseteq L(\sigma)$ und alle Formeln $\varphi \in L(\sigma)$.

$$(\text{Vor}) \quad \frac{}{\varphi \vdash \varphi} \qquad\qquad (\text{Erw}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'}$$

## Junktorenregeln

Für alle endlichen Formelmengen $\Gamma, \Delta \subseteq L(\sigma)$ und alle Formeln $\varphi, \psi \in L(\sigma)$.

$$(\wedge\text{L}) \quad \frac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta} \qquad\qquad (\wedge\text{R}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi}$$

$$(\vee\text{L}) \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta} \qquad\qquad (\vee\text{R}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\text{L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \rightarrow \psi \vdash \Delta} \qquad\qquad (\rightarrow\text{R}) \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

$$(\neg\text{L}) \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta} \qquad\qquad (\neg\text{R}) \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi}$$

$$(\bot\text{L}) \quad \frac{}{\bot \vdash} \qquad\qquad (\top\text{R}) \quad \frac{}{\vdash \top}$$

# Regeln des Sequenzenkalküls II

## Quantorenregeln

Für alle endlichen Formelmengen $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$ und alle Formeln $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$, alle Variablen $x, y \in \mathrm{Var}$, und alle Terme $\theta \in \mathrm{T}(\sigma)$.

$$(\exists\mathrm{L}) \quad \frac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \ \vdash \ \Delta} \quad \text{falls } y \notin \mathrm{frei}(\Gamma \cup \Delta \cup \{\exists x\varphi\}) \qquad (\exists\mathrm{R}) \quad \frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \varphi\frac{\theta}{x}}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x\varphi}$$

$$(\forall\mathrm{L}) \quad \frac{\Gamma, \varphi\frac{\theta}{x} \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash \ \Delta} \qquad (\forall\mathrm{R}) \quad \frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \varphi\frac{y}{x}}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \forall x\varphi} \quad \text{falls } y \notin \mathrm{frei}(\Gamma \cup \Delta \cup \{\exists x\varphi\})$$

# Regeln des Sequenzenkalküls III

## Gleichheitsregeln

Für alle endlichen Formelmengen $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$ und alle Formeln $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$, alle Variablen $x \in \mathrm{Var}$, und alle Terme $\theta, \eta \in \mathrm{T}(\sigma)$.

$$(\mathrm{Rf}) \quad \frac{\Gamma, \theta \doteq \theta \ \vdash \ \Delta}{\Gamma \ \vdash \ \Delta} \qquad\qquad (\mathrm{Sub}) \quad \frac{\Gamma, \theta \doteq \eta, \varphi\frac{\theta}{x} \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \theta \doteq \eta, \varphi\frac{\eta}{x} \ \vdash \ \Delta}$$

## Schnittregel

Für alle endlichen Formelmengen $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$ und alle Formeln $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$

$$(\mathrm{S}) \quad \frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \varphi \qquad \Gamma, \varphi \ \vdash \ \Delta}{\Gamma \ \vdash \ \Delta}$$

# Ergänzungen zu Seite 5.9

(Rf) für „Reflexivitätsregel“ und (Sub) für „Substitutionsregel“.

# Bemerkungen

- Man beachte, dass wie beim aussagenlogischen Sequenzenkalkül die 18 "Regeln" (Vor),..., (S) tatsächlich Regelschemata sind, die jeweils aus unendlich vielen Regeln bestehen.
- Die Schnittregel (S) ist nicht notwendig, der Sequenzenkalkül ist auch ohne diese Regel vollständig. Der Beweis der Vollständigkeit ist allerdings mit der Schnittregel deutlich einfacher.

## Beispiel 5.3

Für alle Formeln $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ ist die Sequenz

$$\exists x \forall y \varphi \vdash \forall y \exists x \varphi$$

ableitbar.

## Beispiel 5.4

Für alle Terme $\theta, \eta, \zeta \in \mathrm{T}(\sigma)$ sind die Sequenzen

$$\vdash \theta \doteq \theta, \qquad \theta \doteq \eta \vdash \eta \doteq \theta, \qquad \theta \doteq \eta, \eta \doteq \zeta \vdash \theta \doteq \zeta$$

ableitbar.

Zu Beispiel 5.3:
Zur Erinnerung: Das Substitutionslemma impliziert

$$\varphi\frac{xy}{xy} = \varphi\frac{yx}{yx} = \varphi$$

und außerdem

$$\begin{aligned}\forall y\left(\varphi\frac{x}{x}\right) &= \forall y\varphi = \left(\forall y\varphi\right)\frac{x}{x},\\ \exists x\left(\varphi\frac{y}{y}\right) &= \exists x\varphi = \left(\exists x\varphi\right)\frac{y}{y}.\end{aligned}$$

Deswegen schreiben wir im folgenden einfach $\forall y\varphi\frac{x}{x}$ und $\exists x\varphi\frac{y}{y}$.
Dann ergibt sich folgende Ableitung:

$$\begin{array}{lrcll}
1. & \varphi\frac{xy}{xy} & \vdash & \varphi\frac{yx}{yx} & (\text{Vor})\\
2. & \forall y\varphi\frac{x}{x} & \vdash & \varphi\frac{yx}{yx} & (\forall\text{L})\\
3. & \forall y\varphi\frac{x}{x} & \vdash & \exists x\varphi\frac{y}{y} & (\exists\text{R})\\
4. & \exists x\forall y\varphi & \vdash & \exists x\varphi\frac{y}{y} & (\exists\text{L})\\
5. & \exists x\forall y\varphi & \vdash & \forall y\exists x\varphi & (\forall\text{R})
\end{array}$$

## Zu Beispiel 5.4:

Ableitung der Sequenz $\vdash \theta \doteq \theta$:

$$\begin{array}{lrl}
1. & \theta \doteq \theta \vdash \theta \doteq \theta & \text{(Vor)} \\
2. & \vdash \theta \doteq \theta & \text{(Rf).}
\end{array}$$

Ableitung der Sequenz $\theta \doteq \eta \ \vdash \ \eta \doteq \theta$:

$$\begin{array}{lrl}
1. & \eta \doteq \theta \vdash \eta \doteq \theta & \text{(Vor)} \\
2. & \theta \doteq \eta, \eta \doteq \theta \vdash \eta \doteq \theta & \text{(Erw)} \\
3. & \theta \doteq \eta, \eta \doteq \eta \vdash \eta \doteq \theta & \text{(Sub) mit } \varphi := \eta \doteq x \\
4. & \theta \doteq \eta \vdash \eta \doteq \theta & \text{(Rf).}
\end{array}$$

Ableitung der Sequenz $\theta \doteq \eta, \eta \doteq \zeta \vdash \theta \doteq \zeta$:

$$\begin{array}{lrl}
1. & \theta \doteq \zeta \vdash \theta \doteq \zeta & \text{(Vor)} \\
2. & \theta \doteq \eta, \theta \doteq \zeta \vdash \theta \doteq \zeta & \text{(Erw)} \\
3. & \theta \doteq \eta, \eta = \zeta \vdash \theta \doteq \zeta & \text{(Sub) mit } \varphi := x \doteq \zeta.
\end{array}$$

## Definition 5.5

Seien $S_1, \dots, S_k, S$ Sequenzen.

(1) Eine Ableitung von $S$ aus $S_1, \dots, S_k$ im Sequenzenkalkül ist eine endliche Folge $S'_1, \dots, S'_n$ von Sequenzen, so dass

   (i) für alle $i \in [n]$ ist entweder $S'_i = S_j$ für ein $j \in [k]$, oder $\frac{}{S'_i}$ ist Regel des Sequenzenkalküls, oder es gibt $\ell \geq 1$, $1 \leq j_1, \dots, j_\ell < i$, so dass $\frac{S'_{j_1} \quad \cdots \quad S'_{j_\ell}}{S_i}$ eine Regel des Sequenzenkalküls ist;

   (ii) $S'_n = S$.

(2) Die Sequenzenregel $\frac{S_1 \quad \cdots \quad S_k}{S}$ ist ableitbar im Sequenzenkalkül, wenn es eine Ableitung von $S$ aus $S_1, \dots, S_k$ gibt.

## Beobachtung 5.6

*Sei $\frac{S_1 \quad \cdots \quad S_k}{S}$ eine ableitbare Sequenzenregel. Dann gilt: Wenn $S_1, \dots, S_k$ ableitbar sind, ist auch $S$ ableitbar.*

# Nützliche Abgeleitbare Regeln

## Lemma 5.7

*Für alle endlichen* $\Delta, \Gamma \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$, $\varphi, \psi \in \mathrm{L}(\sigma)$ *und* $x \in \mathrm{Var}$ *sind folgende Regeln im Sequenzenklkül ableitbar:*

(1) *Negations-Eliminationsregeln:*

$$(\neg\mathrm{ER})\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta} \qquad\qquad (\neg\mathrm{EL})\ \frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi};$$

(2) *Modus Ponens:*

$$(\mathrm{MP})\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \quad \Gamma \vdash \Delta, \varphi \to \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \psi}$$

(3) *Quantorenaustauschregeln (rechts):*

$$(\exists\forall\mathrm{R})\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \neg\varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\forall x \varphi} \qquad\qquad (\forall\exists\mathrm{R})\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, \neg\forall x \varphi}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \neg\varphi}.$$

**Beweis.**
(1) Ableitung der Regel (¬ER):

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi$ | |
| 2. | $\Gamma, \neg\neg\varphi \vdash \Delta$ | $(\neg\text{L})$ |
| 3. | $\Gamma, \varphi, \neg\neg\varphi \vdash \Delta$ | (Erw) |
| 4. | $\varphi \vdash \varphi$ | (Vor) |
| 5. | $\varphi, \neg\varphi \vdash$ | $(\neg\text{L})$ |
| 6. | $\varphi \vdash \neg\neg\varphi$ | $(\neg\text{R})$ |
| 7. | $\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \neg\neg\varphi$ | (Erw) |
| 8. | $\Gamma, \varphi \vdash \Delta$ | (S) auf 3, 6. |

Ableitung der Regel (¬EL): Übung.

(2) Ableitung der Regel (MP):

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\Gamma \vdash \Delta, \varphi$ | |
| 2. | $\Gamma \vdash \Delta, \varphi \to \psi$ | |
| 3. | $\psi \vdash \psi$ | (Vor) |
| 4. | $\Gamma, \psi \vdash \Delta, \psi$ | (Erw) |
| 5. | $\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi$ | (Erw) auf 1 |
| 6. | $\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \Delta, \psi$ | ($\to$L) auf 4, 5 |
| 7. | $\Gamma \vdash \Delta, \varphi \to \psi, \psi$ | (Erw) auf 2 |
| 8. | $\Gamma \vdash \Delta, \psi$ | (S) auf 7, 6. |

(3) Ableitung der Regel ($\exists\forall$R):

$$
\begin{array}{lrl}
1. & \Gamma \vdash \Delta, \exists x \neg\varphi & \\
2. & \varphi \vdash \varphi & (\text{Vor}) \\
3. & \forall x \varphi \vdash \varphi & (\forall\text{L}) \text{ mit } \theta = x \\
4. & \vdash \neg\forall x\varphi, \varphi & (\neg\text{R}) \\
5. & \neg\varphi \vdash \neg\forall x\varphi & (\neg\text{L}) \\
6. & \exists x \neg\varphi \vdash \neg\forall x\varphi & (\exists\text{L}) \text{ mit } y = x \\
7. & \Gamma, \exists x\neg\varphi \vdash \Delta, \neg\forall x\varphi & (\text{Erw}) \\
8. & \Gamma \vdash \Delta, \exists x\neg\varphi, \neg\forall x\varphi & (\text{Erw}) \text{ auf } 1 \\
9. & \Gamma \vdash \Delta, \neg\forall x\varphi & (\text{S}) \text{ auf } 8, 7
\end{array}
$$

Ableitung der Regel ($\forall\exists$R): Übung. $\square$

## Definition 5.8
Eine Sequenzenregel

$$\frac{S_1 \quad \cdots \quad S_k}{S}, \qquad (\star)$$

ist korrekt, wenn gilt: wenn $S_1, \ldots, S_k$ gültig sind, dann ist auch $S$ gültig.

## Lemma 5.9
*Alle Regeln des Sequenzenkalküls sind korrekt.*

## Korollar 5.10 (Korrektheit des Sequenzenkalküls)
*Alle ableitbaren Sequenzen sind gültig.*

## Beweis des Lemmas.

Wir müssen alle 18 Regelschemata des Sequenzenkalküls durchgehen und zeigen, dass alle ihre Instanziierungen korrekt sind.

Für die Grundregeln und die aussagenlogischen Regeln lassen sich die Korrektheitsbeweise für den aussagenlogischen Sequenzenkalkül (Lemma 2.18) direkt übertragen.

Es bleibt also die Korrektheit der Quantorenregeln, der Gleichheitsregeln, und der Schnittregel zu beweisen. Wir betrachten exemplarisch (∃L), (∃R), (Rf), (Sub), (S).

($\exists L$) Wir müssen zeigen, dass für alle endlichen $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$, alle $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$, und alle $y \in \mathrm{Var} \setminus \mathrm{frei}(\Gamma \cup \Delta \cup \{\exists x \varphi\})$ die Regel

$$\frac{\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta}$$

korrekt ist, das heißt, wenn $\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \Delta$ gültig ist, dann ist auch $\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta$ gültig. Nehmen wir also an, $\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \vdash \Delta$ ist gültig.

Um zu zeigen, dass $\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta$ gültig ist, sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ eine $\sigma$-Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$. Wir müssen zeigen, dass es ein $\delta \in \Delta$ gibt, so dass $\mathfrak{I} \models \delta$.

Sei $a \in A$, so dass $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$. Weil $y \notin \text{frei}(\exists x\varphi)$ gilt dann nach dem Koinzidenzlemma $\mathfrak{I}\frac{a}{y}\frac{a}{x} \models \varphi$. (Wir müssen hier die Fälle $y = x$ und $y \neq x$ unterscheiden.) Nach dem Substitutionslemma folgt $\mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \varphi\frac{y}{x}$. Weil $y \notin \text{frei}(\Gamma)$ gilt nach dem Koinzidenzlemma auch $\mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \Gamma$, also gilt $\mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \Gamma \cup \{\varphi\frac{y}{x}\}$. Weil die Sequenz $\Gamma, \varphi\frac{y}{x} \ \vdash \ \Delta$ gültig ist, gibt es ein $\delta \in \Delta$, so dass $\mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \delta$. Weil $y \notin \text{frei}(\delta)$ gilt nach dem Koinzidenzlemma auch $\mathfrak{I} \models \delta$.

($\exists R$) Wir müssen zeigen, dass für alle endlichen $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$, alle $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$, alle $x \in \text{Var}$, und alle $\theta \in \mathrm{T}(\sigma)$ die Regel

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \varphi\frac{\theta}{x}}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x\varphi}$$

korrekt ist. Nehmen wir also an, $\Gamma \ \vdash \ \Delta, \varphi\frac{\theta}{x}$ ist gültig.

Um zu zeigen, dass $\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x\varphi$ gültig ist, sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ eine $\sigma$-Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \Gamma$. Wir müssen zeigen, dass es ein $\delta \in \Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ gibt, so dass $\mathfrak{I} \models \delta$.

Nehmen wir an, $\mathfrak{I} \not\models \delta$ für alle $\delta \in \Delta$. Weil $\Gamma \ \vdash \ \Delta, \varphi\frac{\theta}{x}$ gültig ist und $\mathfrak{I} \models \Gamma$ gilt dann $\mathfrak{I} \models \varphi\frac{\theta}{x}$. Sei $a := [\![\theta]\!]^{\mathfrak{I}}$. Nach dem Substitutionslemma gilt $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$. Das impliziert $\mathfrak{I} \models \exists x\varphi$.

(Rf) Wir müssen zeigen, dass für alle endlichen $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$ und alle $\theta \in \mathrm{T}(\sigma)$ die Regel

$$\frac{\Gamma, \theta \doteq \theta \ \vdash \ \Delta}{\Gamma \ \vdash \ \Delta}$$

korrekt ist. Nehmen wir also an, $\Gamma, \theta \doteq \theta \ \vdash \ \Delta$ ist gültig.

Um zu zeigen, dass $\Gamma \ \vdash \ \Delta$ gültig ist, sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ eine $\sigma$-Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \Gamma$. Dann gilt auch $\mathfrak{I} \models \theta \doteq \theta$. Weil $\Gamma, \theta \doteq \theta \ \vdash \ \Delta$ gültig ist, gibt es also ein $\delta \in \Delta$, so dass $\mathfrak{I} \models \delta$.

(Sub) Wir müssen zeigen, dass für alle endlichen $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$, alle Formeln $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$, alle $x \in \mathrm{Var}$, und alle $\theta, \eta \in \mathrm{T}(\sigma)$ die Regel

$$\frac{\Gamma, \theta \doteq \eta, \varphi\frac{\theta}{x} \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \theta \doteq \eta, \varphi\frac{\eta}{x} \ \vdash \ \Delta}$$

korrekt ist. Nehmen wir an, die Sequenz $\Gamma, \theta \doteq \eta, \varphi\frac{\theta}{x} \ \vdash \ \Delta$ ist gültig.

Um zu zeigen, dass $\Gamma, \theta \doteq \eta, \varphi\frac{\eta}{x} \ \vdash \ \Delta$ gültig ist, sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ eine $\sigma$-Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \Gamma \cup \left\{\theta \doteq \eta, \varphi\frac{\eta}{x}\right\}$. Sei $a := [\![\theta]\!]^{\mathfrak{I}}$. Weil $\mathfrak{I} \models \theta \doteq \eta$ gilt auch $a = [\![\eta]\!]^{\mathfrak{I}}$. Nach dem Substitutionslemma (zweimal angewandt) gilt

$$\mathfrak{I} \models \varphi\frac{\eta}{x} \iff \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi \iff \mathfrak{I} \models \varphi\frac{\theta}{x}.$$

Also gilt $\mathfrak{I} \models \Gamma \cup \left\{\theta \doteq \eta, \varphi\frac{\theta}{x}\right\}$. Weil die Sequenz $\Gamma, \theta \doteq \eta, \varphi\frac{\theta}{x} \ \vdash \ \Delta$ gültig ist, gibt es ein $\delta \in \Delta$, so dass $\mathfrak{I} \models \delta$.

(S) Wir müssen zeigen, dass für alle endlichen $\Gamma, \Delta \subseteq L(\sigma)$ und alle Formeln $\varphi \in L(\sigma)$ die Regel

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

korrekt ist. Nehmen wir an, die Sequenzen $\Gamma \vdash \Delta, \varphi$ und $\Gamma, \varphi \vdash \Delta$ sind gültig.

Um zu zeigen, dass $\Gamma \vdash \Delta$ gültig ist, sei $\mathfrak{I}$ eine $\sigma$-Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \Gamma$. Weil $\Gamma \vdash \Delta, \varphi$ gültig ist, erfüllt $\mathfrak{I}$ eine Formel in $\Delta \cup \{\varphi\}$. Wenn $\mathfrak{I}$ eine Formel in $\Delta$ erfüllt, sind wir fertig. Wenn $\mathfrak{I} \models \varphi$, dann erfüllt $\mathfrak{I}$ eine Formel in $\Delta$, weil $\Gamma, \varphi \vdash \Delta$ gültig ist. $\square$

## Beweis des Korollars.

Per Induktion über die Länge einer Ableitung, genau wie in der Aussagenlogik (Korollar 2.19). $\square$

## Definition 5.11

Seien $\Phi \subseteq \mathsf{L}(\sigma)$ und $\psi \in \mathsf{L}(\sigma)$. Dann ist $\psi$ beweisbar aus $\Phi$ (wir schreiben $\Phi \vdash \psi$), wenn es ein endliches $\Gamma \subseteq \Phi$ gibt, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \psi$ im Sequenzenkalkül ableitbar ist.

## Korollar 5.12 (Korrektheit)

*Für alle $\Phi \subseteq \mathsf{L}(\sigma)$ und $\psi \in \mathsf{L}(\sigma)$ gilt:*

$$\Phi \vdash \psi \quad \Longrightarrow \quad \Phi \models \psi.$$

## Beweis des Korollars.

Nehmen wir an, $\Phi \vdash \psi$. Dann gibt es ein endliches $\Gamma \subseteq \Phi$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \psi$ im Sequenzenkalkül ableitbar ist. Nach Korollary 5.10 ist die Sequenz also gültig.

Sein nun $\mathfrak{I}$ eine $\sigma$-Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \Phi$. Dann gilt $\mathfrak{I} \models \Gamma$, und weil die Sequenz $\Gamma \vdash \psi$ gültig ist gilt $\mathfrak{I} \models \psi$. $\square$

## Definition 5.13

Eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$ ist widersprüchlich (oder inkonsistent), wenn es eine Formel $\psi \in \mathrm{L}(\sigma)$ gibt, so dass $\Phi \vdash \psi$ und $\Phi \vdash \neg\psi$.

$\Phi$ ist widerspruchsfrei (oder konsistent), wenn es nicht widersprüchlich ist.

## Korollar 5.14

*Für alle $\Phi \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$ gilt:*

$$\Phi \textit{ erfüllbar} \implies \Phi \textit{ widerspruchsfrei}.$$

## Lemma 5.15

*Für alle $\Phi \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

*(i)* $\Phi$ *ist widersprüchlich.*

*(ii)* $\Phi \vdash \bot$.

*(iii)* *Für alle $\psi \in \mathrm{AL}$ gilt $\Phi \vdash \psi$.*

### Beweis von Korollar 5.14.

Sei $\mathfrak{I} \models \Phi$. *Angenommen*, es gibt ein $\psi \in \mathrm{L}(\sigma)$, so dass $\Phi \vdash \psi$ und $\Phi \vdash \neg\psi$. Nach Korollar 5.12 gilt dann $\Phi \models \psi$ und $\Phi \models \neg\psi$ und damit $\mathfrak{I} \models \psi$ und $\mathfrak{I} \models \neg\psi$. Das ist eine *Widerspruch.* □

### Beweis von Lemma 5.15.

„(iii)$\Longrightarrow$(i)“: Trivial.

„(iii)$\Longrightarrow$(ii)“: Trivial.

„(i)$\Longrightarrow$(iii)“: Sei $\psi \in \mathrm{L}(\sigma)$. Nehmen wir an, $\Phi$ ist widersprüchlich. Sei $\chi \in \mathrm{L}(\sigma)$, so dass $\Phi \vdash \chi$ und $\Phi \vdash \neg\chi$. Seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Phi$ endlich, so dass $\Gamma_1 \vdash \chi$ und $\Gamma_2 \vdash \neg\chi$ ableitbar sind.

Sei $\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Wir erhalten folgende Ableitung:

$$
\begin{array}{rcl}
\vdots & & \\
i. & \Gamma_1 \vdash \chi & \\
\vdots & & \\
j. & \Gamma_2 \vdash \neg\chi & \\
j+1. & \Gamma \vdash \chi, \psi & \text{(Erw) auf } i \\
j+2. & \Gamma, \neg\chi \vdash \psi & (\neg\mathrm{L}) \\
j+3. & \Gamma \vdash \neg\chi, \psi & \text{(Erw) auf } j \\
j+4. & \Gamma \vdash \psi & \text{(S) auf } j+2,\, j+3.
\end{array}
$$

Also gilt $\Phi \vdash \psi$.

„(ii)$\Longrightarrow$(iii)“: Sei $\psi \in \mathrm{L}(\sigma)$. Nehmen wir an, $\Phi \vdash \bot$. Sei $\Gamma \subseteq \Phi$ endlich, so dass $\Gamma \vdash \bot$ ableitbar ist. Wir erhalten folgende Ableitung:

$$
\begin{array}{rcl}
\vdots & & \\
i. & \Gamma \vdash \bot & \\
i+1. & \Gamma \vdash \bot, \psi & \text{(Erw)} \\
i+2. & \bot \vdash & (\bot\text{L}) \\
i+3. & \Gamma, \bot \vdash \psi & \text{(Erw)} \\
i+4. & \Gamma \vdash \psi & \text{(S) auf } i+1,\ i+3.
\end{array}
$$

Also gilt $\Phi \vdash \psi$. $\square$

## Satz 5.16 (Vollständigkeitssatz der Logik der 1. Stufe)

(1) *Für alle* $\Phi \subseteq \mathsf{L}(\sigma)$ *und* $\psi \in \mathsf{L}(\sigma)$ *gilt:*

$$\Phi \models \psi \qquad \iff \qquad \Phi \vdash \psi.$$

(2) *Für alle* $\Phi \subseteq \mathsf{L}(\sigma)$ *gilt:*

$$\Phi \text{ \textit{erfüllbar}} \qquad \iff \qquad \Phi \text{ \textit{widerspruchsfrei}}.$$

# Das Erfüllbarkeitslemma

Kern des Beweises des Vollständigkeitssatzes ist folgendes Lemma, das wir in Abschnitt 5.2 beweisen.

## Lemma 5.17 (Erfüllbarkeitslemma)

*Sei* $\Phi \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$ *widerspruchsfrei. Dann ist* $\Phi$ *erfüllbar.*

## Beweis des Vollständigkeitssatzes mit Hilfe des Erfüllbarkeitslemmas.

Wir beweisen zunächst Aussage (2).

„$\Longrightarrow$“: Korollar 5.14.

„$\Longleftarrow$“: Erfüllbarkeitslemma.

Jetz beweisen wir (1).

„$\Longrightarrow$“: Gelte $\Phi \models \psi$. Dann ist $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar. Nach (2) ist also $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ widersprüchlich. Nach Lemma 5.15 gilt $\Phi \cup \{\neg\psi\} \vdash \psi$. Dann gibt es ein endliches $\Gamma \subseteq \Phi$, so dass $\Gamma, \neg\psi \vdash \psi$ ableitbar ist.

Wir erhalten folgende Ableitung:

$$
\begin{array}{rcl}
 & \vdots & \\
i. & \Gamma, \neg\psi \vdash \psi & \\
i+1. & \psi \vdash \psi & \text{(Vor)} \\
i+2. & \Gamma, \psi \vdash \psi & \text{(Erw)} \\
i+3. & \Gamma \vdash \psi, \neg\psi & (\neg\text{R}) \text{ auf } i+1 \\
i+4. & \Gamma \vdash \psi & \text{(S) auf } i+3,\ i.
\end{array}
$$

Also gilt $\Phi \vdash \psi$.

„$\Longleftarrow$“: Korollar 5.12. $\square$

# 5.2 Beweis des Erfüllbarkeitslemmas

# Grundidee

## Vereinbarung

Im ganzen Abschnitt 5.2 sei $\Phi \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$ eine feste widerspruchsfreie Formelmenge.

## Ziel

Konstruktion eines Modells $\mathfrak{I}$ von $\Phi$. Wir werden $\mathfrak{I}$ so konstruieren, dass für alle $\psi \in \mathrm{L}(\sigma)$ gilt:

$$\mathfrak{I} \models \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi \vdash \psi. \tag{$\star$}$$

## Idee

Uns steht eigentlich nur Syntax zur Verfügung. Also verwenden wir syntaktische Objekte — Terme — um unser Modell zu bauen.

## Definition 5.18

(1) Die Termstruktur von $\Phi$ ist die folgendermaßen definierte $\sigma$-Struktur $\mathfrak{A}_\Phi$:

- Das Universum ist $A_\Phi := \mathrm{T}(\sigma)$.
- Für alle $k$-stelligen $f \in \sigma$ ist die Funktion $f^{\mathfrak{A}_\Phi} : \mathrm{T}(\sigma)^k \to T(\sigma)$ definiert durch

$$f^{\mathfrak{A}_\Phi}(\theta_1, \dots, \theta_k) := f(\theta_1, \dots, \theta_k),$$

  für alle $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathrm{T}(\sigma)$.
- Für alle $k$-stelligen $R \in \sigma$ ist

$$R^{\mathfrak{A}_\Phi} := \big\{(\theta_1, \dots, \theta_k) \in \mathrm{T}(\sigma)^k \bigm| \Phi \vdash R(\theta_1, \dots, \theta_k)\big\}.$$

(2) Die Terminterpretation von $\Phi$ ist die $\sigma$-Interpretation $\mathfrak{I}_\Phi := (\mathfrak{A}_\Phi, \mathfrak{b}_\Phi)$, wobei die Belegung $\mathfrak{b}_\Phi : \mathrm{Var} \to \mathrm{T}(\sigma)$ definiert ist durch $\mathfrak{b}_\Phi(x) := x$.

# Ergänzungen zu Seite 5.21

Man nennt die Termstruktur auch oft die Herbrandstruktur von $\Phi$, benannt nach dem Logiker Jaques Herbrand. Allerdings besteht normalerweise das Universum der Herbrandstrukturen nur aus allen geschlossenen Termen.

## Lemma 5.19

*Für alle $\theta \in \mathrm{T}(\sigma)$ gilt $[\![\theta]\!]^{\mathfrak{I}_\Phi} = \theta$.*

## Korollar 5.20

*Für alle atomaren Formeln der Gestalt $\alpha = R(\theta_1, \ldots, \theta_k)$, wobei $R/k \in \sigma$ und $\theta_1, \ldots, \theta_k \in \mathrm{T}(\sigma)$, gilt*

$$\mathfrak{I}_\Phi \models \alpha \quad \iff \quad \Phi \vdash \alpha.$$

## Korollar 5.21

*Für alle verschiedenen Terme $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{T}(\sigma)$ gilt*

$$\mathfrak{I}_\Phi \not\models \theta_1 \doteq \theta_2.$$

Falls es also Terme $\theta_1, \theta_2$ gibt, so dass $\Phi \vdash \theta_1 \doteq \theta_2$, lässt sich Korollar 5.20 nicht auf die atomare Formel $\alpha := \theta_1 \doteq \theta_2$ erweitern.

## Beweis von Lemma 5.19.

Induktion über den Aufbau von $\theta \in \mathrm{T}(\sigma)$:

$\theta = x$ für ein $x \in \mathrm{Var}$:

Es gilt $[\![x]\!]^{\mathfrak{I}_\Phi} = \mathfrak{b}_\Phi(x) = x$.

$\theta = f(\theta_1, \dots, \theta_k)$ für ein $k$-stelliges $f \in \sigma$ und $\theta_1, \dots, \theta_k \in \mathrm{T}(\sigma)$:

Es gilt

$$\begin{aligned}
[\![f(\theta_1, \dots, \theta_k)]\!]^{\mathfrak{I}_\Phi} &= f^{\mathfrak{A}_\Phi}\left([\![\theta_i]\!]^{\mathfrak{I}_\Phi}, \dots, [\![\theta_k]\!]^{\mathfrak{I}_\Phi}\right) \\
&= f^{\mathfrak{A}_\Phi}\left(\theta_1, \dots, \theta_k\right) && \text{Induktionsannahme} \\
&= f(\theta_1, \dots, \theta_k) && \text{Definition } f^{\mathfrak{A}_\Phi}.
\end{aligned}$$

$\square$

## Definition 5.22

Die zweistellige Relation $\sim \subseteq \mathrm{T}(\sigma)^2$ sei definiert durch

$$\theta \sim \eta \quad :\Longleftrightarrow \quad \Phi \vdash \theta \doteq \eta.$$

## Lemma 5.23

(1) *$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{T}(\sigma)$.*

(2) *Für alle $k$-stelligen $f \in \sigma$ und alle $\theta_1, \dots, \theta_k, \eta_1, \dots, \eta_k \in \mathrm{T}(\sigma)$ mit $\theta_i \sim \eta_i$ für alle $i \in [k]$ gilt*

$$f^{\mathfrak{A}_\Phi}(\theta_1, \dots, \theta_k) \sim f^{\mathfrak{A}_\Phi}(\eta_1, \dots, \eta_k).$$

(3) *Für alle $k$-stelligen $R \in \sigma$ und alle $\theta_1, \dots, \theta_k, \eta_1, \dots, \eta_k \in \mathrm{T}(\sigma)$ mit $\theta_i \sim \eta_i$ für alle $i \in [k]$ gilt*

$$(\theta_1, \dots, \theta_k) \in R^{\mathfrak{A}_\Phi} \iff (\eta_1, \dots, \eta_k) \in R^{\mathfrak{A}_\Phi}.$$

# Ergänzungen zu Seite 5.23

Ganz allgemein nennt man eine zweistellige Relation $\approx \subseteq A^2$ eine Kongruenz einer $\sigma$-Struktur $\mathfrak{A}$, wenn gilt:

- $\approx$ ist eine Äquivalenzrelation auf $A$.
- Für alle $k$-stelligen $f \in \sigma$ und alle $\theta_1, \ldots, \theta_k, \eta_1, \ldots, \eta_k \in \mathrm{T}(\sigma)$ mit $\theta_i \approx \eta_i$ für alle $i \in [k]$ gilt
$$f^{\mathfrak{A}}(\theta_1, \ldots, \theta_k) \approx f^{\mathfrak{A}}(\eta_1, \ldots, \eta_k).$$
- Für alle $k$-stelligen $R \in \sigma$ und alle $\theta_1, \ldots, \theta_k, \eta_1, \ldots, \eta_k \in \mathrm{T}(\sigma)$ mit $\theta_i \approx \eta_i$ für alle $i \in [k]$ gilt
$$(\theta_1, \ldots, \theta_k) \in R^{\mathfrak{A}} \iff (\eta_1, \ldots, \eta_k) \in R^{\mathfrak{A}}.$$

$\sim$ ist also eine Kongruenz auf der Termstruktur $\mathfrak{A}_\Phi$.

## Beweis von Lemma 5.23.

(1) folgt aus Beispiel 5.4.

(2) Mit Hilfe der Substitutionsregel (Sub) lässt sich leicht zeigen, dass die Sequenz

$$\theta_1 \doteq \eta_1, \dots, \theta_k \doteq \eta_k \ \vdash \ f(\theta_1, \dots, \theta_k) \doteq f(\eta_1, \dots, \eta_k)$$

ableitbar ist. Wenn nun $\Phi \vdash \theta_i \doteq \eta_i$ für alle $i$, so ergibt sich mit Hilfe der Schnittregel (S), dass $\Phi \vdash f(\theta_1, \dots, \theta_k) \doteq f(\eta_1, \dots, \eta_k)$.

(3) Wir zeigen, dass aus $\Phi \vdash R(\theta_1, \dots, \theta_k)$ folgt, dass $\Phi \vdash R(\eta_1, \dots, \eta_k)$. Das ergibt die Hinrichtung, die Rückrichtung lässt sich analog zeigen. Zunächst beobachten wir, dass die Sequenz

$$\theta_1 \doteq \eta_1, \dots, \theta_k \doteq \eta_k, R(\theta_1, \dots, \theta_k) \ \vdash \ R(\eta_1, \dots, \eta_k)$$

ableitbar ist. Gilt dann $\Phi \vdash \theta_i \doteq \eta_i$ für alle $i$ und $\Phi \vdash R(\theta_1, \dots, \theta_k)$, so ergibt sich mit Hilfe der Schnittregel (S), dass $\Phi \vdash R(\eta_1, \dots, \eta_k)$. $\square$

# Faktorisierte Terminterpretationen

## Definition 5.24

(1) Für alle $a \in A_\Phi$ sei $\widetilde{a} := \{ b \in A_\Phi \mid b \sim a \}$ die Äquivalenzklasse von $a$ bezüglich $\sim$.

(2) Die faktorisierte Termstruktur von $\Phi$ ist die folgendermaßen definierte $\sigma$-Struktur $\widetilde{\mathfrak{A}_\Phi}$:

- Das Universum ist $\widetilde{A_\Phi} := \{ \widetilde{a} \mid a \in A_\Phi \}$.
- Für alle $k$-stelligen $f \in \sigma$ ist $f^{\widetilde{\mathfrak{A}_\Phi}}$ definiert durch

$$f^{\widetilde{\mathfrak{A}_\Phi}}(\widetilde{a_1}, \dots, \widetilde{a_k}) := \widetilde{f^{\mathfrak{A}_\Phi}(a_1, \dots, a_k)}.$$

- Für alle $k$-stelligen $f \in \sigma$ ist

$$R^{\widetilde{\mathfrak{A}_\Phi}} := \left\{ (\widetilde{a_1}, \dots, \widetilde{a_k}) \in \widetilde{A_\Phi}^k \;\middle|\; (a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathfrak{A}_\varphi} \right\}.$$

(3) Die faktorisierte Terminterpretation von $\Phi$ ist die $\sigma$-Interpretation $\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} := (\widetilde{\mathfrak{A}_\Phi}, \widetilde{\mathfrak{b}_\Phi})$, wobei die Belegung $\widetilde{\mathfrak{b}_\Phi}$ definiert ist durch $\widetilde{\mathfrak{b}_\Phi}(x) := \widetilde{x}$.

## Lemma 5.25

*$\widetilde{\mathfrak{A}_\Phi}$ und $\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi}$ sind wohldefiniert.*

## Beweis des Lemmas.

Es stellt sich vielleicht ersteinmal die Frage, was hier eigentlich zu beweisen ist, d.h., was an der Definition problematisch sein könnte. Wir gehen die einzelnen Teile der Definition durch.

- Die Definition der Äquivalenzklassen $\widetilde{a}$ und damit des Universums $\widetilde{A_\Phi}$ ist unproblematisch, weil $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist (nach Lemma 5.23(1)).
- Bei der Definition der Funktion(en) $f^{\widetilde{A_\Phi}}$ gibt es allerdings ein Problem: Wir definieren den Wert $f^{\widetilde{\mathfrak{A}_\Phi}}(\widetilde{a_1}, \dots, \widetilde{a_k}))$, der nur von den Äquivalenzklassen $\widetilde{a_1}, \dots, \widetilde{a_k}$ abhängen darf, unter Verwendung der *Repräsentanten* $a_1, \dots, a_k$ dieser Klassen. Es könnte ja sein, dass es $b_1, \dots, b_k$ gibt, so dass $a_i \sim b_i$, also $\widetilde{a_i} = \widetilde{b_i}$ für alle $i \in [k]$, aber $f^{\mathfrak{A}_\varphi}(a_1, \dots, a_k) \not\sim f^{\mathfrak{A}_\varphi}(b_1, \dots, b_k)$ und damit $f^{\mathfrak{A}_\varphi}\widetilde{(a_1, \dots, a_k)} \neq f^{\mathfrak{A}_\varphi}\widetilde{(b_1, \dots, b_k)}$. Weil aber $\sim$ eine *Kongruenz* ist, speziell wegen Lemma 5.23(2), kann genau das nicht passieren.

- Die Definition der Relation(en) $R^{\widetilde{A_\Phi}}$ ist wieder unproblematisch: Die Definition besagt, dass $(\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_k)$ genau dann in $R^{\widetilde{A_\Phi}}$ liegt, wenn es $b_1, \ldots, b_k$ gibt, so dass $a_i \sim b_i$ für alle $i \in [k]$ und $(\widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_k) \in R^{\widetilde{\mathfrak{A}_\varphi}}$.

  Die Kongruenzbedingung (Lemma 5.23(3)) garantiert allerdings, dass $(\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_k) \in R^{\widetilde{\mathfrak{A}_\varphi}}$ auch bedeutet, dass $(\widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_k) \in R^{\widetilde{\mathfrak{A}_\varphi}}$ für alle $b_1, \ldots, b_k$ gibt, so dass $a_i \sim b_i$. Das ist oft nützlich.
- Die Definition von $\widetilde{\mathfrak{b}_\Phi}$ und damit die von $\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi}$ ist unproblematisch.

$\square$

Man kann diesen Prozess der Faktorisierung generell anwenden, um aus einer Struktur eine neue sogenannte Faktorstruktur zu erhalten, deren Elemente die Äquivalenzklassen einer Kongruenzrelation auf der Struktur sind. In der Mathematik verwendet man diese Konstruktion beispielsweise bei Gruppen oder Ringen. Die Kongruenzen werden dabei von Normalteilern bzw. Idealen induziert.

Um die Allgemeinheit der Konstruktion zu betonen, haben wir hier die Elemente der Struktur $\mathfrak{A}_\Phi$, die ja $\sigma$-Terme sind, mit $a, b$ statt mit $\theta, \eta$ bezeichnet. Im folgenden werden wir wieder $\theta, \eta$ verwenden.

# Eigenschaften der Faktorisierten Terminterpretation

## Lemma 5.26

*Für alle Terme $\theta \in \mathsf{T}(\sigma)$ gilt*

$$[\![\theta]\!]^{\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi}} \quad = \quad \widetilde{\theta}.$$

## Lemma 5.27

*Für alle atomaren Formeln $\alpha \in \mathsf{L}(\sigma)$ gilt*

$$\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi \vdash \alpha.$$

## Beweis von Lemma 5.26.

Induktion über den Aufbau von $\theta$.

$\theta = x$ für ein $x \in \mathrm{Var}$:

$$[\![x]\!]^{\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi}} = \widetilde{\mathfrak{b}_\Phi}(x) = \widetilde{x}$$

$\theta = f(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ für ein $k$-stelliges $f \in \sigma$ und Terme $\theta_1, \ldots, \theta_k \in \mathrm{T}(\sigma)$:

$$\begin{aligned}
[\![\theta]\!]^{\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi}} &= f^{\widetilde{\mathfrak{A}_\Phi}}\big([\![\theta_1]\!]^{\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi}}, \ldots, [\![\theta_k]\!]^{\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi}}\big) \\
&= f^{\widetilde{\mathfrak{A}_\Phi}}(\widetilde{\theta_1}, \ldots, \widetilde{\theta_k}) && \text{Induktionsannahme} \\
&= f^{\mathfrak{A}_\Phi}(\widetilde{\theta_1, \ldots, \theta_k}) \\
&= f(\widetilde{\theta_1, \ldots, \theta_k}) \\
&= \widetilde{\theta}.
\end{aligned}$$

$\square$

## Beweis von Lemma 5.27.

Fall 1: $\alpha = \theta_1 \doteq \theta_2$ für Terme $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{T}(\sigma)$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \theta_1 \doteq \theta_2 &\iff [\![\theta_1]\!]^{\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi}} = [\![\theta_2]\!]^{\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi}} \\
&\iff \widetilde{\theta_1} = \widetilde{\theta_2} && \text{Lemma 5.26} \\
&\iff \theta_1 \sim \theta_2 \\
&\iff \Phi \vdash \theta_1 \doteq \theta_2.
\end{aligned}$$

Fall 2: $\alpha = R(\theta_1, \ldots, \theta_k)$ für eine $k$-stelliges $R \in \sigma$ und $\theta_1, \ldots, \theta_k \in \mathrm{T}(\sigma)$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models R(\theta_1, \ldots, \theta_k) &\iff \left([\![\theta_1]\!]^{\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi}}, \ldots, [\![\theta_k]\!]^{\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi}}\right) \in R^{\widetilde{\mathfrak{A}_\Phi}} \\
&\iff \left(\widetilde{\theta_1}, \ldots, \widetilde{\theta_k}\right) \in R^{\widetilde{\mathfrak{A}_\Phi}} && \text{Lemma 5.26} \\
&\iff \left(\theta_1, \ldots, \theta_k\right) \in R^{\mathfrak{A}_\Phi} && \text{Lemma 5.23(3)} \\
&\iff \Phi \vdash R(\theta_1, \ldots, \theta_k).
\end{aligned}$$

Fall 3: $\alpha = \bot$ oder $\alpha = \top$.

Es gilt $\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \not\models \bot$ und $\Phi \nvdash \bot$, weil $\Phi$ widerspruchsfrei ist.

Außerdem gilt $\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \top$ und $\Phi \vdash \top$ wegen ($\top$R). $\square$

## Lemma 5.28

*Für alle $\varphi, \psi \in \mathsf{L}(\sigma)$ gilt*

$$\Phi \vdash \varphi \wedge \psi \quad \iff \quad \Phi \vdash \varphi \textit{ und } \Phi \vdash \psi.$$

## Korollar 5.29

*Sei $\psi \in \mathsf{L}(\sigma)$ eine Konjunktion atomarer Formeln. Dann gilt*

$$\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \psi \quad \iff \quad \Phi \vdash \psi.$$

## Beweis von Lemma 5.28.

„$\Longrightarrow$“: Gelte $\Phi \vdash \varphi \wedge \psi$. Sei $\Gamma \subseteq \varphi$ endlich, so dass die Sequenz $\Gamma \ \vdash \ \varphi \wedge \psi$ ableitbar ist.

Wir erhalten folgende Ableitung:

$$
\begin{array}{rcl}
\vdots & & \\
i. & \Gamma \vdash \varphi \wedge \psi & \\
i+1. & \Gamma \vdash \varphi \wedge \psi, \varphi & \text{(Erw)} \\
i+1. & \varphi \vdash \varphi & \text{(Vor)} \\
i+2. & \Gamma, \varphi, \psi \vdash \varphi & \text{(Erw)} \\
i+3. & \Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \varphi & (\wedge\text{L}) \\
i+4. & \Gamma \vdash \varphi & \text{(S) auf } i+1, i+3.
\end{array}
$$

Also gilt $\Phi \vdash \varphi$. Analog lässt sich zeigen, dass $\Phi \vdash \psi$.

„$\Longleftarrow$“: Folgt sofort mit Hilfe der Regel $(\wedge\text{R})$. $\square$

## Beweis von Korollar 5.29.

Induktion über den Aufbau von $\psi$.

$\psi$ atomar:

Lemma 5.27.

$\psi = \chi_1 \wedge \chi_2$:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \psi &\iff \widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \chi_1 \text{ und } \widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \chi_2 \\
&\iff \Phi \vdash \chi_1 \text{ und } \Phi \vdash \chi_2 && \text{Induktionsannahme} \\
&\iff \Phi \vdash \psi && \text{Lemma 5.28.}
\end{aligned}
$$

□

Leider gilt das Analogon von Lemma 5.28 für Disjunktionen nicht.

### Beispiel 5.30

Seien $\sigma = \{P/1, Q/1, c\}$ und $\Phi := \big\{P(c) \vee Q(c)\big\}$.

Dann ist $\Phi$ erfüllbar und es gilt $\Phi \vdash P(c) \vee Q(c)$, aber es gilt

$$\Phi \nvdash P(c) \quad \text{und} \quad \Phi \nvdash Q(c).$$

## Zu Beispiel 5.30:

Um zu zeigen, dass $\Phi \not\vdash P(c)$, sei $\mathfrak{A}$ folgende $\sigma$-Struktur:

- $A := \{a\}$ für ein beliebiges Element $a$;
- $P^{\mathfrak{A}} = \emptyset$, $Q^{\mathfrak{A}} = \{a\}$;
- $c^{\mathfrak{A}} := a$.

Dann gilt $\mathfrak{A} \models \Phi$, aber $\mathfrak{A} \not\models P(c)$. Also $\Phi \not\models P(c)$. Also nach dem Korrektheitslemma 5.12 $\Phi \not\vdash P(c)$.

Analog kann man zeigen, dass $\Phi \not\vdash Q(c)$.

## Definition 5.31

Eine Formelmenge $\Psi \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$ ist negationstreu, wenn $\Psi$ widerspruchsfrei ist und wenn für alle $\chi \in \mathrm{L}(\sigma)$ gilt:

$$\Psi \vdash \chi \quad \text{oder} \quad \Psi \vdash \neg\chi.$$

## Beobachtung 5.32

$\Psi$ *ist genau dann negationstreu, wenn für alle* $\chi \in \mathrm{L}(\sigma)$ *gilt:*

$$\Psi \vdash \chi \quad \iff \quad \Psi \nvdash \neg\chi.$$

## Lemma 5.33

*Wenn $\Phi$ negationstreu ist, dann gilt für alle $\varphi, \psi \in \mathsf{L}(\sigma)$:*

$$\begin{aligned} \Phi \vdash \varphi \lor \psi &\iff \Phi \vdash \varphi \text{ oder } \Phi \vdash \psi, \\ \Phi \vdash \varphi \to \psi &\iff \Phi \nvdash \varphi \text{ oder } \Phi \vdash \psi. \end{aligned}$$

## Lemma 5.34

*Wenn $\Phi$ negationstreu ist, dann gilt für alle quantorenfreien Formeln $\psi \in \mathsf{L}(\sigma)$:*

$$\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \psi \iff \Phi \vdash \psi.$$

## Beweis von Lemma 5.33.

Wir beweisen zunächst die Behauptung für $\vee$.

„$\Longrightarrow$“: Gelte $\Phi \vdash \varphi \vee \psi$. *Angenommen*, es gilt $\Phi \nvdash \varphi$ und $\Phi \nvdash \psi$. Weil $\Phi$ negationstreu ist, gilt dann $\Phi \vdash \neg\varphi$ und $\Phi \vdash \neg\psi$. Also gibt es endliche $\Gamma, \Gamma' \subseteq \Phi$, so dass $\Gamma \vdash \neg\varphi$ und $\Gamma' \vdash \neg\psi$. Nach Lemma 5.7(1) sind dann auch die Sequenzen $\Gamma, \varphi \vdash$ und $\Gamma', \psi \vdash$ ableitbar. Auf Grund der Erweiterungsregel können wir annehmen, dass $\Gamma = \Gamma'$.

Wir erhalten folgende Ableitung:

$$
\begin{array}{rcl}
\vdots & & \\
i. & \Gamma, \varphi \vdash & \\
\vdots & & \\
j. & \Gamma, \psi \vdash & \\
j+1. & \Gamma, \varphi \vee \psi \vdash & (\vee\mathrm{L}) \\
i+2. & \Gamma \vdash \neg(\varphi \vee \psi) & (\neg\mathrm{R})
\end{array}
$$

Es folgt $\Phi \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$. Also ist $\Phi$ widersprüchlich. Das ist ein *Widerspruch*.

„$\Longleftarrow$“: Nehmen wir an, $\Phi \vdash \varphi$. Dann gibt es ein endliches $\Gamma \subseteq \Phi$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \varphi$ ableitbar ist. Nach der Erweiterungsregel ist auch $\Gamma \vdash \varphi, \psi$ ableitbar, und mit Hilfe von ($\vee$R) dann $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$. Also gilt $\Phi \vdash \varphi \vee \psi$. Falls $\Phi \vdash \psi$ gilt argumentieren wir ähnlich.

Als nächstes beweisen wir die Behauptung für $\rightarrow$.

„$\Longrightarrow$“: Gelte $\Phi \vdash \varphi \rightarrow \psi$. *Angenommen*, es gilt $\Phi \vdash \varphi$ und $\Phi \nvdash \psi$. Weil $\Phi$ negationstreu ist, gilt auch $\Phi \vdash \neg\psi$. Also gibt es endliche $\Gamma, \Gamma' \subseteq \Phi$, so dass $\Gamma \vdash \varphi$ und $\Gamma' \vdash \neg\psi$. Nach Lemma 5.7(1) ist dann auch die Sequenz $\Gamma', \psi \vdash$ ableitbar. Auf Grund der Erweiterungsregel können wir annehmen, dass $\Gamma = \Gamma'$.

Wir erhalten folgende Ableitung:

$$
\begin{array}{rcl}
\vdots & & \\
i. & \Gamma \vdash \varphi & \\
\vdots & & \\
j. & \Gamma, \psi \vdash & \\
j+1. & \Gamma, \varphi \rightarrow \psi \vdash & (\rightarrow\text{L}) \\
i+2. & \Gamma \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi) & (\neg\text{R})
\end{array}
$$

Damit gilt $\Phi \vdash \neg(\varphi \rightarrow \psi)$. Also ist $\Phi$ widersprüchlich. Das ist ein *Widerspruch*.

„$\Longleftarrow$“: Nehmen wir zunächst an, $\Phi \nvdash \varphi$. Weil $\Phi$ negationstreu ist, gilt dann $\Phi \vdash \neg\varphi$. Also gibt es ein endliches $\Gamma \subseteq \Phi$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \neg\varphi$ ableitbar ist. Nach Lemma 5.7(1) ist dann auch $\Gamma, \varphi \vdash$ ableitbar. Nach der Erweiterungsregel ist $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ ableitbar, und mit Hilfe von ($\to$R) schließlich $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Also gilt $\Phi \vdash \varphi \to \psi$.

Falls $\Phi \vdash \psi$ gibt es ein endliches $\Gamma \subseteq \Phi$, so dass die Sequenz $\Gamma \vdash \psi$ ableitbar ist. Nach der Erweiterungsregel ist dann $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ ableitbar, und mit Hilfe von ($\to$R) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Also gilt $\Phi \vdash \varphi \to \psi$. □

## Beweis von Lemma 5.34.

Induktion über den Aufbau von $\psi$.

**$\psi$ atomar:**
Lemma 5.27.

**$\psi = \neg\chi$:**

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathfrak{I}}_\Phi \models \neg\chi &\iff \widetilde{\mathfrak{I}}_\Phi \not\models \chi \\
&\iff \Phi \nvdash \chi && \text{Induktionsannahme} \\
&\iff \Phi \vdash \neg\chi && \text{Negationstreue}
\end{aligned}$$

$\psi = \chi_1 \wedge \chi_2$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \psi &\iff \widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \chi_1 \text{ und } \widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \chi_2 \\ &\iff \Phi \vdash \chi_1 \text{ und } \Phi \vdash \chi_2 && \text{Induktionsannahme} \\ &\iff \Phi \vdash \psi && \text{Lemma 5.28.} \end{aligned}$$

$\psi = \chi_1 \vee \chi_2$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \chi_1 \vee \chi_2 &\iff \widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \chi_1 \text{ oder } \widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \chi_2 \\ &\iff \Phi \vdash \chi_1 \text{ oder } \Phi \vdash \chi_2 && \text{Induktionsannahme} \\ &\iff \Phi \vdash \chi_1 \vee \chi_2 && \text{Lemma 5.33.} \end{aligned}$$

$\psi = \chi_1 \rightarrow \chi_2$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \chi_1 \rightarrow \chi_2 &\iff \widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \not\models \chi_1 \text{ oder } \widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \chi_2 \\ &\iff \Phi \not\vdash \chi_1 \text{ oder } \Phi \vdash \chi_2 && \text{Induktionsannahme} \\ &\iff \Phi \vdash \chi_1 \rightarrow \chi_2 && \text{Lemma 5.33.} \end{aligned}$$

$\square$

## Beispiel 5.35

Sei $\sigma := \{P/1\}$ und

$$\Phi = \{\exists x P(x)\} \cup \{\neg P(x) \mid x \in \mathrm{Var}\} \cup \{\neg x \doteq y \mid x, y \in \mathrm{Var}, x \neq y\}.$$

Dann ist $\Phi$ erfüllbar, und es gilt $\Phi \vdash \exists x P(x)$. Aber $\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \not\models \exists x P(x)$. Intuitiv liegt das daran, dass es keinen Term $\theta \in \mathrm{T}(\sigma)$ gibt, so dass $\Phi \vdash P(\theta)$.

## Definition 5.36

Eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$ enthält Beispiele, wenn es für alle $x \in \mathrm{Var}$ und $\psi \in \mathrm{L}(\sigma)$ einen Term $\theta$ gibt, so dass

$$\Phi \vdash \exists x \psi \to \psi\frac{\theta}{x}.$$

## Zu Beispiel 5.35:

OBdA nehmen wir an, dass

$$\mathrm{Var} = \{x_0, x_1, \dots\}.$$

Um zu sehen, dass $\Phi$ erfüllbar ist, sei $\mathfrak{A}$ die $\sigma$-Struktur mit $A := \mathbb{N}$ und $P^{\mathfrak{A}} := \{0\}$, und sei $\mathfrak{b} : \mathrm{Var} \to A$ definiert durch $\mathfrak{b}(x_i) := i + 1$. Dann gilt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \models \Phi$.

Es gilt $\mathrm{T}(\sigma) = \mathrm{Var}$ und und $\Phi \not\vdash x \doteq y$ für alle $x, y \in \mathrm{Var}$ mit $x \neq y$. Also $x \not\sim y$ für alle $x, y \in \mathrm{Var}$ mit $x \neq y$ und damit $\widetilde{A_\Phi} = \big\{\{x\} \bigm| x \in \mathrm{Var}\big\}$. Außerdem gilt $\Phi \not\vdash P(x)$ für alle $x \in \mathrm{Var}$ und damit $P^{\widetilde{A_\Phi}} = \emptyset$. Also $\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \not\models \exists x P(x)$.

Man beachte allerdings, dass $\Phi$ nicht negationstreu ist. Es lässt sich aber auch ein negationstreues $\Phi' \supseteq \Phi$ konstruieren, so dass $\widetilde{\mathfrak{I}_{\Phi'}} \not\models \exists x P(x)$.

## Satz 5.37 (Satz von Henkin)

*Sei* $\Phi \subseteq \mathsf{L}(\sigma)$ *negationstreu und enthalte es Beispiele. Dann gilt für alle* $\psi \in \mathsf{L}(\sigma)$*:*

$$\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \psi \quad \iff \quad \Phi \vdash \psi.$$

*Insbesondere gilt* $\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \Phi$*.*

Beweis.
Induktion über den Aufbau von $\psi$.

Atomare Formeln und Junktoren werden wie in Lemma 5.34 behandelt.

$\psi = \exists x \chi$ für ein $x \in \mathrm{Var}$ und ein $\chi \in \mathrm{L}(\sigma)$:
„$\Longrightarrow$“: Gelte $\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \psi$. Dann existiert ein $\theta \in \mathrm{T}(\sigma)$, so dass

$$\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi}\frac{\widetilde{\theta}}{x} \models \chi.$$

Weil $\widetilde{\theta} = [\![\theta]\!]^{\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi}}$ gilt nach dem Substitutionslemma $\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \chi\frac{\theta}{x}$. Nach Induktionsannahme gilt dann $\Phi \vdash \chi\frac{\theta}{x}$, und mit Hilfe von $(\exists \mathrm{R})$ $\Phi \vdash \psi$.

„$\Longleftarrow$“: Gelte $\Phi \vdash \psi$. Weil $\Phi$ Beispiele enthält gibt es außerdem einen Term $\theta \in \mathrm{T}(\sigma)$, so dass $\Phi \vdash \psi \to \chi\frac{\theta}{x}$. Nach Lemma 5.7(2) gilt dann auch $\Phi \vdash \chi\frac{\theta}{x}$. Nach Induktionsannahme gilt $\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \chi\frac{\theta}{x}$, und mit dem Substitutionslemma und Lemma 5.26 folgt $\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi}\frac{\widetilde{\theta}}{x} \models \chi$. Also $\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \psi$.

$\psi = \forall x \chi$ für ein $x \in \mathrm{Var}$ und ein $\chi \in \mathrm{L}(\sigma)$:

„$\Longrightarrow$“: Gelte $\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \psi$. Dann gilt für alle $\theta \in \mathrm{T}(\sigma)$:

$$\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi}\frac{\widetilde{\theta}}{x} \models \chi.$$

Damit auch $\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \chi\frac{\theta}{x}$, und nach Induktionsannahme gilt $\Phi \vdash \chi\frac{\theta}{x}$.
*Angenommen*, $\Phi \not\vdash \psi$. Weil $\Phi$ negationstreu ist gilt dann $\Phi \vdash \neg\psi$, und nach Lemma 5.7(3) damit auch $\Phi \vdash \exists x \neg\chi$. Weil $\Phi$ Beispiele enthält, gibt es eine $\theta \in \mathrm{T}(\sigma)$, so dass $\Phi \vdash \exists x \neg\chi \to \neg\chi\frac{\theta}{x}$, und nach Lemma 5.7(2) gilt $\Phi \vdash \neg\chi\frac{\theta}{x}$.
Also ist $\Phi$ widersprüchlich, was ein *Widerspruch* ist.

„$\Longleftarrow$“: Gelte $\Phi \vdash \psi$. *Angenommen*, $\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \not\models \psi$. Dann gilt $\widetilde{\mathfrak{I}_\Phi} \models \exists x \neg\chi$. Wie bei der Behandlung der Existenzquatoren zeigen wir $\Phi \vdash \exists x \neg\chi$. Nach Lemma 5.7(3) gilt dann auch $\Phi \vdash \neg\psi$. Das ist ein *Widerspruch*. $\square$

# Erweiterung um Beispiele

## Lemma 5.38

*Sei* $\Phi \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$ *widerspruchsfrei, so dass* $|\mathrm{Var} \setminus \mathrm{frei}(\Phi)|$ *unendlich ist. Dann gibt es eine widerspruchsfreie Menge* $\Phi^B \supseteq \Phi$ *von* $\sigma$*-Formeln, die Beispiele enthält.*

**Beweis.**
Weil $\sigma$ abzählbar ist, ist auch das Alphabet $\Sigma_{\mathrm{L}(\sigma)}$ abzählbar. Damit ist die Menge $\mathrm{L}(\sigma) \subseteq \Sigma^*_{\mathrm{L}(\sigma)}$ abzählbar unendlich. Sei

$$\exists x_1 \varphi_1, \exists x_2 \varphi_2, \ldots$$

eine Aufzählung aller $\sigma$-Formeln der Gestalt $\exists x \psi$.

Wir setzen

$$\Phi_0 := \Phi.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ definieren wir eine Variable $y_n$, eine Formel $\psi_n \in \mathrm{L}(\sigma)$ und eine Formelmenge $\Phi_n \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$:

(i) $y_n$ ist eine Variable in $\mathrm{Var} \setminus \mathrm{frei}\big(\Phi_{n-1} \cup \{\exists x_n \varphi_n\}\big)$;

(ii) $\psi_n := \exists x_n \varphi_n \to \varphi_n \frac{y_n}{x_n}$;

(iii) $\Phi_n := \Phi_{n-1} \cup \{\psi_n\}$.

Man beachte, dass für alle $n$ die Menge $\mathrm{Var} \setminus \mathrm{frei}\left(\Phi_{n-1} \cup \{\exists x_n \varphi_n\}\right)$ unendlich ist, weil $\mathrm{Var} \setminus \mathrm{frei}\left(\Phi_0\right)$ unendlich ist und in jedem Schritt nur endlich viele zusätzliche freie Variablen, nämlich genau die freien Variablen von $\psi_n$, zu $\mathrm{frei}(\Phi_n)$ hinzukommen. Also gibt es in (i) immer noch eine Variable $y_n$.

Weiterhin setzen wir

$$\Phi^B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Phi_n.$$

Offensichtlich gilt $\Phi^B \supseteq \Phi$, und $\Phi^B$ enthält Beispiele. Wir müssen zeigen, dass $\Phi^B$ widerspruchfrei ist.

Per Induktion zeigen wir, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\Phi_n$ widerspruchsfrei ist. Dann ist auch $\Phi^B$ widerspruchsfrei ist, denn *angenommen*, $\Phi^B$ widersprüchlich. Dann gibt es ein endliches $\Gamma \subseteq \Phi^B$, so dass $\Gamma \vdash \bot$ ableitbar ist. Es gilt aber schon $\Gamma \subseteq \Phi_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, also ist auch $\Phi_n$ widersprüchlich. *Widerspruch*.

$n = 0$:
$\Phi_0 = \Phi$ ist nach Voraussetzung widerspruchsfrei.

$n \to n + 1$:
*Angenommen*, $\Phi_{n+1} = \Phi_n \cup \{\psi_{n+1}\}$ ist widersprüchlich. Nach Lemma 5.15 gibt es ein endliches $\Gamma \subseteq \Phi_n$, so dass $\Gamma, \psi_{n+1} \vdash \bot$ ableitbar ist.

Man beachte, dass $\psi_{n+1} = \exists x_{n+1}\varphi_{n+1} \to \varphi_{n+1}\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}$ und das $y_{n+1} \notin \text{frei}(\Gamma \cup \{\exists x_{n+1}\varphi_{n+1}\})$, weil $\Gamma \subseteq \Phi_n$. Wir erhalten folgende Ableitung der Sequenz $\Gamma \vdash \bot$:

$$
\begin{array}{rll}
 & \vdots & \\
i. & \Gamma, \exists x_{n+1}\varphi_{n+1} \to \varphi_{n+1}\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} \vdash \bot & \\
i+1. & \varphi_{n+1}\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} \vdash \varphi_{n+1}\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} & (\text{Vor}) \\
i+2. & \Gamma, \varphi_{n+1}\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}, \exists x_{n+1}\varphi_{n+1} \vdash \varphi_{n+1}\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}, \bot & (\text{Erw}) \\
i+3. & \Gamma, \varphi_{n+1}\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} \vdash \exists x_{n+1}\varphi_{n+1} \to \varphi_{n+1}\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}, \bot & (\to\text{R}) \\
i+4. & \Gamma, \varphi_{n+1}\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}, \exists x_{n+1}\varphi_{n+1} \to \varphi_{n+1}\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} \vdash \bot & (\text{Erw}) \text{ auf } i \\
i+5. & \Gamma, \varphi_{n+1}\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} \vdash \bot & (\text{S}) \text{ auf } i+3,\ i+4 \\
i+6. & \Gamma, \exists x_{n+1}\varphi_{n+1} \vdash \bot & (\exists\text{L}) \\
i+7. & \Gamma, \exists x_{n+1}\varphi_{n+1} \vdash \bot, \varphi_{n+1}\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} & (\text{Erw}) \\
i+8. & \Gamma \vdash \bot, \exists x_{n+1}\varphi_{n+1} \to \varphi_{n+1}\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} & (\to\text{R}) \\
i+9. & \Gamma \vdash \bot & (\text{S}) \text{ auf } i+8,\ i
\end{array}
$$

Weil $\Gamma \subseteq \Phi_n$ ist also $\Phi_n$ widersprüchlich. *Widerspruch* zur Induktionsannahme. $\square$

# Negationstreue Erweiterung

## Lemma 5.39

*Sei* $\Phi \subseteq \mathsf{L}(\sigma)$ *widerspruchsfrei und* $\psi \in \mathsf{L}(\sigma)$. *Dann ist mindestens eine der beiden Mengen* $\Phi \cup \{\psi\}$, $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ *widerspruchsfrei.*

## Lemma 5.40

*Sei* $\Phi \subseteq \mathsf{L}(\sigma)$ *widerspruchsfrei. Dann gibt es eine negationstreue Menge* $\Phi^N \supseteq \Phi$ *von* $\sigma$*-Formeln.*

### Beweis von Lemma 5.39.

*Angenommen*, sowohl $\Phi \cup \{\psi\}$ als auch $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ sind widersprüchlich. Dann gibt es endliche $\Gamma, \Gamma' \subseteq \Phi$, so dass $\Gamma, \psi \vdash \bot$ und $\Gamma', \neg\psi \vdash \bot$ ableitbar sind. Wegen der Erweiterungsregel können wir OBdA annehmen, dass $\Gamma = \Gamma'$.

Wir erhalten folgende Ableitung von $\Gamma \vdash \bot$:

$$
\begin{array}{rcl}
\vdots & & \\
i. & \Gamma, \psi \vdash \bot & \\
\vdots & & \\
j. & \Gamma, \neg\psi \vdash \bot & \\
j+1. & \Gamma \vdash \bot, \neg\psi & (\neg\text{R}) \text{ auf } i \\
j+2. & \Gamma \vdash \bot & (\text{S}) \text{ auf } j+1,\ j
\end{array}
$$

Also gilt $\Phi \vdash \bot$ und damit ist $\Phi$ widersprüchlich. *Widerspruch*. □

## Beweis von Lemma 5.40.

Sei

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$$

eine Aufzählung von $\mathrm{L}(\sigma)$.

Wir definieren rekursiv für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ eine Menge $\Phi_n \subseteq \mathrm{L}(\sigma)$.

$n = 0$:

$$\Phi_0 := \Phi.$$

$n \to n+1$:

$$\Phi_{n+1} := \begin{cases} \Phi_n \cup \{\varphi_n\} & \text{falls } \Phi_n \cup \{\varphi_n\} \text{ widerspruchsfrei,} \\ \Phi_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir setzen

$$\Phi^N := \bigcup_{n \geq 0} \Phi_n.$$

Es folgt sofort aus Lemma 5.39, dass für alle $n \geq 0$ die Menge $\Phi_n$ widerspruchsfrei ist. Also ist auch $\Phi$ widerspruchsfrei.

Außerdem gilt für alle $\psi \in \mathrm{L}(\sigma)$, dass entweder $\psi \in \Phi$ oder $\neg\psi \in \Phi$, weil $\psi = \varphi_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Also ist $\Phi_N$ negationstreu. $\square$

Tatsächlich erhalten wir sogar folgende stärkere Aussage, die sofort das Erfüllbarkeitslemma impliziert.

Wir nennen eine Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ abzählbar, wenn $A$ eine abzählbare Menge ist.

## Lemma 5.41

*Sei $\Phi \subseteq \mathsf{L}(\sigma)$ widerspruchsfrei. Dann gibt es eine abzählbare Interpretation $\mathfrak{I}$, die $\Phi$ erfüllt.*

**Beweis.**

Nehmen wir zunächst an, dass $\mathrm{Var} \setminus \mathrm{frei}(\Phi)$ ist unendlich. Nach Lemma 5.38 gibt es eine widerspruchsfreie Formelmenge $\Phi' \supseteq \Phi$, die Beispiele enthält. Nach Lemma 5.40 gibt es eine negationstreue Formelmenge $\Phi'' \supseteq \Phi'$. Die Menge $\Phi''$ enthält immer noch Beispiele, denn $\Phi' \vdash \psi$ impliziert $\Phi'' \vdash \psi$. Nach dem Satz von Henkin gilt

$$\widetilde{\mathfrak{I}_{\Phi''}} \models \Phi''.$$

und damit auch $\widetilde{\mathfrak{I}_{\Phi''}} \models \Phi$. Weil $\mathrm{T}(\sigma)$ abzählbar unendlich ist, ist $\widetilde{\mathfrak{I}_{\Phi''}}$ abzählbar.

Falls $\mathrm{Var} \setminus \mathrm{frei}(\Phi)$ endlich ist, gehen wir wie folgt vor. Nehmen wir an,

$$v_0, v_1, v_2, \ldots$$

ist eine Aufzählung von Var. Sei $\Psi$ die Formelmenge, die aus $\Phi$ entsteht, indem wir jedes Vorkommen jeder Variablen $v_i$ in einer Formel in $\Phi$ durch die Variable $v_{2i}$ ersetzen. Die Menge $\Psi$ ist immer noch widerspruchsfrei, denn auch in den Ableitungen können wir die Variablen entsprechend ersetzen. Außerdem ist

$$\mathrm{Var} \setminus \mathrm{frei}(\Psi) \supseteq \{v_1, v_3, v_5, \ldots\}$$

unendlich. Also gibt es eine abzählbare Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ mit $\mathfrak{I} \models \Psi$. Sei $\mathfrak{b}' : \mathrm{Var} \to A$ definiert durch $\mathfrak{b}'(v_i) := \mathfrak{b}(v_{2i})$. Dann gilt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{b}') \models \Phi$. $\square$

# Der Satz von Löwenheim und Skolem

## Satz 5.42

*Jede erfüllbare Formelmenge hat ein abzählbares Modell.*

## Beispiel 5.43

Sei $\mathfrak{R}$ der Körper der reellen Zahlen und $\Phi := \mathrm{Th}(\mathfrak{R})$ die Menge aller Sätze, die von $\mathfrak{R}$ erfüllt werden.

Dann hat $\Phi$ ein abzählbares Modell. Es gibt also eine abzählbare $\sigma_{\mathrm{Ar}}$-Struktur $\mathfrak{R}_{\mathrm{abz}}$, die genau die selben $\sigma_{\mathrm{Ar}}$-Sätze erfüllt wie $\mathfrak{R}$.

## Bemerkung 5.44

In dieser Form gilt der Satz nur für abzählbare Symbolmengen.

# Ergänzungen zu Seite 5.35

Der Satz folgt sofort aus Lemma 5.41 und dem Vollständigkeitssatz.

# Überabzählbare Symbolmengen

Auf dieser Folie erlauben wir überabzählbare Symbolmengen $\sigma$.

- Der Vollständigkeitssatz gilt auch für überabzählbare Symbolmengen.
- Der Beweis bleibt im Wesentlichen der gleiche, allerdings können Termininterpretationen und faktorisierte Termininterpretationen überabzählbar werden.
- Der (absteigende) Satz von Löwenheim und Skolem besagt dann allgemeiner, dass jede erfüllbare Formelmenge eine erfüllende Interpretation hat, die höchstens so groß ist wie die Symbolmenge (vorausgesetzt, die Symbolmenge ist unendlich).
- Es gilt auch ein aufsteigender Satz von Löwenheim und Skolem, der besagt, dass jede erfüllbare Formelmenge, die ein unendliches Modell hat, ein Modell in jeder unendlichen Mächtigkeit größer oder gleich der Mächtigkeit der Symbolmenge hat.

## Beispiel 5.45

Wir betrachten die Symbolmenge $\sigma := \sigma_{\mathrm{Ar}} \cup \{c_r \mid r \in \mathbb{R}\}$ und die $\sigma$-Struktur $\tilde{\mathfrak{R}}$ mit $\tilde{\mathfrak{R}}|_{\sigma_{\mathrm{Ar}}} = \mathfrak{R}$ und $c_r^{\tilde{\mathfrak{R}}} := r$ für alle $r \in \mathbb{R}$.

Dann enthält $\mathrm{Th}(\tilde{\mathfrak{R}})$ für alle $r, s \in \mathbb{R}, r \neq s$ den Satz $c_r \neq c_s$. Also hat $\mathrm{Th}(\tilde{\mathfrak{R}})$ kein Modell kleinerer Mächtigkeit als $\mathbb{R}$.

# 5.3 Der Endlichkeitssatz

## Satz 5.46

(1) *Für alle* $\Phi \subseteq \mathsf{L}(\sigma)$ *und* $\psi \in \mathsf{L}(\sigma)$ *gilt:*

$$\Phi \models \psi \iff \text{es gibt ein endliches } \Gamma \subseteq \Phi, \text{ so dass } \Gamma \models \psi.$$

(2) *Für alle* $\Phi \subseteq \mathsf{L}(\sigma)$ *gilt:*

$$\Phi \text{ erfüllbar} \iff \text{alle endlichen } \Gamma \subseteq \Phi \text{ sind erfüllbar}.$$

## Bemerkung 5.47

In den meisten Anwendungen des Endlichkeitssatzes ist $\Phi$ eine Menge von $\sigma$-Sätzen. Wegen des Koinzidenzlemmas ist dann die Belegung der Variablen unwichtig und als Modelle betrachten wir $\sigma$-Strukturen.

Beweis.
(1) folgt sofort aus dem Vollständigkeitssatz und der Beobachtung, dass

$$\Phi \vdash \psi \iff \text{es gibt ein endliches } \Gamma \subseteq \Phi \text{, so dass } \Gamma \vdash \psi.$$

(2) Wir beweisen die Kontraposition:

$$\begin{aligned}
\Phi \text{ unerfüllbar} &\iff \Phi \models \bot \\
&\iff \text{es gibt ein endliches } \Gamma \subseteq \Phi \text{, so dass } \Gamma \models \bot \\
&\iff \text{es gibt ein endliches } \Gamma \subseteq \Phi \text{, das unerfüllbar ist.}
\end{aligned}$$

□

# Anwendungen auf Graphen

Zur Erinnerung:
Ein Graph ist eine $\{E\}$-Struktur $\mathfrak{G}$ mit symmetrischer und irreflexiver Kantenrelation $E^{\mathfrak{G}}$.

Ein Graph ist endlich verzweigt (oder lokal endlich), wenn jeder Knoten nur endlich viele Nachbarn hat.

## Satz 5.48

*Es gibt keinen Satz $\varphi \in \mathsf{L}(\{E\})$, der besagt, dass ein Graph endlich verzweigt ist.*

## Satz 5.49

*Es gibt keinen Satz $\varphi \in \mathsf{L}(\{E\})$, der besagt, dass ein Graph zusammenhängend ist.*

Für beide Beweise sei

$$\varphi_{\mathsf{Graph}} := \forall x \neg E(x,x) \wedge \forall x \forall y \big(E(x,y) \to E(y,x)\big)$$

$\varphi_{\mathsf{Graph}}$ definiert die Klasse der Graphen, das heißt, für jede $\{E\}$-Struktur $\mathfrak{G}$ gilt

$$\mathfrak{G} \models \psi \iff \mathfrak{G} \text{ ist ein Graph.}$$

## Beweis von Satz 5.48.

*Angenommen*, $\varphi \in \mathsf{L}(\{E\})$ besagt, dass ein Graph endlich verzweigt ist, dass heißt, für alle Graphen $\mathfrak{G}$ gilt

$$\mathfrak{G} \models \varphi \iff \mathfrak{G} \text{ ist endlich verzweigt.}$$

Für alle $d \in \mathbb{N}$ sei

$$\psi_d := \forall x \exists y_1 \ldots \exists y_d \left( \bigwedge_{1 \le i < j \le d} y_i \dot{\neq} y_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{d} E(x, y_i) \right).$$

$\psi_d$ besagt, dass alle Knoten eines Graphen mindestens $d$ Nachbarn haben.

Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $\mathfrak{K}_n$ ein vollständiger Graph mit $n$-Knoten. Dann ist $\mathfrak{K}_n$ endlich verzweigt und erfüllt $\psi_d$ für alle $d < n$.

Sei nun

$$\Phi := \{\varphi_{\text{Graph}}, \varphi\} \cup \{\psi_d \mid d \in \mathbb{N}\}.$$

Dann ist jede endliche Teilmenge von $\Phi$ erfüllbar, denn für endliche $\Gamma \subseteq \Phi$ sei $d(\Gamma) := \max\big(\{0\} \cup \{d \in \mathbb{N} \mid \psi_d \in \Gamma\}\big)$. Dann gilt $\mathfrak{K}_n \models \Gamma$ für alle $n > d(\Gamma)$.

Nach dem Endlichkeitssatz ist also $\Phi$ erfüllbar. Sei $\mathfrak{G} \models \Phi$. Weil $\mathfrak{G} \models \varphi_{\text{Graph}} \wedge \varphi$ ist $\mathfrak{G}$ ein endlich verzweigter Graph. Andererseits haben für alle $d \in \mathbb{N}$ alle Knoten von $\mathfrak{G}$ mindestens $d$ Nachbarn. Also haben alle Knoten unendlich viele Nachbarn. Das ist ein *Widerspruch*. $\square$

## Beweis von Satz 5.49.

*Angenommen*, $\varphi \in \mathrm{L}(\{E\})$ besagt, dass ein Graph zusammenängend ist.

Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ sei $\chi_\ell(x, y)$ eine Formel, die besagt, dass es einen Weg der Länge höchstens $\ell$ von $x$ nach $y$ gibt (vgl. Beispiel 4.38).

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathfrak{P}_n$ folgender der Graph mit

- Knotenmenge $P_n = \{0, \ldots, n\}$,
- Kantenrelation $E^{\mathfrak{P}_n} = \big\{(i, i+1), (i+1, i) \;\big|\; 0 \le i < n\big\}$.

$\mathfrak{P}_n$ ist also ein Pfad der Länge $n$ mit Endpunkten $0, n$. Man beachte, dass

$$\mathfrak{P}_n \models \neg\chi_\ell(0, n) \qquad \text{für alle } \ell < n.$$

Sei

$$\Phi := \{\varphi_{\text{Graph}}, \varphi\} \cup \big\{\neg\chi_\ell(x, y) \bigm| \ell \in \mathbb{N}\big\}.$$

(Beachte, dass $\Phi$ eine Formelmenge mit freien Variablen $x, y$ und keine Satzmenge ist.)

Jede endliche Teilmenge von $\Phi$ ist erfüllbar. Denn sei $\Gamma \subseteq \Phi$ endlich. Sei $\ell(\Gamma) := \max\big(\{0\} \cup \{\ell \in \mathbb{N} \mid \neg\chi_\ell \in \Gamma\}\big)$. Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{P}_n, \mathfrak{b})$ eine $\{E\}$-Interpretation mit $n > \ell$ und $\mathfrak{b}(x) = 0, \mathfrak{b}(y) = n$. Dann gilt $\mathfrak{I} \models \Gamma$.

Also ist nach dem Endlichkeitssatz auch $\Phi$ erfüllbar. Sei $\mathfrak{I} = (\mathfrak{G}, \mathfrak{b}) \models \Phi$. Dann gilt $\mathfrak{G} \models \varphi_{\text{Graph}} \wedge \varphi$, also ist $\mathfrak{G}$ ein zusammenhängender Graph. Sei $a := \mathfrak{b}(x)$ und $b := \mathfrak{b}(y)$. Weil $\mathfrak{I} \models \neg\chi_\ell$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$, gibt es in $\mathfrak{G}$ keinen Weg von $a$ nach $b$, denn jeder Weg zwischen zwei Knoten hat endliche Länge. Also ist $\mathfrak{G}$ nicht zusammenhängend. *Widerspruch*. $\square$

# Theorien von Strukturklassen

Sei $\mathscr{K}$ eine Klasse von $\sigma$-Strukturen. Dann ist $\mathrm{Th}(\mathscr{K})$ die Menge aller Sätze $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ für alle $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}$.

## Satz 5.50

*Sei $\mathscr{K}$ eine Klasse von $\sigma$-Strukturen, die beliebig große endliche Strukturen enthält. Dann hat* $\mathrm{Th}(\mathscr{K})$ *ein unendliches Modell.*

## Bemerkung 5.51

Man beachte, dass die Klasse $\mathscr{K}$ nur endliche Strukturen enthalten könnte, ihre Theorie nach dem Satz aber trotzdem ein unendliches Modell hat.

## Beispiel 5.52

Es gibt eine unendliche Gruppe, die alle $\sigma_{\mathrm{Gr}}$-Sätze erfüllt, die von allen endlichen Gruppen erfüllt werden.
Insbesondere gibt es keinen $\sigma_{\mathrm{Gr}}$-Satz, der besagt, dass eine Gruppe endlich ist.

## Beweis von Satz 5.50.

Seien

$$c_1, c_2, \dots$$

Konstantensymbole, die nicht in $\sigma$-enthalten sind, und sei $\tau := \sigma \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}_{>0}\}$. Sei

$$\Phi := \mathrm{Th}(\mathscr{K}) \cup \{c_i \dot{\neq} c_j \mid i, j \in \mathbb{N}_{>0}, i \neq j\} \subseteq \mathrm{L}(\tau).$$

Dann ist jede endliche Teilmenge von $\Gamma \subseteq \Phi$ erfüllbar. Denn sei

$$n(\Gamma) := \max\big(\{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid c_n \text{ kommt in } \Gamma \text{ vor}\}\big).$$

Sei $\mathfrak{A} \in \mathscr{K}$ eine endliche $\sigma$-Struktur mit mindestens $n$ Elementen. So eine Struktur existiert, weil $\mathscr{K}$ beliebig große endliche Strukturen enthält. Sei $\mathfrak{A}'$ eine $\tau$-Expansion von $\mathfrak{A}$, in der $c_1^{\mathfrak{A}}, \dots, c_n^{\mathfrak{A}}$ paarweise verschieden sind. Dann gilt $\mathfrak{A}' \models \Gamma$.

Nach dem Endlichkeitssatz ist als $\Phi$ erfüllbar. Sei $\mathfrak{A}' \models \Phi$. Dann ist $|A'|$ eine unendliche Menge, denn die Konstanten $c_i^{\mathfrak{A}}$ für $i \in \mathbb{N}_{>0}$ sind paarweise verschieden. Außerdem gilt $\mathfrak{A}' \models \mathrm{Th}(\mathscr{K})$ und damit nach dem Koinzidenzlemma $\mathfrak{A}'\restriction_\sigma \models \mathrm{Th}(\mathscr{K})$. Also ist $\mathfrak{A}'\restriction_\sigma$ ein unendliches Modell von $\mathrm{Th}(\mathscr{K})$. □

# Nichtstandardmodelle der Arithmetik

Ein Nichtstandardmodell der Arithmetik ist eine $\sigma_{\mathsf{Ar}}$-Struktur $\mathfrak{A}$, für die gilt:

- $\mathfrak{A} \models \mathsf{Th}(\mathfrak{N})$,
- $\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{N}$ ($\mathfrak{A}$ ist nicht isomorph zu $\mathfrak{N}$).

## Satz 5.53

*Es gibt ein (abzählbares) Nichtstandardmodell der Arithmetik.*

## Beweis von Satz 5.53.

Sei $\theta_0 := \dot{0}$ und für $\theta_{n+1} := (\theta_n \dot{+} \dot{1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\psi_n(x) := x \dot{\neq} \theta_n.$$

Man beachte, dass $\mathfrak{N} \not\models \psi_n(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei

$$\Phi := \mathrm{Th}(\mathfrak{N}) \cup \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Es gibt keine Belegung $\mathfrak{b} : \mathrm{Var} \to \mathbb{N}$, so dass $(\mathfrak{N}, \mathfrak{b}) \models \Phi$, denn für $n = \mathfrak{b}(x)$ gilt $(\mathfrak{N}, \mathfrak{b}) \not\models \psi_n$.

Jede endliche endliche Teilmenge von $\Gamma \subseteq \Phi$ erfüllbar. Denn sei

$$n(\Gamma) := \max\big(\{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid \psi_n \in \Gamma\}\big).$$

Sei $\mathfrak{b} : \mathrm{Var} \to \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{b}(x) > n$. Dann gilt $(\mathfrak{N}, \mathfrak{b}) \models \Gamma$.

Nach dem Endlichkeitssatz ist also $\Phi$ erfüllbar. Sei $(\mathfrak{A}, \mathfrak{b}) \models \Phi$. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$. *Angenommen*, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{N}$. Sei $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{N}$. Weiterhin sei $a := \mathfrak{b}(x)$ und $n := \pi(a)$. Dann gilt $\mathfrak{A} \models \psi_n(a)$. Nach dem Isomorphielemma gilt dann $\mathfrak{N} \models \psi_n(n)$. Das ist ein *Widerspruch*. $\square$