Ansätze zum Widerlegen von Axiomatisierbarkeit

Die (endliche) Axiomatisierbarkeit einer Klasse $\mathcal{K}$ von τ-Strukturen kann mithilfe der Ansätze aus diesem Dokument *widerlegt* werden. Die Liste der Ansätze ist *nicht* vollständig und die Ansätze sind *nicht* in jeder Situation anwendbar. Für jeden Ansatz müssen die *Voraussetzungen* beachtet werden.

Achtung: Die vorgestellten Argumentationen sind *schematisch*, das bedeutet, sie reichen *nicht* als Beweis in den Hausaufgaben oder der Klausur aus, da die wichtigsten Teile der Argumentation jeweils fehlen und ergänzt werden müssen. Dabei hängt die Kernidee immer von der jeweiligen Klasse $\mathcal{K}$ ab.

Satz von Löwenheim-Skolem

▷ gar nicht axiomatisierbar (aufsteigend)

- **Idee**:

  Wenn $\mathcal{K}$ beliebig große, endliche Strukturen enthält, aber keine unendliche Struktur enthält, dann ist $\mathcal{K}$ nach dem aufsteigenden Satz von Löwenheim-Skolem Teil (i) nicht axiomatisierbar.

  Wenn $\mathcal{K}$ eine unendliche Struktur enthält, aber die Kardinalitäten der Strukturen in $\mathcal{K}$ nach oben beschränkt sind, dann ist $\mathcal{K}$ nach dem aufsteigenden Satz von Löwenheim-Skolem Teil (ii) nicht axiomatisierbar.

- **Argumentation**: zeige zuerst die Voraussetzungen (siehe Idee)
  - angenommen, Φ axiomatisiert $\mathcal{K}$
  - hat Φ beliebig große, endliche Modelle, folgt aus LS$\uparrow$ (i) sofort,
    dass Φ ein unendliches Modell hat
  - hat Φ ein unendliches Modell, folgt aus LS$\uparrow$ (ii) sofort,
    dass Φ Modelle beliebig großer, unendlicher Kardinalitäten hat
  - gibt es in $\mathcal{K}$ keine solchen Strukturen, erhalten wir einen Widerspruch

- **Beispiel**: Die Klasse der endlichen Strukturen.

▷ gar nicht axiomatisierbar (absteigend)

- **Idee**:

  Wenn $\mathcal{K}$ überabzählbare Strukturen enthält, aber keine abzählbaren Strukturen enthält, obwohl die Signatur abzählbar ist, dann ist $\mathcal{K}$ nach dem absteigenden Satz von Löwenheim-Skolem nicht axiomatisierbar.

- **Argumentation**: zeige zuerst die Voraussetzungen (siehe Idee)
  - angenommen, Φ axiomatisiert $\mathcal{K}$
  - da die Signatur abzählbar ist, ist Φ abzählbar
    Φ ist durch eine überabzählbare Struktur erfüllbar
  - Φ hat laut LS$\downarrow$ ein abzählbares Modell
  - gibt es in $\mathcal{K}$ keine abzählbaren Strukturen, erhalten wir einen Widerspruch

- **Beispiel**: Die Isomorphieklasse einer überabzählbaren Struktur.

Kompaktheitssatz

▷ nicht endlich axiomatisierbar

- **Idee**:

  Wenn wir ein unendliches Axiomensystem Φ für $\mathcal{K}$ kennen, davon aber keine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ ausreicht, um $\mathcal{K}$ zu axiomatisieren, dann ist $\mathcal{K}$ nicht endlich axiomatisierbar.

- **Argumentation**: stelle zuerst ein unendliches Axiomensystem Φ für $\mathcal{K}$ auf (siehe Idee)
  - angenommen, ψ axiomatisiert $\mathcal{K}$
  - dann ist $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar
  - laut KS ist bereits ein endliches $\Phi_0 \cup \{\neg\psi\}$ unerfüllbar
  - finde ein Modell $\mathfrak{A} \models \Phi_0$ mit $\mathfrak{A} \notin \mathcal{K}$, nutze dazu die Endlichkeit von Φ_0
  - dann erfüllt dieses Modell $\Phi_0 \cup \{\neg\psi\}$, Widerspruch

- **Beispiel**: Die Klasse der unendlichen Strukturen mit dem Axiomensystem Φ_∞.

▷ gar nicht axiomatisierbar

- **Idee**:

  Wir suchen ein unendliches Axiomensystem Ψ, das $\mathcal{K}$ widerspricht. Formal ausgedrückt soll also $\mathsf{Mod}(\Psi) \cap \mathcal{K} = \varnothing$, oder anders ausgedrückt, $\mathsf{Mod}(\Psi) \subseteq \overline{\mathcal{K}}$ sein. Wenn keine endliche Teilmenge von Ψ bereits ausreicht, um $\mathcal{K}$ zu widersprechen, dann ist $\mathcal{K}$ nicht axiomatisierbar.

- **Argumentation**: stelle zuerst Ψ auf (siehe Idee)
  - angenommen, Φ axiomatisiert $\mathcal{K}$
  - dann ist $\Phi \cup \Psi$ unerfüllbar
  - laut KS ist bereits ein endliches $\Theta_0 \subseteq \Phi \cup \Psi$ unerfüllbar,
    wir teilen es auf in $\Theta_0 = \Phi_0 \cup \Psi_0$ mit $\Psi_0 \subseteq \Psi$
  - finde ein Modell $\mathfrak{A} \models \Psi_0$ mit $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, nutze dazu die Endlichkeit von Ψ_0
  - dann erfüllt dieses Modell $\Phi \cup \Psi_0 \supseteq \Theta_0$, Widerspruch

- **Beispiel**: Die Klasse der endlichen Strukturen mit $\Psi := \Phi_\infty$.

Ehrenfeucht-Fraïssé-Methode

▷ nicht endlich axiomatisierbar

- **Idee**:

  Wenn die Signatur τ relational und endlich ist, finde zwei Folgen von τ-Strukturen $(\mathfrak{A}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(\mathfrak{B}_m)_{m\in\mathbb{N}}$, sodass $\mathfrak{A}_m \in \mathcal{K}$ und $\mathfrak{B}_m \notin \mathcal{K}$, aber trotzdem $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}_m$ gilt. Dann ist $\mathcal{K}$ nicht endlich axiomatisierbar.

  $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}_m$ kann durch eine Gewinnstrategie der Duplikatorin im Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel $G_m(\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B}_m)$ gezeigt werden.

- **Argumentation**: stelle zuerst $(\mathfrak{A}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(\mathfrak{B}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ auf und zeige $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}_m$ (siehe Idee)

  - angenommen, ψ axiomatisiert $\mathcal{K}$
  - wähle $m := \mathsf{qr}(\psi)$
  - wegen $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}_m$ folgt: $\mathfrak{A}_m \models \psi$ genau dann, wenn $\mathfrak{B}_m \models \psi$
  - Widerspruch zu $\mathfrak{A}_m \in \mathcal{K}$ und $\mathfrak{B}_m \notin \mathcal{K}$

- **Beispiel**: Die Klasse der unendlichen Strukturen, wähle $\mathfrak{A}_m := (\mathbb{N})$ und $\mathfrak{B}_m := (\{1, \dots, m\})$.

▷ gar nicht axiomatisierbar

- **Idee**:

  Wenn die Signatur τ relational und endlich ist, finde eine Folge von τ-Strukturen $(\mathfrak{A}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und eine τ-Struktur $\mathfrak{B}$, sodass $\mathfrak{A}_m \in \mathcal{K}$ und $\mathfrak{B} \notin \mathcal{K}$, aber trotzdem $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}$ gilt. Dann ist $\mathcal{K}$ nicht axiomatisierbar.

  $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}$ kann durch eine Gewinnstrategie der Duplikatorin im Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel $G_m(\mathfrak{A}_m, \mathfrak{B})$ gezeigt werden.

- **Argumentation**: stelle zuerst $(\mathfrak{A}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ und $\mathfrak{B}$ auf und zeige $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}$ (siehe Idee)

  - angenommen, Φ axiomatisiert $\mathcal{K}$
  - wegen $\mathfrak{B} \notin \mathcal{K}$ gilt $\mathfrak{B} \not\models \psi$ für ein $\psi \in \Phi$
  - wähle $m := \mathsf{qr}(\psi)$
  - da $\mathfrak{A}_m \in \mathcal{K}$ und $\mathfrak{A}_m \equiv_m \mathfrak{B}$, folgt aus $\mathfrak{A}_m \models \psi$ auch $\mathfrak{B} \models \psi$, ein Widerspruch

- **Beispiel**: Die Klasse der endlichen Strukturen, wähle $\mathfrak{A}_m := (\{1, \dots, m\})$ und $\mathfrak{B} := (\mathbb{N})$.

Hilfsaussagen aus Übungen

▷ nicht endlich axiomatisierbar (Teilmenge)

- **Idee**:

  Wenn wir ein unendliches Axiomensystem Φ für $\mathcal{K}$ kennen, davon aber jede endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ ein Modell $\mathfrak{A} \notin \mathcal{K}$ hat, dann ist $\mathcal{K}$ nicht endlich axiomatisierbar.

- **Argumentation**: stelle zuerst ein unendliches Axiomensystem Φ für $\mathcal{K}$ auf (siehe Idee)
  - angenommen, $\mathcal{K}$ ist endlich axiomatisierbar
  - nach Übung folgt, dass $\mathcal{K} = \mathsf{Mod}(\Phi_0)$ bereits für eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$
  - finde für jedes endliche $\Phi_0 \subseteq \Phi$ ein Modell $\mathfrak{A} \notin \mathcal{K}$
  - dann ist immer $\mathcal{K} \neq \mathsf{Mod}(\Phi_0)$, ein Widerspruch

- **Beispiel**: Die Klasse der unendlichen Strukturen mit dem Axiomensystem Φ_∞.

▷ gar nicht axiomatisierbar (Komplement)

- **Idee**:

  Wenn das Komplement $\overline{\mathcal{K}}$ der Klasse $\mathcal{K}$ axiomatisierbar ist, aber nicht endlich axiomatisierbar, dann ist $\mathcal{K}$ nicht axiomatisierbar.

- **Argumentation**: zeige zuerst, dass $\overline{\mathcal{K}}$ axiomatisierbar, aber nicht endlich axiomatisierbar ist
  - angenommen, $\mathcal{K}$ ist axiomatisierbar
  - dann sind $\mathcal{K}$ und $\overline{\mathcal{K}}$ beide axiomatisierbar
  - nach Übung sind sowohl $\mathcal{K}$ als auch $\overline{\mathcal{K}}$ bereits endlich axiomatisierbar, Widerspruch

- **Beispiel**: Die Klasse $\mathcal{K}$ der endlichen Strukturen mit der Klasse $\overline{\mathcal{K}}$ der unendlichen Strukturen.