

## Präskriptive Entscheidungstheorie – Übungsaufgaben

### Aufgabe 1

---

#### *Dominanz von Alternativen*

Die folgende Ergebnismatrix enthält die Gewinne  $c_{ij}$ , die beim Zusammentreffen der Alternativen  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  mit den Zuständen  $s_j$ ,  $j=1\dots 5$ , entstehen:

	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$
$a_1$	12	18	9	39	14
$a_2$	4	17	5	32	11
$a_3$	17	11	22	26	9

- Erläutern sie kurz, was unter echter und strikter Dominanz zu verstehen ist. Wird hier eine Alternative dominiert?
- Wie gehen Sie allgemein vor, wenn Sie von den effizienten Alternativen die optimale bestimmen möchten?

Aufgabe 2

---

*Exponentielle Nutzenfunktion*

Sie werden als erfahrener Entscheidungsanalytiker konsultiert, um eine Nutzenfunktion über den zu erwartenden Gewinn im nächsten Quartal zu ermitteln. Ihr Chef gibt an, dass er einen Quartalsgewinn jenseits von -10 Mio. € und 70 Mio. € für realitätsfern hält. Er behauptet, über ein konstantes Risikoverhalten zu verfügen.

- Um Ihnen die Bestimmung seiner Nutzenfunktion zu ermöglichen, gibt Ihr Chef an, dass er im Vergleich zwischen einem sicheren Gewinn in Höhe von 30 Mio. € und einer unsicheren Chance auf entweder 5 Mio. € Verlust oder 65 Mio. € Gewinn sich bei einer Wahrscheinlichkeit von 60% für den Gewinn nicht entscheiden kann, ob er die sichere oder unsichere Option bevorzugt. Welche Art von Nutzenfunktion empfehlen Sie? Helfen Ihnen diese Angaben bei der Erfüllung Ihres o.g. Auftrages?
- Gehen Sie nun davon aus, dass die Aussagen aus a) entsprechend korrigiert wurden und geben Sie unter ansonsten identischen Prämissen seine Nutzenfunktion für die gegebene Situation an.
- Was können Sie unternehmen, um die Anwendbarkeit der von Ihnen ermittelten Nutzenfunktion zu verifizieren?
- Wie muss das Sicherheitsäquivalent zu einer 55%igen Chance auf einen Gewinn von 30 Mio. € lauten, wenn diesem eine 45%ige Chance auf 0 € gegenübersteht und Sie von der aus b) ermittelten Nutzenfunktion ausgehen?
- Abschließend sollen Sie Ihrem Chef noch eine Entscheidungsempfehlung bezüglich folgender zweier Handlungsalternativen geben:

Alternative 1	
W-keit	Gewinn
25 %	-10 Mio. €
10 %	0 Mio. €
40 %	20 Mio. €
25 %	70 Mio. €

Alternative 2	
W-keit	Gewinn
15 %	8 Mio. €
30 %	12 Mio. €
35 %	31 Mio. €
20 %	34 Mio. €

Welche Alternative sollte er wählen?

Aufgabe 3

*Additive Nutzenfunktion*

Sie befinden sich auf Wohnungssuche. Dabei achten Sie auf drei Aspekte – Wohnungsgröße, Preis und Lage, welche zugleich Ihr Zielsystem darstellen. Die untenstehende Tabelle zeigt die bewerteten Zielausprägungen  $u_i(a_i)$  der Wohnungen in den drei Zielen, wobei eine Gleichgewichtung unterstellt wird.

	Größe	Preis	Lage
Wohnung a	0	1	0,6
Wohnung b	1	0,2	1
Wohnung c	0,8	1	0

- Welche Wohnung sollten Sie mieten?
- Ebenfalls auf Wohnungssuche ist ein Kommilitone, der sich zwischen den obigen Wohnungen mit einem anderen, schlecht formulierten Zielsystem entscheiden will. Da er stark auf Wirtschaftlichkeit bedacht ist, hat er ein Zielsystem mit nur zwei Zielgrößen aufgestellt: Preis-Größen-Verhältnis und Preis-Lagen-Verhältnis. Dieses Zielsystem hat er leider redundant formuliert, da die Zielgröße Preis in beiden Zielen enthalten ist. Er kommt somit zu folgender Definition der obigen drei Wohnungen:

	Preis/Größe	Preis/Lage
Wohnung a	0,5	0,8
Wohnung b	0,6	0,6
Wohnung c	0,9	0,5

Stellen Sie auf der Basis dieser Definition die optimale Wohnung in Abhängigkeit des Zielgewichts für das Preis-/Größenverhältnis dar.

- Ist es möglich, dass sich Ihr Kommilitone mit ein wenig Glück, d.h. bei entsprechender Vergabe der Zielgewichte, für die von Ihnen gewählte, tatsächlich optimale Wohnung auch mit seiner schlechten Formulierung des Zielsystems entscheidet?

Aufgabe 4

---

*Additive Nutzenfunktion, Zielgewichte, Wichtigkeit von Zielen*

Der Autofahrer Ulrich B. möchte sich einen neuen Pkw kaufen. Nach gründlicher Recherche im Internet kommen für ihn nur noch drei Autos (A, B und C) in Frage. Ulrich bewertet die Autos anhand der Ziele „Preis“, „PS-Zahl“ und „Aussehen“. Während Preis und PS direkt als Wert erfassbar sind, wird das Aussehen auf Basis einer subjektiven 10-Punkte-Skala angegeben, wobei 0 die schlechteste und 10 die beste Bewertung darstellt. Die folgende Tabelle fasst die Ausprägungen aller Pkw zusammen:

Pkw-Typ	Preis (in €)	PS	Aussehen (in Pkt.)
A	9000	60	4
B	17000	90	5
C	23000	125	7

Ulrich B. möchte die Pkw auf der Basis einer additiven Nutzenfunktion bewerten. Die Nutzenfunktion für das Ziel „Aussehen“ soll linear in der Bandbreite 0 und 10, die für den Preis linear in der Bandbreite 8.000 € und 28.000 € sein. Für die Nutzenfunktion der PS-Zahl wurden folgende Stützstellen ermittelt:

$$u(60 \text{ PS}) = 0,2 \mid u(90 \text{ PS}) = 0,5 \mid u(125 \text{ PS}) = 0,7$$

Weiterhin hält Ulrich B. ein Auto, das 90 PS hat, und ein anderes Auto, das 60 PS hat, für gleichwertig, wenn das schwächere dafür um 4.000 € günstiger ist.

Ebenso ist er sich sicher, dass ein um einen Punkt besseres Aussehen einen Mehrpreis von 2.000 € rechtfertigt.

- a) Bestimmen sie die Zielgewichte der additiven Nutzenfunktion!
- b) Welcher Bewertungsaspekt ist Ulrich B. am wichtigsten?
- c) Für welches Auto wird er sich entscheiden?

Aufgabe 5

---

*Bandbreiteneffekt*

Der preisbewusste und groß gewachsene Urlauber Peter K. möchte einen Flug nach Malaga buchen. Da ihm Zusatzleistungen wie Verpflegung an Bord egal sind, zählt für ihn primär der Preis, wobei er den Sitzabstand im Flugzeug aufgrund seiner langen Beine auch nicht unberücksichtigt lassen möchte.

Da er ein abgebrochenes BWL-Studium hinter sich hat, kommt er auf die Idee, sich systematisch zwischen den Angeboten der einzelnen Airlines zu entscheiden. Aufgrund ausführlicher Internetrecherchen weiß er bereits, dass der Flugpreis je nach Airline zwischen 100 € und 400 € liegen wird und der Sitzabstand bei den Gesellschaften zwischen 74 cm und 90 cm schwankt. Für ihn kommen drei Flugangebote in Frage:

Fluggesellschaft	Flugpreis (in €)	Sitzabstand (in cm)
SunAir (S)	195	78
AirSpain (A)	310	86
FlyAndalucia (F)	150	74

- Peter denkt sich, dass ihm der Preis zwei Mal wichtiger als der Sitzabstand ist. Leider fiel sein Studienabbruch in das Entscheidungslehre-Semester. Wie wird er wahrscheinlich rechnen?
- Weshalb kann aus den bisherigen Angaben keine fundierte Flugentscheidung entstehen?
- Nach Durcharbeiten der alten Studienunterlagen überlegt sich Peter, dass er für 50 € Ersparnis auf 4 cm Beinfreiheit verzichtet. Er erachtet in beiden Zielen eine lineare Nutzenfunktion für sinnvoll. Bestimmen Sie die Zielgewichte! (Es gelten o.g. Bandbreiten.) Für welche Airline wird sich Peter entscheiden?
- Aufgrund einer neuen EU-Verordnung zur Senkung des CO<sub>2</sub>-Ausstoßes wurde ein Mindestpreis für innereuropäische Flüge i.H.v. 150 € eingeführt. Welcher Flug ist für Peter nun am attraktivsten?
- Ab welcher Bandbreite des Preises würde sich seine Entscheidung ändern?

Aufgabe 6

*Unvollständige Information über Wahrscheinlichkeiten*

Ein Bauunternehmer gerät aufgrund eines sehr regnerischen Sommers mit seinem aktuellen Bauprojekt in zeitlichen Verzug. Um sich vor allzu hohen Konventionalstrafen zu schützen, denkt er über die kurzfristige Anstellung von Zeitarbeitern nach. Ob diese wirklich nötig sind, hängt dabei von der Wetterentwicklung im Herbst und Winter ab, insbesondere davon, ab wann mit Frost zu rechnen ist. Hierzu kontaktiert er den DWD, der ihm die in folgender Tabelle dargestellten Wetterszenarien mit erwarteten Wahrscheinlichkeiten in Aussicht stellt.

Wetterlage	früher Frost ( $s_1$ )	regulärer Winter ( $s_2$ )	milder Winter ( $s_3$ )
Wahrscheinlichkeit	$15\% \leq p(s_1) \leq 30\%$	$50\% \leq p(s_2) \leq 70\%$	$20\% \leq p(s_3) \leq 40\%$

Auf Basis dieser Abschätzung überlegt sich der Bauunternehmer nun, zu welchem Restgewinn (Gewinn abzgl. ggf. Zeitarbeiter, abzgl. ggf. Konventionalstrafe) welche Wetterlage mit oder ohne zusätzlichen Zeitarbeitern in etwa führen wird (in Tsd. €).

Entscheidung	$s_1$	$s_2$	$s_3$
mit Zeitarbeitern (a)	40	30	55
ohne Zeitarbeiter (b)	0	40	70

- Ist es unter der Voraussetzung, dass der Bauunternehmer risikoneutral bewertet, möglich, dass Sie bereits eine Entscheidungsempfehlung geben?
- Bei einer genaueren Analyse seines Risikoverhaltens stellt sich jedoch heraus, dass der Bauunternehmer keinesfalls risikoneutral agiert. Er gibt folgende Indifferenz an: Ein sicherer Gewinn von 35 Tsd. Euro ist gleichwertig zu einer 75%-Chance auf einen Gewinn von 70 Tsd. Euro mit einem 25%-igen Risiko ohne Gewinn dazustehen. Geben Sie die entsprechenden Parameter der exponentiellen Nutzenfunktion in der Bandbreite [0 Euro, 70 Tsd. Euro] an.
- Ist nun unter Einbeziehung der exponentiellen Nutzenfunktion eine der beiden möglichen Entscheidungen dominant gegenüber der anderen?

Aufgabe 7

---

*Unvollständige Information über Wahrscheinlichkeiten*

Ihr Entscheidungsproblem bestehe aus drei Alternativen  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  und vier möglichen Umweltzuständen  $s_1, \dots, s_4$ . Sie kennen die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Umweltzustände nicht exakt, können sie jedoch folgendermaßen ordnen:

$$p(s_4) \geq p(s_1) \geq p(s_3) \geq p(s_2)$$

Die mittels ihrer bekannten Nutzenfunktion bewerteten Ausprägungen dieser Alternativen sind durch folgende Tabelle gegeben.

Alternative	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	Durchschnitt
$a_1$	0,6	0,2	0,6	0,9	0.575
$a_2$	0,7	0,4	0,8	0,3	0,55
$a_3$	0,4	0,6	0,7	0,7	0,6

- a) Ohne Rechnung: Überlegen Sie, ob eine Alternative als eine die beiden anderen Alternativen dominierende in Frage kommt!
- b) Streichen Sie nun Alternative  $a_1$ . Liegt zwischen den verbleibenden Alternativen  $a_2$  und  $a_3$  eine Dominanzbeziehung vor?

Aufgabe 8

---

*Risikoprofile, stochastische Dominanz*

Ein Unternehmen hat zwischen zwei Investitionsmöglichkeiten zu wählen. Die dafür zuständige Fachabteilung beziffert die zu erwartenden Cashflows der Investitionsmöglichkeiten einhergehend mit deren Wahrscheinlichkeiten wie folgt:

Wahrscheinlichkeit	15%	35%	30%	20%
Investition A	-50	100	160	300

Wahrscheinlichkeit	20%	30%	40%	10%
Investition B	-50	80	160	300

- Dominiert ein Projekt das andere? Zeichnen Sie hierzu das Risikoprofil der beiden Investitionsmöglichkeiten.
- Aufgrund von Marktschwankungen ändern sich bei Investition A die Wahrscheinlichkeiten auf einen Cashflow von 160 bzw. 300 auf 45% bzw. 5%. Zeichnen Sie erneut die Risikoprofile der beiden Projekte. Welche Aussagen können Sie jetzt über die Dominanz treffen?
- Was bedeutet das Ergebnis aus b) für das Unternehmen?



---

Aufgabe 9

---

*Entscheidungsbaum, Strategie, Roll Back Verfahren*

Ein aufstrebender Sänger hat einen spontanen Gastauftritt in einer Freitagabend-Show in Köln. Leider ist es bereits Freitagnachmittag und er befindet sich noch in Osnabrück. Nun hat er die Möglichkeit, entweder mit seinem Auto oder mit der Bahn nach Köln zu fahren – Hauptsache er kommt möglichst schnell an.

Aus der Erfahrung weiß er, dass sein Auto nur in 90% der Fälle problemlos funktioniert. Ist dies nicht der Fall, so wird er bis Köln 5 Std. benötigen. Wenn es fährt, dann hat er die Wahl zwischen einer staufreien Überland-Route mit einer Fahrzeit von 2:40 Std. und der Autobahn, auf der zu dieser Zeit in 60% der Fälle Stau herrscht. Ohne Stau schafft er die Strecke in glatt 2 Std., mit Stau wird die Fahrt in etwa 3 Std. in Anspruch nehmen.

Sein alternatives Verkehrsmittel, die Bahn, wird an dem Tag teilweise bestreikt. Man weiß jedoch nicht, welche Züge dies betrifft. Die Wahrscheinlichkeit für eine Verspätung wird jedoch bei allen Zugtypen auf 30% geschätzt. Ist sein Zug pünktlich, so kann er noch vom Bahnhof abgeholt werden und ist bereits nach 2:20 Std. am Ziel. Für den Fall, dass er sich verspätet, muss er selbst für die Weiterfahrt sorgen und kann entweder das sichere Taxi oder die S-Bahn nehmen. Mit dem Taxi kommt er auf eine Fahrzeit von insgesamt 3:20 Std., während diese mit einer pünktlichen S-Bahn nur 3 Std. beträgt. Verspätet sich sogar noch die S-Bahn, so ist mit einer Gesamtfahrzeit von 4 Std. zu rechnen.

- a) Stellen Sie dieses Problem mittels eines Entscheidungsbaumes dar.
- b) Benutzen Sie das Roll-Back-Verfahren und bestimmen Sie die optimale Strategie! Dabei liegt das Ziel in der Minimierung der Fahrzeit. Rechnen Sie in Minuten.
- c) Nennen Sie alle anderen möglichen Strategien!

---

Aufgabe 10

---

*A priori – a posteriori Wahrscheinlichkeiten, Informationswert*

Sie haben im Internet ein sehr gutes Gebrauchtwagenangebot aus Ihrer Nähe gefunden. Da der vom sich offensichtlich im Gebrauchtwagenmarkt nicht auskennenden Verkäufer verlangte Preis um 1.000 Euro vom üblichen Durchschnittspreis nach unten abweicht, möchten Sie dieses Auto eigentlich auf jeden Fall kaufen.

Da es sich jedoch um ein Inserat aus dem Internet handelt und Sie kürzlich gelesen haben, dass 10 Prozent aller Gebrauchtwagen dieses Baujahrs eklatante Mängel aufweisen, deren Behebung im Schnitt 2.500 Euro kostet, überlegen Sie, das Auto vor dem Kauf einer Kfz-Prüfstelle vorzuführen.

Aufgrund eines Service-Tests in einer Autozeitschrift wissen Sie, dass diese Prüfstelle mangelbehaftete Pkw zu 95 Prozent als solche erkennt. Allerdings ist man dort so vorsichtig, dass bei eigentlich mängelfreien Pkw in 10 Prozent der Fälle Schäden vorhergesagt werden, die in absehbarer Zeit so gar nicht eintreten.

- a) Berechnen Sie die A-Posteriori-Wahrscheinlichkeiten.
- b) Machen Sie das Szenario anhand eines Entscheidungsbaums deutlich.
- c) Unterstellen Sie Risikoneutralität. Wie viel darf die Kfz-Prüfstelle für ihr Urteil maximal verlangen, damit Sie sie in Anspruch nehmen?