Kapitel 7

Elementare Äquivalenz

Kontext und Ziele

In diesem Kapitel untersuchen wir, welche Strukturen sich in der Logik der 1. Stufe unterscheiden lassen. Ununterscheidbarkeit in der Logik der 1. Stufe nennt man elementare Äquivalenz. Das zentrale Ergebnis des Kapitels ist eine Charakterisierung von elementarer Äquivalenz durch sogenannte Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele.

Wir können diese spieltheoretische Charakterisierung dann verwenden, um zu zeigen, dass sich gewisse Eigenschaften von Strukturen nicht in der Logik der ersten Stufe ausdrücken lassen.

7.1 Elementare Äquivalenz und Isomorphie

Definition 7.1

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ σ-Strukturen.

(1) $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sind elementar äquivalent (wir schreiben $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), wenn für alle Sätze $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi.$$

(2) Für k-Tupel $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_k) \in A^k$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_k) \in B^k$ sind die Paare $(\mathfrak{A}, \boldsymbol{a})$ und $(\mathfrak{B}, \boldsymbol{b})$ elementar äquivalent (wir schreiben $\mathfrak{A}, \boldsymbol{a} \equiv \mathfrak{B}, \boldsymbol{b}$), wenn für alle Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_k) \in \mathrm{L}(\sigma)$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_k) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(b_1, \dots, b_k).$$

Zur Erinnerung

- Die Notation $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ legt fest, dass $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$.
- Für eine Struktur $\mathfrak{A}$ und ein Tupel $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$ schreiben wir $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_k)$ anstatt $\mathfrak{I} \models \varphi$ für eine Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$ mit $\mathfrak{b}(x_i) = a_i$ für alle $i \in [k]$. Nach dem Koinzidenzlemma gilt dann auch $\mathfrak{I} \models \varphi$ für jede solche Interpretation.

Achtung

Man beachte die doppelte Verwendung des Symbols $\equiv$.

- Im Kontext $\varphi \equiv \psi$, wenn also auf beiden Seiten Formeln stehen, bedeutet es logische Äquivalenz: *Für alle Interpretationen $\mathfrak{I}$ gilt $\mathfrak{I} \models \varphi \iff \mathfrak{I} \models \psi$.*
- Im Kontext $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ (oder $\mathfrak{A}, \boldsymbol{a} \equiv \mathfrak{B}, \boldsymbol{b}$), wenn also auf beiden Seiten Strukturen (bzw. Paare von Strukturen und Tupeln von Elementen) stehen, bedeutet es elementare Äquivalenz: *Für alle Sätze φ (bzw. Formeln) gilt $\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \psi$.*

Zur Erinnerung: Das Isomorphielemma

Isomorphielemma (vgl. Lemma 4.31)

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen. Dann gilt

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}.$$

Bemerkung 7.2

Um das Isomorphielemma auf Formeln mit freien Variablen zu erweitern schreiben wir für σ-Struktren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und Tupel $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_k) \in A^k$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_k) \in B^k$

$$\mathfrak{A}, \boldsymbol{a} \cong \mathfrak{B}, \boldsymbol{b},$$

wenn es einen Isomorphismus $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ mit $\pi(a_i) = b_i$ für $i \in [k]$ gibt.

Dann gilt auch

$$\mathfrak{A}, \boldsymbol{a} \cong \mathfrak{B}, \boldsymbol{b} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{A}, \boldsymbol{a} \equiv \mathfrak{B}, \boldsymbol{b}.$$

Beobachtung 7.3

Für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{B}) \iff \mathfrak{B} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{A}).$$

Beobachtung 7.4

Die Umkehrung des Isomorphielemmas gilt nicht.

Beispiel 7.5

Es gibt ein abzählbares Modell $\mathfrak{A}$ der Theorie $\mathrm{Th}(\mathfrak{R})$ des Körpers der reellen Zahlen (vgl. Bsp. 5.43). Dann gilt $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{R}$, aber $\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{R}$.

Beispiel 7.6

Es gibt ein (abzählbares) Nichtstandardmodell der Arithmetik (vgl. Satz 5.53), also ein abzählbares $\mathfrak{A} \models \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$ mit $\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{N}$.

Zur Erinnerung

Für eine σ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ die Menge alle Sätze $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Lemma 7.7

Sei σ eine endliche Symbolmenge und $\mathfrak{A}$ einen endliche σ-Struktur. Dann gibt es einen Satz $\varphi_{\mathfrak{A}} \in \mathsf{L}(\sigma)$, so dass für alle σ-Strukturen $\mathfrak{B}$ gilt:

$$\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}} \quad \iff \quad \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}.$$

Satz 7.8

Für alle endlichen Symbolmengen σ und alle endlichen σ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ gilt

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \quad \iff \quad \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}.$$

Bemerkung 7.9

Lemma 7.7 gilt nur für endliche Symbolmengen σ. Satz 7.8 hingegen gilt für beliebige Symbolmengen (aber wir beweisen ihn hier nur für endliche Symbolmengen).

Zur Erinnerung

- Eine σ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist endlich, wenn ihr Universum A eine endliche Menge ist.
- Die Stelligkeit eines Relations- oder Funktionssymbols S bezeichnen wir mit $\operatorname{stell}(S)$.

Beweis von Lemma 7.7.

Gelte $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Wir setzen

$$\varphi_{\mathfrak{A}} := \exists x_1 \ldots \exists x_n \Bigg(\overbrace{\bigwedge_{\substack{i,j \in [n] \\ i \neq j}} x_i \dot{\neq} x_j \wedge \forall y \bigvee_{i=1}^{n} y = x_i}^{=:\varphi_A(x_1,\ldots,x_n)}$$

$$\wedge \bigwedge_{\substack{R \in \sigma \\ \operatorname{stell}(R) =: k}} \underbrace{\Bigg(\bigwedge_{\substack{(i_1,\ldots,i_k) \in [n]^k \\ \text{mit } (a_{i_1},\ldots,a_{i_k}) \in R^{\mathfrak{A}}}} R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \wedge \bigwedge_{\substack{(i_1,\ldots,i_k) \in [n]^k \\ \text{mit } (a_{i_1},\ldots,a_{i_k}) \in A^k \setminus R^{\mathfrak{A}}}} \neg R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \Bigg)}_{=:\varphi_R(x_1,\ldots,x_n)} \Bigg)$$

$$\wedge \bigwedge_{\substack{f\in\sigma\\ \mathrm{stell}(f)=:k}} \underbrace{\bigwedge_{\substack{(i_1,\dots,i_{k+1})\in[n]^{k+1}\\ \text{mit } f^{\mathfrak{A}}(a_{i_1},\dots,a_{i_k})=a_{i_{k+1}}}} f(x_{i_1},\dots,x_{i_k}) = x_{i_{k+1}}}_{=:\varphi_f(x_1,\dots,x_n)} \Bigg)$$

Man beachte, dass im Spezialfall $k = 0$ einige der Konjunktionen nur ein einziges Glied für das leere Tupel haben.

„$\Longleftarrow$“: Wir beachten zunächst, dass $\mathfrak{A} \models \varphi_{\mathfrak{A}}$. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A} \models \varphi_A(a_1,\dots,a_n), \\ &\mathfrak{A} \models \varphi_R(a_1,\dots,a_n) && \text{für alle } R\in\sigma, \\ &\mathfrak{A} \models \varphi_f(a_1,\dots,a_n) && \text{für alle } f\in\sigma. \end{aligned}$$

Wenn wir also x_i mit a_i belegen, erfüllt $\mathfrak{A}$ die Formel.

Nach dem Isomorphielemma impliziert $\mathfrak{A} \models \varphi_{\mathfrak{A}}$ für alle σ-Strukturen $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}}.$$

„$\Longrightarrow$“: Gelte $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}}$. Dann gibt es $b_1, \ldots, b_n \in B$, so dass

$$\begin{aligned} &\mathfrak{B} \models \varphi_A(b_1, \ldots, b_n), && \\ &\mathfrak{B} \models \varphi_R(b_1, \ldots, b_n) && \text{für alle } R \in \sigma, \\ &\mathfrak{B} \models \varphi_f(b_1, \ldots, b_n) && \text{für alle } f \in \sigma. \end{aligned}$$

Wir definieren $\pi : A \to B$ durch $\pi(a_i) := b_i$ für alle $i \in [n]$.

Behauptung

π ist ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.

Beweis.

- Weil $\mathfrak{B} \models \varphi_A(b_1, \ldots, b_n)$ sind die b_i paarweise verschieden, deswegen ist π injektiv, und es gilt $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, also ist π surjektiv.

- Sei $R \in \sigma$ k-stellig und $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \in A^k$. Weil $\mathfrak{B} \models \varphi_R(b_1, \dots, b_n)$ gilt:

$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \in R^{\mathfrak{A}} \implies \big(\pi(a_{i_1}), \dots, \pi(a_{i_k})\big) = (b_{i_1}, \dots, b_{i_k}) \in R^{\mathfrak{B}},$$
$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \notin R^{\mathfrak{A}} \implies \big(\pi(a_{i_1}), \dots, \pi(a_{i_k})\big) = (b_{i_1}, \dots, b_{i_k}) \notin R^{\mathfrak{B}}$$

  Also
$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \in R^{\mathfrak{A}} \iff \big(\pi(a_{i_1}), \dots, \pi(a_{i_k})\big) \in R^{\mathfrak{B}}.$$

- Sei $f \in \sigma$ k-stellig und $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}, a_{i_{k+1}}) \in A^{k+1}$, so dass $f^{\mathfrak{A}}(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) = a_{i_{k+1}}$. Weil $\mathfrak{B} \models \varphi_f(b_1, \dots, b_n)$ gilt

$$f^{\mathfrak{B}}\big(\pi(a_{i_1}), \dots, \pi(a_{i_k})\big) = f^{\mathfrak{B}}(b_{i_1}, \dots, b_{i_k}) = b_{i_{k+1}} = \pi(a_{i_{k+1}}) = \pi\big(f^{\mathfrak{A}}(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})\big).$$

Das beweist die Behauptung und damit das Lemma. $\square$

7.2 Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Vereinbarung

Zur Vereinfachung nehmen wir für den Rest des Kapitels an, dass σ eine *endliche relationale* Symbolmenge ist.

Definition 7.10

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen. Ein lokaler Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist eine Menge $p \subseteq A \times B$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $a \in A$ gibt es höchstens ein $b \in B$, so dass $(a, b) \in p$, und für alle $b \in B$ gibt es höchstens ein $a \in A$, so dass $(a, b) \in p$.

(ii) Für alle k-stelligen $R \in \sigma$ und alle $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k) \in p$ gilt

$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathfrak{A}} \iff (b_1, \ldots, b_k) \in R^{\mathfrak{B}}.$$

Bezeichnungen

Sei p ein lokaler Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.

- Wir bezeichnen $\mathrm{def}(p) := \{a \in A \mid \text{ex. } b \in B \text{ mit } (a, b) \in p\}$ als den Definitionsbereich von p und $\mathrm{bild}(p) := \{b \in B \mid \text{ex. } a \in A \text{ mit } (a, b) \in p\}$ als den Bildbereich.
- Bedingung (i) besagt, dass p eine bijektive Abbildung von $\mathrm{def}(p)$ nach $\mathrm{bild}(p)$ definiert. Für $a \in \mathrm{def}(p)$ sei $p(a)$ das eindeutige $b \in \mathrm{bild}(p)$, so dass $(a, b) \in p$.

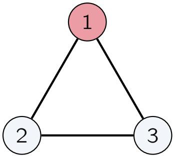
Ergänzungen zu Seite 7.10

Bedingung (ii) impliziert, dass p, aufgefasst als Abbildung von $\text{def}(p)$ auf $\text{bild}(p)$, ein Isomorphismus von der Substruktur von $\mathfrak{A}$ mit Universum $\text{def}(p)$ auf die Substruktur von $\mathfrak{B}$ mit Universum $\text{bild}(p)$ ist.

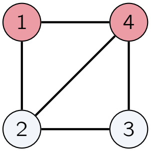
Beispiel 7.11

Sei $\sigma = \{E/2, R/1\}$, und seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ folgende σ-Strukturen:

- $A = \{1, 2, 3\}$,
- $E^{\mathfrak{A}} := \big\{(1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2)\big\}$
- $R^{\mathfrak{A}} := \{1\}$.



- $B = \{1, 2, 3, 4\}$,
- $E^{\mathfrak{B}} := \big\{(1,2), (2,1), (1,4), (4,1), (2,3) (3,2), (2,4), (4,2), (3,4), (4,3)\big\}$
- $R^{\mathfrak{B}} := \{1, 4\}$.



Dann ist

$$p_1 = \big\{(1,1), (3,2)\big\} \qquad \text{lokaler Isomorphismus von } \mathfrak{A} \text{ nach } \mathfrak{B}$$
$$p_2 = \big\{(1,1), (2,3), (3,2)\big\} \qquad \text{kein lokaler Isomorphismus von } \mathfrak{A} \text{ nach } \mathfrak{B}$$
$$p_3 = \big\{(1,4), (2,3), (3,2)\big\} \qquad \text{lokaler Isomorphismus von } \mathfrak{A} \text{ nach } \mathfrak{B}.$$

Lokale Isomorphismen und quantorenfreie Formeln

Lemma 7.12

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen und $p \subseteq A \times B$. Dann sind äquivalent:

(1) *p ist ein lokaler Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.*

(2) *Für alle quantorenfreien Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathsf{L}(\sigma)$ und alle $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in p$ gilt*

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(b_1, \dots, b_n).$$

Beweis.

„(1) $\Longrightarrow$ (2)“: Nehmen wir an, p ist ein lokaler Isomorphismus.

Wir beweisen (2) per Induktion über den Aufbau von $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Man beachte dafür, dass die einzigen Terme über einer relationale Symbolmenge die Variablen sind.

Seien $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in p$.

$\varphi = x_i \doteq x_j$:

Weil p Bedingung (i) erfüllt gilt $a_i = a_j \iff b_i = b_j$. Also

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff a_i = a_j \iff b_i = b_j \iff \mathfrak{B} \models \varphi(b_1, \dots, b_n).$$

$\varphi = R(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ für ein k-stelliges $R \in \sigma$:

Weil p Bedingung (ii) erfüllt gilt

$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \in R^{\mathfrak{A}} \iff (b_{i_1}, \dots, b_{i_k}) \in R^{\mathfrak{B}}.$$

Also

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff (a_{i_1}, \dots, a_{i_k}) \in R^{\mathfrak{A}} \iff (b_{i_1}, \dots, b_{i_k}) \in R^{\mathfrak{B}} \iff \mathfrak{B} \models \varphi(b_1, \dots, b_n).$$

$\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$:
Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) &\iff \mathfrak{A} \models \psi_1(a_1, \dots, a_n) \text{ und } \mathfrak{A} \models \psi_2(a_1, \dots, a_n) \\ &\iff \mathfrak{B} \models \psi_1(b_1, \dots, b_n) \text{ und } \mathfrak{B} \models \psi_2(b_1, \dots, b_n) \qquad \text{Induktionsannahme} \\ &\iff \mathfrak{B} \models \varphi(b_1, \dots, b_n). \end{aligned}$$

Die Fälle $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$, $\varphi = \psi_1 \to \psi_2$, $\varphi = \neg\psi$ werden analog behandelt, und die Fälle $\varphi = \bot, \top$ sind trivial.

„(2) $\Longrightarrow$ (1)“: Nehmen wir an, es gilt (2). Wir zeigen, dass p die bedingungen (i) und (ii) erfüllt.
Es erfüllt (i), weil für alle $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in p$ mit der quantorenfreien Formel $\varphi(x_1, x_2) := x_1 \doteq x_2$ gilt:

$$a_1 = a_2 \iff \mathfrak{A} \models \varphi(a_1, a_2) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(b_1, b_2) \iff b_1 = b_2.$$

Es erfüllt (ii), weil für alle k-stelligen $R \in \sigma$ und alle $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k) \in p$ mit der quantorenfreien Formel $\varphi(x_1, \dots, x_k) := R(x_1, \dots, x_k)$ gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathfrak{A}} \iff \mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_k) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(b_1, \dots, b_k) \iff (b_1, \dots, b_k) \in R^{\mathfrak{A}}.$$

$\square$

Definition 7.13

Seien $k, r \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen und $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_k) \in A^k$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_k) \in B^k$.
Das r-Runden-Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel $\mathrm{EF}_r(\mathfrak{A}, \boldsymbol{a}, \mathfrak{B}, \boldsymbol{b})$, wird von zwei Spielern, genannt Herausforderer (H) und Duplikatorin (D), in r Runden gespielt.

- In Runde $i \in [r]$ wählt (H)
  - entweder ein $a_{k+i} \in A$ aus, und (D) antwortet mit einem $b_{k+i} \in B$,
  - oder ein $b_{k+i} \in B$ aus, und (D) antwortet mit einem $a_{k+i} \in A$.
- Die Position nach Runde $i \in \{0, \dots, r\}$ ist

$$p_i := \big\{(a_1, b_1), \dots, (a_{k+i}, b_{k+i})\big\}$$

  $p_0 = \big\{(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)\big\}$ bezeichnen wir auch als die Anfangsposition.
- (D) gewinnt, wenn p_r ein lokaler Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist, sonst gewinnt (H).

Notation

Für $k = 0$ schreiben wir $\mathrm{EF}_r(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ statt $\mathrm{EF}_r\big(\mathfrak{A}, (), \mathfrak{B}, ()\big)$.

Wir betrachten das r-Runden-Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel $\mathrm{EF}_r(\mathfrak{A}, \boldsymbol{a}, \mathfrak{B}, \boldsymbol{b})$ für σ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und Tupel $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_k) \in A^k$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_k) \in B^k$.

Ein Partie des Spiels $\mathrm{EF}_r(\mathfrak{A}, \boldsymbol{a}, \mathfrak{B}, \boldsymbol{b})$ ist ein Tupel $\boldsymbol{p} \in (A \times B)^r$.

Beobachtung 7.14

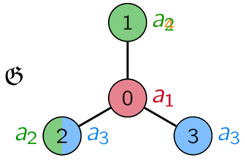
Sei $\boldsymbol{p} = \big((a_{k+1}, b_{k+1}), \dots, (a_{k+r}, b_{k+r})\big)$ *eine Partie des Spiels* $\mathrm{EF}_r(\mathfrak{A}, \boldsymbol{a}, \mathfrak{B}, \boldsymbol{b})$.
(D) gewinnt die Partie $\boldsymbol{p} = \big((a_{k+1}, b_{k+1}), \dots, (a_{k+r}, b_{k+r})\big)$ *des Spiels* $\mathrm{EF}_r(\mathfrak{A}, \boldsymbol{a}, \mathfrak{B}, \boldsymbol{b})$, *wenn*

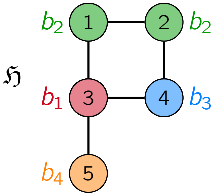
$$p_r := \big\{(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k), (a_{k+1}, b_{k+1}), \dots, (a_{k+r}, b_{k+r})\big\}$$

eine lokaler Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ *nach* $\mathfrak{B}$ *ist.*

Beispiel 7.15

Wir betrachten das Spiel $\mathrm{EF}_4(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ für die beiden folgenden Graphen $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$:





Einige Partien des Spiels:

Runde	a_i	b_i
1	0 (H)	3 (D)
2	2 (D)	1 (H)
3	3 (D)	4 (H)
4	1 (H)	5 (D)

(D) gewinnt

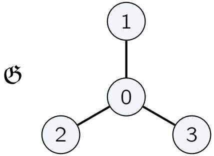
Runde	a_i	b_i
1	0 (H)	3 (D)
2	2 (D)	1 (H)
3	2 (D)	4 (H)
4	egal	

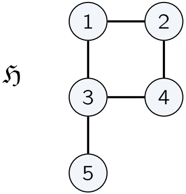
(H) gewinnt

Runde	a_i	b_i
1	0 (H)	3 (D)
2	1 (D)	2 (H)
3	egal	
4		

(H) gewinnt

Beispiel (Forts.)





Beobachtung 7.16

(H) kann einen Sieg erzwingen, sogar schon in zwei Runden, also im Spiel $\mathrm{EF}_2(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$.

Wir sagen: (H) hat eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_2(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$.

Begründung

In Runde 1 wählt (H) $a_1 = 0$ in $\mathfrak{G}$. (D) muss mit irgendeinem $b_1 \in H$ antworten. Dann gibt es auf jeden Fall ein $b \in H \setminus \{b_1\}$, das nicht benachbart zu b_1 ist.

In Runde 2 wählt (H) $b_2 = b$ in $\mathfrak{H}$. (D) muss mit irgendeinem $a_2 \in G$ antworten. Dann gilt $a_2 = a_1$, oder a_2 ist benachbart zu a_1. In beiden Fällen ist $p_2 = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$ kein partieller Isomorphismus. Also gewinnt (H).

Eine Strategie für einen der beiden Spieler im EF-Spiel ist eine Vorschrift, die ihm sagt, welchen Zug er als Nächstes machen soll.

Definition 7.17

Seien $r \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen und $\boldsymbol{a} \in A^k$, $\boldsymbol{b} \in B^k$.

(1) Eine Strategie für (H) im Spiel $\mathrm{EF}_r(\mathfrak{A}, \boldsymbol{a}, \mathbb{F}, \boldsymbol{b})$ ist eine Abbildung

$$\mathcal{S}_{(\mathrm{H})} : \bigcup_{i=0}^{r-1} (A \times B)^i \to (A \times \{\_\}) \cup (\{\_\} \times B).$$

(2) Eine Strategie für (D) im Spiel $\mathrm{EF}_r(\mathfrak{A}, \boldsymbol{a}, \mathbb{F}, \boldsymbol{b})$ ist eine Abbildung

$$\mathcal{S}_{(\mathrm{D})} : \bigcup_{i=0}^{r-1} (A \times B)^i \times \big((A \times \{\_\}) \cup (\{\_\} \times B)\big) \to A \cup B,$$

so dass $\mathcal{S}_{(\mathrm{D})}\big(\boldsymbol{p}, (a, \_)\big) \in B$ und $\mathcal{S}_{(\mathrm{D})}\big(\boldsymbol{p}, (\_, b)\big) \in A$ für alle $\boldsymbol{p} \in \bigcup_{i=0}^{r-1} (A \times B)^i$ und $a \in A$, $b \in B$

Sei $\mathcal{S}_{(\mathrm{H})}$, $\mathcal{S}_{(\mathrm{D})}$ Strategie für (H) und (D). Seien $a_{k+1}, \ldots, a_{k+i} \in A$ und $b_{k+1}, \ldots, b_{k+i} \in B$ die in den ersten i Runden gewählten Elemente und

$$\boldsymbol{p} := \big((a_{k+1}, b_{k+1}), \ldots, (a_{k+i}, b_{k+i}\big).$$

Dann bedeutet $\mathcal{S}_H(\boldsymbol{p}) = (a, \_)$, dass (H) in Runde $i+1$ das Element $a_{i+1} := a$ aus Struktur $\mathfrak{A}$ auswählt und $\mathcal{S}_H(\boldsymbol{p}) = (\_, b)$, dass (H) in Runde $i+1$ das Element $b_{i+1} := b$ aus Struktur $\mathfrak{B}$ auswählt.

Weiterhin ist $b_{i+1} = \mathcal{S}_{(\mathrm{D})}(\boldsymbol{p}, (a_{i+1},)) \in B$ das Element, das (D) in Runde (i+1) auswählt, wenn (H) $a_{i+1} \in A$ ausgewählt hat, und $a_{i+1} = \mathcal{S}_{(\mathrm{D})}(\boldsymbol{p}, (\_, b_{i+1})) \in A$ das Element, das (D) in Runde (i+1) auswählt, wenn (H) $b_{i+1} \in B$ ausgewählt hat.

Definition 7.18

Seien $r \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen und $\boldsymbol{a} \in A^k$, $\boldsymbol{b} \in B^k$.

(1) Eine Partie $\boldsymbol{p} = \big((a_1, b_1), \ldots, (a_r, b_r)\big)$ folgt einer Strategie $\mathcal{S}_{(\mathrm{H})}$ für (H), wenn für alle $i \in [r]$ gilt:

$$\mathcal{S}_{(\mathrm{H})}\big((a_1, b_1), \ldots, (a_{i-1}, b_{i-1})\big) \in \big\{(a_i, \_), (\_, b_i)\big\}.$$

(2) Eine Partie $\boldsymbol{p} = \big((a_1, b_1), \ldots, (a_r, b_r)\big)$ folgt einer Strategie $\mathcal{S}_{(\mathrm{D})}$ für (D), wenn für alle $i \in [r]$ gilt:

$$\mathcal{S}_{(\mathrm{D})}\big((a_1, b_1), \ldots, (a_{i-1}, b_{i-1}), (a_i, \_)\big) = b_i,$$
$$\text{oder } \mathcal{S}_{(\mathrm{D})}\big((a_1, b_1), \ldots, (a_{i-1}, b_{i-1}), (\_, b_i)\big) = a_i$$

(3) Ein Gewinnstrategie für (H) (bzw. für (D)) ist eine Strategie $\mathcal{S}$ für (H) (bzw. für (D)), so dass (H) (bzw. (D)) jede Partie, die $\mathcal{S}$ folgt, gewinnt.

Ergänzungen zu Seite 7.18

Man beachte, dass die Spieler Ihre Entscheidung in einer Strategie vom gesamten bisherigen Spielverlauf (=Tupel der ausgewählten Elemente) und nicht nur von der aktuellen Position (=Menge der ausgewählten Paare und de Paare in der Anfangsposition) abhängig machen dürfen. Mann kann aber beweisen, dass bereits positionale Strategien ausreichen, wo der nächste Zug nur von der aktuellen Position abhängt und nicht vom Spielverlauf, der zu dieser Position geführt hat. Insbesondere haben sowohl (H) als auch (D) genau dann eine Gewinnstrategie, wenn sie bereits eine positionale Gewinnstrategie haben.

Was wollen die Spieler erreichen?

Die Gewinnbedingung im Spiel $\mathrm{EF}_r(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ist so gewählt, dass die Ziele von Herausforderer und Duplikatorin anschaulich folgendermaßen beschrieben werden können:

- (H) versucht zu zeigen, dass die beiden Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ verschieden sind.
- (D) hingegen möchte einen etwaigen Unterschied zwischen den beiden Strukturen vertuschen.

Beobachtung 7.19

Wenn $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, dann hat für alle $r \in \mathbb{N}$ (D) eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_r(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Beweis.

(D) wählt eine Isomorphismus $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ und spielt dann so, dass $\pi(a_i) = b_i$ für alle $i \in [r|$. $\square$

Beispiel 7.20

Wir betrachten die $\{\dot{\leq}\}$-Strukturen $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, \leq)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{Q}, \leq)$. Dann hat (D) eine Gewinnstrategie für das Spiel $\mathrm{EF}_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, und (H) hat eine Gewinnstrategie für das Spiel $\mathrm{EF}_3(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

Beispiel 7.21

Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $\mathfrak{M}_n$ die $\emptyset$-Struktur mit Universum $M_n := [n]$.
Dann hat (D) eine Gewinnstrategie für das Spiel $\mathrm{EF}_n(\mathfrak{M}_n, \mathfrak{M}_{n+1})$.

Zu Beispiel 7.20

Wir zeigen zunächst, dass (D) eine Gewinnstrategie für das Spiel $\mathrm{EF}_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ hat.

Runde 1.

(H) wählt entweder ein $a_1 \in \mathbb{Z}$ und (D) antwortet mit einem beliebigen $b_1 \in \mathbb{Q}$, oder (H) wählt ein $b_1 \in \mathbb{Q}$ und (D) antwortet mit einem beliebigen $a_1 \in \mathbb{Z}$.

Runde 2.

Nehmen wir zunächst an, (H) wählt ein $a_2 \in \mathbb{Z}$. Dann antwortet (D) mit einem $b_2 \in \mathbb{Q}$, so dass $b_2 < b_1$ falls $a_2 < a_1$, $b_2 = b_1$ falls $a_2 = a_1$ und $b_2 > b_1$ falls $a_2 > a_1$.

Wenn (H) ein $b_2 \in \mathbb{Q}$ wählt, so antwortet (D) mit einem $a_2 \in \mathbb{Z}$, so dass $a_2 < a_1$ falls $b_2 < b_1$, $a_2 = a_1$ falls $b_2 = b_1$ und $a_2 > a_1$ falls $b_2 > b_1$.

In beiden Fällen ist eine solchen Antwort möglich, weil es zu jedem Element der beiden Ordnungen noch ein jeweils kleineres und ein größeres Element gibt.

Dann ist die Position $p_2 = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$ nach Runde 2 ein lokaler Isomorphismus, und (D) gewinnt.

Als nächstes beschreiben wir eine Gewinnstrategie für (H) im Spiel $\mathrm{EF}_3(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$

Runde 1.
(D) wählt $a_1 = 0 \in \mathbb{Z}$. (D) muss mit einem $b_1 \in \mathbb{Q}$ antworten.
Runde 2.
(D) wählt $a_2 = 1 \in \mathbb{Z}$. (D) muss mit einem $b_2 \in \mathbb{Q}$ antworten.
Runde 2.
Falls $b_1 \not< b_2$, so ist die Position $p_2 = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$ kein lokaler Isomorphismus, und (H) gewinnt das Spiel unabhängig vom Verlauf der Runde 3.

Nehmen wir also an, $b_1 < b_2$. Dann wählt (H) in Runde 3 eine $b_3 \in \mathbb{Q}$, so dass $b_1 < b_3 < b_2$. Weil $(\mathbb{Q}, <)$ ein dichte Ordnung ist, gibt es so ein Element. (D) muss mit einem $a_3 \in \mathbb{Z}$ antworten. Weil es kein $a_3 \in \mathbb{Z}$ gibt mit $a_1 = 0 < a_3 < 1 = a_2$, gilt entweder $a_3 \leq a_1$ oder $a_2 \leq a_3$. Also ist $p_3 = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)\}$ kein lokaler Isomorphismus, und (H) gewinnt. □

Zu Beispiel 7.21

Wir beschreiben eine Strategie für (D) im Spiel $\mathrm{EF}_n(\mathfrak{M}_n, \mathfrak{M}_{n+1})$, die sicherstellt, dass in jeder Partie für $0 \leq i \leq n$ die Position p_i nach Runde i ein lokaler Isomorphismus ist. So eine Strategie ist eine Gewinnstrategie, weil dann in jeder Partie, die dieser Strategie folgt, p_n ein lokaler isomorphismus ist und somit (D) die Partie gewinnt.

Runde 0 (Induktionsanfang). Die Position $p_0 = \emptyset$ ist ein lokaler Isomorphismus.

Runde i für $i \in [n]$ (Induktionsschritt). Wir nehmen an, dass die Position $p_{i-1} = \big\{(a_1, b_1), \ldots, (a_{i-1}, b_{i-1})\big\}$ ein lokaler Isomorphismus ist. Für Strukturen mit leerer Symbolmenge beduetet das einfach, dass für alle $j, j' \in [i-1]$gilt: $a_j = a_{j'} \iff b_j = b_{j'}$.

Nehmen wir zunächst an, in Runde i wählt (H) ein $a_i \in [n]$. Dann antwortet (D) mit einem $b_i \in [n+1]$, so dass für alle $j \in [i-1]$ gilt: $a_i = a_j \iff b_i = b_j$. Das ist möglich, weil p_{i-1} ein lokaler Isomorphismus ist und weil $[n+1] \setminus \{b_1, \ldots, b_{i-1}\} \neq \emptyset$.

Nehmen wir als nächstes an, in Runde i wählt (H) ein $b_i \in [n+1]$. Dann antwortet (D) mit einem $a_i \in [n]$, so dass für alle $j \in [i-1]$ gilt: $a_i = a_j \iff b_i = b_j$. Das ist wieder möglich, weil p_{i-1} ein lokaler Isomorphismus ist und weil $[n] \setminus \{a_1, \ldots, a_{i-1}\} \neq \emptyset$.

In beiden Fällen ist $p_i = p_{i-1} \cup \big\{(a_i, b_i)\big\}$ ein lokaler Isomorphismus. □

Der Quantorenrang (auch Quantorentiefe genannt) einer Formel φ ist die maximale Anzahl von ineinander geschachtelten Quantoren in φ. Formal:

Definition 7.22

Der Quantorenrang $\text{qr}(\varphi)$ einer Formel $\varphi \in \text{L}(\sigma)$ ist rekursiv wie folgt definiert:

(i) $\text{qr}(\varphi) := 0$ für atomare φ;

(ii) $\text{qr}(\neg\psi) := \text{qr}(\psi)$;

(iii) $\text{qr}(\psi_1 * \psi_2) := \max\big\{\text{qr}(\psi_1), \text{qr}(\psi_2)\big\}$ für $* \in \{\wedge, \vee, \to\}$;

(iv) $\text{qr}(\exists x\psi) := \text{qr}(\forall x\psi) := \text{qr}(\psi) + 1$.

Beispiel 7.23

- $\text{qr}\Big(\exists x \forall y \big(x \doteq y \vee E(x,y)\big)\Big) = 2$;
- $\text{qr}\Big(\exists x \big(E(x,x) \vee \forall y \neg E(x,y)\big)\Big) = 2$;
- $\text{qr}\Big(\exists x E(x,x) \vee \forall y \neg E(x,y)\Big) = 1$.

Der Satz von Ehrenfeucht

Satz 7.24

Für alle $k, r \in \mathbb{N}$, alls σ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, und alle $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in A^k, \boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_k) \in B^k$ sind äquivalent:

(1) *(D) hat eine Gewinnstrategie für das Spiel $\mathrm{EF}_r(\mathfrak{A}, \boldsymbol{a}, \mathfrak{B}, \boldsymbol{b})$.*

(2) *Für alle $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{L}(\sigma)$ vom Quantorenrang $\mathrm{qr}(\varphi) \leq r$ gilt*

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_k) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(b_1, \ldots, b_k).$$

Bemerkung 7.25

Wir beweisen nur die eine Implikation „(1) $\Longrightarrow$ (2)“. Das ist die deutlich einfachere Beweisrichtung, aber in unseren Anwendungen des Satzes benötigen wir auch nur diese Implikation.

Beweis der Implikation „(1) $\Longrightarrow$ (2)“.

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen. Wir beweisen die folgende Aussage:

Behauptung

Seien $k, r \in \mathbb{N}$ und $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in A^k$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_k) \in B^k$, und sei $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{L}(\sigma)$ vom Quantorenrang $\mathrm{qr}(\varphi) \leq r$, so dass

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_k) \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} \not\models \varphi(b_1, \ldots, b_k) \tag{$\star$}$$

$$\text{oder} \quad \mathfrak{A} \not\models \varphi(a_1, \ldots, a_k) \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} \models \varphi(b_1, \ldots, b_k), \tag{$\star\star$}$$

Dann hat (H) eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_r(\mathfrak{A}, \boldsymbol{a}, \mathfrak{B}, \boldsymbol{b})$.

Aus dieser Behauptung folgt die gewünschte Implikation. Denn angenommen, (D) hat eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_r(\mathfrak{A}, \boldsymbol{a}, \mathfrak{B}, \boldsymbol{b})$. Dann hat (H) keine Gewinnstrategie. Nach der Behauptung gibt es also keine Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{L}(\sigma)$ vom Quantorenrang $\mathrm{qr}(\varphi) \leq r$, so dass

$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_k)$ und $\mathfrak{B} \not\models \varphi(b_1, \ldots, b_k)$ oder $\mathfrak{A} \not\models \varphi(a_1, \ldots, a_k)$ und $\mathfrak{B} \models \varphi(b_1, \ldots, b_k)$. Also gilt für jede Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{L}(\sigma)$ vom Quantorenrang $\mathrm{qr}(\varphi) \leq r$

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_k) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(b_1, \ldots, b_k).$$

Beweis der Behauptung.

Induktion über den Aufbau von $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$.

φ atomar:

Seien $k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in A^k$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_k) \in B^k$, so dass $(\star)$ oder $(\star\star)$. Nach Lemma 7.12 ist dann $\{(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k)\}$ kein lokaler Isomorphismus. Also gewinnt (H) $\mathrm{EF}_0(\mathfrak{A}, \boldsymbol{a}, \mathfrak{B}, \boldsymbol{b})$.

$\varphi = \neg\psi$:

Seien $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in A^k$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_k) \in B^k$, so dass $(\star)$ oder $(\star\star)$. Falls $(\star)$, so gilt $(\star\star)$ für ψ, und falls $(\star\star)$, so gilt $(\star)$ für ψ. Weil $\mathrm{qr}(\psi) = \mathrm{qr}(\varphi) \leq r$ hat (H) nach Induktionsannahme eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_r(\mathfrak{A}, \boldsymbol{a}, \mathfrak{B}, \boldsymbol{b})$.

$\varphi = \psi_1 * \psi_2$ für ein $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$:

Seien $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in A^k$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_k) \in B^k$, so dass $(\star)$ oder $(\star\star)$. Dann gilt für ψ_1 oder für ψ_2 entweder $(\star)$ oder $(\star\star)$. Weil $\mathrm{qr}(\psi_i) \leq \mathrm{qr}(\varphi) = r$ hat (H) nach Induktionsannahme eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_r(\mathfrak{A}, \boldsymbol{a}, \mathfrak{B}, \boldsymbol{b})$.

$\varphi = \exists y \psi$:
Seien $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_k) \in A^k$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_k) \in B^k$, so dass $(\star)$ oder $(\star\star)$.

Fall 1: Es gilt $(\star)$.
Dann gibt es ein $a \in A$, so dass $\mathfrak{A} \models \psi(a_1, \dots, a_k, a)$. Außerdem gilt für alle $b \in B$, dass $\mathfrak{B} \not\models \psi(b_1, \dots, b_k, b)$. Weil $\mathrm{qr}(\psi) \leq r - 1$, hat (H) für alle $b \in B$ eine Gewinnstrategie $\mathcal{S}_b$ für das Spiel $\mathrm{EF}_{r-1}(\mathfrak{A}, \boldsymbol{a}a, \mathfrak{B}, \boldsymbol{b}b)$, wobei $\boldsymbol{a}a := (a_1, \dots, a_k, a)$ und $\boldsymbol{b}b := (b_1, \dots, b_k, b)$.

Daraus lässt sich folgende Gewinnstrategie $\mathcal{S}$ für das Spiel $\mathrm{EF}_r(\mathfrak{A}, \boldsymbol{a}, \mathfrak{B}, \boldsymbol{b})$ konstruieren: In Runde 1 des Spiels wählt (H) $a_{k+1} := a \in A$. Wenn (D) mit $b_{k+1} \in B$ antwortet, spielt (H) ab Runde 2 mit der Strategie $\mathcal{S}_{b_{k+1}}$ weiter.

Formal definieren wir für alle $\boldsymbol{p} = \big((a_{k+1}, b_{k+1}), \dots, (a_{k+i}, b_{k+i})\big) \in \bigcup_{i=0}^{r} (A \times B)^i$

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{p}) := \begin{cases} (a, \_) & \text{falls } i = 0, \\ \mathcal{S}_{b_{k+1}}\big((a_{k+2}, b_{k+2}), \dots, (a_{k+i}, b_{k+i})\big) & \text{falls } i \geq 1 \text{ und } a_{k+1} = a, \\ \text{beliebig} & \text{sonst} \end{cases}$$

Fall 2: Es gilt $(\star\star)$.
In diesem Fall argumentieren wir wie in Fall 1, vertauschen aber die beiden Strukturen.

$\varphi = \forall y \psi$:
Seien $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_k) \in A^k$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_k) \in B^k$, so dass $(\star)$ oder $(\star\star)$.

Fall 1: Es gilt $(\star)$.
Weil $\mathfrak{B} \not\models \varphi(b_1, \dots, b_k)$ gibt es ein $b \in B$, so dass $\mathfrak{B} \not\models \psi(b_1, \dots, b_k, b)$. Weil $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_k)$ gilt für alle $a \in A$, so dass $\mathfrak{A} \models \psi(a_1, \dots, a_k, a)$.

Nach Induktionsannahme hat (H) damit für alle $a \in A$ eine Gewinnstrategie $\mathcal{S}_a$ für das Spiel $\mathrm{EF}_r(\mathfrak{A}, \boldsymbol{a}a, \mathfrak{B}, \boldsymbol{b}b)$.

Daraus lässt sich wieder ein Gewinnstrategie für (H) im Spiel $\mathrm{EF}_r(\mathfrak{A}, \boldsymbol{a}, \mathfrak{B}, \boldsymbol{b})$ konstruieren: In Runde 1 des Spiels wählt (H) $b_{k+1} := b \in B$. Wenn (D) mit $a_{k+1} \in A$ antwortet, spielt (H) ab Runde 2 mit der Strategie $\mathcal{S}_{a_{k+1}}$ weiter.

Fall 2: Analog mit vertauschten Strukturen.

Das beweist die Behauptung und damit die Implikation (1)$\Longrightarrow$(2) des Satzes. $\square$

Definition 7.26

Sei $r \in \mathbb{N}$. Zwei σ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sind r-äquivalent (wir schreiben $\mathfrak{A} \equiv_r \mathfrak{B}$), wenn für alle Sätze $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ vom Quantorenrang höchstens r gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi.$$

Korollar 7.27

Für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und alle $r \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \equiv_r \mathfrak{B} \iff \textit{(D) hat eine Gewinnstrategie im Spiel } \mathrm{EF}_r(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}).$$

Korollar 7.28

Für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B} \iff \textit{für alle } r \in \mathbb{N} \textit{ hat (D) hat eine Gewinnstrategie im Spiel } \mathrm{EF}_r(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}).$$

7.3 Nichtdefinierbarkeitsergebnisse für die Logik der 1. Stufe

Definition 7.29

Sei $\mathscr{K}$ eine Klasse von σ-Strukturen.

(1) $\mathscr{K}$ ist erststufig definierbar, wenn es einen Satz $\varphi \in \mathsf{L}(\sigma)$ gibt, so dass für alle σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \in \mathscr{K} \iff \mathfrak{A} \models \varphi.$$

(2) $\mathscr{K}$ ist erststufig definierbar im Endlichen, wenn es einen Satz $\varphi \in \mathsf{L}(\sigma)$ gibt, so dass für alle endlichen σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ gilt:

$$\mathfrak{A} \in \mathscr{K} \iff \mathfrak{A} \models \varphi.$$

Beispiel 7.30

Mit Hilfe des Endlichkeitssatzes haben wir bewiesen, dass die Klasse aller zusammenhängenden Graphen nicht erststufig definierbar ist (Satz 5.49).

Ist die Klasse der zusammenhängenden Graphen erststufig definierbar im Endlichen?

Definierbarkeit vs. Definierbarkeit im Endlichen

Satz 7.31

Wenn eine Klasse erststufig definierbar ist, dann ist sie auch erststufig definierbar im Endlichen. Die Umkehrung gilt nicht.

Beweis.
Es folgt sofort aus den Definitionen, dass erststufige Definierbarkeit erststufige Definierbarkeit im Endlichen impliziert.

Sei $\mathscr{U}$ die Klasse aller überabzählbaren σ-Strukturen (also Strukturen $\mathfrak{A}$ deren Universum A eine überabzählbare Menge ist).

$\mathscr{U}$ ist nicht erststufig definbierbar, weil nach dem Satz von Löwenheim und Skolem jeder erfüllbare Satz $\varphi \in \mathrm{L}(\sigma)$ ein abzählbares Modell hat.

Aber $\mathscr{U}$ ist erststufig definierbar im Endlichen durch den Satz $\perp$. $\square$

Beispiel: Gerade Mengen

Sei $\mathscr{M}_2$ die Klasse aller endlichen Mengen gerader Kardinalität, also die Menge aller $\emptyset$-Strukturen $\mathfrak{A}$ mit $|A| \equiv 0 \bmod 2$.

Satz 7.32

$\mathscr{M}_2$ ist nicht erststufig definierbar im Endlichen.

Beweis.

Angenommen, $\varphi \in \mathsf{L}(\emptyset)$ ist ein Satz, der $\mathscr{M}_2$ im Endlichen definiert.

Sei $r := \mathrm{qr}(\varphi)$. Wir betracten die beiden $\emptyset$-Strukturen $\mathfrak{M}_r = ([r])$ und $\mathfrak{M}_{r+1} = ([r+1])$. Genau eine dieser beiden Strukturen gehört zur Klasse $\mathscr{M}_2$.

Nach Beipiel 7.21 hat (D) eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_r(\mathfrak{M}_r, \mathfrak{M}_{r+1})$, also gilt nach dem Satz von Ehrenfeucht $\mathfrak{M}_r \equiv_r \mathfrak{M}_{r+1}$. Weil $\mathrm{qr}(\varphi) = r$ bedeutet das

$$\mathfrak{M}_r \models \varphi \iff \mathfrak{M}_{r+1} \models \varphi.$$

Das ist ein *Widerspruch*, denn φ definiert $\mathscr{M}_2$ im Endlichen und nur eine der beiden (endlichen) Strukturen gehört zu $\mathscr{M}_2$. $\square$

Lemma 7.33

Sei $\mathscr{K}$ eine Klasse von σ-Strukturen. Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ seien $\mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}_n$ endliche σ-Strukturen, so dass

(i) $\mathfrak{A}_n \in \mathscr{K}$;

(ii) $\mathfrak{B}_n \notin \mathscr{K}$;

(iii) *(D) hat eine Gewinnstrategie im Spiel* $\mathrm{EF}_n(\mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}_n)$.

Dann ist $\mathscr{K}$ nicht erststufig definierbar im Endlichen.

Beweis.
Angenommen, $\varphi \in \mathrm{L}(\emptyset)$ ist ein Satz, der $\mathscr{M}_2$ im Endlichen definiert.

Sei $r := \max\{\mathrm{qr}(\varphi), 1\}$. Nach (iii) hat (D) eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_r(\mathfrak{A}_r, \mathfrak{B}_r)$, also gilt nach dem Satz von Ehrenfeucht $\mathfrak{A}_r \equiv_r \mathfrak{B}_r$. Weil $\mathrm{qr}(\varphi) \leq r$ bedeutet das

$$\mathfrak{A}_r \models \varphi \iff \mathfrak{B}_r \models \varphi.$$

Weil nach (i) $\mathfrak{A}_r \in \mathscr{K}$ gilt $\mathfrak{A}_r \models \varphi$. Also $\mathfrak{B}_r \models \varphi$. Das ist ein *Widerspruch* zu (ii). □

Beispiel: Ordnungen gerader Länge

Sei $\mathscr{O}_2$ die Menge aller totalen Ordnungen gerader Länge, das heißt, die Menge aller endlichen $\{\dot{\leq}\}$-Strukturen $\mathfrak{A}$, so dass $\dot{\leq}^{\mathfrak{A}}$ eine totale Ordnung auf A ist und $|A| \equiv 0 \bmod 2$.

Satz 7.34

$\mathscr{O}_2$ ist nicht erststufig definierbar im Endlichen.

Beispiel 7.35

Sei $\mathfrak{A} = ([8], \leq)$ und $\mathfrak{B} = ([9], \leq)$, wobei $\leq$ jeweils die natürliche lineare Ordnung ist.
Dann ist es nicht schwer, sich davon zu überzeugen, dass (D) eine Gewinnstrategie für das Spiel $\mathrm{EF}_3(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und (H) eine Gewinnstrategie für das Spiel $\mathrm{EF}_4(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ hat.

Ergänzungen zu Seite 7.29

Für den Beweis des Satzes definieren wir folgende “beschränkte Abstandsfunktionen” auf den natürlichen Zahlen.

Für alle $m \in \mathbb{N}$ sei $\delta_m : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$\delta_m(x, y) := \begin{cases} |x - y| & \text{falls } |x - y| \leq 2^m, \\ 2^m & \text{fall } |x - y| > 2^m. \end{cases}$$

$\delta_m(x, y)$ misst also den Abstand zwischen x und y, allerdings nur bis zum Abstand 2^m.

Lemma 7.36

Sei $m \in \mathbb{N}$.

(1) *Für alle $x, y, x', y' \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\delta_m(x, y) = \delta_m(x', y') \quad \Longrightarrow \quad \delta_{m-1}(x, y) = \delta_{m-1}(x', y').$$

(2) *Für alle $x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{N}$ mit $x \leq y \leq z$ und $x' \leq y' \leq z'$ gilt:*

$$\delta_m(x, y) = \delta_m(x', y') \text{ und } \delta_m(y, z) = \delta_m(y', z') \quad \Longrightarrow \quad \delta_m(x, z) = \delta_m(x', z').$$

(3) *Für alle $x, y, z, x', z' \in \mathbb{N}$ mit $x \leq y \leq z$ und $x' \leq z'$ gilt:*

$$\delta_m(x, z) = \delta_m(x', z') \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{es gibt ein } y' \in \mathbb{N} \text{ mit } x' \leq y' \leq z' \text{ und} \\ \delta_{m-1}(x, y) = \delta_{m-1}(x', y') \text{ und } \delta_{m-1}(y, z) = \delta_{m-1}(y', z'). \end{array}$$

Beweis des Lemmas.

(1) ist offensichtlich.

(2) Gelte $\delta_m(x,y) = \delta_m(x',y')$ und $\delta_m(y,z) = \delta_m(y',z')$.

Falls $|x-y| = y-x \geq 2^m$ oder $|y-z| = z-y \geq 2^m$, so gilt auch $|x-z| = z-x \geq 2^m$. Außerdem gilt $|x'-y'| = y'-x' \geq 2^m$ bzw. $|y'-z'| = z'-y' \geq 2^m$ und damit $|x'-z'| = z'-x' \geq 2^m$. Also $\delta_m(x,z) = \delta_m(x',z') = 2^m$.

Sonst gilt $y-x = \delta_m(x,y) = \delta_m(x',y') = y'-x'$ und $y-z = \delta_m(y,z) = \delta_m(y',z') = z'-y'$ und damit $z-x = z'-x'$, was $\delta_m(x,z) = \delta_m(x',z')$ impliziert.

(3) Gelte $\delta_m(x,z) = \delta_m(x',z')$.

Falls $z-x \leq 2^m$, so gilt $z'-x' = z-x$, und wir setzen $y' := x'+y-x$. Dann gilt $y'-x' = y-x$ und $z'-y' = z-y$, also $\delta_{m-1}(x,y) = \delta_{m-1}(x',y')$ und $\delta_{m-1}(y,z) = \delta_{m-1}(y',z')$.

Nehmen wir an, $z-x > 2^m$. Dann gilt $z'-x' \geq 2^m$. Außerdem gilt $y-x > 2^{m-1}$ oder $z-y > 2^{m-1}$.

Nehmen wir zunächst an, dass $y-x > 2^{m-1}$. Sei $d := \min\{z-y, 2^{m-1}\}$. Wir setzen $y' := z'-d$. Dann gilt $\delta_{m-1}(z',y') = d = \delta_{m-1}(z,y)$ und $y'-x' \geq 2^{m-1}$ und damit $\delta_{m-1}(x',y') = 2^{m-1} = \delta_{m-1}(x,y)$.

Im Fall $z-y > 2^m$ argumentieren wir analog mit $d := \min\{y-x, 2^{m-1}\}$ und $y' := x'+d$. $\square$

Beweis von Satz 7.34.

Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $\mathfrak{A}_n := \big([2^n], \leq\big)$ und $\mathfrak{B}_n := \big([2^n+1], \leq\big)$, wobei $\leq$ jeweils die natürliche lineare Ordnung ist.

Offensichtlich gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$, dass $\mathfrak{A}_n \in \mathscr{O}_2$ und $\mathfrak{B}_n \notin \mathscr{O}_2$. Wir zeigen:

Behauptung

Für alle $n \in \mathbb{N}$ hat (D) eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_n(\mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}_n)$.

Dann folgt der Satz sofort aus dem Nichtdefinierbarkeitslemma (Lemm 7.33).

Beweis der Behauptung.

Wir beschreiben eine Strategie für (D) im Spiel $\mathrm{EF}_n(\mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}_n)$, die sicherstellt, dass in jeder Partie für $0 \leq i \leq n$ die Position $p_i = \big\{(a_1, b_1), \dots (a_i, b_i)\big\} \subseteq A \times B$ nach Runde i folgende Bedingungen erfüllt:

(1_i) p_i ist ein lokaler Isomorphismus.

(2_i) Für alle $j, k \in [i]$ gilt

$$\delta_{n-i}(a_j, a_k) = \delta_{n-i}(b_j, b_k).$$

(3_i) Für alle $j \in [i]$ gilt

$$\delta_{n-i}(0, a_j) = \delta_{n-i}(0, b_j).$$

(4_i) Für alle $j \in [i]$ gilt

$$\delta_{n-i}(a_j, 2^n + 1) = \delta_{n-i}(b_j, 2^n + 2).$$

Insbesondere ist dann p_n ein lokaler Isomorphismus, also gewinnt (D) jede Partie, die dieser Strategie folgt.

Runde 0 (Induktionsanfang). Die Position $p_0 = \emptyset$ ist ein lokaler Isomorphismus. Also gilt (1_0). Bedingungen (2_0)–(4_0) sind für $p_0 = \emptyset$ trivialerweise erfüllt.

Runde i für $i \in [n]$ (Induktionsschritt). Wir nehmen an, dass die Position $p_{i-1} = \big\{(a_1, b_1), \dots (a_{i-1}, b_{i-1})\big\}$ die Bedingungen (1_{i-1})–(4_{i-1}) erfüllt.

Fall 1: (H) wählt in Runde i ein $a_i \in [2^n]$.

Fall 1.1: $a_i < a_k$ für alle $k \in [n-1]$.
Wähle $k \in [i-1]$, so dass $a_k = \min\{a_{k'} \mid k' \in [i-1]\}$. Bedingung (1_{i-1}) impliziert, dass $b_k = \min\{b_{k'} \mid k' \in [i-1]\}$, und Bedingung (3_{i-1}) impliziert $\delta_{n-i+1}(0, a_k) = \delta_{n-i+1}(0, b_k)$. Nach Lemma 7.36(3) existiert ein $b_i \in \mathbb{N}$ mit $0 < b_i < b_k$ und $\delta_{m-i}(0, b_i) = \delta_{m-i}(0, a_i)$ und $\delta_{m-i}(b_i, b_k) = \delta_{m-i}(a_i, a_k)$. Wegen Bedingung (2_{i-1}), (4_{i-1}) und Lemma 7.36(1-2) gilt $\delta_{m-i}(b_i, b_{k'}) = \delta_{m-i}(a_i, a_{k'})$ für alle $k' \in [i-1]$ und $\delta_{m-i}(b_i, 2^n + 2) = \delta_{m-i}(a_i, 2^n + 1)$.

Fall 1.2: Es existieren $j, k \in [i-1]$, so dass $a_j \leq a_i \leq a_k$ für alle $k \in [n-1]$

Wähle $j, k \in [i-1]$, so dass

$$a_j = \max\{a_{j'} \mid j' \in [i-1] \text{ mit } a_{j'} \leq a_i\},$$
$$a_k = \min\{a_{k'} \mid k' \in [i-1] \text{ mit } a_{k'} \geq a_i\}.$$

Bedingungen (1_{i-1}) und (2_{i-1}) implizieren $b_j \leq b_k$ und $\delta_{n-i+1}(a_j, a_k) = \delta_{n-i+1}(b_j, b_k)$. Nach Lemma 7.36(3) existiert ein $b_i \in \mathbb{N}$ mit $b_j \leq b_i \leq b_k$ und $\delta_{m-i}(b_i, b_j) = \delta_{m-i}(a_i, a_j)$ und $\delta_{m-i}(b_i, b_k) = \delta_{m-i}(a_i, a_k)$. Aus (1_{i-1})–(4_{i-1}) und Lemma 7.36(1-2) folgten dann (1_i)–(4_i).

Fall 1.3: $a_j < a_i$ für alle $j \in [n-1]$.
Analog zu Fall 1.1.

Fall 2: (H) wählt in Runde i ein $b_i \in [2^n + 1]$.
In diesem Fall argumentieren wir analog zu Fall 1 mit vertauschten Seiten. $\square$

Endliche zusammenhängende Graphen

Satz 7.37

Die Klasse $\mathscr{Z}$ aller zusammenhängenden Graphen ist nicht erststufig definierbar im Endlichen.

Beweisstrategie

Wir führen diesen Beweis mit Hilfe einer "logischen Reduktion" vom Definierbarkeitsproblem für die Klasse $\mathscr{O}_2$ auf das Definierbarkeitsproblem für die Klasse $\mathscr{Z}$.

Schritt 1: Wir ordnen jeder endlichen total geordneten Menge $\mathfrak{A} = (A, \dot{\leq}^{\mathfrak{A}})$ eine Graphen $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$ mit Knotenmenge $G_{\mathfrak{A}} = A$ zu, so dass $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}} \in \mathscr{Z}$, also $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$ zusammenhängend, genau dann, wenn $\mathfrak{A} \notin \mathscr{O}_2$, also wenn $\mathfrak{A}$ ungerade Länge hat.

Schritt 2: Wir definieren die Kantenrelation $E^{\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}}$ in der Logik der 1 Stufe über $\mathfrak{A}$, das heißt, wir geben eine Formel $\varphi_E(x, y) \in \mathrm{L}(\{\dot{\leq}\})$ and, so dass für alle $a, b \in A$:

$$(a, b) \in E^{\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}} \iff \mathfrak{A} \models \varphi_E(a, b).$$

Schritt 3: *Angenommen*, es gibt einen Satz $\psi \in \mathrm{L}(\{E\})$, der die Klasse $\mathscr{Z}$ im Endlichen definiert. Aus $\varphi_E(x, y)$ und ψ konstruieren wir einen Satz $\psi' \in \mathrm{L}(\{\dot{\leq}\})$, so dass

$$\mathfrak{A} \models \psi' \iff \mathfrak{G}_{\mathfrak{A}} \models \psi.$$

Dann gilt $\mathfrak{A} \models \psi' \iff \mathfrak{A} \notin \mathscr{O}_2$. Also definiert $\psi_{\mathrm{ord}} \wedge \neg\psi'$ die Klasse $\mathscr{O}_2$ im Endlichen, wobei der Satz ψ_{ord} besagt, dass $\mathfrak{A}$ eine total geordnete Menge ist. *Widerspruch.*

Beweis von Satz 7.37.

Der Beweis folgt der angegebenen Strategie. Wir geben Details zu den einzelnen Schritten.

Zu Schritt 1.

Nehmen wir an, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ mit $a_1 \mathrel{\dot{\le}^{\mathfrak{A}}} a_2 \mathrel{\dot{\le}^{\mathfrak{A}}} \dots \mathrel{\dot{\le}^{\mathfrak{A}}} a_n$ und $a_1 \neq a_j$ für alle $i \neq j$. Sei $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$ der Graph mit Knotenmenge $G_{\mathfrak{A}} = A$ und Kantenmenge

$$E^{\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}} := \big\{ (a_i, a_j) \;\big|\; i, j \in [n] \text{ mit } |i - j| \equiv 2 \bmod n \big\}.$$

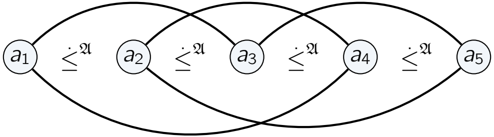
Beobachtung.

(1) Wenn n ungerade ist, ist $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$ ein Kreis, also zusammenhängend.

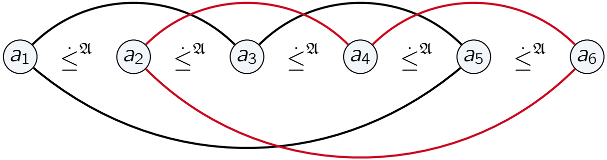
(2) Wenn n gerade ist, ist $\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}$ die Vereinigung von zwei disjunkten ein Kreisen, also nicht zusammenhängend.

Beispiele

(1)



(2)



Zu Schritt 2.

Wir schreiben $x \mathrel{\dot{<}} y$ als Abkürzung für $x \mathrel{\dot{\neq}} y \land x \mathrel{\dot{\leq}} y$. Wir setzen

$$
\begin{aligned}
\varphi_E(x,y) \coloneqq {} & \Big(x \mathrel{\dot{<}} y \land \exists z \big(x \mathrel{\dot{<}} z \land z \mathrel{\dot{<}} y \land \forall z' (x \mathrel{\dot{<}} z' \land z' \mathrel{\dot{<}} y \to z' \doteq z)\big)\Big) && \text{„}x+2=y\text{“} \\
& \lor \Big(y \mathrel{\dot{<}} x \land \exists z \big(y \mathrel{\dot{<}} z \land z \mathrel{\dot{<}} x \land \forall z' (y \mathrel{\dot{<}} z' \land z' \mathrel{\dot{<}} x \to z' \doteq z)\big)\Big) && \text{„}y+2=x\text{“} \\
& \lor \Big(\forall z\, x \mathrel{\dot{\leq}} z \land \exists z \big(y \mathrel{\dot{<}} z \land \forall z' (y \mathrel{\dot{<}} z' \to z' \doteq z)\big)\Big) && \text{„}x=1 \text{ und } y=n-1\text{“} \\
& \lor \Big(\forall z\, y \mathrel{\dot{\leq}} z \land \exists z \big(x \mathrel{\dot{<}} z \land \forall z' (x \mathrel{\dot{<}} z' \to z' \doteq z)\big)\Big) && \text{„}y=1 \text{ und } z=n-1\text{“} \\
& \lor \Big(\forall z\, z \mathrel{\dot{\leq}} y \land \exists z \big(z \mathrel{\dot{<}} x \land \forall z' (z' \mathrel{\dot{<}} x \to z' \doteq z)\big)\Big) && \text{„}x=2 \text{ und } y=n\text{“} \\
& \lor \Big(\forall z\, z \mathrel{\dot{\leq}} x \land \exists z \big(z \mathrel{\dot{<}} y \land \forall z' (z' \mathrel{\dot{<}} y \to z' \doteq z)\big)\Big) && \text{„}y=2 \text{ und } x=n\text{“.}
\end{aligned}
$$

Die grünen Kommentare erklären die intuitive Bedeutung der Zeilen. Es ist leicht zu sehen, dass für alle $a, b \in A$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi_E(a,b) \iff (a,b) \in E^{\mathfrak{G}_{\mathfrak{A}}}.$$

Zu Schritt 3.

Angenommen, der Satz $\psi \in \mathrm{L}(\{E\})$ definiert die Klasse $\mathscr{Z}$ im Endlichen.

Sei ψ' der Satz, der aus ψ entsteht, indem man jede atomare Subformel der Gestalt $E(z_1, z_2)$ durch die Formel $\varphi_E \frac{z_1 z_2}{x\ y}$ ersetzt. Dann lässt sich leicht per Induktion über den Aufbau von φ zeigen, dass

$$\mathfrak{A} \models \psi' \iff \mathfrak{G}_{\mathfrak{A}} \models \psi.$$

Dann gilt $\mathfrak{A} \models \psi' \iff \mathfrak{A} \notin \mathscr{O}_2$. Um die Klasse $\mathscr{O}_2$ im Endlichen zu definieren, brauchen wir noch einen Satz, der besagt, dass $\mathfrak{A}$ eine total geordnete Menge ist. Sei $\psi_{\mathrm{ord}} \in \mathrm{L}(\sigma)$ ein solcher Satz (vgl. Beispiel 4.46). Dann definiert $\psi_{\mathrm{ord}} \wedge \neg\psi'$ die Klasse $\mathscr{O}_2$ im Endlichen. *Widerspruch.* □