Tutoriumsaufgabe 1 (Hornformeln)

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Formel zu einer Hornformel äquivalent ist.

$$\neg(P \to (Q \to (R \to \neg(S \to T)))).$$

(b) Sei $\psi = \varphi \wedge (X \vee Y)$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass es eine Formel φ in KNF gibt, sodass ψ zu einer Hornformel äquivalent ist.

(c) Sei φ eine Hornformel. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Formel $\neg\varphi$ ist zu einer Hornformel äquivalent.

(ii) Die Formel $\neg\varphi$ ist zu keiner Hornformel äquivalent.

(a)

$\neg(P \to (Q \to (R \to \neg(S \to T)))) \equiv \ldots$ elimination impl. $\equiv \neg(\neg P \vee (\neg Q \vee (\neg R \vee \neg(\neg S \vee T))))$

De Morgan

$\equiv (P \wedge \neg(\neg Q \vee (\neg R \vee \neg(\neg S \vee T))))$

De Morgan

$\vdots$

$\equiv (P \wedge (Q \wedge (R \wedge (\neg S \vee T))))$

Ass

$\equiv (P) \wedge (Q) \wedge (R) \wedge (\neg S \vee T)$

(b) φ existiert   die Aussage gilt

"1. Trick" φ unerfüllbar $\varphi = \bot$

"2. Trick" elimination $\varphi = \neg X$

$(\neg X) \wedge (X \vee Y) \equiv (\neg X) \wedge (Y)$

$\varphi = X$

$(X) \wedge (X \vee Y) \equiv (X)$

Aussage: $\varphi \in AL$

wenn φ unerfüllbar dann ist $\varphi \equiv \bot$
und somit äquivalent zu einer Hornformel.

wenn φ erfüllbar ist dann ist φ erfüllbarkeits äquiv zu $\top$ damit einer Hornformel

äquivalenz $\varphi \equiv \psi$: f.a. Interpret $\mathfrak{A}$ gilt

$$\mathfrak{A} \models \varphi \overset{\Longleftrightarrow}{\text{gdw}} \mathfrak{A} \models \psi$$

erfüllbarkeitsäquivalenz: ψ erfüllbar $\Leftrightarrow \chi$ erfüllbar
$\psi, \chi \in AL$

---

c) (i) fa Hornformeln φ gilt $\neg\varphi$ ist äquivalent zu einer Hornformel
gilt nicht!

$\mathfrak{A}(A) = 1 \quad \mathfrak{A}(B) = 0$

$\mathfrak{B}(A) = 0 \quad \mathfrak{B}(B) = 1$

$(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})(A) = (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})(B) = 0$

$$\neg(\neg A \wedge \neg B) \equiv A \vee B$$

aus Hausaufgaben φ ist Horn und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ Interpret

so dass $\mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \models \varphi$

dann $(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) \models \varphi$

$$(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \mathfrak{A}(x) = \mathfrak{B}(x) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(ii) fa Hornformeln φ gilt $\neg\varphi$ ist nicht äquivalent zu einer Hornformel
gilt nicht!

$\varphi = \top \qquad \neg\varphi \equiv \bot$

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

Tutoriumsaufgabe 2 (Unendliche bipartite Graphen) $V = \mathbb{N}$

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Graph G ist bipartit, wenn es zwei disjunkte Mengen $A, B \subseteq V$ mit $V = A \cup B$ gibt, sodass für alle Kanten $e = \{u, v\} \in E$ gilt: entweder $u \in A$ und $v \in B$, oder $u \in B$ und $v \in A$.
Beweisen Sie mithilfe des Endlichkeitssatzes, dass für jeden Graph G gilt:

G ist bipartit genau dann wenn jeder endliche Teilgraph von G bipartit ist.

Wir construieren eine (unendliche) Formelmenge Φ_G so dass gilt

Φ_G ist erfüllbar $\iff$ G ist bipartit

f.a. $i \in V$
A_i "i ist in Menge A"
B_i "i ist in Menge B"

Jeder Knoten ist Teil genau einer Menge.

$$\Phi_V := \{ \underbrace{A_i \leftrightarrow \neg B_i}_{\varphi_i} \mid i \in V \}$$

Die Endpunkte einer Kante sind in unterschiedlich Mengen

$$\Phi_E := \{ \overbrace{(A_i \wedge B_j) \vee (B_i \wedge A_j)}^{\varphi_{ij}} \mid ij \in E \}$$

$$\Phi_G := \Phi_V \cup \Phi_E$$

wir wissen:

G ist bipartit $\Leftrightarrow$ Φ_G ist erfüllbar

Nach Endlichkeitssatz Φ_G ist erfüllbar
gdw alle endl $\Phi_0 \subseteq \Phi_G$ sind erfüllbar

offen bleibt

alle endl $\Phi_0 \subseteq \Phi_G$ sind erfüllbar $\Leftrightarrow$

alle endl Teilgraphen von G sind bipartit

um das zu zeigen brauchen wir für jedes Φ_0
einen Teilgraphen G_0 sodass

G_0 ist bipartit $\Rightarrow$ Φ_0 ist erfüllbar

und für jeden endl Teilgraphen G' von G

eine Formelmenge $\Phi_{G'} \subseteq \Phi_G$ so dass

$\Phi_{G'}$ ist erfüllbar $\Rightarrow$ G' ist bipartit was ist G_0?

sei $I_A := \{ i \in V \mid A_i$ komt in Φ_0 vor$\}$

$I_B := \{ i \in V \mid B_i$ komt in Φ_0 vor$\}$

dain: $G_0 = (I_A \cup I_B, E_0)$ mit

$E_0 := \{ ij \in E \mid \varphi_{ij} \in \Phi_0 \}$ ist bipartit

$\Rightarrow$ Φ_0 ist erfüllbar

<u>Beweis</u>

$$\Phi_{G_0} = \{ \varphi_{ij} \mid ij \in E_0 \} \cup \{ \varphi_i \mid i \in I_A \cup I_B \}$$

$$\Phi_0 \subseteq \Phi_{G_0}$$

Φ_{G_0} erfüllbar $\Leftrightarrow$ G_0 bipartit

$\Downarrow$

Φ_0 erfüllbar

wir habe:

G ist bipartit $\Leftrightarrow$ G_0 ist erfüllbar

$\Leftrightarrow$ alle endl Φ_0 sind erfüllbar

$\Leftarrow$ alle endl Teilgraphen bipartit

$\Rightarrow$ fehlt noch

alle endl Φ_0 sind erfüllbar

sei G'_{end} Teilgraph von G

$\Phi_{G'} = \{\varphi_{ij} \mid ij \in E(G')\} \cup \{\varphi_i \mid i \in V(G')\}$

$\Downarrow$

alle $\Phi_{G'}$ sind erfüllbar

$\Downarrow$

alle end G' sind bipartit

"Kochrezept" beweisen mit dem Endlichkeitssatz

Wir wollen eine Aussage der Form

"einbzählbar unendliches Objekt A hat Eigenschaft $(*)$ genau dann wenn alle endlichen Teilobjekte A' von A die Eigenschaft $(*)$ haben"

zeigen.

1. Schritt wir modellieren die Eigenschaft $(*)$ als Aussagen logische Formelmenge Φ_A so dass

$$A \text{ hat Eigenschaft } (*) \Leftrightarrow \Phi_A \text{ ist erfüllbar}$$

2. Schritt Wir finden endliche Teilmengen $\Phi_A' \subseteq \Phi_A$ die Eigenschaft $(*)$ für die endlichen Teilobjekte modelieren

konkret suchen wir:

(i) für jedes endl Teilobjekt A' eine endl Formelmenge $\Phi_{A'} \subseteq \Phi_A$ so dass

$\Phi_{A'}$ erfüllbar $\Rightarrow$ A' hat Eigenschaft $(*)$

(ii) für jede endl Formelmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi_A$ ein endl Teilobjekt A_0 und ggf eine Formelmenge Φ_{A_0} mit $\Phi_0 \subseteq \Phi_{A_0}$ so dass

A' hat Eigenschaft $(*) \Rightarrow \Phi_{A_0}$ ist erfüllbar

$\Rightarrow \Phi_0$ ist erfüllbar