Lehr- und Forschungsgebiet
Mathematische Grundlagen der Informatik
RWTH Aachen
Prof. Dr. E. Grädel

SS 2020

Klausur Mathematische Logik

Name:	
Vorname:	
Matr.-Nr.:	
Studiengang:	

1	2	3	4	5	6	7
/25	/15	/15	/14	/14	/22	/15
Summe:						/120

Hinweise

Unsere Regeln für die Klausur: Es sind *keine* Hilfsmittel (Skripte, Bücher, Mitschriften oder dergleichen) zugelassen.

Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Es darf *kein* zusätzliches Papier ausgegeben werden. Der Platz zur Bearbeitung der Aufgaben ist daher großzügig bemessen.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Hiermit bestätige ich, dass ich obige Hinweise zur Kenntnis genommen habe und prüfungsfähig bin.

Unterschrift

Aufgabe 1 25 Punkte

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Behauptungen wahr sind. Begründen Sie Ihre Antworten durch kurze Beweisskizzen unter Einbeziehung von Ergebnissen aus der Vorlesung, oder durch geeignete Beispiele bzw. Gegenbeispiele.

(a) Seien φ, ψ AL-Formeln. Wenn φ unerfüllbar ist und $\varphi \not\equiv \psi$, dann ist ψ erfüllbar.

(b) Seien $\Phi, \Psi \subseteq \mathrm{AL}$ und $\vartheta \in \mathrm{AL}$. Wenn $\Phi \models \vartheta$ und $\Psi \models \vartheta$, dann auch $\Phi \cap \Psi \models \vartheta$.

(c) Die Menge $\{\rightarrow, \vee\}$ ist funktional vollständig.

(d) Die Formel $\forall x \exists y (x < y)$ hat ein endliches Modell (hierbei ist $<$ ein zweistelliges Relationssymbol).

(e) Folgende Sequenz ist gültig (hierbei ist E ein zweistelliges Relationssymbol und c, d sind Konstantensymbole):

$$\exists x Ecx, \neg Edd \;\Rightarrow\; \forall x Edx, \exists x Ecx, Edd$$

(f) Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, +, 0)$ mit der üblichen Interpretation von $+$ und 0.
Die Relation $\sim := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$.

(g) Sei $\mathfrak{A}$ eine endliche Struktur mit Universum A und $B \subseteq A$. Wenn jedes Element aus B in $\mathfrak{A}$ elementar definierbar ist, dann ist auch B in $\mathfrak{A}$ elementar definierbar.

(h) Sei T eine Theorie und $\mathfrak{A} \models T$ ein Modell. Wenn $\varphi \notin T$, dann gilt $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$.

(i) Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei $\{E\}$-Strukturen. Wenn die Duplikatorin $G_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt und $\mathfrak{A}$ ein vollständiger ungerichteter Graph ist, dann ist auch $\mathfrak{B}$ ein vollständiger ungerichteter Graph.

(j) Es gibt mindestens zwei verschiedene Herbrandstrukturen $\mathfrak{H}$ über der Signatur $\tau = \{R, c\}$, wobei R ein einstelliges Relations- und c ein Konstantensymbol ist.

(k) Es gibt einen Algorithmus, der für zwei FO-Sätze φ und ψ entscheidet, ob die Sequenz $\varphi \Rightarrow \varphi \wedge \psi$ gültig ist.

Aufgabe 2 15 Punkte

(a) Was besagt die Korrektheit des Resolutionskalküls?

(b) Zeigen Sie mit der Resolutionsmethode, dass die folgende Folgerungsbeziehung gilt:

$$\{X,\ Z \rightarrow W,\ \neg W \vee Z,\ X \wedge Y \rightarrow Z\} \ \models\ \neg Y \vee (X \wedge W)$$

(c) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die angegebene Formel logisch äquivalent zu einer Horn-Formel ist.

$$\varphi = (Z \vee \neg Y) \wedge (\neg X \rightarrow (Y \wedge Z)) \wedge Z$$

(d) Beweisen oder widerlegen Sie *semantisch* (d.h. *nicht* mittels Ableitung im Sequenzenkalkül), dass die folgende Schlussregel korrekt ist:

$$\frac{\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \;\Rightarrow\; \Delta}{\forall x\, \varphi(x) \;\Rightarrow\; \exists x\, \neg\psi(x),\, \Delta}$$

Aufgabe 3 15 Punkte

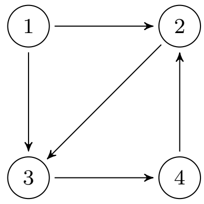
(a) Formalisieren Sie die folgenden Eigenschaften von *gerichteten* Graphen $\mathfrak{G} = (V, E)$ durch eine prädikatenlogische Formel. Die Korrektheit der Formeln muss nicht bewiesen werden.

(i) Es gibt einen Knoten, der eine Kante zu allen anderen Knoten hat.

(ii) Jeder Knoten, der keine Schlinge (Kante zu sich selbst) hat, hat genau eine ausgehende Kante.

(iii) Für je zwei verschiedene Knoten x, y gilt: Wenn ein Weg beliebiger Länge von x zu y existiert, dann gibt es auch eine direkte Kante von x zu y.

(b) Betrachten Sie den Graphen $\mathfrak{G} = (\{1,2,3,4\}, E^{\mathfrak{G}})$, dessen Kantenrelation Sie folgendem Bild entnehmen können. Gilt $\mathfrak{G} \models \psi_i$ für $i = 1, 2$? Begründen Sie Ihre Antwort.



(i) $\psi_1 = \forall x \exists y \, Eyx$

(ii) $\psi_2 = \exists y \forall x (x \neq y \rightarrow (Exy \lor \exists z (Exz \land Ezy)))$

(c) Betrachten Sie die Struktur $(A, \circ)$, wobei $A = \{a, b, c\}$ und $\circ$ eine zweistellige Funktion ist, die der beistehenden Tabelle entnommen werden kann (z.B. gilt $a \circ b = b$). Gilt $(A, \circ) \models \forall x((x \circ x) \circ x = x)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

$\circ$	a	b	c
a	a	b	c
b	c	a	b
c	c	b	a

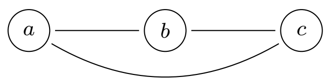
Aufgabe 4 14 Punkte

(a) Geben Sie die Aussage des Isomorphielemmas wieder.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie jeweils, ob die angegebene Relation in der gegebenen Struktur elementar definierbar ist. Wenn Sie Automorphismen benutzen, genügt es, diese anzugeben. Sie müssen nicht formal beweisen, dass eine Abbildung ein Automorphismus ist.

(i) Die einstellige Relation $R = \{a, c\}$ in folgendem ungerichteten Graphen $\mathfrak{G} = (V, E)$:

$\mathfrak{G}$:

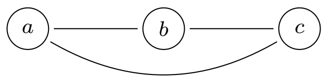


(ii) Die einstellige Relation $\mathbb{N}$, d.h. die Menge der natürlichen Zahlen, in der Struktur $(\mathbb{Q}, +)$ (wobei $+$ die übliche Addition auf $\mathbb{Q}$ sei).

(iii) Die dreistellige Relation $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid z - y = y - x\}$ in $(\mathbb{Q}, +)$.

(c) Geben Sie eine Formel an, die eine zweistellige Relation R mit $|R| = 3$ im Graphen $\mathfrak{G}$ definiert.

$\mathfrak{G}$:



Aufgabe 5 14 Punkte

(a) Definieren Sie den Begriff der m-Äquivalenz zweier τ-Strukturen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$.

(b) Sei τ endlich und relational und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei τ-Strukturen. Stellen Sie einen Bezug zu Ehrenfeucht-Fraissé-Spielen her, indem Sie folgenden Satz vervollständigen:

Es gilt $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$ genau dann, wenn ...

(c) Sei $\sim_n$ die Äquivalenz modulo n, das heißt für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt $a \sim_n b$ genau dann, wenn $n \mid a - b$. Wir betrachten die $\{\sim\}$-Strukturen $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, \sim_2)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{N}, \sim_5)$.

Geben Sie einen Satz mit minimalem Quantorenrang an, der zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unterscheidet. Es muss nicht bewiesen werden, dass der Quantorenrang minimal ist.

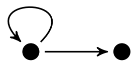
(d) Geben Sie eine Gewinnstrategie für einen der Spieler im Spiel $G_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ an. Dabei sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die unten angegebenen gerichteten Graphen. Es muss nicht bewiesen werden, dass es sich um eine Gewinnstrategie handelt.

$$\mathfrak{A}: \quad a \longrightarrow b \longrightarrow c$$

$$\mathfrak{B}: \quad 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4$$

(e) Geben Sie einen gerichteten Graphen $\mathfrak{G}'$ mit zwei Knoten an, sodass $\mathfrak{G} \equiv_1 \mathfrak{G}'$, aber $\mathfrak{G} \not\equiv_2 \mathfrak{G}'$. Dabei ist $\mathfrak{G}$ durch folgendes Diagramm vorgegeben:

$\mathfrak{G}$:



Aufgabe 6 22 Punkte

(a) Geben Sie den Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik an.

(b) Vervollständigen Sie die Definition des Ableitungsbegriffs:

Sei $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\sigma)$ eine Satzmenge und ψ ein Satz. Dann gilt $\Phi \vdash \psi$ genau dann, wenn ...

(c) Geben Sie für folgende Klassen von Strukturen jeweils ein, wenn möglich endliches, Axiomensystem an. Sollten Sie kein (endliches) Axiomensystem angeben, so beweisen Sie, dass es kein (endliches) Axiomensystem gibt.

Dabei sei f ein einstelliges Funktions- und c ein Konstantensymbol. Weiter sei $<$ ein zweistelliges und P, RWTH einstellige Relationssymbole. Sie dürfen das aus der Vorlesung bekannte Axiomensystem $\Phi_<$ für lineare Ordnungen verwenden:

$$\Phi_< = \{\forall x \neg x < x,\ \forall x \forall y \forall z (x < y \land y < z \rightarrow x < z),\ \forall x \forall y (x < y \lor x = y \lor y < x)\}.$$

(i) Die Klasse aller linearen Ordnungen $(A, <)$ mit maximalem Element und $|A| > |\mathbb{N}|$.

(ii) Die Klasse $\{(A, <, P) : (A, <)$ ist eine lineare Ordnung und für alle Elemente in P gibt es unendlich viele kleinere Elemente, die auch in P sind$\}$.

(iii) Die Klasse aller zu $(\mathbb{Q}, <)$ isomorphen Strukturen.

(iv) Die Klasse $\mathcal{K} = \{(A, f, c) : \text{Es gibt nur endlich viele } a \in A \text{ mit } f(a) = c\}$.

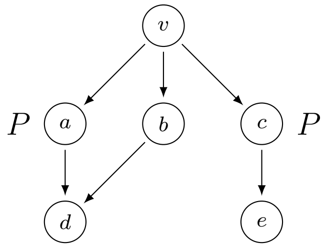
(v) Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, \mathrm{RWTH})$ mit $\mathrm{RWTH} = \{150\}$. Die Klasse aller zu $\mathfrak{A}$ elementar äquivalenten Strukturen.

Aufgabe 7 15 Punkte

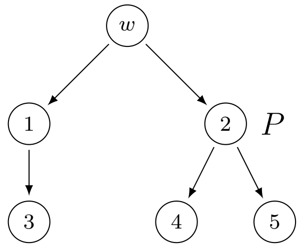
(a) Formulieren Sie den Satz über die Bisimulationsinvarianz der Modallogik.

(b) Geben Sie eine Bisimulation Z an, die zeigt, dass $\mathcal{K}_1, v \sim \mathcal{K}_2, w$ gilt.

$\mathcal{K}_1$:



$\mathcal{K}_2$:



(c) Formulieren Sie folgende Aussagen als modallogische Formeln, oder zeigen Sie, dass dies nicht möglich ist.

(i) Wenn jeder Nachfolger des aktuellen Knotens einen mit P beschrifteten Nachfolger hat, dann ist auch der aktuelle Knoten mit P beschriftet.

(ii) Der aktuelle Knoten hat einen mit P beschrifteten Nachfolger, der genau zwei Nachfolger hat.

(d) Geben Sie ein Modell $\mathcal{K}, v$ der CTL-Formel $\mathsf{AGEX}P$ an.