

# El enigma de Osborne Reynolds

*Aunque se sigue desconociendo por qué un fluido conducido por una tubería se vuelve turbulento, se ha dado un paso importante hacia la resolución del problema, formulado hace ya más de 125 años*

**Alvaro Meseguer y Fernando Mellibovsky**

## CONCEPTOS BASICOS

- Cuando se va aumentando el caudal que corre por una tubería, llega un momento en que el fluido se vuelve turbulento.
- Las ecuaciones de Navier-Stokes rigen el movimiento de los fluidos. Sin embargo, no se ha podido aún explicar con ellas el tránsito a la turbulencia en una cañería ni la condición numérica para su surgimiento, descubierta por Osborne Reynolds en 1883.
- En los últimos años, nuevos procedimientos de cálculo se están acercando a la resolución del problema.

**E**n 1883, Osborne Reynolds, matemático y profesor de ingeniería de la Universidad de Manchester, dio a conocer su estudio experimental y teórico de la transición a la turbulencia en fluidos conducidos por el interior de tuberías. Aunque su artículo supuso un inmenso salto cualitativo, más de siglo y cuarto después todavía se desconocen los mecanismos físicos del fenómeno. Algunas de las cuestiones fundamentales sobre la transición han empezado a dilucidarse hace apenas 4 o 5 años, gracias a la colaboración de diferentes grupos de investigación alemanes, británicos y españoles. De ello vamos a hablar en este artículo.

La turbulencia es uno de los problemas más complejos de la física clásica. Determinar las causas por las cuales el movimiento de un fluido (agua o aire, por ejemplo) se torna turbulento e impredecible es de vital importancia en ingeniería aeronáutica o en meteorología. Un ejemplo familiar de las consecuencias de la turbulencia lo encontramos en los aviones. Dependiendo de las condiciones climatológicas, el fuerte viento que rodea el fuselaje del avión se vuelve errático y violento.

Otro ejemplo cotidiano de transición a la turbulencia nos lo dan los grifos domésticos. Si los abrimos con cuidado, para que el caudal de salida sea pequeño, el chorro de agua tendrá un perfil suave y estacionario. Es decir, si filmáramos el chorro y después reprodujé-

ramos la película, no podríamos distinguir si el video está parado o en marcha. Es lo que caracteriza a un flujo *estacionario laminar*: el agua fluye por la tubería hasta el grifo, pero siempre de la misma forma. Sin embargo, si vamos abriendo poco a poco el grifo para que aumente el caudal podremos observar que el chorro de salida empieza a experimentar oscilaciones erráticas e impredecibles. En algunos casos saldrá a borbotones, sin orden alguno, y la tubería vibrará o hará ruido. Ese flujo del chorro es claramente *no estacionario y turbulento*: el agua fluye por la tubería de formas diferentes, impredecibles, en el transcurso del tiempo.

¿Cuál es el caudal máximo del grifo en condiciones de laminaridad? Es decir, ¿hasta dónde podemos abrir el grifo sin que el chorro se vuelva turbulento? Este es el que hoy llamamos *problema de Reynolds*. A principios de los años ochenta del siglo XIX, Reynolds realizó varios experimentos con tuberías de sección circular de diferentes diámetros. Las sometió a la misma presión e hizo pasar agua corriente por ellas. Ya sabía que, bajo condiciones de laminaridad, la velocidad del agua era máxima en el centro de la tubería y nula en las paredes, debido a la viscosidad del fluido. En concreto, la velocidad del agua a una distancia  $r$  del centro de la tubería de radio  $a$  tiene un perfil parabólico (es proporcional al binomio  $a^2 - r^2$ ). A este régimen se le llama flujo de *Hagen-Poiseuille*,

en honor de Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen, físico e ingeniero alemán, y a Jean Louis Marie Poiseuille, fisiólogo francés que estudió el flujo de la sangre en las arterias humanas.

Reynolds medía la velocidad máxima ( $U$ ) del agua en el centro de una tubería de vidrio transparente y aumentaba paulatinamente el caudal (y con ello la velocidad máxima) hasta que el fluido se volvía turbulento. Para detectar la transición a la turbulencia, añadía un colorante o *trazador* en la entrada de la tubería que permitía visualizar la trayectoria de las partículas fluidas. Obtuvo que, para tuberías de diferentes radios, la velocidad de transición en el centro era también diferente. Su genialidad consistió en observar que el producto de la velocidad de transición por el radio de la tubería era aproximadamente el mismo en todos los casos. Por decirlo de otro modo: si una tubería de radio  $a$  presentaba transición a una cierta velocidad máxima  $U$  en el centro, una segunda tubería de radio  $a/2$  presentaría la transición al doble de velocidad,  $2U$ .

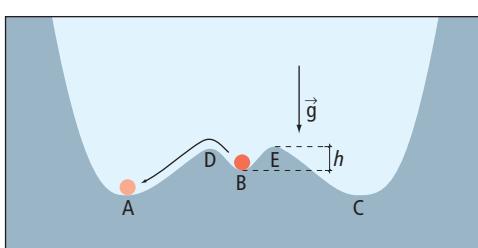
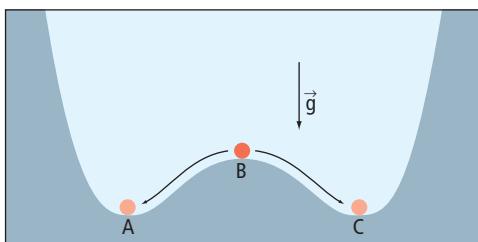
Los experimentos posteriores realizados con diferentes fluidos demostraron que la *viscosidad cinemática*  $v$  del fluido utilizado desempeñaba, por su parte, una importante función en la transición. La viscosidad de un fluido constituye una propiedad microscópica que mide la

resistencia a fluir que el fluido presenta cuando se le aplica una fuerza de cizalla, una fuerza tangencial que desplaza unas superficies o capas con respecto a otras y hace que el fluido fluya a una velocidad tanto mayor —con respecto a la orientación de la fuerza— cuanto más cerca se encuentre de la superficie en que se aplique la fuerza. (La viscosidad dinámica mide la proporcionalidad entre el valor de esa fuerza por unidad de superficie, por una parte, y el cambio de la velocidad del fluido con la distancia a la superficie de aplicación, por la otra; la viscosidad dinámica dividida por la densidad del fluido define la viscosidad cinemática.) Así, un lubricante industrial es más viscoso que el agua, y esta, a su vez, más que el aire.

Finalmente, Reynolds concluyó que la transición a la turbulencia sucedía cuando el resultado de multiplicar la velocidad máxima en el centro,  $U$ , por el radio de la tubería,  $a$ , y dividir por la viscosidad cinemática del fluido,  $v$ , adoptaba aproximadamente cierto

**1. ESTAS IMAGENES DE SATELITE**, tomadas el 15 de septiembre de 1999 (*la del recuadro*) y el 11 de junio de 2000, muestran la estructura vortical turbulenta que unos flujos atmosféricos en zonas nubosas adoptan tras rodear, respectivamente, la isla de Guadalupe y la de Juan Fernández (*recuadro*), ambas del océano Pacífico. Las nubes siguen el *flujo de von Kármán*, una de las soluciones de la ecuación de Navier-Stokes para una corriente fluida que sorteja un obstáculo que está sumergido en ella. Para hacerse una idea de la magnitud, téngase en cuenta que la isla de Guadalupe tiene unos 35 kilómetros de largo.

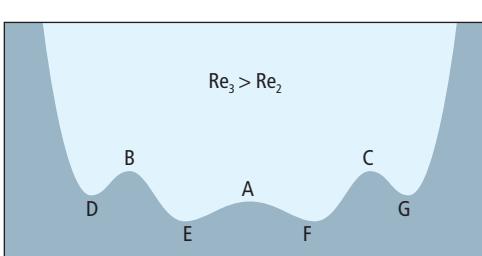
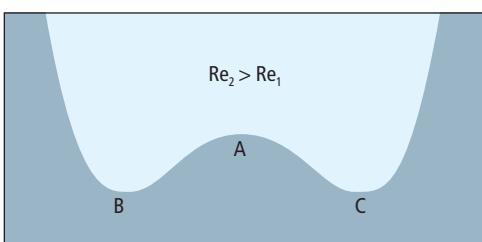
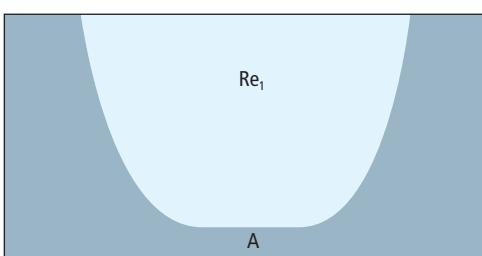
**2. LA BOLITA SE ENCUENTRA EN UN PUNTO LINEALMENTE INESTABLE (arriba):** cualquier perturbación desestabilizará su posición haciéndola caer hacia A o C. **Abajo,** la bolita se encuentra ahora en el punto linealmente estable B, pero una pequeña perturbación con suficiente amplitud puede desestabilizarla y hacer que abandone su posición.



valor numérico, el número de Reynolds  $Re$ , un número adimensional, es decir, un puro número, sin dimensiones físicas ( $Re = aU/v$ ). Lo que controla la transición, pues, no es el valor absoluto de los parámetros del problema ( $a$ ,  $U$  o  $v$ ), sino una relación entre ellos. A ello se le denomina ley de la *similaridad dinámica*, que permite a los ingenieros estudiar en túneles de viento la aerodinámica de prototipos de fuselaje de aviones a escala reducida.

Volvamos a nuestra pregunta sobre el caudal máximo que puede tener el grifo antes de que aparezca la turbulencia. Dado que acabamos de ver que ni la velocidad o la viscosidad del agua, ni el diámetro de la tubería son

**3. EN UNA TRANSICIÓN CLÁSICA,** a medida que se aumenta el número de Reynolds las soluciones que eran linealmente estables se inestabilizan, lo que conduce a nuevas soluciones estables. Estas últimas, a su vez, sufren inestabilidades cuando seguimos aumentando el número de Reynolds, con lo que se crean flujos más complejos y, finalmente, turbulentos. El problema de Reynolds no sigue esta pauta.



relevantes por sí solos a la hora de predecir la transición, sino en combinación adimensional, nuestra pregunta quedaría formulada de la siguiente manera: ¿para qué valor del número de Reynolds de una tubería cilíndrica se presenta la turbulencia? Ese valor umbral suele recibir el nombre de *número de Reynolds crítico*, o  $Re_c$ .

### Estabilidad lineal

El movimiento de un fluido viscoso incompresible viene descrito por leyes físicas que ya fueron formuladas en el siglo XIX por Claude Louis Navier y George Gabriel Stokes. Las ecuaciones de Navier-Stokes son ecuaciones matemáticamente complejas que relacionan variaciones espaciotemporales de la velocidad y presión del fluido con las fuerzas externas que actúan sobre éste y con las propiedades cinemáticas de las paredes que lo contienen. Por lo tanto, conocidas las fuerzas externas y condiciones de contorno, la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes nos proporciona la velocidad y la presión exactas del fluido en cualquier punto y para cualquier instante de tiempo. Se trata de ecuaciones no lineales, que admiten múltiples soluciones: un fluido sometido a condiciones y fuerzas externas específicas puede exhibir muchos flujos distintos.

Los flujos que observamos en la naturaleza —el de una tubería o el remolino que se forma en el desagüe de una bañera— son soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes. Más aún, son *soluciones estables*, robustas frente a perturbaciones externas. Eso no quiere decir que las ecuaciones de Navier-Stokes no admitan otras soluciones, por ejemplo en la tubería. Con una gran probabilidad existirán otras muchas, pero no se manifestarán porque son inestables.

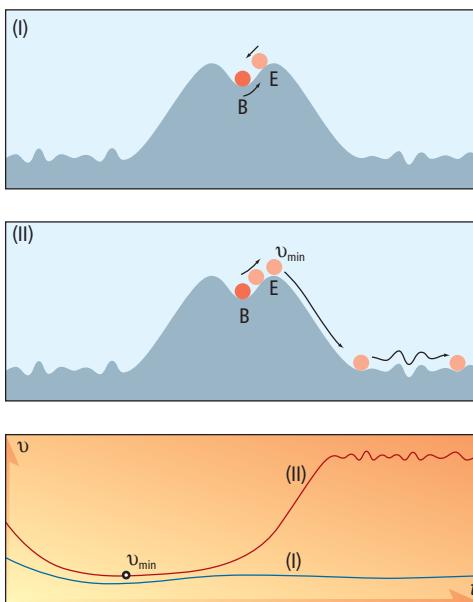
Un ejemplo de lo que acabamos de describir es la figura 1, en la que se ve el flujo resultante de una zona nubosa arrastrada por corrientes atmosféricas que rodean una isla. La velocidad y la presión del viento siguen una pauta ordenada, gobernada por una de las posibles soluciones estables de las ecuaciones de Navier-Stokes para esas condiciones climáticas. La figura 1 ilustra uno de los flujos clásicos de la dinámica de fluidos, denominado coloquialmente *la calle de los vórtices de Von Kármán*, en honor del físico de origen húngaro Theodore von Kármán. Cuando sumergimos un obstáculo en un fluido en movimiento, el fluido lo sortea y, al dejarlo atrás, forma, por encima de cierto umbral de velocidad, vórtices o remolinos.

Hagamos una comparación. Imaginemos una bolita, de masa cualquiera, que se encuentra sometida a la acción de la gravedad  $g$  y descansa sobre el perfil de una montaña,

tal y como se ilustra en la figura 2 (*arriba*). Salvando las diferencias, determinar la posición de la bolita en cualquier instante de tiempo sería el equivalente a encontrar una solución de las ecuaciones de Navier-Stokes, en este caso de las ecuaciones de la mecánica de Newton. Asimismo, una posición de equilibrio o estacionaria (equivalente al chorro laminar del grifo descrito en la introducción) de la bolita es una posible solución al problema. Claramente, hay tres soluciones estacionarias: si dejamos la bolita justo en A, B o en C, permanecerá indefinidamente en cualquiera de esos tres puntos. Sin embargo, cualquier perturbación, por pequeñísima que sea, hará que abandone B, dado que es un punto *linealmente inestable*. El calificativo *lineal* debe aquí entenderse de forma rigurosa, con el sentido de que no importa el tamaño de la perturbación: sea cual sea, desestabilizará la posición de la bolita. También suele declararse que B es un punto inestable ante perturbaciones *infinitesimales*. Por lo general, nunca observaremos a la bolita en B, sino en A o en C.

Consideremos un segundo caso, ilustrado en la figura 2 (*abajo*). El perfil de la montaña presenta cinco puntos estacionarios. El punto B es ahora linealmente estable, debido a la concavidad de la montaña en esa zona. Los puntos A y C siguen siendo linealmente estables. La diferencia estriba en que, en la nueva situación, han aparecido dos pequeñas protuberancias próximas al punto B que acotan débilmente la posición de equilibrio de la bolita. Esas dos protuberancias corresponden a los puntos de equilibrio linealmente inestable D y E; y, en cierto modo, a ellos se debe que B sea linealmente estable. En este caso, una perturbación infinitesimal *no* apartará la bolita de su posición B. Para desestabilizar la bolita habrá que introducir una perturbación *finita* que le permita subir esa pequeña diferencia de altura  $h$  que le separa de D o E. Se suele decir entonces que B es una solución de equilibrio inestable frente a perturbaciones de *amplitud finita*.

En este último caso descrito, los puntos de equilibrio A, B, C, D y E constituyen soluciones del problema de Newton. Con ellos hemos querido representar tres tipos de flujos o soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes para un mismo perfil o condiciones externas de fuerza: (i) soluciones linealmente estables (A-C), (ii) soluciones linealmente inestables (D-E) y (iii) soluciones linealmente estables, pero inestables frente a pequeñas perturbaciones de amplitud finita (B). Más adelante veremos la relevancia que tienen las soluciones del tipo D y E en la estabilidad del flujo de Hagen-Poiseuille.

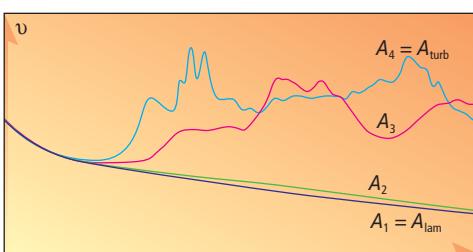


**4. LA BOLITA NO TIENE EN EL CASO I suficiente inercia para sobrepasar E. En el caso II, la amplitud de la perturbación basta para que la bolita pueda saltar la barrera y se desacelere transitoriamente antes de empezar el escape. La gráfica inferior representa la velocidad de la bolita en los casos arriba ilustrados.**

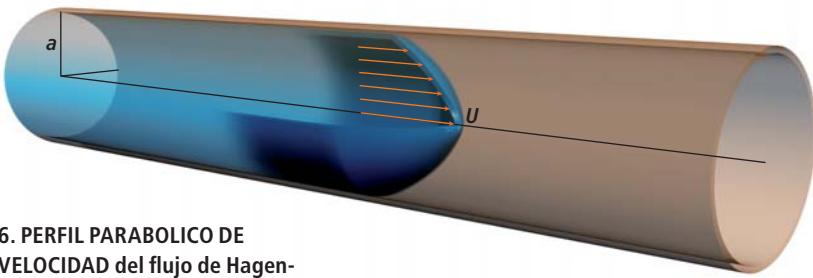
## Estabilidad del flujo de Hagen-Poiseuille

Los experimentos iniciales realizados por Reynolds proporcionaron una primera estimación del valor crítico de  $Re \sim 13.000$ . Desde finales del siglo XIX se han realizado multitud de experimentos sobre la misma cuestión, con resultados desalentadores. Los experimentos realizados en tuberías suficientemente largas, en condiciones de extrema precisión (evitando el ruido externo y controlando la temperatura del fluido), han podido mantener la laminaridad hasta números de Reynolds cercanos a  $Re \sim 20.000$ . Otros trabajos experimentales han estudiado los efectos de perturbaciones de gran amplitud (con la introducción de ruido externo) y han podido así reducir el número de Reynolds hasta el orden de  $Re \sim 2000$ . En resumen, la transición en el Problema de Reynolds es muy sensible a la magnitud de las perturbaciones externas, susceptibilidad que aumenta con el número de Reynolds.

Analizar la estabilidad lineal de una solución de la ecuación de Navier-Stokes no es tan fácil como en el ejemplo de la bolita. En algunos casos particulares, existen métodos matemáticos que nos permiten determinar el número de Reynolds crítico para el cual determinado flujo se vuelve inestable. Sin embargo,



**5. VELOCIDAD DE LA PERTURBACIÓN añadida al fluido,  $v$ , en función del tiempo, para diferentes amplitudes iniciales de dicha perturbación. Los datos proceden de una simulación directa de las ecuaciones de Navier-Stokes para una tubería.**



**6. PERFIL PARABOLICO DE VELOCIDAD del flujo de Hagen-Poiseuille en una tubería de radio  $a$ . Las flechas indican la dirección, sentido y magnitud de la velocidad del fluido.**

las ecuaciones que gobiernan la estabilidad de un flujo de Navier-Stokes, sumamente complejas, deben resolverse con métodos numéricos de alta precisión.

La teoría de la estabilidad hidrodinámica estudia las causas que provocan la desestabilización de ciertos flujos de la naturaleza. El aumento de la capacidad computacional de las últimas décadas le ha sido de mucha ayuda. Hoy en día, puede estudiarse en muchos casos la estabilidad de un flujo con un ordenador doméstico y adecuados métodos numéricos. Así, la teoría de la estabilidad hidrodinámica se ha aplicado con éxito en diferentes áreas de la dinámica de fluidos; por ejemplo, en el estudio de fluidos en rotación o sometidos a flujo de calor. Sin embargo, en el problema de Reynolds, todas las teorías hasta ahora propuestas han fracasado a la hora de dar una explicación convincente sobre las causas de la transición a la turbulencia del flujo de Hagen-Poiseuille.

La primera fase del estudio de estabilidad de una solución de la ecuación de Navier-Stokes consiste en determinar si el flujo es linealmente estable. Todos los cálculos realizados hasta la fecha indican que, con gran probabilidad, el flujo de Hagen-Poiseuille es *linealmente estable*, sea cual sea el número de Reynolds. La paradoja es que, pese a su estabilidad lineal, el flujo en la tubería se inestabiliza de forma violenta y transita rápidamente al régimen turbulentó. Diferentes estudios se aprestaron

a defender que la inestabilidad está causada por las imperfecciones de la tubería, por la rugosidad de las paredes o incluso por fenómenos de reajuste del flujo en la entrada o en la salida del tubo.

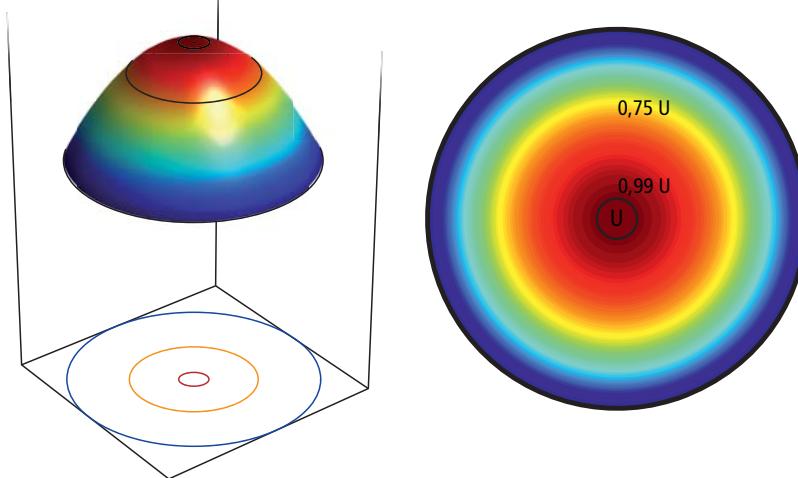
Pero todos esos argumentos se desmoronan cuando entra en acción la simulación numérica. La potencia de cálculo computacional actual permite aproximarse a las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes con mucha precisión. En estas simulaciones, la geometría de la tubería no tiene imperfecciones, ni hay que reajustar el flujo ni en la entrada ni en la salida, dado que se le impone un valor numérico en la una y en la otra. Aun así, el flujo de Hagen-Poiseuille simulado computacionalmente se vuelve turbulento y, cuando se introducen en la simulación perturbaciones lo bastante grandes, la cota inferior del valor crítico del número de Reynolds se acerca en un grado asombroso a un valor de alrededor de 2000, que concuerda con las cotas experimentales.

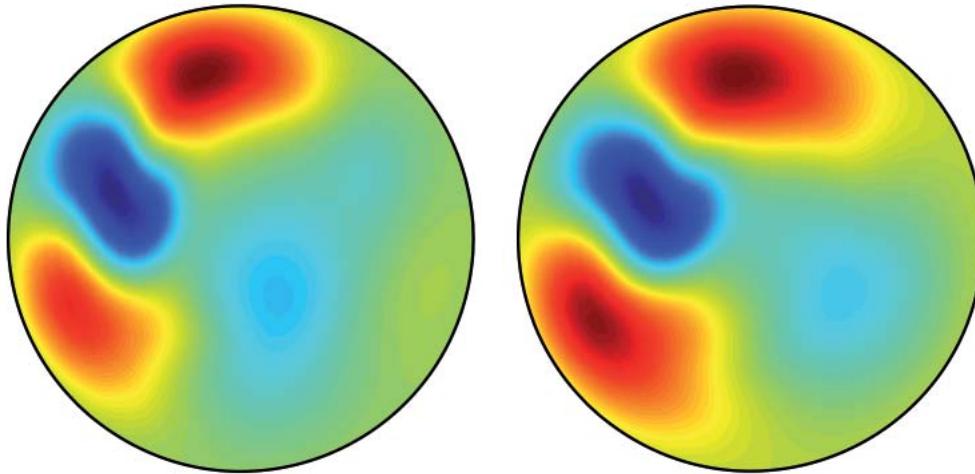
El problema de Reynolds contrasta con otros problemas clásicos de la estabilidad hidrodinámica, donde la transición a la turbulencia se realiza mediante una sucesión de inestabilidades lineales. Por ejemplo, el aumento del número de Reynolds en flujos que rotan o en los que hay convección térmica causa inestabilidad lineal en esos flujos para cierto valor crítico  $Re_c$ . Por lo general, esa inestabilidad no genera turbulencia, sino otro flujo secundario (o flujos) linealmente estable. Si seguimos aumentando el número de Reynolds, ese flujo secundario sufrirá, a su vez, una inestabilidad lineal y se crearán flujos terciarios cada vez más complejos, aunque laminares. El aumento paulatino del número de Reynolds acabará llevando, pues, a soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes de complejidad creciente y, en última instancia, turbulentas.

Un ejemplo ilustrativo de ese tipo de transición lo tenemos en la figura 3. Para determinado número de Reynolds  $Re_1$ , la única solución estable es el punto A (*arriba*). Al aumentar el número de Reynolds hasta un valor  $Re_2$ , la montaña cambia su perfil de forma que A pasa a ser linealmente inestable y aparecen dos nuevos puntos estables, B y C, hacia los cuales tenderá la dinámica del sistema (*centro*). B y C representan los nuevos flujos laminares secundarios estables. El proceso se repite al seguir aumentando  $Re$  hasta un valor  $Re_3$ ; se inestabilizan entonces las soluciones secundarias B y C y se crean nuevas soluciones laminares linealmente estables más complejas: D, E, F y G.

El flujo de Hagen-Poiseuille (linealmente estable) se inestabiliza y convierte en flujo

**7. PERFIL PARABOLICO DE VELOCIDAD AXIAL de Hagen-Poiseuille (izquierda) seccionado en zonas en las que la velocidad axial es del 75 % y 99 % de la velocidad máxima en el eje. A la derecha se ve la proyección bidimensional de la distribución de velocidades (zonas rápidas en rojo y lentas en azul).**





**8. DISTRIBUCION DE VELOCIDADES AXIALES** en un estado de relajación (izquierda) para un número de Reynolds  $Re$  de 2875. A la derecha, solución de Navier-Stokes encontrada utilizando el método de Newton-Krylov y tomando como guía inicial el estado transitorio de la izquierda. (Las zonas rojas tienen una velocidad muy alta; las azules, muy baja.)

turbulento de forma directa, sin pasar por estadios intermedios laminares secundarios. Dicho de otro modo, la transición del problema de Reynolds no sigue lo descrito en la figura 3, sino que vendría representada por el gráfico inferior de la figura 2 para números de Reynolds suficientemente grandes. El punto B en el gráfico inferior de la figura 2 representaría el flujo de Hagen-Poiseuille, linealmente estable, y los puntos A y C, estados turbulentos no laminares hacia los cuales escapa el flujo siempre que la perturbación sea del tamaño adecuado.

Obviamente, lo que condiciona la estabilidad del flujo de Hagen-Poiseuille es la presencia de las soluciones inestables D y E de la figura 2. Esas soluciones delimitan la *cuenca de atracción* del flujo de Hagen-Poiseuille, es decir, la zona por la cual podría moverse la bolita sin caer en los pozos turbulentos A o C. Por otro lado, que el flujo de Hagen-Poiseuille resulte más susceptible de desestabilizarse cuanto mayor sea el número de Reynolds vendría explicado por la altura  $h$  de la barrera formada por las dos soluciones inestables D y E. Podemos imaginar que  $h$  se va haciendo cada vez más pequeño (sin llegar nunca a ser cero) a medida que aumentamos el número de Reynolds, de modo que la magnitud que debe tener una perturbación para expulsar la bolita del pequeño pozo de equilibrio será cada vez menor.

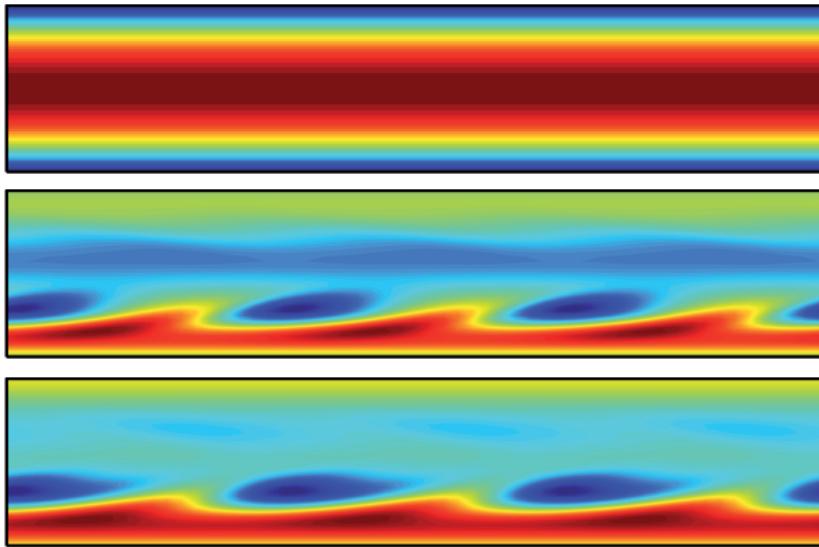
### Los estados umbral

Las soluciones de equilibrio inestable D y E del gráfico inferior de la figura 2 son las responsables de la estabilidad parcial del punto B. Este argumento ha servido de hipótesis de trabajo para proporcionar una posible explicación de la transición en el problema de Reynolds. De validarse la hipótesis, deberían existir soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes que representasen a esos puntos como

responsables de la transición. Ahora bien, tales soluciones o flujos son inestables y, por lo tanto, no se observarán nunca en los experimentos. Todos los estudios experimentales realizados hasta el momento no han podido detectar trazas residuales de semejantes soluciones. Ahí reside una de las razones de que el problema de Reynolds se haya mantenido estancado varios decenios.

Mas, desde hace 4 o 5 años el problema ha tomado un rumbo diferente, gracias al aumento de la capacidad de cálculo de los procesadores y el trabajo de un pequeño grupo de científicos especializados en sistemas dinámicos y dinámica de fluidos computacional. La teoría de sistemas dinámicos, una disciplina matemática, estudia las propiedades cualitativas de estabilidad de sistemas complejos, ya sean físicos, biológicos o económicos. Para ello reduce el problema a su mínima expresión mediante la generalización de la dinámica del sistema con independencia de la naturaleza de éste. Por su parte, la dinámica de fluidos computacional estudia la manera de simular flujos reales mediante ordenadores de gran potencia.

La simulación numérica de alta precisión de un flujo de Navier-Stokes permite obtener información cuantitativa y cualitativa sobre la dinámica del flujo. Los algoritmos de simulación se aproximan a las soluciones en el espacio y el tiempo. Es decir, nos proporcionan buenas aproximaciones de la velocidad y presión del fluido en cualquier punto de éste y para instantes de tiempo arbitrarios. Sólo hay una limitación: la evolución temporal de esos algoritmos tiene una dirección privilegiada, *hacia delante*. Sólo podemos simular el *futuro* del movimiento del fluido, pero en ningún caso el *pasado*. La razón de que no podamos ir marcha atrás en el tiempo, compleja de explicar, se saldría del marco de este artículo. En cualquier caso, esa limitación acaba siendo



**9. CORTE DIAMETRAL-LONGITUDINAL de distribuciones de la velocidad axial (el fluido se mueve de izquierda a derecha).** Arriba: flujo básico de Hagen-Poiseuille. Centro: estado de relajación correspondiente a la imagen izquierda de la figura 8. Abajo: estado determinado por el correspondiente a la imagen derecha de la figura 8.

la misma que tienen los experimentales que trabajan con fluidos.

La evolución temporal de un flujo de Navier-Stokes, realizada experimental o computacionalmente, nunca va a detenerse en soluciones inestables del tipo D o E de la figura 2. Esas soluciones son *repulsoras* y es difícil acercarse a ellas. Ahora bien, la dinámica de flujos computacional ha desarrollado técnicas para determinar soluciones de Navier-Stokes inestables, los *métodos de Newton-Krylov* (MNK), que permiten aproximarse a la solución sin hacer uso de la evolución temporal. Los MNK reducen el problema dinámico a un problema puramente algebraico, en el que desaparece la dependencia temporal. El algoritmo MNK tendrá éxito siempre que nos encontremos cerca de esa solución inestable. Por lo tanto, la primera fase de nuestra búsqueda de soluciones tipo D o E consistirá en aproximarnos a ellas temporalmente todo lo que podamos.

### Acercarse a la frontera

Volvamos al ejemplo de la bolita del gráfico inferior de la figura 2. Para ello, hemos representado en la figura 4 el pozo linealmente estable de nuevo, pero en este caso sólo hemos indicado el punto B de equilibrio linealmente estable y el punto E de barrera inestable; el punto C ahora queda sustituido por un valle de perfil irregular, que representa el estado turbulento. Si impariésemos una pequeña percusión lateral a la bolita en su posición inicial B, la bolita se separaría de su punto de partida B para después volver a él (*figura 4, arriba*). Si repitiésemos el experimento aumentando el impulso inicial de la percusión, la bolita alcanzaría alturas mayores y se aproximaría más a E. Finalmente, una percusión con suficiente energía haría que la bolita alcanzase la altura del punto E, pero por regla general

no se quedaría ahí, sino que casi con toda probabilidad pasaría de largo y caería en el pozo turbulento (*figura 4, centro*).

Mientras la bolita se mueve podemos ir midiendo sus propiedades dinámicas; por ejemplo, su velocidad  $v$ . En la analogía del perfil de la montaña, sabemos que irá *desacelerándose* a medida que se acerque a E, para después volver a acelerarse. Es decir, un indicativo de aproximación a las soluciones inestables es la aparición de episodios de larga duración en los que la bolita se encuentra prácticamente en reposo para luego escapar a los pozos turbulentos o volver al estado de partida.

En la gráfica inferior de la figura 4 hemos representado la velocidad de la bolita en función de tiempo correspondiente a los casos (I) y (II). En el caso (I), la bolita parte con una velocidad que no le permite sobreponer la barrera del punto E y, por lo tanto, su velocidad va disminuyendo hasta anularse al volver al punto de equilibrio B de partida. En el caso (II), la bolita tiene inicialmente la energía cinética suficiente para sobreponer la barrera. Justo antes de iniciarse el escape al pozo turbulento, la bolita pasa por un episodio de velocidad mínima  $v_{\min}$  (indicado en la gráfica de la velocidad con un círculo). Si no conociéramos *a priori* el perfil de la montaña, este método nos daría indicaciones sobre la localización aproximada de los puntos inestables.

Los algoritmos de la dinámica de flujos computacional permiten simular la evolución de una perturbación añadida al flujo de Hagen-Poiseuille. Podemos ir cambiando la escala de su amplitud inicial a nuestro antojo. Una perturbación de muy pequeña amplitud no afectará notablemente al flujo y acabará por decaer (*relaminarización* se llama a esta evolución). Pero si repetimos el proceso introduciendo amplitudes cada vez mayores, tarde o temprano obtendremos una transición a la turbulencia, tal y como hemos visto en el ejemplo anterior.

Podríamos también repetir el experimento para amplitudes intermedias que, o bien conducen a turbulencia, o bien relaminarizan. Supongamos que tenemos dos amplitudes iniciales muy semejantes,  $A_1 = A_{\text{lam}}$  y  $A_4 = A_{\text{tur}}$  (con  $A_{\text{lam}}$  menor que  $A_{\text{tur}}$ ), que generan relaminarización y turbulencia, respectivamente. Si perturbamos el flujo con amplitudes de magnitud intermedia  $A_2$  y  $A_3$  (con  $A_1 < A_2 < A_3 < A_4$ ) y vamos midiendo en función del tiempo la velocidad de la perturbación del fluido  $v(t)$  en un punto cualquiera de la tubería, observaremos lo mismo que todas las trayectorias tienen un amplitud inicial prácticamente idéntica (su diferencia no es

apreciable en la representación gráfica). Transcurrido un período transitorio, las trayectorias divergen, de modo que se forma una estructura semejante a una cremallera entreabierta.

Entre  $A_{\text{lam}}$  y  $A_{\text{turb}}$  podremos siempre encontrar un abanico de amplitudes iniciales que irán discriminando entre trayectorias turbulentas y relaminarizadas.

Las repeticiones sucesivas de este tipo de simulaciones numéricas nos permiten acercarnos a zonas en las que, posiblemente, se encuentren las soluciones inestables que buscamos. Dicho de otro modo, el método nos faculta para ir cerrando la cremallera. Posteriormente, podremos ir afinando la precisión de nuestras amplitudes iniciales y monitorizar la velocidad de la perturbación del fluido. Los MNK entrarán en acción más tarde, en cuanto detectemos episodios de relajación de  $v(t)$ .

### Episodios de relajación

El procedimiento que acabamos de explicar no se puede realizar de forma experimental, dado que en el laboratorio no se tiene un control tan preciso de las perturbaciones introducidas. Con la simulación numérica se controlan la amplitud y forma de la perturbación a nuestro antojo, para monitorizar luego todas las variables del problema en espacio y tiempo. Podemos analizar la forma del flujo en cualquier instante de tiempo y para cualquier punto del espacio. En particular, queremos identificar las *estructuras coherentes* o *patrones* de los episodios de relajación, justo antes de que el flujo se vuelva turbulento.

Ya sabemos que el flujo de Hagen-Poiseuille muestra un perfil parabólico, que suele representarse mediante un corte transversal a la tubería, como se ve en la parte izquierda de la figura 7; hemos trazado además curvas sobre las zonas en las cuales la velocidad del fluido es la misma. Dado que el flujo es simétrico alrededor del eje, esas curvas son círculos. En la parte derecha de la figura 7 se muestra la distribución de velocidades resultante de la proyección de las curvas sobre un plano. Las zonas que tienen mayor velocidad están coloreadas en rojo y las de velocidad menor o nula, en azul. Las dos zonas de igual velocidad trazadas sobre el parabolóide de la figura izquierda se han transformado en los dos círculos de la figura derecha, en los cuales las velocidades son un 75 % y 99 % de la velocidad máxima en el centro ( $\bar{U}$ ). Ese tipo de visualización permite entender de forma intuitiva la distribución de velocidades de cualquier flujo en la tubería.

El procedimiento de ir modificando adecuadamente la amplitud nos llevará tarde o temprano a zonas cercanas a otros flujos de Navier-Stokes inestables. Refinando amplitu-

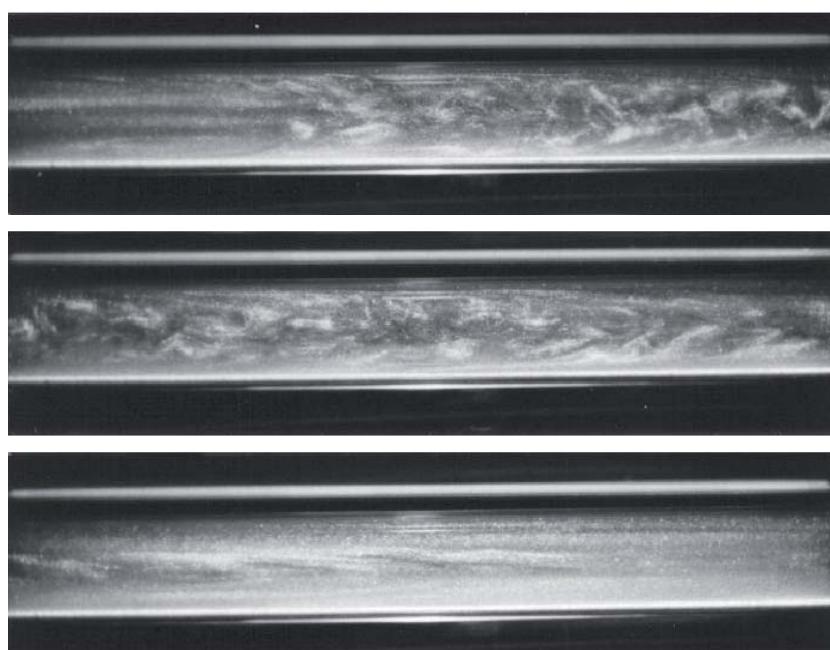
des con la precisión adecuada, la evolución de la perturbación pasará por estados de relajación previos a escapes turbulentos o relaminarizantes.

Veamos qué aspecto tiene el flujo durante las fases de relajación. En la imagen izquierda de la figura 8 hemos representado la distribución de velocidades axiales en un instante de relajación de la perturbación (semejante al círculo blanco representado en la gráfica inferior de la figura 4). Ese estado, que se caracteriza por mostrar zonas periféricas donde la velocidad axial es muy alta (*zonas de color rojo*) y que aprisionan una zona de muy baja velocidad axial (*zonas coloreadas en azul*), se ha observado en diferentes simulaciones numéricas llevadas a cabo recientemente por grupos de investigación alemanes y británicos, encabezados por Bruno Eckhardt y Rich Kerswell, de las universidades de Marburg y Bristol respectivamente.

Si el estado de relajación de la imagen de la izquierda de la figura 8 se encuentra próximo a soluciones de equilibrio inestable de tipo D-E, los MNK nos permitirán acercarnos a ellas de forma más exacta, pese a la naturaleza repulsora de este tipo de soluciones.

Acerca de los detalles técnicos y matemáticos del procedimiento utilizado por los MNK para encontrar las soluciones inestables, nos conformaremos con una idea intuitiva. Por decirlo de algún modo, los MNK estudian la *topografía* del perfil de la montaña representada en la figura 4. Las ecuaciones de Navier-Stokes no nos proporcionan el perfil global de la montaña, de modo que la exploración se realiza sólo de forma local, como si de un escalador con los ojos vendados se tratara. El escalador sabe

**10. UNA ESTRUCTURA PRETURBULENTA INTERMITENTE (UN PUFF) observada en experimentos con un número de Reynolds de 2575. El flujo de la tubería va de izquierda a derecha. Las fotografías superior, central e inferior muestran la cola, el centro y la cabeza del puff, respectivamente. Esta estructura turbulenta se encuentra confinada dentro del flujo laminar. Se puede observar el flujo a la izquierda de la fotografía superior y a la derecha de la inferior.**



## Los autores

Alvaro Meseguer y Fernando Mellibovsky son profesores del departamento de física aplicada de la Universidad Politécnica de Cataluña (UPC), ambos vinculados a la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos de Barcelona (ETSECCPB).

que se encuentra cerca de una cima (puntos E o D), a la que le hemos acercado mediante un método dinámico. Ahora, el escalador analiza la pendiente local de la montaña y sube siempre que puede, intentando alcanzar la cima. Cuanto más próximo a ella dejemos al escalador, más fácil será que tenga éxito.

En la imagen de la derecha de la figura 8 se muestra la solución de Navier-Stokes detectada por los MNK, tomando el estado de la imagen de la izquierda como guía inicial (el hallazgo de ese estado, por los autores y el grupo de Kerswell, es reciente). Parece estar implicada directamente en la transición a la turbulencia en el problema de Reynolds. Se trata de un flujo que *no* es estacionario, sino que viaja en el mismo sentido que el flujo básico con velocidades del mismo orden de magnitud que la velocidad máxima de la solución de Hagen-Poiseuille. Su estructura, periódica en la dirección axial, tiene una longitud característica típica de unos pocos diámetros de tubería.

En la figura 9 representamos esas propiedades. Se ha ilustrado la distribución de velocidades axiales en un corte diametral-longitudinal de la tubería. El flujo de Hagen-Poiseuille (*figura 9, arriba*) muestra las zonas de baja velocidad (*en azul*) próximas a la pared y zonas de alta velocidad (*en rojo*). En la imagen central hemos representado la distribución en el episodio de relajación. En este caso, las zonas azules indican una velocidad axial opuesta al flujo básico (que fluye de izquierda a derecha), las zonas amarillas corresponden a la velocidad nula y las rojas a la velocidad máxima orientada en el mismo sentido que el flujo básico. Finalmente, la imagen inferior muestra el estado encontrado por el MNK.

Hasta el momento, los experimentos realizados sobre la transición en tuberías no han detectado ese estado, ni trazas siquiera. Hay que decir que el resultado aquí expuesto es relativamente reciente y que los experimentales desconocían la existencia de semejante estado umbral o crítico. Que la dinámica de fluidos computacional se adelante a la dinámica de fluidos experimental a la hora de predecir la existencia de nuevos flujos es cada vez más

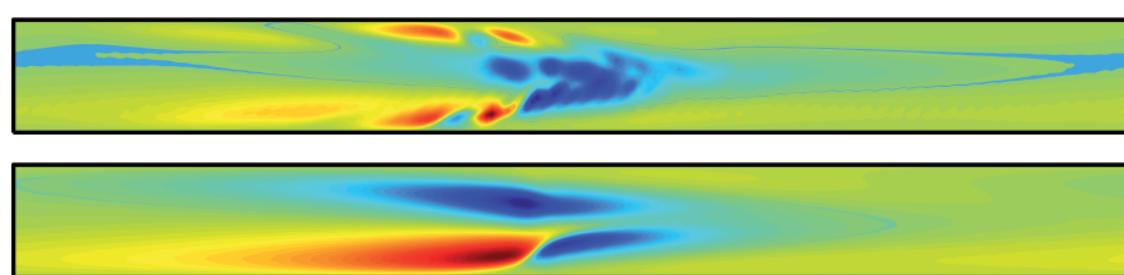
frecuente. La próxima generación de experimentos partirá con la ventaja de saber dónde debe buscar.

## Intermitencias

Las soluciones inestables antes descritas se encuentran a medio camino entre la laminaridad y la turbulencia, y son esenciales, desde un punto de vista teórico, para entender la dinámica del problema de Reynolds. Sin embargo, las trayectorias no relaminarizantes que escapan de esas soluciones llevan el flujo a lo que se suele denominar *turbulencia global*. La turbulencia es global cuando *todo* el dominio de la tubería pasa a ser turbulento, y hay turbulencia global cuando el número de Reynolds es suficientemente alto ( $Re = 2875$  en el caso antes descrito). Ahora bien, un descenso a números de Reynolds ligeramente inferiores da lugar a lo que comúnmente se denomina *turbulencia intermitente* o, simplemente, *intermitencia*. Osborne Reynolds la describió en su artículo de 1883: “Otro fenómeno... era el carácter intermitente de la perturbación. Dicha perturbación aparecía de forma repentina en zonas concretas de la tubería, para después desaparecer y reaparecer de nuevo, en forma de destellos que, a menudo, tenían su inicio en un punto del tubo.”

Estudios experimentales posteriores al de Reynolds confirman esa fenomenología. Es decir, el flujo en la tubería no se inestabiliza hasta números de Reynolds próximos a 2000, y tal desestabilización *no* conduce a un flujo completamente turbulento, sino a uno en el que coexisten turbulencia y laminaridad. Los experimentos han observado esa intermitencia para valores del número de Reynolds entre 2000 y 2700. Las estructuras turbulentas intermitentes aparecen en ciertas zonas del tubo y suelen tener una extensión de decenas de diámetros. Se las llama comúnmente *puffs* y son el primer síntoma de transición en el problema de Reynolds. La figura 10 muestra la fotografía de una estructura turbulenta de éstas, obtenida experimentalmente a  $Re = 2570$ . Debido a su considerable longitud, la estructura se ha seccionado en sus tres zonas principales. El marco superior muestra la cola; el central, la zona intermedia; y el inferior, la cabeza. Ta-

11. SECCION DIAMETRAL-LONGITUDINAL (*arriba*) de una estructura preturbulenta intermitente (*puff*) en su fase de relajación (para un número de Reynolds de 2000). Rojo y azul representan alta y baja velocidad axial, respectivamente. El flujo va de izquierda a derecha. La misma sección (*abajo*) después de aplicar el método de Newton-Krylov al estado de arriba.



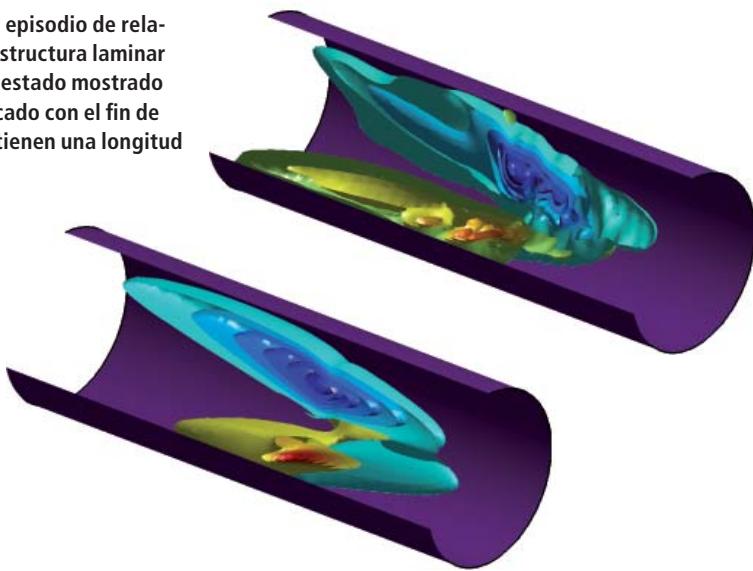
**12. ESTRUCTURA PRETURBULENTA (arriba) durante el episodio de relajación para un número de Reynolds de 2000. Abajo: estructura laminar resultante de aplicar el método de Newton-Krylov al estado mostrado arriba. La escala diametral-longitudinal se ha modificado con el fin de poder visualizar mejor ambas estructuras, dado que tienen una longitud característica de unos 60 radios.**

les estructuras turbulentas y localizadas viajan solidariamente con el resto del flujo laminar, manteniendo constante su longitud. Son muy robustas, tanto que se ha llegado a dudar de si se trata de patrones transitorios o estables.

Resulta difícil determinar experimentalmente el carácter estable o inestable de las estructuras turbulentas intermitentes debido a que la tubería tiene una longitud determinada. Las tuberías utilizadas en los experimentos de Tom Mullin, de la Universidad de Manchester, y Björn Hof, del Instituto Max Planck de Göttingen, alcanzan longitudes de entre 500 a 1000 radios como máximo; las estructuras turbulentas intermitentes generadas abandonan el tubo antes de que pueda describirse su dinámica para tiempos largos. De nuevo, la experimentación se enfrenta ante una limitación inexistente en la dinámica de flujos computacional. Las simulaciones numéricas en flujos abiertos, como en el problema de Reynolds, resuelven el inconveniente de la limitación en la longitud de la tubería forzando al fluido a entrar de nuevo en el dominio tan pronto lo abandona. Dicho de otro modo, es como si pudiésemos reconectar la salida y la entrada de la tubería sin deformar su geometría ni los mecanismos físicos que conducen el fluido en su interior.

La dinámica inherente a la intermitencia constituye una pieza clave en el rompecabezas de la transición a la turbulencia. Se encuentra a medio camino entre la laminaridad y la turbulencia global. Difícilmente podremos comprender el fenómeno global sin antes entender su fase previa. Por otro lado, las estructuras turbulentas intermitentes son las primeras estructuras no laminares que aparecen en la desestabilización del flujo de Hagen-Poiseuille, si bien la coherencia espaciotemporal de las mismas podría estar gobernada por soluciones laminares inestables, similares a las que hemos descrito en la sección anterior.

Hemos repetido el procedimiento de ir variando la escala de las amplitudes de perturbación para encontrar estados de relajación, en este caso para tuberías mucho más largas y números de Reynolds cercanos a 2000. Para ello hemos ido discriminando trayectorias que, o bien se relaminarizaban, o bien generaban estructuras turbulentas localizadas. La imagen superior de la figura 11 muestra un estado de relajación previo a la generación de



una estructura turbulenta intermitente. Ahí tomamos una sección diametral-longitudinal de la tubería y representamos la distribución de velocidades axiales en ella. Sobre ese estado de intermitencia preturbulenta aplicamos los MNK, de lo que resulta una estructura suave, mostrada en la imagen inferior de la figura 11. En este caso, a los MNK les cuesta determinar la estructura con más precisión, considerada la notable extensión del dominio sobre el que se han realizado las simulaciones: la computación del estado representado en la imagen inferior de la figura 12 requiere varias semanas de cálculo intensivo con un procesador potente.

El dominio mostrado en las figuras es de 100 radios y se ha modificado la escala para poder representarlas. A fin de adquirir una idea más clara de lo que parece una solución inherente al proceso de creación de una estructura turbulenta intermitente, hemos realizado una representación tridimensional de las estructuras de la figura 11. La mostramos en la figura 12, donde hemos ilustrado isosuperficies de misma velocidad axial. En ambas figuras hemos extirpado un cuadrante del dominio con el fin de dar una mejor idea de su estructura interna y de la distribución de velocidades en el interior de la estructura turbulenta intermitente.

La precisión con la que los MNK han determinado la estructura que aparece en la imagen inferior de la figura 12 no es la misma que la exhibida en la figura 8. Para determinar la fiabilidad de ese resultado sería necesario aumentar la resolución del algoritmo numérico que resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes. Ahora mismo se está llevando a cabo ese trabajo. Creemos que las características a gran escala de esa estructura no cambiarán notablemente cuando aumentemos la precisión de nuestra aproximación.

## Bibliografía complementaria

LINEARIZED PIPE FLOW TO REYNOLDS NUMBER 10<sup>7</sup>. A. Meseguer y L. N. Trefethen en *Journal of Computational Physics*, vol. 186(1), págs. 178-197; 2003.

EXPERIMENTAL OBSERVATION OF NONLINEAR TRAVELLING WAVES IN TURBULENT PIPE FLOW. B. Hof en *Science*, vol. 305(5690), págs. 1594-1598; 2004.

RECENT PROGRESS IN UNDERSTANDING THE TRANSITION TO TURBULENCE IN A PIPE. R. R. Kerswell en *Nonlinearity*, vol. 18(6), págs. R17-R44; 2005.

TURBULENCE TRANSITION IN PIPE FLOW. B. Eckhardt et al. en *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 39, págs. 447-468; 2007.

CRITICAL THRESHOLD IN PIPE FLOW TRANSITION. F. Melli-bovsky y A. Meseguer en *Philosophical Transactions; Royal Society*, vol. 367(1888), págs. 545-560; Londres, 2009.