EXO 1

2. La sphère $S = \{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| = 1\}$ de centre 0 et de rayon 1 est un fermé borné de $\mathbb{R}^N$ qui est un espace vectoriel normé de dimension finie. Par conséquent, pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. l'application linéaire $x \mapsto Bx$ est continue sur S donc est bornée et atteint ses bornes. En particulier, $\boxed{|||B||| \text{ existe}}$ et est atteinte en un certain point de la sphère S et $\boxed{|||B||| \geq 0}$

Soit $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$. Pour $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|DX\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2} \leqslant \sqrt{(\rho(D))^2 \sum_{i=1}^n x_i^2} = \rho(D)\|X\|_2,$$

De plus, si λ est une valeur propre de D telle que $|\lambda| = \rho(D)$ et X_0 est un vecteur propre associé, alors

$$\|DX_0\|_2 = \|\lambda X_0\|_2 = |\lambda|\|X_0\|_2 = \rho(D)\|X_0\|_2.$$

En résumé
(1) $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\frac{\|DX\|_2}{\|X\|_2} \leqslant \rho(D)$,
(2) $\exists X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\frac{\|DX_0\|_2}{\|X_0\|_2} = \rho(D)$.
On en déduit que $\forall D \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$, $|||D|||_2 = \rho(D)$.
Soit alors $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PD^tP$. De plus $\rho(A) = \rho(D)$. Pour $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\|AX\|_2 &= \|PD^tPX\|_2\\ &= \|D({}^tPX)\|_2 \text{ (car } P \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \forall Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PY\|_2 = \|Y\|_2)\\ &= \|DX'\|_2 \text{ où on a posé } X' = {}^tPX.\end{aligned}$$

Maintenant l'application $X \mapsto {}^tPX = X'$ est une permutation de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car la matrice ${}^tP$ est inversible et donc X décrit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si X' décrit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. De plus, pour tout vecteur colonne X, $\|X'\|_2 = \|{}^tPX\|_2 = \|X\|_2$. On en déduit que $\left\{\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \left\{\frac{\|DX'\|_2}{\|X'\|_2},\ X' \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\}$ et en particulier,

$$|||A|||_2 = |||D|||_2 = \rho(D) = \rho(A).$$

$$\boxed{\forall A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ |||A|||_2 = \text{Sup}\left\{\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\} = \rho(A).}$$

Remarque. L'application $A \mapsto \rho(A)$ est donc une norme sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et de plus cette norme est sous-multiplicative.

EXO 2

Enoncé ▼

Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ une partie convexe et $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Démontrer que $f(C)$ est un intervalle.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective. Démontrer que h est strictement monotone. On pourra utiliser la fonction $f(x,y) = h(x) - h(y)$.

Indication ▶

Corrigé ▼

1. Soient $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ appartenant à $f(C)$. On peut supposer $y_1 \leq y_2$ et soit y dans l'intervalle $[y_1, y_2]$. On considère la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f((1-t)x_1 + tx_2)$. g est bien définie car C est convexe, g est continue, $g(0) = f(x_1) = y_1$, $g(1) = f(x_2) = y_2$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction d'une variable réelle g, il existe $t \in [0,1]$ avec $g(t) = y$. Posons $x = (1-t)x_1 + tx_2 \in C$. Alors $f(x) = y$. Ceci prouve bien que $f(C)$ est un intervalle.
2. Posons $C = \{(x,y) \in I;\ x > y\}$ et $f : C \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = h(x) - h(y)$. Alors C est convexe (il suffit de faire un dessin pour s'en convaincre, mais on peut vérifier très facilement la définition). $f(C)$ est un intervalle d'après la question précédente, et cet intervalle ne peut pas contenir 0 puisque h est injective. Ainsi, on a ou bien $f > 0$ ou bien $f < 0$. Le premier cas dit que, si $x > y$, alors $h(x) > h(y)$ et donc que h est strictement croissante. Le second cas dit que h est strictement décroissante.

EXO 3

Enoncé

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. On pose

$$A = \left\{ f \in E;\ f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt \geq 1 \right\}.$$

Démontrer que A est une partie fermée de E.

Indication

Corrigé

Posons, pour $f \in E$, $\phi(f) = f(0)$ et $\psi(f) = \int_0^1 f(t)dt$. Alors ϕ et ψ sont deux formes linéaires. De plus, elles sont continues car, pour tout $f \in E$,

$$|\phi(f)| \leq \|f\|_\infty$$

$$|\psi(f)| \leq \int_0^1 |f(t)|dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt \leq \|f\|_\infty.$$

De plus, on a $A = \phi^{-1}(\{0\}) \cap \psi^{-1}([1,+\infty[)$. Comme images réciproques de fermés par une application continue, $\phi^{-1}(\{0\})$ et $\psi^{-1}([1,+\infty[)$ sont fermés. Leur intersection est donc un fermé et A est bien fermé.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. On pose

$$O = \{f \in E:\ f(1) > 0\} \text{ et } F = \left\{ f \in E:\ \int_0^{1/2} f(t)dt \leq 0 \right\}.$$

1. Est-ce que O est un ouvert de $(E, \|\cdot\|_\infty)$? de $(E, \|\cdot\|_1)$?
2. Est-ce que F est un fermé de $(E, \|\cdot\|_\infty)$? de $(E, \|\cdot\|_1)$?

Indication

Corrigé

1. On va commencer par prouver que O est un ouvert de $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Soit $f \in E$ et posons $r = f(1)$. Alors $B_\infty(f,r) \subset O$. En effet, si $g \in B_\infty(f,r)$, alors

$$g(1) \geq f(1) + g(1) - f(1) \geq f(1) - \|f-g\|_\infty \geq f(1) - f(1) > 0.$$

En revanche, O n'est pas un ouvert de $(E, \|\cdot\|_1)$. En effet, considérons $f \in O$ et $r > 0$ quelconque. Pour $n \geq 1$, posons $g_n = f - f(1)x^n$. Alors $\|g_n - f\|_1 = f(1)\int_0^1 x^n dx = \frac{f(1)}{n+1} \to 0$. Ainsi, pour n assez grand, $g_n \in B_\infty(f,r)$. En revanche, g_n n'est jamais élément de O. En effet, on a $g_n(1) = f(1) - f(1) = 0$.

Pour On borné, prendre la norme infini sur l'ensemble des matrices.

EXO 4

Enoncé

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et (u_n) une suite de E. On note V l'ensemble des valeurs d'adhérence de E.

1. Démontrer que $V = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_p\ :\ p \geq n\}}$.
2. En déduire que V est fermé.

Indication

Corrigé

1. Soit $\ell \in V$. Il existe une suite extraite $(u_{\phi(n)})$ qui converge vers ℓ. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour $k \geq n$, on a $\phi(k) \geq k \geq n$, et donc
$$u_{\phi(k)} \in \{u_p\ :\ p \geq n\}.$$
Puisque $(u_{\phi(k)})$ converge vers ℓ, on en déduit que $\ell \in \overline{\{u_p\ :\ p \geq n\}}$. Puisque c'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $\ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_p\ :\ p \geq n\}}$.
Réciproquement, supposons que $\ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{u_p\ :\ p \geq n\}}$. On va construire par récurrence une suite $(\phi(k))$ d'entiers telle que, pour tout $k \geq 1$, $\|\ell - u_{\phi(k)}\| \leq 2^{-k}$ et $\phi(k) > \phi(k-1)$. On initialise la construction en disant que $\ell \in \overline{\{u_p\ :\ p \geq 0\}}$ et donc qu'il existe $\phi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $\|\ell - u_{\phi(0)}\| \leq 1$.
Supposons maintenant la construction réalisée jusqu'au rang $k-1$ et réalisons-la au rang k, avec $k \geq 1$. On utilise cette fois que $\ell \in \overline{\{u_p\ :\ p \geq \phi(k-1)+\}}$ pour obtenir un entier $\phi(k) \geq \phi(k-1)+1 > \phi(k-1)$ tel que $\|\ell - u_{\phi(k)}\| \leq 2^{-k}$.
Finalement, on a que $(u_{\phi(k)})$ converge vers ℓ, et donc que $\ell \in V$.
2. Maintenant, c'est facile : V est fermé comme intersection de fermés!

EXO 5

Enoncé

1. Soit f une fonction convexe croissante et soit g une fonction convexe. Démontrer que $f\circ g$ est convexe.
2. Soit $f:\mathbb R\to]0,+\infty[$. Montrer que $\ln f$ est convexe si et seulement si, pour tout $\alpha>0$, f^α est convexe.

Indication

Corrigé

1. Soit $f,g:\mathbb R\to\mathbb R$ convexes. Soient $x,y\in\mathbb R$ et $t\in[0,1]$. Alors on a

$$\begin{aligned} f\circ g\big(tx+(1-t)y\big) &\leq f\big(tg(x)+(1-t)g(y)\big) \quad (g \text{ est convexe et } f \text{ est croissante})\\ &\leq tf(g(x))+(1-t)f(g(y)) \quad (f \text{ est convexe}). \end{aligned}$$

Ceci prouve exactement que $f\circ g$ est convexe.

2. On suppose d'abord que $\ln f$ est convexe. Alors, pour $\alpha>0$, on a

$$f^\alpha=\exp\left(\alpha\ln f\right)$$

qui est convexe d'après la première question puisque $\ln f$ est convexe et $x\mapsto\exp(\alpha x)$ est croissante convexe.

Réciproquement, supposons que f^α est convexe pour tout $\alpha>0$. En particulier, pour tous $x,y\in\mathbb R$ et tout $t\in[0,1]$, on a

$$u(\alpha)\leq v(\alpha)$$

avec $u(\alpha)=\exp\big(\alpha\ln f(tx+(1-t)y)\big)$ et
$v(\alpha)=t\exp\left(\alpha\ln f(x)\right)+(1-t)\exp\left(\alpha\ln f(y)\right)$. Or, $u(0)=v(0)$. Il est donc nécessaire, pour que $u(\alpha)\leq v(\alpha)$ pour $\alpha>0$, que $u'(0)\leq v'(0)$. Mais,

$$u'(0)=\ln f(tx+(1-t)y) \text{ tandis que } v'(0)=t\ln f(x)+(1-t)\ln f(y).$$

L'inégalité $u'(0)\leq v'(0)$ se traduit donc exactement en disant que $\ln f$ est convexe.

EXO 6

Exercice 11 : [énoncé]

(a) Par définition de l'ensemble E, l'application $\|\cdot\|: E \to \mathbb{R}_+$ est bien définie.
Soient $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ éléments de E et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\|a+b\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n + b_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \big(|a_n| + |b_n|\big) = \|a\| + \|b\|$$

avec convergence des séries écrites, et

$$\|\lambda.a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda a_n| = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda||a_n| = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = |\lambda|\|a\|.$$

Enfin, si $\|a\| = 0$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq \|a\| = 0$$

donne $(a_n)_{n\geq 0} = (0)_{n\geq 0}$

(b) Considérons la forme linéaire

$$\varphi : (a_n)_{n\geq 0} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

On vérifie

$$\forall a = (a_n)_{n\geq 0} \in E, \big|\varphi(a)\big| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = \|a\|.$$

La forme linéaire φ est donc continue.
Puisque $F = \varphi^{-1}(\{1\})$ avec $\{1\}$, la partie F est fermée en tant qu'image réciproque d'une partie fermée par une application continue..
Posons $e = (1, 0, 0, \ldots)$ et un élément de F et

$$\forall \alpha > 0, e + \alpha e \notin F \text{ et } \big\|e - (e + \alpha e)\big\| = \alpha.$$

On en déduit que F n'est pas un voisinage de son élément e et par conséquent la partie F n'est pas ouverte.
Posons $\alpha^p = e + p.(1, -1, 0, 0, \ldots)$.

$$\forall p \in \mathbb{N}, \alpha^p \in F \text{ et } \big\|\alpha^p\big\| \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty.$$

La partie F n'est donc pas bornée.

EXO 7

Enoncé ▼

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$. Justifer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer la différentielle de f en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Indication ▼

Calculer $f(M+H) - f(M)$ pour revenir à la définition d'une différentielle.

Corrigé ▼

Remarquons déjà que f est de classe C^1 puisque f est polynômiale. Soient $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors on a

$$f(M+H) - f(M) = (M+H)^2 - M^2 = HM + MH + H^2.$$

Posons $\phi(H) = HM + MH$. ϕ est linéaire et

$$f(M+H) - f(M) = \phi(H) + o(\|H\|).$$

Ainsi, ϕ est la différentielle de f en M.

Corrigé ▼

Remarquons avant de commencer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et donc il est bien possible de calculer la différentielle de ϕ en un élément de $GL_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\|H\| < 1$. Alors

$$(I_n + H) \times \left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k H^k\right) = I_n + (-1)^p H^{p+1}.$$

Puisque $\|H\| < 1$, $H^p \to 0$ et donc

$$(I_n + H)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k H^k = I_n - H + H^2 \psi(H),$$

où

$$\psi(H) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k H^k.$$

On a

$$\|\psi(H)\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|H\|^k = \frac{1}{1 - \|H\|} \leq 2$$

si $\|H\| \leq 1/2$. Ainsi, $\|H^2\psi(H)\| \leq 2\|H\|^2 = o(\|H\|)$ et on a prouvé que

$$\phi(I_n + H) = \phi(I_n) - H + o(\|H\|).$$

Ainsi, ϕ est différentiable en I_n et sa différentielle vaut $d\phi_{I_n}(H) = -H$.

EXO 8

Enoncé

Soit $c \neq 0$. Chercher les solutions de classe C^2 de l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

à l'aide d'un changement de variables de la forme $u = x + at$, $v = x + bt$.

Indication

Corrigé

On pose donc $f(x, y) = F(u, v)$ avec $u = x + at$ et $v = x + bt$. On a donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2ab\frac{\partial F}{\partial u \partial v} + b^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}.$$

L'équation devient alors :

$$(c^2 - a^2)\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2(c^2 - ab)\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + (c^2 - b^2)\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0.$$

En prenant $a = c$ et $b = -c$, l'équation devient

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} = 0$$

dont la solution générale est

$$F(u, v) = \phi(u) + \psi(v),$$

où ϕ et ψ sont C^2. La solution générale de l'équation initiale est donc :

$$f(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct).$$