

**Exercice 1 – (Système)**

Trouver l'ensemble des réels  $x$  tels que

$$\begin{cases} 2\cos(x) - \sin(x) &= \sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ \cos(x) + 2\sin(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{cases}$$

**Exercice 2 – ( $\pi/12$ )**

Déterminer la valeur de  $\sin(\pi/12)$  et  $\cos(\pi/12)$

**Exercice 3 – (Périodicité)**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = \cos(x) + \cos(\alpha x)$ .  
On souhaite montrer que  $f$  est périodique si et seulement si  $\alpha \in \mathbb{Q}$ .

1. On suppose que  $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ . Montrer que  $f$  est périodique.
2. On suppose que  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ . Résoudre l'équation  $f(x) = 2$ . En déduire que  $f$  n'est pas périodique.
3. Conclusion.

**Exercice 4 – (Somme de fonctions hyperboliques)**

$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , montrer que :

1.  $sh(x+y) = sh(x)ch(y) + ch(x)sh(y)$
2.  $ch(x+y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y)$

**Exercice 5 – (Inégalités de fonctions hyperboliques)**

$\forall x \in \mathbb{R}$ , montrer que :

1.  $sh(x) \geq x$
2.  $ch(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$

**Exercice 6 – (Equation)**

Résoudre l'équation  $ch(x) = 2$ .

**Exercice 7 – (Majoration de  $\sin(nx)$ )**

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$ .

**Exercice 8 – (Divisibilité)**

Déterminer les entiers relatifs  $n$  tels que  $n - 4$  divise  $3n - 17$ .

**Exercice 9 – (Somme des  $n$  premiers entiers)**

Soit  $n \geq 1$ . Déterminer le reste dans la division euclidienne par  $n$  de la somme des  $n$  premiers entiers strictement positifs.

**Exercice 10 – (Division euclidienne avec des grands nombres)**

Soit  $a, b$  et  $n$  trois entiers supérieurs ou égaux à 1. On note  $q$  le quotient de la division euclidienne de  $a - 1$  par  $b$  et  $r$  le reste. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de  $ab^n - 1$  par  $b^{n+1}$ .