Exercice 1 – ***(Fonction coercive)***

On dit qu'une fonction $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est coercive si elle est continue et que $\lim_{||x|| \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Soit f une fonction coercive.

1. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que si $||x|| > M$ alors $f(x) \geq |f(0)| + 1$
2. En déduire qu'il existe $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x^*) \leq f(x)$
3. Si on ajoute que f est de classe C^1, que dire de $\nabla f(x^*)$?

Exercice 2 – ***(Différentielles)***

On admet qu'on peut appliquer toutes les définitions du chapitre à $M_n(\mathbb{R})$ à la place de $\mathbb{R}^p$.

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$
Soit $\phi : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ définie par $M \mapsto M^{-1}$

1. Justifier que f est de classe C^1 puis déterminer la différentielle de f.
2. Pourquoi est-il possible de calculer la différentielle de ϕ en I_n ?
3. Le faire (<u>indication :</u> inverser $(I_n + H)$).

Exercice 3 – ***(D'Alembert 1D)***

Soit $c \neq 0$. On cherche les solutions de classe C^2 de l'équation

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Pour celà, utiliser le changement de variables : $u = x + at$ et $v = x + bt$.

Exercice 4 – ***(Déterminant)***

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction D_n telle que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \ddots & \vdots \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$$

1. Montrer que D_n est une fonction dérivable et calculer $D_n^{'}$
2. En déduire une expression de D_n

Exercice 5 – ***(Déterminant 2)***

Soit u, v, w trois fonctions de classe $C^2([a,b]) \mapsto \mathbb{R}$ (avec $a < b$).

On suppose que $\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{vmatrix} = 0$

1. Démontrer qu'il existe $c \in]a,b[$ $\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0$

Exercice 6 – ***(Dériver la norme)***

Soit I un intervalle, E un espace euclidien et $f : I \mapsto \mathbb{E}$ dérivable. On suppose que f ne s'annule pas et on pose $g = ||f||$

1. Démontrer que g est dérivable
2. Calculer g'

Exercice 7 – ***(Fonction vectorielle linéaire)***

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dérivable. On suppose que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(\lambda x) = \lambda f(x)$

1. Démontrer que $f(0) = 0$ en précisant les "0".
2. Démontrer que f est linéaire.
