Exercice 1 – ***(Suite exacte)***

On dit qu'une suite d'application linéaires

$$\{0\} \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \xrightarrow{f_n} \{0\} \qquad (1)$$

est exacte si on a $\forall k \in [\![0, n-1]\!], Imf_k = Kerf_{k+1}$

1. Dans ce cas, montrer que si tous les E_k sont de dimension finie, on a la formule suivante (Euler-Poincaré) :
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dim E_k = 0$$

Exercice 2 – ***(Théorème de Weierstrass trigonométrique)***

Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et 2π-périodiques. Pour f et g dans E, on définit le produit de convulotion par $f * g := \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt$.

1. Montrer que $f * g$ est un élément de E.
2. Que dire de $f * g$ si f est C^∞ ?

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application $u_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = c_n(1 + cos(x))^n$ où $c_n \in \mathbb{R}$ est choisi tel que $\int_0^{2\pi} u_n(t)dt = 1$. On pose alors $f_n = f * u_n$. On va montrer que (f_n) CVU vers f sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $\epsilon > 0$, on suppose qu'il existe $\eta \in]0, \pi[$ tel que si $|s-t| \leq \eta$ alors $|f(s) - f(t)| \leq \epsilon$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| u_n(t)dt \leq \epsilon + 4||f||_\infty \int_\eta^\pi u_n(t)dt$
4. Justifier que $\int_0^\pi (1 + cos(t))^n sin(t)dt \leq \int_0^\pi (1 + cos(t))^n dt$.
5. Conclure.

Exercice 3 – ***(Intégrale de Gauss)***

On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Relier f' à $F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ et en déduire $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$

Exercice 4 – ***(Projecteurs)***

Soient p_1 et p_2 deux projecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Soit p un projecteur. Montrer que $tr(p) = rg(p)$
2. Montrer que $Im(p_1 + p_2) = Im(p_1) \oplus Im(p_2)$ et $ker(p_1 + p_2) = ker(p1) \cap ker(p2)$
3. Montrer que $p_1 + p_2$ est un projecteur $\Leftrightarrow p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$

Exercice 5 – ***(Vandermonde)***

Soient $a_0, a_1, ..., a_n$ des réels non nuls deux à deux distincts. On note $\mathbb{R}_n[X]^* = \{f : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}$, où f est linéaire$\}$, le dual de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie.

1. Montrer que $V(a_0, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} a_0 & a_0^2 & \ldots & a_0^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n+1} \end{vmatrix} = a_0 a_1 ... a_n \prod_{i>j}(a_i - a_j)$. Que dire de la valeur de ce déterminant ?
2. Soit $j \in [\![0, n]\!]$. On note $F_j : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}$ l'application définie par $F_j(P) = \int_0^{a_j} P(x)dx$. Montrer que $(F_0, F_1, ..., F_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$.

Exercice 6 – ***(CVD et suite)***

Soit $d > 0$. Soit $g \in C^0([0, d])$ telle que $g(0) \neq 0$

1. Rappeler la caractérisation séquentielle de la limite.
2. Construire une fonction g_t continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, bornée, telle que $\int_0^d e^{-tx^2} g(x)dx = \frac{1}{t} \int_0^{+\infty} e^{-x} g_t(x)dx$
3. Montrer que $\int_0^d e^{-tx^2} g(x)dx \underset{t \mapsto +\infty}{\sim} \frac{g(0)}{t}$

(Questions de cours)

— Limite de ζ en $+\infty$.

— ζ est C^∞ sur $]1, +\infty[$.

— $\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$