Corrigés colle 5 : (semaine du 17/10).

Exercice 1 :

Voir semaine précédente. Pour l'ajout en question 2) ;

Comme $u^p = 0$ alors X^p est un polynôme annulateur, mais alors $Sp(u) \subset \{0\}$. On a aussi que $0 \in Sp(u)$ car u n'est pas inversible. Si u l'était, u^p le serait or $u^p = 0$ non inversible. Ainsi, $Sp(u) = \{0\}$.
Le théorème de Cayley-Hamilton donne $u^n = 0$.

Exercice 2 :

1) Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $AB = A(BA)A^{-1}$

donc AB et BA sont semblables donc ont même polynômes caractéristique [Si M, N semblables $M = PNP^{-1}$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$\det(M - \lambda I_n) = \det(P(N - \lambda I_n)P^{-1}) = \det(P)\det(P^{-1})\det(N - \lambda I_n)$
$= \det(N - \lambda I_n)$.]

2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on construit une suite d'éléments de $GL_n(\mathbb{R})$ (donc une suite de matrices inversibles) qui converge vers M.

$\forall p \geq 1$, posons $M_p = M - \frac{1}{p} I_n$.

- D'une part, $M_p \xrightarrow[p \to \infty]{} M$.

- D'autre part, à partir d'un certain rang, les M_p sont inversibles. En effet, $\chi_M\left(\frac{1}{p}\right) = \det(M_p)$.

Or $d^\circ \chi_M = n$ donc χ_M a au plus n racines. Ainsi,
$\exists p_0 \in \mathbb{N} \mid \forall p \geq p_0,\ M_p \in GL_n(\mathbb{R})$.

---

3) L'idée est de se ramener à la question 1.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $P(\lambda) = \det(XI_n - (A - \lambda I)B)$

$Q(\lambda) = \det(XI_n - B(A - \lambda I_n))$

P et Q sont des polynômes donc des fonctions continues.

$P(\lambda) = Q(\lambda)$ pour une infinité de λ par densité et d'après la question 1.

En particulier, $P(0) = Q(0)$, d'où le résultat.

Exercice 3 : ϕ est bien un endomorphisme.

Calculons ses éventuelles valeurs propres :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq 0$ tel que $\phi(M) = \lambda M$.

donc ${}^tM = \lambda M$. i.e $\begin{cases} \forall i \in [\![1;n]\!], \ m_{ii} = \lambda m_{ii} \\ \forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2 / i \neq j, \ m_{ji} = \lambda m_{ij} \end{cases}$

donc $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $m_{ij} = \lambda^2 m_{ij}$ donc $\lambda = \pm 1$.

* Si $\lambda = -1$, $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $m_{ji} = -m_{ij}$ donc M est antisymétrique.

-1 est donc valeur propre pour les vecteurs propres de $\text{Vect}\left((E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq j < i \leq n}\right)$. L'espace propre associé est de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$

* Si $\lambda = 1$: $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]$, $m_{ji} = m_{ij}$ donc M symétrique.

1 est valeur propre pour les vecteurs propres $\text{Vect}(E_{ii}, E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i \leq j \leq n}$

L'espace propre associé est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$

On a bien $n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$ donc ϕ est diagonalisable (CNS)

Exercice 4 : Voir semaine précédente

Exercice 5 : Idem

Exercice 6 : Voir semaine précédente sauf la question 1)

1) Si $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$,

alors $\chi_{M_\theta} = \begin{vmatrix} X-\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & X-\cos(\theta) \end{vmatrix} = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$

de discriminant $\Delta = 4(\cos^2(\theta) - 1) \leq 0$

- Si $\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\Delta = 0$ et la racine double de χ_{M_θ} est $\lambda = 1$ donc $M_\theta = id$.

- Si $\theta = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $\Delta = 0$ et la racine double de χ_{M_θ} est $\lambda = -1$ donc $M_\theta = -id$

- Sinon, χ_{M_θ} n'admet pas de racines réelles, donc pas de valeurs propres réelles. Utiliser ceci pour la question 3) ; les seuls espaces stables sont alors $\{0\}$ et $\mathbb{R}^2$.