Exercice 1 – ***(Intégrale à paramètres)***

Soit f continue et intégrable sur R. On suppose qu'il existe $M > 0$ telle que, pour tout $x > 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|e^{itx}-1|}{|x|}|f(t)|dt \leq M$

1. Montrer que $t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Limite en 0^+ de $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}-1}{x} f(t)dt$

Exercice 2 – ***(Théorème de Weierstrass trigonométrique)***

Soit E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et 2π-périodiques. Pour f et g dans E, on définit le produit de convulotion par $f * g := \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt$.

1. Montrer que $f * g$ est un élément de E.
2. Que dire de $f * g$ si f est C^∞ ?

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application $u_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = c_n(1 + cos(x))^n$ où $c_n \in \mathbb{R}$ est choisi tel que $\int_0^{2\pi} u_n(t)dt = 1$. On pose alors $f_n = f * u_n$. On va montrer que (f_n) CVU vers f sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $\epsilon > 0$, on suppose qu'il existe $\eta \in]0, \pi[$ tel que si $|s - t| \leq \eta$ alors $|f(s) - f(t)| \leq \epsilon$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|u_n(t)dt \leq \epsilon + 4||f||_\infty \int_\eta^\pi u_n(t)dt$
4. Justifier que $\int_0^\pi (1 + cos(t))^n sin(t)dt \leq \int_0^\pi (1 + cos(t))^n dt$.
5. Conclure.

Exercice 3 – ***(Intégrale de Gauss)***

On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. Relier f' à $F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}dt$ et en déduire $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$

Exercice 4 – ***(CVD et suite)***

Soit $d > 0$. Soit $g \in C^0([0, d])$ telle que $g(0) \neq 0$

1. Rappeler la caractérisation séquentielle de la limite.

2. Construire une fonction g_t continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, bornée, telle que $\int_0^d e^{-tx^2} g(x)dx = \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} e^{-x} g_t(x)dx$

3. Montrer que $\int_0^d e^{-tx^2} g(x)dx \underset{t\mapsto+\infty}{\sim} \frac{g(0)}{t}$

Exercice 5 – ***(Convergence uniforme ?)***

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|f(t)| \leq \frac{C}{1+t^2}.$$

Pour tout $h > 0$, on pose :

$$S(h) = h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh).$$

On fixe $h > 0$, et on considère la fonction

$$\begin{array}{rccc} \phi_h : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & f\left(\left\lfloor \frac{t}{h} \right\rfloor h\right) \end{array}.$$

1. Montrer que $S(h) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \phi_h(t)dt$.
2. Montrer que, pour tous $h \in]0; 1]$ et $t \in [1; +\infty[$, on a :
$$|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{1+(t-1)^2}.$$
3. En déduire que
$$S(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t)dt.$$

Exercice 6 – ***(Intégrale à paramètres 2)***

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition D et démontrer que F est continue sur D.

2. Démontrer que F est de classe C^1 sur $]1, \infty[$ et que $\forall x > 1, F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2}(\frac{1}{t^2} - 1)dt$

3. Limite de F en $+\infty$

4. On suppose que F admet une limite l en 1^+. Démontrer que pour tout $A > 0$ et pour tout $x > 1$, on a : $l \geq \int_1^A \frac{dt}{1+t^x}$

5. En déduire que $F(x) \underset{x\to 1^+}{\to} +\infty$