Exercice 1 – ***(Système)***

Trouver l'ensemble des réels x tels que
$$\begin{cases} 2\cos(x) - \sin(x) & = & \sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ \cos(x) + 2\sin(x) & = & \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{cases}$$

Exercice 2 – ***($\pi/12$)***

Déterminer la valeur de $\sin(\pi/12)$ et $\cos(\pi/12)$

Exercice 3 – ***(Périodicité)***

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \cos(x) + \cos(\alpha x)$. On souhaite montrer que f est périodique si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$.

1. On suppose que $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Montrer que f est périodique.
2. On suppose que $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Résoudre l'équation $f(x) = 2$. En déduire que f n'est pas périodique.
3. Conclure.

Exercice 4 – ***(Somme de fonctions hyperboliques)***

$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, montrer que :

1. $sh(x + y) = sh(x)ch(y) + ch(x)sh(y)$
2. $ch(x + y) = ch(x)ch(y) + sh(x)sh(y)$

Exercice 5 – ***(Inégalités de fonctions hyperboliques)***

$\forall x \in \mathbb{R}$, montrer que :

1. $sh(x) \geq x$
2. $ch(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$

Exercice 6 – ***(Equation)***

Résoudre l'équation $ch(x) = 2$.

Exercice 7 – ***(Majoration de $\sin(nx)$)***

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(nx)| \leq n|\sin(x)|$.

Exercice 8 – ***(Divisibilité)***

Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $3n - 17$.

Exercice 9 – ***(Somme des n premiers entiers)***

Soit $n \geq 1$. Déterminer le reste dans la division euclidienne par n de la somme des n premiers entiers strictement positifs.

Exercice 10 – ***(Division euclidienne avec des grands nombres)***

Soit a, b et n trois entiers supérieurs ou égaux à 1. On note q le quotient de la division euclidienne de $a - 1$ par b et r le reste. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1}.

Exercice 11 – ***(Une caractérisation des éléments de $\mathbb{U}$)***

Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$.
Montrer que $|z| = 1 \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$

Exercice 12 – ***(Une somme complexe...)***

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x + ky)$.

Exercice 13 – ***(Racine carré d'un complexe)***

Déterminer les racines carrés de $Z = \sqrt{3} + i$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique. En déduire la valeur de $cos(\frac{\pi}{12})$.
Note : Une racine carré d'un nombre complexe z est un nombre complexe w tel que $w^2 = z$.
