Exercice 1 – ***(CVD et suite)***

Soit $d > 0$. Soit $g \in C^0([0,d])$ telle que $g(0) \neq 0$

1. Rappeler la caractérisation séquentielle de la limite.
2. Construire une fonction g_t continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, bornée, telle que $\int_0^d e^{-tx^2} g(x)dx = \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} e^{-x} g_t(x)dx$
3. Montrer que $\int_0^d e^{-tx^2} g(x)dx \underset{t\mapsto+\infty}{\sim} \frac{g(0)}{t}$

Exercice 2 – ***(Série de fonctions)***

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = a_n x^n (1-x)$ où $x \in [0,1]$

1. Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.
2. Montrer que cette série converge normalement si, et seulement si, il y a convergence de la série $\sum \frac{a_n}{n}$.
3. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément si, et seulement si, $a_n \to 0$.

Exercice 3 – ***(Convergence uniforme ?)***

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+2^n n x^2}$.

1. Etudier la CVS.
2. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$ et la limite de I_n. En déduire que la suite (f_n) n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$.
3. Prouver la non CVU d'une autre façon.

Exercice 4 – ***(Jolie relation)***

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x)$ où $x \in]0,1]$ et $u_n(0) = 0$.

1. Calculer $\sum u_n(x)$.
2. Montrer que $\sum u_n$ CVU sur $[0,1]$.
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$

Exercice 5 – ***(Limite d'une série)***

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|f(t)| \leq \frac{C}{1+t^2}.$$

Pour tout $h > 0$, on pose :

$$S(h) = h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh).$$

On fixe $h > 0$, et on considère la fonction

$$\begin{array}{cccc} \phi_h : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & f\left(\left\lfloor \dfrac{t}{h} \right\rfloor h\right) \end{array}.$$

1. Montrer que $S(h) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \phi_h(t)dt$.
2. Montrer que, pour tous $h \in]0;1]$ et $t \in [1; +\infty[$, on a :
$$|\phi_h(t)| \leq \frac{C}{1+(t-1)^2}.$$
3. En déduire que
$$S(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(t)dt.$$

Exercice 6 – ***(CVS et CVU)***

Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (f_n) donnée par $f_n(x) = \sin^n(x)\cos(x)$.

Questions de cours

— ξ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$

— Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de la suite de terme général $x_n = \displaystyle\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\frac{\alpha}{x}}\,\mathrm{d}x$

— $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$