EXO 1

Exercice 48 : [énoncé]
f étant un automorphisme, $\dim f(F) = \dim F$ donc $f(F) = F$.
Soit $y \in f(F^\perp)$ on peut écrire $y = f(x)$ avec $x \in F^\perp$.
Soit $v \in F$ on peut écrire $v = f(u)$ avec $u \in F$.
On a alors

$$(y \mid v) = (f(x) \mid f(u)) = (x \mid u) = 0.$$

Ainsi $f(F^\perp) \subset F^\perp$, puis par égalité des dimensions $f(F^\perp) = F^\perp$.

EXO 2

1.

Exercice 17 : [énoncé]
$(\Longrightarrow)$ Via Pythagore
$(\Longleftarrow)$ Si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ alors $2\lambda(x \mid y) + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0$.
Si, par l'absurde $(x \mid y) \neq 0$ alors $2\lambda(x \mid y) + \lambda^2\|y\|^2 \underset{\lambda \to 0}{\sim} 2\lambda(x \mid y)$ qui change de signe en 0. Absurde.
Par suite $(x \mid y) = 0$.

2.

Retour élève

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible et semblable à son inverse. Montrer que $\mathrm{tr}(A^2) \geqslant n$.

Corrigé

Le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_(\mathbb{R})$ est défini par :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \ : \ \langle A \mid B \rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$$

Vu les hypothèses :

$$\langle A \mid A^{-1} \rangle = \mathrm{tr}({}^tAA^{-1}) = \mathrm{tr}(AA^{-1}) = \mathrm{tr}(I_n) = n$$

et (Cauchy-schwarz) :

$$|\langle A \mid A^{-1} \rangle| = n \leqslant \|A\| \times \|A^{-1}\| = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)} \times \sqrt{\mathrm{tr}({}^tA^{-1}A^{-1})} = \sqrt{\mathrm{tr}(A^2)}\sqrt{\mathrm{tr}(A^{-2})} \text{ car } A \in S_n(\mathbb{R})$$

Or A semblable à A^{-1} donc A^2 est semblable à A^{-2} et la trace étant un invariant de similitude $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(A^{-2})$. On a donc :

$$\boxed{n \leqslant \mathrm{tr}(A^2)}$$

3.

Exercice 25 : [énoncé]
Si $X \in \operatorname{Ker} A$ alors $X \in \operatorname{Ker} {}^tAA$.
Inversement, si $X \in \operatorname{Ker} {}^tAA$ alors ${}^tAAX = 0$ donc ${}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)AX = 0$ d'où $AX = 0$ puis $X \in \operatorname{Ker} A$.
Ainsi

$$\operatorname{Ker}({}^tAA) = \operatorname{Ker} A$$

puis par la formule du rang

$$\operatorname{rg}({}^tAA) = \operatorname{rg} A.$$

EXO 3

Exercice 53 : [énoncé]
Pour $X = {}^t\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, on vérifie

$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} = {}^tXAX.$$

Or ${}^tXAX = (X \mid AX)$ donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|{}^tXAX\right| \leq \|X\|\|AX\|.$$

Or $\|X\| = \sqrt{n}$ et $\|AX\| = \|X\| = \sqrt{n}$ car $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ donc

$$\left|\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}\right| \leq n.$$

EXO4

(a) On a

$$\|{}^t AX\|^2 = {}^t X A {}^t AX = \langle X, A {}^t AX\rangle.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|{}^t AX\|^2 = \langle X, A {}^t AX\rangle \leq \|X\| \|A {}^t AX\| \leq \|X\| \|{}^t AX\|.$$

Ainsi

$$\|{}^t AX\| \leq \|X\|$$

et ce que ${}^t AX = 0$ ou non.

(b) Si $AX = X$ alors

$$\|{}^t AX - X\|^2 = \|{}^t AX\|^2 - 2\langle {}^t AX, X\rangle + \|X\|^2 \leq 2(\|X\|^2 - {}^t XAX) = 0.$$

On en déduit ${}^t AX = X$.

(c) Soit $X \in \operatorname{Ker}(A - I_n) \cap \operatorname{Im}(A - I_n)$.
On a $AX = X$ (et donc ${}^t AX = X$) et il existe $Y \in E$ vérifiant $X = AY - Y$.

$$\|X\|^2 = \langle X, AY - Y\rangle = {}^t XAY - {}^t XY.$$

Or

$${}^t XAY = {}^t({}^t AX)Y = {}^t XY$$

et donc $\|X\|^2 = 0$. Ainsi

$$\operatorname{Ker}(A - I_n) \cap \operatorname{Im}(A - I_n) = \{0\}.$$

Enfin, le théorème du rang

$$\dim \operatorname{Ker}(A - I_n) + \operatorname{rg}(A - I_n) = \dim E$$

permet de conclure

$$E = \operatorname{Ker}(A - I_n) \oplus \operatorname{Im}(A - I_n).$$

Exo 5

1. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. Alors on a

$$\mathrm{Tr}(u)=\sum_{i=1}^n \langle u(e_i),e_i\rangle.$$

Mais si on pose $x=e_1+\cdots+e_n$, on a aussi $\langle u(e_i),e_i\rangle=\langle u(e_i),x\rangle$ puisque $u(e_i)$ est proportionnel à e_i. On en déduit donc que

$$\sum_{i=1}^n \langle u(e_i),x\rangle=0 \implies \langle u(x),x\rangle=0.$$

2. On va raisonner par récurrence sur n, le résultat étant clairement vrai si $n=1$. Supposons maintenant le résultat vrai au rang $n-1$ et prouvons-le au rang n. Soit x le vecteur donné par la question précédente. On peut supposer, quitte à le diviser par sa norme, ce qui ne change rien à la propriété $\langle u(x),x\rangle=0$, que $\|x\|=1$. Posons $F=\mathrm{vect}(x)$ et $G=\mathrm{vect}(x)^\perp$. Considérons aussi $(y_1,\dots,y_{n-1})$ une base orthonormée de G. Dans la base orthonormée $(x,y_1,\dots,y_{n-1})$, la matrice de u s'écrit

$$\begin{pmatrix}0&*\\ *&B\end{pmatrix}$$

où B est symétrique. Soit v l'endomorphisme symétrique de G dont la matrice dans la base orthonormée $(y_1,\dots,y_{n_1})$ est B. Alors $\mathrm{Tr}(v)=0$ et par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée $(x_1,\dots,x_{n-1})$ de G telle que la matrice de v dans cette base a tous ses coefficients diagonaux nuls. Il en est de même de la matrice de u dans la base orthonormée $(x,x_1,\dots,x_{n-1})$.

EXO 6

(a) En notant $X = (x_1, \ldots, x_n)$, on obtient

$$ {}^tXAX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_ix_j $$

et donc

$$ {}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{i,j}x_ix_j. $$

Par l'inégalité triangulaire

$$ \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{i,j}x_ix_j\right| \leq \sum_{i=1}^{n}|x_i| \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{i,j}||x_j|. $$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$ \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{i,j}x_ix_j\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{i,j}||x_j|\right)^2} $$

et une nouvelle fois

$$ \left(\sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{i,j}||x_j|\right)^2 \leq \sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{i,j}^2 \sum_{j=1,j\neq i}^{n} x_j^2 \leq \sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{i,j}^2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2. $$

On obtient donc

$$ \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{i,j}x_ix_j\right| \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{i,j}^2 < \sum_{i=1}^{n} x_i^2 $$

puis

$$ {}^tXAX > \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0. $$

(b) Si $X \in \operatorname{Ker} A$ alors ${}^tXAX = 0$ et donc $X = 0$ en vertu de ce qui précède.