Exercice 1 – *(Nilpotence)*
Un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est un endomorphisme tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. Le plus petit de ces indices est appelé indice de nilpotence. On note n la dimension de E.

1. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice p. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ soit libre.
2. Montrer que $p \leq n$ et que $u^n = 0$. Une fois que c'est fait, redémontrer cette dernière égalité avec le théorème de Cayley-Hamilton.
3. Que vaut $rg(u)$ si $p = n$?
4. On appelle F le sous espace stable engendrée par la famille de la question 1). Ecrire la matrice de u_F, la restriction de u à F.

Exercice 2 – *(Polynômes caractéristiques)*

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On souhaite montrer que AB et BA ont même polynôme caractéristique.

1. Montrer le résultat dans le cas où $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.
3. Conclure.

Exercice 3 – *(Diagonalisation d'un endomorphisme)*

Soit $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto {}^tM$. ϕ est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 – *(Matrice de trace nulle)*

1. Soit E un espace vectoriel non nul. Soit f un endomorphisme de E tel que $\forall x \in E$, la famille $(x, f(x))$ soit liée. Montrer que f est une homotéthie.

2. Soit A une matrice de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont nuls.

Exercice 5 – *(Vandermonde)*

Soient $a_0, a_1, ..., a_n$ des réels non nuls deux à deux distincts. On note $\mathbb{R}_n[X]^* = \{f : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}$, où f est linéaire$\}$, le dual de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie.

1. Montrer que $V(a_0, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n+1} \end{vmatrix} = a_0 a_1 ... a_n \prod_{i>j}(a_i - a_j)$. Que dire de la valeur de ce déterminant ?

2. Soit $j \in [\![0, n]\!]$. On note $F_j : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}$ l'application définie par $F_j(P) = \int_0^{a_j} P(x)dx$. Montrer que $(F_0, F_1, ..., F_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$.

Exercice 6 – *(Sous-espaces stables)*
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. On appelle rotation du plan tout endomorphisme dont la matrice dans une base orthonormée du plan s'écrit $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Réduire les rotations du plans.
2. Montrer qu'une droite F engendrée par un vecteur u est stable par f si et seulement si u est un vecteur propre de f.
3. Montrer qu'il existe au moins deux sous espaces de E stables par f. Trouver un exemple d'endomorphisme (de $\mathbb{R}^2$) n'admettant que deux sous-espaces stables.
4. Montrer que si E est de dimension finie $n \geq 2$, et si f est non nul et non injectif, alors il existe au moins 3 sev stables si n est pair, et 4 si n est impair.

(Questions de cours)

- $\begin{array}{cccc} \phi & : & \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ & & P & \mapsto & (P(x_0), ..., P(x_n)) \end{array}$ est un isomorphisme. Conséquences (Lagrange).
- Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.
- u est diagonalisable $\Leftrightarrow$ χ_u est scindé et $\forall \lambda \in (u), m_\lambda = \dim(E_\lambda)$