

Exercice 1 – (Isométrie)

Soit F un sev d'un espace vectoriel euclidien E , et $f \in O(E)$ telle que $f(F) \subset F$.

Montrer que $f(F) = F$ et $f(F^\perp) = F^\perp$

Exercice 2 – (Petits résultats)

Chaque question est indépendante.

1. Soit A symétrique réelle inversible et semblable à son inverse. Montrer que $\text{tr}(A^2) \geq n$.
2. Soit E espace euclidien et $x, y \in E$. Montrer que x et y sont orthogonaux ssi $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|x + \lambda y\| \geq \|x\|$.
3. Soit A matrice carrée de taille n . Montrer que $\text{rg}(A^T A) = \text{rg}(A)$

Exercice 3 – (Condition d'inversibilité)

Soit A une matrice réelle vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_{i,i} \geq 1, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j}^2 < 1$$

1. Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, X^T A X > 0$
2. En déduire que A est inversible.

Exercice 4 – (Loi jointe)

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeur dans \mathbb{N} . On suppose que la loi jointe de X et Y vérifie :

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X = j, Y = k) = a \frac{j+k}{2^{j+k}}$$

1. Déterminer la valeur de a .
2. Déterminer les lois marginales de X et Y .
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$

Exercice 5 – (Fonctions génératrices)

On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir et $q = 1 - p$ d'échouer définissant une suite de variables de Bernoulli indépendantes $(X_n)_{n \geq 1}$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note S_m la variable aléatoire déterminant le nombre d'essais jusqu'à l'obtention de m succès :

$$S_m = k \iff X_1 + \dots + X_k = m \text{ et } X_1 + \dots + X_{k-1} < m$$

1. Déterminer la loi et la fonction génératrice de S_1 .
 2. Déterminer la loi et la fonction génératrice de $S_m - S_{m-1}$, pour $m \geq 2$.
 3. Déterminer la fonction génératrice de S_m , puis sa loi.
- Indication :* On admet que $\forall r \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1; 1[$,

$$\frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{k=r}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{k-r}$$

Exercice 6 – (Moments, pour 5/2)

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. Sous réserve d'existence, on appelle fonction génératrice des moments de X l'application :

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}).$$

1. Déterminer M_X si X suit une loi de Poisson de paramètre λ .
2. On suppose que M_X est définie sur l'intervalle $] -a, a[, a > 0$. Montrer qu'elle est de classe C^∞ sur cet intervalle et que $\mathbb{E}(X^n) = M_X^{(n)}(0)$.

Questions de cours

- Soit p un projecteur. Montrer que p est orthogonal ssi p est autoadjoint.
- Loi faible des grands nombres
- Fonction génératrice d'une loi géométrique.