Exercice 1 – ***(Isométrie)***

Soit F un sev d'un espace vectoriel euclidien E, et $f \in O(E)$ telle que $f(F) \subset F$.
Montrer que $f(F) = f$ et $f(F^{\perp}) = F^{\perp}$

Exercice 2 – ***(Petits résultats)***

Chaque question est indépendante.

1. Soit A symétrique réelle inversible et semblable à son inverse. Montrer que $tr(A^2) \geq n$.
2. Soit E espace euclidien et $x, y \in E$. Montrer que x et y sont orthogonaux ssi $\forall \lambda \in \mathbb{R}, ||x + \lambda y|| \geq ||x||$.
3. Soit A matrice carrée de taille n. Montrer que $rg(A^T A) = rg(A)$

Exercice 3 – ***(Matrice orthogonale)***

Soit A une matrice réelle orthogonale.
Montrer que $\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \right| \leq n$.

Exercice 4 – ***(Matrices colones)***

Soit A une matrice carrée de taille n vérifiant :
$\forall X \in \mathbb{R}^n, ||AX|| \leq ||X||$

1. montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n, ||A^T X|| \leq ||X||$
2. Montrer que si $AX = X$ alors $A^T X = X$
3. Montrer que $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = Ker(A - I_n) \oplus Im(A - I_n)$

Exercice 5 – ***(Endomorphisme de trace nulle)***

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit u un endomorphisme symétrique de E tel que $tr(u) = 0$.

1. Démontrer qu'il existe $x \in E$, non nul, tel que $(u(x), x) = 0$
2. Trouver une BON dans laquelle la matrice de u dans cette base a des éléments diagonaux nuls.

Exercice 6 – ***(Condition d'inversibilité)***

Soit A une matrice réelle vérifiant

$$\forall i \in [\![1; n]\!], a_{i,i} \geq 1, \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} a_{i,j}^2 < 1$$

1. Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, X^T A X > 0$
2. En déduire que A est inversible.

(Questions de cours)

— A symétique réelle et $(X_1, ..., X_n)$ une BON de VEP de A associée à $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, alors $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i X_i^T$

— p est un projecteur orthogonal ssi c'est un endomorphisme autoadjoint.

— Caractérisation d'une isométrie vectorielle par sa matrice dans une BON.