

Exercice 4: Exerc 1a3: voir semaine précédente.

1) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(y) &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-(x+y)}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(y) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-(x+y)}}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \operatorname{sh}(x+y)$$

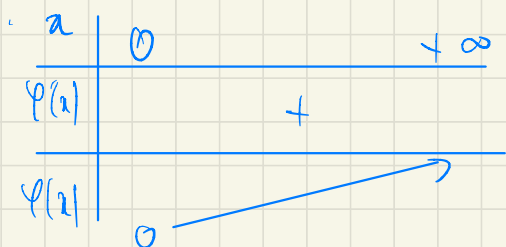
2) même méthode

Exercice 5:

1) Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi(x) = \operatorname{sh}(x) - x$. φ est dérivable

sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi'(x) = \operatorname{ch}(x) - 1$

Or $\operatorname{ch}(0) = 1$ et ch croissante sur \mathbb{R}_+ , alors $\forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi'(x) \geq 0$.



car $\varphi(0) = 0$

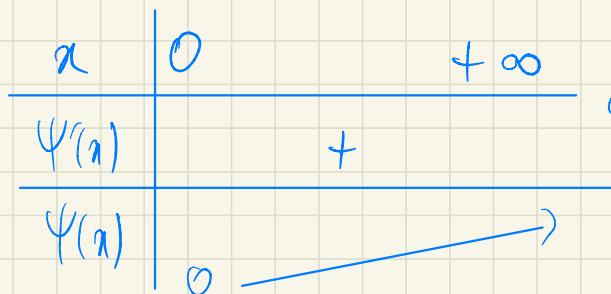
Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi(x) \geq 0$

d'où, $\forall x \in \mathbb{R}_+, \operatorname{sh}(x) \geq x$

2) Posons, $\forall x \in \mathbb{R}_+, \psi(x) = \operatorname{ch}(x) - 1 - \frac{x^2}{2}$. ψ est dérivable.

sur \mathbb{R}_+ . et $\forall x \in \mathbb{R}_+, \psi'(x) = \operatorname{sh}(x) - x$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, \psi'(x) = \varphi(x) \geq 0$



car $\psi(0) = 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, \psi(x) \geq 0$

d'où, $\forall x \in \mathbb{R}_+, \operatorname{ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$

Exercice 6

Soit l'équation d'inconnue x , $\cosh(x) = 2$.

On écrit : $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 4$.

$\Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$.

Posez $X = e^x$ l'équation se écrit : $X^2 - 4X + 1 = 0$

$\Delta = 16 - 4 = 12 > 0$ de solution $X_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$

d'où $X_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$

donc $\begin{cases} e^{x_1} = 2 + \sqrt{3} \\ e^{x_2} = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$ de solutions $\begin{cases} x_1 = \ln(2 + \sqrt{3}) \\ x_2 = \ln(2 - \sqrt{3}) \end{cases}$