Colles PC*1 : Semaine 2.

Exercice 1 :

1) $\forall x > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{|e^{itx} - 1|}{|x|} |f(t)| \leqslant \dfrac{2}{x} |f(t)|$.

Comme $f \in L^1(\mathbb{R})$, l'intégrale existe.

De plus, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|e^{itx} - 1| = |e^{itx/2} - e^{-itx/2}|$

$$= 2 \left| \sin\left(\frac{tx}{2}\right) \right|$$

On utilise l'inégalité classique : $\forall t \in [0; \pi/2]$, $\sin(t) \geqslant \dfrac{2t}{\pi}$
(inégalité de concavité mais simple à montrer)

On la généralise, par imparité : $\forall t \in [-\pi/2; \pi/2]$, $|\sin(t)| \geqslant \dfrac{2|t|}{\pi}$

Ainsi, soit $n \in \mathbb{N}^*$, on prend $x = \dfrac{1}{n}$ dans l'inégalité de l'énoncé, d'où

$$n \geqslant \int_{\mathbb{R}} 2n \left|\sin\left(\frac{t}{2n}\right)\right| |f(t)| \, dt \geqslant \int_{-n\pi}^{n\pi} 2n \left|\sin\left(\frac{t}{2n}\right)\right| |f(t)| \, dt$$

$$\geqslant \int_{-n\pi}^{n\pi} \frac{2|t|}{n} |f(t)| \, dt$$

donc $\displaystyle\int_{-n\pi}^{n\pi} |tf(t)| \leq \frac{\pi M}{2}$ donc $t \mapsto tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$

2) Soit $\psi : (x,t) \longmapsto \dfrac{e^{itx} - 1}{x} f(t)$. défini sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\quad \psi(x,t) \xrightarrow[x \to 0^+]{} itf(t)$

On applique le théorème des accroissements finis à $u \longmapsto e^{iu}$ et on trouve $\underset{\forall t \in \mathbb{R}}{\forall x > 0}$, $|\psi(x,t)| \leq |tf(t)|$

On peut, avec tout ça, appliquer le TCD et conclure :

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = i \int_{\mathbb{R}} tf(t)\,dt$$

Exercice 2 :

1) La fonction $\varphi : (x,t) \mapsto f(x-t)g(t)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$ (par les 2 variables).

donc $f * g$ bien définie.

La 2π-périodicité est immédiate. donc $f * g \in E$.

---

2) Si $f \in \mathcal{C}^\infty$, $\forall t \in [0, 2\pi]$, $x \mapsto \varphi(x,t) \in \mathcal{C}^\infty$

et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}\varphi(x,t) = f^{(k)}(x-t)\,g(t)$

donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \dfrac{\partial^k}{\partial x^k}\varphi(x,t)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^2$ (deux variables)

Donc par théorème de dérivation, $f * g \in \mathcal{C}^\infty$

---

3) Soit $\varepsilon > 0$, on suppose qu'il existe $\eta \in]0, \pi[$ tel que si $|s-t| < \eta$ alors $|f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$.

On sépare l'intégrale en 3 :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)-f(x)|\, u_n(t)\,dt = \int_{-\pi}^{-\eta} + \int_{-\eta}^{\eta} + \int_{\eta}^{\pi}$$

Donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{-\eta} |f(x-t)-f(x)|\, u_n(t)\,dt \leqslant 2\|f\|_\infty \int_{-\pi}^{-\eta} u_n(t)\,dt$

$$\leqslant 2\|f\|_\infty \int_{\eta}^{\pi} u_n(t)\,dt$$

par parité de $t \mapsto u_n(t)$

De même $\displaystyle\int_{\eta}^{\pi} |f(x-t)-f(x)|\, u_n(t)\,dt \leqslant 2\|f\|_\infty \int_{\eta}^{\pi} u_n(t)\,dt$

et $\displaystyle\int_{-\eta}^{\eta} |f(x-t)-f(x)|\, u_n(t)\,dt \leqslant \varepsilon \int_{-\eta}^{\eta} u_n(t)\,dt$

$$\leqslant \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} u_n(t)\,dt = \varepsilon.$$

D'où l'inégalité demandée.

4) $\forall t \in [0;\pi]$, $\sin(t) \leqslant 1$... (sur $\mathbb{R}$ aussi...)

5) $$\int_\eta^\pi U_n(t)\,dt \leqslant \pi\, u_n(\eta) \leqslant \pi\, c_n \left(1+\cos(\eta)\right)^n$$

car u_n décroît sur $[\eta;\pi]$

mais $$\frac{1}{c_n} = \int_0^{2\pi} (1+\cos(t))^n\,dt = 2\int_0^{\pi} (1+\cos(t))^n\,dt \geqslant 2\int_0^{\pi} (1+\cos(t))^n \sin(t)\,dt$$ d'après 4)

et $$\int_0^{\pi} (1+\cos(t))^n \sin(t)\,dt = \left[-\frac{(1+\cos(t))^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\pi} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$$

donc $c_n \leqslant \dfrac{n+1}{2^{n+2}}$ d'où $$\int_\eta^\pi U_n(t)\,dt \leqslant \pi\frac{(n+1)}{4}\left(\frac{1+\cos(\eta)}{2}\right)^n$$

or $\left(\dfrac{1+\cos(\eta)}{2}\right) < 1$ donc $$\lim_{n\to\infty}\left(\pi\frac{(n+1)}{4}\left(\frac{1+\cos(\eta)}{2}\right)^n\right) = 0$$

croissances comparées

On, $\forall x \in \mathbb{R}$, $$|f_n(x) - f(x)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))\,U_n(t)\,dt\right|$$
$$\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|\,U_n(t)\,dt$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + \pi \|f\|_\infty (n+1) \left(\frac{1+\cos(x)}{2} \right)^n$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, si n assez grand, on a $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2\varepsilon$

autrement dit, (f_n) CVU vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

1) Soit $\varphi(x,t) : \longmapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ définie sur $\mathbb{R}\times[0,1]$.

- $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

et $\forall (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,1]$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = -2x e^{-x^2(1+t^2)}$.

- $t \mapsto \varphi(x,t)$ est intégrable sur $[0,1]$.

- Soit $[a,b]\subset\mathbb{R}$, on a la domination :

$$\begin{cases}\forall x\in[a,b] \\ \forall t\in[0,1]\end{cases}, \quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2b\, e^{-a^2(1+t^2)} \in L^1[0,1]$$

Donc le théorème de dérivation s'applique $\Rightarrow f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

et $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = -2x\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt$

$$= -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,du \quad (u = xt)$$

2) $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x) = -2F'(x)F(x)$.

Comme f et F sont $\mathcal{C}^1$, on a ; $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$f(x) - f(0) = -\int_0^x 2F'(t)F(t)\,dt = F(0)^2 - F(x)^2 = -F(x)^2$$

Or $F \geqslant 0$ donc $F = \sqrt{f(0) - f(x)}$

et $f(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^1 = \pi/4$

Avec la domination $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$, $0 \leqslant \varphi(x,t) \leqslant \frac{1}{1+t^2}$

et le fait que $t \mapsto \frac{1}{1+t^2} \in L^1([0,1])$ et que $\varphi(x,t) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$,

on peut appliquer le TCD et montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

Au final, $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

Exercice 4 :

1) $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff \forall$ suite (x_n) telle que $(x_n) \to a$, alors $f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell$

2) En posant $g_t \begin{cases} [0;+\infty[\to \mathbb{R} \\ u \mapsto g\left(\frac{u}{t}\right) \mathbb{1}_{[0;ta]} \end{cases}$

On a que $g_t \in \mathcal{C}_{pm}([0;+\infty[)$, bornée car g est $\mathcal{C}^0$ sur un segment.

De plus $\int_0^a e^{-tx} g(x)\,dx = \frac{1}{t} \int_0^{\infty} e^{-u} g_t(u)\,du$

3) Utilisons le critère séquentiel de la limite ainsi que le TCD.

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[0;+\infty[$ telle que $t_n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$

Posons $f_n : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$
$u \to e^{-u} g_{t_n}(u)$

- $\forall n,\ f_n \in \mathcal{C}_{pm}([0,+\infty[)$
- Soit $u \in [0,+\infty[$, $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N$, $u \leq t_n d$

Ainsi, $\forall n \geq N$, $f_n(u) = e^{-u} g\left(\frac{u}{t_n}\right)$

g étant continue en 0, $f_n(u) \xrightarrow{cvs} e^{-u} g(0) = f(u)$

- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in [0,+\infty[$, $|f_n(u)| \leq e^{-u} \|g\|_\infty$

et $u \mapsto e^{-u}\|g\|_\infty \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Donc, le TCD donne que

$$\int_0^{+\infty} e^{-u} g_{t_n}(u)\,du \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-u} g(0)\,du = g(0)$$

Ceci étant vrai pour toute suite (t_n) qui tend vers $+\infty$,

alors $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-u} g_t(u)\,du \xrightarrow[t\to+\infty]{} g(0)$ par 1) con $g(0) \neq 0$.

Ainsi, $\lim_{t \to \infty} \left(\int_0^d e^{-tx} g(x)\,dx \, \frac{t}{g(0)} \right)$

$= \lim_{t \to \infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-u} g_t(u)\,du \right) \times \frac{1}{g(0)} = 1$

donc $\int_0^d e^{-tx} g(x)\,dx \underset{t \to \infty}{\sim} \frac{g(0)}{t}$

Exercice 5 :

1) Si $x = 0$, $f_n(x) = 0$.

Si $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{2^n x}{n 2^n x^2} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

donc (f_n) CVS vers 0.

2) $I_n = \left[\dfrac{1}{2n} \ln(1 + 2^n n x^2) \right]_0^1 = \dfrac{1}{2n} \ln(1 + 2^n n)$

donc $I_n \underset{n \to \infty}{\sim} \dfrac{\ln(2^n n)}{2n} = \dfrac{n \ln(2) + \ln(n)}{2n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ln(2)}{2}$

En supposant par l'absurde que (f_n) CVU sur $[0,1]$ vers 0, on aurait, d'après le TIL,

$$\frac{\ln(2)}{2} = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^1 \lim_n f_n(t)\,dt = 0.$$

Absurde. Donc (f_n) ne CVU pas sur $[0,1]$.

3) Prenons $x_n = \frac{1}{2^n}$, alors $f_n(x_n) = \frac{1}{1+\frac{n}{2^n}} \xrightarrow[n]{} 1$

Donc pour n assez grand, on a $f_n(x_n) \geqslant \frac{1}{2}$

et donc $\|f_n - 0\|_\infty \geqslant f_n(x_n) \geqslant 1/2$

ce qui montre que (f_n) ne CVU pas sur $[0,1]$.

Exercice 6 :

1. Remarquons pour commencer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^x}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On doit juste traiter le problème au voisinage de $+\infty$. Mais, si $x < 0$, t^x tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Ainsi,

$$\frac{1}{1+t^x} \to_{t \to +\infty} 1$$

et l'intégrale impropre ne converge pas au voisinage de $+\infty$. Si $x = 0$, la fonction est constante et son intégrale ne converge pas. Enfin, si $x > 0$, on a

$$\frac{1}{1+t^x} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^x}.$$

Puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}$ converge si et seulement si $x > 1$, et par comparaison à une fonction positive, l'intégrale est convergente si et seulement si $x > 1$. Autrement dit, le domaine de définitior de f est $]1, +\infty[$. Fixons ensuite $[a, b] \subset]1, +\infty[$. Alors si $x \in [a, b]$, on a pour tout $t \in [0, 1]$,

$$0 \leq \frac{1}{1+t^x} \leq \frac{1}{1+t^b}.$$

De même, si $t \geq 1$,

$$0 \leq \frac{1}{1+t^x} \leq \frac{1}{1+t^a}.$$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^b}$ étant intégrable sur $[0, 1]$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^a}$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$, on déduit du théorème de continuité des intégrales à paramètres que f est continue sur $]1, +\infty[$.

2. Posons $u(x,t)=\frac{1}{1+t^x}$, définie sur $]1,+\infty[\times]0,+\infty[$. Alors u admet une dérivée partielle par rapport à x définie sur $]1,+\infty[\times]0,+\infty[$ et donnée par

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=\frac{-t^x\ln t}{(1+t^x)^2}.$$

Cette dérivée partielle est continue des deux variables. Si on utilise

$$\left|\frac{t^x}{(1+t^x)^2}\right|\leq\frac{1+t^x}{(1+t^x)^2}=\frac{1}{1+t^x}$$

on trouve que, pour tout $[a,b]\subset\mathbb{R}$ et tout $x\in[a,b]$, on a

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|\leq\frac{|\ln t|}{1+t^b}$$

si $t\in]0,1[$ et

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|\leq\frac{|\ln t|}{1+t^a}$$

si $t\geq 1$. La fonction $t\mapsto\frac{\ln t}{1+t^b}$ étant intégrable sur $[0,1]$ et la fonction $t\mapsto\frac{\ln t}{1+t^a}$ étant intégrable sur $[1,+\infty[$, on déduit du théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et que, pour tout $x>1$,

$$f'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{-t^x\ln t}{(1+t^x)^2}.$$

Pour obtenir la formule demandée par l'énoncé, on coupe l'intégrale en deux, entre 0 et 1 et entre 1 et $+\infty$, puis on fait le changement de variables $u=1/t$ dans la première intégrale. Puisque pour tout $t>1$ et tout $x>1$,

$$\frac{t^x\ln(t)}{(1+t^x)^2}\left(\frac{1}{t^2}-1\right)\leq 0$$

on en déduit que f est décroissante sur $]1,+\infty[$.

Pour obtenir la formule demandée par l'énoncé, on coupe l'intégrale en deux, entre 0 et 1 et entre 1 et $+\infty$, puis on fait le changement de variables $u = 1/t$ dans la première intégrale. Puisque pour tout $t > 1$ et tout $x > 1$,

$$\frac{t^x \ln(t)}{(1+t^x)^2}\left(\frac{1}{t^2} - 1\right) \leq 0$$

on en déduit que f est décroissante sur $]1, +\infty[$.

3. On va séparer l'étude de l'intégrale entre 0 et 1 et entre 1 et $+\infty$. On a d'une part, pour tout $t \in]0, 1[$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+t^x} = 1.$$

De plus, pour tout $t \in]0, 1[$ et tout $x > 0$,

$$\left|\frac{1}{1+t^x}\right| \leq 1$$

et 1 est intégrable sur $]0, 1[$. Ainsi, par le théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+t^x}dt = \int_0^1 1dt = 1.$$

Pour l'intégrale entre 1 et $+\infty$, on peut également utiliser le théorème de convergence dominée, ou plus simplement on peut majorer : pour $x > 1$ et $t \geq 1$, on a

$$0 \leq \frac{1}{1+t^x} \leq \frac{1}{t^x}.$$

On intègre cette inégalité entre 1 et $+\infty$, et on trouve

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^x}dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x} = \frac{1}{x-1}.$$

Par le théorème des gendarmes,

Par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^x}dt=0.$$

Finalement, on en conclut que F tend vers 1 en $+\infty$.

4. Si F admet une limite ℓ en 1^+, alors puisque F est décroissante, pour tout $x>1$, on a

$$F(x)\leq\ell.$$

Mais comme on intègre une fonction positive, on en déduit que, pour tout $A>1$, on a

$$\int_1^A\frac{1}{1+t^x}dt\leq\ell.$$

5. Faisons tendre x vers 1 dans l'inégalité précédente. Puisque, pour tout $t\in[1,A]$, $\frac{1}{1+t^x}$ tend vers $\frac{1}{1+t}$ lorsque x tend vers 1, et que

$$\left|\frac{1}{1+t^x}\right|\leq 1$$

pour tout $t\in[1,A]$ et $x>1$, avec 1 fonction intégrable sur le segment $[1,A]$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient

$$\int_1^A\frac{dt}{1+t}\leq\ell.$$

Ceci est vérifié pour tout $A>1$. Puisque $t\mapsto\frac{1}{1+t}$ est positive sur $[1,A]$, on en déduit que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{1+t}$ est convergente. Ceci est faux par comparaison à une intégrale de Riemann divergente.

C'est donc que l'hypothèse que F admet une limite finie ℓ en 1^+ est fausse. Mais F est décroissante, et donc admet une limite en 1^+ qui peut être finie ou égale à $+\infty$. On en déduit que $\lim_{x\to1^+}F(x)=+\infty$.