Exercice 1 – ***(Suite exacte)***

On dit qu'une suite d'application linéaires

$$\{0\}\xrightarrow{f_0}E_1\xrightarrow{f_1}E_2\xrightarrow{f_2}\cdots\xrightarrow{f_{n-1}}E_n\xrightarrow{f_n}\{0\} \quad (1)$$

est exacte si on a $\forall k\in[\![0,n-1]\!], Imf_k = Kerf_{k+1}$

1. Dans ce cas, montrer que si tous les E_k sont de dimension finie, on a la formule suivante (Euler-Poincaré) : $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k \dim E_k = 0$

Exercice 2 – ***(Nilpotence)***

Un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E est un endomorphisme tel qu'il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $u^k=0$. Le plus petit de ces indices est appelé indice de nilpotence.

1. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice p. Montrer qu'il existe $x\in E$ tel que la famille $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ soit libre.
2. Montrer que $u^n=0$.
3. Que vaut $rg(u)$?
4. On appelle F le sous espace stable engendrée par la famille de la question 1). Ecrire la matrice de u_F, la restriction de u à F.

Exercice 3 – ***(Projecteurs)***

Soient p_1 et p_2 deux projecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Soit p un projecteur. Montrer que $tr(p)=rg(p)$
2. Montrer que $Im(p_1+p_2) = Im(p_1)\oplus Im(p_2)$ et $ker(p_1+p_2)=ker(p1)\cap ker(p2)$
3. Montrer que p_1+p_2 est un projecteur $\Leftrightarrow p_1\circ p_2 = p_2\circ p_1 = 0$

Exercice 4 – ***(Matrice de trace nulle)***

1. Soit E un espace vectoriel non nul. Soit f un endomorphisme de E tel que $\forall x\in E$, la famille $(x, f(x))$ soit liée. Montrer que f est une homotéthie.
2. Soit A une matrice de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont nuls.

Exercice 5 – ***(Vandermonde)***

Soient $a_0, a_1, ..., a_n$ des réels non nuls deux à deux distincts. On note $\mathbb{R}_n[X]^* = \{f:\mathbb{R}_n[X]\mapsto\mathbb{R}$, où f est linéaire$\}$, le dual de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie.

1. Montrer que $V(a_0,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n+1}\end{vmatrix} = a_0a_1...a_n\prod_{i>j}(a_i-a_j)$. Que dire de la valeur de ce déterminant ?
2. Soit $j\in[\![0,n]\!]$. On note $F_j:\mathbb{R}_n[X]\mapsto\mathbb{R}$ l'application définie par $F_j(P)=\int_0^{a_j}P(x)dx$. Montrer que $(F_0, F_1, ..., F_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$.

Exercice 6 – ***(Sous-espaces stables)***

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer qu'une droite F engendrée par un vecteur u est stable par f si et seulement si u est un vecteur propre de f. (Un vecteur propre de f est un vecteur $x\in E$, non nul, tel que $f(x)=\lambda x$ où $\lambda\in\mathbb{K}$).
2. Montrer qu'il existe au moins deux sous espaces de E stables par F. trouver un exemple d'endomorphisme (de R^2) n'admettant que deux sous-espaces stables.
3. Montrer que si E est de dimension finie $n\geq 2$, et si f est non nul et injectif, alors il existe au moins 3 sev stables si n est pair, et 4 si n est impair.

(Questions de cours)

— $\begin{array}{cccc} \phi & : & \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ & & x & \mapsto & (P(x_0), ..., P(x_n)) \end{array}$ est un isomorphisme. Conséquences (Lagrange).

— Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.

— Existence d'un polynôme annulateur d'un ev de dimension finie.