Colles PC*1 : Semaine 3

Exercice 1

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, le théorème du rang donne que

$$\dim(E_k) = \dim(\mathrm{Im}(f_k)) + \dim(\ker(f_k))$$

Or, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dim(\mathrm{Im}(f_k)) = \dim(\ker(f_{k+1}))$

car $\mathrm{Im}(f_n) = \{0\}$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dim(E_k) = \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \dim(\ker(f_k)) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dim(\ker(f_k))$

$= -\dim(\ker(f_1))$ par télescopage.

Or, $\ker(f_1) = \mathrm{Im}(f_0) = \{0\}$ donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \dim(E_k) = 0}$

Exercice 2 : cf corrigé semaine 2.

Exercice 3 : cf corrigé semaine 3

Exercice 4:

1) On a que $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - id)$. En effet, si $x \in \ker(p-id)$,
$p(x) = x \in \mathrm{Im}(p)$ et si $y \in \mathrm{Im}(p)$, $\exists x \in E / y = p(x)$
donc $p(y) - y = p^2(x) - p(x) = 0$ donc $y \in \ker(p-id)$

Soit $B_1 = (e_1, \dots, e_r)$ base de $\ker(p-id) = \mathrm{Im}(p)$ et $B_2 = (e_{r+1}, \dots, e_n)$ base de $\ker(p)$. Alors $B = B_1 \cup B_2$ base de E.

(En effet, $E = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$, cf cours)

Ainsi $\mathrm{Mat}_B(p) = $
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} \\ \end{array} \\ \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} e_1 \\ \vdots \\ e_r \\ e_{r+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} \\ p(e_1) \cdots p(e_r)\; p(e_{r+1}) \cdots p(e_n) & \end{array}$$

donc $\boxed{rg(p) = tr(p)}$

---

2) Soit $p = p_1 + p_2$. Si p est un projecteur, d'après (1),

$rg(p) = tr(p_1+p_2) = tr(p_1) + tr(p_2) = rg(p_1) + rg(p_2)$

Ensuite, $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Im}(p_1) + \mathrm{Im}(p_2)$. En effet, si $y \in \mathrm{Im}(p)$, $\exists x \in E /$
$y = p(x) = p_1(x) + p_2(x)$ donc $y \in \mathrm{Im}(p_1) + \mathrm{Im}(p_2)$

Or, $\dim(\mathrm{Im}(p_1)+\mathrm{Im}(p_2)) \leq \dim(\mathrm{Im}(p_1))+\dim(\mathrm{Im}(p_2))$
(cf formule de Grassmann)

Ainsi, $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Im}(p_1)+\mathrm{Im}(p_2)$ (toutes les inégalités sont donc des égalités)

et $\dim(\mathrm{Im}(p_1)+\mathrm{Im}(p_2)) = \dim(\mathrm{Im}(p_1))+\dim(\mathrm{Im}(p_2))$

donc $\boxed{\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(p_1)\oplus \mathrm{Im}(p_2)}$

---

3) $(p_1+p_2)^2 = p_1^2+p_2^2+p_1\circ p_2+p_2\circ p_1 = p_1+p_2+p_1\circ p_2+p_2\circ p_1$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $p_1\circ p_2 = p_2\circ p_1 = 0$, alors $(p_1+p_2)^2 = p_1+p_2$ donc p_1+p_2 projecteur

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $p=p_1+p_2$ est un projecteur, alors $p_1\circ p_2+p_2\circ p_1=0$

Methode 1: (avec q2)

Mais, $\mathrm{Im}(p_1)\subset \mathrm{Im}(p)$ car $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Im}(p_1)\oplus\mathrm{Im}(p_2)$.

donc $\forall x\in E$, $\exists x_1\in E$ / $p_1(x)=p(x_1)$

donc, $p_1(x) = p(x_1) = p^2(x_1) = p_1(p(x_1)) + p_2(p(x_1))$
$= p_1(p_1(x_1)) + p_2(p_1(x_1))$
$= p_1(x_1) + p_2(p_1(x_1))$

donc $p_2(p_1(x_1)) = 0$ Or, $p_1(x) = p_1^2(x_1) = p_1(x_1)$

donc $\forall x \in E,\ p_2(p_1(x)) = 0$

Donc $\underline{p_2 \circ p_1 = p_1 \circ p_2 = 0.}$

<u>Méthode 2:</u> (sans q2)

$$p_1 \circ p_2 = p_1^2 \circ p_2 = p_1 \circ (p_1 \circ p_2) = - p_1 \circ (p_2 \circ p_1) = -(p_1 \circ p_2) \circ p_1$$
$$= (p_2 \circ p_1) \circ p_1 = p_2 \circ p_1$$

donc $\begin{cases} p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 \\ p_1 \circ p_2 = - p_2 \circ p_1 \end{cases}$ d'où $\underline{p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0}$

Exercice 5 :

1) $V(a_0, \dots, a_n) = a_0 a_1 \dots a_n \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & a_0 & \cdots & a_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}}_{W(a_0, \dots, a_n)}$

$W(a_0, \dots, a_n)$ est un déterminant de Vandermonde de taille $n+1$.

On peut montrer par récurrence que $W(a_0, \dots, a_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$

ou de cette façon :

Soit P le polynôme de degré n qui admet pour racines $(a_0, \dots, a_{n-1})$

$$P(X) = \prod_{i=0}^{n-1} (X - a_i) \quad \text{(on peut le prendre unitaire)}$$
$$= X^n + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j X^j$$

Faisons $C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} + \alpha_0 C_1 + \dots + \alpha_{n-1} C_n$

On a $W(a_0, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & \cdots & 0 \\ | & | & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ 1 & a_n & \cdots & P(a_n) \end{vmatrix} = P(a_n) W(a_0, \dots, a_{n-1})$
$= \prod_{i=0}^{n-1} (a_n - a_i) \, W(a_0, \dots, a_{n-1})$

Par récurrence, $\boxed{W(a_0, \dots, a_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)}$ $\neq 0$ car les (a_i) sont distincts.

De plus, $\forall i, a_i \neq 0$ donc $\underline{V(a_0, \dots, a_n) \neq 0}$.

2) Comme $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $F_j \in \mathbb{R}_n[X]^*$, de dim finie, il suffit de montrer que $(F_0, \ldots, F_n)$ est libre

Supposons qu'on ait $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ / $\lambda_0 F_0 + \cdots + \lambda_n F_n = 0$.

On applique cela à $1, 2X, \ldots, (n+1)X^n$ et on trouve :

$$\begin{cases} \lambda_0 a_0 + \cdots + \lambda_n a_n = 0 \\ \lambda_0 a_0^2 + \cdots + \lambda_n a_n^2 = 0 \\ \\ \lambda_0 a_0^{n+1} + \cdots + \lambda_n a_n^{n+1} = 0 \end{cases}$$

Les $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ étant distincts, le déterminant "de Vandermonde" $V(a_0, \ldots, a_n) \neq 0$, donc $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$ nécessairement.

(car la matrice "de Vandermonde" A associée est inversible, donc $AX = 0 \Rightarrow X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$)

D'où la liberté de la famille. Ainsi, $(F_0, \ldots, F_n)$ base de $\mathbb{R}_n[X]^*$.

Exercice 6 : cf corrigé semaine 2.
