Corrigés colle semaine 6 (du 17/10)

Exercice 1 à 10 : Voir semaines précédentes.

Exercice 11 :

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $|z| = 1$, alors $z = e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ (car $z \neq 1$)

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2}\left(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2}\right)}{e^{i\theta/2}\left(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2}\right)} = i\,\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \in i\mathbb{R}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$, $\exists a \in \mathbb{R} \;/\; \frac{1+z}{1-z} = ia$

donc $1+z = ia(1-z)$ donc $z = \frac{-1+ia}{1+ia}$

et donc $|z| = \frac{\sqrt{(-1)^2+a^2}}{\sqrt{1^2+a^2}} = 1$

Exercice 12 :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(x+ky) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ix} e^{iky}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{ix} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{iy})^{k}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{ix} (1+e^{iy})^{n}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{ix} \left(e^{iy/2} (e^{iy/2} + e^{-iy/2})\right)^{n}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{ix} e^{iny/2} (2\cos(y/2))^{n}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(2^{n} e^{i(x+ny/2)} \cos^{n}(y/2)\right)$$

$$= 2^{n} \cos(x+ny/2) \cos^{n}(y/2)$$

Forme algébrique

Exercice 13 : Soit $w = a + ib$ tel que $w^2 = Z$.

alors $a^2 - b^2 + 2iab = \sqrt{3} + i$

alors $\begin{cases} a^2 - b^2 = \sqrt{3} & \text{(partie réelle)} \\ 2ab = 1 & \text{(" imaginaire)} \\ a^2 + b^2 = 2 & \text{(module)} \end{cases}$

donc $\begin{cases} a^2 = \dfrac{\sqrt{3}+2}{2} \\ b^2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

mais comme $2ab = 1$, a et b sont de m̂ signes, donc

$\begin{cases} a = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}} \\ b = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}} \end{cases}$ et $\begin{cases} a = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}} \\ b = -\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}} \end{cases}$

sont solutions (forme algébrique)

Forme trigo

$$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = 2\,e^{i\pi/6}$$

donc on aurait
$$\begin{cases} w_1 = \sqrt{2}\,e^{i\pi/12} \\ w_2 = -\sqrt{2}\,e^{i\pi/12}. \end{cases}$$

En prenant les parties réelles du premier et dernier résultat, $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}$

d'où $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{4}}$