Exercice 4 : Exos 1 à 3 : voir semaine précédente.

1) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$sh(x)\,ch(y) = \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-(x+y)}}{4}$$

et $ch(x)\,sh(y)$

$$= \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-(x+y)}}{4}$$

Ainsi, $sh(x)\,ch(y) + ch(x)\,sh(y) = \dfrac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = sh(x+y)$

2) Même méthode

Exercice 5 :

1) Posons $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = \mathrm{sh}(x) - x$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi'(x) = \mathrm{ch}(x) - 1$

Or $\mathrm{ch}(0) = 1$ et ch croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi'(x) \geq 0$.

x	0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	

car $\varphi(0) = 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) \geq 0$

d'où, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{sh}(x) \geq x$

2) Posons, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\psi(x) = \mathrm{ch}(x) - 1 - \frac{x^2}{2}$. ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\psi'(x) = \mathrm{sh}(x) - x$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\psi'(x) = \varphi(x) \geq 0$

x	0		$+\infty$
$\psi'(x)$		$+$	
$\psi(x)$	0	$\nearrow$	

car $\psi(0) = 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\psi(x) \geq 0$

d'où, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$

Exercice 6

Soit l'équation d'inconnue x : $ch(x) = 2$.

On réécrit : $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 2 \iff e^x + e^{-x} = 4$.

$\iff e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$.

Posons $X = e^x$ l'équation se réécrit : $X^2 - 4X + 1 = 0$

$\Delta = 16 - 4 = 12 > 0$ 2 solutions $X_{12} = \dfrac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$

d'où $X_{12} = 2 \pm \sqrt{3}$

donc $\begin{cases} e^{x_1} = 2 + \sqrt{3} \\ e^{x_2} = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$ 2 solutions $\boxed{\begin{cases} x_1 = \ln(2+\sqrt{3}) \\ x_2 = \ln(2-\sqrt{3}) \end{cases}}$