Exercice 1 – ***(Rayon ?)***

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon R. Que vaut le rayon de $\sum a_n^2 x^n$.

Exercice 2 – ***(Developpable en série entière ?)***

Soit $f(x) = \sum_n \sin(a^n x)$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que f est C^∞ et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}, |f^{(k)}(x)| \leq \dfrac{1}{1-|a|}$
3. Montrer que f est developpable en série entière.

Exercice 3 – ***(Intégrale)***

Soit $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+t+t^2}$. Developper f en série entière.

Exercice 4 – ***(ED)***

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \binom{n+p}{p} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant cette fonction.
2. Calculer f.

Exercice 5 – ***(Determiantion du terme général d'une suite)***

On pose $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} a_k$

Calculer les a_n en utilisant la série entière de terme général $\dfrac{a_n}{n!} x^n$

Exercice 6 – ***(Série entière)***

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(t)dt$.

1. Trouver la limite de (a_n).
2. Trouver une relation simple entre a_n et a_{n+2}.
3. Donner la nature de la série $\sum \dfrac{a_n}{n^\alpha} x^n$ selon les valeurs de x et α (rayon + bord).
4. Trouver une expression de $f(x) = \sum a_n x^n$

Questions de cours

— Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon R. Montrer que $\forall r < R$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-int} f(re^{it})dt = 2\pi a_n r^n$ et donner le DSE de $\sin(u)$ (sans démo)

— Donner le DSE de $\ln(1+u)$ (sans démo) et montrer que

$$\begin{aligned} &\sup\{r \in \mathbb{R}^+ | (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ soit bornée}\} \\ &= \sup\{r \in \mathbb{R}^+ | (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tende vers } 0\} \end{aligned}$$

— Donner le DSE de $(1+u)^\alpha$ (sans démo) et montrer que

$$\begin{aligned} &\sup\{r \in \mathbb{R}^+ | (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ soit bornée}\} \\ &= \sup\{r \in \mathbb{R}^+ | \textstyle\sum a_n r^n \text{ converge}\} \end{aligned}$$