Corrigés colle 4 (semaine du 10/10)

Exercice 1, 3 et 5

Voir semaine précédente (corrigés colle 3)

Exercice 2

1) Puisque $u^{p-1} \neq 0$, $\exists x \in E$, $x \neq 0$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$

Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ / $\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i u^i(x) = 0$.

On applique, $\forall j \in [\![0;p-1]\!]$, u^{p-1-j}, donc, $\forall j \in [\![0;p-1]\!]$, $\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i u^{p-1-j+i}(x) = 0$

Ainsi, on trouve successivement $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$

d'où la liberté de la famille.

2) La famille étant libre dans E et contenant p éléments, $p \leq n$.

$u^n = u^{\overbrace{n-p}^{\geq 0 \text{ car } p \leq n}} \circ u^p = 0$ car $u^p = 0$.

3) Si $p = n$, par théorème du rang, $n = rg(u) + dim(\ker(u))$

or $dim(\ker(u)) > 0$, sinon on aurait pas d'élément $x \in E$ non nul tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$... donc $rg(u) \leq n-1$

Ensuite, d'après ce qui précède, $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre

donc $(u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ aussi. Ainsi $rg(u) \geq n-1$

d'où $\boxed{rg(u) = n-1}$

4) Soit $F = Vect\left((x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\right)$

Alors, $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est une base de F (on la note $\mathcal{B}$)

donc, si $u_F : \begin{array}{l} F \to F \\ x \mapsto u(x) \end{array}$

alors
$$Mat_{\mathcal{B}}(u_F) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u(x) & \cdots & & \cdots & u^{n}(x) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} x \\ u(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ u^{n-1}(x) \end{array}$$

Exercice 6 :

1) • Si $x = 0$, $f(x) = f(0) = 0 = 0x$.

• Si $x \neq 0$, $(x, f(x))$ est liée donc $\exists \lambda_x \in \mathbb{K} \mid f(x) = \lambda_x x$

Dans tous les cas, $\forall x \in E$, $\exists \lambda_x \in \mathbb{K} / f(x) = \lambda_x x$

Considérons $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$.

* Supposons (x_0, x) libre.

Alors, $\begin{cases} f(x+x_0) = \lambda_{x+x_0}(x+x_0) \\ f(x+x_0) = f(x) + f(x_0) = \lambda_x x + \lambda_{x_0} x_0 \end{cases}$

donc $(\lambda_{x+x_0} - \lambda_x) x + (\lambda_{x+x_0} - \lambda_{x_0}) x_0 = 0$

or la famille (x_0, x) est libre, donc $\underline{\lambda_{x+x_0} = \lambda_x = \lambda_{x_0}}$

Ainsi, $\forall x \in E$, $f(x) = \lambda_{x_0} x$.

* Supposons (x_0, x) liée.

Puisque $x_0 \neq 0$, on peut écrire $x = \mu x_0$, donc

$f(x) = \mu f(x_0) = \mu \lambda_{x_0} x_0 = \lambda_{x_0} x$

Donc au final, $\forall x \in E$, $f(x) = \lambda_{x_0} x$.

Dans tous les cas, il existe un scalaire $\lambda = \lambda_{x_0} /$ $\boxed{\forall x \in E,\ f(x) = \lambda x}$

Exercice 6 :

1) • Soit u un vecteur propre de f, alors $\exists \lambda \in \mathbb{K} \,/\, f(u) = \lambda u$.

Comme $F = \mathrm{Vect}(u)$, $\forall x \in F$, $\exists \mu \in \mathbb{K} \,/\, x = \mu u$

donc $f(x) = f(\mu u) = \mu f(u) = \lambda \mu u \in F$

donc F est stable par f.

• Si $F = \mathrm{Vect}(u)$ est stable par f.

Si $x \in F$, $x \neq 0$, alors $f(x) \in F$ où x s'écrit $x = \mu u$ où $\mu \in \mathbb{K}^*$.

donc $f(x) = f(\mu u) = \mu f(u) \in F$. alors $\mu f(u)$ s'écrit

$\mu f(u) = \lambda u$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ donc $f(u) = \frac{\lambda}{\mu} u$ (car $\mu \neq 0$)

donc u est bien vecteur propre.

---

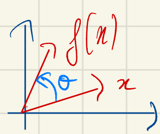
2) • $f(0) = 0$ donc $\{0\}$ stable par f.

• $\forall x \in E$, $f(x) \in E$ car $f \in \mathcal{L}(E)$ donc E stable par f.

Il faut trouver un endomorphisme qui ne laisse stable aucune droite.

Une rotation d'angle $\theta \in]0, \pi[$ convient :

puisque les 2 seuls sous-espaces stables sont $\{0\}$ et $E = \mathbb{R}^2$.



3) . Montrons que $\ker(f)$ est stable par f :

Soit $x \in \ker(f)$, $f(x) = 0$ donc $f(f(x)) = 0$ donc $f(x) \in \ker(f)$.

. Montrons que $\operatorname{Im}(f)$ est stable par f :

Soit $y \in \operatorname{Im}(f)$, $\exists x \in E \,/\, y = f(x)$ donc $f(y) = f(f(x)) \in \operatorname{Im}(f)$.

~~*~~ Si n est pair :

Comme f n'est pas injective, $\ker(f) \neq \{0\}$. Comme $f \neq 0$, $\ker(f) \neq E$ donc $\ker(f)$ est un sev stable par f différents des deux premiers. On a donc au moins 3 sev stables ($\{0\}$, E et $\ker(f)$)

Si n impair : le théorème du rang $n = rg(f) + \dim(\ker(f))$ assure que $rg(f) \neq \dim(\ker(f))$ donc $\operatorname{Im}(f) \neq \ker(f)$.

Comme f est non nulle, $\operatorname{Im}(f) \neq \{0\}$

Comme f non injective, $\dim(\ker(f)) \neq 0$ donc $rg(f) \neq n$

donc $\operatorname{Im}(f) \neq \ker(f)$, $\operatorname{Im}(f) \neq E$, $\operatorname{Im}(f) \neq \{0\}$.

On a donc notre $4^{\text{ème}}$ sev stable.