EXO 1

1. l'hypothèse $\lim_{\|x\| \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ peut être traduite par

$$\forall A > 0 \ \exists B > 0 \ \forall x \in \mathbf{R}^n \ \ \|x\| > B \Longrightarrow f(x) > A$$

En prenant $A = |f(0)\| + 1$, il existe un réel $M > 0$ tel que $\forall x \in \mathbf{R}^n \ \ \|x\| > M \Longrightarrow f(x) > |f(0)\| + 1$.

2. La boule fermée : $B = \{x \in \mathbf{R}^n \ \ \|x\| \leq M\}$ est une partie fermée et bornée de $\mathbf{R}^n$ donc compacte. La restriction de f à B est continue. Elle atteint un minimum en x^*. Soit $x \in \mathbf{R}^n$. Si $x \in B$ on a $f(x^*) \leq f(x)$. Si $x \notin B$ alors $f(x^*) \leq f(0) < |f(0)| + 1 < f(x)$. Donc f atteint un minimum global en x^*.

3. On sait qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert admettant un extremum local en un point x_0 vérifie $\nabla f(x_0) = 0$. On a donc ici $\nabla f(x^*) = 0$.

EXO 2

Enoncé ▼

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$. Justifer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer la différentielle de f en tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Indication ▼

Calculer $f(M+H) - f(M)$ pour revenir à la définition d'une différentielle.

Corrigé ▼

Remarquons déjà que f est de classe C^1 puisque f est polynômiale. Soient $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors on a

$$f(M+H) - f(M) = (M+H)^2 - M^2 = HM + MH + H^2.$$

Posons $\phi(H) = HM + MH$. ϕ est linéaire et

$$f(M+H) - f(M) = \phi(H) + o(\|H\|).$$

Ainsi, ϕ est la différentielle de f en M.

Corrigé ▼

Remarquons avant de commencer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et donc il est bien possible de calculer la différentielle de ϕ en un élément de $GL_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\|H\| < 1$. Alors

$$(I_n + H) \times \left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^k H^k \right) = I_n + (-1)^p H^{p+1}.$$

Puisque $\|H\| < 1$, $H^p \to 0$ et donc

$$(I_n + H)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k H^k = I_n - H + H^2 \psi(H),$$

où

$$\psi(H) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k H^k.$$

On a

$$\|\psi(H)\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|H\|^k = \frac{1}{1 - \|H\|} \leq 2$$

si $\|H\| \leq 1/2$. Ainsi, $\|H^2 \psi(H)\| \leq 2\|H\|^2 = o(\|H\|)$ et on a prouvé que

$$\phi(I_n + H) = \phi(I_n) - H + o(\|H\|).$$

Ainsi, ϕ est différentiable en I_n et sa différentielle vaut $d\phi_{I_n}(H) = -H$.

EXO 3

Enoncé

Soit $c \neq 0$. Chercher les solutions de classe C^2 de l'équation aux dérivées partielles suivantes

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

à l'aide d'un changement de variables de la forme $u = x + at$, $v = x + bt$.

Indication

Corrigé

On pose donc $f(x, y) = F(u, v)$ avec $u = x + at$ et $v = x + bt$. On a donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2ab \frac{\partial F}{\partial u \partial v} + b^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}.$$

L'équation devient alors :

$$(c^2 - a^2)\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2(c^2 - ab)\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + (c^2 - b^2)\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0.$$

En prenant $a = c$ et $b = -c$, l'équation devient

$$\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} = 0$$

dont la solution générale est

$$F(u, v) = \phi(u) + \psi(v),$$

où ϕ et ψ sont C^2. La solution générale de l'équation initiale est donc :

$$f(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct).$$

EXO 4

(a) Notons $A(x) = (a_{i,j}(x)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont $D_n(x)$ est le déterminant. La fonction $x \mapsto A(x)$ est dérivable car ses fonctions coordonnées le sont et par multilinéarité du déterminant, la fonction D_n est dérivable avec

$$D_n' = \det(C_1', C_2, \dots, C_n) + \det(C_1, C_2', \dots, C_n) + \dots + \det(C_1, C_2, \dots, C_n')$$

et donc

$$D_n' = \det(C_1, C_2, \dots, C_n').$$

En développant par rapport à la dernière colonne ce dernier déterminant, on obtient :

$$D_n'(x) = D_{n-1}(x).$$

(b) Sachant $D_n(0) = 0$ et $D_1(x) = x$ on peut conclure, par récurrence,

$$D_n(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

EXO 5

On introduit la fonction $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u(x) & v(x) & w(x) \end{vmatrix}.$$

Cette fonction est continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$ avec

$$f'(x) = \begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u'(x) & v'(x) & w'(x) \end{vmatrix}.$$

De plus, $f(a) = f(b) = 0$ et donc, par le théorème de Rolle, il existe $d \in \,]a\,;b[$ tel que $f'(d) = 0$. Au surplus, $f'(a) = 0$ et une nouvelle application du théorème de Rolle – à la fonction f' cette fois – donne l'existence de $c \in \,]a\,;d[\, \subset \,]a\,;b[$ telle

$$f''(c) = \begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0.$$

EXO 6

Pour tout $t \in I$, on a $g(t) = \sqrt{\langle f(t), f(t)\rangle}$. La fonction racine carrée étant dérivable sur $]0, +\infty[$ (de dérivée $x \mapsto 1/2\sqrt{x}$) et la fonction $t \mapsto \langle f(t), f(t)\rangle$ étant dérivable sur I, de dérivée $2\langle f(t), f'(t)\rangle$, on en déduit par composition la dérivabilité de g sur I. De plus, pour tout $t \in I$, on a

$$g'(t) = \frac{2\langle f(t), f'(t)\rangle}{2\sqrt{\langle f(t), f(t)\rangle}} = \frac{\langle f(t), f'(t)\rangle}{\|f(t)\|}.$$

EXO 7

Une façon de l'écrire (proprement)

1. On a $f(0) = f(0 \times 0) = 0f(0) = 0$! (question subsidiaire : où vivent ces zéros???)
2. On fixe $x \in \mathbb{R}^n$, et on écrit que f est différentiable en 0. On a donc

$$f(\lambda x) =_{\lambda \to 0} f(0) + df_0(\lambda x) + o(\lambda).$$

D'après la relation vérifiée par f et puisque $f(0) = 0$, on a

$$\lambda f(x) =_{\lambda \to 0} \lambda df_0(x) + o(\lambda).$$

On simplifie par λ et on trouve

$$f(x) =_{\lambda \to 0} df_0(x) + o(1).$$

On fait tendre λ vers 0 et on a donc que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$f(x) = df_0(x).$$

Ainsi, f est linéaire.

Une autre

Notons que $f(2 \times 0) = 2 \times f(0)$ implique $f(0) = 0$.
On a

$$f(x) = f(2 \times x/2) = 2f(x/2).$$

Par récurrence

$$f(x) = 2^n f(x/2^n).$$

Donc

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x/2^n) - f(0)}{x/2^n} \to f'(0)$$

puis

$$f(x) = f'(0)x.$$