TD 01 – Cardinalité et machines de Turing

Rappel : soient A et B deux ensembles, une fonction $f : A \to B$ est
- injective ssi $\forall\, a, a' \in A : f(a) = f(a') \implies a = a'$ (ou la contraposée),
- surjective ssi $\forall\, b \in B : \exists\, a \in A : b = f(a)$,
- bijective ssi elle est à la fois injective et surjective.

Utile : Théorème de Cantor-Schröder-Bernstein : soient A et B deux ensembles, s'il existe une fonction injective de A vers B (intuitivement $|A| \leq |B|$), et une fonction injective de B vers A (intuitivement $|B| \leq |A|$), alors il existe une bijection entre A et B (intuitivement $|A| = |B|$).

Exercice 1. *Ensembles infinis dénombrables*

1. Donner une bijection entre $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ et $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$.
2. Donner une bijection entre $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ et $2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, \dots\}$.
3. Donner une bijection entre $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ et $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
4. Prouver l'existence d'une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
   Bonus : si vous êtes très fort, donnez en une.
5. En utilisant la bijection g entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$, donner une bijection entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$.
6. Prouver l'existence d'une bijection entre Σ^* et $\mathbb{N}$, pour Σ un alphabet fini.
7. Conclure en donnant la relation de grandeur entre l'ensemble des algorithmes et l'ensemble $\mathbb{N}$.

Exercice 2. *Ensembles infinis indénombrables*

Remarque : On peut représenter un problème par une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et un problème de décision par une fonction $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$.

1. Donner la relation de grandeur entre l'ensemble des problèmes et l'ensemble des problèmes de décision.
2. Prouver l'existence d'une bijection entre l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ et $[0, 1]$.
   Astuce : Utiliser la base 2.
   Remarque : 0.1111... = 1
3. Prouver l'existence d'une bijection entre $[0, 1]$ et $\mathbb{R}$.
4. Conclure sur la relation de grandeur entre $\mathbb{R}$ et l'ensemble des problèmes.

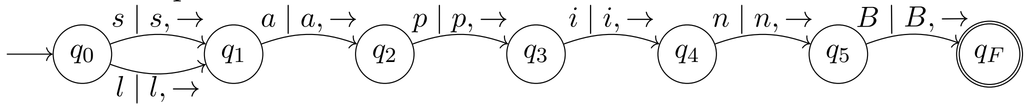
Exercice 3. *Fonctions non calculables*

1. Rappeler la relation de grandeur entre l'ensemble $\mathbb{R}$ et l'ensemble $\mathbb{N}$. (Montrer que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ et rappeler en quelques phrases l'argument de la diagonalee de Cantor).
2. Donner la relation de grandeur entre l'ensemble des problèmes et l'ensemble des algorithmes.

3. Conclure sur l'existence de fonctions non calculables.

Exercice 4. *Ma première MT*

Soit $M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, q_F)$ la machine de Turing où
- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_F\}$,
- $\Sigma = \{a, i, l, n, p, s\}$, $\Gamma = \{a, i, l, n, p, s, B\}$,
- δ est donnée par



1. Quel est le langage reconnu par cette machine de Turing ?
2. Peut-on dire que ce langage est semi-décidable ?
3. Peut-on dire que ce langage est décidable ?

Exercice 5. *états d'une MT = mémoire finie*

Objectif : voir que l'on peut sauvegarder des informations (en quantité finie) dans les états.
Soit $M = (Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, q_F)$ la machine de Turing où
- $Q = \{q_0, q_a, q_b, q'_a, q'_b, q_F\}$,
- $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, B\}$,
- δ est donnée par

$$\begin{array}{ll}
(q_0, a) \mapsto (q_a, a, \rightarrow) & (q_0, b) \mapsto (q_b, b, \rightarrow) \\
(q_a, a) \mapsto (q_a, a, \rightarrow) & (q_b, a) \mapsto (q_b, a, \rightarrow) \\
(q_a, b) \mapsto (q_a, b, \rightarrow) & (q_b, b) \mapsto (q_b, b, \rightarrow) \\
(q_a, B) \mapsto (q'_a, B, \leftarrow) & (q_b, B) \mapsto (q'_b, B, \leftarrow) \\
(q'_a, a) \mapsto (q_F, a, \rightarrow) & (q'_b, b) \mapsto (q_F, b, \rightarrow)
\end{array}$$

1. Dessiner cette machine sous la forme d'un automate.
2. Quel est le langage reconnu par cette machine de Turing ?
3. Peut-on dire que ce langage est semi-décidable ?
4. Peut-on dire que ce langage est décidable ?

Exercice 6. *MT*

Donner des machines de Turing pour décider les langages suivants.
1. $L = \{aw \mid w \in \Sigma^*\}$ avec $\Sigma = \{a, b, c\}$.
2. $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \equiv 0 \mod 3\}$ avec $\Sigma = \{a\}$.
3. $L = \{w \in \Sigma^* \mid w$ est un palindrome de taille paire $\}$ avec $\Sigma = \{a, b\}$.
4. $L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ avec $\Sigma = \{a, b, c\}$.
5. $L = \{w\#w \mid w \in \{a, b\}^*\}$ avec $\Sigma = \{a, b, \#\}$ (deux fois le même mot séparés par un symbole $\#$) .
6. Ces langages sont-ils semi-décidables ? décidables ?