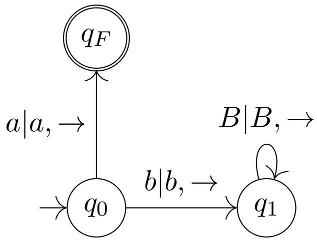
TD 02 – Machines de Turing, problème de l'arrêt et codage

Exercice 1. *Complémentaire, intersection et Union de Langages*

1. Que peut-on dire sur $\bar{L}$ si L est semi-décidables mais pas décidable ?
2. Que peut-on dire sur $\bar{L}$ si L est décidable ?
3. Que peut-on dire sur $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$ si L_1 et L_2 sont semi-décidable mais pas co-semi-décidable ?

Exercice 2. *Petit piège sur les langages non-décidable*

La machine de Turing M suivante fonctionne sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.



1. Parmi les mots suivants, lesquels la machine M accepte (= reconnaît) et sur lesquels de ces mots la machines s'arrête ? $a, ab, ba, bb, b, \epsilon$?
2. Est-ce que le langage L(M) reconnu par cette machine est semi-décidable ? décidable ?
3. Critiquer l'argument suivant :
   Par le théorème de l'arrêt, le langage $L_{h\bar{a}lt} = \{\langle M\rangle\#w \mid M \text{ ne s'arrête pas sur } w\}$ n'est pas semi-décidable. Il n'est donc pas possible de prouver que la machine M ne s'arrête pas sur l'entrée b.

Exercice 3. *L'arrêt*

Indiquer si chacun des énoncés qui suit est vrai ou faux, en justifiant. *Rappel : $M(w)\downarrow$ signifie que M s'arrête sur l'entrée w et $M(w)\uparrow$ signifie que M ne s'arrête pas sur l'entrée w.*

1. $\nexists \bar{H}, \forall M, \forall w,\ M(w)\uparrow \Leftrightarrow\ \langle M\rangle\#w \in L(\bar{H})$.
2. $\nexists H, \forall M, \forall w,\ M(w)\downarrow \Leftrightarrow\ \langle M\rangle\#w \in L(H)$.
3. $\forall M, \forall w, \nexists \bar{H}, M(w)\uparrow \Leftrightarrow\ \langle M\rangle\#w \in L(\bar{H})$.
4. $\forall M, \forall w, \nexists \bar{H}, M(w)\downarrow \Leftrightarrow\ \langle M\rangle\#w \in L(M)$.

Exercice 4. $\langle M\rangle$

Donner le code $\langle M\rangle$ de la machine de Turing $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, q_F)$, d'ensemble d'états

$Q = \{q_0, q_1, q_F\}$, d'alphabets $\Sigma = \{0, 1\}$ et $\Gamma = \{0, 1, B\}$, et dont la fonction de transition est donnée par :

δ	0	1	B
q_0	$(q_1, 1, \rightarrow)$	$-$	$-$
q_1	$-$	$(q_1, 0, \rightarrow)$	$(q_F, B, \leftarrow)$

Exercice 5. *Arrêt et conjectures mathématiques*

La conjecture de Golbach, formulée en 1742 et toujours ouverte, énonce que tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers.

1. Donner un programme qui s'arrête si et seulement si la conjecture de Golbach est fausse (ce programme n'a pas d'entrée).

On peut déduire de votre réponse précédente que si l'on savait décider le problème de l'arrêt, alors on saurait dire si la conjecture de Golbach est vraie ou fausse. Malheureusement, on a vu que le problème de l'arrêt est indécidable.

2. Est-ce que cette conjecture est décidable (*i.e.* il existe une preuve mathématique qu'elle est vrai ou fausse) si elle est fausse ? Si elle est vrai ?

Exercice 6. *MT : conventions*

Objectif : voir que l'on peut utiliser d'autres conventions.

1. Peut-on décider exactement les mêmes langages si la tête de lecture est initialement placée sur la case la plus à droite du mot d'entrée ? (Justifier)
2. Peut-on décider exactement les mêmes langages si l'on autorise des transitions pour lesquelles la tête de lecture/écriture ne bouge pas (ni $\leftarrow$ ni $\rightarrow$ mais $\downarrow$) ? (Justifier)
3. Peut-on décider exactement les mêmes langages si l'on ajoute la restriction $\Sigma = \{0, 1\}$? Et si en plus $\Gamma = \{0, 1, B\}$? (Justifier)

Exercice 7. *MT : multi-ruban*

Objectif : montrer que le modèle des machines de Turing à plusieurs rubans et plusieurs têtes de lecture (une tête de lecture indépendante par ruban, et un seul état pour toute la machine) est équivalent au modèle des machines de Turing. Le multi-ruban est très pratique !

En fonction de l'état et du symbole lu sur chacun des rubans, la machine peut
- changer d'état,
- écrire un symbole sur chaque ruban,
- déplacer chaque tête vers la droite ou la gauche indépendamment les unes des autres.

1. Donner le type de la fonction de transition δ, et donner un exemple de transition.

Dans l'état initial, l'entrée est écrite sur le premier ruban et tous les autres rubans sont vides. Un mot est accepté si et seulement si la machine entre dans l'état final q_F au cours du calcul.

2. Comment simuler une MT *multi-ruban* avec une MT *mono-ruban* (en quelque phrases) ?

Exercice 8. *MT non-déterministes*

Objectif : montrer que le modèle des machines de Turing non-déterministes est équivalent au modèle des machines de Turing du point de vue de la calculabilité.

Une machine de Turing non-déterministe peut, à une étape de temps donnée (c'est à dire dans un état et pour un symbole lu), avoir plusieurs transitions possibles. Un calcul d'une machine de Turing est une succession de choix parmi l'ensemble des transitions possibles. Un mot est accepté si et seulement si il existe au moins un calcul qui mène à l'état final.

1. Donner le type de la fonction de transition δ, et donner un exemple de transition.
2. Donner une machine de Turing non déterministe qui reconnaisse le langage $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$.
3. Soit $r = \max\{|\delta(q, x)| \mid q \in Q \text{ et } x \in \Gamma\}$. Que représente r ?
4. Que pourrait représenter une suite finie de lettres sur l'alphabet $R = \{1, \ldots, r\}$?
5. Peut-on construire une machine de Turing qui énumère (c'est-à-dire écrit un à un et se place dans un état particulier q_e à chaque fois que son ruban contient un mot à énumérer) tous les mots finis sur l'alphabet R ?
6. Montrer que tout langage reconnu par une MT non-déterministe est reconnu par une MT déterministe (indication : on pourra utiliser au moins trois rubans, le premier pour l'entrée, le second pour énumérer les choix non-déterministes, le troisième pour simuler une exécution particulière de la machine non-déterministe).