Teorem: A, B, C, D ve O doğrudaş farklı noktalar olsun. A', B', C', D' de O merkezli çembere göre A, B, C, D nin inversi olsunlar. Bu taktirde $(AB,CD) = (A'B',C'D')$ olur.

(inversion çifte oranı korur!... Çifte oran inversion altında invaryanttır)

İspat:

$$(A'B',C'D') = \frac{|A'C'|\,|B'D'|}{|A'D'|\,|B'C'|} = \frac{\dfrac{\cancel{r^2}|AC|}{\cancel{|OA|}\cancel{|OC|}}\;\dfrac{\cancel{r^2}|BD|}{\cancel{|OB|}\cancel{|OD|}}}{\dfrac{\cancel{r^2}|AD|}{\cancel{|OA|}\cancel{|OD|}}\;\dfrac{\cancel{r^2}|BC|}{\cancel{|OB|}\cancel{|OC|}}} = \frac{|AC|\,|BD|}{|AD|\,|BC|} = (AB,CD)$$

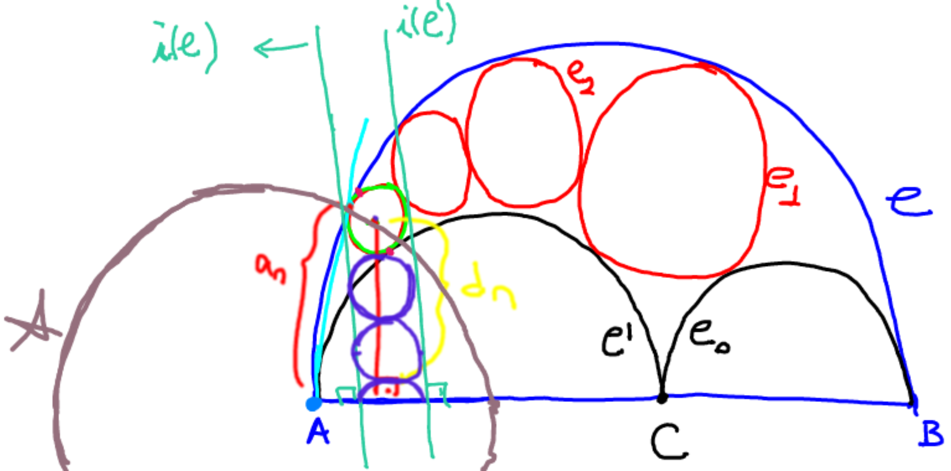
bulunur.

Ödev D. Blair Inv. theory and Conf. Map. sy 13 – soru 2-3-4

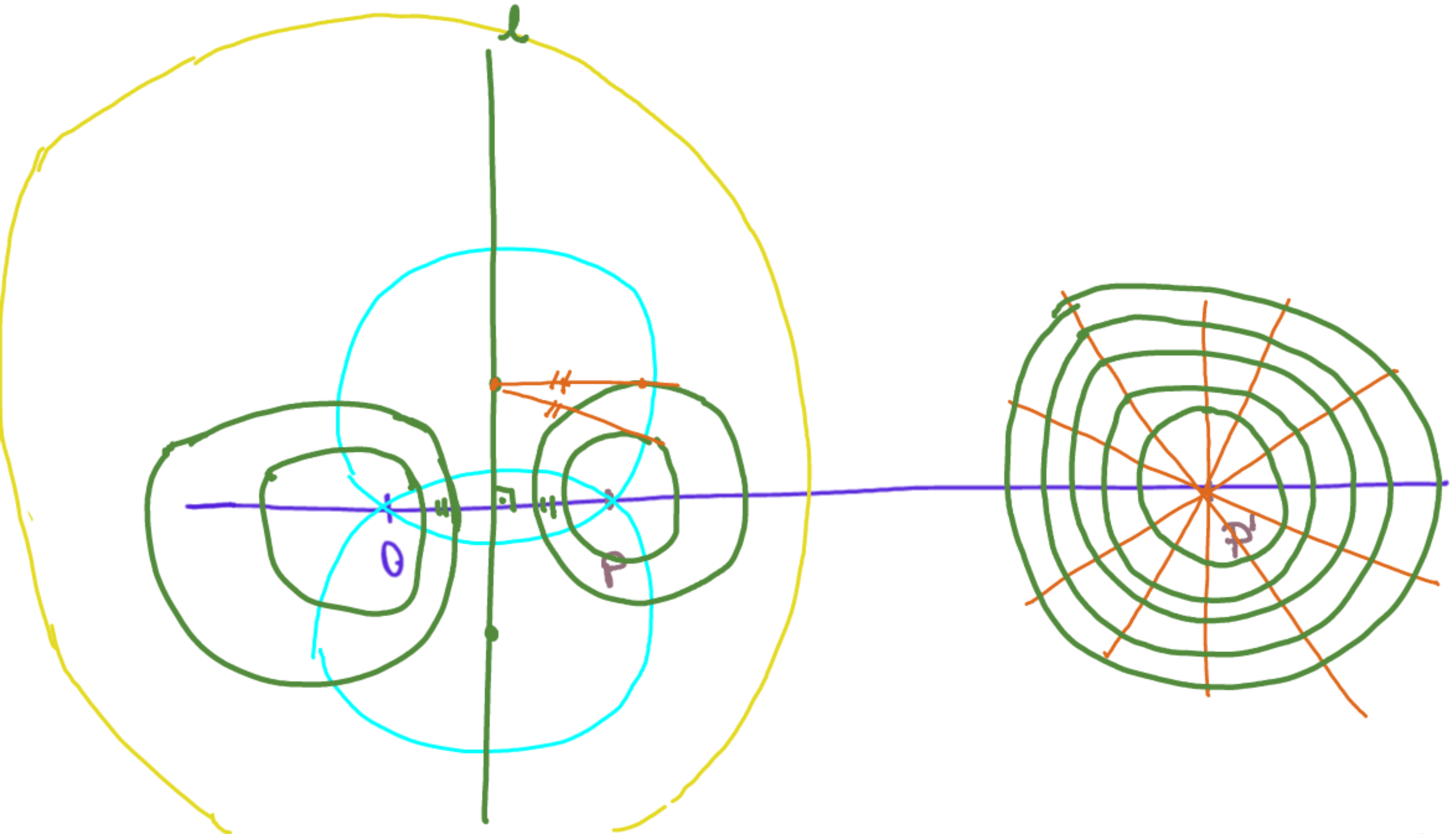
İnversionun Uygulamaları

Teorem (Pappus Teoremi)

e, AB çaplı bir yarı-çember ve e' ile e_0 sırasıyla AC ve CB çaplı AB nin aynı tarafında bulunan yarı çemberler olsun. $e_1, e_2, \dots, e_n$ çemberleri her $i \in \{1,..,n\}$ için e_i çemberi e_{i-1}, e ve e' çemberlerine teğet o.ş. bir dizi olsun. r_n, e_n çemberinin yarıçapı ve d_n ise AB den e_n merkezine olan uzaklık olsun. Bu taktirde $d_n = 2n r_n$ olur.



a_n, A nok.dan e_n çemberine çizilen teğetin uzunluğu olsun.
A merkezli, a_n yarıçaplı A çemberine göre inversyonu uygulayalım
Bu durumda e_n çemberi A ya göre inversion altında invaryanttır.
Çünkü $e_n \perp A$ dır. e ve e' çemberleri ise A ya göre inversiyon altında $\overleftrightarrow{AB}$ dik olan paralel bir doğru çiftine dönüşür. Çünkü e ve e', A nok.dan (A nın merkezinden inversiyon merkezinden) geçiyor ve e ile e' nin $\overleftrightarrow{AB}$ diktir. Hatta e ile e' çemberi e_n çemberine de teğettir. e_{n-1} çemberi, e_n, e ve e' teğet olduğundan inversiyon altında görüntüsü paralel doğrular arasında e_n teğet olan çember olur. Benzer şekilde dizideki tüm çemberler paralel iki doğru arasında bir önceki çembere teğet olacak şekilde bir çembere dönüşür. Bu takdirde n. çemberin merkezinden $\overleftrightarrow{AB}$ olan uzaklık n tane e_n çemberi mesafesinde olur. Yani $d_n = n.2r_n = 2nr_n$ bulunur



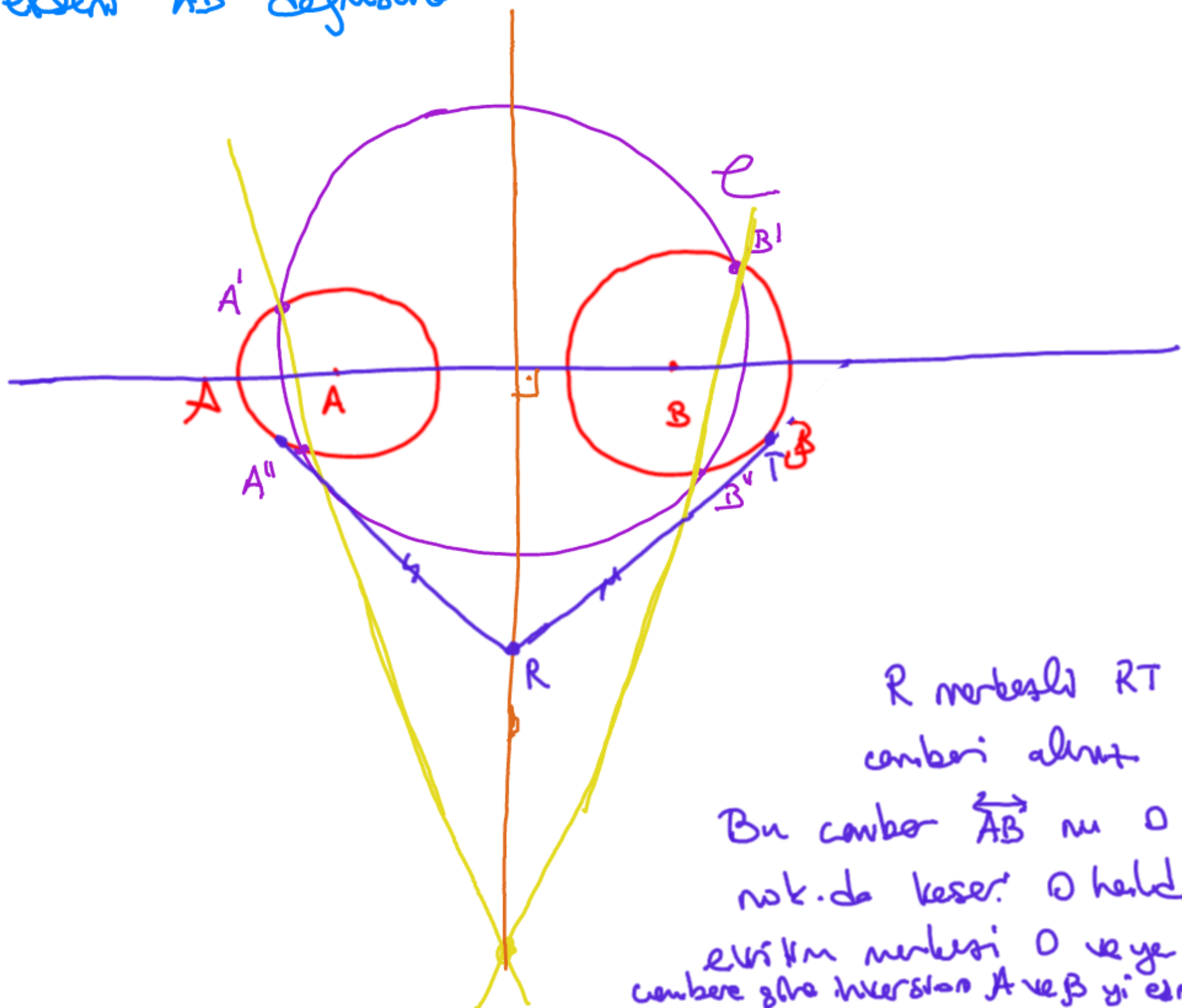
e, O merkezli çember P ile P' de invers noktalar olsun. P' den geçen doğrular (biri hariç $\overleftrightarrow{OP'}$) O ile P den geçen çemberlere dönüşür. Bu çemberlerin merkezleride $\overline{OP}$ nin orta dikmesi üzerindedir.

P' de eş merkezli çemberler inversiyon altında yine çemberlere dönüşürler (biri hariç $|OP'|$ yarı çaplı olanı). Bu çemberler de bir aile oluştururlar.

ℓ doğrusu üzerindeki her nokta birinci çember ailesinin (OP den geçen) merkezi idi. Bu nok.dan ikinci ailenin çemberlerine çizilen teğetlerin uzunluğu aynıdır (eşittir). Bu ℓ doğrusuna ikinci ailenin kuvvet ekseni adı verilir.

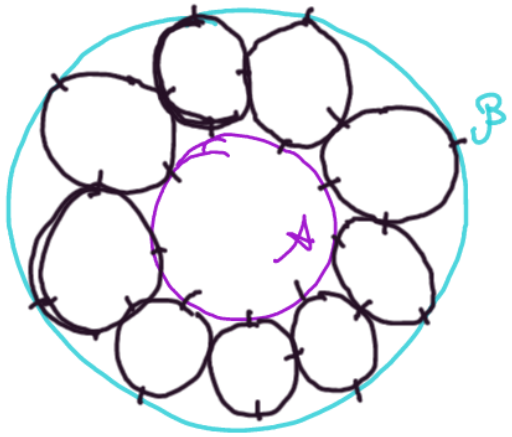
Teorem: Eş merkezli olmayan kesişmeyen iki çember iki eşmerkezli çembere evrilebilir.

İspat: $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$; A ve B merkezli çemberler olsun.
$\mathcal{C}$ çemberi $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ yi sırasıyla A', A'' ve B', B'' nok.da kesen bir çember olsun. Eğer $A'A''$ ve $B'B''$ doğruları paralel değilse bu doğrular kuvvet ekseni bir nok.da kesişirler. Dolayısıyla kuvvet ekseni $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusuna diktir.



R merkezli RT yarıçaplı çemberi alalım.
Bu çember $\overleftrightarrow{AB}$ nu O ve P nok.da keser. O halde evrim merkezi O ve ye P olan çembere göre inversiyon $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ yi eşmerkezli çember

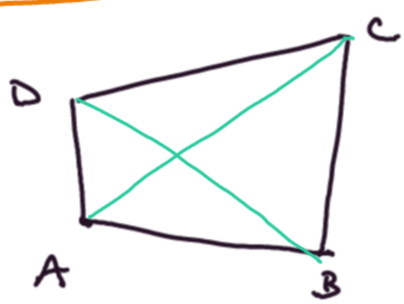
Teorem: A, bir B çemberinin içinde olan bir çember olsun. Varsayalım ki C_i, C_{i-1}, A ve B ye teğet o.ş bir çember ağı n tane çember içeren $C_1, C_2, \ldots, C_n$ çember dizisi mevcut olsun. Bu takdirde sonsuz çoklukta böylesi diziler mevcuttur ve de üstelik A ile B ye teğet olan A ile B arasındaki herhangi bir çemberde böylesi bir diziye sahiptir. (Steiner teoremi)



İspatı ödev!

Teorem (Ptolemy teoremi)

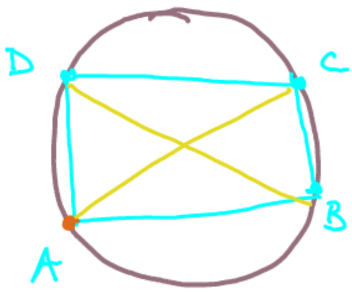
ABCD bir çemberde içerilen konveks bir dörtgen olsun. Buna göre köşegenlerin uzunlukları çarpımı karşıt kenarların çiftlerinin uzunlukları çarpımının toplamına eşittir.



Herhangi bir dörtgende

$|AC||BD| \leq |AB||CD| + |BC||AD|$

olur. Batlamyus teoremi



ABCD bir çemberin kirişler dörtgeni iken

$|AC|.|BD| = |AB||CD| + |AD||BC|$

olur

r yarıçaplı ve A merkezli bir çembere göre inversiyon alalım. Elimizdeki konfigürasyonu bu inversiyona tabi tutalım.

Buna göre ABCD bir çemberin üzerindeki nok.lar olup bu çember A'dan yani merkezden (inversiyon merkezinden) geçtiğinden bu çember A'dan geçmeyen bir doğruya dönüşür. B', C', D' nok.ları B, C, D nin inversleri o.ü. B', C', D' doğrudaştır. Ayrıca ABCD konveks olduğundan C', B' ile D' arasındadır. Böylelikle $|\overline{B'C'}| + |\overline{C'D'}| = |\overline{B'D'}|$ olur

$$\boxed{|P'Q'| = \frac{r^2\,|PQ|}{|OP|\,|OQ|} \text{ idi}}$$

$$|B'C'| + |C'D'| = |B'D'|$$

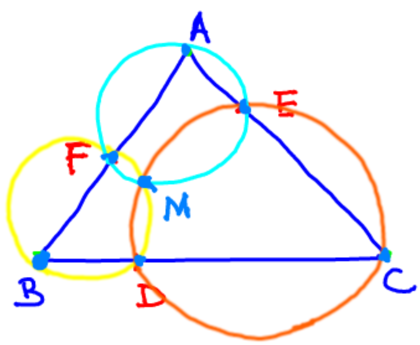
$$\Rightarrow \frac{r^2|BC|}{\underbrace{|AB||AC|}_{|AD|}} + \frac{r^2|CD|}{\underbrace{|AC||AD|}_{|AB|}} = \frac{r^2|BD|}{\underbrace{|AB||AD|}_{|AC|}}$$

$$\Rightarrow \boxed{|AD||BC| + |AB||CD| = |AC||BD|} \text{ bulunur.}$$

Miquel Teoremi

Teorem (Miquel'in Küçük Teoremi)

△ABC üçgeninde, D, E, F sırasıyla A, B, C ye göre karşıt kenarlar üzerindeki noktalar olsun. Bu taktirde AEF, BDF, CDE çemberleri ortak bir M noktasından geçerler.



D, E, F △ABC üçgeninde sırasıyla A, B, C köşelerinin karşıt kenarları üzerindeki herhangi noktalar olsun. Ayrıca BDF çemberi ve CDE çemberi bir M noktasında kesişsin. Buna göre AEF çemberinin M nok.dan geçtiğini göstermeliyiz.

Bir dörtgenin bir çemberde içerilmesi için gerek ve yeter koşul dörtgenin karşıt açılarının bütünler olmalıdır.

$s(\angle MFA) = \pi - s(\angle MFB) = s(\angle BDM) = \pi - s(\angle CDM) = s(\angle CEM) = \pi - s(\angle MEA)$

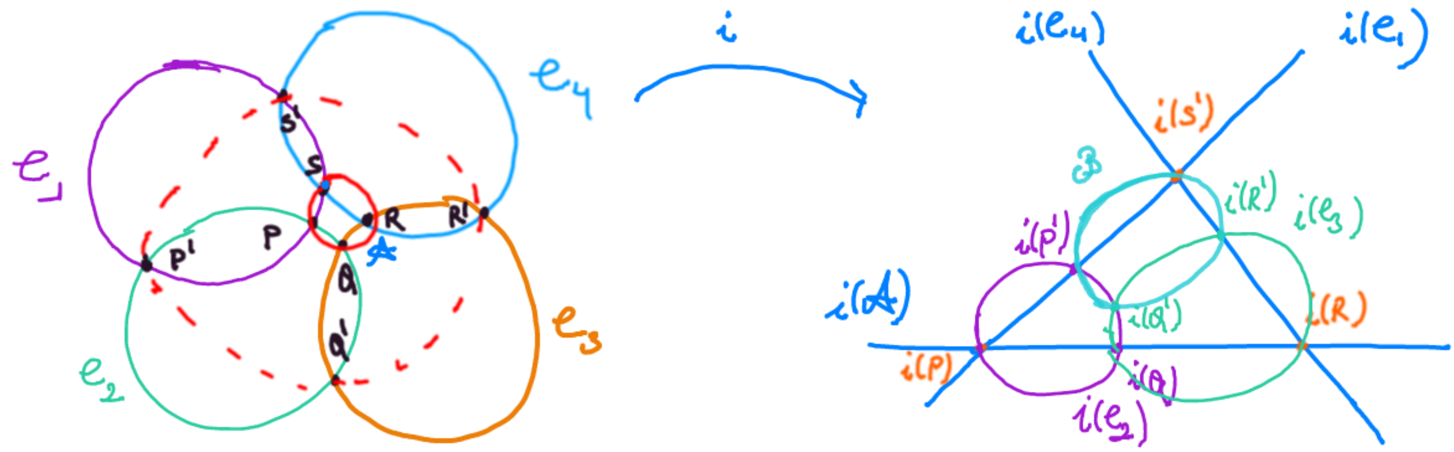
elde edilir.

$$s(\angle MFA) = \pi - s(\angle MEA) \Rightarrow s(\angle MFA) + s(\angle MEA) = \pi \text{ dır.}$$

Yani $\angle MFA$ ile $\angle MEA$ açıları bütünlerdir. O halde AEMF dörtgeni bir çemberde içerilir. Açıkça bu çember M den geçer.

Teorem (Miquel Teoremi) Miquel'in Büyük Teoremi

e_1, e_2, e_3, e_4 herhangi üçü noktadaş olmayan dört çember olsun. e_1 ile e_2 çemberleri P ve P' nok.da, e_2 ile e_3 çemberleri Q ve Q' noktada, e_3 ile e_4 çemberleri R ve R' nok.da, e_4 ile e_1 çemberleride S ve S' nok.da kesişsinler. Bu taktirde P, Q, R ve S nok.ları çemberdeş veya doğrudaş o.i.g.v.y.k. P', Q', R', S' nok.larının çemberdeş veya doğrudaş dır.



P, Q, R, S çemberdeş olduğunu varsayalım. Bu çembere $\mathcal{A}$ diyelim. İnversiyon merkezi S o.ş. bir çembere göre bu konfigürasyona inversiyon uygularsak $e_1, e_4, \mathcal{A}$ çemberleri S nok.dan geçtiklerinden inversiyon altında S den geçmeyen doğrulara dönüşürler. e_2 ve e_3 çemberleri inversiyon merkezinden geçmediklerinden inversiyon altında inversiyon merkezinden geçmeyen bir çembere dönüşür.

$i(P)$, $i(R)$, $i(S')$ üçgenine küçük Miquel teoremi uygulanırsa açıkça $i(P')$, $i(Q')$, $i(R')$ ve $i(S')$ den bir çember geçer. Bu çember $\mathcal{B}$ olsun. Bu durumda bir kez daha inversiyon uygulanırsa başa döneriz yani $\mathcal{B}$ çemberi inversiyon altında P', Q', R', S' den geçen bir çember olur. Yani P', Q', R', S' çemberdeştir.

$$(\underbrace{\mathcal{W}}_{\text{noktalar kümesi}}, \underbrace{\mathcal{C}}_{\text{çemberler küme}}, \underbrace{o}_{\text{üzerinde bulunma bağıntısı}})$$

$(\mathcal{W}, \mathcal{C}, o)$ matematiksel sistemi

(i) üç farklı noktadan bir tek çember geçer

(ii) P, $\mathcal{A}$ çemberi üzerindeki bir nokta ve Q $\mathcal{A}$ çemberi üzerinde olmayan bir nokta o.ü. Q'dan geçen ve $\mathcal{A}$ çemberine P noktada teğet olan bir tek çember vardır

(iii) Her çember üzerinde en az üç nokta vardır.

(iv) Bir çember ve çember üzerinde olmayan bir nokta vardır.

aksiyomlarını sağlıyorsa bu sisteme <u>invers düzlem</u> denir.

(v) Herhangi ikisi teğet olan ve teğet noktaları ayrık olan ve de herhangi üçü noktadaş olmayan dört çember vardır.

invers düzlem (v) aksiyomunu sağlıyorsa invers düzleme "tek" denir.

(vi) Miquel'in Büyük Teoremi

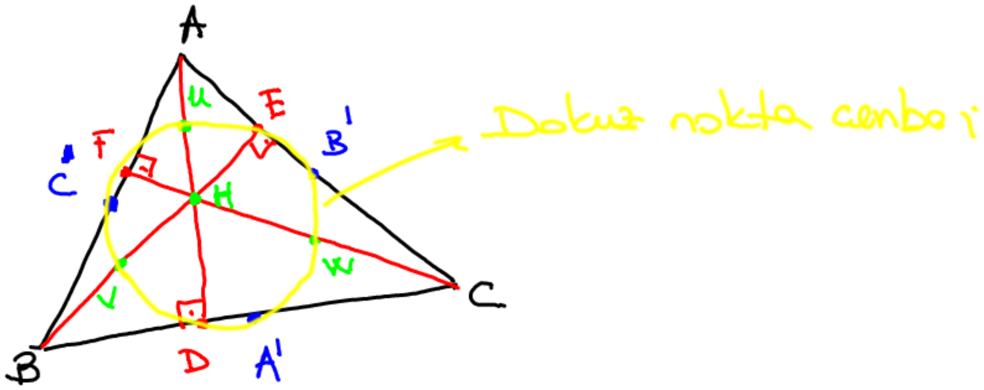
Miquel'in Büyük teoremini sağlayan invers düzleme Miquelyan düzlem denir.

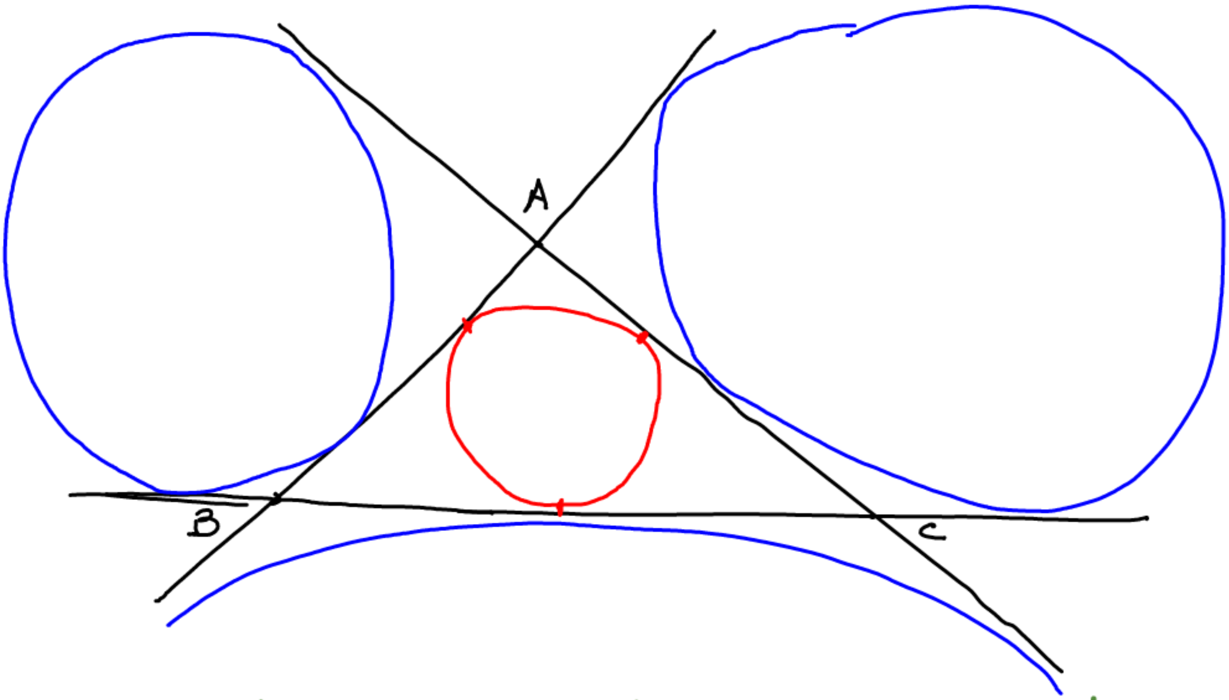
Dokuz nokta çemberi

Teorem

Bir üçgende kenarların orta noktaları, yüksekliklerin ayakları ve yükseklik merkezinden köşelere çizilen doğru parçalarının orta noktaları çemberdeştir. (Bu çembere dokuz nokta çemberi denir.)

İspat Ödev!





Bir üçgenin dokuz nokta çemberi, üçgenin iç teğet ve üç dış teğet çemberine teğettir. (Feuerbach teoremi)

Ödev ⇒ Feuerbach teoremi ispatlayınız (inversiyon kullanarak!)

$\mathbb{C} = \{ x+iy \mid x,y \in \mathbb{R},\ i^2=-1 \}$ ← kompleks sayılar kümesi (karmaşık)

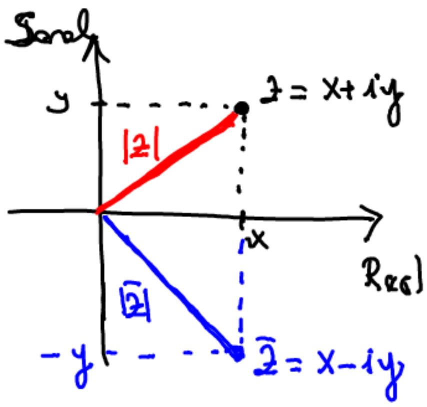
$\underbrace{x}_{\substack{\text{reel}\\ \text{kısmı}}} + i\underbrace{y}_{\substack{\text{sanal (imajiner)}\\ \text{kısmı}}} \longleftrightarrow (x,y)$

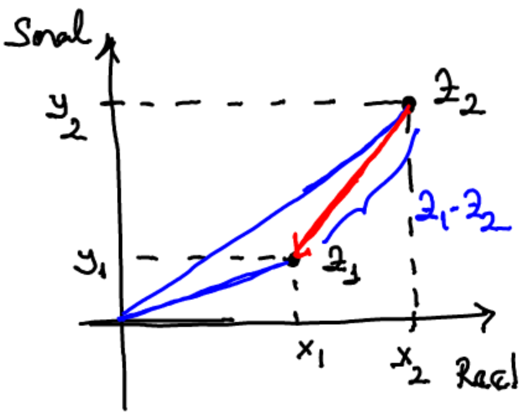
$$(a+ib) \mp (c+id) := (a \mp c) + i(b \mp d)$$
$$(a+ib).(c+id) := (ac-bd) + i(ad+bc)$$
$$\frac{a+ib}{c+id} := \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + i\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

$z = x+iy$ o.ü. $\bar{z} = x - iy$ ifadesine z nin eşleniği denir.

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ ifadesine de z nin modülü denir.

$|z|^2 = z.\bar{z}$ ve de $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ dir.

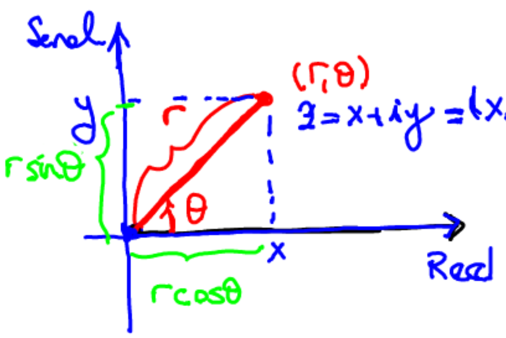




$(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$

$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$

⟹ Bu ifade z_1 ile z_2 arasındaki uzaklığı verir.



kartezyen → kutupsal

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ ← $(x,y) \longrightarrow (r,\theta)$

kutupsal → kartezyen

$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$ $(r,\theta) \longrightarrow (x,y)$

z nin boyu

θ açısı z nin argümenti denir

kutupsal gösterim

$z = x+iy = r\cos\theta + i\, r\sin\theta = r\underbrace{(\cos\theta + i\sin\theta)}_{} = r\ \mathrm{cis}\theta$

$e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy} = e^x \overbrace{(\cos y + i\sin y)}^{e^{iy}} \Rightarrow z = r e^{i\theta}$ şeklinde yazılabilir

$\mathrm{Arg}\, z = \theta, \ \theta \in [0, 2\pi]$ esas değeri

$\arg z = \theta, \ \theta \in (-\infty, \infty)$

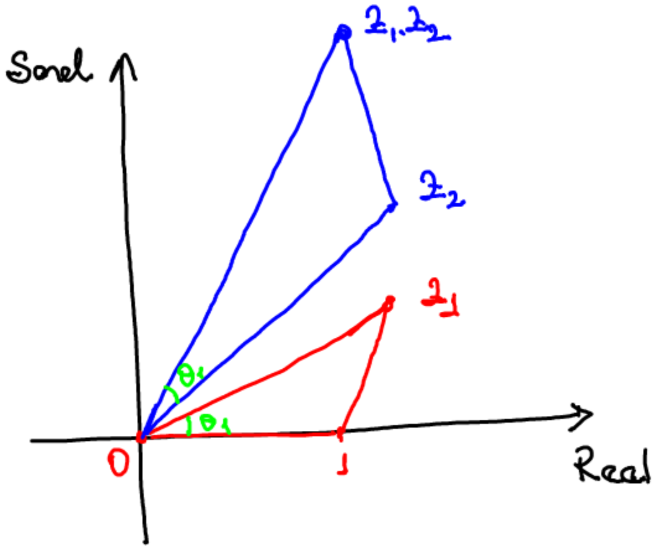
$e^{i\pi} + 1 = 0$

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ olarak alalım.

$$z_1 . z_2 = r_1 e^{i\theta_1} . r_2 e^{i\theta_2}$$
$$= r_1 . r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$= r_1 . r_2 \left(\underbrace{(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2)} + i(\underbrace{\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2}) \right)$$
$$= r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i \sin(\theta_1+\theta_2) \right]$$
$$= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$z_1 . z_2$ nin da $|z_1 . z_2| = r_1 r_2$ ve $\arg(z_1 . z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ dir.

$\overset{\triangle}{(0, 1, z_1)} \sim \overset{\triangle}{(0, z_2, z_1 z_2)}$



$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{r(\cos\theta - i\sin\theta)}{r^2} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) \text{ dır.}$$

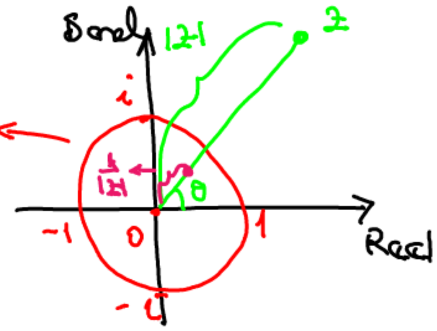
$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{r} = \frac{1}{|z|} \text{ ve } \arg\frac{1}{z} = -\arg z \text{ dir.}$$

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{r}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = \frac{1}{r} = \frac{1}{|z|} \quad \arg\frac{1}{\bar{z}} = \arg z = \theta$$

$$|z| . \left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = |z| . \frac{1}{|z|} = 1 \text{ dir.}$$

$\mathbb{C}$ de merkezil birim çember

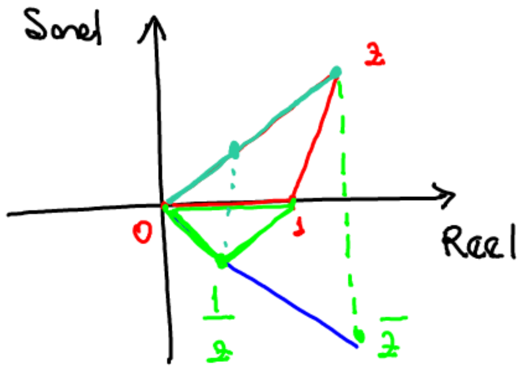


$$\boxed{z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}}$$

Birim çemberde inversiyon

$\mathbb{C}$ de merkezil birim çembere göre inversiyon damaktır.

$\overset{\triangle}{(0,1,z)} \sim \overset{\triangle}{(0,\frac{1}{\bar z},1)}$



$z \xrightarrow{\text{inversiyon}} \frac{1}{\bar z} \xrightarrow{\text{yansıma}} \frac{1}{z}$

$z \xrightarrow{\text{yansıma}} \bar z \xrightarrow{\text{inversion}} \frac{1}{z}$

$z \mapsto \frac{1}{z}$ dönüşümü inversiyon + yansıma dır.

$w(z)=\frac{1}{z}$ dönüşümü $w: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ olup yansıma ve merkezil birim çembere göre inversiyondur.

(sonsuzdaki nokta, sonsuz kompleks sayı, ideal nokta)

∞, kompleks düzlemin hemen dışında bir nokta olsun.

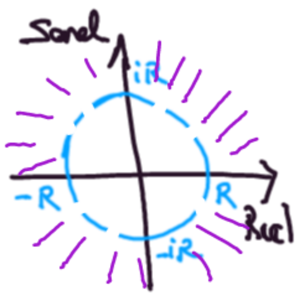
$\mathbb{C}\cup\{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$ genişletilmiş kompleks düzlem (inversiyon düzlemi, invers düzlem)

$a\in\mathbb{C}$ o.ü., $\frac{a}{\infty}=0$; $\frac{a}{0}=\infty$; $\infty\mp a=\infty$; $\infty\cdot a=\infty$; $\infty\cdot\infty=\infty$

olacaktır.

$\infty\mp\infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; $\infty\cdot 0$ belirsiz hallerdir.

$R>0$ o.ü. $\{z \mid |z|>R\}$ kümesi ∞ noktasının bir komşuluğudur.



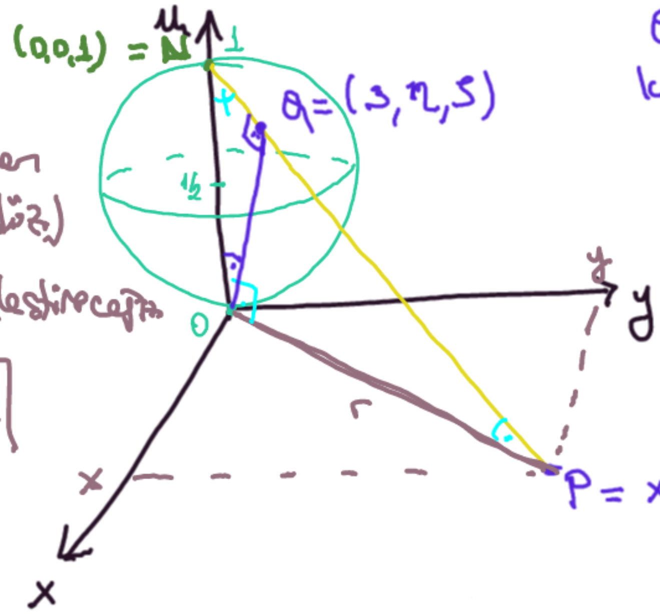
$w(z)=\frac{1}{z}$ olsun. $|z|>R \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<R \Rightarrow |w|<R$ dur.

Steorafik izdüşüm

$$x^2+y^2+u^2=u \Rightarrow x^2+y^2+u^2-u=0$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+\underbrace{u^2-u+\tfrac{1}{4}}-\tfrac{1}{4}=0$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+(u-\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{1}{4} \longrightarrow$$ Merkezi $(0,0,\tfrac{1}{2})$ ve $r=\tfrac{1}{2}$ olan küredir.

Küre üzerindeki noktaları xy-düzlemindeki ($\mathbb{C}$ düz.) nok. ile 1:1 olarak eşleştireceğiz.

$\boxed{\text{Steorafik izdüşüm}}$



Q küre üzerinde o halde kürenin denklemini sağlar $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\zeta$ olmalıdır.

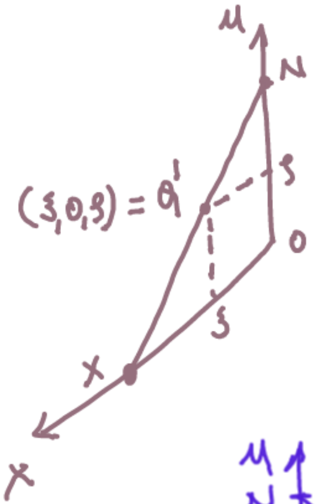
$$\overset{\triangle}{OPN} \sim \overset{\triangle}{QON} \Leftrightarrow \frac{|OP|}{|QO|}=\frac{|ON|}{|QN|}=\frac{|PN|}{|ON|} \Rightarrow \boxed{\frac{r}{\sqrt{\zeta}}=\frac{1}{\sqrt{1-\zeta}}=\frac{\sqrt{1+r^2}}{1}}$$

$$|QO|=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}=\sqrt{\zeta}$$

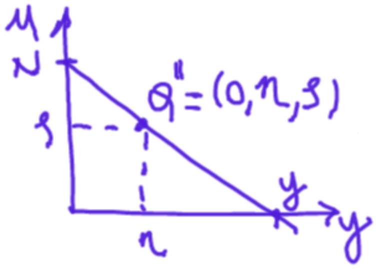
$$|QN|=\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-1)^2}=\sqrt{\underbrace{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}_{\zeta}-2\zeta+1}=\sqrt{1-\zeta}$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{\zeta}=\frac{1}{1-\zeta}=\frac{1+r^2}{1}$$ olur.

$$\boxed{\zeta=\frac{r^2}{1+r^2}} \qquad \boxed{1-\zeta=\frac{1}{1+r^2}}$$



$$\frac{x}{\xi}=\frac{1}{1-\varsigma} \Rightarrow \boxed{x=\frac{\xi}{1-\varsigma}}$$



$$\frac{y}{\eta}=\frac{1}{1-\varsigma} \Rightarrow \boxed{y=\frac{\eta}{1-\varsigma}}$$

$$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow \left(\frac{\xi}{1-\varsigma}\right)^2+\left(\frac{\eta}{1-\varsigma}\right)^2=\frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\varsigma)^2}=\frac{\overbrace{\varsigma-\varsigma^2}^{\varsigma(1-\varsigma)}}{(1-\varsigma)^2}=\boxed{\frac{\varsigma}{1-\varsigma}=r^2}$$

Küre → Düzlem

$(\xi,\eta,\varsigma) \longrightarrow (x,y)$

$$x=\frac{\xi}{1-\varsigma},\quad y=\frac{\eta}{1-\varsigma},\quad r^2=\frac{\varsigma}{1-\varsigma}$$

Düzlem → Küre

$(x,y) \longrightarrow (\xi,\eta,\varsigma)$

$$\xi=\frac{x}{1+r^2},\quad \eta=\frac{y}{1+r^2},\quad \varsigma=\frac{r^2}{1+r^2}$$

Steorofik izdüşüm

$$\xi=x(1-\varsigma)=x\left(1-\frac{r^2}{1+r^2}\right)=\frac{x}{1+r^2}$$

$$\eta=y(1-\varsigma)=\frac{y}{1+r^2}$$

$$\varsigma=r^2(1-\varsigma)=\frac{r^2}{1+r^2}$$

Teorem: Steorofik izdüşüm düzlemdeki doğru ve çemberleri küre üzerindeki çemberlere dönüştürür. Tersine kürenin üzerindeki çemberler steorofik izdüşüm altında düzlemdeki doğrulara ve çemberlere dönüşür.

KÜRE $\xleftarrow{\text{steorofik izdüşüm}}$ DÜZLEM

Çemberler ⟷ Doğrulara veya çemberlere

İspat: Küre üzerindeki çember, bir düzlem ile kürenin kesişimidir. $Ax+By+Cu=D$ düzlemini alalım. (ξ,η,ς) çember üzerindeki bir nokta olsun. O zaman (ξ,η,ς) çember üzerinde olduğundan

$$A\xi+B\eta+C\varsigma=D$$

bulunur. Stereografik izdüşüm uygulanırsa

$$A\xi+B\eta+C\varsigma=D \Rightarrow A\frac{x}{1+r^2}+B\frac{y}{1+r^2}+C\frac{r^2}{1+r^2}=D$$

$$\Rightarrow Ax+By+Cr^2=D(1+r^2)$$

$$\Rightarrow Ax+By+(C-D)r^2=D \longrightarrow (r^2=x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow (C-D)(x^2+y^2)+Ax+By=D$$

→ $C=D$ ise $Ax+By=D$ olup doğrudur.

→ $C\neq D$ ise $(C-D)(x^2+y^2)+Ax+By=D$ olup çember olur.

———— o ————

Aksine düzlemdeki doğru veya çember alınırsa;

$$(C-D)(x^2+y^2)+Ax+By=D$$ ← Düzlemdeki doğru veya çember

Stereografik izdüşüm uygulandı

$$\Rightarrow (C-D)\left(\left(\frac{\xi}{1-\varsigma}\right)^2+\left(\frac{\eta}{1-\varsigma}\right)^2\right)+A\frac{\xi}{1-\varsigma}+B\frac{\eta}{1-\varsigma}=D$$

(ξ,η,ς) küre üzerindeki nokta
$\xi^2+\eta^2+\varsigma^2=\varsigma \Rightarrow \xi^2+\eta^2=\varsigma-\varsigma^2$
$=\varsigma(1-\varsigma)$

$$\Rightarrow (C-D)\frac{\boxed{\xi^2+\eta^2}}{(1-\varsigma)^2}+A\frac{\xi}{1-\varsigma}+B\frac{\eta}{1-\varsigma}=D$$

$$\Rightarrow (C-D)\frac{\varsigma(1-\varsigma)}{(1-\varsigma)^2}+\frac{A\xi}{1-\varsigma}+B\frac{\eta}{1-\varsigma}=D$$

$$\Rightarrow (C-D)\varsigma+A\xi+B\eta=D(1-\varsigma)$$

$$\Rightarrow A\xi+B\eta+C\varsigma=D$$ elde edilir.

Düzlem (küreyi kesen) yani küre üzerindeki çemberdir.

Yardımcı Teorem: İki doğru arasındaki açı stereografik izdüşüm altında onların görüntü çemberleri arasındaki açıya eşittir.

$\overset{m_1}{l_1}$ ile $\overset{m_2}{l_2}$ arasındaki açı $\tan\theta=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ dir.

$A_1x+B_1y=D_1 \ldots l_1 \rightarrow A_1x+B_1y=D_1(1-u)$

$A_2x+B_2y=D_2 \ldots l_2 \rightarrow A_2x+B_2y=D_2(1-u)$

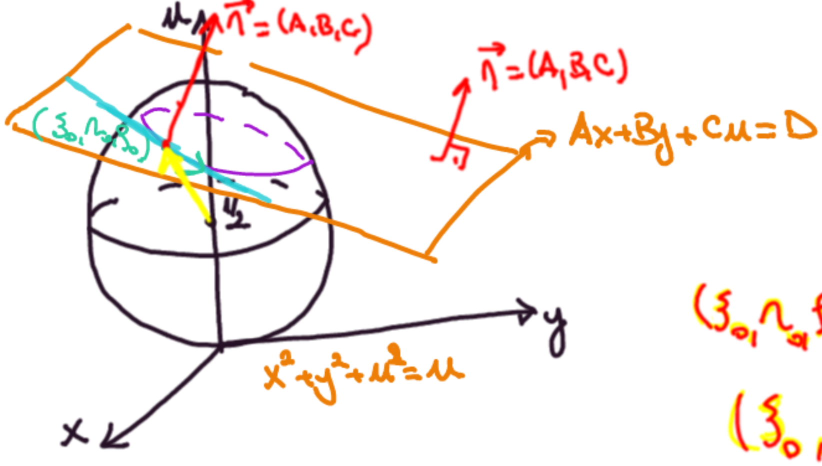
düzlemler arasındaki

Ödev!

Yardımcı Teorem: (ξ_0,η_0,ζ_0) noktasında $Ax+By+Cu=D$; $x^2+y^2+u^2=u$ çemberine teğet olan doğru

$$\frac{x-\xi_0}{B(\zeta_0-\frac{1}{2})-C\eta_0}=\frac{y-\eta_0}{C\xi_0-A(\zeta_0-\frac{1}{2})}=\frac{z-\zeta_0}{A\eta_0-B\xi_0}$$

şeklinde ifade edilir.



Doğrunun denklemini yazmak için bir nokta ve doğrultuya ihtiyaç vardır.

(ξ_0,η_0,ζ_0) ile $(0,0,\frac{1}{2})$ yardımıyla $(\xi_0,\eta_0,\zeta_0-\frac{1}{2})$ vektörü kürenin normali olur.

Buna göre doğrunun doğrultusu

$$(A,B,C)\times(\xi_0,\eta_0,\zeta_0-\tfrac{1}{2})=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A & B & C \\ \xi_0 & \eta_0 & \zeta_0-\frac{1}{2}\end{vmatrix}$$

$$=\left(B(\zeta_0-\tfrac{1}{2})-C\eta_0,\ C\xi_0-A(\zeta_0-\tfrac{1}{2}),\ A\eta_0-B\xi_0\right)$$

olarak bulunur. O halde ilgili teğet doğrunun denklemi

$$\frac{x-\xi_0}{B(\zeta_0-\frac{1}{2})-C\eta_0}=\frac{y-\eta_0}{C\xi_0-A(\zeta_0-\frac{1}{2})}=\frac{z-\zeta_0}{A\eta_0-B\xi_0}$$

olur.

Teorem: Stereografik izdüşüm bir konformal dönüşümdür.

(Stereografik izdüşüm açıların büyüklüğünü (ölçüsünü) korur!)

İspat: Dif. bilir bir eğrinin teğet doğrusunun görüntüsünün eğrinin görüntüsüne teğet old. ispatlamak yeterlidir.

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ düzlemde dif.bilir bir eğri olsun. $t = t_0$ anındaki noktaya P diyelim. Ayrıca $x_0 = x(t_0)$ ve $y_0 = y(t_0)$ olsun. Bu takdirde

$$x = \xi(t) = \frac{x(t)}{1+x^2(t)+y^2(t)} \quad , \quad y = \eta(t) = \frac{y(t)}{1+x^2(t)+y^2(t)} \quad , \quad u = \zeta(t) = \frac{x^2(t)+y^2(t)}{1+x^2(t)+y^2(t)}$$

küre üzerinde eğrinin görüntüsüdür. üstelik $\xi_0 = \xi(t_0)$, $\eta_0 = \eta(t_0)$, $\zeta_0 = \zeta(t_0)$ diyelim. P nin stereografik izdüşüm dönüşümü altındaki görüntüsü Q olsun. Buna göre Q noktada görüntü eğrisine teğet olan doğru

$$\frac{x-\xi_0}{\xi'(t_0)} = \frac{y-\eta_0}{\eta'(t_0)} = \frac{u-\zeta_0}{\zeta'(t_0)}$$

şeklindedir. Dif bilirden dolayı

$$\xi'(t_0) = \frac{x'(t_0)\left(1+x^2(t_0)+y^2(t_0)\right) - x(t_0)\left(2x(t_0)x'(t_0)+2y(t_0)y'(t_0)\right)}{\left(1+x^2(t_0)+y^2(t_0)\right)^2}$$

$$= \frac{x'(t_0)\left(1-x^2(t_0)+y^2(t_0)\right) - 2x(t_0)y(t_0)y'(t_0)}{\left(1+x^2(t_0)+y^2(t_0)\right)^2} = \frac{x'(t_0)(1-x_0^2+y_0^2) - 2x_0y_0y'(t_0)}{(1+x_0^2+y_0^2)^2}$$

$$\eta'(t_0) = \frac{y'(t_0)\left(1+x^2(t_0)+y^2(t_0)\right) - y(t_0)\left(2x(t_0)x'(t_0)+2y(t_0)y'(t_0)\right)}{\left(1+x^2(t_0)+y^2(t_0)\right)^2}$$

$$= \frac{y'(t_0)(1+x_0^2-y_0^2) - 2x_0y_0x'(t_0)}{(1+x_0^2+y_0^2)^2}$$

$$\zeta'(t_0) = \frac{\left(2x(t_0)x'(t_0)+2y(t_0)y'(t_0)\right)\left(1+x^2(t_0)+y^2(t_0)\right) - \left(x^2(t_0)+y^2(t_0)\right)\left(2x(t_0)x'(t_0)+2y(t_0)y'(t_0)\right)}{\left(1+x^2(t_0)+y^2(t_0)\right)^2}$$

$$= \frac{2x_0x'(t_0)+2y_0y'(t_0)}{(1+x_0^2+y_0^2)^2}$$ bulunur. Bu takdirde

$$\frac{x-\xi_0}{x'(t_0)(1-x_0^2+y_0^2) - 2x_0y_0y'(t_0)} = \frac{y-\eta_0}{y'(t_0)(1+x_0^2-y_0^2) - 2x_0y_0x'(t_0)} = \frac{z-\zeta_0}{2x_0x'(t_0)+2y_0y'(t_0)}$$

olur.

Şimdi orjinde eğrinin P noktadaki teğet doğrusu ((x_0, y_0) noktada $m = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$ eğimli doğrunun denklemi)

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - y_0 = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x - x_0) \Rightarrow y'(t_0)x - x'(t_0)y = y'(t_0)x_0 - x'(t_0)y_0$$

olacaktır. $A = y'(t_0)$, $B = -x'(t_0)$ ve $C = D = y'(t_0)x_0 - x'(t_0)y_0$ dır. Bir önceki yardımcı teoremde ifade edildiği gibi düzlemdeki teğetin görüntüsü küredeki görüntünün teğetidir.

$$B(\zeta_0 - \tfrac{1}{2}) - C\eta_0 = -x'(t_0)\underbrace{(\zeta_0 - \tfrac{1}{2})} - \left(y'(t_0)x_0 - x'(t_0)y_0\right)\eta_0$$

$$= -x'(t_0)\frac{x_0^2 + y_0^2 - 1}{2(1 + x_0^2 + y_0^2)} - 2\left(y'(t_0)x_0 - x'(t_0)y_0\right)\frac{y_0}{2(1 + x_0^2 + y_0^2)}$$

$$\Rightarrow 2(1 + x_0^2 + y_0^2)\left(B(\zeta_0 - \tfrac{1}{2}) - C\eta_0\right) = x'(t_0)(1 - x_0^2 - y_0^2) - 2\left(y'(t_0)x_0 - x'(t_0)y_0\right)y_0$$

$$= x'(t_0)(1 - x_0^2 - y_0^2) - 2y'(t_0)x_0y_0 + 2x'(t_0)y_0^2$$

$$= x'(t_0)(1 - x_0^2 + y_0^2) - 2y'(t_0)x_0y_0$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\frac{x_0}{1 + x_0^2 + y_0^2} \qquad \underbrace{\frac{x_0^2 + y_0^2 - 1}{2(1 + x_0^2 + y_0^2)}}$$

$$C\xi_0 - A(\zeta_0 - \tfrac{1}{2}) = \left(y'(t_0)x_0 - x'(t_0)y_0\right)\xi_0 - y'(t_0)(\zeta_0 - \tfrac{1}{2})$$

$$= y'(t_0)(1 + x_0^2 - y_0^2) - 2x_0y_0x'(t_0)$$

dır. Ayrıca

$$\frac{y_0}{1 + x_0^2 + y_0^2} \qquad \frac{x_0}{1 + x_0^2 + y_0^2}$$

$$A\eta_0 - B\xi_0 = y'(t_0)\eta_0 + x'(t_0)\xi_0$$

$$\Rightarrow 2(1 + y_0^2 + x_0^2)(A\eta_0 - B\xi_0) = 2\left(x'(t_0)x_0 + y'(t_0)y_0\right)$$ bulunur.

Yani düzlemdeki eğrinin teğetinin görüntüsü eğrinin görüntüsüne teğet olduğu anlaşılır. Bu ise stereografik izdüşümün konformal olduğunu gösterir.

Ödev $\rightarrow$ sy 34 (1)-(2)-(3)

LİNEER KESİRLİ DÖNÜŞÜMLER (HOMOGRAFİ MÖBİUS DÖNÜŞÜMÜ)

$\overline{\mathbb{C}}$ ifadesi genişletilmiş kompleks düzlemi göstermek üzere $w: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ dönüşümü $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ olü.
$w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ formunda ise w ya bir lineer kesirli dönüşüm (homografi veya Möbius dönüşümü) adı verilir.

$$\boxed{a,b,c,d \in \mathbb{C} \text{ ve } ad-bc \neq 0 \qquad w(z) = \frac{az+b}{cz+d}}$$

$ad - bc = 0$ olduğunu varsayalım. O zaman $c \neq 0$ ise $b = \dfrac{ad}{c}$ olur.

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az + \frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{\frac{\overbrace{acz+ad}^{a(cz+d)}}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} \text{ bulunur.}$$

$ad-bc=0 \Rightarrow w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c}$ olur. Dolayısıyla sabit dönüşüm olur.

Lineer kesirli dönüşüm $w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc \neq 0)$

* $a = d = 1$, $c = 0$ olsun. Bu takdirde $w(z) = z + b$ olur. Buna göre her $z \in \overline{\mathbb{C}}$ için z ye $b \in \mathbb{C}$ yi eklenmiş olur. Yani z vektörü, b vektörü kadar ötelenir. Bu bir öteleme dönüşümüdür.

* $b = c = 0$, $d = 1$ olsun. Bu takdirde $w(z) = az$ olur. Bu ise $\arg a$ kadar bir dönme ve $|a|$ kadar gerilme (büyüme veya küçülme) işlemidir.
Eğer $|a| = 1$ ise bu ifade $\arg a$ kadar bir dönme dönüşümü olur.
$a \in \mathbb{R}$ ise $w(z) = a.z$ ifadesi bir homotetidir $\rightarrow$ (Sadece büyütme veya küçültme)

* $a = d = 0$, $b = c = 1$ olsun. Bu takdirde $w(z) = \dfrac{1}{z}$ olur.
$w(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ olur. Bu dönüşüm birim çemberde inversiyon ve reel eksene göre yansıma idi.

* $c=0$ olsun. Bu taktirde $w(z)=\frac{az+b}{d}=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$ olur.
Bu ifade dönme-gerilme ve ötelemedir.

* $c\neq 0$ olsun. Bu taktirde $w(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ olur.

$$w(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{az+b+\frac{ad}{c}-\frac{ad}{c}}{cz+d}=\frac{\frac{a}{c}(cz+d)+b-\frac{ad}{c}}{cz+d}$$

$$=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cz+d}=\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cz+d}+\frac{a}{c}$$

elde edilir. Bu ifade inversiyon, yansıma, dönme-gerilme ve ötelemedir.

<u>Teorem</u>: Lineer kesirli dönüşümler (Möbius dön.leri) genişletilmiş kompleks düzlemi kendisine dönüşür. Dönüşüm doğru ve çemberleri, doğru ve çemberlere dönüştürür. Üstelik açıları da korur.

<u>İspat (Ödev!)</u>

$T_1(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ ve $T_2(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ şeklinde verilen iki Möbius dönüşümü olsun. Buna göre bu iki Möbius dön. bileşkesi yine bir Möbius dön. müdür?

$$(T_2\circ T_1)(z)=T_2(T_1(z))=\frac{\alpha\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)+\beta}{\gamma\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)+\delta}=\frac{\frac{\alpha az+\alpha b+\beta cz+\beta d}{cz+d}}{\frac{\gamma az+\gamma b+\delta cz+\delta d}{cz+d}}=\frac{(\alpha a+\beta c)z+(\alpha b+\beta d)}{(\gamma a+\delta c)z+(\gamma b+\delta d)}$$

elde edilir. Burada açıkça $a,b,c,d,\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{C}$ old. $\alpha a+\beta c,\ \alpha b+\beta d,\ \gamma a+\delta c,\ \gamma b+\delta d\in\mathbb{C}$ olur. Bunun bir Möbius dön. olması için $ad-bc\neq 0$ ve $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ olup $(\alpha a+\beta c)(\gamma b+\delta d)-(\alpha b+\beta d)(\gamma a+\delta c)$ ifadesinin sıfırdan farklı old. gösterilmelidir.

$(\alpha a+\beta c)(\gamma b+\delta d)-(\alpha b+\beta d)(\gamma a+\delta c)$

$=\alpha a\gamma b+\alpha a\delta d+\beta c\gamma b+\beta c\delta d-\alpha b\gamma a-\alpha b\delta c-\beta d\gamma a-\beta d\delta c$

$=\alpha\delta(ad-bc)+\beta\gamma(bc-ad)$

$=\underbrace{(ad-bc)}_{\neq 0}\underbrace{(\alpha\delta-\beta\gamma)}_{\neq 0}\neq 0$ olur. O halde iki Möbius dön. bileşkesi yine bir Möbius dönüşümüdür.

$T_1(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ ve $T_2(z) = \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ möbius dön. ele aldık

$$T_1(z) \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad T_2(z) \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

$$(T_2 \circ T_1)(z) \longleftrightarrow \underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}}^{T_2}}_{A} \underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}^{T_1}}_{B} = \underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} \alpha a+\beta c & \alpha b+\beta d \\ \gamma a+\delta c & \gamma b+\delta d \end{bmatrix}}^{T_2 \circ T_1}}_{C}$$

elde edilir. $(T_2 \circ T_1)(z) = \dfrac{(\alpha a+\beta c)z + (\alpha b+\beta d)}{(\gamma a+\delta c)z + (\gamma b+\delta d)}$ olarak bulunmuştur.

$C = A.B$ ve $\overbrace{\det A \neq 0}^{\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0}$, $\overbrace{\det B \neq 0}^{ad-bc\neq 0}$ old. $\det C = \det(AB) \neq 0$ dır.

⊛ T_1, T_2, T_3 üç Möbius dön.ü ise $T_3(T_2\, T_1) = (T_3\, T_2)T_1$ dir.

$$T_1 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad T_2 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \qquad T_3 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$ olsun.

Buna göre $T_3 \circ T_2 \circ T_1$ yine bir lin. kes. dön. (Möbius dön) olur.

Dön bulmak için $\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisleri çarpılmalıdır.

Matrislerde çarpma işlemi asosyatiftir (birleşimlidir). Bu nedenle önce hangi iki matrisin çarpıldığının önemi yoktur. Çünkü sonuç değişmez. O halde bu özellik yani asosyatiflik möbius dön. içinde doğrudur.

Yani $T_3 \circ (T_2 \circ T_1) = (T_3 \circ T_2) \circ T_1$ olur.

⊛ $T_0(z) = z$ bir dön. ele alalım. Dikkat edilirse bu bir möbius dön.dür. $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ için $a=1$, $b=c=0$, $d=1$ iken $T_0(z)=z$ dır ve üstelik $ad-bc = 1.1-0.0 = 1 \neq 0$ dır. Bu T_0 möbius dön birim döndür. üstelik T bir möbius dön. ise

$$T \circ T_0 = T_0 \circ T = T$$

olur.

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}\ ,\quad T_0(z)=z \text{ o.ü.}$$

$$(T\circ T_0)(z)=T(T_0(z))=\frac{a\,T_0(z)+b}{c\,T_0(z)+d}=\frac{az+b}{cz+d}=T(z)\ ,$$

$$(T_0\circ T)(z)=T_0(T(z))=T(z) \text{ bulunur.}$$

⊛ $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ Möbius dön verilsin. Buna göre $T^{-1}(z)$ var mıdır?

$$w=T(z)=\frac{az+b}{cz+d}\Rightarrow w=\frac{az+b}{cz+d}$$

$$\Rightarrow wcz+wd=az+b$$

$$\Rightarrow (cw-a)z=-dw+b$$

$$\Rightarrow z=\frac{-dw+b}{cw-a} \text{ elde edilir.}$$

Buna göre $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ iken $T^{-1}(z)=\dfrac{-dz+b}{cz-a}$ dir.

O halde her Möbius dön tersi vardır. Ayrıca

$$T\circ T^{-1}=T^{-1}\circ T=T_0$$

olur.

$$(T\circ T^{-1})(z)=T(T^{-1}(z))=\frac{a\cdot\left(\frac{-dz+b}{cz-a}\right)+b}{c\left(\frac{-dz+b}{cz-a}\right)+d}=\frac{-adz+ab+bcz-ab}{-cdz+bc+cdz-ad}$$

$$=\frac{(-ad+bc)z}{(bc-ad)}=z \text{ dir.}$$

$$(T^{-1}\circ T)(z)=T^{-1}(T(z))=\frac{-d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)+b}{c\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)-a}=\frac{-adz-bd+bcz+bd}{caz+cb-acz-ad}$$

$$=\frac{(-ad+bc)z}{(cb-ad)}=z \text{ olur.}$$

Buna göre açıkça Möbius dön. kümesi bileşke işlemi altında bir grup yapısı oluştururlar.

$\{$ i) Kapalılık ✓
ii) Birleşmeli ✓
iii) Etkisiz eleman ✓
iv) Ters eleman ✓

⑧ $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ Möbius dönüşümünün sabit noktası var mıdır?

Yani $T(z) = z$ o.ş. $z \in \mathbb{C}$ var mıdır?

$$T(z) = z \Rightarrow \frac{az+b}{cz+d} = z$$

$$\Rightarrow cz^2 + dz = az+b$$

$$\Rightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

Buna göre elde edilen bu 2. derece denklemin kökleri varsa onlar T nin sabit noktaları olur.

elde edilir.

$c = 0 \Rightarrow (d-a)z - b = 0 \Rightarrow z = \dfrac{b}{d-a}$

$c = 0$ dır $\Leftrightarrow \infty$, T nin sabit noktasıdır

$c = 0$ ve $\dfrac{a}{d} \neq 1$ dır $\Leftrightarrow \infty$ ve $\dfrac{b}{d-a}$ T nin sabit noktalarıdır

$c = 0$ ve $a = d$ ise $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{az+b}{a} = z + \dfrac{b}{a}$ olup dönüşüm bir ötelemedir. Dolayısıyla tek sabit nokta ∞ dur.

$c \neq 0$ ise $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ denk kökleri çakışabilir. Ancak mutlaka en az bir kök vardır.

Teorem: Birim olmayan bir Möbius dönüşümü en çok iki sabit noktaya sahiptir. Özel olarak bir Möbius dönüşümü üç noktayı sabit bırakıyorsa birim dönüşümdür.

Teorem: Verilen farklı z_1, z_2, z_3 noktalarını sırasıyla verilen farklı w_1, w_2, w_3 noktalarına dönüştüren bir tek Möbius dön. vardır.

İspat:

$$\boxed{\begin{array}{l} z_1 \longrightarrow w_1 \\ z_2 \longrightarrow w_2 \\ z_3 \longrightarrow w_3 \end{array} \quad \text{dön. Möbius dön tektir.}}$$

$$T_1(z) = \frac{z-z_1}{z-z_3}\,\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} \quad \text{ve} \quad T_2(z) = \frac{z-w_1}{z-w_3}\,\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}$$

iki Möbius dön. verilsin. Buna göre burada T_1 dönüşümü z_1, z_2, z_3 sırasıyla $0, 1, \infty$ dönüştürür. Benzer şekilde T_2 dönüşümü de w_1, w_2, w_3 sırasıyla $0, 1, \infty$ dönüştürür. Burada $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3 \neq \infty$ dur. Eğer $z_1 = \infty$ ise $T_1(z) = \dfrac{z_2-z_3}{z-z_3}$,

$z_2 = \infty$ ise $T_1(z) = \dfrac{z-z_1}{z-z_3}$ ve $z_3 = \infty$ ise $T_1(z) = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ olur.

Bunun tamamen benzeri T_2 içinde geçerlidir. Buna göre

$T = T_2^{-1} \circ T_1$ dönüşümü $\underline{z_1, z_2, z_3}$ ü $\Rightarrow$ $\underline{w_1, w_2, w_3}$ e dönüştürür.

$$\begin{tikzcd}
z_1 \arrow[r, bend left, "T_1"] \arrow[r] & 0 & w_1 \arrow[l, bend right, "T_2"'] \arrow[l, "T_2^{-1}"] \\
z_2 \arrow[r] & 1 & w_2 \arrow[l] \\
z_3 \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "T_2^{-1} \circ T_1"'] & \infty & w_3 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} z_i \xrightarrow[S]{T} w_i \\ \xleftarrow{S^{-1}} \\ z_i \xrightarrow{T} w_i \xrightarrow{S^{-1}} z_i \end{array}}$$

Şimdi varsayalım ki S de z_1, z_2, z_3 ü w_1, w_2, w_3 e dönüştüren bir başka Möbius dön. olsun. Bu takdirde $S^{-1} \circ T$ dönüşümü z_1, z_2, z_3 ü sabit bırakır. Ancak üç noktayı sabit bırakan dönüşüm birim dönüşüm olurdu. O halde $S^{-1} \circ T = T_0 \Rightarrow S \circ (S^{-1} \circ T) = S \circ T_0 \Rightarrow T = S$ dir.

O halde z_1, z_2, z_3 ü w_1, w_2, w_3 e dönüştüren dönüşüm bir tanedir. (Tek türlü belirlidir.)

ÇİFTE ORAN (Genişletilmiş Kompleks Düzlemde)

$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ olsun. (Yani genişletilmiş kompleks düzlemde herhangi dört nokta dır.) Bu taktirde

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$$

ş. tanımlanan ifadeye z_1, z_2, z_3, z_4 ün çifte oranı denir.
(Burada $z_j = \infty$ ise ∞ içeren iki çarpan silinmelidir!..)
Dikkat edilirse z_1, z_2, z_3, z_4 ün tamamı reel eksen üzerinde ise daha önce gördüğümüz dört doğrudaş noktanın çifte oranı ile aynıdır.

Teorem: Dört noktanın çifte oranı bir Möbius dön. altında invaryanttır. (Möbius dön. ü dört noktanın çifte oranını korur.)

İspat: $w = T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ bir Möbius dönüşümü ve $i = 1,2,3,4$ için w_i ifadesi z_i nin görüntüsü olsun yani $T(z_i) = w_i$ olsun.
Bu taktirde

$$w_i - w_j = \frac{az_i+b}{cz_i+d} - \frac{az_j+b}{cz_j+d}$$

$$= \frac{(az_i+b)(cz_j+d) - (az_j+b)(cz_i+d)}{(cz_i+d)(cz_j+d)}$$

$$= \frac{\underline{acz_iz_j} + adz_i + bcz_j + \underline{\underline{bd}} - \underline{acz_iz_j} - adz_j - bcz_i - \underline{\underline{bd}}}{(cz_i+d)(cz_j+d)}$$

$$= \frac{(ad-bc)(z_i - z_j)}{(cz_i+d)(cz_j+d)}$$

elde edilir. Buna göre

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = \frac{(w_1-w_3)(w_2-w_4)}{(w_1-w_4)(w_2-w_3)}$$

$$= \frac{\dfrac{\cancel{(ad-bc)}(z_1-z_3)}{\cancel{(cz_1+d)}\cancel{(cz_3+d)}} \cdot \dfrac{\cancel{(ad-bc)}(z_2-z_4)}{\cancel{(cz_2+d)}\cancel{(cz_4+d)}}}{\dfrac{\cancel{(ad-bc)}(z_1-z_4)}{\cancel{(cz_1+d)}\cancel{(cz_4+d)}} \cdot \dfrac{\cancel{(ad-bc)}(z_2-z_3)}{\cancel{(cz_2+d)}\cancel{(cz_3+d)}}}$$

$$= \frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$$

$$= (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

sonucuna ulaşılır. Yani Möbius dön.ü dört noktanın çifte oranını kor

Ödev sy 37 (1)-(2)-(3) sorular

Teorem: $i = 1,2,3,4$ a.ü. z_i' ; z_i nok.larının bir C çemberine göre inversiyonu altında inversi olsun. Bu taktirde;

$$(z_1', z_2', z_3', z_4') = \overline{(z_1, z_2, z_3, z_4)}$$

olur.

İspat: C, z_0 merkezli ve r yarıçaplı bir çember olsun. Buna göre C çemberine göre inversiyon

$$z' = z_0 + \frac{r^2}{\overline{z - z_0}}$$ olur.

=o=

$z \longmapsto \frac{1}{\bar z} \to m=(0,0)$ ve $r=1$ için inversiyon.

$z \longmapsto \frac{r^2}{\bar z} \to m=(0,0)$ ve r yarıçapı için inversiyon

$$z \xmapsto[\text{orjine çekelim}]{\text{öteleme}} z-z_0 \xmapsto{\text{inversiyon}} \frac{r^2}{\overline{z-z_0}} \xmapsto[\text{geri öteledik}]{\text{öteleme}} z_0+\frac{r^2}{\overline{z-z_0}}$$

=o=

$$z_i' - z_j' = \left(z_0 + \frac{r^2}{\overline{z_i - z_0}}\right) - \left(z_0 + \frac{r^2}{\overline{z_j - z_0}}\right)$$

$$= \frac{r^2\left(\overline{z_j - z_0} - \overline{z_i - z_0}\right)}{\left(\overline{z_i - z_0}\right)\left(\overline{z_j - z_0}\right)}$$

$$= \frac{r^2\left(\bar z_j - \bar z_i\right)}{\left(\bar z_i - \bar z_0\right)\left(\bar z_j - \bar z_0\right)}$$

elde edilir. Buna göre

$$(z_1', z_2', z_3', z_4') = \frac{(z_1' - z_3')(z_2' - z_4')}{(z_1' - z_4')(z_2' - z_3')}$$

$$= \frac{\dfrac{\cancel{r^2}(\bar z_1 - \bar z_3)}{\cancel{(\bar z_1 - \bar z_0)}\cancel{(\bar z_3 - \bar z_0)}} \cdot \dfrac{\cancel{r^2}(\bar z_2 - \bar z_4)}{\cancel{(\bar z_2 - \bar z_0)}\cancel{(\bar z_4 - \bar z_0)}}}{\dfrac{\cancel{r^2}(\bar z_1 - \bar z_4)}{\cancel{(\bar z_1 - \bar z_0)}\cancel{(\bar z_4 - \bar z_0)}} \cdot \dfrac{\cancel{r^2}(\bar z_2 - \bar z_3)}{\cancel{(\bar z_2 - \bar z_0)}\cancel{(\bar z_3 - \bar z_0)}}}$$

$$= \frac{(\bar z_1 - \bar z_3)(\bar z_2 - \bar z_4)}{(\bar z_1 - \bar z_4)(\bar z_2 - \bar z_3)} = \overline{\left(\frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}\right)}$$

$$= (\bar z_1, \bar z_2, \bar z_3, \bar z_4) = \overline{(z_1, z_2, z_3, z_4)}$$ dir.

Teorem: Dört farklı nokta çemberdeş veya doğrudaştır.

$$\Updownarrow$$

Bu nok.ların çifte oranı reeldir.

İspat: z_1, z_2, z_3, z_4 dört farklı nokta ve T de sırasıyla z_1, z_2, z_3 noktalarını $\infty, 0, 1$ noktalarına dönüştüren bir Möbius dön. olsun. Yani

$$T(z) = \frac{(z_1-z_3)(z_2-z)}{(z_1-z)(z_2-z_3)} \leftarrow T(z) = \frac{(z_2-z)(z_1-z_3)}{(z_1-z)(z_2-z_3)}$$

dür. Bu takdirde

$$
\begin{aligned}
(z_1, z_2, z_3, z_4) &= (T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) \\
&= (\infty, 0, 1, T(z_4)) \longrightarrow \frac{(\cancel{\infty}-1)(0-T(z_4))}{(\cancel{\infty}-T(z_4))(0-1)} \\
&= T(z_4)
\end{aligned}
$$

olur. T bir Möbius dön old. doğru ve çemberleri, doğru ve çembere dönüştürür. $\infty, 0, 1$ nok.ları doğrudaştır. Buna göre reel eksen ($\infty, 0, 1$ den geçen doğru) z_1, z_2, z_3 den geçen bir doğru veya çemberin görüntüsüdür. Böylelikle

z_4 bu doğru veya çemberin üzerindedir

$$\Updownarrow$$

$T(z_4)$ reeldir.

olur.

$z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ ve $\lambda \neq 0, 1, \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ o.ş. $\lambda \in \mathbb{C}$ verildiğinde

$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \lambda$ o.ş. z_4 var mıdır?

$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \lambda$

$$\Rightarrow \frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)} = \lambda \Rightarrow (z_1-z_3)(z_2-z_4) = \lambda(z_1-z_4)(z_2-z_3)$$

$$\Rightarrow (z_1-z_3)z_2 - \lambda z_1(z_2-z_3) = (z_1-z_3)z_4 - \lambda(z_2-z_3)z_4$$

$$\Rightarrow z_4 = \frac{(z_1-z_3)z_2 - \lambda z_1(z_2-z_3)}{(z_1-z_3)-\lambda(z_2-z_3)} \text{ dur.}$$

z_1, z_2, z_3, λ belli iken z_4 tek olarak bellidir.

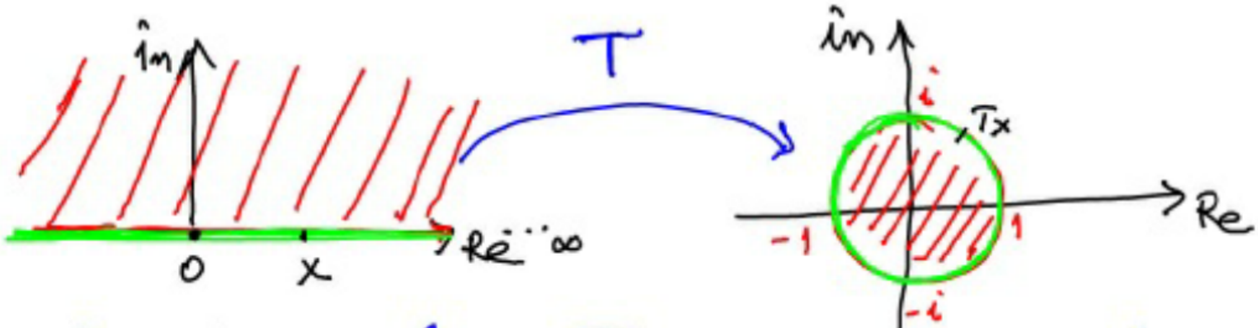
$\lambda = 0 \Rightarrow z_4 = z_2$ X

$\lambda = 1 \Rightarrow z_4 = z_3$ X

$\lambda = \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} \Rightarrow z_4 = \frac{*}{0}$ X

olacağından $\lambda \neq 0, 1, \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ dir.

Bazı Özel Möbiüs Dönüşümleri



$\{z \in \mathbb{C} \mid im(z) \geq 0\} \xrightarrow{T} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$

$Tz = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$

sağlayan Möbiüs dön. var mıdır?

Dönüşüm $Tz = \frac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc \neq 0)$ olsun.

Dönüşüm reel ekseni kapalı birim diskin sınırına yani çembere dönüştürsün!...

$$|T(0)| = 1 \Rightarrow \left|\frac{b}{d}\right| = 1 \Rightarrow |b| = |d|$$

$$|T(\infty)| = 1 \Rightarrow \left|\frac{a}{c}\right| = 1 \Rightarrow |a| = |c| \quad \text{olur.}$$

$$Tz = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a(z+\frac{b}{a})}{c(z+\frac{d}{c})} = \frac{a}{c}\,\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}} = e^{i\theta}\,\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}$$

$|b| = |d|$ ve $|a| = |c|$ old $\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{d}{c}\right|$ dir.

$x \in \mathbb{R}$ ise $|Tx| = 1$ olmalıdır.

$$Tx = e^{i\theta}\,\frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}} \quad \text{olur.}$$

$$|Tx| = \left|e^{i\theta}\,\frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}}\right| = \left|\frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}}\right| = 1 \Rightarrow \left|x+\frac{b}{a}\right| = \left|x+\frac{d}{c}\right| \text{ olur}$$

$$\underbrace{\left|x+\frac{b}{a}\right|^2} = \underbrace{\left|x+\frac{d}{c}\right|^2}$$

$$\underbrace{\left(x+\frac{b}{a}\right)\left(x+\overline{\frac{b}{a}}\right)} = \underbrace{\left(x+\frac{d}{c}\right)\left(x+\overline{\frac{d}{c}}\right)} \Longrightarrow \underbrace{\left(\frac{b}{a}+\overline{\frac{b}{a}}\right)}x = \underbrace{\left(\frac{d}{c}+\overline{\frac{d}{c}}\right)}x$$

$$x^2+\left(\frac{b}{a}+\overline{\frac{b}{a}}\right)x+\left|\frac{b}{a}\right|^2 = x^2+\left(\frac{d}{c}+\overline{\frac{d}{c}}\right)x+\left|\frac{d}{c}\right|^2$$

$2\mathrm{Re}\left(\frac{b}{a}\right) = 2\mathrm{Re}\left(\frac{d}{c}\right)$ elde edilir.

$\hookrightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{b}{a}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{d}{c}\right)$ dir.

Aynı real kısım ve aynı modüle sahip old

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \text{veya} \quad \frac{b}{a} = \overline{\frac{d}{c}}$$

olur.

(i) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow Tz = e^{i\theta}\,\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}} \Rightarrow \boxed{Tz = e^{i\theta}}$

(ii) $\frac{b}{a} = \frac{\bar{d}}{\bar{c}} \Rightarrow Tz = e^{i\theta} \dfrac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}} \Rightarrow Tz = e^{i\theta} \dfrac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{\bar{b}}{\bar{a}}}$ $\left(z_0 = -\frac{b}{a}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{Tz = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}}$$ bulunur.

↳ üst yarı düzlemi birim diske götüren en genel dön. dür.

z_0 üst yarı düzlemde   üst yarı düzlem $\xrightarrow{T}$ birim diskiçi

z_0 alt yarı düzlemde   üst yarı düzlem $\xrightarrow{T}$ birim disk dışı

Birim diski ⟶ Birim diske dönüştüren en genel Möbius dönüşümü nedir?

$Tz = e^{i\theta} \dfrac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$ ← üst yarı düzlemi birim diske dönüştüren dönüşüm.

$$w = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \Rightarrow w(z - \bar{z}_0) = e^{i\theta}(z - z_0)$$

$$\Rightarrow wz - w\bar{z}_0 = e^{i\theta} z - e^{i\theta} z_0$$

$$\Rightarrow wz - e^{i\theta} z = w\bar{z}_0 - e^{i\theta} z_0$$

$$\Rightarrow z(w - e^{i\theta}) = w\bar{z}_0 - e^{i\theta} z_0$$

$$\Rightarrow z = \frac{\bar{z}_0 w - e^{i\theta} z_0}{w - e^{i\theta}}$$ bulunur.

$$Tz = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \Rightarrow \underbrace{T^{-1} z = \frac{\bar{z}_0 z - e^{i\theta} z_0}{z - e^{i\theta}}}_{\text{Birim disk} \longrightarrow \text{üst yarı-düzlem}}$$ dur.

$\zeta = S(z) = -i\,\dfrac{z-1}{z+1}$ dön. ola alalım. $\left(T^{-1}\text{'z de } z_0 = i,\ e^{i\theta} = -1 \text{ alalım} \right)$

$\mathcal{U}(z) = T(\zeta) = TS(z) \longrightarrow$ birim diski, birim diske dönüştürür

$$\mathcal{U}(z) = T(S(z)) = T\left(-i\,\frac{z-1}{z+1}\right)$$

$$= e^{i\theta}\,\frac{-i\,\frac{z-1}{z+1} - z_0}{-i\,\frac{z-1}{z+1} - \bar{z}_0}$$

$$= e^{i\theta}\,\frac{-i(z-1) - z_0(z+1)}{-i(z-1) - \bar{z}_0(z+1)}$$

$$= e^{i\theta}\,\frac{-(z_0+i)z - (z_0-i)}{-(\bar{z}_0+i)z - (\bar{z}_0-i)}$$

$$= e^{i\theta}\,\frac{(z_0+i)(-1)\left[z + \frac{z_0-i}{z_0+i}\right]}{(\bar{z}_0-i)\left[\frac{-(\bar{z}_0+i)}{\bar{z}_0-i}\,z - 1\right]}$$

$\boxed{z_1 = -\dfrac{z_0-i}{z_0+i} \text{ denirse}}$

$$= \boxed{e^{i\phi}\,\frac{z-z_1}{\bar{z}_1 z - 1}} \longrightarrow$$

Birim diski birim diske dön. en genel dönüşüm

z_0 üst yarı düzl. old. $\left|\dfrac{z_0-i}{z_0+i}\right| < 1$ dir.

$\mathcal{U}(z) = e^{i\phi}\,\dfrac{z-z_1}{\bar{z}_1 z - 1}$, ϕ bir reel sayı, z_1 birim diskin içinde

$$Tz = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1.z}{\bar{z}.z} = \frac{z}{|z|^2}$$ → Merkezil birim çemberdeki inversiyon.

$$Tz = \frac{r^2}{\bar{z}}$$ → Merkezil r yarıçaplı çembere göre inversiyon

$$Tz = z_0 + \frac{r^2}{\bar{z}-\bar{z}_0} = \frac{z_0\bar{z} + (r^2 - |z_0|^2)}{\bar{z}-\bar{z}_0}$$ → Merkezi z_0 ve yarıçapı r olan çembere göre inversiyon

$a,b,c,d \in \mathbb{C}$ ve $ad-bc \neq 0$ o.ü. $Tz = \dfrac{az+b}{cz+d}$ → Möbius dön. lin. kes. dön. homografi

$a,b,c,d \in \mathbb{C}$ ve $ad-bc \neq 0$ o.ü.

$$Tz = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$$

şeklinde tanımlı $T: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ dön.üne anti-Möbius dönü (anti-homografi) adı verilir.

$c=0 \Rightarrow Tz = \frac{a}{d}\bar{z} + \frac{b}{d}$ → dönme-gerilme + reel eks. yansıma + öteleme

$$c \neq 0 \Rightarrow Tz = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} = \frac{\frac{a}{c}\left(c\bar{z}+\frac{bc}{a}\right)}{c\bar{z}+d} = \frac{\frac{a}{c}\left(c\bar{z}+d-d+\frac{bc}{a}\right)}{c\bar{z}+d}$$

$$= \frac{\frac{a}{c}\cancel{(c\bar{z}+d)}}{\cancel{c\bar{z}+d}} + \frac{\frac{a}{c}\left(-d+\frac{bc}{a}\right)}{c\bar{z}+d}$$ → $\left(-\frac{ad}{c}+b\right) = \frac{1}{c}(-ad+bc)$

$$= -\frac{ad-bc}{c}\,\frac{1}{c\bar{z}+d} + \frac{a}{c}$$ → dönme-gerilme + inversiyon + reel eks. yansıma + öteleme

$$T_1 z = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \quad , \quad T_2 z = \frac{\alpha \bar{z}+\beta}{\gamma \bar{z}+\delta}$$ iki anti-möbius dön olsun.

Bu iki dönüşümün bileşkesi

$$(T_2 \circ T_1)(z) = T_2(T_1 z)$$

$$= \frac{\alpha\left(\overline{\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}}\right)+\beta}{\gamma\left(\overline{\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}}\right)+\delta}$$

$$= \frac{\alpha\,\overline{(a\bar{z}+b)}+\beta\,\overline{(c\bar{z}+d)}}{\gamma\,\overline{(a\bar{z}+b)}+\delta\,\overline{(c\bar{z}+d)}}$$

$$= \frac{\alpha(\bar{a}z+\bar{b})+\beta(\bar{c}z+\bar{d})}{\gamma(\bar{a}z+\bar{b})+\delta(\bar{c}z+\bar{d})}$$

$$= \frac{(\alpha\bar{a}+\beta\bar{c})z+(\alpha\bar{b}+\beta\bar{d})}{(\gamma\bar{a}+\delta\bar{c})z+(\gamma\bar{b}+\delta\bar{d})}$$

$$(\alpha\bar{a}+\beta\bar{c})(\gamma\bar{b}+\delta\bar{d})-(\alpha\bar{b}+\beta\bar{d})(\gamma\bar{a}+\delta\bar{c})$$

$$= \cancel{\alpha\gamma\bar{a}\bar{b}}+\alpha\delta\bar{a}\bar{d}+\beta\gamma\bar{c}\bar{b}+\cancel{\beta\delta\bar{c}\bar{d}}-\cancel{\alpha\gamma\bar{b}\bar{a}}-\alpha\delta\bar{b}\bar{c}-\beta\gamma\bar{d}\bar{a}-\cancel{\beta\delta\bar{d}\bar{c}}$$

$$= \alpha\delta(\bar{a}\bar{d}-\bar{b}\bar{c})+\beta\gamma(\bar{c}\bar{b}-\bar{a}\bar{d})$$

$$= (\bar{a}\bar{d}-\bar{b}\bar{c})(\alpha\delta-\beta\gamma)$$

$$= \underbrace{\underbrace{\overline{(ad-bc)}}_{\neq 0}\underbrace{(\alpha\delta-\beta\gamma)}_{\neq 0}}_{\neq 0} \neq 0$$ dır. O halde anti-möbius dönüşümlerin bileşkesi möbius dön.dür.

Bu durumda anti-möbius dön bileşke işlemine göre kapalı olmadığından grup teşkil etmezler.

$$T_1 z = \frac{az+b}{cz+d} \quad , \quad T_2 z = \frac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}$$ dön. alalım

T_1 → möbius dön. T_2 → anti-möbius dön

$$(T_2 \circ T_1)(z) = T_2\left(\overline{T_1 z}\right)$$

$$= \frac{\alpha\left(\overline{\frac{az+b}{cz+d}}\right)+\beta}{\gamma\left(\overline{\frac{az+b}{cz+d}}\right)+\delta}$$

$$= \frac{(\alpha\bar{a}+\beta\bar{c})\bar{z}+(\alpha\bar{b}+\beta\bar{d})}{(\gamma\bar{a}+\delta\bar{c})\bar{z}+(\gamma\bar{b}+\delta\bar{d})} \longrightarrow \text{Anti-Möbius dön. dür.}$$

$$(\alpha\bar{a}+\beta\bar{c})(\gamma\bar{b}+\delta\bar{d})-(\alpha\bar{b}+\beta\bar{d})(\gamma\bar{a}+\delta\bar{c})$$

$$= \cancel{\alpha\gamma\bar{a}\bar{b}}+\alpha\delta\bar{a}\bar{d}+\beta\gamma\bar{b}\bar{c}+\cancel{\beta\delta\bar{c}\bar{d}}-\cancel{\alpha\gamma\bar{a}\bar{b}}-\alpha\delta\bar{b}\bar{c}-\beta\gamma\bar{a}\bar{d}-\cancel{\beta\delta\bar{c}\bar{d}}$$

$$= (\alpha\delta-\beta\gamma)\overline{(ad-bc)} \neq 0 \text{ dır.}$$

$(T_1 \circ T_2)(z) = \ldots$ bu da bir anti möbius dön. dür

$\{$Möbius Dön.leri$\} \cup \{$Anti-möbius Dön.leri$\}$

$T_1 z = \dfrac{az+b}{cz+d} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\quad$ $T_2 z = \dfrac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

$T_1 \circ T_2 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

$T_2 \circ T_1 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\overline{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$

T_1, T_2, T_3 herhangi möbius veya anti-möbius dön. olsun.

$(T_1 \circ (T_2 \circ T_3))(z) = ((T_1 \circ T_2) \circ T_3)(z)$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \longrightarrow$ matris çarpma işlemine göre birleşmeli old. birleşmelidir (Asosyatiftir!)

T_1 bir möbius veya antimöbius olsun. $Iz = z$ ve $I: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ den alsın. Bu taktirde açıkça

$$T_1 \circ I = I \circ T_1 = T_1$$

olur. I etkisiz elemandır.

$$T \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (ad-bc \neq 0 \text{ old her zaman tersi vardır}$$

O halde eldeki küme bir gruptur. Bu gruba genişletilmiş möbius dön grubu denir.

<u>Teorem:</u> Anti-homografiler (anti-möbius) doğruları ve çemberleri doğrulara ve çemberlere dönüştürür ve de dönüşüm konformaldir.

Anti-möbius dön. bir çifte oranı korur mu?

$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ ve z_1', z_2', z_3', z_4' de z_1, z_2, z_3, z_4 sırasıyla $Tz = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ anti-möbius dön altında görüntüsü olsun.

$$(z_1', z_2', z_3', z_4') = \frac{(z_1'-z_3')(z_2'-z_4')}{(z_1'-z_4')(z_2'-z_3')}$$

$$z_i' - z_j' = \frac{a\bar{z}_i+b}{c\bar{z}_i+d} - \frac{a\bar{z}_j+b}{c\bar{z}_j+d}$$

$$= \frac{\overbrace{(a\bar{z}_i+b)(c\bar{z}_j+d) - (a\bar{z}_j+b)(c\bar{z}_i+d)}^{\cancel{ac\bar{z}_i\bar{z}_j} + ad\bar{z}_i + bc\bar{z}_j + \cancel{bd} - \cancel{ac\bar{z}_j\bar{z}_i} - ad\bar{z}_j - bc\bar{z}_i - \cancel{bd}}}{(c\bar{z}_i+d)(c\bar{z}_j+d)}$$

$$= \frac{(ad-bc)(z_i - z_j)}{(c\bar{z}_i + d)(c\bar{z}_j + d)} \quad \text{olur.}$$

$$(z_1', z_2', z_3', z_4') = \frac{(z_1' - z_3')(z_2' - z_4')}{(z_1' - z_4')(z_2' - z_3')}$$

$$= \frac{\dfrac{\cancel{(ad-bc)}(z_1 - z_3)}{\cancel{(c\bar{z}_1 + d)}\cancel{(c\bar{z}_3 + d)}} \cdot \dfrac{\cancel{(ad-bc)}(z_2 - z_4)}{\cancel{(c\bar{z}_2 + d)}\cancel{(c\bar{z}_4 + d)}}}{\dfrac{\cancel{(ad-bc)}(z_1 - z_4)}{\cancel{(c\bar{z}_1 + d)}\cancel{(c\bar{z}_4 + d)}} \cdot \dfrac{\cancel{(ad-bc)}(z_2 - z_3)}{\cancel{(c\bar{z}_2 + d)}\cancel{(c\bar{z}_3 + d)}}}$$

$$= \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

$= (z_1, z_2, z_3, z_4)$ olur. Demekki çifte oran korunur!...