Evritim Teori

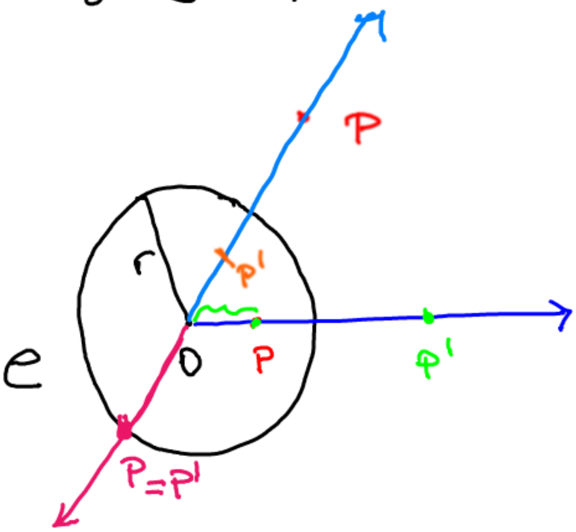
Evritim (Evirtim) inversion

e; O merkezli, r yarıçaplı bir çember olsun.

$$i : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$
$$P \longmapsto i(P) = P'$$

$P' \in \overrightarrow{OP}$ ($\overrightarrow{OP}$ ışını) ve $|OP||OP'| = r^2$ o.ş. tanımlı P' noktasına P nin inversi (evritiği) denir. Dönüşüme de inversiyon dön.ü denir.

Burada e ye inversiyon çemberi, O ya inversiyon merkezi, r de inversiyon yarıçapı denir.



$\underbrace{d(O,P)}_{|OP|} \cdot \underbrace{d(O,P')}_{|OP'|} = r^2$

P e nin içinde ise $|OP| < r$ old. $|OP'| > r$ olup P', e nin dışındadır.

P e nin dışında ise $|OP| > r$ old $|OP'| < r$ olup P', e nin içindedir.

P, e nin üzerinde üzerinde ise $|OP| = r$ olup $|OP'| = r$ olmak zorundadır. $P' \in \overrightarrow{OP}$ old $P' = P$ dir. O halde e üzerindeki tüm noktalar sabit kalır. Yani her $P \in e$ için $i(P) = P$ old e inversiyon altında sabit kalır. (Nokta_nokta _sabittir)

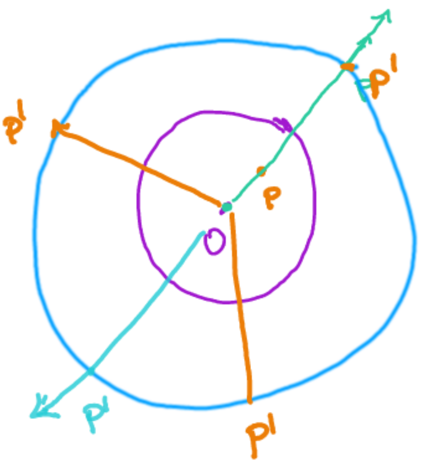
$P \to O$ için $P' \to \infty$ olur. Bu halde düzlemin dışında yer alan bir P_∞ noktası alalım. Adı da ideal nokta olsun. Buna göre

$$i : \mathbb{R}^2 \cup \{P_\infty\} \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}^2 \cup \{P_\infty\}} \longrightarrow \text{Genişletilmiş düzlem}$$
$$O, P_\infty \neq P \longmapsto i(P) = P', \quad P' \in \overrightarrow{OP}, \quad |OP||OP'| = r^2$$
$$O \longmapsto i(O) = P_\infty$$

$P_\infty \longmapsto i(P_\infty) = 0$

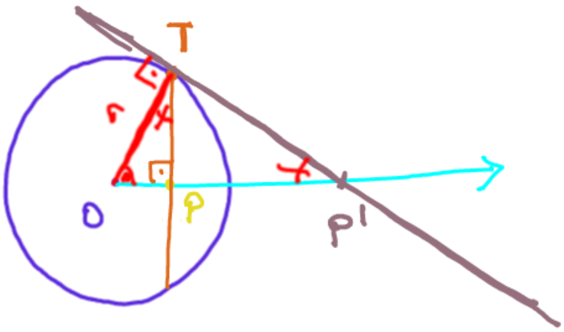
involusyon $\rightarrow$ $\underbrace{T^2 = I}_{T = T^{-1}}$ dönüşüme involusyon denir.

Düzlemde geometride merarda 3 involusyon
- π lik dönme
- Bir doğruya göre yansıma
- inversiyon



$|OP||OP'| = r^2$ ($P' \in \overrightarrow{OP}$ koşulu yok!)

P' nok.ları $\frac{r^2}{|OP|}$ yarıçaplı çember üzerinde olur.

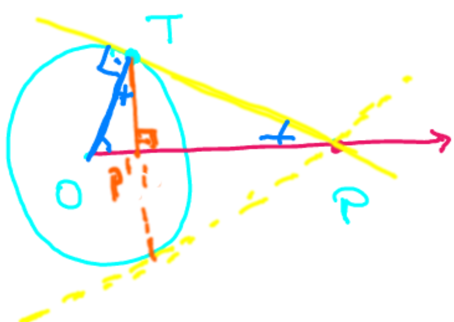


1) $\overrightarrow{OP}$ ışınını çiz.
2) P den geçen $\overrightarrow{OP}$ dik doğruyu al
3) 2) adımda aldığın doğrunun $\mathcal{C}$ yi kestiği noktalardan birini al.
4) Bu noktada $\mathcal{C}$ ye teğet at.
5) Teğetin $\overrightarrow{OP}$ kestiği nokta P' dır.

$\overset{\Delta}{POT} \cong \overset{\Delta}{TOP'}$ dir (Açı-Açı-Açı)

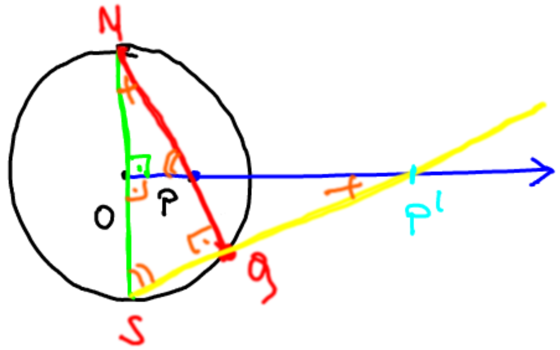
O halde $\underbrace{\frac{|PO|}{|TO|} = \frac{|OT|}{|OP'|}}_{} = \frac{|PT|}{|TP'|}$ olmak zorundadır.

$|OP||OP'| = |OT|^2 = r^2$ bulunur.



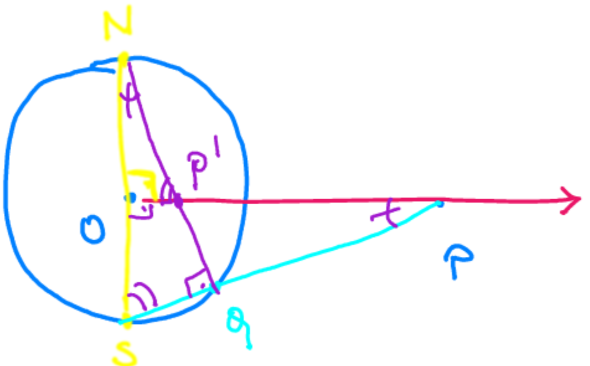
ispatı

$\overset{\Delta}{TOP'} \cong \overset{\Delta}{POT}$ dir.



$\overset{\triangle}{NOP} \cong \overset{\triangle}{P'OS}$ dir. O halde $\underbrace{\frac{|NO|}{|P'O|} = \frac{|OP|}{|OS|}}$ $= \frac{|NP|}{|P'S|}$ olur.

$|OP|\,|OP'| = |ON|\,|OS| = r^2$ dir.

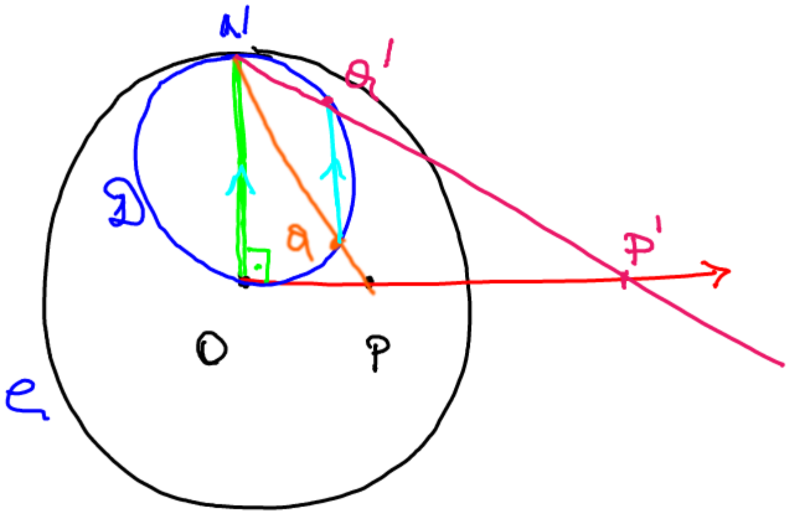


ÖDEV!

Doğrunun ispatı!...

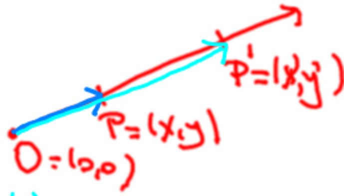
Yol Gösterme

Benzerlik kullan!...



Analitik Yöntem

Kolaylık olsun diye (genelliği bozmaksızın) $\mathcal{C}$ inversiyon çemberinin merkezini $O=(0,0)$ alalım. $P=(x,y)$ ve $P'=(x',y')$ diyelim. $i(P)=P'$ dön.ü bulalım.



$$\underbrace{|OP|}_{\sqrt{x^2+y^2}}\,\underbrace{|OP'|}_{\sqrt{x'^2+y'^2}} = r^2$$

$$\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{x'^2+y'^2} = r^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2} = r^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}\,|\lambda|\sqrt{x^2+y^2} = r^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{r^2}{x^2+y^2}}$$

$P' \in \overrightarrow{OP}$ olmalıdır.

$$\overrightarrow{OP'} = \lambda\, \overrightarrow{OP} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}^+)$$

$$\Rightarrow P'-O = \lambda(P-O)$$

$$\Rightarrow (x'-0,y'-0) = \lambda(x-0,y-0)$$

$$\Rightarrow (x',y') = \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$$

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases}$$

$$\Rightarrow x' = \frac{r^2}{x^2+y^2}\,x, \quad y' = \frac{r^2}{x^2+y^2}\,y$$ bulunur.

$$i(x,y) = \left(\frac{r^2}{x^2+y^2}\,x, \frac{r^2}{x^2+y^2}\,y\right)$$

$$\boxed{i(x,y) = \frac{r^2}{x^2+y^2}\,(x,y)}$$

$O=(0,0)$ merkezli, r yarıçaplı çembere göre inversiyon dönüşümün analitik ifadesidir.

$O=(a,b)$ olsa idi

$$i(x,y) = \frac{r^2}{(x-a)^2+(y-b)^2}\,(x-a,y-b)$$ olur.

$\mathcal{C}$ inversiyon çemberinin merkezi $O=(0,0)$ ve $r=2$ alalım.
Buna göre $P=(2,1)$ noktasının inversiyon altındaki görüntüsü

$$i(x,y)=\frac{r^2}{x^2+y^2}(x,y) \Rightarrow i(2,1)=\underbrace{\frac{2^2}{2^2+1^2}}_{\frac{4}{5}}(2,1)=\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right) \text{ olur.}$$

Teorem: $\mathcal{C}$, O merkezli, r yarıçaplı inversiyon çemberi olsun.
Bu takdirde

(i) O dan geçen doğrular inversiyon altında invaryanttır. (değişmez kalır)

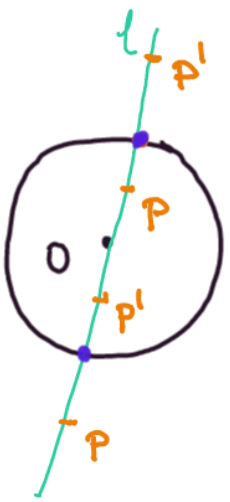
(ii) O dan geçmeyen doğrular inversiyon altında inversiyon merkezinden geçen çemberlere dönüşür.

(iii) O dan geçen çemberler inversiyon altında inversiyon merkezinden geçmeyen doğrulara dönüşür.

(iv) O dan geçmeyen çemberler inversiyon altında inversiyon merkezinden geçmeyen çemberlere dönüşürler.

İspat:

(i)



$i(l)=l$ dir.

$O=(0,0)$ olsun. O dan geçen doğru $ax+by=0 \ldots l$ alalım.

$$i(x,y)=\frac{r^2}{x^2+y^2}(x,y) \Rightarrow \begin{array}{l} x \Rightarrow \dfrac{r^2}{x^2+y^2}x \\ y \Rightarrow \dfrac{r^2}{x^2+y^2}\cdot y \end{array}$$

$$i(\overbrace{ax+by=0}^{l}) = a.\frac{r^2}{x^2+y^2}x + b\frac{r^2}{x^2+y^2}y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{ar^2x+br^2y}{x^2+y^2}=0$$

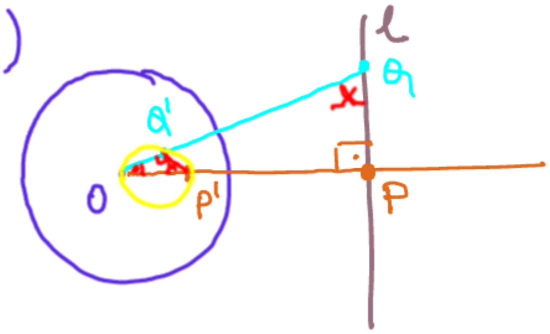
$$\Rightarrow ar^2x+br^2y=0$$

$$\Rightarrow r^2(ax+by)=0$$

$\Rightarrow$ $r\neq 0$ old $r^2\neq 0$ olup $\underbrace{ax+by=0}_{\ell}$ olmalıdır.

Yani $i(\ell)=\ell$ dir.

(ii)



$$\left.\begin{array}{l}|OP||OP'|=r^2\\ |OQ||OQ'|=r^2\end{array}\right\} \Rightarrow |OP||OP'|=|OQ||OQ'| \Rightarrow \frac{|OP|}{|OQ|}=\frac{|OQ'|}{|OP'|} \Rightarrow \underbrace{\overset{\triangle}{OPQ}\simeq\overset{\triangle}{OQ'P'}\text{ olur}}$$

$\underline{Q' \text{ dik açıdır!}}$

Q ℓ üzerinde değiştikçe Q' noktası $\overline{OP'}$ çaplı çember üzerinde değişir. Yani ℓ doğrusu O dan geçen çembere dönüşür.

$ax+by+c=0$ $(c\neq 0)$ alalım.

$$i(ax+by+c=0)= a.\frac{r^2}{x^2+y^2}.x+b\frac{r^2}{x^2+y^2}.y+c=0$$

$$\Rightarrow ar^2x+br^2y+c(x^2+y^2)=0$$

$$\Rightarrow cx^2+ar^2x+cy^2+br^2y=0$$

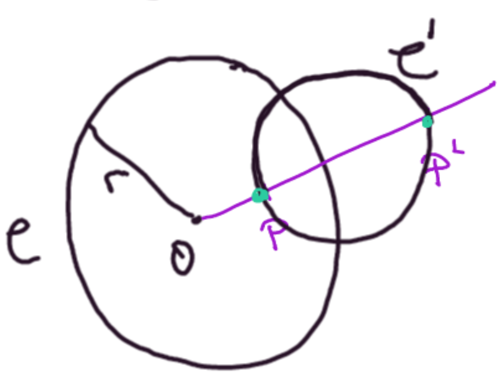
$$\Rightarrow x^2+\frac{ar^2}{c}x+y^2+\frac{br^2}{c}y=0$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{ar^2}{2c}\right)^2+\left(y+\frac{br^2}{2c}\right)^2=\frac{a^2r^4}{4c^2}+\frac{b^2r^4}{4c^2}$$

$M=\left(-\frac{ar^2}{2c},\ -\frac{br^2}{2c}\right)$, $r=\frac{r^2\sqrt{a^2+b^2}}{2c}$ den çember bulunur.

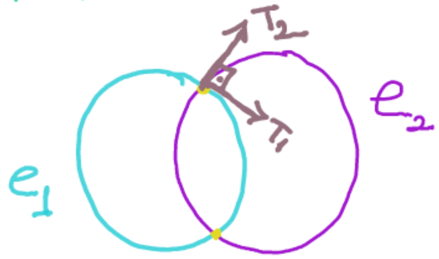
☆ (iii) – (iv) ispatları ödev! (Sentetik ve analitik olarak!)

<u>Teorem:</u> İnvers (eşritik) noktaların bir çiftinden geçen herhangi bir çember inversiyon çemberine diktir.



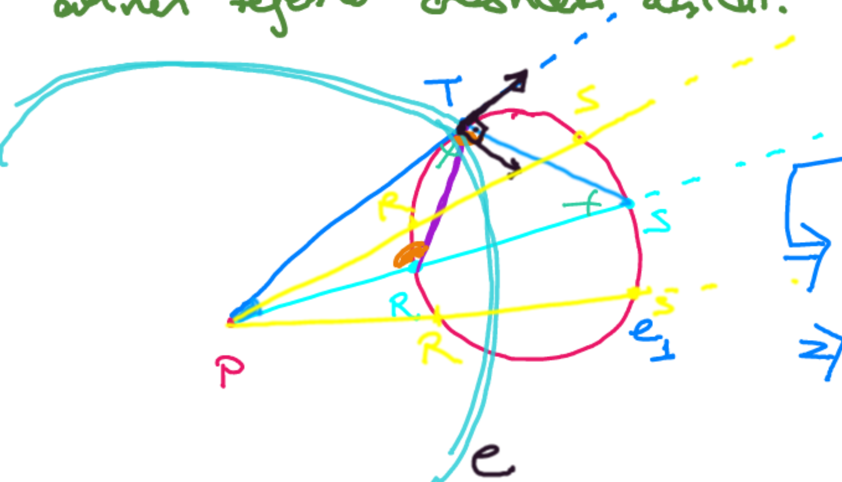
($P, P' \in e'$ ise $e' \perp e$ diktir.)

İki çemberin dik olması ne demektir?



İki çemberin kesiştiği noktada alınan teğetler dik ise bu çemberler diktir.

Gerçekte iki çember arasındaki açı çemberlerin kestiği nok-da alınan teğetler arasındaki açıdır.



$|PT|^2=|PR||PS|$ (Çemberde kuvvet!...)

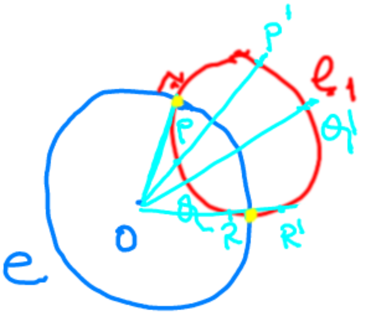
$\Rightarrow |PT||PT|=|PR||PS|$

$\Rightarrow \frac{|PT|}{|PS|}=\frac{|PR|}{|PT|} \Rightarrow \overset{\triangle}{PRT} \sim \overset{\triangle}{PTS}$

$|PT| = r$ yarıçaplı, P merkezli e çemberini ele alalım.

Bu durumda e çemberi ile e_1 çemberi diktir. Üstelik $|PR|.|PS| = |PT|^2 = r^2$ olduğundan R ve S invers çifttir. Yani P merkezli $|PT| = r$ yarıçaplı e çemberine göre inversiyon altında R ve S birbirlerine dönüşür. O halde e ile e_1 dik olduğundan e_1 hangi nok.dan geçerse aynı zamanda o noktanın inversinden de geçer.

Sonuç: İnversiyon çemberine dik olan bir çember inversiyon altında kendisine dönüşür.
(İnversiyon çemberine dik çember inversiyon altında invaryanttır.)

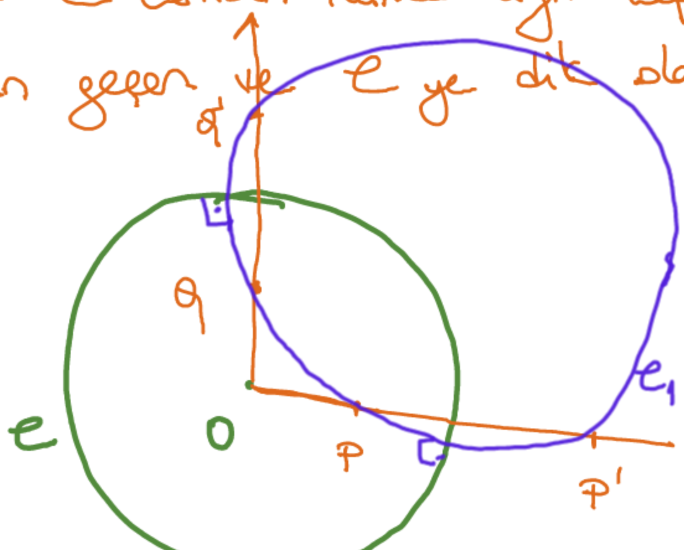


$i(e_1) = e_1$ olur.

Nokta nokta invaryant kalmaz!
Bütün olarak invaryant!

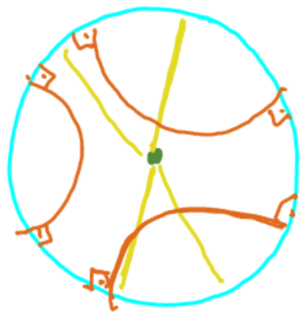
e_1 çemberinin e çemberi içinde kalan noktaları e_1 çemberinin e dışında kalan noktalara dönüşür. Ayrıca e_1 in e dışındaki noktalarıda e nin içindeki noktalara dönüşür.

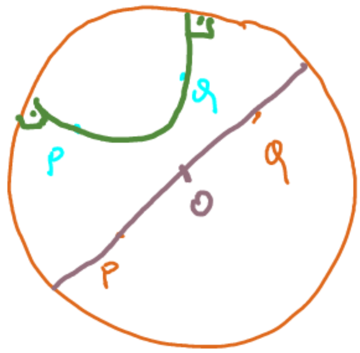
Sonuç: Bir e çemberi içinde aynı çap üzerinde olmayan P ve Q nok.dan geçen ve e ye dik olan bir tek çember vardır.



P, Q, P' bir tek çember
P, Q, Q' bir tek çember

Poincaré disk modeli $\longrightarrow$ Hiperbolik düzlem modeli





Noktalar $\rightarrow$ Diskin içindeki noktalar

Doğrular $\rightarrow$ (1) Çaplar
(2) Diske dik olan çember yayları

Konformallik nedir?

Açıların büyüklüğü koruyan dönüşümlere konformal dön. denir.

(Açıların büyüklüğünü ve yönünü koruyan dönüşümlere konformal dön. denir.)

Soru: İnversiyon dönüşümü konformal midir? (Yani açıların büyüklüklerini korur mu?)

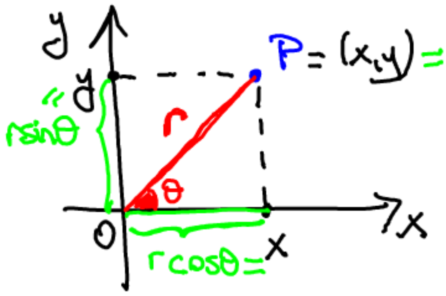
α_1 ve α_2 eğrileri arasındaki açı (T_1 ve T_2 teğetleri arasındaki açı olarak alınır)

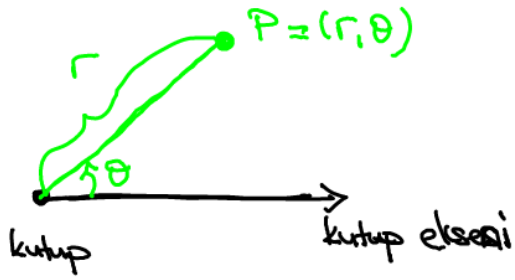
$i(\alpha_1)$ ve $i(\alpha_2)$ arasındaki açı

$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}$

Bu açıların aynı old. gösterilmelidir!

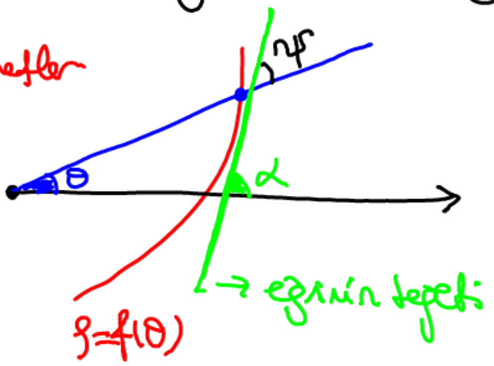
(ρ,θ) kutupsal koor. geçiş yapalım.





$$(x,y) \xrightarrow{\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}} (r,\theta) \qquad (r,\theta) \xrightarrow{\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}} (x,y)$$

$\underbrace{\rho = f(\theta)}_{\text{kutupsal koordinatlar}}$ diferansiyellenebilir eğrisini ele alalım.



ψ eğilim açısı

$\psi = \alpha - \theta$ olur.

$y = \rho\sin\theta$, $\rho = f(\theta)$

$x = \rho\cos\theta$, $\rho = f(\theta)$

$$\tan\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{d\rho}{d\theta}\cdot\sin\theta + \rho\cdot\cos\theta}{\frac{d\rho}{d\theta}\cdot\cos\theta + \rho\,(-\sin\theta)} \quad \text{olur.}$$

$$\tan\psi = \tan(\alpha-\theta) = \frac{\tan\alpha - \tan\theta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\theta}$$

$$= \frac{\frac{\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\frac{\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta}{\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\underline{\rho'\cos\theta\sin\theta} + \rho\cos^2\theta - \underline{\rho'\sin\theta\cos\theta} + \rho\sin^2\theta}{\rho'\cos^2\theta - \underline{\rho\sin\theta\cos\theta} + \rho'\sin^2\theta + \underline{\rho\cos\theta\sin\theta}}$$

$\rightarrow \rho(\overbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}^{=1})$

$\rightarrow \rho'(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{=1})$

$$= \frac{\rho}{\rho'} \quad \text{olur.}$$

$\tan \psi = \frac{\rho}{\rho'} \Rightarrow \cot \psi = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{f'(\theta)}{f(\theta)}$ bulunur.

Teorem: İnversion (evritim) konformal bir dönüşümdür.

İspat: (ρ,θ) kutupsal koor.da çalışacağız. Ayrıca merkezi orijin (kutup noktası) ve yarıçapı r olan inversiyon çemberini alalım. $i=1,2$ için $\rho = f_i(\theta)$ bir P nok.da kesişen iki dif.bilir eğri olsun. Üstelik bu eğrilerin inversion altındaki görüntüleri $i=1,2$ için $\rho = g_i(\theta)$ olsun. Bu takdirde

$$f_i(\theta) \cdot g_i(\theta) = r^2 \Rightarrow g_i(\theta) = \frac{r^2}{f_i(\theta)}$$

bulunur. ψ_i ve ϕ_i sırasıyla $\rho = f_i(\theta)$ ve $\rho = g_i(\theta)$ deki eğilim açıları olsun. P nok.da $\beta = \psi_2 - \psi_1$ ve P' nok.da $\beta' = \phi_2 - \phi_1$ şeklinde adlandırılsın.

$$g_i(\theta) = \frac{r^2}{f_i(\theta)} \Rightarrow g_i'(\theta) = -\frac{r^2 f_i'(\theta)}{f_i^2(\theta)}$$ olur. Bu halde

$$\cot \phi_i = \frac{g_i'(\theta)}{g_i(\theta)} = \frac{-\frac{r^2 f_i'(\theta)}{f_i^2(\theta)}}{\frac{r^2}{f_i(\theta)}} = -\frac{f_i'(\theta)}{f_i(\theta)} = -\cot \psi_i$$ bulunur.

Bu takdirde

$$\cot \beta' = \cot(\phi_2 - \phi_1) = \frac{\cot\phi_1 \cdot \cot\phi_2 + 1}{\cot\phi_2 - \cot\phi_1}$$

$$= \frac{\cot\psi_1 \cdot \cot\psi_2 + 1}{-\cot\psi_2 + \cot\psi_1}$$

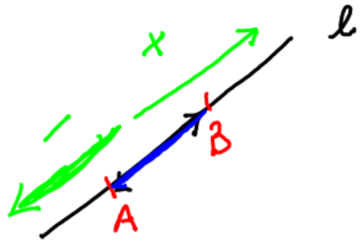
$$= \cot(\psi_1 - \psi_2) = -\cot(\psi_2 - \psi_1) = -\cot\beta = \cot(-\beta)$$

bulunur.

Buna göre inversion dönüşümü açıların büyüklüğünü korur. Yani konformaldır. (Dikkat yönü korumaz! Yönü terse çevirir!)

Ödev! Kitap sy 8 soru 1-2-3-9.10-11 ★

ÇİFTE ORAN



$\overline{AB}$ doğru parçasının yönlü uzunluğu — $\overline{AB}$ doğru parçasının Öklidyen uzunluğu

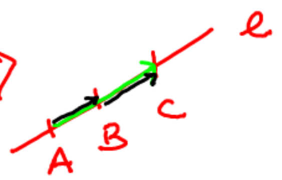
$$|\vec{AB}| = +|AB|$$
$$|\vec{BA}| = -|AB|$$
$$\Big\} \quad |\vec{AB}| = -|\vec{BA}|$$

Yardımcı Teorem: A, B ve C doğrudaş ise $|\vec{AB}|+|\vec{BC}|+|\vec{CA}|=0$ olur.

İspat:

A - C - B
B - A - C
$\boxed{A - B - C}$
B - C - A
C - A - B
C - B - A

A, B, C nok.ları l doğrusu üzerinde 6 farklı şekilde sıralanabilir.

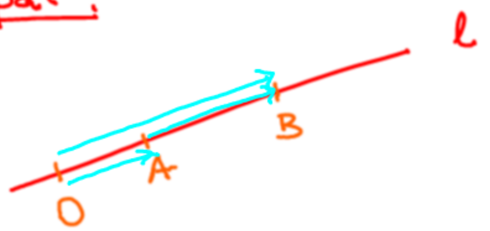


$$|\vec{AC}| = |\vec{AB}| + |\vec{BC}|$$
$$\Rightarrow 0 = |\vec{AB}|+|\vec{BC}| - |\vec{AC}| \qquad \{\, |\vec{AC}| = -|\vec{CA}|$$
$$\Rightarrow 0 = |\vec{AB}|+|\vec{BC}|+|\vec{CA}|$$ bulunur.

Diğer durumlar (5 tane) benzer şekilde gösterilir.

Yardımcı Teorem: $\overline{AB}$, l doğrusunun bir doğru parçası ve O, l nin herhangi bir noktası olsun. Bu taktirde $|\vec{AB}| = |\vec{OB}| - |\vec{OA}|$ olur.

İspat:



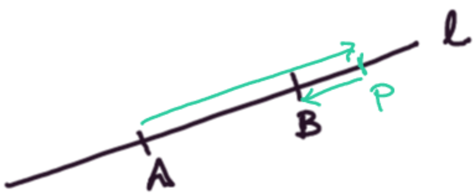
$$|\vec{AB}| = |\vec{OB}| - |\vec{OA}|$$

A, B, O noktaları doğrudaştır. O halde $|\vec{AB}|+|\vec{BO}|+|\vec{OA}|=0$ idi.

$$|\vec{AB}|+|\vec{BO}|+|\vec{OA}|=0 \Rightarrow |\vec{AB}| = \underbrace{-|\vec{BO}|}_{} - |\vec{OA}| \qquad |\vec{BO}| = -|\vec{OB}|$$

$$= |\vec{OB}| - |\vec{OA}| \text{ bulunur.}$$

Tanım: $\overline{AB}$, l nin bir doğru parçası ve $P \in l$ olsun. Bu taktirde P noktasına $\overline{AB}$ doğru parçasını $\dfrac{|\vec{AP}|}{|\vec{PB}|}$ oranında böler denir.



(1) Oran l nin yönlendirilmesinden bağımsızdır.

(2) Oran, P noktası A ile B arasında iken pozitif, P noktası $\overline{AB}$ nin dışında iken negatif olur.

(3) $\dfrac{|\vec{AP}|}{|\vec{PB}|} = \dfrac{|\vec{AP'}|}{|\vec{P'B}|}$ ise $P=P'$ dir.

$$\frac{|\vec{AP}|}{|\vec{PB}|}+1 = \frac{|\vec{AP'}|}{|\vec{P'B}|}+1 \Rightarrow \frac{\overbrace{|\vec{AP}|+|\vec{PB}|}^{|\vec{AB}|}}{|\vec{PB}|} = \frac{\overbrace{|\vec{AP'}|+|\vec{P'B}|}^{|\vec{AB}|}}{|\vec{P'B}|}$$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{AB}|}{|\vec{PB}|} = \frac{|\vec{AB}|}{|\vec{P'B}|} \Rightarrow |\vec{PB}| = |\vec{P'B}|$$

$$\Rightarrow P = P' \text{ olur.}$$

(4) $r \neq -1$ o.ü. $\dfrac{|\vec{AP}|}{|\vec{PB}|} = r$ o.ş. bir P noktası vardır.

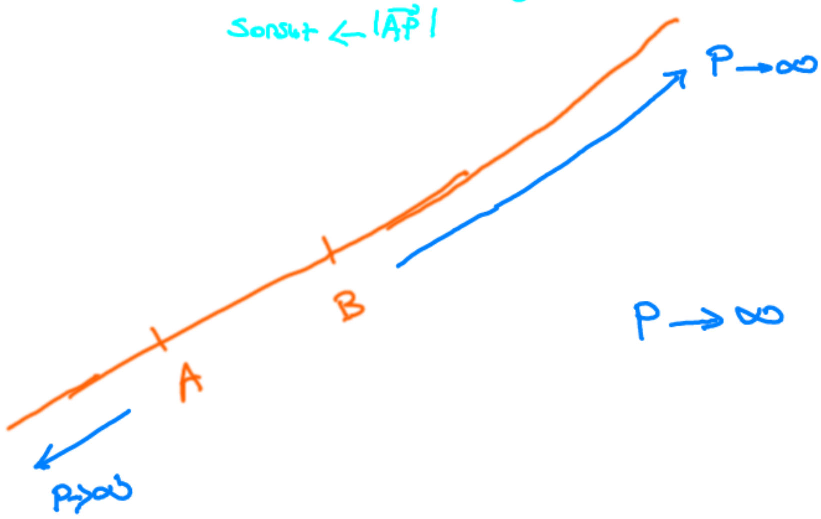
$$r = \frac{|\vec{AP}|}{|\vec{PB}|} = \frac{|\vec{AP}|}{|\vec{AB}|-|\vec{AP}|} \Rightarrow r\left(|\vec{AB}|-|\vec{AP}|\right) = |\vec{AP}| \Rightarrow |\vec{AP}| = \frac{r}{1+r}|\vec{AB}| \text{ yazılabilir.}$$

(5) $\lim\limits_{P\to\infty} \dfrac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = -1$ dir.

$$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|-|\overrightarrow{AP}|} = \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AP}|\left(\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AP}|}-1\right)} = \frac{1}{\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AP}|}-1}$$ elde edilir.

$$\lim_{P\to\infty} \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \lim_{P\to\infty} \frac{1}{\boxed{\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AP}|}}-1} = \frac{1}{0-1} = -1 \text{ olur.}$$

$$\frac{\text{sonlu} \leftarrow |\overrightarrow{AB}|}{\text{sonsuz} \leftarrow |\overrightarrow{AP}|} = 0$$



$P \to \infty$ iken oran $\to -1$

<u>Tanım</u>: ℓ bir yönlendirilmiş doğru ve A, B, C, D ℓ üzerinde farklı dört nokta olsun. Buna göre $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{BC}|}$ ifadesine A, B, C, D noktalarının <u>çifte oranı</u> denir ve (AB, CD) ile gösterilir.

$$(AB, CD) = \frac{|\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AD}|\,|\overrightarrow{BC}|}$$

$$\frac{\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|}}{\dfrac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{DB}|}} = \frac{|\overrightarrow{AC}|\,\overbrace{|\overrightarrow{DB}|}^{-|\overrightarrow{BD}|}}{\underbrace{|\overrightarrow{CB}|}_{-|\overrightarrow{BC}|}\,|\overrightarrow{AD}|} = \boxed{\frac{|\overrightarrow{AC}|.|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AD}|.|\overrightarrow{BC}|}}$$

Çifte oran pozitif → C ile D ikisi de A ile B arasında ise
→ C ile D ikisi de $\overline{AB}$ dışında ise

Çifte oran negatif → C ile D nin sadece birisi A ile B arasında iken
(C ile D nin sadece birisi $\overline{AB}$ dışında iken)

A, B, C ℓ üzerinde üç farklı nokta ve $\mu \neq 0, 1, \dfrac{-|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|}$ o.ş. bir reel sayı verilsin. Bu takdirde $(AB, CD) = \mu$ o.ş. bir tek D noktası vardır.

$$\mu = (AB, CD) = \frac{|\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AD}|\,|\overrightarrow{BC}|} = \frac{|\overrightarrow{AC}|\left[|\overrightarrow{AD}| - |\overrightarrow{AB}|\right]}{|\overrightarrow{AD}|\,|\overrightarrow{BC}|}$$

$$\Rightarrow \mu\left(|\overrightarrow{AD}|\,|\overrightarrow{BC}|\right) = \underbrace{|\overrightarrow{AC}|\left[|\overrightarrow{AD}| - |\overrightarrow{AB}|\right]}$$
$$= |\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{AD}| - |\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{AB}|$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AD}|\left(\mu|\overrightarrow{BC}| - |\overrightarrow{AC}|\right) = -|\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{AB}|$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AD}| = \frac{-|\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{AB}|}{\mu|\overrightarrow{BC}| - |\overrightarrow{AC}|}$$

$\to \mu|\overrightarrow{BC}| - |AC| \neq 0 \Rightarrow \mu \neq \dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{-|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|}$

$\to \mu = 0 \Rightarrow |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}| \Rightarrow D = B$ ↯ çelişki

$\to \mu = 1 \Rightarrow |\overrightarrow{AD}| = \dfrac{-|\overrightarrow{AC}|.|\overrightarrow{AB}|}{\underbrace{|\overrightarrow{BC}| - |AC|}_{-|\overrightarrow{AB}|}} = |AC| \Rightarrow D = C$ çelişki

<u>Tanım:</u> A, B, C, D; ℓ doğrusunun üzerinde yer alan dört farklı nokta olsun. $(AB, CD) = -1$ ise bu noktalara <u>harmonik küme</u> denir, ve $H(AB, CD)$ ile gösterilir. C ile D; A ile B nin <u>harmonik eşleneğidir</u>.
(A ile B; C ile D nin harmonik eşleneğidir.)

$$(AB, CD) = -1 \Rightarrow \frac{|\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{BC}|} = -1$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{BD}| = -|\overrightarrow{AD}|\,|\overrightarrow{BC}|$$

$$\Rightarrow \frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AD}|} = -\frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AC}|} \qquad -|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CB}|$$

$$\Rightarrow \frac{|\overrightarrow{AD}| - |\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AD}|} = \frac{|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AC}|}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{AD}| - |\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|\,|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{AD}|\,|\overrightarrow{AC}|$$

$$\Rightarrow 2|\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AD}|\,|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{AB}|$$

$$\Rightarrow \quad 2|\vec{AC}||\vec{AD}| = |\vec{AB}|\left(|\vec{AD}|+|\vec{AC}|\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2|\vec{AC}||\vec{AD}|}{|\vec{AD}|+|\vec{AC}|} = |\vec{AB}|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|\vec{AD}|+|\vec{AC}|}{2|\vec{AC}||\vec{AD}|} = \frac{1}{|\vec{AB}|}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{|\vec{AB}|} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{|\vec{AC}|}+\frac{1}{|\vec{AD}|}\right] = \frac{\frac{1}{|\vec{AC}|}+\frac{1}{|\vec{AB}|}}{2}$$

$|\vec{AB}|$, $|\vec{AC}|$ ile $|\vec{AD}|$ nın harmonik ortalaması

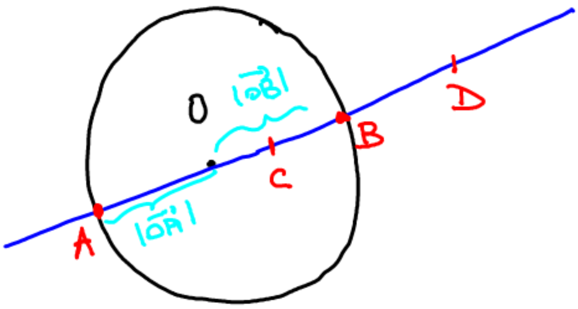
olur. $\frac{1}{|\vec{AB}|}$ ifadesi $\frac{1}{|\vec{AC}|}$ ile $\frac{1}{|\vec{AB}|}$ nin aritmetik ortalamasıdır. (Harmonik ortalama)

<u>Teorem:</u> e, O merkezli bir çember ve C ile D de e ye göre invers (evrik) nokta çifti olsun. A ile B, C ile D den geçen çapın uç noktaları olsun. Bu taktirde $(AB, CD) = -1$ dir.

Tersine A ile B çapın uç noktaları ve $(AB, CD) = -1$ ise C ile D inverstir.

e çemberine göre

$i(C) = D$



<u>İspat:</u> A, B bir çapın uç noktaları ve $(AB, CD) = -1$ olsun.

Göstermem gereken C ile D nin invers olduğudur.

$$(AB,CD) = -1 \Rightarrow \frac{|\vec{AC}||\vec{BD}|}{|\vec{AD}||\vec{BC}|} = -1 \Rightarrow \frac{\frac{|\vec{AC}|}{|\vec{CB}|}}{\frac{|\vec{AD}|}{|\vec{DB}|}} = -1 \Rightarrow \frac{|\vec{AC}|}{|\vec{CB}|} = -\frac{|\vec{AD}|}{|\vec{DB}|}$$

olur. Buna göre A, B, C, D, O doğrudaş olduğundan

$$\frac{|\vec{OC}|-|\vec{OA}|}{|\vec{OB}|-|\vec{OC}|} = -\frac{|\vec{OD}|-|\vec{OA}|}{|\vec{OD}|-|\vec{OB}|}$$ bulunur.

A ile B aynı çapın uç nok. old.

$|\vec{OA}| = -|\vec{OB}|$

olur.

$-|\vec{OB}|$ $-|\vec{OB}|$

$$\hookrightarrow \left(|\vec{OC}|-\overbrace{|\vec{OA}|}\right)\left(|\vec{OB}|-|\vec{OD}|\right) = -\left(|\vec{OD}|-\overbrace{|\vec{OA}|}\right)\left(|\vec{OB}|-|\vec{OC}|\right)$$

$$\Rightarrow \left(|\vec{OC}|+|\vec{OB}|\right)\left(|\vec{OB}|-|\vec{OD}|\right) = -\left(|\vec{OD}|+|\vec{OB}|\right)\left(|\vec{OB}|-|\vec{OC}|\right)$$

$$\Rightarrow \cancel{|\vec{OC}||\vec{OB}|}-|\vec{OC}||\vec{OD}|+|\vec{OB}||\vec{OB}|-\cancel{|\vec{OB}||\vec{OD}|}$$

$$\|$$

$$-\cancel{|\vec{OD}||\vec{OB}|}+|\vec{OD}||\vec{OC}|-|\vec{OB}||\vec{OB}|+\cancel{|\vec{OB}||\vec{OC}|}$$

$$\Rightarrow 2|\vec{OC}||\vec{OD}| = 2|\vec{OB}||\vec{OB}|$$

$\Rightarrow |\vec{OC}||\vec{OD}| = |\vec{OB}|^2 \Rightarrow |\vec{OC}||\vec{OD}| = r^2$ olur. O halde C ile D inverstir.

Bu noktada A, B bir çapın uç noktaları ve $\overbrace{\text{C ile D invers}}^{|\vec{OC}||\vec{OD}|=r^2}$ o.ü. $(AB, CD) = -1$ old. gösterilmelidir. $\rightarrow |\vec{OA}| = -|\vec{OB}|$

$$(AB, CD) = \frac{|\vec{AC}|\,|\vec{BD}|}{|\vec{AD}|\,|\vec{BC}|} = \frac{\left(|\vec{OC}|-|\vec{OA}|\right)\left(|\vec{OD}|-|\vec{OB}|\right)}{\left(|\vec{OD}|-|\vec{OA}|\right)\left(|\vec{OC}|-|\vec{OB}|\right)}$$

$$= \frac{\overbrace{|\vec{OC}||\vec{OD}|}^{r^2}-|\vec{OC}||\vec{OB}|-\overbrace{|\vec{OA}|}^{-|\vec{OB}|}|\vec{OD}|+\overbrace{|\vec{OA}||\vec{OB}|}^{-r^2}}{\underbrace{|\vec{OD}||\vec{OC}|}_{r^2}-|\vec{OD}||\vec{OB}|-\underbrace{|\vec{OA}|}_{-|\vec{OB}|}|\vec{OC}|+\underbrace{|\vec{OA}||\vec{OB}|}_{-r^2}}$$

$$= \frac{r^2-|\vec{OC}||\vec{OB}|+|\vec{OB}||\vec{OD}|-r^2}{r^2-|\vec{OD}||\vec{OB}|+|\vec{OB}||\vec{OC}|-r^2}$$

$$= \frac{|\vec{OB}|\left[|\vec{OD}|-|\vec{OC}|\right]}{|\vec{OB}|\left[|\vec{OC}|-|\vec{OD}|\right]} = -1 \text{ olur.}$$

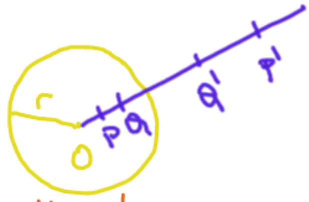
Yardımcı Teorem: $\mathcal{C}$, O merkezli ve r yarıçaplı inversion çemberi olsun. P, P' ve Q, Q' invers nokta çiftleri ise

$$|P'Q'| = \frac{r^2\,|PQ|}{|OP|\,|OQ|}$$

olur.

İspat:

I. Durum: O, P, Q noktaları doğrudaş olsun.



P ile P' ve Q ile Q' invers old $|OP||OP'| = r^2 = |OQ||OQ'|$ olur.

Ayrıca $|\vec{OP}| = |\vec{OQ}| + |\vec{QP}|$ ve $|OQ'| = |\vec{OP'}| + |\vec{P'Q'}|$ dür.

$|\vec{OQ}| + |\vec{QP}| + |\vec{PO}| = 0$ $\qquad$ $|\vec{OP'}| + |P'Q'| + |Q'O| = 0$

$$|OP||OP'| = |OQ||OQ'|$$

$$\Rightarrow (|\vec{OQ}| + |\vec{QP}|)|\vec{OP'}| = |\vec{OQ}|(|\vec{OP'}| + |\vec{P'Q'}|)$$

$$\Rightarrow \cancel{|\vec{OQ}||\vec{OP'}|} + |\vec{QP}||\vec{OP'}| = \cancel{|OQ||\vec{OP'}|} + |OQ||\vec{P'Q'}|$$

$$\Rightarrow |\vec{QP}||\vec{OP'}| = |OQ||\vec{P'Q'}|$$

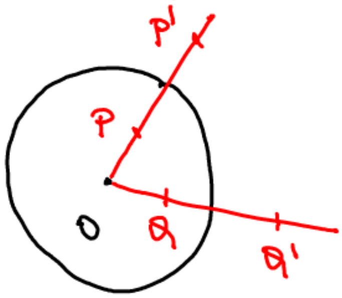
$$\Rightarrow |\vec{P'Q'}| = \frac{\overbrace{|OP'||\vec{QP}||\vec{OP}|}^{r^2}}{|\vec{OQ}|\,|\vec{OP}|}$$

$$\Rightarrow |\vec{P'Q'}| = \frac{r^2|\vec{QP}|}{|\vec{OQ}||\vec{OP}|}$$ bulunur.

Yönden bağımsız olursa

$$|P'Q'| = \frac{r^2|PQ|}{|OP||OQ|}$$ elde edilir.

II. Durum: O, P, Q doğrudaş olmasın.



$|OP||OP'| = r^2 = |OQ||OQ'|$ dir.

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{|OP|}{|OQ|} = \frac{|OQ'|}{|OP'|}}_{\overset{\triangle}{OPQ} \cong \overset{\triangle}{OQ'P'}}$$ dir.

$\overset{\triangle}{OPQ}$ ile $\overset{\triangle}{OQ'P'}$ benzer ise açıkça

$$\frac{|OP|}{|OQ'|} = \frac{|OQ|}{|OP'|} = \frac{|PQ|}{|Q'P'|}$$

$$\frac{|PQ|}{|Q'P'|} = \frac{|OP|}{|OQ'|} \Rightarrow |Q'P'| = \frac{\overbrace{|OQ'||PQ||OQ|}^{r^2}}{|OP|\,|OQ|}$$

$$|P'Q'| = |Q'P'| = \frac{r^2|PQ|}{|OP||OQ|}$$ olur.

Teorem: A, B, C, D ve O doğruda farklı noktalar olsun. A', B', C', D' de O merkezli çembere göre A, B, C, D nin inversi olsunlar. Bu takdirde $(AB,CD) = (A'B',C'D')$ olur.

(inversion çifte oranı korur!... Çifte oran inversion altında invaryanttır)

İspat:

$$(A'B',C'D') = \frac{|A'C'|\,|B'D'|}{|A'D'|\,|B'C'|} = \frac{\dfrac{\cancel{r^2}|AC|}{|\cancel{OA}||\cancel{OC}|}\cdot\dfrac{\cancel{r^2}|BD|}{|\cancel{OB}||\cancel{OD}|}}{\dfrac{\cancel{r^2}|AD|}{|\cancel{OA}||\cancel{OD}|}\cdot\dfrac{\cancel{r^2}|BC|}{|\cancel{OB}||\cancel{OC}|}} = \frac{|AC|\,|BD|}{|AD|\,|BC|} = (AB,CD)$$

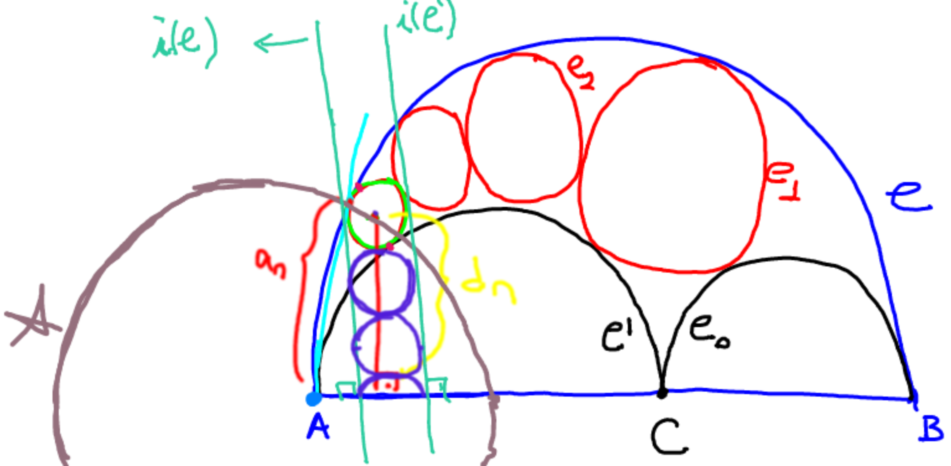
bulunur.

Ödev D. Blair Inv. theory and Conf. Map. Sy 13 – Soru 2-3-4

İnversionun Uygulamaları

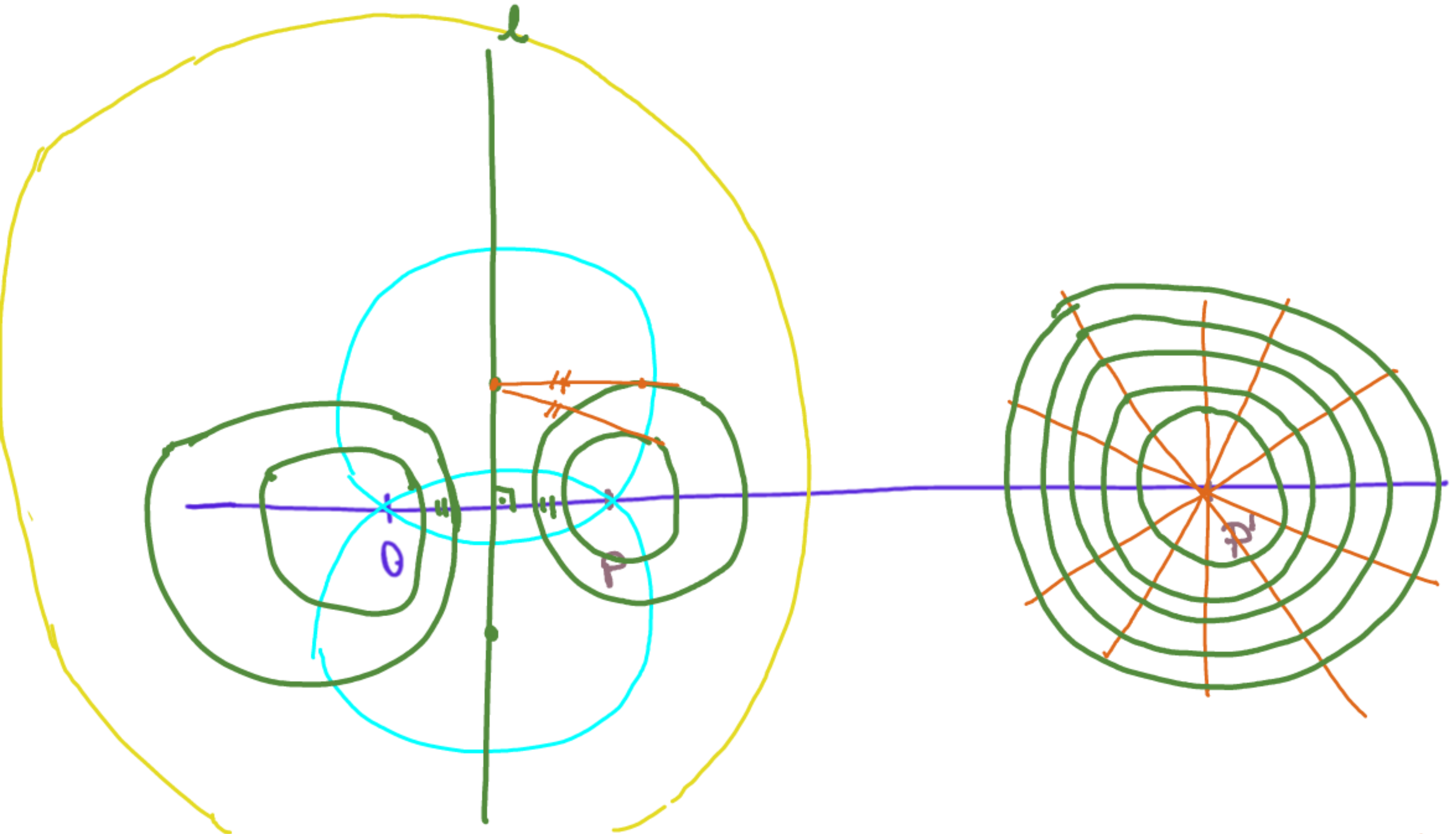
Teorem (Pappus Teoremi)

e, AB çaplı bir yarı-çember ve e' ile e_0 sırasıyla AC ve CB çaplı AB nin aynı tarafında bulunan yarı çemberler olsun. $e_1, e_2, \dots, e_n$ çemberleri her $i \in \{1,..,n\}$ için e_i çemberi e_{i-1}, e ve e' çemberlerine teğet o.ş. bir dizi olsun. r_n, e_n çemberinin yarıçapı ve d_n ise AB den e_n merkezine olan uzaklık olsun. Bu takdirde $d_n = 2n\,r_n$ olur.



a_n, A nok.dan e_n çemberine çizilen teğetin uzunluğu olsun.

A merkezli, a_n yarıçaplı A çemberine göre inversiyonu uygulayalım. Bu durumda e_n çemberi A ya göre inversion altında invaryanttır. Çünkü $e_n \perp A$ dır. e ve e' çemberleri ise A ya göre inversiyon altında $\overleftrightarrow{AB}$ dik olan paralel bir doğru çiftine dönüşür. Çünkü e ve e', A nok.dan (A nın merkezinden inversiyon merkezinden) geçiyor ve e ile e' nin $\overleftrightarrow{AB}$ diktir. Hatta e ile e' çemberi e_n çemberine de teğettir. e_{n-1} çemberi, e_n, e ve e' teğet olduğundan inversiyon altında görüntüsü paralel doğrular arasında e_n teğet olan çember olur. Benzer şekilde dizideki tüm çemberler paralel iki doğru arasında bir önceki çembere teğet olacak şekilde bir çembere dönüşür. Bu taktirde n. çemberin merkezinden $\overleftrightarrow{AB}$ olan uzaklık n tane e_n çemberi mesafesinde olur. Yani $d_n = n.2r_n = 2nr_n$ bulunur



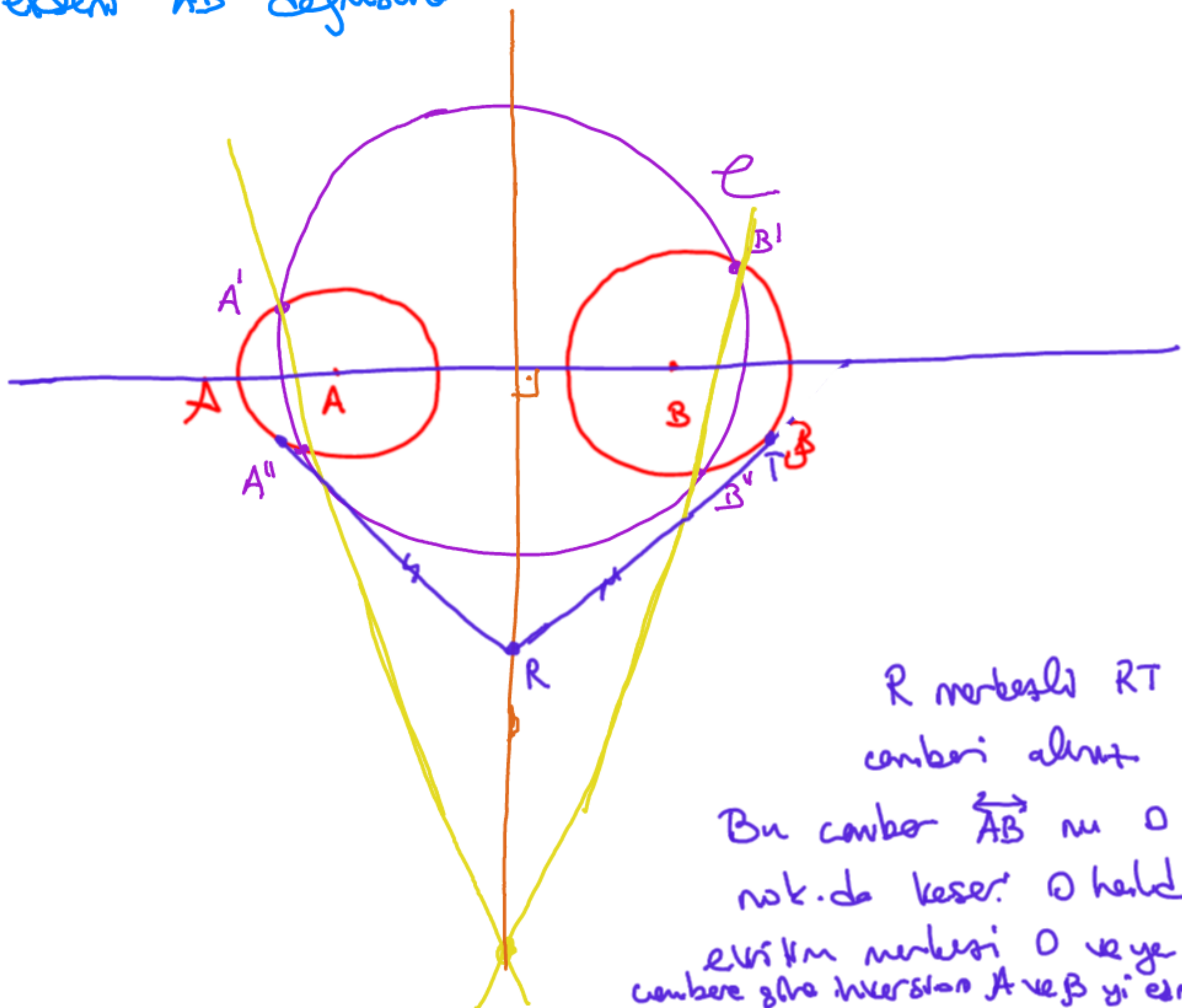
e, O merkezli çember P ile P' de invers noktalar olsun. P' dan geçen doğrular (biri hariç $\overleftrightarrow{OP'}$) O ile P dan geçen çemberlere dönüşür. Bu çemberlerin merkezleride $\overline{OP}$ nın orta dikmesi üzerindedir.

P' de eş merkezli çemberler inversiyon altında yine çemberlere dönüşürler (biri hariç |OP'| yarıçaplı olanı). Bu çemberler de bir aile oluştururlar.

ℓ doğrusu üzerindeki her nokta birinci çember ailesinin (OP den geçen) merkezi idi. Bu nok.dan ikinci ailenin çemberlerine çizilen teğetlerin uzunluğu aynıdır (eşittir.) Bu ℓ doğrusuna ikinci ailenin kuvvet ekseni adı verilir.

Teorem: Eş merkezli olmayan kesişmeyen iki çember iki eşmerkezli çembere evrilebilir.

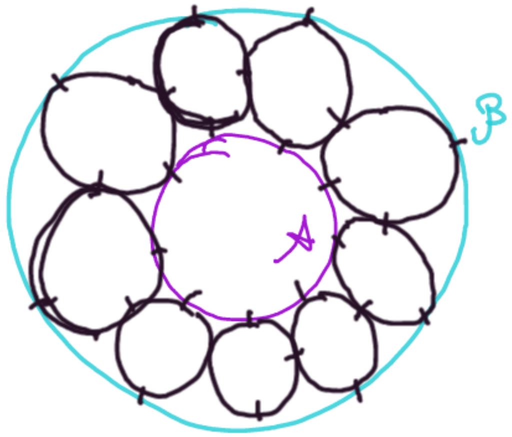
İspat: $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$; A ve B merkezli çemberler olsun. $\mathcal{C}$ çemberi $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ yi sırasıyla A', A'' ve B', B'' nok.da kesen bir çember olsun. Eğer $A'A''$ ve $B'B''$ doğruları paralel değilse bu doğrular kuvvet ekseni bir nok.da kesişirler. Dolayısıyla kuvvet ekseni $\overleftrightarrow{AB}$ doğrusuna diktir.



R merkezli RT yarıçaplı çemberi alalım.

Bu çember $\overleftrightarrow{AB}$ yi O ve P nok.da keser. O halde evirim merkezi O ve ye P olan çembere göre inversiyon $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ yi eşmerkezli çember

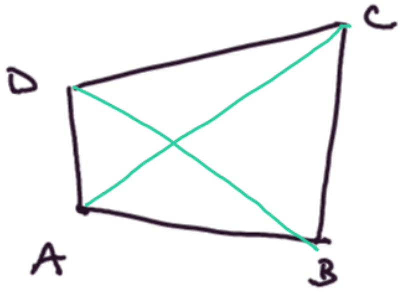
Teorem: A, bir B çemberinin içinde olan bir çember olsun. Varsayalım ki C_i, C_{i-1}, A ve B ye teğet o.ş bir çember ağı n tane çember içeren $C_1, C_2, \ldots, C_n$ çember dizisi mevcut olsun. Bu taktirde sonsuz çoklukta böylesi diziler mevcuttur ve de üstelik A ile B ye teğet olan A ile B arasındaki herhangi bir çemberde böylesi bir diziye sahiptir. (Steiner teoremi)



İspatı ödev!

Teorem (Ptolemy teoremi)

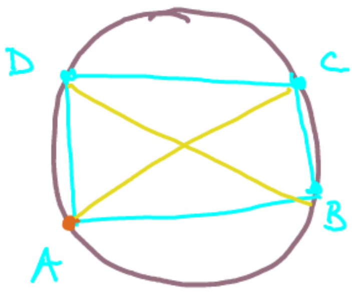
ABCD bir çemberde içilen konveks bir dörtgen olsun. Buna göre köşegenlerin uzunlukları çarpımı karşıt kenarların çiftlerin uzunlukları çarpımının toplamına eşittir.



Herhangi bir dörtgende

$|AC||BD| \leq |AB||CD| + |BC||AD|$

olur. Batlamyus teoremi



ABCD bir çemberin kirişler dörtgeni ise

$|AC|.|BD| = |AB||CD| + |AD||BC|$

olur

r yarıçaplı ve A merkezli bir çembere göre inversiyon alalım. Elimizdeki konfigürasyonu bu inversiyona tabi tutalım.

Buna göre ABCD bir çemberin üzerindeki noktalar olup bu çember A dan yani merkezden (inversiyon merkezinden) geçtiğinden Bu çember A dan geçmeyen bir doğruya dönüşür. B', C', D' nok.ları B, C, D nin inversleri o.ü. B', C', D' doğrudaştır. Ayrıca ABCD konveks olduğundan C', B' ile D' arasındadır. Böylelikle $|\overline{B'C'}| + |\overline{C'D'}| = |\overline{B'D'}|$ olur

$$\boxed{|P'Q'| = \frac{r^2\,|PQ|}{|OP|\,|OQ|} \text{ idi}}$$

$$\underbrace{|B'C'|}_{} + \underbrace{|C'D'|}_{} = \underbrace{|B'D'|}_{}$$

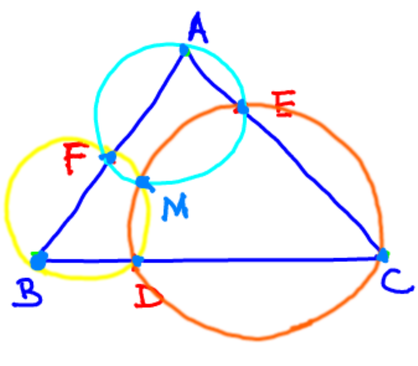
$$\Rightarrow \frac{r^2|BC|}{\underbrace{|AB||AC|}_{|AD|}} + \frac{r^2|CD|}{\underbrace{|AC||AD|}_{|AB|}} = \frac{r^2|BD|}{\underbrace{|AB||AD|}_{|AC|}}$$

$$\Rightarrow \boxed{|AD||BC| + |AB||CD| = |AC||BD|}$$ bulunur.

Miquel Teoremi

Teorem (Miquel'in Küçük Teoremi)

ΔABC üçgeninde, D, E, F sırasıyla A, B, C ye göre karşıt kenarlar üzerindeki noktalar olsun. Bu takdirde AEF, BDF, CDE çemberleri ortak bir M noktasından geçerler.



D, E, F ΔABC üçgeninde sırasıyla A, B, C köşelerinin karşıt kenarları üzerindeki herhangi noktalar olsun. Ayrıca BDF çemberi ve CDE çemberi bir M noktasında kesişsin. Buna göre AEF çemberinin M nok.dan geçtiğini göstermeliyiz.

Bir dörtgenin bir çemberde içerilmesi için gerek ve yeter koşul dörtgenin karşıt açılarının bütünler olmalıdır.

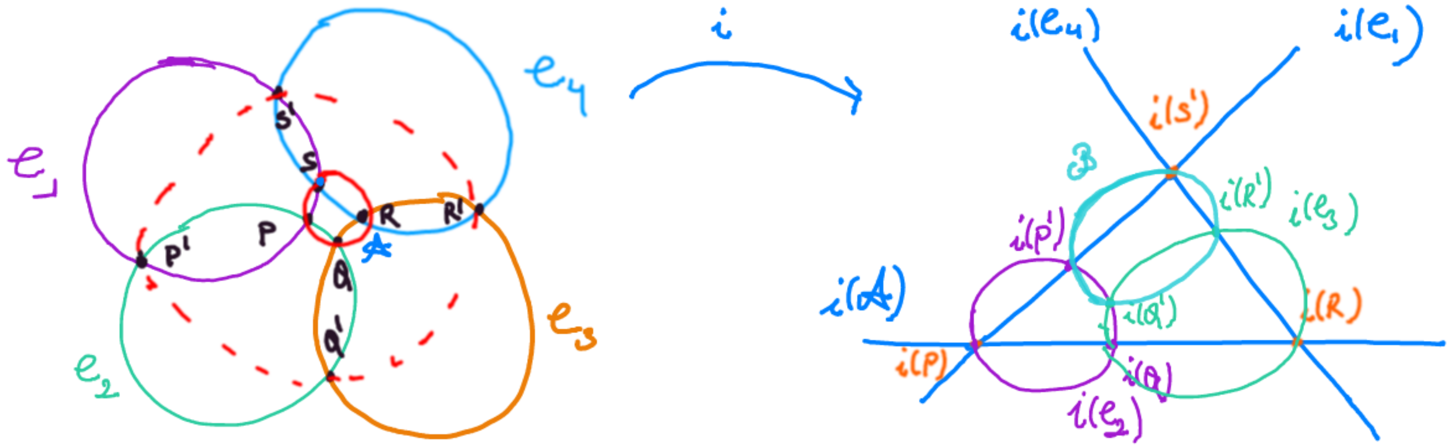
$s(\angle MFA) = \pi - s(\angle MFB) = s(\angle BDM) = \pi - s(\angle CDM) = s(\angle CEM) = \pi - s(\angle MEA)$ elde edilir.

$$s(\angle MFA) = \pi - s(\angle MEA) \Rightarrow s(\angle MFA) + s(\angle MEA) = \pi \text{ dır.}$$

Yani $\angle MFA$ ile $\angle MEA$ açıları bütünlerdir. Ohalde AEMF dörtgeni bir çemberde içerilir. Açıkça bu çember M den geçer.

<u>Teorem</u> (Miquel Teoremi) <u>Miquel'in Büyük Teoremi</u>

e_1, e_2, e_3, e_4 herhangi üçü noktadaş olmayan dört çember olsun. e_1 ile e_2 çemberleri P ve P' nok.da, e_2 ile e_3 çemberleri Q ve Q' nokda e_3 ile e_4 çemberleri R ve R' nok.da, e_4 ile e_1 çemberleride S ve S' nok.da kesişsinler. Bu taktirde P, Q, R ve S nok.ları çemberdeş veya doğrudaş o.i.g.y.k. P', Q', R', S' nok.larının çemberdeş veya doğrudaş dır.



P, Q, R, S çemberdeş olduğunu varsayalım. Bu çembere A diyelim. İnversiyon merkezi S o.ş. bir çembere göre bu konfigürasyona inversiyon uygulalım. e_1, e_4, A çemberleri S nok.dan geçtiklerinden inversiyon altında S den geçmeyen doğrulara dönüşürler. e_2 ve e_3 çemberleri inversiyon merkezinden geçmediklerinden inversiyon altında inversiyon merkezinden geçmeyen bir çembere dönüşür.

$i(P)$, $i(R)$, $i(S')$ üçgenine küçük Miquel teoremi uygulanırsa açıkça $i(P')$, $i(Q')$, $i(R')$ ve $i(S')$ den bir çember geçer. Bu çember β olsun.

Bu durumda bir kez daha inversiyon uygulanırsa başa döner yani β çemberi inversiyon altında P', Q', R', S' den geçen bir çember olur.

Yani P', Q', R', S' çemberdedir.

noktalar kümesi — çemberler küme — üzerinde bulunma bağıntısı

$(W, Ç, O)$

$(W, Ç, O)$ matematiksel sistemi

(i) Üç farklı noktadan bir tek çember geçer

(ii) P, A çemberi üzerindeki bir nokta ve Q A çemberi üzerinde olmayan bir nokta o.ü. Q dan geçen ve A çemberine P noktada teğet olan bir tek çember vardır

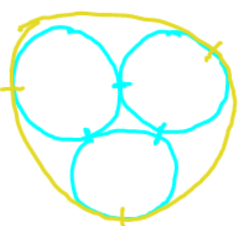
(iii) Her çember üzerinde en az üç nokta vardır.

(iv) Bir çember ve çember üzerinde olmayan bir nokta vardır.

aksiyomlarını sağlıyorsa bu sisteme <u>invers düzlem</u> denir.

(v) Herhangi ikisi teğet olan ve teğet noktaları ayrık olan ve de herhangi üçü noktadaş olmayan dört çember vardır.

invers düzlem (v) aksiyomunu sağlıyorsa invers düzleme "tek" denir.



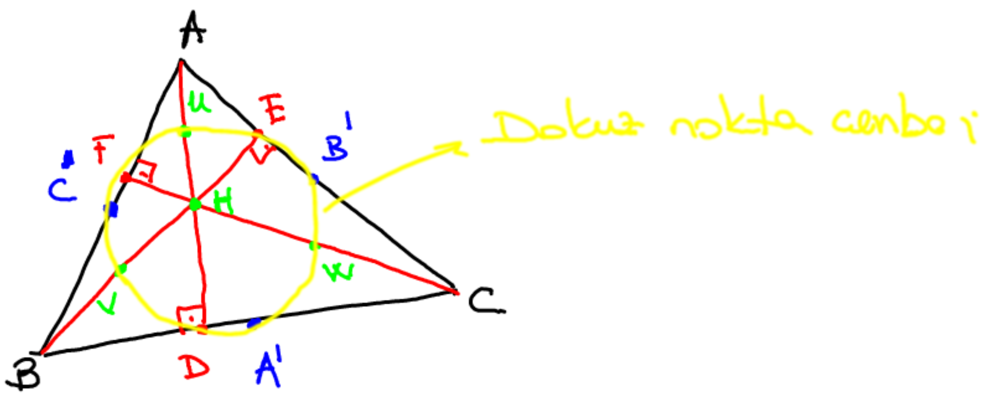
(vi) Miquel'in Büyük Teoremi

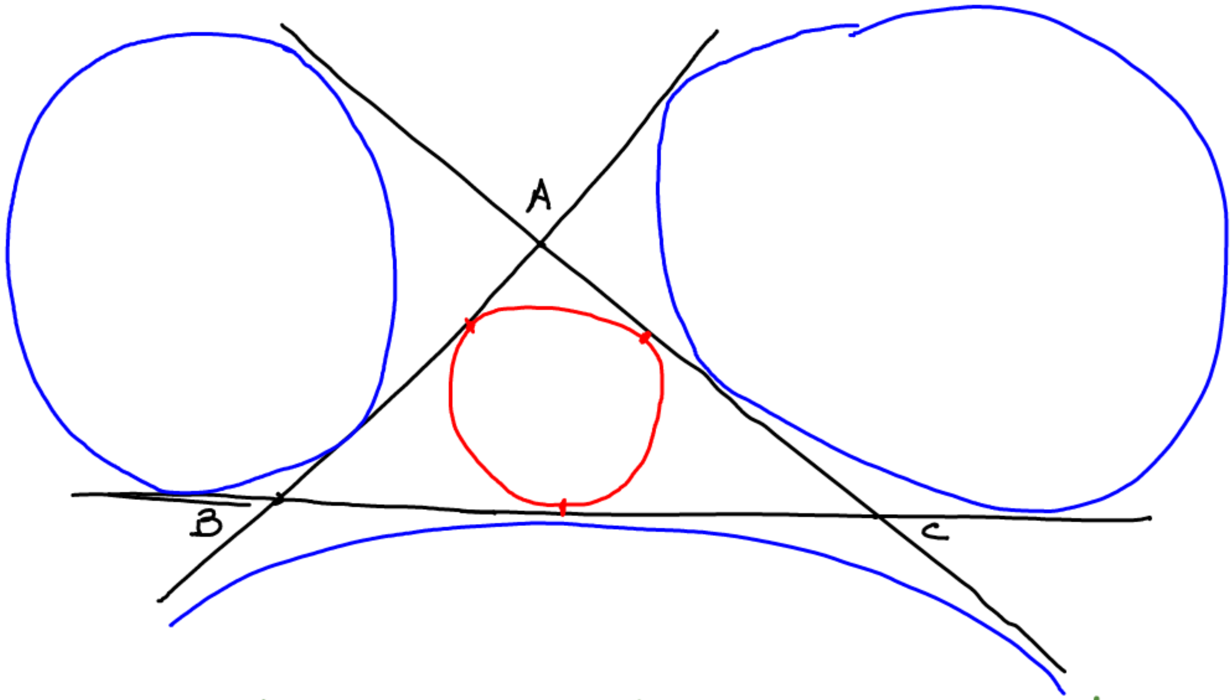
Miquel'in Büyük teoremini sağlayan invers düzleme Miquelyan düzlem denir.

Dokuz nokta çemberi

Teorem
Bir üçgende kenarların orta noktaları, yüksekliklerin ayakları ve yükseklik merkezinden köşelere çizilen doğru parçalarının orta noktaları çemberdeştir. (Bu çembere dokuz nokta çemberi denir.)

İspat Ödev!





Bir üçgenin dokuz nokta çemberi, üçgenin iç teğet ve üç dış teğet çemberine teğettir. (Feuerbach teoremi)

Ödev ⇒ Feuerbach teoremi ispatlayınız (inversiyon kullanarak!)

$\mathbb{C} = \{ x+iy \mid x,y \in \mathbb{R},\ i^2=-1 \}$ ← kompleks sayılar kümesi (karmaşık)

$\underbrace{x}_{\text{reel kısmı}} + i\underbrace{y}_{\text{sanal (imajiner) kısmı}} \longleftrightarrow (x,y)$

$$(a+ib) \mp (c+id) := (a \mp c) + i(b \mp d)$$

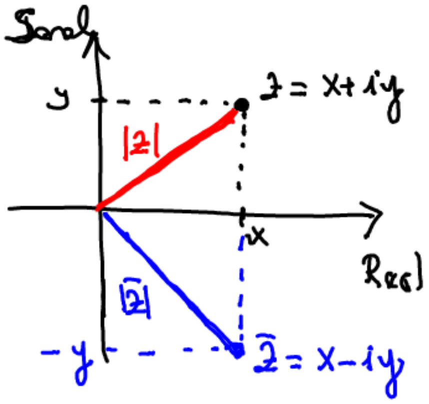
$$(a+ib).(c+id) := (ac-bd) + i(ad+bc)$$

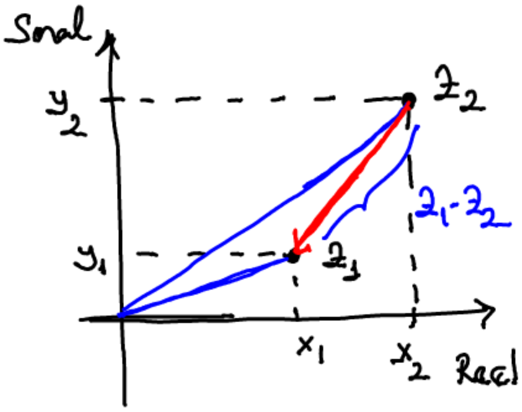
$$\frac{a+ib}{c+id} := \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + i\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

$z = x+iy$ o.ü $\bar{z} = x-iy$ ifadesine z nin eşleniği denir.

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ ifadesine de z nin modülü denir.

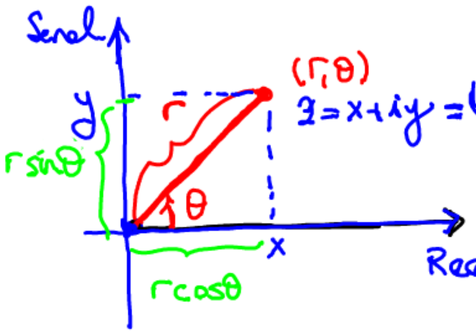
$|z|^2 = z.\bar{z}$ ve de $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ dir.





$$\overbrace{|z_1-z_2|}^{(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

⟹ Bu ifade z_1 ile z_2 arasındaki uzaklığı verir.



$z = x+iy = (x,y) = (r,\theta)$

kartezyen → kutupsal

$(x,y) \longrightarrow (r,\theta)$

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ ←

kutupsal → kartezyen

$(r,\theta) \longrightarrow (x,y)$

$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$

z nin boyu

θ açısı z nin argümenti denir

$$z = x+iy = r\cos\theta + i\,r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,\mathrm{cis}\,\theta$$ ← kutupsal gösterim

$$e^z = e^{x+iy} = e^x.e^{iy} = e^x\overbrace{(\cos y + i\sin y)}^{e^{iy}} \Rightarrow z = r\,e^{i\theta}$$ şeklinde yazılabilir

$$e^{i\pi}+1=0$$

$\mathrm{Arg}\,z = \theta$, $\theta \in [0,2\pi]$ esas değer

$\arg z = \theta$, $\theta \in (-\infty,\infty)$

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ olarak alalım.

$$z_1 . z_2 = r_1 e^{i\theta_1} . r_2 e^{i\theta_2}$$

$$= r_1 . r_2 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$$

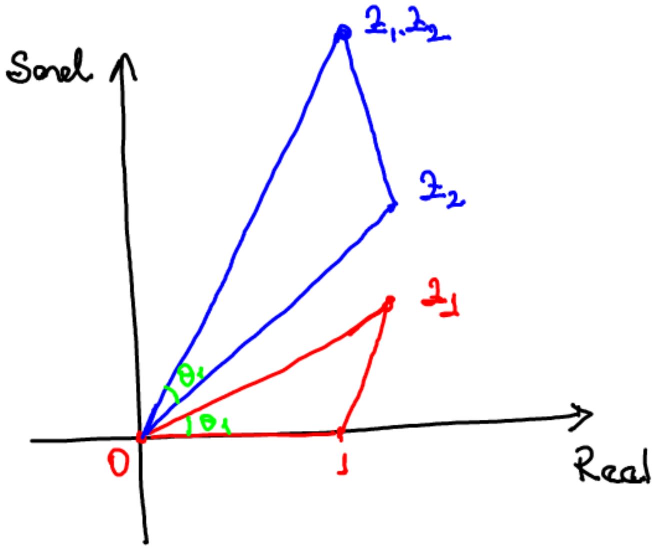
$$= r_1 . r_2 \left((\underbrace{\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2}) + i (\underbrace{\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2}) \right)$$

$$= r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i \sin(\theta_1+\theta_2) \right]$$

$$= r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$z_1 . z_2$ nin da $|z_1 . z_2| = r_1 r_2$ ve $\arg(z_1 . z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ dir.

$\overset{\triangle}{(0,1,z_1)} \sim \overset{\triangle}{(0, z_2, z_1 z_2)}$



$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{r(\cos\theta - i \sin\theta)}{r^2} = \frac{1}{r} (\cos\theta - i \sin\theta) \text{ dır.}$$

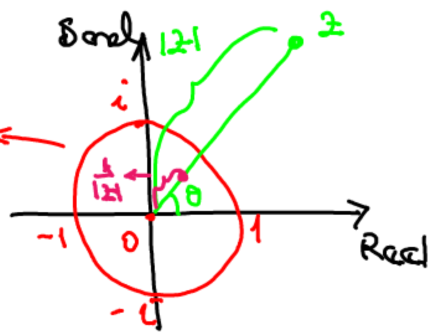
$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{r} = \frac{1}{|z|} \quad \text{ve} \quad \arg\frac{1}{z} = -\arg z \text{ dir.}$$

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{r} (\cos\theta + i \sin\theta)$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = \frac{1}{r} = \frac{1}{|z|} \quad \arg\frac{1}{\bar{z}} = \arg z = \theta$$

$$|z| . \left|\frac{1}{\bar{z}}\right| = |z| . \frac{1}{|z|} = 1 \text{ dir.}$$

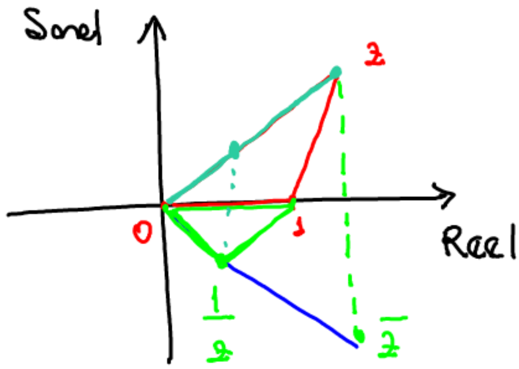
$\mathbb{C}$ de merkezil birim çember



$\boxed{z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}}$ $\mathbb{C}$ de merkezil birim çembere göre inversiyon dönüşümüdür.

Birim çemberde inversiyon

$\triangle(0,1,z) \sim \triangle(0,\frac{1}{\bar{z}},1)$



$z \xrightarrow{\text{inversiyon}} \frac{1}{\bar{z}} \xrightarrow{\text{yansıma}} \frac{1}{z}$

$z \xrightarrow{\text{yansıma}} \bar{z} \xrightarrow{\text{inversion}} \frac{1}{z}$

$z \mapsto \frac{1}{z}$ dönüşümü inversiyon + yansıma dır.

$w(z) = \frac{1}{z}$ dönüşümü $w: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ olup yansıma ve merkezil birim çembere göre inversiyondur.

(sonsuzdaki nokta, sonsuz kompleks sayı, ideal nokta)

∞, kompleks düzlemin hemen dışında bir nokta olsun.

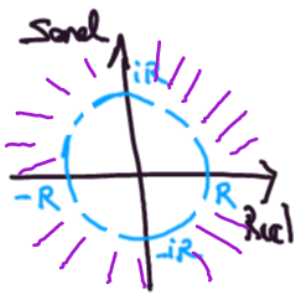
$\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$ genişletilmiş kompleks düzlem (inversiyon düzlemi, invers düzlem)

$a \in \mathbb{C}$ o.ü, $\frac{a}{\infty} = 0$; $\frac{a}{0} = \infty$; $\infty \mp a = \infty$; $\infty . a = \infty$; $\infty . \infty = \infty$

olacaktır.

$\infty \mp \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; $\infty . 0$ belirsiz hallerdir.

$R > 0$ o.ü. $\{z \mid |z| > R\}$ kümesi ∞ noktasının bir komşuluğudur.



$w(z) = \frac{1}{z}$ olsun. $|z| > R \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| < R \Rightarrow |w| < R$ dur.

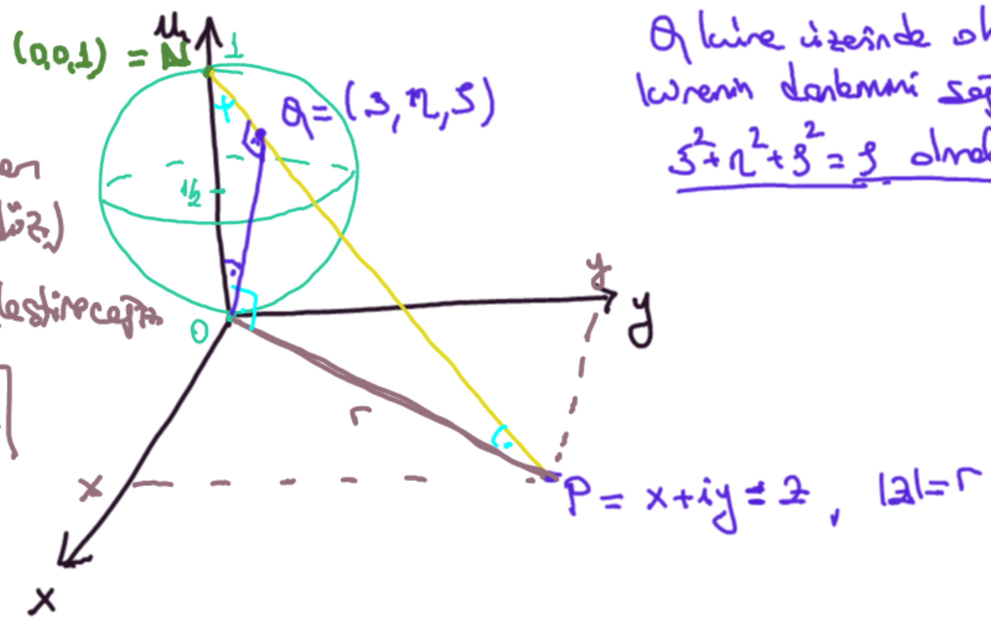
Steorofik izdüşüm

$$x^2+y^2+u^2=u \Rightarrow x^2+y^2+u^2-u=0$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+\underbrace{u^2-u+\tfrac{1}{4}}-\tfrac{1}{4}=0$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+(u-\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{1}{4} \longrightarrow$$ Merkezi $(0,0,\tfrac{1}{2})$ ve $r=\tfrac{1}{2}$ olan küredir.

Q küre üzerinde ohalde kürenin denklemini sağlar $\xi^2+\eta^2+\varsigma^2=\varsigma$ olmalıdır.

Küre üzerindeki noktaları xy-düzlemindeki ($\mathbb{C}$ düz.) nok. ile 1:1 olarak eşleştireceğiz.

$\boxed{\text{Steorofik izdüşüm}}$



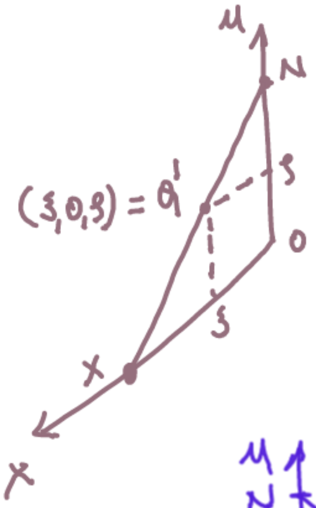
$$\overset{\triangle}{OPN}\sim\overset{\triangle}{QON} \Leftrightarrow \frac{|OP|}{|QO|}=\frac{|ON|}{|QN|}=\frac{|PN|}{|ON|} \Rightarrow \boxed{\frac{r}{\sqrt{\varsigma}}=\frac{1}{\sqrt{1-\varsigma}}=\frac{\sqrt{1+r^2}}{1}}$$

$$|QO|=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\varsigma^2}=\sqrt{\varsigma}$$

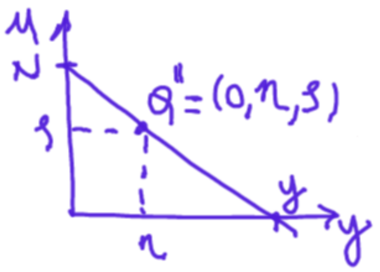
$$|QN|=\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\varsigma-1)^2}=\sqrt{\underbrace{\xi^2+\eta^2+\varsigma^2}_{\varsigma}-2\varsigma+1}=\sqrt{1-\varsigma}$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{\varsigma}=\frac{1}{1-\varsigma}=\frac{1+r^2}{1}$$ olur.

$$\boxed{\varsigma=\frac{r^2}{1+r^2}} \qquad \boxed{1-\varsigma=\frac{1}{1+r^2}}$$



$$\frac{x}{\xi}=\frac{1}{1-\varsigma} \Rightarrow \boxed{x=\frac{\xi}{1-\varsigma}}$$



$$\frac{y}{\eta}=\frac{1}{1-\varsigma} \Rightarrow \boxed{y=\frac{\eta}{1-\varsigma}}$$

$$x^2+y^2=r^2 \Rightarrow \left(\frac{\xi}{1-\varsigma}\right)^2+\left(\frac{\eta}{1-\varsigma}\right)^2=\frac{\xi^2+\eta^2}{(1-\varsigma)^2}=\frac{\overbrace{\varsigma-\varsigma^2}^{\varsigma(1-\varsigma)}}{(1-\varsigma)^2}=\boxed{\frac{\varsigma}{1-\varsigma}=r^2}$$

Küre $(\xi,\eta,\varsigma) \longrightarrow$ Düzlem (x,y) $\qquad x=\frac{\xi}{1-\varsigma}, \quad y=\frac{\eta}{1-\varsigma}, \quad r^2=\frac{\varsigma}{1-\varsigma}$

Düzlem $(x,y) \longrightarrow$ Küre (ξ,η,ς) $\qquad \xi=\frac{x}{1+r^2}, \quad \eta=\frac{y}{1+r^2}, \quad \varsigma=\frac{r^2}{1+r^2}$

Steorofik izdüşüm

$$\xi=x(1-\varsigma)=x\left(1-\frac{r^2}{1+r^2}\right)=\frac{x}{1+r^2}$$

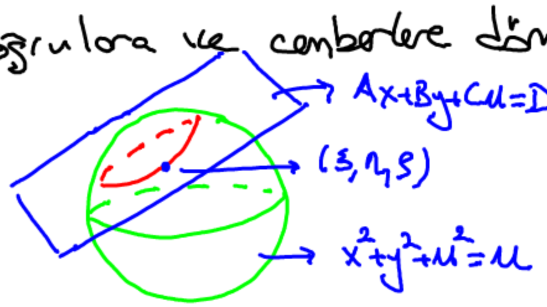
$$\eta=y(1-\varsigma)=\frac{y}{1+r^2}$$

$$\varsigma=r^2(1-\varsigma)=\frac{r^2}{1+r^2}$$

Teorem: Steorofik izdüşüm düzlemdeki doğru ve çemberleri küre üzerindeki çemberlere dönüştürür. Tersine küre üzerindeki çemberler steorofik izdüşüm altında düzlemdeki doğrulara ve çemberlere dönüşür.

KÜRE $\xleftrightarrow{\text{steorofik izdüşüm}}$ DÜZLEM

Çemberler $\longleftrightarrow$ Doğrulara veya çemberlere



__İspat:__ Küre üzerindeki çember, bir düzlem ile kürenin kesişimidir. $Ax+By+Cu=D$ düzlemini alalım. (ξ,η,ζ) çember üzerindeki bir nokta olsun. O zaman (ξ,η,ζ) çember üzerinde olduğundan

$$A\xi+B\eta+C\zeta=D$$

bulunur. Stereografik izdüşüm uygulanırsa

$$A\xi+B\eta+C\zeta=D \Rightarrow A\frac{x}{1+r^2}+B\frac{y}{1+r^2}+C\frac{r^2}{1+r^2}=D$$

$$\Rightarrow Ax+By+Cr^2=D(1+r^2)$$

$$\Rightarrow Ax+By+(C-D)r^2=D \longrightarrow (r^2=x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow (C-D)(x^2+y^2)+Ax+By=D$$

→ $C=D$ ise $Ax+By=D$ olup doğrudur.

→ $C\neq D$ ise $(C-D)(x^2+y^2)+Ax+By=D$ olup çember olur.

Aksine düzlemdeki doğru veya çember alınırsa;

$$(C-D)(x^2+y^2)+Ax+By=D \leftarrow \text{Düzlemdeki doğru veya çember}$$

Steorofik izdüşüm uygulandı

$$\Rightarrow (C-D)\left(\left(\frac{\xi}{1-\zeta}\right)^2+\left(\frac{\eta}{1-\zeta}\right)^2\right)+A\frac{\xi}{1-\zeta}+B\frac{\eta}{1-\zeta}=D$$

(ξ,η,ζ) küre üzerindeki nokta

$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\zeta \Rightarrow \xi^2+\eta^2=\zeta-\zeta^2=\zeta(1-\zeta)$

$$\Rightarrow (C-D)\frac{\boxed{\xi^2+\eta^2}}{(1-\zeta)^2}+A\frac{\xi}{1-\zeta}+B\frac{\eta}{1-\zeta}=D$$

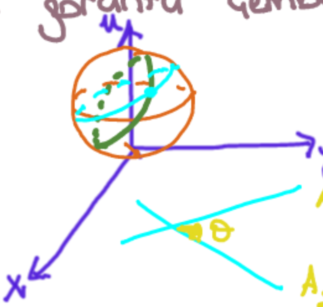
$$\Rightarrow (C-D)\frac{\zeta(1-\zeta)}{(1-\zeta)^2}+\frac{A\xi}{1-\zeta}+B\frac{\eta}{1-\zeta}=D$$

$$\Rightarrow (C-D)\zeta+A\xi+B\eta=D(1-\zeta)$$

$$\Rightarrow A\xi+B\eta+C\zeta=D \text{ elde edilir.}$$

Düzlem (küreyi kesen) yani küre üzerindeki çemberdir.

__Yardımcı Teorem:__ İki doğru arasındaki açı steorofik izdüşüm altında onların görüntü çemberleri arasındaki açıya eşittir.



$\overset{m_1}{l_1}$ ile $\overset{m_2}{l_2}$ arasındaki açı $\tan\theta=\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}$ dir.

$A_1x+B_1y=D_1 \ldots l_1 \rightarrow A_1x+B_1y=D_1(1-u)$

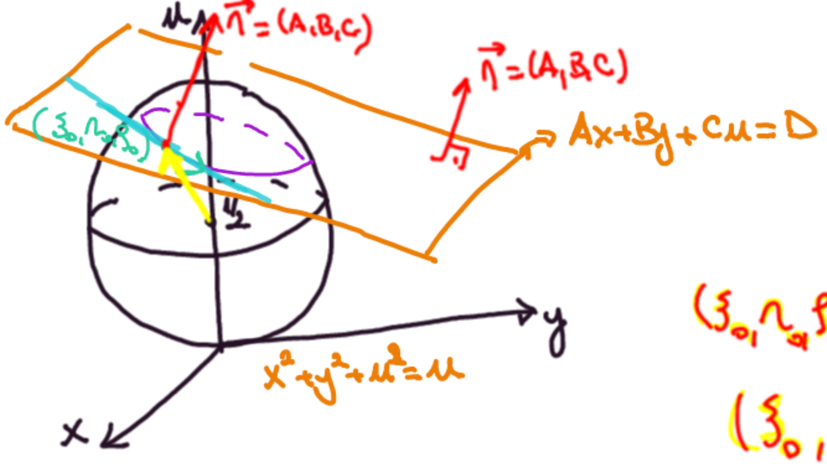
$A_2x+B_2y=D_2 \ldots l_2 \rightarrow A_2x+B_2y=D_2(1-u)$

düzlemleri arasındaki ↑ Ödev!

Yardımcı Teorem: (ξ_0,η_0,ζ_0) noktasında $Ax+By+Cu=D$; $x^2+y^2+u^2=u$ çemberine teğet olan doğru

$$\frac{x-\xi_0}{B(\zeta_0-\frac{1}{2})-C\eta_0}=\frac{y-\eta_0}{C\xi_0-A(\zeta_0-\frac{1}{2})}=\frac{z-\zeta_0}{A\eta_0-B\xi_0}$$

şeklinde ifade edilir.



Doğrunun denklemini yazmak için bir nokta ✓ ve doğrultuya ihtiyaç vardır. ?

(ξ_0,η_0,ζ_0) ile $(0,0,\frac{1}{2})$ yardımıyla $(\xi_0,\eta_0,\zeta_0-\frac{1}{2})$ vektörü kürenin normali olur.

Buna göre doğrunun doğrultusu

$$(A,B,C)\times\left(\xi_0,\eta_0,\zeta_0-\tfrac{1}{2}\right)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ A & B & C \\ \xi_0 & \eta_0 & \zeta_0-\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$=\left(B(\zeta_0-\tfrac{1}{2})-C\eta_0,\; C\xi_0-A(\zeta_0-\tfrac{1}{2}),\; A\eta_0-B\xi_0\right)$$

olarak bulunur. O halde ilgili teğet doğrunun denklemi

$$\frac{x-\xi_0}{B(\zeta_0-\frac{1}{2})-C\eta_0}=\frac{y-\eta_0}{C\xi_0-A(\zeta_0-\frac{1}{2})}=\frac{z-\zeta_0}{A\eta_0-B\xi_0}$$

olur.

Teorem: Stereografik izdüşüm bir konformal dönüşümdür.
(Stereografik izdüşüm açıların büyüklüğünü (ölçüsünü) korur!)

İspat: Dif. bilir bir eğrinin teğet doğrusunun görüntüsünün eğrinin görüntüsüne teğet old. ispatlamak yeterlidir.

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ düzlemde dif.bilir bir eğri olsun. $t = t_0$ anındaki noktaya P diyelim. Ayrıca $x_0 = x(t_0)$ ve $y_0 = y(t_0)$ olsun. Bu takdirde

$$x = \xi(t) = \frac{x(t)}{1+x^2(t)+y^2(t)}, \quad y = \eta(t) = \frac{y(t)}{1+x^2(t)+y^2(t)}, \quad u = \zeta(t) = \frac{x^2(t)+y^2(t)}{1+x^2(t)+y^2(t)}$$

küre üzerinde eğrinin görüntüsüdür. Üstelik $\xi_0 = \xi(t_0)$, $\eta_0 = \eta(t_0)$, $\zeta_0 = \zeta(t_0)$ diyelim. P nin stereografik izdüşüm dönüşümü altındaki görüntüsü Q olsun. Buna göre Q noktada görüntü eğrisine teğet olan doğru

$$\frac{x-\xi_0}{\xi'(t_0)} = \frac{y-\eta_0}{\eta'(t_0)} = \frac{u-\zeta_0}{\zeta'(t_0)}$$

şeklindedir. Dif bilirden dolayı

$$\xi'(t_0) = \frac{x'(t_0)\left(1+x^2(t_0)+y^2(t_0)\right) - x(t_0)\left(2x(t_0)x'(t_0)+2y(t_0)y'(t_0)\right)}{\left(1+x^2(t_0)+y^2(t_0)\right)^2}$$

$$= \frac{x'(t_0)\left(1-x^2(t_0)+y^2(t_0)\right) - 2x(t_0)y(t_0)y'(t_0)}{\left(1+x^2(t_0)+y^2(t_0)\right)^2} = \frac{x'(t_0)(1-x_0^2+y_0^2) - 2x_0y_0y'(t_0)}{(1+x_0^2+y_0^2)^2}$$

$$\eta'(t_0) = \frac{y'(t_0)\left(1+x^2(t_0)+y^2(t_0)\right) - y(t_0)\left(2x(t_0)x'(t_0)+2y(t_0)y'(t_0)\right)}{\left(1+x^2(t_0)+y^2(t_0)\right)^2}$$

$$= \frac{y'(t_0)(1+x_0^2-y_0^2) - 2x_0y_0x'(t_0)}{(1+x_0^2+y_0^2)^2}$$

$$\zeta'(t_0) = \frac{\left(2x(t_0)x'(t_0)+2y(t_0)y'(t_0)\right)\left(1+x^2(t_0)+y^2(t_0)\right) - \left(x^2(t_0)+y^2(t_0)\right)\left(2x(t_0)x'(t_0)+2y(t_0)y'(t_0)\right)}{\left(1+x^2(t_0)+y^2(t_0)\right)^2}$$

$$= \frac{2x_0x'(t_0)+2y_0y'(t_0)}{(1+x_0^2+y_0^2)^2}$$ bulunur. Bu takdirde

$$\frac{x-\xi_0}{x'(t_0)(1-x_0^2+y_0^2)-2x_0y_0y'(t_0)} = \frac{y-\eta_0}{y'(t_0)(1+x_0^2-y_0^2)-2x_0y_0x'(t_0)} = \frac{z-\zeta_0}{2x_0x'(t_0)+2y_0y'(t_0)}$$

olur.

Şimdi orjinal eğrinin P noktadaki teğet doğrusu
((x_0,y_0) noktada $m=\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$ eğimli doğrunun denklemi)

$$y-y_0=m(x-x_0) \Rightarrow y-y_0=\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x-x_0) \Rightarrow y'(t_0)x-x'(t_0)y=y'(t_0)x_0-x'(t_0)y_0$$

olacaktır. $A=y'(t_0)$, $B=-x'(t_0)$ ve $C=D=y'(t_0)x_0-x'(t_0)y_0$ olup bir önceki yorumda ifade edildiği gibi düzlemdeki teğetin görüntüsü küredeki görüntünün teğeti dir.

$$B(\xi_0-1/2)-C\eta_0 = -x'(t_0)\underbrace{(\xi_0-1/2)}-\left(y'(t_0)x_0-x'(t_0)y_0\right)\eta_0$$

$$= -x'(t_0)\frac{x_0^2+y_0^2-1}{2(1+x_0^2+y_0^2)} - 2\left(y'(t_0)x_0-x'(t_0)y_0\right)\frac{y_0}{2(1+x_0^2+y_0^2)}$$

$$\Rightarrow 2(1+x_0^2+y_0^2)\left(B(\xi_0-1/2)-C\eta_0\right) = x'(t_0)(1-x_0^2-y_0^2)-2\left(y'(t_0)x_0-x'(t_0)y_0\right)y_0$$

$$= x'(t_0)(1-x_0^2-y_0^2)-2y'(t_0)x_0y_0+2x'(t_0)y_0^2$$

$$= x'(t_0)(1-x_0^2+y_0^2)-2y'(t_0)x_0y_0$$

bulunur. Benzer şekilde

$\frac{x_0}{1+x_0^2+y_0^2}$ $\qquad$ $\frac{x_0^2+y_0^2-1}{2(1+x_0^2+y_0^2)}$

$$C\xi_0-A(\xi_0-1/2)=\left(y'(t_0)x_0-x'(t_0)y_0\right)\xi_0-y'(t_0)(\xi_0-1/2)$$

$$= y'(t_0)(1+x_0^2-y_0^2)-2x_0y_0x'(t_0)$$

dur. Ayrıca

$\frac{y_0}{1+x_0^2+y_0^2}$ $\qquad$ $\frac{x_0}{1+x_0^2+y_0^2}$

$$A\eta_0-B\xi_0 = y'(t_0)\eta_0+x'(t_0)\xi_0$$

$$\Rightarrow 2(1+y_0^2+x_0^2)(A\eta_0-B\xi_0)=2\left(x'(t_0)x_0+y'(t_0)y_0\right)$$ bulunur.

Yani düzlemdeki eğrinin teğetinin görüntüsü eğrinin görüntüsüne teğet olduğu anlaşılır. Bu ise stereografik izdüşümün konformal old. gösterir.

$\boxed{\text{Ödev} \rightarrow \text{sy } 34 \quad (1)-(2)-(3)}$

LİNEER KESİRLİ DÖNÜŞÜMLER (HOMOGRAFİ MÖBİUS DÖNÜŞÜMÜ)

$\overline{\mathbb{C}}$ ifadesi genişletilmiş kompleks düzlemi göstermek üzere $w: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ dönüşümü $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ ve $ad-bc \neq 0$ o.ü.

$w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ formunda ise w ya bir lineer kesirli dönüşüm (homografi veya Möbius dönüşümü) adı verilir.

$$\boxed{a,b,c,d \in \mathbb{C} \text{ ve } ad-bc \neq 0 \qquad w(z) = \frac{az+b}{cz+d}}$$

$ad-bc=0$ olduğunu varsayalım. O zaman $c \neq 0$ ise

$b = \dfrac{ad}{c}$ olur.

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az + \frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{\frac{\overbrace{acz+ad}^{a(cz+d)}}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} \text{ bulunur.}$$

$ad-bc=0 \Rightarrow w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c}$ olur. Dolayısıyla sabit dönüşüm olur.

Lineer kesirli dönüşüm $w(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc \neq 0)$

- $a=d=1$, $c=0$ olsun. Bu takdirde $w(z) = z+b$ olur. Buna göre her $z \in \overline{\mathbb{C}}$ için z ye $b \in \mathbb{C}$ yi eklenmiş olur. Yani z vektörü, b vektörü kadar ötelenir. Bu bir öteleme dönüşümüdür.

- $b=c=0$, $d=1$ olsun. Bu takdirde $w(z) = az$ olur. Bu ise $\arg a$ kadar bir dönme ve $|a|$ kadar gerilme (büyüme veya küçülme) işlemidir. Eğer $|a|=1$ ise bu ifade $\arg a$ kadar bir dönme dönüşümü olur. $a \in \mathbb{R}$ ise $w(z) = a.z$ ifadesi bir homotetidir → (Sadece büyütme veya küçültme)

- $a=d=0$, $b=c=1$ olsun. Bu takdirde $w(z) = \dfrac{1}{z}$ olur.

$w(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{\overline{z}}{\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ olur. Bu dönüşüm birim çembere inversiyon ve reel eksene göre yansıma idi.

* $c=0$ olsun. Bu taktirde $w(z)=\frac{az+b}{d}=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}$ olur.
Bu ifade dönme-gerilme ve ötelemedir.

* $c\neq 0$ olsun. Bu taktirde $w(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ olur.

$$w(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{az+b+\frac{ad}{c}-\frac{ad}{c}}{cz+d}=\frac{\frac{a}{c}(cz+d)+b-\frac{ad}{c}}{cz+d}$$

$$=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cz+d}=\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cz+d}+\frac{a}{c}$$

elde edilir. Bu ifade inversiyon, yansıma, dönme-gerilme ve ötelemedir.

Teorem: Lineer kesirli dönüşümler (Möbius dön.leri) genişletilmiş kompleks düzlemi kendisine dönüşür. Dönüşüm doğru ve çemberleri, doğru ve çemberlere dönüştürür. Üstelik açılarda korur.

İspat (Ödev!)

$T_1(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ ve $T_2(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ şeklinde verilen iki Möbius dönüşümü olsun. Buna göre bu iki Möbius dön. bileşkesi yine bir Möbius dön. müdür?

$$(T_2\circ T_1)(z)=T_2(T_1(z))$$
$$=\frac{\alpha\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)+\beta}{\gamma\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)+\delta}$$
$$=\frac{\frac{\alpha az+\alpha b+\beta cz+\beta d}{cz+d}}{\frac{\gamma az+\gamma b+\delta cz+\delta d}{cz+d}}$$
$$=\frac{(\alpha a+\beta c)z+(\alpha b+\beta d)}{(\gamma a+\delta c)z+(\gamma b+\delta d)}$$

elde edilir. Burada açıkça $a,b,c,d,\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{C}$ old. $\alpha a+\beta c,\ \alpha b+\beta d,\ \gamma a+\delta c,\ \gamma b+\delta d\in\mathbb{C}$ olur. Bunun bir Möbius dön. olması için $ad-bc\neq 0$ ve $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ olup $(\alpha a+\beta c)(\gamma b+\delta d)-(\alpha b+\beta d)(\gamma a+\delta c)$ ifadesinin sıfırdan farklı old. gösterilmelidir...

$$(\alpha a+\beta c)(\gamma b+\delta d)-(\alpha b+\beta d)(\gamma a+\delta c)$$
$$=\alpha a\gamma b+\alpha a\delta d+\beta c\gamma b+\beta c\delta d-\alpha b\gamma a-\alpha b\delta c-\beta d\gamma a-\beta d\delta c$$
$$=\alpha\delta(ad-bc)+\beta\gamma(bc-ad)$$
$$=\underbrace{(ad-bc)}_{\neq 0}\underbrace{(\alpha\delta-\beta\gamma)}_{\neq 0}\neq 0$$

olur. O halde iki Möbius dön. bileşkesi yine bir Möbius dönüşümüdür.

$T_1(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ ve $T_2(z) = \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ möbius dön. ele aldık

$$T_1(z) \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad T_2(z) \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

$$(T_2\circ T_1)(z) \longleftrightarrow \underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}}^{T_2}}_{A} \underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}^{T_1}}_{B} = \underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} \alpha a+\beta c & \alpha b+\beta d \\ \gamma a+\delta c & \gamma b+\delta d \end{bmatrix}}^{T_2\circ T_1}}_{C}$$

elde edilir. $(T_2\circ T_1)(z) = \dfrac{(\alpha a+\beta c)z+(\alpha b+\beta d)}{(\gamma a+\delta c)z+(\gamma b+\delta d)}$ olarak bulunmuştu.

$C = A.B$ ve $\overbrace{\det A \neq 0}^{\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0}$, $\overbrace{\det B\neq 0}^{ad-bc\neq 0}$ old. $\det C = \det(AB)\neq 0$ dır.

⊛ T_1, T_2, T_3 üç Möbius dön.ü ise $T_3(T_2\,T_1) = (T_3\,T_2)T_1$ dir.

$$T_1 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad T_2 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \qquad T_3 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$ olsun.

Buna göre $T_3\circ T_2\circ T_1$ yine bir lin. kes. dön. (Möbius dön) olur.

Dön bulmak için $\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisleri çarpılmalıdır.

Matrislerde çarpma işlemi asosyatiftir (birleşimlidir). Bu nedenle önce hangi iki matrisin çarpıldığının önemi yoktur. Çünkü sonuç değişmez. O halde bu özellik yeni asosyatiflik möbius dön. içinde doğrudur.

Yani $T_3\circ(T_2\circ T_1) = (T_3\circ T_2)\circ T_1$ olur.

⊛ $T_0(z) = z$ bir dön. ele alalım. Dikkat edilirse bu bir möbius dön.dür. $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ için $a=1,\ b=c=0,\ d=1$ iken $T_0(z)=z$ dir ve üstelik $ad-bc = 1.1-0.0=1\neq 0$ dır. Bu T_0 möbius dön. birim döndür. üstelik T bir möbius dön. olsun.

$$T\circ T_0 = T_0\circ T = T$$

olur.

$T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $T_0(z)=z$ o.ü.

$$(T \circ T_0)(z)=T(T_0(z))=\frac{a\,T_0(z)+b}{c\,T_0(z)+d}=\frac{az+b}{cz+d}=T(z) \,,$$

$(T_0 \circ T)(z)=T_0(T(z))=T(z)$ bulunur.

⊛ $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ Möbius dön verilsin. Buna göre $T^{-1}(z)$ var mıdır?

$$w=T(z)=\frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow \quad w=\frac{az+b}{cz+d}$$

$$\Rightarrow wcz+wd=az+b$$

$$\Rightarrow (cw-a)z=-dw+b$$

$$\Rightarrow \quad z=\frac{-dw+b}{cw-a} \quad \text{elde edilir.}$$

Buna göre $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ iken $T^{-1}(z)=\dfrac{-dz+b}{cz-a}$ dir.

O halde her Möbius dön tersi vardır. Ayrıca

$$T \circ T^{-1}=T^{-1}\circ T=T_0$$

olur.

$$(T \circ T^{-1})(z)=T(T^{-1}(z))=\frac{a.\left(\frac{-dz+b}{cz-a}\right)+b}{c\left(\frac{-dz+b}{cz-a}\right)+d}=\frac{-adz+ab+bcz-ab}{-cdz+bc+cdz-ad}$$

$$=\frac{(-ad+bc)z}{(bc-ad)}=z \quad \text{dir.}$$

$$(T^{-1}\circ T)(z)=T^{-1}(T(z))=\frac{-d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)+b}{c\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)-a}=\frac{-adz-bd+bcz+bd}{caz+cb-acz-ad}$$

$$=\frac{(-ad+bc)z}{(cb-ad)}=z \quad \text{olur.}$$

Buna göre açıkça Möbius dön. kümesi bileşke işlemi altında bir grup yapısı oluştururlar.

$\rightarrow$ i) Kapalılık ✓
ii) Birleşmeli ✓
iii) Etkisiz eleman ✓
iv) Ters eleman ✓

⊛ $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ Möbius dönüşümünün sabit noktası var mıdır?

Yani $T(z)=z$ o.ş. $z\in\mathbb{C}$ var mıdır?

$$T(z)=z \Rightarrow \frac{az+b}{cz+d}=z$$
$$\Rightarrow cz^2+dz=az+b$$
$$\Rightarrow cz^2+(d-a)z-b=0$$

elde edilir.

Buna göre elde edilen bu 2. derece denklemin kökleri varsa onlar Tnin sabit noktaları olur.

$c=0 \Rightarrow (d-a)z-b=0 \Rightarrow z=\dfrac{b}{d-a}$

$c=0$ dır $\Leftrightarrow$ ∞, Tnin sabit noktasıdır

$c=0$ ve $\dfrac{a}{d}\neq 1$ dır $\Leftrightarrow$ ∞ ve $\dfrac{b}{d-a}$ Tnin sabit noktalarıdır

$c=0$ ve $a=d$ ise $T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}=\dfrac{az+b}{a}=z+\dfrac{b}{a}$ olup dönüşüm bir ötelemedir. Dolayısıyla tek sabit nokta ∞ dur.

$c\neq 0$ ise $cz^2+(d-a)z-b=0$ denk kökleri çakışabilir. Ancak mutlaka en az bir kök vardır.

Teorem: Birim olmayan bir Möbius dönüşümü en çok iki sabit noktaya sahiptir. Özel olarak bir Möbius dönüşümü üç noktayı sabit bırakıyorsa birim dönüşümdür.

Teorem: Verilen farklı z_1, z_2, z_3 noktalarını sırasıyla verilen farklı w_1, w_2, w_3 noktalarına dönüştüren bir tek Möbius dön. vardır.

İspat:

$$\boxed{\begin{array}{l} z_1 \longrightarrow w_1 \\ z_2 \longrightarrow w_2 \\ z_3 \longrightarrow w_3 \end{array} \quad \text{dön. Möbius dön. tektir.}}$$

$$T_1(z) = \frac{z-z_1}{z-z_3}\,\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} \quad \text{ve} \quad T_2(z) = \frac{z-w_1}{z-w_3}\,\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}$$

iki Möbius dön. verilsin. Buna göre burada T_1 dönüşümü z_1, z_2, z_3 ü sırasıyla $0, 1, \infty$ dönüştürür. Benzer şekilde T_2 dönüşümü de w_1, w_2, w_3 ü sırasıyla $0, 1, \infty$ dönüştürür. Burada $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3 \neq \infty$ dur. Eğer $z_1 = \infty$ ise $T_1(z) = \dfrac{z_2-z_3}{z-z_3}$, $z_2 = \infty$ ise $T_1(z) = \dfrac{z-z_1}{z-z_3}$ ve $z_3 = \infty$ ise $T_1(z) = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ olur.

Bunun tamamen benzeri T_2 içinde geçerlidir. Buna göre

$T = T_2^{-1} \circ T_1$ dönüşümü z_1, z_2, z_3 ü $\Rightarrow$ w_1, w_2, w_3 e dönüştürür.

$$\begin{tikzcd}
z_1 \arrow[r] \arrow[r, bend left, "T_1"] \arrow[dd, phantom] & 0 \arrow[r, bend left, "T_2^{-1}"] & w_1 \arrow[l] \arrow[l, bend right, "T_2"'] \\
z_2 \arrow[r] & 1 & w_2 \arrow[l] \\
z_3 \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "T_2^{-1}\circ T_1"'] & \infty & w_3 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} z_i \overset{T}{\underset{S}{\rightrightarrows}} w_i \\ \xleftarrow{S^{-1}} \\ z_i \xrightarrow{T} w_i \xrightarrow{S^{-1}} z_i \end{array}}$$

Şimdi varsayalım ki S de z_1, z_2, z_3 ü w_1, w_2, w_3 e dönüştüren bir başka Möbius dön. olsun. Bu taktirde $S^{-1} \circ T$ dönüşümü z_1, z_2, z_3 ü sabit bırakır. Ancak üç noktayı sabit bırakan dönüşüm birim dönüşüm olurdu. O halde $S^{-1} \circ T = T_0 \Rightarrow S \circ (S^{-1} \circ T) = S \circ T_0 \Rightarrow T = S$ olur.

O halde z_1, z_2, z_3 ü w_1, w_2, w_3 e dönüştüren dönüşüm bir tanedir. (Tek türlü bellidir.)

ÇİFTE ORAN (Genişletilmiş Kompleks Düzlemde)

$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ olsun. (Yani genişletilmiş kompleks düzlemde herhangi dört nokta dır.) Bu taktirde

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$$

olarak tanımlanan ifadeye z_1, z_2, z_3, z_4 ün çifte oranı denir.
(Burada $z_j = \infty$ ise ∞ içeren iki çarpan silinmelidir!..)

Dikkat edilirse z_1, z_2, z_3, z_4 ün tamamı reel eksen üzerinde ise daha önce gördüğümüz dört doğrudaş noktanın çifte oranı ile aynıdır.

Teorem: Dört noktanın çifte oranı bir Möbius dön. altında invaryanttır. (Möbius dön. ü dört noktanın çifte oranını korur.)

İspat: $w = T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ bir Möbius dönüşümü ve $i = 1,2,3,4$ için w_i ifadesi z_i nin görüntüsü olsun yani $T(z_i) = w_i$ olsun.
Bu taktirde

$$w_i - w_j = \frac{az_i+b}{cz_i+d} - \frac{az_j+b}{cz_j+d}$$

$$= \frac{(az_i+b)(cz_j+d) - (az_j+b)(cz_i+d)}{(cz_i+d)(cz_j+d)}$$

$$= \frac{acz_iz_j + adz_i + bcz_j + bd - acz_iz_j - adz_j - bcz_i - bd}{(cz_i+d)(cz_j+d)}$$

$$= \frac{(ad-bc)(z_i - z_j)}{(cz_i+d)(cz_j+d)}$$

elde edilir. Buna göre

$$(w_1, w_2, w_3, w_4) = \frac{(w_1-w_3)(w_2-w_4)}{(w_1-w_4)(w_2-w_3)}$$

$$= \frac{\dfrac{(ad-bc)(z_1-z_3)}{(cz_1+d)(cz_3+d)} \cdot \dfrac{(ad-bc)(z_2-z_4)}{(cz_2+d)(cz_4+d)}}{\dfrac{(ad-bc)(z_1-z_4)}{(cz_1+d)(cz_4+d)} \cdot \dfrac{(ad-bc)(z_2-z_3)}{(cz_2+d)(cz_3+d)}}$$

$$= \frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$$

$$= (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

sonucuna ulaşılır. Yani Möbius dön. ü dört noktanın çifte oranını korur.

Ödev sy 37 (1)-(2)-(3) sorular

Teorem: $i = 1,2,3,4$ a.ü. z_i' ; z_i nok.larının bir $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyonu altında inversi olsun. Bu taktirde;

$$(z_1', z_2', z_3', z_4') = \overline{(z_1, z_2, z_3, z_4)}$$

olur.

İspat: $\mathcal{C}$, z_0 merkezli ve r yarıçaplı bir çember olsun.

Buna göre $\mathcal{C}$ çemberine göre inversiyon

$$z' = z_0 + \frac{r^2}{\overline{z - z_0}} \quad \text{olur.}$$

$$z \longmapsto \frac{1}{\bar{z}} \longrightarrow m=(0,0) \text{ ve } r=1 \text{ için inversiyon.}$$

$$z \longmapsto \frac{r^2}{\bar{z}} \longrightarrow m=(0,0) \text{ ve } r \text{ yarıçapı için inversiyon}$$

$$z \xmapsto[\text{orijine çekelim}]{\text{öteleme}} z-z_0 \xmapsto{\text{inversiyon}} \frac{r^2}{\overline{z-z_0}} \xmapsto[\text{geri öteledik}]{\text{öteleme}} z_0+\frac{r^2}{\overline{z-z_0}}$$

$$z_i' - z_j' = \left(z_0 + \frac{r^2}{\overline{z_i-z_0}}\right) - \left(z_0 + \frac{r^2}{\overline{z_j-z_0}}\right)$$

$$= \frac{r^2\left(\overline{z_j-z_0} - \overline{z_i-z_0}\right)}{\left(\overline{z_i-z_0}\right)\left(\overline{z_j-z_0}\right)}$$

$$= \frac{r^2\left(\bar{z}_j - \bar{z}_i\right)}{\left(\bar{z}_i-\bar{z}_0\right)\left(\bar{z}_j-\bar{z}_0\right)}$$

elde edilir. Buna göre

$$(z_1', z_2', z_3', z_4') = \frac{(z_1'-z_3')(z_2'-z_4')}{(z_1'-z_4')(z_2'-z_3')}$$

$$= \frac{\dfrac{\cancel{r^2}(\bar{z}_1-\bar{z}_3)}{\cancel{(\bar{z}_1-\bar{z}_0)}\cancel{(\bar{z}_3-\bar{z}_0)}} \cdot \dfrac{\cancel{r^2}(\bar{z}_2-\bar{z}_4)}{\cancel{(\bar{z}_2-\bar{z}_0)}\cancel{(\bar{z}_4-\bar{z}_0)}}}{\dfrac{\cancel{r^2}(\bar{z}_1-\bar{z}_4)}{\cancel{(\bar{z}_1-\bar{z}_0)}\cancel{(\bar{z}_4-\bar{z}_0)}} \cdot \dfrac{\cancel{r^2}(\bar{z}_2-\bar{z}_3)}{\cancel{(\bar{z}_2-\bar{z}_0)}\cancel{(\bar{z}_3-\bar{z}_0)}}}$$

$$= \frac{(\bar{z}_1-\bar{z}_3)(\bar{z}_2-\bar{z}_4)}{(\bar{z}_1-\bar{z}_4)(\bar{z}_2-\bar{z}_3)} = \overline{\left(\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}\right)}$$

$$= (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4) = \overline{(z_1, z_2, z_3, z_4)} \text{ dir.}$$

Teorem: Dört farklı nokta çemberdeş veya doğrudaştır.

$\Updownarrow$

Bu nok.ların çifte oranı reeldir.

İspat: z_1, z_2, z_3, z_4 dört farklı nokta ve T de sırasıyla z_1, z_2, z_3 noktalarını $\infty, 0, 1$ noktalarına dönüştüren bir Möbius dön. olsun. Yani

$$T(z) = \frac{(z_1-z_3)(z_2-z)}{(z_1-z)(z_2-z_3)} \leftarrow T(z) = \frac{(z_2-z)(z_1-z_3)}{(z_1-z)(z_2-z_3)}$$

dür. Bu takdirde

$$\begin{aligned}(z_1, z_2, z_3, z_4) &= (T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) \\ &= (\infty, 0, 1, T(z_4)) \longrightarrow \frac{(\cancel{\infty}-1)(0-T(z_4))}{(\cancel{\infty}-T(z_4))(0-1)} \\ &= T(z_4)\end{aligned}$$

olur. T bir Möbius dön old. doğru ve çemberleri, doğru ve çembere dönüştürür. $\infty, 0, 1$ nok.ları doğrudaştır. Buna göre reel eksen ($\infty, 0, 1$ den geçen doğru) z_1, z_2, z_3 den geçen bir doğru veya çemberin görüntüsüdür. Böylelikle

z_4 bu doğru veya çemberin üzerindedir

$\Updownarrow$

$T(z_4)$ reeldir.

olur.

$z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ ve $\lambda \neq 0, 1, \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ o.ş. $\lambda \in \mathbb{C}$ verildiğinde

$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \lambda$ o.ş. z_4 varmıdır?

$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \lambda$

$$\Rightarrow \frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)} = \lambda \Rightarrow (z_1-z_3)(z_2-z_4) = \lambda(z_1-z_4)(z_2-z_3)$$

$$\Rightarrow (z_1-z_3)z_2 - \lambda z_1(z_2-z_3) = (z_1-z_3)z_4 - \lambda(z_2-z_3)z_4$$

$$\Rightarrow z_4 = \frac{(z_1-z_3)z_2 - \lambda z_1(z_2-z_3)}{(z_1-z_3)-\lambda(z_2-z_3)} \text{ olur.}$$

z_1, z_2, z_3, λ belli iken z_4 __tek__ olarak bellidir.

$\lambda = 0 \Rightarrow z_4 = z_2$ X

$\lambda = 1 \Rightarrow z_4 = z_3$ X

$\lambda = \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3} \Rightarrow z_4 = \frac{*}{0}$ X

olacağından $\lambda \neq 0, 1, \frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ dir.

Bazı Özel Möbius Dönüşümleri

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \text{im}(z) \geq 0\} \xrightarrow{T} \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$$

$$Tz = \frac{az+b}{cz+d}, \; ad-bc \neq 0$$

sağlayan Möbius dön. var mıdır?

Dönüşüm $Tz = \frac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc \neq 0)$ olsun.

Dönüşüm reel ekseni kapalı birim diskin sınırına yani çembere dönüştürsün!...

$$|T(0)| = 1 \Rightarrow \left|\frac{b}{d}\right| = 1 \Rightarrow |b| = |d|$$

$$|T(\infty)| = 1 \Rightarrow \left|\frac{a}{c}\right| = 1 \Rightarrow |a| = |c| \text{ olur.}$$

$$Tz = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a(z+\frac{b}{a})}{c(z+\frac{d}{c})} = \frac{a}{c}\,\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}} = e^{i\theta}\,\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}$$

$e^{i\theta}$

$|b| = |d|$ ve $|a| = |c|$ old $\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{d}{c}\right|$ dir.

$x \in \mathbb{R}$ ise $|Tx| = 1$ olmalıdır.

$$Tx = e^{i\theta}\,\frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}} \text{ olur.}$$

$$|Tx| = \left|e^{i\theta}\,\frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}}\right| = \left|\frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}}\right| = 1 \Rightarrow \left|x+\frac{b}{a}\right| = \left|x+\frac{d}{c}\right| \text{ olur}$$

$$\underbrace{\left|x+\frac{b}{a}\right|^2} = \underbrace{\left|x+\frac{d}{c}\right|^2}$$

$$\underbrace{\left(x+\frac{b}{a}\right)\left(x+\overline{\frac{b}{a}}\right)} = \underbrace{\left(x+\frac{d}{c}\right)\left(x+\overline{\frac{d}{c}}\right)} \Longrightarrow \underbrace{\left(\frac{b}{a}+\overline{\frac{b}{a}}\right)x} = \underbrace{\left(\frac{d}{c}+\overline{\frac{d}{c}}\right)x}$$

$$x^2+\left(\frac{b}{a}+\overline{\frac{b}{a}}\right)x+\left|\frac{b}{a}\right|^2 = x^2+\left(\frac{d}{c}+\overline{\frac{d}{c}}\right)x+\left|\frac{d}{c}\right|^2$$

$2\,Re\left(\frac{b}{a}\right) = 2\,Re\left(\frac{d}{c}\right)$ elde edilir.

$\hookrightarrow Re\left(\frac{b}{a}\right) = Re\left(\frac{d}{c}\right)$ dir.

Aynı real kısım ve aynı modüle sahip old

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \text{veya} \quad \frac{b}{a} = \overline{\frac{d}{c}}$$

olur.

(i) $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow Tz = e^{i\theta}\,\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}} \Rightarrow \boxed{Tz = e^{i\theta}}$

(ii) $\frac{b}{a} = \frac{\bar{d}}{\bar{c}} \Rightarrow Tz = e^{i\theta} \frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}} \Rightarrow Tz = e^{i\theta} \frac{z+\frac{b}{a}}{z+\overline{\frac{b}{a}}}$ $\left(z_0 = -\frac{b}{a}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{Tz = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}}$$ bulunur.

↳ üst yarı düzlemi birim diske götüren en genel dön. dür.

z_0 üst yarı düzlemde üst yarı düzlem $\xrightarrow{T}$ birim diskiçi
z_0 alt yarı düzlemde üst yarı düzlem $\xrightarrow{T}$ birim disk dışı

Birim diski ⟶ Birim diske dönüştüren en genel Möbius dönüşümü nedir?

$Tz = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$ ← üst yarı düzlemi birim diske dönüştüren dönüşüm.

$$w = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \Rightarrow w(z - \bar{z}_0) = e^{i\theta}(z - z_0)$$
$$\Rightarrow wz - w\bar{z}_0 = e^{i\theta} z - e^{i\theta} z_0$$
$$\Rightarrow wz - e^{i\theta} z = w\bar{z}_0 - e^{i\theta} z_0$$
$$\Rightarrow z(w - e^{i\theta}) = w\bar{z}_0 - e^{i\theta} z_0$$
$$\Rightarrow z = \frac{\bar{z}_0 w - e^{i\theta} z_0}{w - e^{i\theta}}$$ bulunur.

$$Tz = e^{i\theta} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \Rightarrow \underbrace{T^{-1} z = \frac{\bar{z}_0 z - e^{i\theta} z_0}{z - e^{i\theta}}}_{\text{Birim disk} \longrightarrow \text{üst yarı-düzlem}}$$ dur.

$\zeta = S(z) = -i\,\frac{z-1}{z+1}$ dön. ola alalım. (T^{-1} z de $z_0 = i$, $e^{i\theta} = -1$ alalım)

$u(z) = T(\zeta) = TS(z) \longrightarrow$ birim diski, birim diske dönüştürür

$$u(z) = T(S(z)) = T\left(-i\,\frac{z-1}{z+1}\right)$$

$$= e^{i\theta}\,\frac{-i\,\frac{z-1}{z+1} - z_0}{-i\,\frac{z-1}{z+1} - \bar{z}_0}$$

$$= e^{i\theta}\,\frac{-i(z-1) - z_0(z+1)}{-i(z-1) - \bar{z}_0(z+1)}$$

$$= e^{i\theta}\,\frac{-(z_0+i)z - (z_0-i)}{-(\bar{z}_0+i)z - (\bar{z}_0-i)}$$

$$= e^{i\theta}\,\frac{(z_0+i)(-1)\left[z + \frac{z_0-i}{z_0+i}\right]}{(\bar{z}_0-i)\left[\frac{-(\bar{z}_0+i)}{\bar{z}_0-i}\,z - 1\right]}$$

$\boxed{z_1 = -\frac{z_0-i}{z_0+i} \text{ denirse}}$

$$= \boxed{e^{i\phi}\,\frac{z - z_1}{\bar{z}_1 z - 1}} \longrightarrow$$

Birim diski birim diske dön. en genel dönüşüm

z_0 üst yarı düzl. old. $\left|\frac{z_0-i}{z_0+i}\right| < 1$ dir.

$u(z) = e^{i\phi}\,\frac{z-z_1}{\bar{z}_1 z - 1}$, ϕ bir reel sayı, z_1 birim diskin içinde

$$Tz = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1 \cdot z}{\bar{z} \cdot z} = \frac{z}{|z|^2}$$ → merkezil birim çemberdeki inversiyon.

$$Tz = \frac{r^2}{\bar{z}}$$ → merkezil r yarıçaplı çembere göre inversiyon

$$Tz = z_0 + \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} = \frac{z_0 \bar{z} + (r^2 - |z_0|^2)}{\bar{z} - \bar{z}_0}$$ → merkezi z_0 ve yarıçapı r olan çembere göre inversiyon

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ o.ü. $Tz = \dfrac{az+b}{cz+d}$ → Möbius dön. lin. kes. dön. homografi

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ o.ü.

$$Tz = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$$

şeklinde tanımlı $T : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ dön.üne anti-Möbius dön.ü (anti-homografi) adı verilir.

$c = 0 \Rightarrow Tz = \dfrac{a}{d}\bar{z} + \dfrac{b}{d}$ → dönme-gerilme + reel eks. yansıma + öteleme

$$c \neq 0 \Rightarrow Tz = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} = \frac{\frac{a}{c}\left(c\bar{z} + \frac{bc}{a}\right)}{c\bar{z}+d} = \frac{\frac{a}{c}\left(c\bar{z}+d-d+\frac{bc}{a}\right)}{c\bar{z}+d}$$

$$= \frac{\frac{a}{c}\cancel{(c\bar{z}+d)}}{\cancel{c\bar{z}+d}} + \frac{\frac{a}{c}\left(-d+\frac{bc}{a}\right)}{c\bar{z}+d}$$ → $\left(-\dfrac{ad}{c} + b\right) = \dfrac{1}{c}(-ad+bc)$

$$= -\frac{ad-bc}{c} \cdot \frac{1}{c\bar{z}+d} + \frac{a}{c}$$ → dönme-gerilme + inversiyon + reel eks. yansıma + öteleme

$T_1 z = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, $T_2 z = \dfrac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}$ iki anti-möbius dön. olsun.

Bu iki dönüşümün bileşkesi

$$(T_2 \circ T_1)(z) = T_2(\overline{T_1 z})$$

$$= \frac{\alpha\overline{\left(\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}\right)}+\beta}{\gamma\overline{\left(\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}\right)}+\delta}$$

$$= \frac{\alpha\,\overline{(a\bar{z}+b)}+\beta\,\overline{(c\bar{z}+d)}}{\gamma\,\overline{(a\bar{z}+b)}+\delta\,\overline{(c\bar{z}+d)}}$$

$$= \frac{\alpha(\bar{a}z+\bar{b})+\beta(\bar{c}z+\bar{d})}{\gamma(\bar{a}z+\bar{b})+\delta(\bar{c}z+\bar{d})}$$

$$= \frac{(\alpha\bar{a}+\beta\bar{c})z+(\alpha\bar{b}+\beta\bar{d})}{(\gamma\bar{a}+\delta\bar{c})z+(\gamma\bar{b}+\delta\bar{d})}$$

$$(\alpha\bar{a}+\beta\bar{c})(\gamma\bar{b}+\delta\bar{d})-(\alpha\bar{b}+\beta\bar{d})(\gamma\bar{a}+\delta\bar{c})$$

$$= \cancel{\alpha\gamma\bar{a}\bar{b}}+\alpha\delta\bar{a}\bar{d}+\beta\gamma\bar{c}\bar{b}+\cancel{\beta\delta\bar{c}\bar{d}}-\cancel{\alpha\gamma\bar{b}\bar{a}}-\alpha\delta\bar{b}\bar{c}-\beta\gamma\bar{d}\bar{a}-\cancel{\beta\delta\bar{d}\bar{c}}$$

$$= \alpha\delta(\bar{a}\bar{d}-\bar{b}\bar{c})+\beta\gamma(\bar{c}\bar{b}-\bar{a}\bar{d})$$

$$= (\bar{a}\bar{d}-\bar{b}\bar{c})(\alpha\delta-\beta\gamma)$$

$$= \underbrace{\underbrace{\overline{(ad-bc)}}_{\neq 0}\,\underbrace{(\alpha\delta-\beta\gamma)}_{\neq 0}}_{\neq 0} \neq 0$$

dır. O halde anti-möbius dön.lerin bileşkesi möbius dön.dür.

Bu durumda anti-möbius dön. bileşke işlemine göre kapalı olmadığından grup teşkil etmezler.

$T_1 z = \dfrac{az+b}{cz+d}$ → möbius dön. , $T_2 z = \dfrac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}$ → anti-möbius dön. alalım.

$$(T_2 \circ T_1)(z) = T_2(\overline{T_1 z})$$

$$= \frac{\alpha\left(\overline{\frac{az+b}{cz+d}}\right)+\beta}{\gamma\left(\overline{\frac{az+b}{cz+d}}\right)+\delta}$$

$$= \frac{(\alpha\bar{a}+\beta\bar{c})\bar{z}+(\alpha\bar{b}+\beta\bar{d})}{(\gamma\bar{a}+\delta\bar{c})\bar{z}+(\gamma\bar{b}+\delta\bar{d})} \longrightarrow \text{Anti-Möbius dön. dür.}$$

$$(\alpha\bar{a}+\beta\bar{c})(\gamma\bar{b}+\delta\bar{d})-(\alpha\bar{b}+\beta\bar{d})(\gamma\bar{a}+\delta\bar{c})$$

$$= \cancel{\alpha\gamma\bar{a}\bar{b}}+\alpha\delta\bar{a}\bar{d}+\beta\gamma\bar{b}\bar{c}+\cancel{\beta\delta\bar{c}\bar{d}}-\cancel{\alpha\gamma\bar{a}\bar{b}}-\alpha\delta\bar{b}\bar{c}-\beta\gamma\bar{a}\bar{d}-\cancel{\beta\delta\bar{c}\bar{d}}$$

$$= (\alpha\delta-\beta\gamma)\overline{(ad-bc)} \neq 0 \text{ dır.}$$

$(T_1 \circ T_2)(z) = \ldots$ bu da bir anti möbius dön. dür

$\{$Möbius Dön.leri$\} \cup \{$Anti-Möbius Dön.leri$\}$

$$T_1 z = \frac{az+b}{cz+d} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad T_2 z = \frac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

$$T_1 \circ T_2 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

$$T_2 \circ T_1 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\overline{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$$

--- o ---

T_1, T_2, T_3 herhangi möbius veya anti-möbius dön. olsun.

$$(T_1 \circ (T_2 \circ T_3))(z) = ((T_1 \circ T_2) \circ T_3)(z)$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \longrightarrow$$ matris çarpma işlemine göre birleşmeli old. birleşmelidir (Asosyatiftir!)

T_1 bir möbius veya antimöbius olsun. $Iz = z$ ve $I : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ den alsın. Bu taktirde açıkça

$$T_1 \circ I = I \circ T_1 = T_1$$

olur. I etkisiz elemandır.

$$T \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$ ($ad-bc \neq 0$ old her zaman tersi vardır)

O halde eldeki küme bir gruptur. Bu gruba genişletilmiş möbius dön grubu denir.

<u>Teorem:</u> Anti-homografiler (anti-Möbius) doğruları ve çemberleri doğrulara ve çemberlere dönüştürür ve de dönüşüm konformaldir.

Anti-möbius dön. bir çifte oranı korur mu?

$z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ ve z_1', z_2', z_3', z_4' de z_1, z_2, z_3, z_4 sırasıyla

$Tz = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ anti-möbius dön altında görüntüsü olsun.

$$(z_1', z_2', z_3', z_4') = \frac{(z_1'-z_3')(z_2'-z_4')}{(z_1'-z_4')(z_2'-z_3')}$$

$$z_i' - z_j' = \frac{a\bar{z}_i+b}{c\bar{z}_i+d} - \frac{a\bar{z}_j+b}{c\bar{z}_j+d}$$

$$= \frac{\overbrace{(a\bar{z}_i+b)(c\bar{z}_j+d)-(a\bar{z}_j+b)(c\bar{z}_i+d)}^{ac\cancel{\bar{z}_i\bar{z}_j} + ad\bar{z}_i + bc\bar{z}_j + \cancel{bd} - ac\cancel{\bar{z}_j\bar{z}_i} - ad\bar{z}_j - bc\bar{z}_i - \cancel{bd}}}{(c\bar{z}_i+d)(c\bar{z}_j+d)}$$

$$= \frac{(ad-bc)(z_i - z_j)}{(c\bar{z}_i + d)(c\bar{z}_j + d)} \quad \text{olur.}$$

$$(z_1', z_2', z_3', z_4') = \frac{(z_1' - z_3')(z_2' - z_4')}{(z_1' - z_4')(z_2' - z_3')}$$

$$= \frac{\dfrac{\cancel{(ad-bc)}(z_1 - z_3)}{\cancel{(c\bar{z}_1+d)}\cancel{(c\bar{z}_3+d)}} \cdot \dfrac{\cancel{(ad-bc)}(z_2 - z_4)}{\cancel{(c\bar{z}_2+d)}\cancel{(c\bar{z}_4+d)}}}{\dfrac{\cancel{(ad-bc)}(z_1 - z_4)}{\cancel{(c\bar{z}_1+d)}\cancel{(c\bar{z}_4+d)}} \cdot \dfrac{\cancel{(ad-bc)}(z_2 - z_3)}{\cancel{(c\bar{z}_2+d)}\cancel{(c\bar{z}_3+d)}}}$$

$$= \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

$= (z_1, z_2, z_3, z_4)$ olur. Demekki çifte oran korunur!...