Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
Sommersemester 2025
Esentepe-Gharbi-Pompili

Blatt 3

(1) Letzte Woche haben Sie beweisen, dass für beliebige $n \times n$ Matrizen A, B gilt

$$\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA).$$

Wenn drei Matrizen A, B, C gegeben sind, kann man dies nutzen, um zu zeigen, dass

$$\mathrm{Spur}(ABC) = \mathrm{Spur}(A(BC)) = \mathrm{Spur}((BC)A) = \mathrm{Spur}(BCA).$$

Im Allgemeinen gilt jedoch nicht, dass $\mathrm{Spur}(ABC) = \mathrm{Spur}(BAC)$.

(a) Finden Sie drei 2×2 -Matrizen A, B, C, sodass $\mathrm{Spur}(ABC) = \mathrm{Spur}(BCA)$.

(b) Finden Sie drei 2×2 -Matrizen X, Y, Z, sodass $\mathrm{Spur}(XYZ) \neq \mathrm{Spur}(YXZ)$.

(2) (a) Es seien A und B wie unten gegeben. Berechnen Sie $AB, (AB)^*, A^*B^*$ und B^*A^*, falls möglich.

(i)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

(ii)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Welche der folgenden Aussagen ist wahr: $(AB)^* = A^*B^*$ oder $(AB)^* = B^*A^*$?

(c) Beweisen Sie die korrekte Aussage für allgemaine Matrizen A und B, wobei das Produkt AB definiert ist.

(3) Es seien K und U wie unten gegeben. Es sei V der K-Vektorraum der 2×2 Matrizen mit Koeffizienten in K. Bestimmen Sie, ob U ein K-Unterraum von V ist. Falls U ein Unterraum ist, bestimmen Sie eine Basis von U.

(a) $K = \mathbb{R}$ und U die Teilmenge $\{A \in V \colon A^T = A\}$.

(b) $K = \mathbb{C}$ und U die Teilmenge $\{A \in V \colon A^* = A\}$.

(4) Es sei V der Vektorraum der 2×2 Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\langle A, B \rangle := \mathrm{Spur}(A^*B)$ ein inneres Produkt auf V ist. Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Finden Sie eine matrix B, sodass $\langle A, B \rangle = 6$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Teilmenge $U = \{B \colon \langle A, B \rangle = 0\}$ ein Unterraum von V ist, und bestimmen Sie eine Basis für U.

(5) Es sei V der Vektorraum der 2×2 Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass $||A|| := \sqrt{\mathrm{Spur}(A^*A)}$ ein Norm ist.

(b) Für welche Werte von $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ erfüllt die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

die Bedingung $||A|| = 1$?

(c) Wahr oder falsch: für jede Matrix A gilt $||A^*|| = ||A||$.

(6) Es seien V, W zwei Vektorräume über $\mathbb{R}$, $f\colon V \to W$ eine injektive lineare Abbildung und $\langle -, - \rangle_W$ ein inneres Produkt auf W. Definieren Sie

$$\langle v_1, v_2 \rangle_V := \langle f(v_1), f(v_2) \rangle_W.$$

für $v_1, v_2 \in V$. Zeigen Sie, dass $\langle -, - \rangle_V$ ein inneres Produkt auf V ist.