Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
Sommersemester 2025
Esentepe-Gharbi

Blatt 9

(1) Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ heißt *idempotent*, wenn $A^2 = E$, wobei E die Einheitsmatrix ist.
   (a) Zeigen Sie, dass
   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
   idempotent ist.
   (b) Wahr oder falsch: Wenn $A^2 = I$, dann gilt $A = -I$ oder $A = I$.
   (c) Finden Sie den Fehler im folgenden Argument:
      (i) Wenn $A^2 = I$, dann gilt $A^2 - I = 0$.
      (ii) Wenn $A^2 - I = 0$, dann gilt $(A+I)(A-I) = 0$.
      (iii) Wenn $(A+I)(A-I) = 0$, dann gilt $A + I = 0$ oder $A - I = 0$.
      (iv) Wenn $A + I = 0$ or $A - I = 0$, dann gilt $A = -I$ oder $A = I$.

(2) Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine idempotent Matrix.
   (a) Zeigen Sie dass $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$.
   (b) Zeigen Sie, dass wenn c is ein Eingenwert von A ist, dann gilt $c = 1$ oder $c = -1$.

(3) Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ nilpotent, wenn $A^m = 0$ für ein m.
   (a) Finden Sie eine 2×2 Matrix A, sodass $A^2 = 0$, aber $A \neq 0$.
   (b) Finden Sie eine 3×3 Matrix A, sodass $A^2 = 0$, aber $A \neq 0$.
   (c) Finden Sie eine 3×3 Matrix A, sodass $A^3 = 00$, aber $A^2 \neq 0$.
   (d) Zeigen Sie, dass when A nilpotent ist, dann 0 ein Eigenwert von A ist.
   (e) Zeigen Sie, dass when A nilpotent ist und c ist ein Eigenwert von A ist, dann $c = 0$.

(4) Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum and U ein m-dimensionaler Unterraum mit $0 \subsetneq U \subsetneq V$. Sei $\pi\colon V \to V$ die orthogonale Projektion auf U. Bestimmen Sie das charakteristiche Polynom von π.

(5) Es sei
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$
   Bestimmen Sie die erste Spalte von A^{2025}. (Hinweis: Können Sie einen Eigenvektor von A erkennen?)