**Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie**
**Sommersemester 2025**
**Esentepe-Gharbi-Pompili**

## Blatt 2

(1) Es seien $K$ ein Körper und $V = M_{n\times n}(K)$ der Vektorraum der $n \times n$ Matrizen mit Koeffizienten in $K$. Zeigen Sie, dass Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation auf $V$ ist.

(2) Es seien

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ und } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ist $A$ ähnlich zu $B$? Falls ja, welche invertierbare Matrix $S$ erfüllt $B = S^{-1}AS$? Falls nein, erklären Sie warum.

(3) Es seien $K$ ein Körper, $V = M_{n\times n}(K)$ der Vektorraum der $n \times n$ Matrizen mit Koeffizienten in $K$ und $A, B \in V$. Wahr oder falsch:
  (a) Wenn $A$ ähnlich zu $B$ ist und $A$ invertierbar ist, dann ist auch $B$ invertierbar.
  (b) Die Menge aller Matrizen, die zu einer Matrix $A$ ähnlich sind, ist ein Unterraum von $V$.
  (c) Wenn $A$ zur Nullmatrix ähnlich ist, dann ist $A$ die Nullmatrix.
  (d) Wenn es nur eine Matrix gibt, die zu $A$ ähnlich ist, dann ist $A$ die Nullmatrix.

(4) Es seien $K$ ein Körper und $V = M_{n\times n}(K)$ der Vektorraum der $n \times n$ Matrizen mit Koeffizienten in $K$. Die Spur $\mathrm{Spur}(A)$ von einer $n \times n$-Matrix $A \in V$ ist die Summe ihrer Diagonaleinträge.
  (a) Es seien $A, B \in V$. Berechnen Sie die Diagonaleinträge von $AB$ und $BA$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$.
  (b) Zeigen Sie, dass ähnliche Matrizen in $V$ die gleiche Spur haben.
  (c) Es seien

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \pi & \sqrt{2} \\ 71 & 3 & 1 \\ 72 & 43 & 1 \end{bmatrix} \text{ und } B = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & \sqrt{23} \\ 7 & 3 & 8 \\ 21 & 45 & 1 \end{bmatrix}.$$

  Ist $A$ ähnlich zu $B$?
  (d) Es sei

$$C = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & \sqrt{23} \\ 7 & 3 & 0 \\ 14 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

  Ist $A$ ähnlich zu $C$?

(5) Es seien $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ der endliche Körper mit zwei Elementen und $V = M_{2\times 2}(K)$ der Vektorraum der $n \times n$ Matrizen mit Koeffizienten in $K$. Es gibt 16 Matrizen in $V$ und die Spur einer Matrix ist entweder 0 or 1.

(a) Bestimmen Sie alle Matrizen $A$ mit $\mathrm{Spur}(A) = 0$.
(b) Bestimmen Sie alle invertierbaren Matrizen $A$ mit $\mathrm{Spur}(A) = 0$.
(c) Bestimmen Sie alle Matrizen $A$ mit $\mathrm{Spur}(A) = 1$.
(d) Bestimmen Sie alle invertierbaren Matrizen $A$ mit $\mathrm{Spur}(A) = 1$.
(e) Finden Sie alle Äquivalenzklassen von ähnlichen Matrizen in $V$.