Lineare Algebra 1 – WS 2024/25

Übungsblatt 8 – 8.1.2025

Aufgabe 1
Es sei $0 \neq a \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass folgende Abbildungen linear sind, bestimmen Sie Kern und Bild, und interpretieren Sie die Abbildungen geometrisch.

(a) $p_a \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ v \mapsto v - \frac{\langle a,v\rangle}{\|a\|^2} a.$

(b) $s_a \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \ v \mapsto v - 2\frac{\langle a,v\rangle}{\|a\|^2} a.$

Aufgabe 2
Es seien V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Basis (v_1, v_2, v_3, v_4) und W ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Basis (w_1, w_2, w_3).

(a) Warum gibt es genau eine lineare Abbildung $f \colon V \longrightarrow W$ mit

$$f(v_1) = w_1{+}2w_2{+}3w_3, \quad f(v_2) = 5w_1{+}11w_2{+}16w_3, \quad f(v_3) = 3w_1{+}9w_2{+}13w_3, \quad f(v_4) = v_1{+}2v_2?$$

(b) Es sei f die lineare Abbildung aus a). Bestimmen Sie Basen von $\ker(f)$ und $f(V)$.

Aufgabe 3
Es seien K ein Körper, U, V, W drei K–Vektorräume, und $f \colon U \longrightarrow V$, $g \colon V \longrightarrow W$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Es ist $g \circ f$ linear.

(b) Ist f bijektiv, so ist f^{-1} linear.

Aufgabe 4
Es seien K ein Körper, V ein K–Vektorraum, und $f \colon V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung. Wir setzen $f^2 = f \circ f \colon V \longrightarrow V$. Zeigen Sie:

$$\ker(f) \cap f(V) = 0 \iff \ker(f^2) = 0.$$

Aufgabe 5
Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis B. Durch Einschränkung der Skalarmultiplikation ist V auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(a) Beweisen Sie, dass $B \cup \{\, \mathrm{i}b \mid b \in B \,\}$ eine Basis von V über $\mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die komplexe Konjugation

$$\begin{cases} \mathbb{C} & \to \mathbb{C} \\ z = a + \mathrm{i}b & \mapsto \overline{z} = a - \mathrm{i}b \qquad (a,\, b \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

als Abbildung linear über $\mathbb{R}$, aber nicht über $\mathbb{C}$, ist.

(c) Bestimmen Sie Basen von

$$L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \{\, \varphi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid \varphi \text{ ist } \mathbb{C}\text{-linear} \,\}$$

und von

$$L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \{\, \varphi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid \varphi \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear} \,\}.$$