Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
Sommersemester 2025
Esentepe-Gharbi-Pompili

Blatt 4

Für die Fragen 1 und 2 betrachten Sie den euklid. Vektorraum $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit $\langle A, B\rangle = \mathrm{Spur}(\mathrm{A^T B})$ und $||A|| = \sqrt{\langle A, A\rangle}$.

(1) (a) Finden Sie eine matrix A, sodass der Abstand zwischen A und E gleich 1 ist. (E ist die Einheitsmatrix.)
(b) Finden Sie eine matrix $A \neq 0$, sodass der Abstand zwischen A und E gleich dem Abstand zwischen A und $-E$ ist.
(c) Ist es möglich, eine Matrix A mit $||A|| = 2$ zu finden, sodass der Abstand A und E gleich 4 ist? Falls ja, geben Sie ein Beispiel. Falls nein, erklären Sie warum.

(2) Finden Sie den Winkel zwischen A und B, wobei
(a)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ und } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ sind.}$$
(b)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ und } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ sind.}$$
(c) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement des Unterraums der diagonalen Matrizen.

Für die Fragen 3 und 4 betrachten Sie den euklid. Vektorraum
$$P_3(\mathbb{R}) = \{a + bx + cx^2 \colon a, b, c \in \mathbb{R}\}$$
der Vektorraum der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2 mit
$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt \quad \text{und} \quad ||p|| = \sqrt{\langle p, p\rangle}.$$

(3) (a) Finden Sie ein Polynom p, sodass p und $1 + x$ orthogonal sind.
(b) Sei p das Polynom, das Sie in (a) gefunden haben. Zeigen Sie, dass
$$\int_0^1 (p - 1 - x)^2 dx = \int_0^1 1 - 2x + x^2 dx + \int_0^1 p^2 dx.$$

(4) Zeigen Sie, dass
$$\left|\int_0^1 x^2-9dx\right| \leq \left(\int_0^1 9-6x+x^2dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 9+6x+x^2dx\right)^{1/2}.$$

Für die Fragen 5 und 6 betrachten Sie den euklid. Vektorraum $V=\mathbb{R}^4$ mit dem standardmäßigen inneren Produkt.

(5) Für jede der folgenden Mengen bestimmen Sie, ob die gegebene Menge eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ ist.

(a)
$$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

(b)
$$\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

(c)
$$\left\{\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix},\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

(d)
$$\left\{\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix},\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix},\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

(6) Verwenden Sie die Gram-Schmidt-Orthonormalisierungverfahren, um eine Orthonormalbasis für
$$\mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$
zu finden.