Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
Sommersemester 2025
Esentepe-Gharbi

Blatt 11

Seien V ein euklid. oder unit. Vektorraum mit $\dim V < \infty$ und $f, g\colon V \to V$ lineare Abbildungen.

(1) (a) Zeigen Sie, dass $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.
  (b) Zeigen Sie, dass $f^2 = f \circ f$ ist normal wenn f normal ist.

(2) (a) Zeigen Sie, dass $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$ wenn f invertierbar ist.
  (b) Zeigen Sie, dass f^{-1} ist normal wenn f normal und invertierbar ist.

(3) (a) *Wahr oder Falsch.* Wenn f und g normal sind, dann $f \circ g$ ist auch normal.
  (b) *Wahr oder Falsch.* Wenn f und g selbstadjungiert sind, dann $f \circ g$ ist auch selbstadjungiert.
  (c) *Wahr oder Falsch.* Wenn f und g unitär sind, dann $f \circ g$ ist auch unitär.

(4) Zeigen Sie, dass g ist unitär wenn $||f(v)|| = ||g(v)||$ für alle $v \in V$ und f ist unitär.

Sei $P_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ vom Grad $\leq n$ mit

$$\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$$

wobei $p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ und $q = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$.

(5) (a) Zeigen Sie, dass $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ ist ein orthonormalbasis für $P_n(\mathbb{R})$.
  (b) Gegeben ist $f\colon P_n(\mathbb{R}) \to P_{n+1}(\mathbb{R})$ mit $f(p) = xp$. Finden Sie f^*.

(6) Es sei

$$f\colon P_1(\mathbb{R}) \to P_1(\mathbb{R})$$
$$f(a + bx) = b - ax.$$

  (a) Berechnen Sie f^*.
  (b) Ist f normal?
  (c) Ist f selbstadjungiert?
  (d) Ist f unitär?

(7) Es sei

$$f\colon P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$$
$$f(a + bx + cx^2 + dx^3) = b + 2cx + 3dx^2.$$

  (a) Berechnen Sie f^*.
  (b) Ist f normal?
  (c) Ist f selbstadjungiert?
  (d) Ist f unitär?