Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
Sommersemester 2025
Esentepe-Gharbi

Blatt 5

(1) Seien V ein euklidischer Vektorraum, U ein Unterraum von V mit $\dim U < \infty$ und $\pi\colon V \to V$ die orthogonale Projektion von V auf U. Zeigen Sie
 (a) $\mathrm{Bild}(U) = U$,
 (b) $\ker(U) = U^\perp$,
 (c) $\pi \circ \pi = \pi$.

(2) Es seien V der Vektorraum der 2×2 Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ mit $\langle A, B\rangle := \mathrm{Spur}(A^T B)$. Sei
$$U = \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$
Berechnen Sie die Projektionmatrix von V auf U.

(3) Es seien V der Vektorraum der 6×6 Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ mit $\langle A, B\rangle := \mathrm{Spur}(A^T B)$. Bestimmen Sie die Dimension des orthogonalen Komplements des Unterraums der diagonalen Matrizen.

(4) Es seien V der Vektorraum der 2×2 Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ mit $\langle A, B\rangle := \mathrm{Spur}(A^T B)$. Seien
$$U = \{A \in V \colon \mathrm{Spur}(A) = 0\}$$
und $\pi\colon V \to V$ die orthogonale Projektion von V auf U. Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass
$$[\pi]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
gilt.

(5) Es seien $V = \{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 \colon a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}\}$ der Vektorraum der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ vom Grad ≤ 5 mit
$$\langle p, q\rangle = \int_{-\pi}^{\sqrt{2}} p(t)q(t)dt.$$
Gegeben ist $U = \mathcal{L}\left\{x^3 - \pi x^4 + 17x^5, \sqrt{3} + x^5, \sqrt{5} - x^5\right\}$. Es seien $W = U^\perp$, $P\colon V \to V$ die orthogonale Projektion von V auf U und $Q\colon V \to V$ die orthogonale Projektion von V auf W. Es sei $F\colon V \to V$ mit $F(p) = P(p) + Q(p)$ für alle $p \in V$. Für $\mathcal{B} = (1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3, 1+x+x^2+x^3+x^4, 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$, finden Sie $\mathrm{Spur}([F]_{\mathcal{B},\mathcal{B}})$.