Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
Sommersemester 2025
Esentepe-Gharbi-Pompili

Blatt 1

(1) Sie haben im letzten Semester gelernt, dass $\mathbb{C}$ ein 2-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist und dass $\mathcal{B} = (1, i)$ eine Basis von $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

(a) Es sei $k\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Konjugation
$$k(x + yi) = x - yi.$$
Bestimmen Sie $[k]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$.

(b) Es sei $m_i\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Multiplikation mit i
$$m_i(z) = iz.$$
Bestimmen Sie $[m_i]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$.

(2) Es sei $P_2(\mathbb{R}) = \{a + bx\colon a, b \in \mathbb{R}\}$ der Vektorraum der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ vom Grad ≤ 1. Die lineare Abbildung $f\colon P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch
$$f(a + bx) = \begin{bmatrix} a+b \\ a-b \\ 2a+3b \end{bmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ mit den Basen
$$\mathcal{B} = (1, 1+x) \quad , \quad \mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

(b) Bestimmen Sie $[v]_{\mathcal{B}}$ mit $v = 2 + 3x$.

(c) Berechnen Sie $[f(v)]_{\mathcal{C}}$ und $f(v)$ mit $v = 2 + 3x$.

(3) Es sei $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ der Vektorraum der 2×2 Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$. Die lineare Abbildung $f\colon V \to V$ ist gegeben durch $f(A) = A + A^T$.

(a) Bestimmen Sie $[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ mit
$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

(b) Eine Matrix heißt *symmetrisch*, wenn $A = A^T$ gilt. Berechnen Sie $f(A)$, wobei A eine symmetrische Matrix ist.

(c) Eine Matrix heißt *antisymmetrisch*, wenn $A = A^T$ gilt. Berechnen Sie $f(A)$, wobei A eine antisymmetrische Matrix ist.

(d) Bestimmen Sie $[f]_{\mathcal{C},\mathcal{C}}$ mit
$$\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

(4) Es seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4), \mathcal{C} = (v_2, v_3, v_4, v_1)$ zwei Basen.

(a) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix A zum Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$.
(b) Berechnen Sie A^2, A^3, A^4 und A^{2025}.

(5) Es seien $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ der Vektorraum der 2×2 Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ und

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{und}$$
$$\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

zwei Basen von V.
(a) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix zum Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$.
(b) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix zum Basiswechsel von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{B}$.