Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
Sommersemester 2025
Esentepe-Gharbi

Blatt 8

(1) (a) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(AB)$.

(b) Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & \pi \\ \sqrt{2} & 2+i \\ -i & 21 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 2 & \sqrt{3} & \pi & \pi + i\sqrt{2} \\ 1 & 22 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(AB)$.

(2) Es seien drei Matrizen $A, B, C \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit

$$\det(AB) = 4 \quad , \quad \det(BC) = 9 \quad , \quad \det(CA) = 1 \quad \text{und} \quad \det(3ABC) = -486.$$

Berechnen Sie $\det(A), \det(B), \det(C)$ und n.

(3) Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Mit einem Vektor $a \in V$, $a \neq 0$ ist die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f \colon V &\to V \\ x &\mapsto x \times a \end{aligned}$$

gegeben.

(a) Es sei

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Berechnen Sie $\det([f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}})$.

(b) Zeigen Sie dass $f^* = -f$ gilt.

(4) Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -5 & -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(A^{2025})$.

(5) Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(A^T A^{-1})$.

(6) (a) Finden Sie zwei 2×2 Matrizen A, B mit $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.
(b) Finden Sie zwei 2×2 Matrizen A, B mit $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.