Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
Sommersemester 2025
Esentepe-Gharbi

Blatt 6

(1) Überzeugen Sie sich, dass das Gleichungssytem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

unlösbar ist. Finden Sie dann alle Lösungen $\hat{x}$ sodass

$$||b - A\hat{x}|| = \min_{x \in \mathbb{R}^3} ||b - Ax||$$

erfüllt. Berechnen Sie $A\hat{x}$ und $||b - A\hat{x}||$.

(2) Seien A und b wie in Übung 1 und $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Orthogonalprojektion auf den Unterraum $U = \text{Bild}(A)$.
 (a) Ist A invertierbar?
 (b) Berechnen Sie $\pi(b)$.

(3) Seien U, V, W endlichdim. euklid. oder unitäre Vektorraume und

$$f\colon V \to W \quad , \quad g\colon U \to V$$

lineare Abbildungen. Zeigen Sie dass
 (a) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.
 (b) $(f^*)^* = f$.
gilt.

(4) Es sei $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ der Vektorraum der 2×2 Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ mit $\langle A, B\rangle = \text{Spur}(A^T B)$. Die lineare Abbildung $f\colon V \to V$ ist gegeben durch $f(A) = A + A^T$. Es seien

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

 (a) Berechnen Sie $\langle M, A\rangle$.
 (b) Berechnen Sie $\langle M, A^T\rangle$.
 (c) Berechnen Sie $\langle M, f(A)\rangle$.
 (d) Berechnen Sie $\langle f^*(M), A\rangle$.
 (e) Berechnen Sie f^*.

(5) Es seien $V = \mathbb{R}^4$ mit Standardskalarprodukt and

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

eine Basis. Es seien $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung mit

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finden Sie $[f^*]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$.