Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
Sommersemester 2025
Esentepe-Gharbi

Blatt 10

(1) (a) Finden Sie eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit charakteristiches Polynom $\chi_A(t) = t^2 + 1$.
(b) Finden Sie eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit charakteristiches Polynom $\chi_A(t) = t^2 + t + 1$.
(c) Gegeben sind $a, b \in \mathbb{R}$. Finden Sie eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit charakteristiches Polynom $\chi_A(t) = t^2 + at + b$.

(2) Finden Sie eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ mit charakteristiches Polynom $\chi_A(t) = t^3 + 1$.

(3) Wahr oder Falsch: Wenn das charakteristiche Polynom einer linearen Abbildung $f\colon V \to V$ keinen konstanten Term enthält, dann muss es einen $v \neq 0$ geben, sodass $f(v) = 0$.

(4) Sei

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ist A diagonalisierbar?

(5) Sei

$$A = \begin{bmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{bmatrix}$$

mit $0 < a < \pi$.
(a) Erklären Sie geometrisch, was diese Matrix macht.
(b) Erklären Sie anhand der Geometrie, dass diese Matrix nicht diagonalisierbar ist.
(c) Zeigen Sie, dass das charakteristiche Polynom von A

$$\chi_A(t) = t^2 - 2t\cos(a) + 1$$

ist.
(d) Gehen Sie auf `https://www.desmos.com/calculator` und screiben Sie

$$y = x^2 - 2t\cos(a) + 1.$$

Fügen Sie einen Schieberegler (slider) für a. Bewegen Sie a von -10 bis 10 und erklären Sie das Verhalten des Graphen. Erklären Sie anhand des Graphen. dass diese Matrix nicht diagonalisierbar ist.

(6) Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie A^{2025}.