Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
Sommersemester 2025
Esentepe-Gharbi

Blatt 12

Seien $a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{20}, a_{11}, a_{02} \in \mathbb{R}$ und

$$p(x_1, x_2) = a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 + a_{00}$$

ein Polynom in 2 Variablen vom Grad ≤ 2, $(a_{20}, a_{11}, a_{02}) \neq (0,0,0)$. Dann heißt

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon p(x_1, x_2) = 0 \right\}$$

eine *ebene (algebraische) Kurve zweiten Ordnung* in $\mathbb{R}^2$.

(1) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$p(x_1, x_2) = 0$$

auch als

$$x^T A x + d^T x + a_{00} = 0$$

mit

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} a_{20} & \frac{1}{2}a_{11} \\ \frac{1}{2}a_{11}a & a_{02} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad d = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{01} \end{bmatrix}.$$

(2) Beschreiben Sie den geometrischen Ort der Punkte, die die Gleichung $x^T A x + d^T x + a_{00} = 0$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad d = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad a_{00} = 4.$$

(3) Beschreiben Sie den geometrischen Ort der Punkte, die die Gleichung $x^T A x + d^T x + a_{00} = 0$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/9 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad a_{00} = -1.$$

(4) Beschreiben Sie den geometrischen Ort der Punkte, die die Gleichung $x^T A x + d^T x + a_{00} = 0$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & -1/9 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad a_{00} = -1.$$

(5) Beschreiben Sie den geometrischen Ort der Punkte, die die Gleichung $x^T A x + d^T x + a_{00} = 0$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad d = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad a_{00} = 0.$$