Liczby Zespolone

Piotr Laskowski

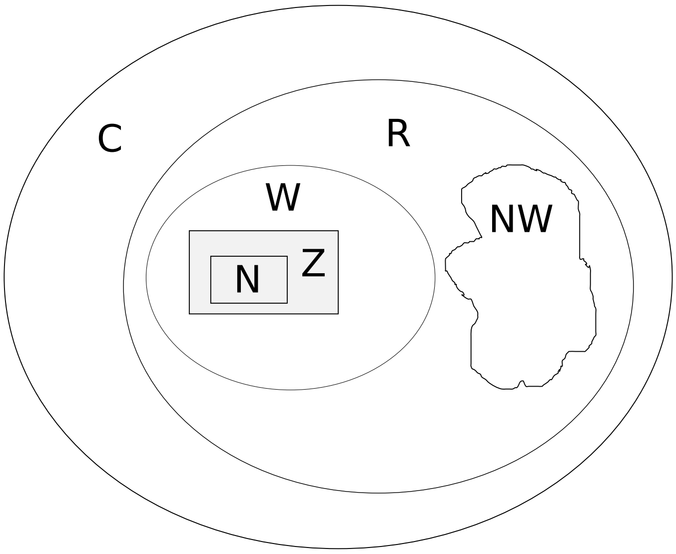
12 grudnia 2014

Spis treści

1 Liczby zespolone

Liczby[1] będące elementami rozszerzenia ciała liczb rzeczywistych o jednostkę urojoną i, tj. pierwiastek wielomianu x^2+1 (innymi słowy, jednostka urojona spełnia równanie $i^2 = -1$). Każda liczba zespolona z może być zapisana w postaci $z = a + bi$, gdzie a, b są pewnymi liczbami rzeczywistymi, nazywanymi odpowiednio częścią rzeczywistą oraz częścią urojoną liczby z.

1.1 Rozmieszczenie liczb zespolonych



Rysunek 1: Liczby zespolone

[1]To jest stopka

2 Postać algebraiczna (kanoniczna)

Każdą liczbę zespoloną z można zapisać w postaci

$$z = a + bi$$

, gdzie a i b są pewnymi liczbami rzeczywistymi oraz i jest tzw. jednostką urojoną, tj. i jest jednym z dwóch elementów zbioru liczb zespolonych, spełniającym warunek $i^2 = -1$ (drugim elementem jest -i). Spotyka się czasami zapis $i = \sqrt{-1}$, który nie jest formalnie poprawny ze względu na fakt, że również $(-i)^2 = -1$, jest on jednak uznawany za pewien skrót myślowy i powszechnie akceptowany.

Postać $z = a + bi$ nazywana jest postacią algebraiczną (albo kanoniczną) liczby zespolonej z.

Dla liczby $z = a + bi$ definiuje się jej

- część rzeczywistą (łac. pars realis) jako re $z = a$ (inne oznaczenia: $\Re z, Re, z$),
- część urojoną (łac. pars imaginaria) jako im $z = b$ (inne oznaczenia: $\Im z, Im, z$).

Przykładowo liczba **7 - 5i** jest liczbą zespoloną, której część rzeczywista wynosi 7, a część urojona -5. Liczby rzeczywiste są utożsamiane z liczbami zespolonymi o części urojonej równej 0.

Liczby postaci $z = 0 + bi$ nazywa się liczbami urojonymi.

2.1 Zapis alternatywny

W zastosowaniach fizycznych, elektrycznych, elektrotechnicznych itp. zapis $z = a+bi$ może okazać się mylący z powodu wykorzystywania w tych dziedzinach litery i do innych celów, np. chwilowego natężenia prądu elektrycznego. Dlatego też stosuje się zapis niepowodujący podobnych kłopotów, mianowicie $z = a + jb$, w którym to j oznacza jednostkę urojoną.

2.2 Równość

Dwie liczby zespolone[2] są równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich części rzeczywiste i urojone są sobie równe. Innymi słowy, liczby zespolone postaci a + bi oraz c + di są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy a = c oraz b = d.

[2] To jest druga stopka

2.3 Działania

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie liczb zespolonych w postaci algebraicznej wykonuje się tak samo jak odpowiednie operacje na wyrażeniach algebraicznych[3] , przy czym $i^2 = -1$

$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$

$(a+bi)(c+di) = ac+(bc+ad)i+bdi^2 = (ac-bd)+(bc+ad)i$ Aby podzielić przez siebie dwie liczby zespolone, wystarczy pomnożyć dzielną i dzielnik przez liczbę sprzężoną do dzielnika (analogicznie do usuwania niewymierności z mianownika w wyrażeniach algebraicznych):

$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

3 Przejście odwrotne

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

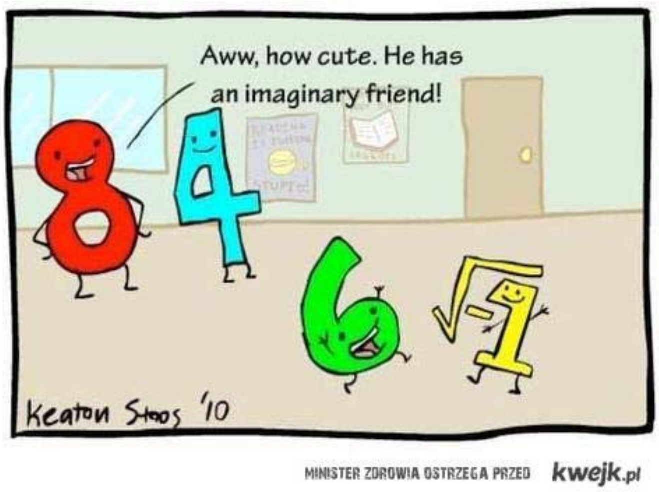
$$\gamma = \begin{cases} arctg\frac{b}{a}, & \text{dla } a > 0 \\ arctg\frac{b}{a} + \pi, & \text{dla } a < 0 \text{ oraz } b \geqslant 0 \\ arctg\frac{b}{a} - \pi, & \text{dla } a < 0 \text{ oraz } b < 0 \\ +\frac{\pi}{2}, & \text{dla } a = 0 \text{ oraz } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{dla } a = 0 \text{ oraz } b < 0 \\ niezdefiniowane, & \text{dla } a = 0 \text{ oraz } b = 0 \end{cases}$$

[3] To jest trzecia stopka

4 tabele

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$sinx$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cosx$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Tablica 1: Macierz



Rysunek 2: Heheszki

Literatura

[1] http://www.matematyka.pl/latex.htm/

[2] http://pl.wikipedia.org/wiki/Liczby_zespolone/

[3] http://pl.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Zarządzanie_bibliografią/

[4] http://pl.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Tabele/

[5] http://pl.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Zaczynamy/