UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
INSTITUTO METRÓPOLE DIGITAL
TÓPICOS ESPECIAIS EM INTERNET DAS COISAS “B” - **IMD291**

ANÁLISE DE ALGORITMOS PARALELOS E SERIAIS
CÁLCULO DO PI - MONTE CARLO
E
CÁLCULO DA INTEGRAL - REGRA DO TRAPÉZIO

Prof. Dr. Kayo Gonçalves e Silva
Discente: Oziel Alves do Nascimento Júnior
Matrícula: 20170065711

Natal, 2020

Análise de Algoritmos Paralelos e Seriais

Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), 2020.

Análise por:

- Oziel Alves

Sumário

Introdução

Objetivos

Analisar e avaliar o comportamento, eficiência e speedup dos algoritmos em relação ao seu tempo de execução, tamanho do problema analisado e resultados obtidos. Os cenários irão simular a execução dos algoritmos para 2, 4 e 8 cores, no caso dos algoritmos paralelos, com alguns tamanhos de problema definidos empiricamente, sendo o menor tamanho estabelecido com o objetivo de atingir o tempo mínimo de execução determinado pela referência da Análise (30 segundos).

Dependências

G++ Compiler

É necessário para a compilação dos programam, visto que são feitos em c++.

```
# Instalação no Ubuntu 20.04 LTS:
sudo apt-get install g++
```

MPI - Message Passing Interface

É necessário para a compilação e execução dos códigos paralelos.

```
# Instalação no Ubuntu 20.04 LTS:
sudo apt-get install -y mpi
```

Compilação e Execução

Instaladas as dependências, basta executar o shellcript determinado para a devida bateria de execuções na raiz do repositório:
Serão realizadas **5 execuções** com **4 tamanhos de problema** , em **3 quantidades de cores** (2, 4 e 8).

```
# Para o algorítimo que calcula o pi de forma serial
./pi_serial_start.sh
```

```
# Para o algorítimo que calcula o pi de forma paralela
./pi_paralelo_start.sh
```

```
# Para o algorítimo que calcula o pi de forma serial
./trapezio_serial_start.sh
```

```
# Para o algorítimo que calcula o pi de forma paralela
./trapezio_paralelo_start.sh
```

Obs.: Caso seja necessário conceder permissão máxima para os scripts, execute `chmod 777 [NOME DO SCRIPT].sh` .

Arquivo com Resultados

Após o termino das execuções do script é possível ter acesso aos arquivos `.txt` na pasta `pi` ou `trapezio` , de acordo com o script executado. Os dados coletados foram utilizados para realização desta análise.

Condições de Testes

Informações sobre a máquina utilizada

- **Dell Inspiron 14-inc 7460**
- **Processador**: Intel Core i7 7500U (até 3.5 GHz) Dual Core Cache 4M. (FSB)4 GT/s OPI (Integra HyperThreading para trabalhar com até 4 threads de uma vez)

- **Número de Cores/Threads**: 2/4
- **Memória**: 8 GB tipo DDR4 – 2133MHz
- **Sistema**: Ubuntu 20.04.1 LTS

Desenvolvimento

Apresentação dos Algoritmos

Cálculo do Pi - Método de Monte Carlo

O algoritmo é baseado no método de Monte Carlo para estimar o valor de π. Ele depende de amostragem independente e aleatória repetida, e funciona bem com sistemas paralelos e distribuídos, pois o trabalho pode ser dividido entre vários processos. Sua ideia principal é simular um grande número de realizações de um evento estatístico. Neste sentido, o uso de multiplos processadores permite a realização de um número fixo de eventos por processador, o que aumenta o número total de eventos simulados.
No cálculo de Pi, em específico, o algoritmo implementado tem como base a geração de diversos pontos, cujas coordenadas são números aleatórios com função de desnsidade de probabililidade constante em um intervalo indo de 0 a 1. Assim, a probabilidadede que os pontos estejam dentro do quadrado definido pelo produto cartesiano [0,1]x[0,1] é unitária. Se, de todos os pontos gerados, contarmos aqueles cuja norma euclidiana é menor ou igual a 1, é possível encontrar a probabilidade de que um ponto esteja dentro do quarto de círculo centrado na origem e de raio 1, que é proporcional a sua área. Com isso, e sabendo a área de 1/4 de círculo, basta uma manipulação algébrica para encontrar o valor de pi aproximado. Assim:

```
pi = 4 * (pontos_dentro_do_círculo)/(pontos_totais)
```

Serial

Dado um número de pontos a serem definidos, que chamaremos de `termos`, a seguinte sub-rotina é implementada:

1. É setado o valor `acertos` = 0.0.
2. `termos` determinará a quatidade de pontos `x` e `y` a serem definidos randomicamente com seed fixa = 42, dentro do intervalo de 0.0 a 1.0.
3. Caso `( x * x + y * y )` seja menor que 1.0, `acertos` é acrescido em 1 unidade.
4. Ao termino do laço, para conclusão do método de Monte Carlo, é retornado `acertos` multiplicado por 4 e dividido por `termos`.

A implementação da função `calcPi` é apresentada abaixo:

```
double calcPi(int termos)
{
    # Gerador Mersene twist, SEED: 42
    mt19937 mt(42);

    # Numero real pseudo-aleatorio
    uniform_real_distribution<double> linear_r(0.f, 1.f);

    int acertos = 0;
    for (int i = 0; i < termos; i++)
    {

        double x = linear_r(mt);
        double y = linear_r(mt);

        if (x * x + y * y < 1.0)
        {
            acertos++;
        }
    }
    return (double)(4.0 * acertos / termos);
}
```

Paralelo

Ainda chamando o numero total de pontos a serem definidos como `termos`, a seguinte sub-rotina é implementada:

1. O tamanho do problema, `termos` é lido por por linha de comando.
2. É iniciada a comunicação paralela.
3. `termos_local` recebe `termos` dividido pela quantidade de processos.
4. `termos_local` é passado como parametro para o cáculo parcial dos acertos, usando a função já apresentada, `calcPi`, e armazenado em cada processo como `acertos_parc`.
5. Ao termino da execução de cada processo , `acertos_parc` é somado a `acertos`.
6. Quando todos os processos finalizam a contagem de acertos, todos os acertos parciais são somados a `acertos`, então, é fechada a comunicação MPI e impresso o valor do resultado final multiplicado por 4 e dividido por `termos`.

Obs.: Vale salientar que, por escolha particular, a multiplicação e divisão no número de acertos foi realizada apenas na impressão do resultado. Diferentemente do que acontece naturalmente na função `calcPi`, no código paralelo é retornado apenas a quantidade de acertos.

A implementação do Paralelismo é apresentada abaixo:

```
int main(int argc, char **argv)
{
    struct timeval start, stop;
    gettimeofday(&start, 0);

    int my_rank;
    int p;
    int termos = atoll(argv[1]);
    int termos_local;
    int inicial_local;
    double acertos_parc;
    double acertos;

    MPI_Init(&argc, &argv);

    # Rank do meu processo
    MPI_Comm_rank(MPI_COMM_WORLD, &my_rank);

    # Descobre quantos processos estao em uso
    MPI_Comm_size(MPI_COMM_WORLD, &p);

    # Divisao interna
    termos_local = termos / p;

    # Bloqueia o processo até todos chegarem nesse ponto
    MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);

    acertos_parc = calcPi(termos_local);

    # Soma o numero de acertos por cada processo
    MPI_Reduce(&acertos_parc, &acertos, 1, MPI_DOUBLE, MPI_SUM, 0, MPI_COMM_WORLD);
    if (my_rank == 0)
    {
        gettimeofday(&stop, 0);

        FILE *fp;
        char outputFilename[] = "./pi/tempo_mpi_pi.txt";

        fp = fopen(outputFilename, "a");
        if (fp == NULL)
        {
            fprintf(stderr, "Nao foi possivel abrir o arquivo %s!\n", outputFilename);
            exit(1);
        }

        fprintf(fp, "\tTempo: %1.2e \tResultado: %f\n",
                ((double)(stop.tv_usec - start.tv_usec) / 1000000 + (double)(stop.tv_sec - start.tv_sec)),
                (double)4 * acertos / termos);

        fclose(fp);
```

```
    }
    else
    { /* Nothing */ }

    MPI_Finalize();
}
```

Cálculo da Integral - Regra do Trapézio

A regra do trapézio é um método para aproximar a integral de uma função, `y = f (x)`, usando trapézios para calcular a área. O processo é simples. Sejam `xa` e `xb` os pontos que limitam o intervalo para ser feito o cálculo da integral, e seja `n` o número de sub-intervalos de `xa` até `xb`. Para cada sub-intervalo, a função é aproximada com uma linha reta entre os valores da função em ambas as extremidades do sub-intervalo. Cada sub-intervalo agora é um mini-trapézio. Por último, a área de cada mini-trapézio é calculada e todas as áreas são somadas para obter uma aproximação da integral da função `f` de `xa` a `xb`. Assim:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{p} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx$$

$$a_0 = a$$
$$a_p = b$$
$$a_i = a_{i-1} + \Delta x$$

Serial

Dado um `n`, tal que representa o número de mini-trapézios a dividir o intervalo, a seguinte sub-rotina é implementada:

1. É setado o intervalo `xa` = 0.0 `xb` = 30.0 na função `main`.
2. É realizada então a chamada da função `trapezioIntegral` passando como parâmetros `xa`, `xb` e `n`.
3. O valor da base de cada mini-trapézio no intervalo é definido pela substração de `xb` por `xa` divido por `n`, chamaremos de `inc`.
4. O valor da `area_total` recebe inicialmente `(f(xa) + f(xb)) / 2`.
5. Sendo `x_i` o passo do x de um sub-intervalo a outro, em um laço de `x_1` até `x_n-1` os valores de `f(x_i)` são acrescidos a `area_total`.
6. Ao termino do laço, para conclusão do cáculo da integral pela regra do trapézio, `area_total` é multiplicada por `inc` e retornada pela função.

A implementação da função `trapezioIntegral` é apresentada abaixo:

```
double trapezioIntegral(double xa, double xb, long long int n)
{
    double x_i;             # Passo do X
    double area_total = 0.; # Soma das areas
    double inc;             # Incremento

    inc = (xb - xa) / n;
    area_total = (f(xa) + f(xb)) / 2;

    for (long long int i = 1; i < n; i++)
    {
        x_i = xa + i * inc;
        area_total += f(x_i);
    }

    area_total = inc * area_total;

    return area_total;
}
```

Paralelo

Para implementação da regrado do trapézio de modo paralelo, é preciso primeiro identificar as tarefas necessárias e mapear as tarefas para todos os processos. Sendo assim, é preciso:

1. Encontrar a área de muitos trapézios individuais, o retorno destas áreas parciais serão atribuidos localmente à `area_relativa`.
2. Somar essas áreas, a soma total será atribuida à `area_total`.

Intuitivamente, conforme aumentamos o número de trapézios, receberemos uma previsão mais precisa da integral calculada. Assim, estaremos usando mais trapézios do que cores neste problema, é preciso dividir os cálculos para calcular as áreas dos mini-trapézios. O procedimento será realizado atribuindo a cada processo um subintervalo que contém o número de trapézios, obtidos a partir do cálculo do número total de trapézios `n`, dividido pelo número de processos. Isso pressupõe que o número total de trapézios é igualmente divisível pelo número de processos. Cada processo aplicará a regra do trapézio ao seu subintervalo. Por último, o processo mestre soma as estimativas.

Dado um `n`, tal que representa o número de trapézios a dividir o intervalo, a seguinte sub-rotina é implementada:

1. É iniciada a comunicação paralela.
2. `n` é passado como argumento para a função auxiliar `setSize` junto ao rank do processo, `my_rank`, para destribuir o tamanho do problema para todos os processos usando `MPI_Bcast`.
3. O incremento é calculado pela divisão por `n` do resultado da subtração de `xb` por `xa`.
4. O número de trapézios a ser calculados por cada processo, `local_n`, é definido através da divisão de `n` pelo númeor de processos, `p`.
5. Cada processo calcula a `area_relativa` ao seu intervalo.
6. Quando todos os processos finalizam o cáculo da integral de seus respectivos intervalos, o valor de cada integral parcial é somado a `area_total`, então, é fechada a comunicação MPI.

A implementação do Paralelismo é apresentada abaixo:

```
int main(int argc, char **argv)
{
    struct timeval start, stop; # Intervalo de tempo calculado ao fim
    gettimeofday(&start, 0);

    int my_rank = 0;           # Rank do meu processo
    int p = 0;                 # Numero de processos
    const double xa = 0.;      # X Início da figura
    const double xb = 30.;     # X Fim da figura
    double n = 0.;             # Numero de mini trapezios
    double inc = 0.;           # Incremento (Base do Trapezio)
    double local_a = 0.;       # X Início da figura LOCAL
    double local_b = 0.;       # X Fim da figura LOCAL
    long long int local_n = 0; # Numero de mini trapezios LOCAL

    double area_relativa = 0.; # Area relativa ao intervalo
    double area_total = 0.;    # Area total

    MPI_Init(&argc, &argv);

    # Rank do processo
    MPI_Comm_rank(MPI_COMM_WORLD, &my_rank);

    # Quantos processos então sendo usados
    MPI_Comm_size(MPI_COMM_WORLD, &p);

    # Destribui o valor de n para todos os processos
    setSize(argc, argv, my_rank, &n);

    # O incremento e local_n serão os mesmo para todos os processos
    inc = (xb - xa) / n;
    local_n = n / p;

    # O tamanho de cada intervalo de processo será (local_n * inc)
    local_a = xa + my_rank * (local_n * inc);
    local_b = local_a + (local_n * inc);

    # Bloqueia o processo até todos chegarem nesse ponto
    MPI_Barrier(MPI_COMM_WORLD);
```

```
    area_relativa = trapezioIntegral(local_a, local_b, local_n);

    # Soma as integrais calculadas por cada processo
    MPI_Reduce(&area_relativa, &area_total, 1, MPI_DOUBLE, MPI_SUM, 0, MPI_COMM_WORLD);

    if (my_rank == 0)
    {
        gettimeofday(&stop, 0);

        FILE *fp;
        char outputFilename[] = "./trapezio/tempo_mpi_trapezio.txt";

        fp = fopen(outputFilename, "a");
        if (fp == NULL)
        {
            fprintf(stderr, "Nao foi possivel abrir o arquivo %s!\n", outputFilename);
            exit(1);
        }

        fprintf(fp, "\tTempo: %1.2e \tResultado: %f\n",
        ((double)(stop.tv_usec - start.tv_usec) / 1000000 + (double)(stop.tv_sec - start.tv_sec)),
        area_total);

        fclose(fp);
    }
    else
    { /* Nothing */ }

    MPI_Finalize();
}
```

Resultados

Cálculo do Pi

Para esta análise, serão realizadas **5 execuções** com tamanhos de problema 374.500.000, 550.000.000, 900.000.000 e 1.500.000.000 - definidos empiricamente de modo a atingir os limites mínimos determinados pela referência - em **3 quantidades de cores** (2, 4 e 8). Se espera que o comportamento de ambos os algoritmos quanto a aproximação do Pi seja parecido para um mesmo tamanho de problema quando se altera apenas o número de cores, sendo o tempo de execução o único fator variável. Uma descrição completa da máquina de testes pode ser encontrada no tópico Condições de Testes.

Corretude

Para validar a corretude dos algoritmos implementados foi realizado um teste utilizando **4.550.000** como tamanho de problema para os dois códigos:

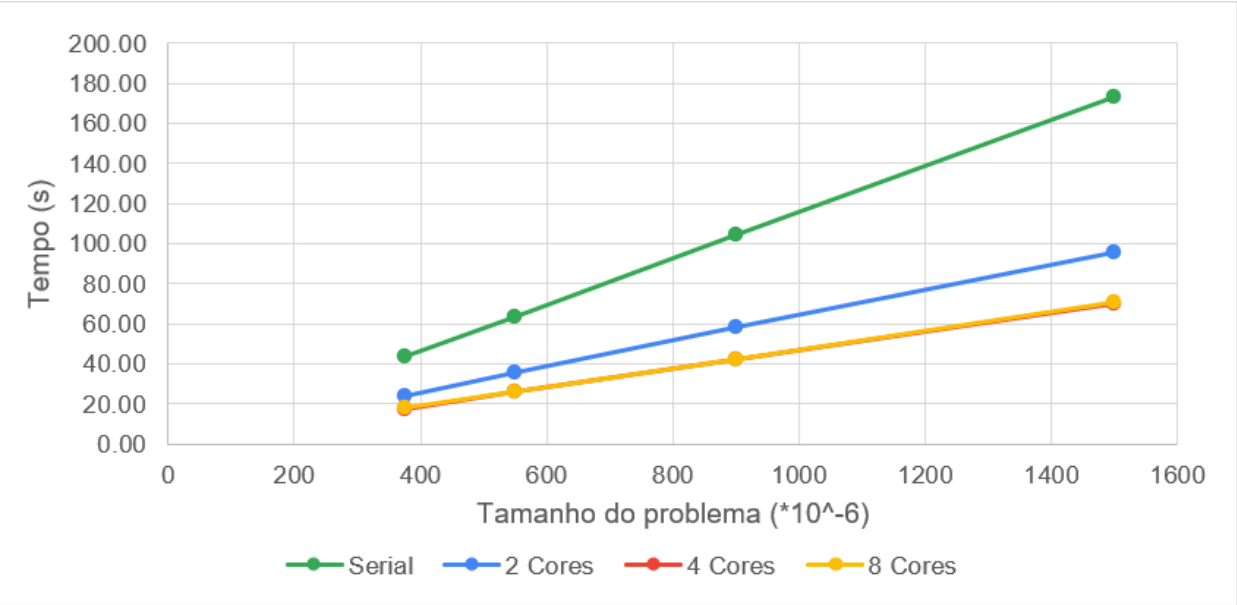
```
oziel@PISTOL: /mnt/c/users/oziel/Documents/Projects/prog_paralela
oziel@PISTOL:/mnt/c/users/oziel/Documents/Projects/prog_paralela$ mpicc -g -o ./pi/mpi_pi ./pi/mpi_pi.cpp -lstdc++ -lm
oziel@PISTOL:/mnt/c/users/oziel/Documents/Projects/prog_paralela$ g++ -g -o ./pi/pi ./pi/pi.cpp
oziel@PISTOL:/mnt/c/users/oziel/Documents/Projects/prog_paralela$ ./pi/mpi_pi 4550000

O valor aproximado de Pi: 3.140445
oziel@PISTOL:/mnt/c/users/oziel/Documents/Projects/prog_paralela$ ./pi/pi 4550000

O valor aproximado de Pi: 3.140446
oziel@PISTOL:/mnt/c/users/oziel/Documents/Projects/prog_paralela$
```

Como é possível perceber, ambos os códigos conseguem aproximar de maneira correta o valor de pi, dado o número de pontos solicitados.

Obs.: Vale salientar que para este modelo de amostragem quanto maior o número de pontos a serem definidos mais preciso será o valor de pi retornado.

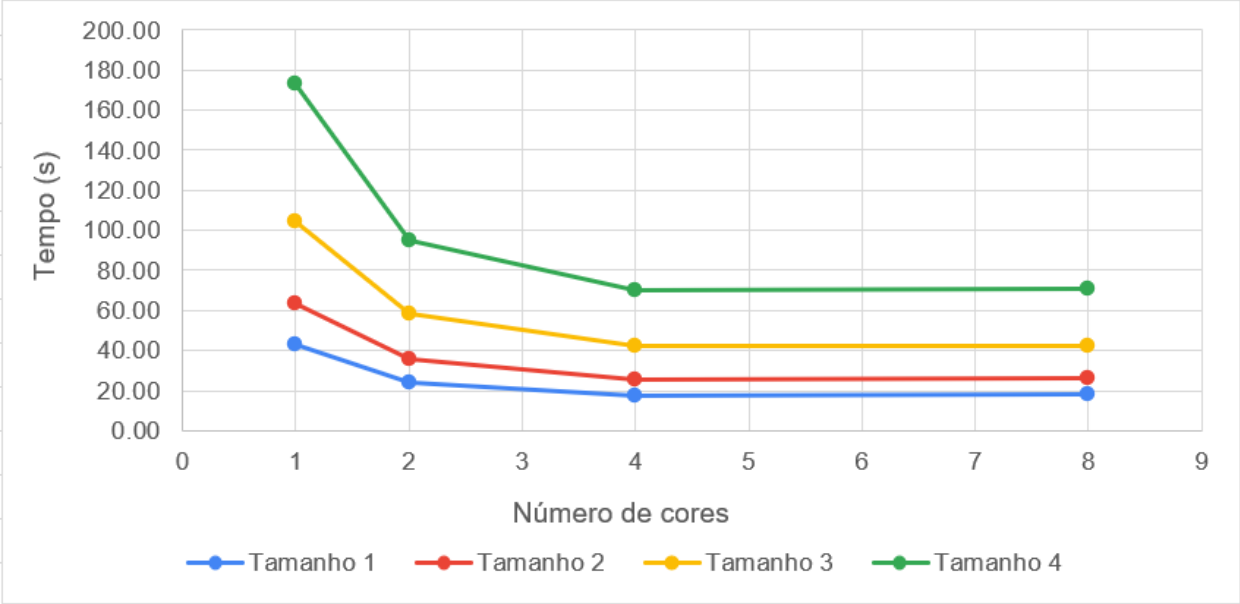
Gráficos

Serial e Paralelo - Tempo x Tamanho do Problema



Através do gráfico comparativo, é possível observar que o código paralelo é mais eficiente que o código serial pois a reta relativa a este último apresenta um coefiente angular maior do que as relativas ao primeiro, o que indica que ao se aumentar o temanho de problema no código serial o aumento em tempo de execução é proporcionalmente maior que o que seria observado no código paralelo. Vale salientar que as curvas referentes a 4 e 8 cores são praticamente idênticas, isso ocorre devido aos limites da máquina de teste, fenômeno que será mais bem explicado no item Considerações Finais.

Tamanho do Problema - Tempo x Cores

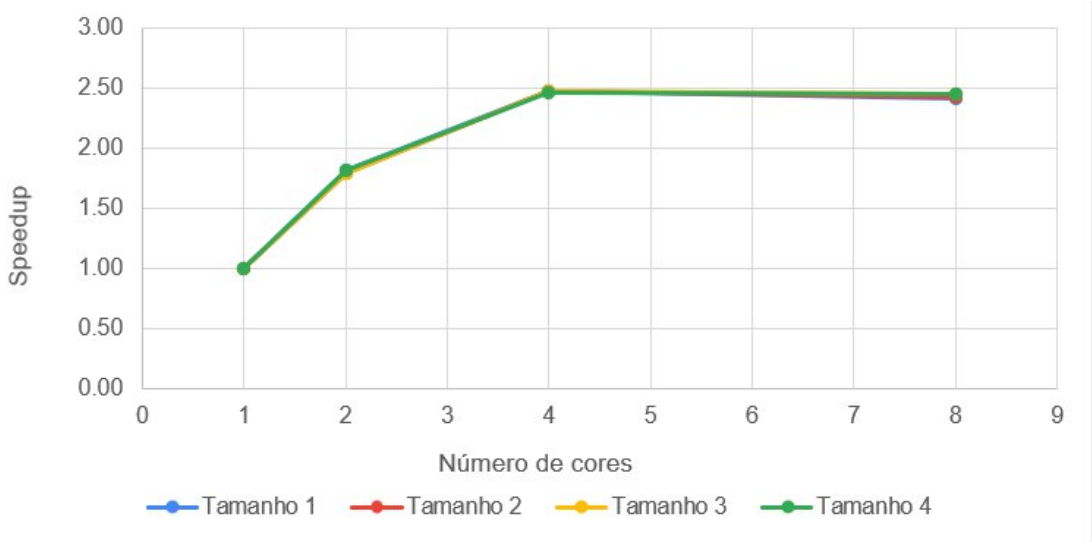


A partir do gráfico apresentado, é clara a influência do número de cores no tempo de execução. Note que, por exemplo, o tempo de execução para o problema de maior tamanho cai cerca de 45% ao se passar do código serial para o código paralelo ultilizando 2 cores. Novamente, verifica-se que o desempenho para 4 e 8 cores é idêntico.

Análise de Speedup

É possível definir o speedup, quando da utilização de n cores, como sendo o tempo de execução no código serial dividido pelo tempo médio de execução para n cores em um dado tamanho de problema. Dessa forma, o speedup representa um aumento médio de velocidade na resolução dos problemas. Sabendo que o limite de cores/threads da máquina de testes é 4, é esperado que o speedup da execução dos problemas para 4 e 8 cores seja aproximadamente idêntico.

Speedup x Número de Cores Utilizados



Como esperado, o gráfico nos mostra um desempenho bastante similiar para 4 e 8 cores, no entanto, para cores virtuais, a execução dos problemas em 4 cores obteve um speedup relativamente bom se comparado ao speedup para a execução nos 2 cores físicos.

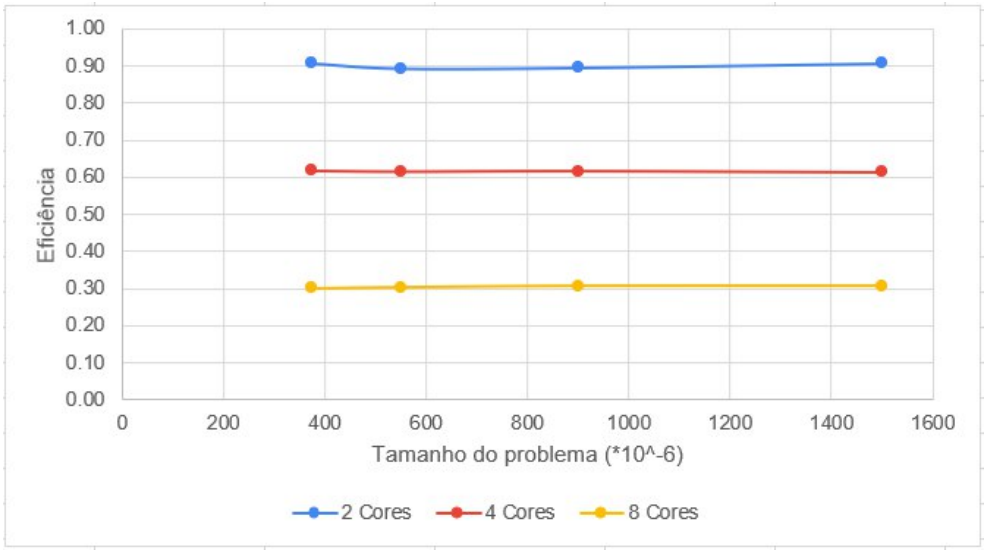
A tabela abaixo apresenta o speedup médio por número de cores após 5 tentativas de execução dos 4 problemas descritos neste item.

Número de Cores	2	4	8
Speedup Médio	1.80	2.47	2.44

Análise de Eficiência

Através do cáculo do speedup, é possível obter a eficiência do algoritmo quando submetido a execução com as diferentes quantidades de cores. Este cálculo pode ser realizado através da divisão do speedup do algoritmo utilizando n cores pelos n cores utilizados. Como a máquina de testes possui apenas 2 cores físicos e implementa um hyper-threading para executar programas em 4 cores, para efeitos de análise comparativa iremos relacionar apenas estas duas quantidades. Porém, note que a eficiência de cores virtuais equivale a cerca de 30% da eficiência de cores físicos.

Eficiêcia x Tamanhos do Problema



Se olharmos atentamente para a linha representa a eficiência para 2 cores é possível identificar uma mínima queda quando aumentamos pela primeria vez o tamanho do problema, no entanto, quando aumentamos mais uma vez o tamanho de problema, a linha volta a subir de maneira a permanecer praticamente estável para o próximo tamanho de problema. Já a linha que representa a eficiência para 4 cores se aproxima visivelmente de uma reta, o que índica uma constância na eficiência se aumentando o tamanho do problema na mesma proporção em que o número de cores. Desse modo, é possível definir o algoritmo analisado como **fracamente escalável**.

Apesar dos limites da máquina de testes, a eficiência média reduz de maneira considerável se compararmos o passo no uso de 2 para 4 cores, isso acontece porque aumentar a quantidade de cores utilizados gera mais comunicação, o que implica em uma maior distância em relaçao a eficiência linear. A tabela abaixo apresenta a eficiência média calculada através dos valores de speedup médio anteriormente mencionados.

Número de Cores	2	4	8
Eficiência Média	0.90	0.61	0.30

Cálculo da Integral

Para esta análise, serão realizadas **5 execuções** com tamanhos de problema 1.200.000.000, 2.400.000.000, 4.800.000.000 e 9.600.000.000, intervalo no eixo X de 0.0 a 30.0, e função a ser integrada definida como `f(x) = pow(x, 2)` - ambos definidos empiricamente de modo a atingir os limites mínimos determinados pela referência - em **3 quantidades de cores** (2, 4 e 8). Se espera que o comportamento de ambos os algoritmos quanto ao cálculo da integral seja idêntico para um mesmo tamanho de problema quando se altera apenas o número de cores, sendo o tempo de execução o único fator variável. Uma descrição completa da máquina de testes pode ser encontrada no tópico Condições de Testes.

Corretude

Para validar a corretude dos algoritmos implementados foi realizado um teste utilizando **210.000** como tamanho de problema para os dois códigos:

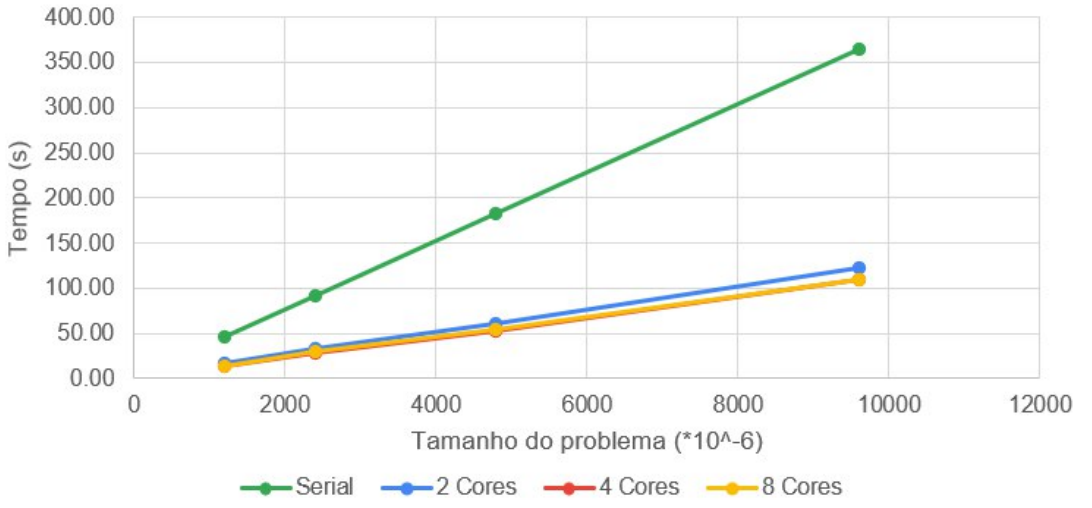
```
oziel@PISTOL: /mnt/c/users/oziel/Documents/Projects/prog_paralela
oziel@PISTOL:/mnt/c/users/oziel/Documents/Projects/prog_paralela$
oziel@PISTOL:/mnt/c/users/oziel/Documents/Projects/prog_paralela$ mpicc -g -o ./trapezio/mpi_trapezio ./trapezio/mpi_trapezio.cpp -lstdc++ -lm
oziel@PISTOL:/mnt/c/users/oziel/Documents/Projects/prog_paralela$ g++ -g -o ./trapezio/trapezio ./trapezio/trapezio.cpp
oziel@PISTOL:/mnt/c/users/oziel/Documents/Projects/prog_paralela$ mpirun -np 2 ./trapezio/mpi_trapezio 210000
A area aproximada da figura: 9000.000000
oziel@PISTOL:/mnt/c/users/oziel/Documents/Projects/prog_paralela$ ./trapezio/trapezio 210000
A area aproximada da figura: 9000.000000
oziel@PISTOL:/mnt/c/users/oziel/Documents/Projects/prog_paralela$
```

Como é possível perceber nas impressões, ambos os códigos conseguem aproximar de maneira correta o valor da integral de `f(x) = pow(x, 2)` de 0.0 até 30.0, dado o número de trapézios solicitados.

Obs.: Vale salientar que para este modelo de amostragem quanto maior o número de trapézios mais precisa será a integral da função no intervalo selecionado.

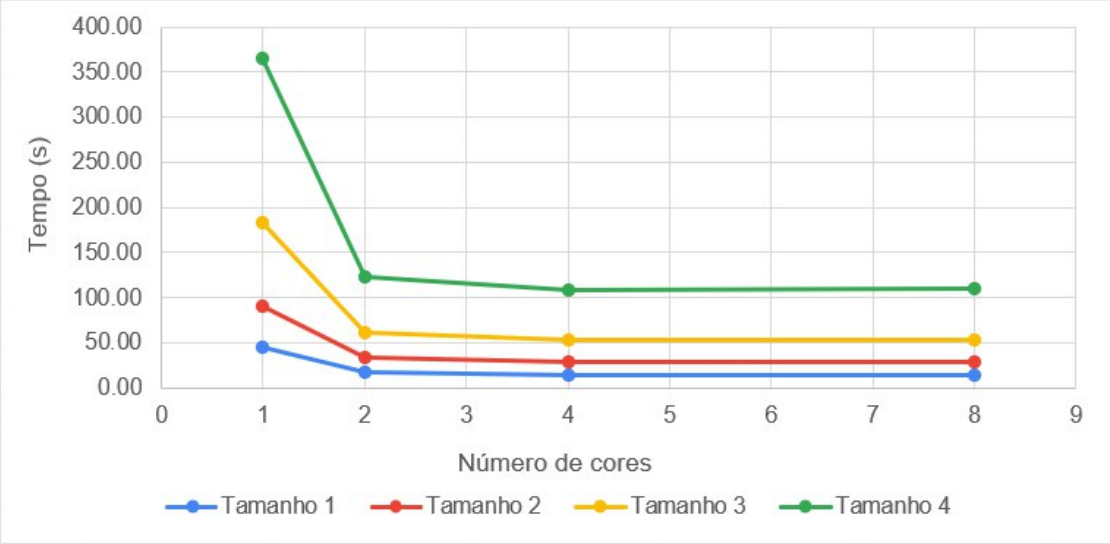
Gráficos

Serial e Paralelo - Tempo x Tamanho do Problema



Através do gráfico comparativo, é possível observar que o código paralelo é mais eficiente que o código serial pois a reta relativa a este último apresenta um coefiente angular maior do que as relativas ao primeiro, o que indica que ao se aumentar o tamanho de problema no código serial o aumento em tempo de execução é proporcionalmente maior que o observado no código paralelo. Note que a redução no tempo de execução do código paralelo para o código serial orcorre de maneira proporcional ao tamanho dos problemas. Vale salientar que as curvas referentes a 4 e 8 cores são praticamente idênticas, isso ocorre devido aos limites da máquina de teste, fenômeno que será mais bem explicado no item Considerações Finais.

Tamanho do Problema - Tempo x Cores

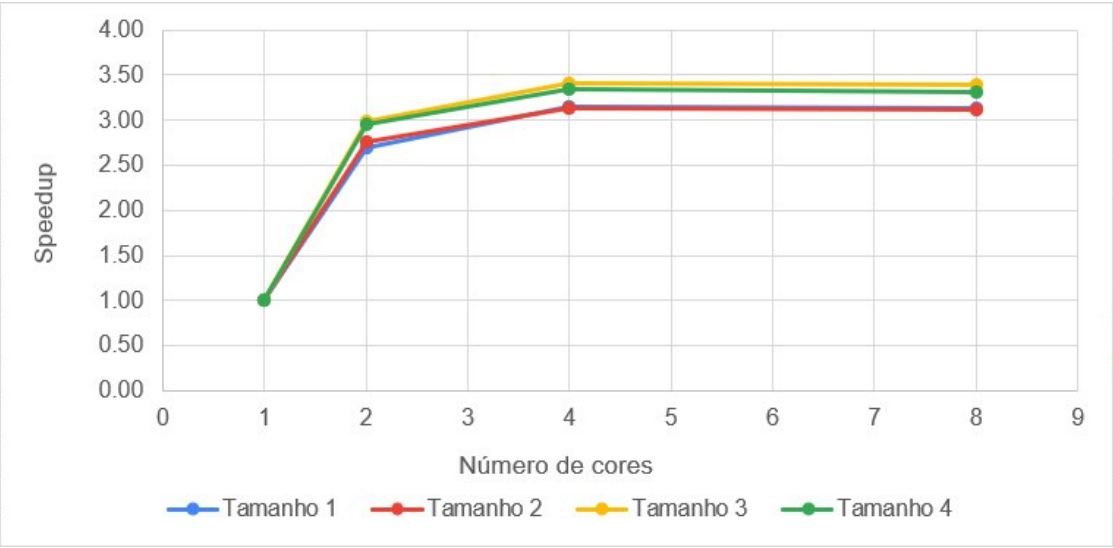


A partir do gráfico apresentado, é clara a influência do número de cores no tempo de execução. Por exemplo, o tempo de execução para o problema de maior tamanho no código serial cai para cerca de 8% ao se passar para o código paralelo ultilizando 4 cores. Novamente, verifica-se que o desempenho para 4 e 8 cores é idêntico.

Análise de Speedup

Partindo da mesma definição de speedup do tópico anterior "Análise de Speedup" do algoritmo do Cálculo do Pi, também é esperado queo speedup da execução dos problemas para 4 e 8 cores seja aproximadamente idêntico. Assim, temos:

Speedup x Número de Cores Utilizados



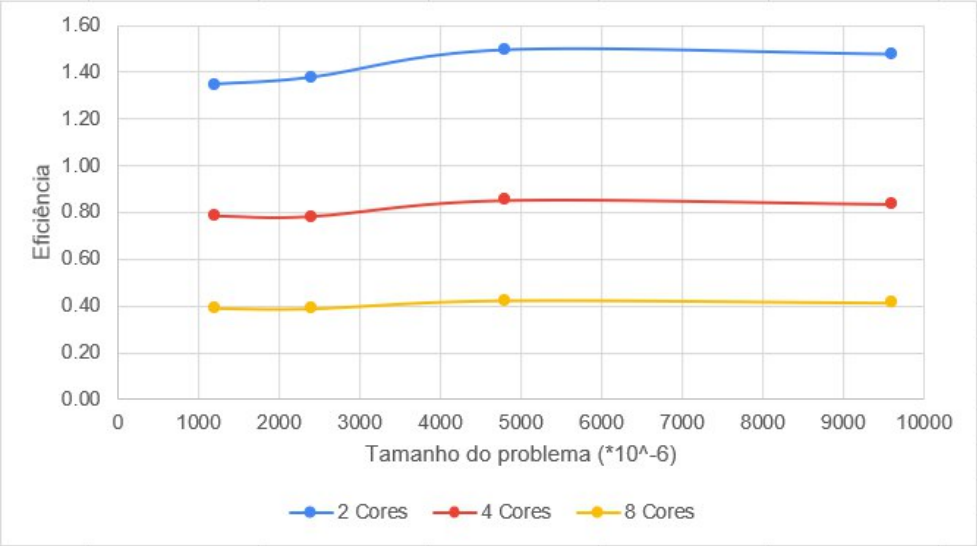
Note que existe um enorme ganho de desempenho quando observamos o ganho de velocidade em relação ao código serial, como resultado disto temos uma curva bastante acentuada na passagem do uso de 1 core (Serial) para 2 cores (Paralelo). A tabela abaixo apresenta o speedup médio por número de cores após 5 tentativas de execução dos 4 problemas descritos neste item.

Número de Cores	2	4	8
Speedup Médio	2.85	3.26	3.41

Análise de Eficiência

Realizando o cálculo da Eficiência quando para cada tamanho de problema, nas 3 quantidades de cores, de maneira idêntica a descrita no item anterior, temos:

Eficiêcia x Tamanhos do Problema



Note que a eficiência para para todos os tamanho de problema executados em 2 cores ultrapassa o limite unitário, o que vem a identificar algum tipo de anomalia seja no tempo de execução do código serial ou do código paralelo, este fato irá ser melhor investigado posteriormente para uma posterior identificação do motivo.

Ainda assim, após o cáculo da eficiência, e novamente, relacionando para efeitos de análise comparativa apenas a eficiência relativa a 2 e 4 cores, um estranho aumento na eficiência é percebido ao também aumentarmos o tamanho do problema. Seguindo por esta linha, definiriamos então o algoritmo analisado como **escalável**, porque o valor da eficiência aumenta conforme aumentamos o número de cores utilizados. A tabela abaixo apresenta a eficiência média calculada através dos valores de speedup anteriormente mencionados.

Número de Cores	2	4	8
Eficiência Média	~~1.42~~	0.81	0.42

Conclusão

Considerações Finais

Devido aos limites da máquina de testes, o número de cores passíveis de utilização é restrito. Das análises apresentadas, fica explicito que 4 cores é o limite do dispositivo junto a implementação do Hyper-threading, de maneira a obter ainda um speedup relevante, não sendo possível estender o número de cores utilizados para 8. Apesar disto, através desta análise foi possível perceber que a paralelização de códigos seriais, ainda que simples, traz resultados bastante promissores no que diz respeito a eficiência e velocidade. Além disto, também foi permitido constatar que o speedup é ainda mais pronunciado para tamanhos maiores de problema. No entando, isto não quer dizer necessáriamente que o algoritmo tenha uma boa escalabiliade.

Softwares utilizados

```
~$: g++ --version
g++ (Ubuntu 9.3.0-17ubuntu1~20.04) 9.3.0
Copyright (C) 2019 Free Software Foundation, Inc.
This is free software; see the source for copying conditions.  There is NO
warranty; not even for MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE.
```

```
~$: python3 --version
Python 3.6.4
```

```
~$: grip --version
Grip 4.2.0
```