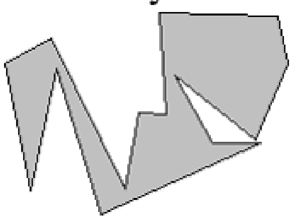
Звіт

до лабораторної роботи №1

студента групи ІПС-32

Пащенка Дмитра Вікторовича

1. Постановка задачі.

<table>
<tr>
<td>Апроксимація найменшого охоплюючого простого многокутника
</td>
<td>Для заданої множини S із N точок на площині побудувати гладку апроксимацію найменшого охоплюючого простого многокутника, вершинами якого є усі точки множини S однорідним бісплайном.</td>
</tr>
</table>

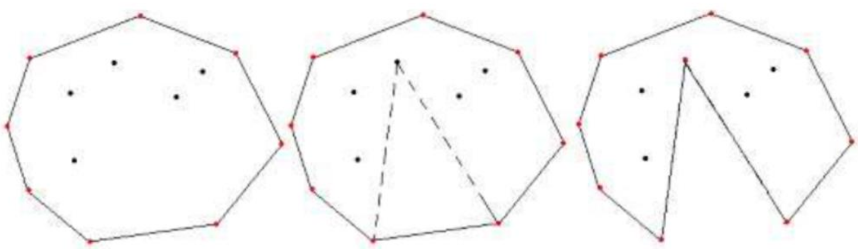
2. Алгоритм побудови найменшого охоплюючого простого многокутника.

Проблема пошуку найменшого охоплюючого простого многокутника NP-повна [1], тому бажано знайти хороший метод апроксимації. Використав жадібний алгоритм, наведений в [1].

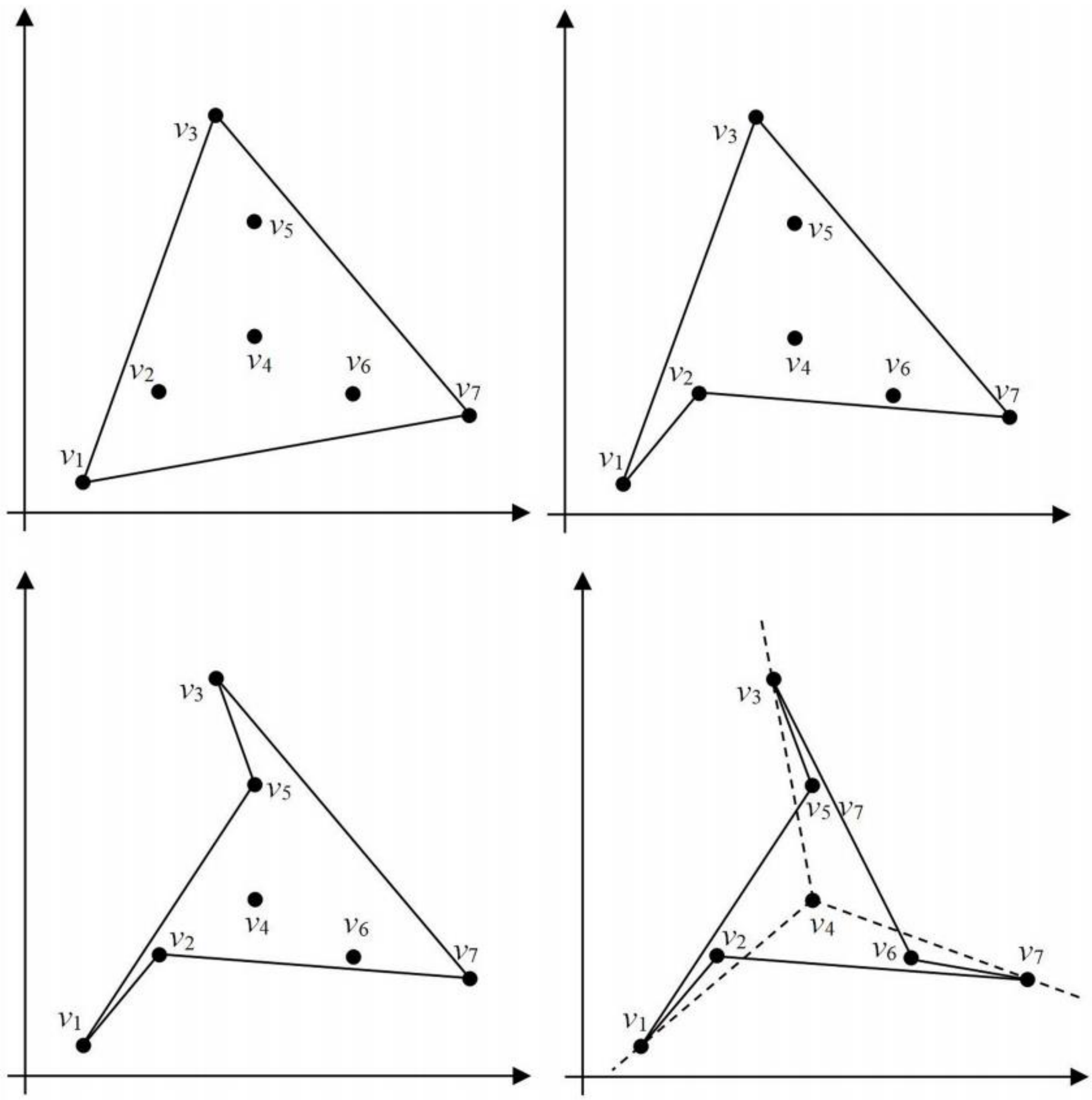
1) Будуємо опуклу оболонку методом Джарвіса за $O(hN)$, де h - кількість точок в оболонці. Якщо $h = N$, то проблема одразу розв'язана.
2) Серед точок, які не увійшли до поточного багатокутника, обираємо ту p, яка з одним із ребер (u, v) утворює трикутник з найбільшою площею, причому жодна з точок, що залишилися, не має знаходитися всередині цього трикутника, а також сторони vp і pu не мають перетинати інших ребер.
3) Розбиваємо в поточному многокутнику ребро (u, v) на нові ребра (u, p) і (p, v). Повертаємося до кроку 2).

Складність алгоритму: $O(N^4)$. Витрати пам'яті: $O(N)$.

Ілюстрація роботи:



Варто зазначити, що наведений алгоритм працює не для будь-якого набору вхідних даних [2]:



3. Побудова В-сплайну.

Утворений простий багатокутник апроксимував однорідним квадратичним В-сплайном у вигляді:

$$S(t) = \sum_{i=0}^{2} N_{i,2}(t)\, P_i$$

Оскільки однорідний квадратичний В-сплайн визначається трьома контрольними точками, то кількість вузлів $m = k + n + 1 = 3 + 2 + 1 = 6$.

Утворені вузли:

$$T = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = (0,1,2,3,4,5)$$

Коефіцієнти знаходив за трикутною схемою [3]:

$$\begin{array}{ccccc} N_{0,0}(t) & \rightarrow & N_{0,1}(t) & \rightarrow & N_{0,2}(t) \\ & \nearrow & & \nearrow & \\ N_{1,0}(t) & \rightarrow & N_{1,1}(t) & & \\ & \nearrow & & & \\ N_{2,0}(t) & & & & \end{array}$$

Формули:

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad u_i \le u < u_{i+1} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

Знайшовши необхідні коефіцієнти, а також урізавши проміжок до $t \in [t_2, t_3]$, отримав вирази:

$$N_{0,2}(t)P_0 = \frac{1}{2}[(t - t_2)^2 - 2(t - t_2) + 1]P_0,$$
$$N_{1,2}(t)P_1 = \frac{1}{2}[-2(t - t_2)^2 + 2(t - t_2) + 1]P_1,$$
$$N_{2,2}(t)P_2 = \frac{1}{2}(t - t_2)^2 P_2,$$

Переписуючи в матричній формі:

$$S_i(t) = \begin{pmatrix} P_i & P_{i+1} & P_{i+2} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

де $i = \overline{0, n - k + 1}$, $t \in [0,1]$.

Отже, для побудови сплайну достатньо лише почергово підставляти по три точки у вираз (4), причому для замкнутості апроксимації в кінець додав точки P_0, P_1.

4. Інтерфейс.

Працювати можна у двох режимах:

- INTERACTIVE: точки вводяться мишкою, апроксимація будується щоразу при додаванні нової точки.
- RANDOM: апроксимація будується по випадково згенерованим точкам.

5. Джерела.

[1]
https://www.researchgate.net/publication/224255947_Generating_a_Simple_Polygonalizations

[2]
https://www.researchgate.net/publication/339921437_Generation_of_simple_polygons_from_ordered_points_using_an_iterative_insertion_algorithm

[3]

https://www.youtube.com/watch?v=r6UcF0S0HvQ