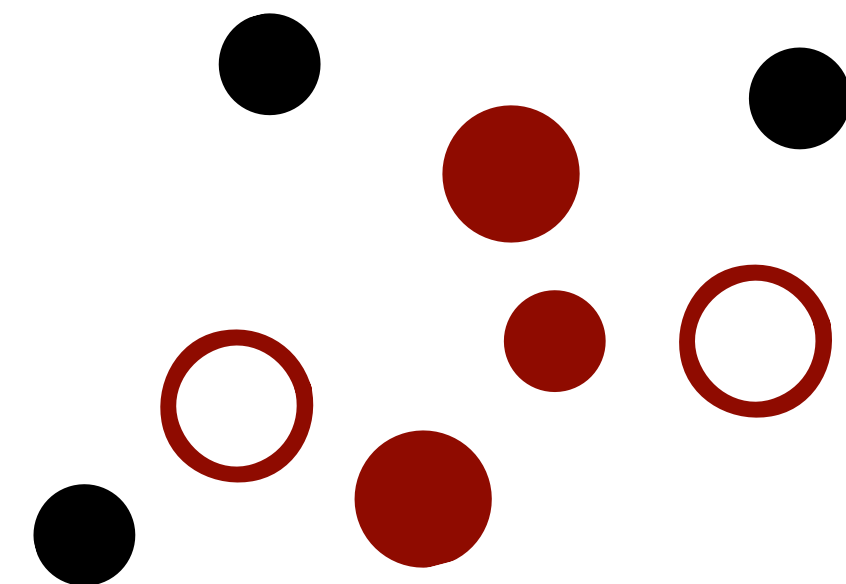


Napisanie funkcji w MATLAB, która dla podanego wielomianu, maksymalnej liczby kroków M , oraz dokładności wyznaczenia wartości wielomianu ε , stosując **metodę Laguerre'a wyznaczy jeden z pierwiastków tego wielomianu.**

Diana Kalyniak
Oleh Zemlianyi



SPIS TREŚCI

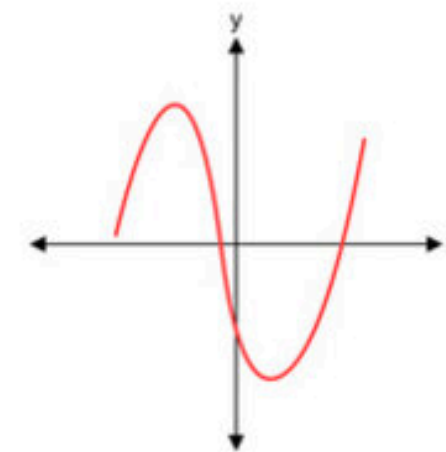
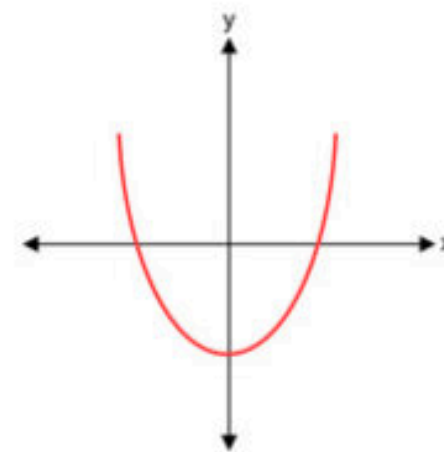
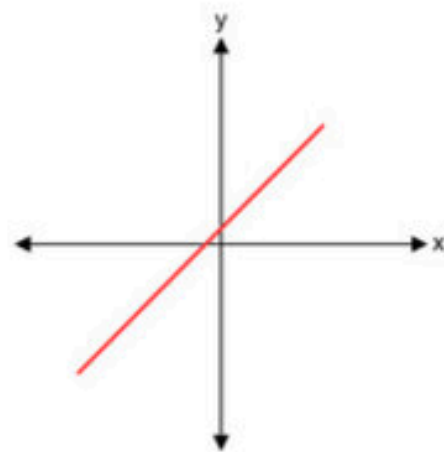
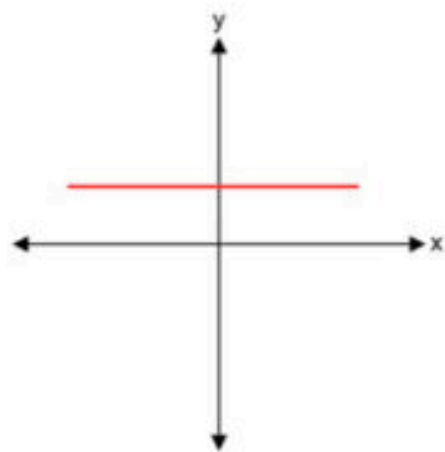
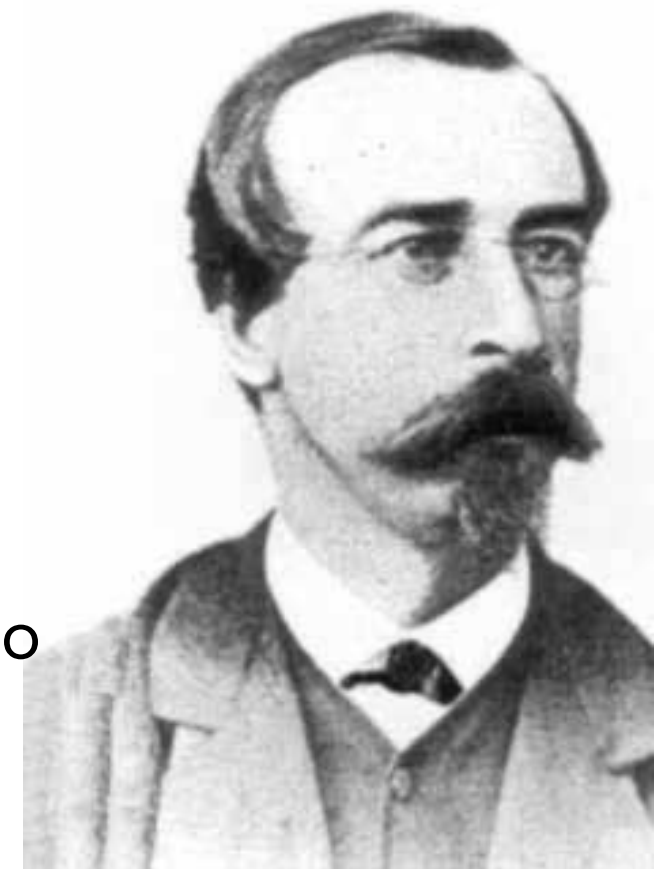
- | | | | |
|----------------|-------------------------------|---|------------------------|
| 1 | Wprowadzenie | 5 | Wielomian kwadratowy |
| 2 | Metoda Laguerre'a | 6 | Wielomian sześcienny |
| 3 | Zastosowanie metody | 7 | Wielomian 4-go stopnia |
| 4 | Implementacja metody w MATLAB | 8 | Wielomian 8-go stopnia |
| 9 Podsumowanie | | | |

WPROWADZENIE

Znalezienie pierwiastków wielomianu może być skomplikowane, szczególnie dla wielomianów o wysokim stopniu.

Metoda Laguerre'a jest iteracyjną metodą numeryczną służącą do znajdowania pierwiastków wielomianów. Jest szczególnie użyteczna ze względu na swoją szybkość zbieżności i stabilność w stosunku do innych metod. Metoda wykorzystuje szczególną formułę iteracyjną, która pozwala na szybkie przybliżenie pierwiastków wielomianu, gdy zaczynamy z dobrym początkowym przybliżeniem.

Metoda Laguerre została zaproponowana przez francuskiego matematyka Edmonda Laguerre'a, została opublikowana w jego pracy "O rozwiązywaniu równań numerycznych" w 1879 roku.



METODA LAGUERRE'A

W metodzie Laguerre'a przejście od danego przybliżenia z pierwiastka do nowego przybliżenia następuje według wzorów:

$$A := -p'(z)/p(z), \quad B := A^2 - p''(z)/p(z),$$
$$C := n^{-1}[A \pm \sqrt{(n-1)(nB - A^2)}], \quad z_{\text{nowe}} := z + 1/C.$$

Gdzie:

- $P(z)$ to wielomian, którego pierwiastków szukamy.
- $P'(z)$ to pierwsza pochodna tego wielomianu.
- $P''(z)$ to druga pochodna tego wielomianu.
- z to aktualne przybliżenie pierwiastka.
- z_{nowe} to nowe przybliżenie pierwiastka.

Znak w definicji wielkości C jest tak dobrany, żeby $|C|$ była jak największa.

Metoda Laguerre'a może być wrażliwa na warunki początkowe oraz błędy zaokrąglenia. Brak zbieżności zdarza się tylko dla wielokrotnych miejsc zespolonych. W niektórych przypadkach metoda Laguerre może wymagać więcej iteracji lub modyfikacji, aby osiągnąć zbieżność.

ZASTOSOWANIE METODY

Analiza sygnałów

W analizie sygnałów, wielomiany są używane do modelowania systemów filtrujących. Znajdowanie pierwiastków charakterystycznych wielomianów pomaga w projektowaniu i analizie tych systemów.

Kontrola systemów

W teorii sterowania, pierwiastki wielomianów charakterystycznych są kluczowe dla analizy stabilności systemów dynamicznych.

Równania różniczkowe

Rozwiązywanie niektórych równań różniczkowych wymaga znajdowania pierwiastków wielomianów charakterystycznych.

IMPLEMENTACJA METODY W MATLAB

1. Funkcja :

- Przyjmuje wielomian P, początkowe przybliżenie z0, maksymalną liczbę kroków M, oraz dokładność ε .
- Początkowe przybliżenie pierwiastka z jest ustawiane na wartość z0.
- Obliczamy stopień wielomianu.

2. Dla każdej iteracji k (od 1 do M):

- Obliczane są wartości wielomianu P(z), jego pierwszej pochodnej P'(z), oraz drugiej pochodnej P''(z) za pomocą schematu Hornera.
- Sprawdzanie czy P(z) jest bliskie zeru
- Wyliczamy pomocnicze wartości A i B według wzorów.
- Obliczamy wartość wyrażenia pod pierwiastkiem
- Wybieramy większą wartość C
- Aktualizujemy C
- Obliczamy nowe przybliżenie Z_nowe

3. Warunek zakończenia:

- Iteracje kończą się, gdy osiągnięta zostanie zadana dokładność epsilon lub maksymalna liczba kroków M.

$$A := -p'(z)/p(z), \quad B := A^2 - p''(z)/p(z),$$
$$C := n^{-1}[A \pm \sqrt{(n-1)(nB - A^2)}], \quad z_{\text{nowe}} := z + 1/C.$$

```
function [x] = laguerre(P,z0, M, epsilon)
    z = z0;
    n = length(P) - 1;
    for k = 1:M

        Pz = P(1);
        Pp1_z = 0;
        Pp2_z = 0;
        for i = 2:length(P)
            Pp2_z = Pp2_z * z + 2 * Pp1_z;
            Pp1_z = Pp1_z * z + Pz;
            Pz = Pz * z + P(i);
        end

        if abs(Pz) < epsilon
            x = z;
            return;
        end
        A = -Pp1_z / Pz;
        B = A^2 - Pp2_z / Pz;
        sqrt_z = sqrt((n - 1) * (n * B - A^2));

        if abs(n^(-1)*(A + sqrt_z)) > abs(n^(-1)*(A - sqrt_z))
            C = n^(-1)*(A + sqrt_z);
        else
            C = n^(-1)*(A - sqrt_z);
        end

        z_nowe = z + 1 / C;
        if abs(z_nowe - z) < epsilon
            z = z_nowe;
            break;
        end

        x=z_nowe;
        disp(['Przybliżenie w iteracji ', num2str(k), ...
            ': ', num2str(x)]);
        z = z_nowe;
    end
    x = z;
end
```



TESTOWANIE FUNKCJI NA WYBRANYCH PRZYKŁADACH

WIELOMIAN KWADRATOWY

$$P(x) = x^2 - 3x + 2$$

Kod:

```
P = [1 -3 2];
```

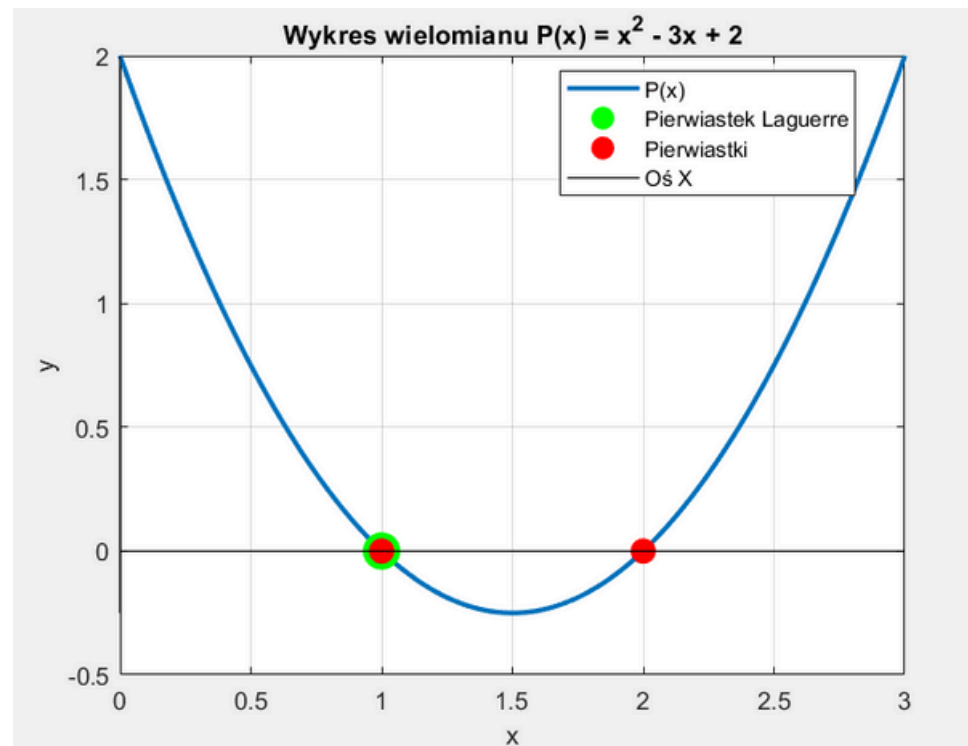
```
z = laguerre(P, 0, 100, 1e-6)
```

Wynik:

Przybliżenie w iteracji 1: 1

Pierwistek wielomianu:

1



Kod:

```
P = [1 -3 2];
```

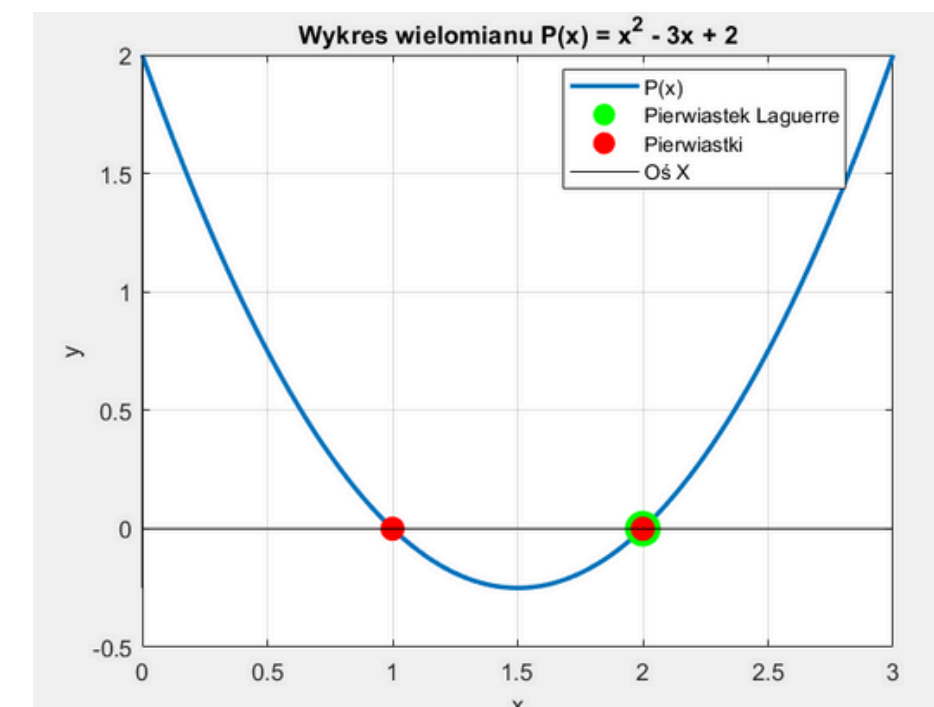
```
z = laguerre(P, 2.2, 100, 1e-6)
```

Wynik:

Przybliżenie w iteracji 1: 2

Pierwistek wielomianu:

2



WIELOMIAN SZEŚCIENNY

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

Kod:

```
P = [1 -4 5 -2];
```

```
z = laguerre(P, 0, 100, 1e-6)
```

Wynik:

Przybliżenie w iteracji 1: 0.85714

Przybliżenie w iteracji 2: 0.96774

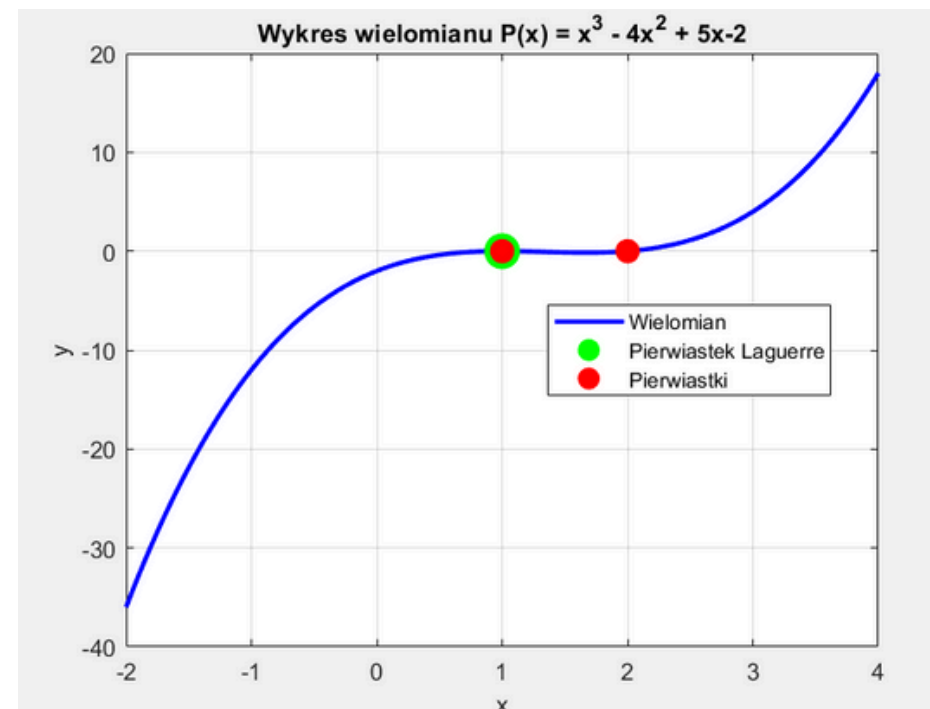
Przybliżenie w iteracji 3: 0.99213

Przybliżenie w iteracji 4: 0.99804

Przybliżenie w iteracji 5: 0.99951

Pierwiastek wielomianu:

0.9995



Kod:

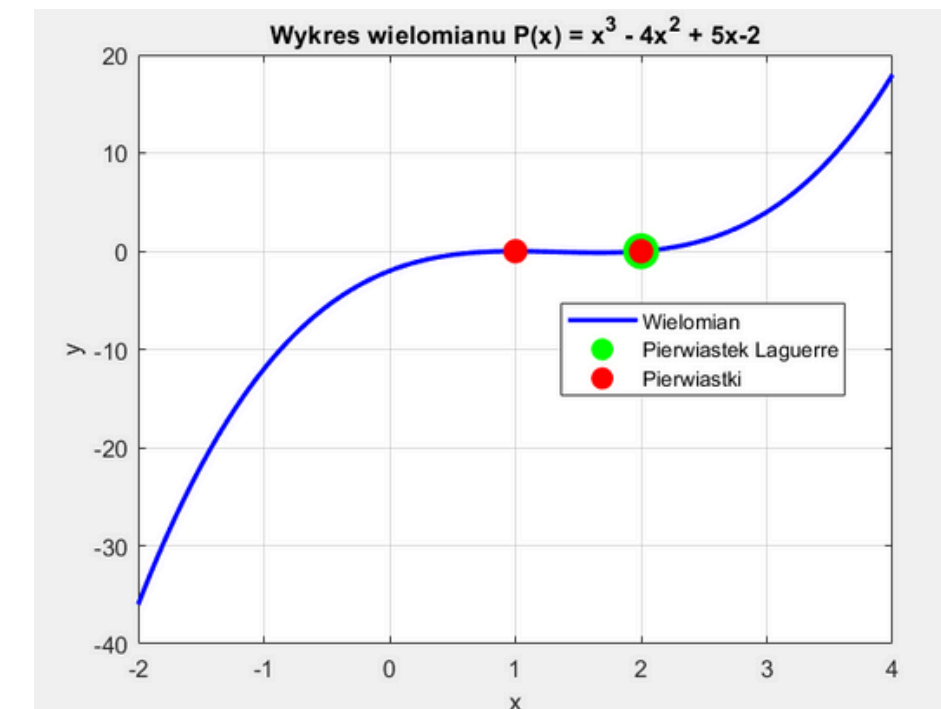
```
P = [1 -4 5 -2];
```

```
z = laguerre(P, 0, 100, 1e-6)
```

Wynik:

Przybliżenie w iteracji 1: 2

Pierwiastek wielomianu:
2.0000



WIELOMIAN 4-GO STOPNIA

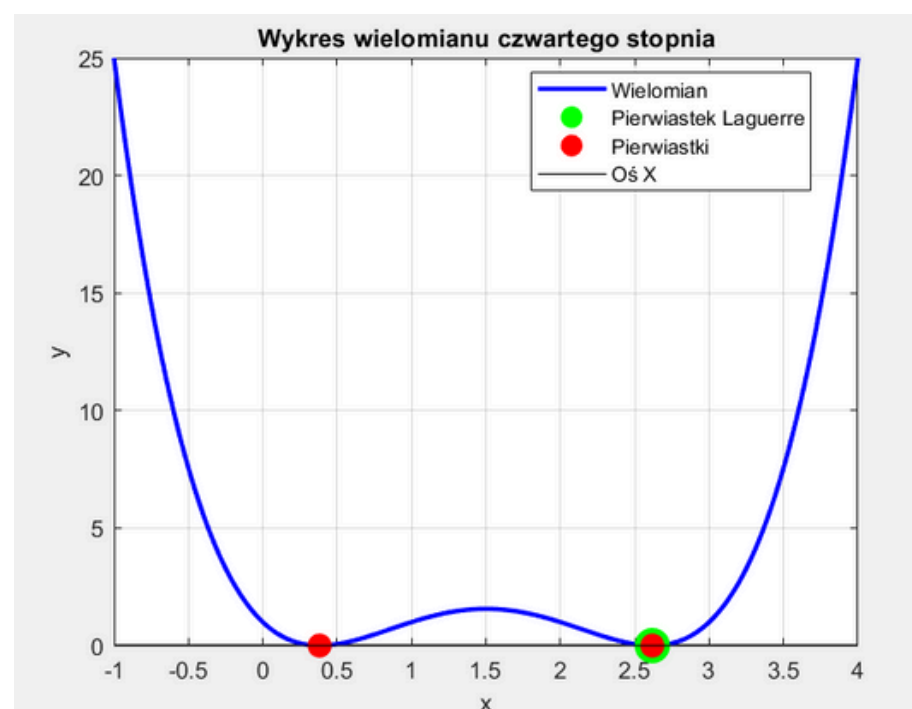
$$P(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$$

Kod:

```
P = [1 -6 11 -6 1];  
z = laguerre(P, 10, 10, 1e-6)
```

Wynik:

Przybliżenie w iteracji 1: 3.1969
Przybliżenie w iteracji 2: 2.7484
Przybliżenie w iteracji 3: 2.6515
Przybliżenie w iteracji 4: 2.6269
Przybliżenie w iteracji 5: 2.6204
Przybliżenie w iteracji 6: 2.6187
Przybliżenie w iteracji 7: 2.6182
Pierwiastek wielomianu:
2.6182

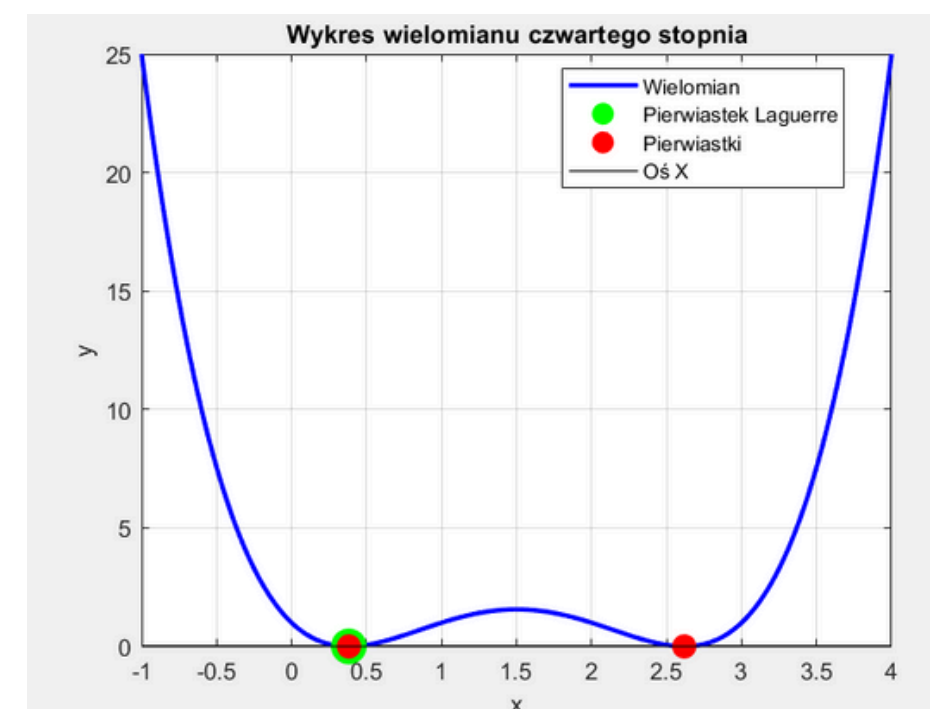


Kod:

```
P = [1 -6 11 -6 1];  
z = laguerre(P, 0.1, 10, 1e-6)
```

Wynik:

Przybliżenie w iteracji 1: 0.3128
Przybliżenie w iteracji 2: 0.36384
Przybliżenie w iteracji 3: 0.37714
Przybliżenie w iteracji 4: 0.38067
Przybliżenie w iteracji 5: 0.38162
Pierwiastek wielomianu:
0.3816



WIELOMIAN 8-GO STOPNIA

$$P(x) = P(x) = 2x^8 - 15x^7 + 40x^6 - 75x^5 + 120x^4 - 165x^3 + 200x^2 - 225x + 250$$

Kod:

```
P = [2 -15 40 -75 120 -165 200 -225 250];
```

```
z = laguerre(P, -1, 10, 1e-6)
```

Wynik:

Przybliżenie w iteracji 1: $-0.8322 + 0.7742i$

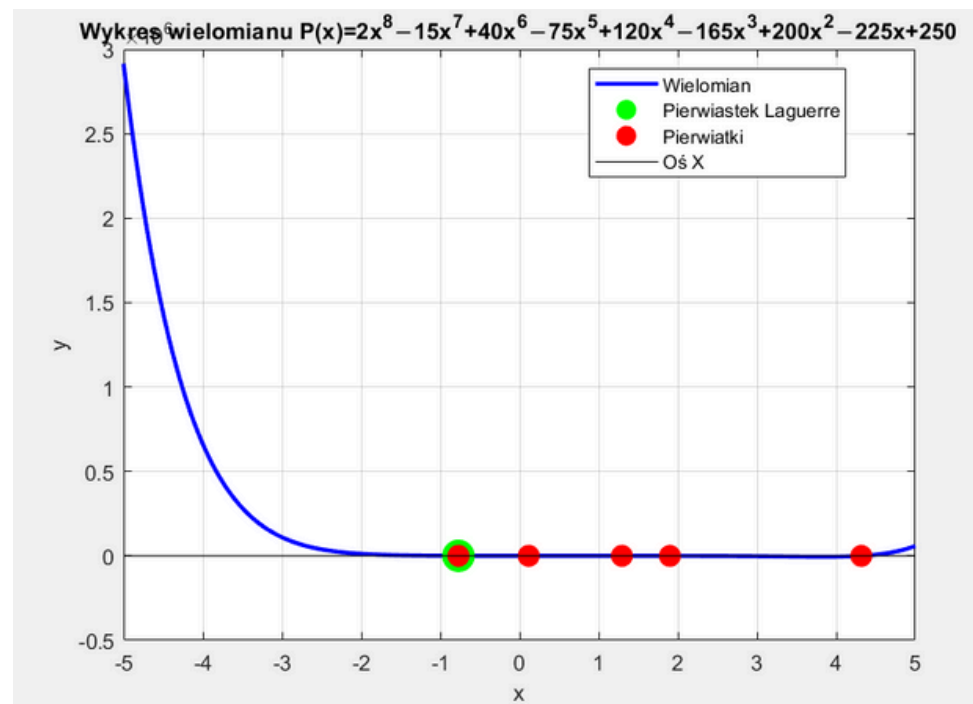
Przybliżenie w iteracji 2: $-0.75667 + 1.1431i$

Przybliżenie w iteracji 3: $-0.77052 + 1.1633i$

Przybliżenie w iteracji 4: $-0.77052 + 1.1633i$

Pierwiastek wielomianu

$-0.7705 + 1.1633i$



Kod:

```
P = [2 -15 40 -75 120 -165 200 -225 250];
```

```
z = laguerre(P, 8, 10, 1e-6)
```

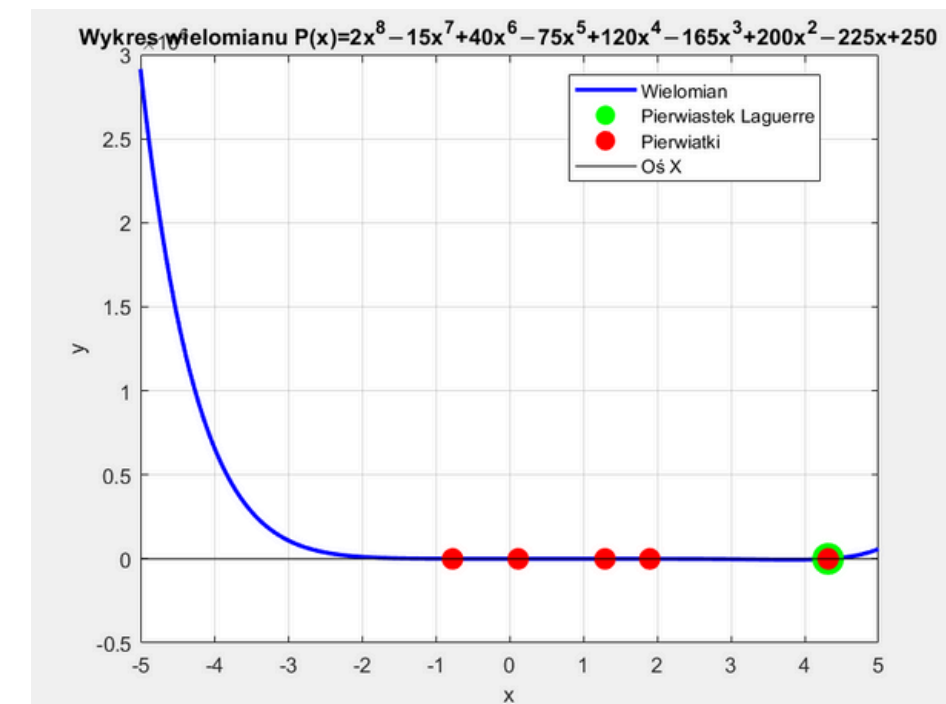
Wynik:

Przybliżenie w iteracji 1: 4.2872

Przybliżenie w iteracji 2: 4.3176

Pierwiastek wielomianu

4.3176



PODSUMOWANIE

W ramach projektu analizowaliśmy metodę Laguerre'a, jedną z metod stosowaną do znajdowania pierwiastka wielomianów. Metoda jest stosunkowo prosta w implementacji i ma dobrą zbieżność w wielu przypadkach.

Podstawowa idea metody Laguerre polega na iteracyjnym przybliżaniu się do rzeczywistego pierwiastka wielomianu poprzez wyznaczanie kolejnych przybliżeń z , które są coraz bliżej tego pierwiastka.

Podczas testów metoda Laguerre'a wykazała skuteczność i szybkość w znajdowaniu pierwiastków rzeczywistych wielomianu, ale niektóre wielomiany mogą wymagać więcej iteracji.

Kluczowe elementy metody Laguerre obejmują odpowiedni dobór punktu początkowego, uwzględnienie warunków zbieżności.

Ogólnie, metoda Laguerre'a jest wartościowym narzędziem, które znajduje zastosowanie w wielu dziedzinach nauki i techniki, gdzie konieczne jest rozwiązanie równań i znajdowanie pierwiastków wielomianów.



**DZIĘKUJEMY
ZA UWAGĘ**

