ЗДЕСЬ БУДЕТ ТИТУЛЬНИК

АННОТАЦИЯ

Объектом исследования данной работы является решение задач линейного программирования с помощью их конических аппроксимаций на основе симплекс-алгоритма и метода внутренней точки. Целью исследования является изучение способов улучшения оценки полученного решения оптимизационной задачи.

К задачам исследования относятся:

1. Изучить уже существующие алгоритмы нахождения оценок для решения задач такого типа.

2. Развить идею улучшения оценки с использованием представленных методов и расширить способы решения подзадач на конус.

3. Проверить гипотезу нахождения решения на конусе и улучшаемость оценки по сравнению с уже предложенными алгоритмами.

В случае успешной проверки гипотезы также предлагается разработать алгоритм нахождения соответствующего решения и его возможная имплементация. В том числе рассматривается возможность проведения сравнительных тестов, проверяющих скорость сходимости и точность решения.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность

Методы оптимизации — это математические подходы, направленные на нахождение оптимальных решений для различных задач с ограничениями. Оптимизация охватывает широкий спектр дисциплин, включая экономику, инженерию, финансы, физику и другие области, где требуется максимизировать или минимизировать некоторую цель при соблюдении определённых условий.

Одним из наиболее распространённых и важных классов задач оптимизации является линейное программирование. Линейное программирование используется для решения задач, где целевая функция и ограничения являются линейными. Одним из самых известных и широко используемых алгоритмов для решения задач линейного программирования является симплекс-метод, разработанный Джорджем Данцигом. Несмотря на свою теоретическую экспоненциальную сложность, он работает очень быстро на практике для большинства реальных задач. Кроме того, с развитием вычислительных методов, возникли и другие подходы к решению линейных задач, такие как методы внутренней точки, которые в теории имеют полиномиальную сложность и могут быть более эффективными в некоторых случаях.

Несмотря на то, что основополагающие методы линейного программирования были разработаны десятилетия назад, они обладают широким спектром применения и постоянным совершенствованием алгоритмов, так как многие ограничения в прикладных задач можно выразить через алгебраические понятия сравнительно простого вида. Их использование можно встретить в машинном обучении, экономике, задачах транспорта и логистики [**?**]. Тем не менее, эти алгоритмы все еще являются вычислительно сложными, к тому же машинная вычислительная точность также воздействует на нахождение решения. Эти и другие факторы способствуют постоянному развитию алгоритмов в целях повышения точности решений, а также улучшения времени работы, что позволит усовершенствовать системы, которые их используют.

Методы первого типа, в частности, метод внутренней точки Нестерова-Тодда для самосогласованных барьеров [1] решают задачу за полиномиальное от точности время $\mathcal{O}(n \log \frac{1}{\epsilon})$, однако, как можно показать, при реализации на машинах с относительной точностью представления чисел ϵ_M сходятся к минимуму целевой функции с точностью $\sqrt{\epsilon_M}$, что недопустимо для некоторых практических задач, например банковского планирования [2].

С другой стороны, симплекс-метод [3] лишён проблем с точностью по аргументу, так как его траектория проходит только по вершинам допустимого полиэдра. Однако, как известно, симплекс-метод тратит в худшем случае экспоненциальное время для поиска ответа, причём на практике метод внутренней точки справляется значительно быстрее и является более предпочтительным.

Таким образом, предполагается проверить гипотезу о нахождении решения конической программы с помощью итерации метода внутренней точки, на некоторых шагах которого аналитически решается вспомогательная задача минимизации на эллипсоидальном конусе, далее аппроксимируя найденные решения на исходный конус.

Цель выпускной квалификационной работы – проверить гипотезу об улучшении оценки решения задачи линейного программирования с коническими ограничениями, найденного путем аппроксимации решений на промежуточных эллипсоидальных конусах Дикина с помощью вариаций симплекс-метода и метода внутренней точки.

Задачи выпускной квалификационной работы:

1. Изучить уже существующие алгоритмы нахождения оценок для решения задач такого типа.

2. Развить идею улучшения оценки с использованием представленных методов и расширить способы решения подзадач на конус.

3. Проверить гипотезу нахождения решения на конусе и улучшаемость оценки по сравнению с уже предложенными алгоритмами.

4. (предположительно) По результатам исследования предоставить соответствующий алгоритм.

5. (предположительно) Произвести сравнительное тестирование точности и производительности предложенного алгоритма по сравнению с уже существующими решениями.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АНАЛИТИКА

1.1. Конические программы

Рассмотрим задачу конического программирования

$$\min_{x \in K} \langle c, x \rangle : \; Ax = b \tag{1.1}$$

и двойственную к ней задачу

$$\max_{s \in K^*, y} \langle b, y \rangle : \; s + A^T y = c \tag{1.2}$$

Здесь $K \subset \mathbb{R}^n$ – регулярный конус, а

$$K^* = \{s \in \mathbb{R}^n \| \langle s, x \rangle \geq 0 \; \forall x \in K\}$$

двойственный к K конус.

Для простоты будем рассматривать случай положительный ортант, то есть $K = K^* = \mathbb{R}^n_+$.

Пусть v^* – оптимальное значение задачи 1.1. Любая допустимая для 1.1 дает верхнюю оценку $\langle c, x \rangle$ на v^*. С другой стороны, любая допустимая для задачи 1.2 пара (s, y) дает нижнюю оценку $\langle b, y \rangle$ на v^*. Цель – сравнить эффективность разных способов генерации таких оценок.

Далее на матрицу и допустимое решение также будут наложены дополнительные ограничения.

1.2. Обзор литературы

Задача линейного программирования была впервые предложена Дж. Данцигом в [4] и набрала популярность благодаря простоте и выразительности. На практике, помимо упомянутых симплекс-алгоритма и методов внутренней точки, существует и полиномиальный по времени точный алгоритм эллипсоидов [5], однако степень полинома и константа являются недопустимыми для большинства практических приложений. Другим достоинством метода внутренней точки является его общность. Этот метод позволяет решить задачу оптимизации для произвольной выпуклой целевой функции на произвольном выпуклом конусе [6] (заметим, что постановка задачи использует линейную целевую функцию и положительный ортант в качестве конуса), если для неё можно придумать барьерную функцию. Впервые метод следования прямо-двойственному центральному пути был предложен в [7] и позднее развит в [1].

В данной работе упор будет на использование алгоритма Нестерова-Тодда для метода следования прямо-двойственному пути.

1.3. Барьеры и эллипсоиды Дикина

1.4. Аппроксимирующие задачи

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Nesterov Y. E., Todd M. J. Primal-dual interior-point methods for self-scaled cones // SIAM Journal on Optimization. 1998. Vol. 8. No. 2. P. 324–364.
2. Tsionas M. G., Philippas D. Measures of global sensitivity in linear programming: Applications in banking sector // Annals of Operations Research. 2023. Vol. 330. No. 1. P. 585–607.
3. Ficken F. A. The simplex method of linear programming. Courier Dover Publications. 2015.
4. Dantzig G. B. Linear programming // Operations Research. 2002. Vol. 50. No. 1. P. 42–47.
5. Karmarkar N. A new polynomial-time algorithm for linear programming // Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing. 1984. P. 302–311.
6. Nesterov Y., Nemirovskii A. Interior-point polynomial algorithms in convex programming. SIAM. 1994.
7. Renegar J. A polynomial-time algorithm, based on newton’s method, for linear programming // Mathematical Programming. 1988. Vol. 40. No. 1. P. 59–93.

ПРИЛОЖЕНИЕ А