

# Könyvolvasás

Nándi Bátfai      Gréta Bátfai      Matyi Bátfai      Norbi Bátfai

2019. február 28.

## 1. MatLog

A Péter Rózsa: Játék a végtelennel című könyvével kezdtünk. A 261. oldal 3. bekezdésétől kb. a 265. oldalig jeleltük le:

- Bevezetés a matematikai logikába 1., <https://youtu.be/j1IBkF03UNk>

Majd Dragálin Albert: Bevezetés a matematikai logikába című könyvének jelöléseivel (használva közben a <http://detexify.kirelabs.org/classify.html> lapot a legmegfelelőbb logikai szimbólumok megtalálásához) próbálkoztunk latex-ben:

- Második TeXelés, [https://youtu.be/qly\\_9ECViBM](https://youtu.be/qly_9ECViBM)

Aztán a Dragálin könyv 44. oldalával folytattuk, a természetes nyelvű mondatok matlog átíratával.

### 1.1. Természetes nyelvű mondatok matlog átírata

Dragálin Albert: Bevezetés a matematikai logikába, 44. oldal.

#### 1.1.1. A könyv példái

Első stream.

- Minden hal, kivéve a cápát, szereti a gyerekeket.  
 $\forall x (\neg \text{Cápa}(x) \supset \text{SzeretiGyerekek}(x))$
- Minden ember, kivéve a pacifistákat, szereti a fegyvereket.  
 $\forall x (\neg \text{pacifista}(x) \supset \text{Szeretifegyver}(x))$
- Péter akkor szellemes, ha részeg  
 $\text{PéterRészeg} \supset \text{PéterSzellemes}$
- Péter **csak** akkor szellemes, ha részeg.  
 $\text{PéterSzellemes} \supset \text{PéterRészeg}$

- Péter ha részeg, akkor szellemes.  
 $\text{PéterRészeg} \supset \text{PéterSzellemes}$
- Péter **akkor és csak** akkor szellemes, ha részeg.  
 $(\text{PéterRészeg} \supset \text{PéterSzellemes}) \wedge (\text{PéterSzellemes} \supset \text{PéterRészeg})$

Második stream.

- Minden ember szeret valakit.  
 $\forall x \exists y \text{Szeret}(x, y)$
- Valakit minden ember szeret.  
 $\exists y \forall x \text{Szeret}(x, y)$  *vegyük észre, hogy mi a különbség az előző formulával összehasonlítva: a kvantumok sorrendje számít!*
- Senki nem szeret mindenkit.  
 $\neg \exists x \forall y \text{Szeret}(x, y)$
- Valaki szeret mindenkit.  
 $\exists x \forall y \text{Szeret}(x, y)$
- Valaki senkit sem szeret.  
 $\exists x \forall y \neg \text{Szeret}(x, y)$
- Mindenki szeret valakit vagy valaki szeret mindenkit.  
 $\forall x \exists y \text{Szeret}(x, y) \vee \exists x \forall y \text{Szeret}(x, y)$

## 1.2. A matlog nyelv

A matematikai logikai (matlog) nyelv a beszélt nyelvnél pontosabb kifejező eszköz. A beszélt nyelv szavakból és mondatokból épül, még a matlog nyelv termekből és formulákból. A termek változókból és függvényekből épülnek. Term például az az  $x$  változó, ami befutotta az embereket. A formulák termekből és prédikátumokból épülnek. Formula például a korábban használt  $\text{Szeret}(x, y)$  két változós prédikátum. Illetve a logikai jelekkel a formulákból további formulák építhetők fel. Ha  $A$  és  $B$  formula, akkor a

- $(A \wedge B)$  is az, olvasva "A és B", L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-ben leírva:  $\$(A \ \wedge \ B)\$$
- $(A \vee B)$  is az, olvasva "A vagy B", L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-ben leírva:  $\$(A \ \vee \ B)\$$
- $(A \supset B)$  is az, olvasva "A-ból következik B", L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-ben leírva:  $\$(A \ \supset \ B)\$$
- $\neg A$  is az, olvasva "Nem A", L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-ben leírva:  $\$\neg A\$$
- $\exists x A$  is az, olvasva "Van olyan  $x$ , hogy A", L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-ben leírva:  $\$\exists x \ A\$$
- $\forall x A$  is az, olvasva "Minden  $x$ -re A", L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X-ben leírva:  $\$\forall x \ A\$$

### 1.2.1. Az Ar matlog nyelv

A  $0, x, y, z \dots$  változók természetes szám típusúak (a  $0$  egy konstans, azaz nem változó változó, a  $0$  természetes szám jele).

Az  $S, +, \cdot$  függvények.

A termek építésének kódja:

1. minden változó neve term, például  $0, x$
2. ha  $t$  term, akkor  $St$  is az, például  $Sx, SSS0, S(0+x)$
3. ha  $t, v$  termek, akkor  $(t+v)$  és  $(t \cdot v)$  is termek, például  $(x+0), (Sx+SSS0)$ .

Formulák építéséhez egyetlen prédikátum van, az Egyenlő( $t, v$ ), amit olvashatóbban így írunk  $(t = v)$ . Például az  $((x+0) = SSS0)$  egy formula. Ez a formula az  $x = 3$  kiértékelés mellett igaz egyébként hamis. Mikor igaz az  $(x+y = Sx+x)$  formula? Mikor igaz az  $(x = SSy)$  formula?

**Alapozzuk meg a következő formulákat!** Lásd a <https://www.twitch.tv/nbatfai> csatornán közvetített élő adások archívumát a <https://www.youtube.com/c/nbatfai> YTB csatornán, konkrétan például: <https://youtu.be/ZexiPy3ZxsA> és [https://youtu.be/DUGPR1Xk\\_2w](https://youtu.be/DUGPR1Xk_2w).

- $(x \leq y) \Leftrightarrow \exists z(z+x=y)$
- $(x \neq y) \Leftrightarrow \neg(x=y)$
- $(x < y) \Leftrightarrow \exists z(z+x=y) \wedge \neg(x=y)$
- $(x < y) \Leftrightarrow (x \leq y) \wedge (x \neq y)$
- $(x|y) \Leftrightarrow \exists z(z \cdot x = y) \wedge (x \neq 0)$
- $(x \text{ páros}) \Leftrightarrow (SS0|x)$
- $(\infty \text{ sok szám van}) \Leftrightarrow (\forall x \exists y(x < y))$
- $(\text{véges sok szám van}) \Leftrightarrow (\exists y \forall x(x < y))$
- $(x \text{ prím}) \Leftrightarrow (\forall z(z|x) \supset (z = x \vee z = S0)) \wedge (x \neq 0) \wedge (x \neq S0)$
- $(\infty \text{ sok prímszám van}) \Leftrightarrow (\forall x \exists y((x < y) \wedge (y \text{ prím})))$
- $(\infty \text{ sok iker-prímszám van}) \Leftrightarrow (\forall x \exists y((x < y) \wedge (y \text{ prím}) \wedge (SSy \text{ prím})))$
- $(\text{véges sok prímszám van}) \Leftrightarrow (\exists y \forall x(x \text{ prím}) \supset (x < y))$
- $(\text{véges sok prímszám van}) \Leftrightarrow (\exists y \forall x(y < x) \supset \neg(x \text{ prím}))$

Olvassuk el a most feldolgozott, Dragálin könyv 15-19 oldalait!

**”Hol a tagadás lábát megveti”** Felmerült, hogy a (véges sok prímszám van) kifejezhető lenne a ( $\infty$  sok prímszám van) tagadásaként, azaz (véges sok prímszám van)  $\Leftrightarrow \neg(\infty$  sok prímszám van)

Tagadjuk az egyik végeességet kifejező formulánkat!

$$\begin{aligned}\neg\exists y\forall x((y < x) \supset \neg(x \text{ prím})) \\ \forall y\neg\forall x((y < x) \supset \neg(x \text{ prím})) \\ \forall y\exists x\neg((y < x) \supset \neg(x \text{ prím})) \\ \forall y\exists x((y < x) \wedge \neg\neg(x \text{ prím})) \\ \forall y\exists x((y < x) \wedge (x \text{ prím}))\end{aligned}$$

az eredmény éppen a végtelenséges formulánk volt!  
Ismételjük meg ezt a számítást a másik formulával!

$$\neg\exists y\forall x((x \text{ prím}) \supset (x < y))$$