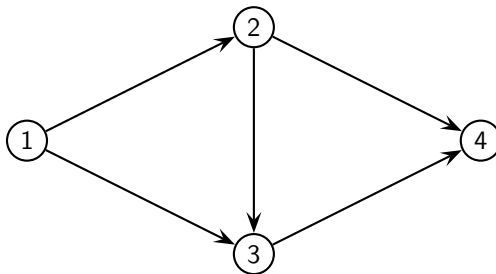


Flusso di costo minimo

Un grafo $G = (N, A)$ è una coppia di insiemi: N , di cardinalità finita, i nodi, ed A , sottoinsieme del prodotto cartesiano $N \times N$, gli archi.

$$N = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{e} \quad A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

è rappresentato nella seguente figura:



Flusso di costo minimo

Supponiamo che su ogni arco (i, j) sia definito un costo c_{ij} per unità di flusso, una capacità inferiore ℓ_{ij} ed una superiore u_{ij} del flusso.

Sui nodi siano assegnati dei bilanci b_i con la convenzione che $b_i > 0$ significa che il nodo i è un pozzo (destinazione) e che $b_i < 0$ significa che il nodo i è una sorgente (origine).

Introduciamo le variabili x_{ij} che rappresentano il flusso sull'arco (i, j) .

Si vuole determinare il flusso di costo minimo che rispetti i bilanci dei nodi e le capacità degli archi.

Flusso di costo minimo

Il problema si può formulare nel seguente modo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} & \\ \sum_{(p,i) \in A} x_{pi} - \sum_{(i,q) \in A} x_{iq} = b_i & \text{per ogni nodo } i \in N \quad (\text{vincoli di bilancio}) \\ \ell_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} & \text{per ogni arco } (i,j) \in A \quad (\text{vincoli di capacità}) \end{array} \right.$$

oppure:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min c^T x \\ E x = b \\ \ell \leq x \leq u \end{array} \right.$$

dove nella matrice E , di dimensioni $|N| \times |A|$, detta matrice di incidenza del grafo, l'elemento di riga $p \in N$ e colonna $(i,j) \in A$ è:

$$E_{p,(i,j)} = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & \text{se } p = i, \\ 1 & \text{se } p = j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{array} \right.$$

Flusso di costo minimo

Supporremo che il vettore x dei flussi sia in ordine lessicografico:

$$\begin{array}{ll} x_{i,j} & \text{viene prima di } x_{k,h} \\ \text{se } i < k & \text{oppure se } i = k \text{ e } j < h. \end{array}$$

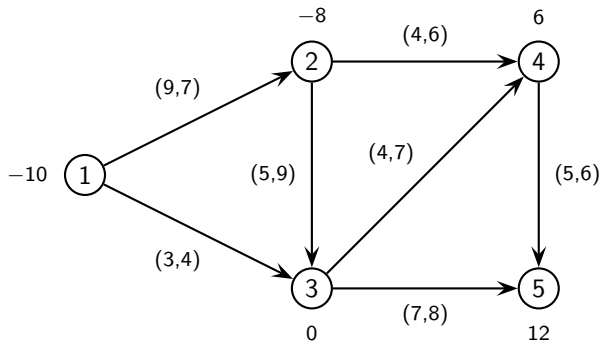
Possiamo supporre che $\ell_{ij} = 0$ (eventualmente cambio di variabile $x' = x - \ell$).
Supponiamo che $\sum_{i \in N} b_i = 0$.

Infatti, se $\sum_{i \in N} b_i \neq 0$, si aggiunge un nodo $n+1$ con bilancio $b_{n+1} = -\sum_{i \in N} b_i$.

Se $b_{n+1} < 0$, si aggiungono archi (di costo nullo e capacità $+\infty$) che vanno dal nodo fittizio verso ogni pozzo, mentre se $b_{n+1} > 0$ si aggiungono archi (sempre di costo nullo e capacità $+\infty$) che vanno dalle sorgenti al nodo introdotto.

Flusso di costo minimo

Consideriamo il problema di flusso di costo minimo:



Flusso di costo minimo

Il problema può essere formulato come:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad 9x_{12} + 3x_{13} + 5x_{23} + 4x_{24} + 4x_{34} + 7x_{35} + 5x_{45} \\ -x_{12} - x_{13} = -10 \\ x_{12} - x_{23} - x_{24} = -8 \\ x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} = 0 \\ x_{24} + x_{34} - x_{45} = 6 \\ x_{35} + x_{45} = 12 \\ 0 \leq x_{12} \leq 7 \\ 0 \leq x_{13} \leq 4 \\ 0 \leq x_{23} \leq 9 \\ 0 \leq x_{24} \leq 6 \\ 0 \leq x_{34} \leq 7 \\ 0 \leq x_{35} \leq 8 \\ 0 \leq x_{45} \leq 6 \end{array} \right.$$

Flusso di costo minimo

oppure come

$$\begin{cases} \min c^T x \\ E x = b \\ 0 \leq x \leq u \end{cases}$$

dove il vettore dei flussi, in ordine lessicografico, è

$$x = (x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{35}, x_{45})^T,$$

il vettore dei costi è

$$c = (9, 3, 5, 4, 4, 7, 5)^T,$$

il vettore dei bilanci è

$$b = (-10, -8, 0, 6, 12)^T,$$

il vettore delle capacità è

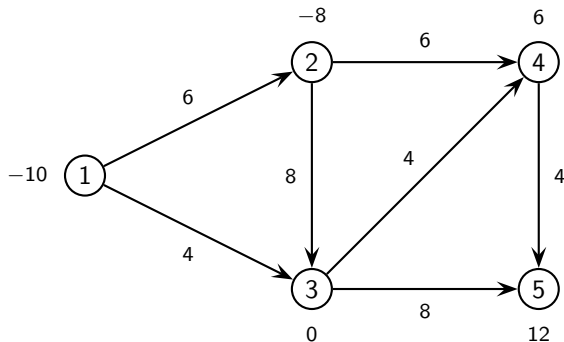
$$u = (7, 4, 9, 6, 7, 8, 6)^T,$$

la matrice di incidenza è

| | (1,2) | (1,3) | (2,3) | (2,4) | (3,4) | (3,5) | (4,5) |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $E =$ | 1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 2 | 1 | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 |
| | 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | -1 | -1 |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Flusso di costo minimo

Il flusso ottimo è $x = (6, 4, 8, 6, 4, 8, 4)^T$, ossia:



Cammini minimi

Trovare su un grafo un cammino di costo minimo da un nodo di partenza ad un nodo di arrivo.

Diamo la definizione di cammino.

Un cammino dal nodo n_1 al nodo n_{p+1} è un insieme di archi a_1, \dots, a_p tale che per ogni $i = 1, \dots, p$ si ha che $a_i = (n_i, n_{i+1})$ oppure $a_i = (n_{i+1}, n_i)$ ed inoltre che gli archi siano tutti diversi tra loro.

Se vale sempre la prima condizione, cioè gli archi coinvolti vanno dal nodo n_i al nodo n_{i+1} , il cammino si dice orientato.

Un cammino da n_1 a n_{p+1} si dice un ciclo se $n_1 = n_{p+1}$.

Consideriamo il problema di trovare (se esistono) i cammini orientati di costo minimo da un nodo r verso tutti gli altri nodi.

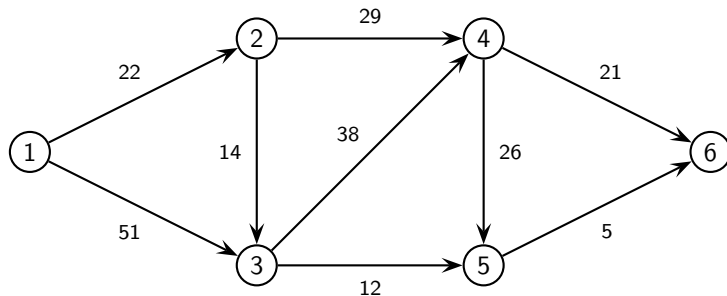
Tale problema si può formulare come un problema di flusso di costo minimo ponendo le capacità superiori $u_{ij} = +\infty$ ed i bilanci dei nodi tutti uguali ad 1 tranne quello del nodo r .

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \neq r, \\ -n + 1 & \text{se } i = r. \end{cases}$$

Ciò equivale a supporre che $n - 1$ unità di flusso si debbano dirigere dal nodo r ognuna verso un nodo diverso dagli altri (bilanci 1 ai nodi) al costo minimo.

Cammini minimi

Supponiamo di voler cercare i cammini minimi dal nodo 1:



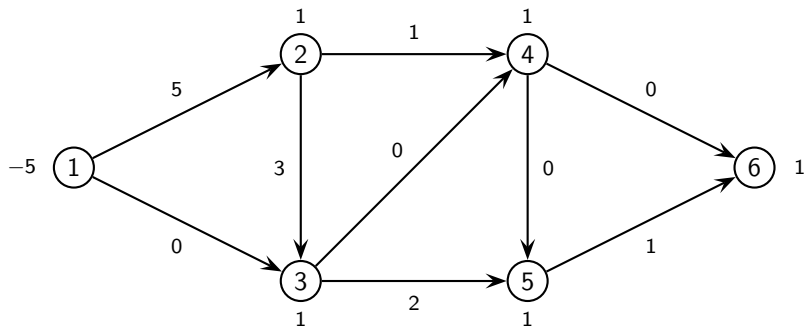
Cammini minimi

Come detto tale problema può essere formulato come un problema flusso di costo minimo, con il bilancio del nodo 1 uguale a -5 ed i bilanci degli altri nodi uguali a 1:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad 22 x_{12} + 51 x_{13} + 14 x_{23} + 29 x_{24} + 38 x_{34} + 12 x_{35} + 26 x_{45} + 21 x_{46} + 5 x_{56} \\ -x_{12} - x_{13} = -5 \\ x_{12} - x_{23} - x_{24} = 1 \\ x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} = 1 \\ x_{24} + x_{34} - x_{45} - x_{46} = 1 \\ x_{35} + x_{45} - x_{56} = 1 \\ x_{46} + x_{56} = 1 \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

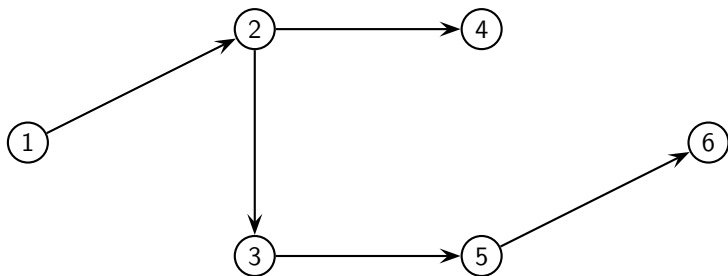
Cammini minimi

Il flusso ottimo risulta uguale a $x = (5, 0, 3, 1, 0, 2, 0, 0, 1)$:



Cammini minimi

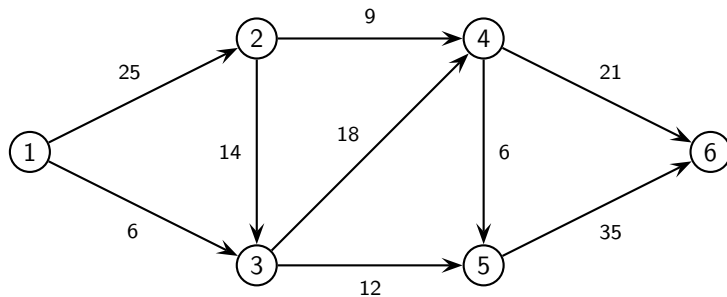
Osserviamo che gli archi con flusso positivo formano l'albero dei cammini minimi:



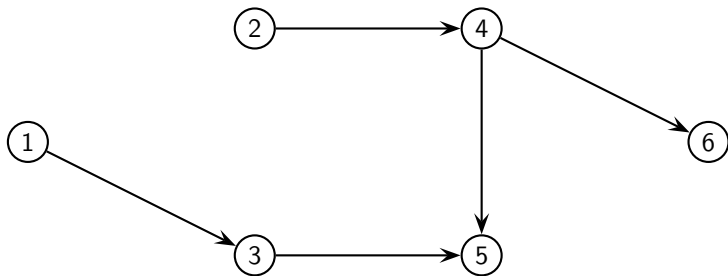
ad esempio, il cammino minimo da 1 a 6 è $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,5)$ e $(5,6)$.

Cammini minimi

Consideriamo il seguente grafo:

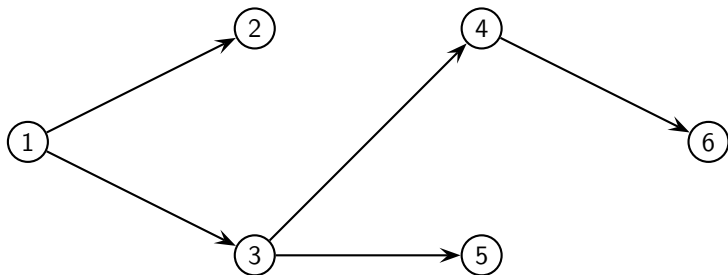


L'albero di copertura di costo minimo è formato dagli archi indicati in figura:



Cammini minimi

Tale albero non coincide con l'albero dei cammini minimi di costo minimo di radice 1 che é:



Flusso massimo

Supponiamo di avere il problema di spedire contemporaneamente, da un nodo origine s ad un nodo destinazione t il massimo flusso possibile compatibilmente con le capacità degli archi.

Supponiamo che il grafo sia orientato, con capacità intere. Se non ci fosse alcun cammino orientato da s a t il problema avrebbe $x = 0$ come soluzione ottima.

Il problema di flusso massimo può essere usato per determinare un flusso ammissibile in un problema di flusso di costo minimo.

Si aggiunge un nodo s collegato con i nodi sorgenti j (cioè $b_j < 0$) con archi (s, j) di capacità $-b_j$ ed un nodo t collegato con i pozzi i (cioè $b_i > 0$) con archi (i, t) di capacità b_i .

Poi si risolve il problema di flusso massimo da s a t . Se il flusso massimo satura tutti gli archi aggiunti, allora tale flusso è una soluzione ammissibile per il problema di flusso di costo minimo, altrimenti non esistono flussi ammissibili per il problema di flusso di costo minimo.

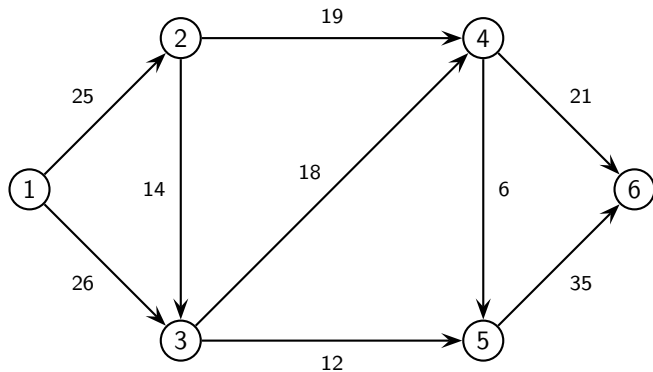
Il problema di flusso massimo può essere formulato così:

$$\begin{cases} \max v \\ \sum x = b \\ 0 \leq x \leq u \end{cases} \quad \text{dove} \quad b_i = \begin{cases} -v & \text{se } i = s \\ 0 & \text{se } i \neq s, t \\ v & \text{se } i = t \end{cases}$$

dove la variabile v rappresenta il flusso che si spedisce da t ad s .

Flusso massimo

Flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6:



Flusso massimo

Il problema può essere formulato nel modo seguente:

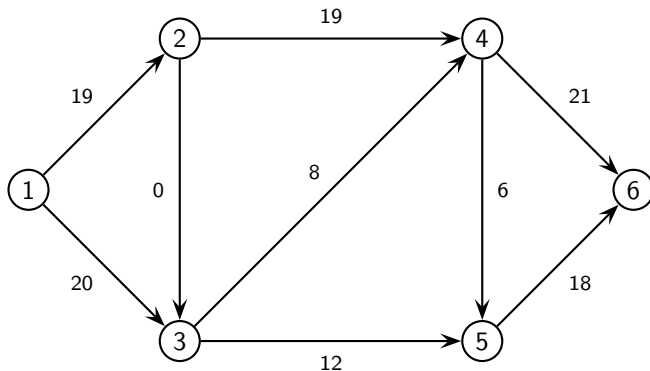
$$\left\{ \begin{array}{l} \max v \\ -x_{12} - x_{13} = -v \\ x_{12} - x_{23} - x_{24} = 0 \\ x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{35} = 0 \\ x_{24} + x_{34} - x_{45} - x_{46} = 0 \\ x_{35} + x_{45} - x_{56} = 0 \\ x_{46} + x_{56} = v \\ 0 \leq x_{12} \leq 25 \\ 0 \leq x_{13} \leq 26 \\ 0 \leq x_{23} \leq 14 \\ 0 \leq x_{24} \leq 19 \\ 0 \leq x_{34} \leq 18 \\ 0 \leq x_{35} \leq 12 \\ 0 \leq x_{45} \leq 6 \\ 0 \leq x_{46} \leq 21 \\ 0 \leq x_{56} \leq 35 \end{array} \right.$$

Flusso massimo

La soluzione ottima è $v = 39$ ed il vettore dei flussi è

$$x = (19, 20, 0, 19, 8, 12, 6, 21, 18),$$

ossia:



Addestramento di costo minimo

Supponiamo che un'azienda debba addestrare i suoi m impiegati a compiere un certo numero n di mansioni, che ogni mansione j debba essere imparata, per essere poi svolta, da un numero b_j di impiegati, che ogni impiegato debba imparare e svolgere una ed una sola mansione, e che il costo sopportato dall'azienda per addestrare l'impiegato i a svolgere la mansione j sia dato e pari a c_{ij} .

Si voglia determinare il piano di addestramento di costo minimo.

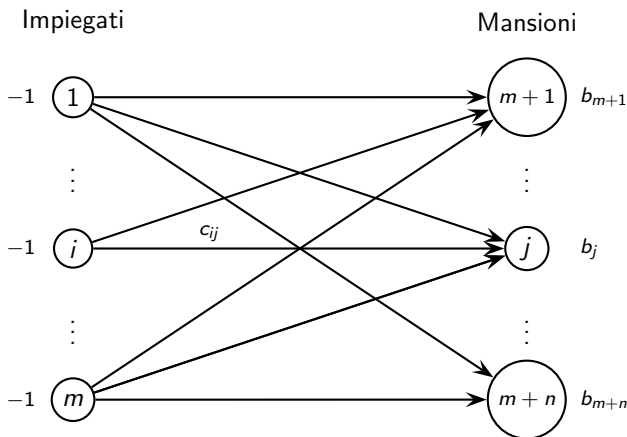
$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'impiegato } i \text{ è addestrato a svolgere la mansione } j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il problema può essere formulato come:

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & \text{per ogni mansione } j = 1, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 & \text{per ogni impiegato } i = 1, \dots, m \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Addestramento di costo minimo

Il problema può essere trasformato in un problema di flusso di costo minimo su un grafo bipartito ottenuto orientando gli archi dagli impiegati $1, \dots, m$ verso le mansioni $m+1, \dots, m+n$ e ponendo bilanci uguali a -1 sui nodi corrispondenti agli impiegati e bilancio uguale a b_j per ogni mansione j .



Addestramento di costo minimo

Supponiamo di dover addestrare 9 impiegati a compiere 3 mansioni che devono essere svolte, rispettivamente, da 4, 3 e 2 impiegati. I costi di addestramento sono:

| impiegati | mansioni | | |
|-----------|----------|----|----|
| | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 27 | 35 | 37 |
| 2 | 47 | 24 | 13 |
| 3 | 37 | 33 | 11 |
| 4 | 18 | 28 | 34 |
| 5 | 43 | 11 | 34 |
| 6 | 35 | 11 | 10 |
| 7 | 15 | 22 | 10 |
| 8 | 18 | 10 | 17 |
| 9 | 34 | 25 | 33 |

Addestramento di costo minimo

La formulazione del problema è la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad 27 x_{11} + 35 x_{12} + 37 x_{13} + 47 x_{21} + 24 x_{22} + 13 x_{23} + 37 x_{31} + 33 x_{32} + 11 x_{33} \\ \quad + 18 x_{41} + 28 x_{42} + 34 x_{43} + 43 x_{51} + 11 x_{52} + 34 x_{53} + 35 x_{61} + 11 x_{62} + 10 x_{63} \\ \quad + 15 x_{71} + 22 x_{72} + 10 x_{73} + 18 x_{81} + 10 x_{82} + 17 x_{83} + 34 x_{91} + 25 x_{92} + 33 x_{93} \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + x_{71} + x_{81} + x_{91} = 4 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} + x_{72} + x_{82} + x_{92} = 3 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} + x_{73} + x_{83} + x_{93} = 2 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} = 1 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} = 1 \\ x_{61} + x_{62} + x_{63} = 1 \\ x_{71} + x_{72} + x_{73} = 1 \\ x_{81} + x_{82} + x_{83} = 1 \\ x_{91} + x_{92} + x_{93} = 1 \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \end{array} \right.$$

Accoppiamento di cardinalità massima

Supponiamo di avere m lavoratori e n lavori da svolgere.

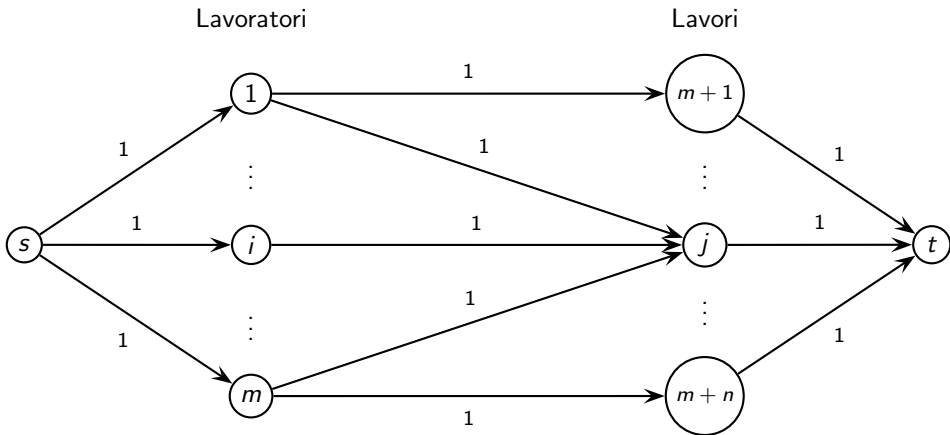
Supponiamo che ogni lavoratore sappia svolgere alcuni dei lavori e che ad ogni lavoratore si possa assegnare al massimo un lavoro.

Dobbiamo assegnare i lavori in modo da eseguire il massimo numero di lavori.

Tale problema può essere trasformato in un problema di flusso massimo in un grafo che contiene i nodi $1, \dots, m$ che rappresentano i lavoratori, i nodi $m + 1, \dots, m + n$ che rappresentano i lavori e due nodi fittizi s e t (origine e destinazione).

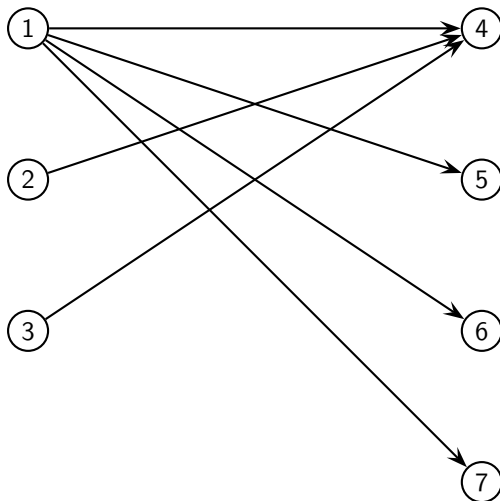
Gli archi collegano ogni lavoratore a tutti i lavori che sa svolgere, il nodo s a tutti i lavoratori e tutti i lavori al nodo t , ponendo tutti gli archi con capacità superiore uguale a 1.

Accoppiamento di cardinalità massima



Accoppiamento di cardinalità massima

Supponiamo di avere 3 lavoratori e 4 lavori. In figura le frecce rappresentano la capacità del lavoratore i di saper svolgere il lavoro j :



Accoppiamento di cardinalità massima

Il problema può essere formulato come:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \quad x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{24} + x_{34} \\ x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} \leq 1 \\ x_{24} \leq 1 \\ x_{34} \leq 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq 1 \\ x_{15} \leq 1 \\ x_{16} \leq 1 \\ x_{17} \leq 1 \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \end{array} \right.$$

Si osserva che l'accoppiamento ottimo ha cardinalità 2.

Analizziamo i problemi di flusso di costo minimo.

$$\begin{cases} \min c^T x \\ E x = b \\ 0 \leq x \leq u \end{cases}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : E x = b, \quad 0 \leq x \leq u\}$$

viene chiamato poliedro dei flussi.

Un cammino dal nodo n_1 al nodo n_{p+1} è un insieme di archi a_1, \dots, a_p tale che per ogni $i = 1, \dots, p$ si ha che $a_i = (n_i, n_{i+1})$ oppure $a_i = (n_{i+1}, n_i)$ ed inoltre che gli archi siano tutti diversi tra loro.

Se gli archi coinvolti vanno dal nodo n_i al nodo n_{i+1} , il cammino si dice orientato.

Un cammino da n_1 a n_{p+1} si dice un ciclo se $n_1 = n_{p+1}$.

Un grafo si dice connesso se esiste un cammino che connette ogni coppia di nodi.

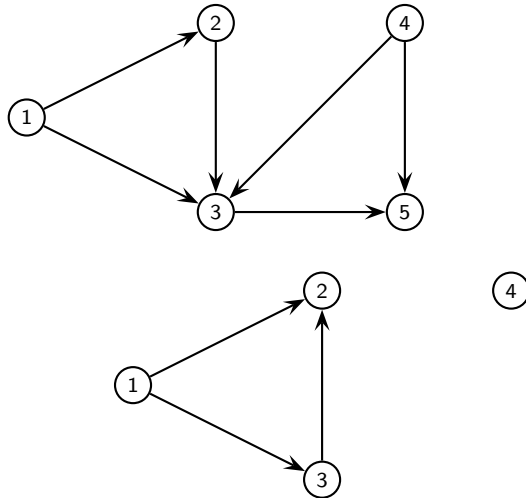
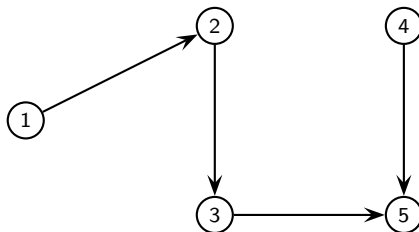


Figure : sopra: un grafo connesso; sotto: un grafo non connesso.

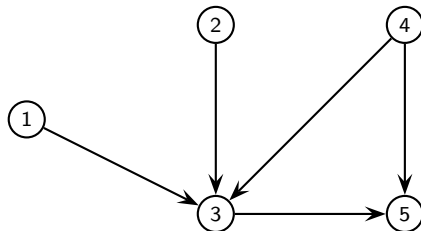
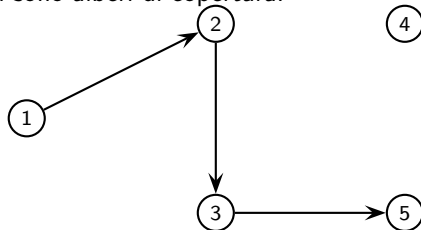
Una foglia di T è un nodo sul quale incide un solo arco di T .

L'insieme $\{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 5)\}$ è un albero di copertura le cui foglie sono i nodi 1 e 4:



Preliminari

Due strutture che non sono alberi di copertura:



Un grafo é connesso se e solo se contiene almeno un albero di copertura.

In un grafo connesso con n nodi, ogni albero di copertura contiene $n - 1$ archi ed almeno 2 foglie.

Supponiamo di trattare solo grafi connessi.

La somma delle righe della matrice E è uguale al vettore nullo.

Quindi le n righe di E non sono linearmente indipendenti e di conseguenza E ha rango al più uguale a $n - 1$.

Abbiamo supposto che il grafo sia bilanciato quindi nel sistema $E x = b$ si può cancellare un'equazione senza cambiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

Per indicare la matrice di incidenza useremo per comodità la lettera E anche se abbiamo cancellato la riga relativa al nodo 1.

Problemi di flusso di costo minimo

Teorema

Se T è un albero di copertura, allora la sottomatrice quadrata E_T , di dimensione $(n - 1)$, ottenuta scegliendo le colonne relative agli archi di T , è invertibile e $\det(E_T) = \pm 1$.

Mostriamo che la matrice E_T è triangolare inferiore con la diagonale uguale a 1 oppure a -1 .

Scegliamo una foglia z di T e indichiamo con a l'unico arco di T che incide su z . Permutando le righe e le colonne di E_T in modo che la prima riga corrisponda al nodo z e la prima colonna all'arco a , otteniamo che

$$E_T = \left(\begin{array}{c|ccc} \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & \hline & E_S \end{array} \right)$$

dove E_S è la matrice di incidenza relativa all'albero di copertura $S = T \setminus \{a\}$ nel sottografo con $n - 1$ nodi ottenuto da (N, A) cancellando il nodo z .

Ricorsivamente la matrice E_S è triangolare inferiore con 1 o -1 sulla diagonale, quindi l'intera matrice E_T è triangolare inferiore con 1 o -1 sulla diagonale e quindi è invertibile con determinante uguale a ± 1 .

Problemi di flusso di costo minimo

Per scrivere quindi in forma triangolare inferiore la matrice di incidenza E_T di un albero di copertura T bisogna effettuare un'opportuna visita di T , detta *visita per foglie*.

Partiamo scegliendo una foglia z (diversa dal nodo 1) di T e consideriamo l'unico arco a di T che incide sul nodo z .

Costruiamo la matrice E_T mettendo il nodo z come prima riga e l'arco a come prima colonna.

Cancelliamo dal grafo (N, T) il nodo z e l'arco a .

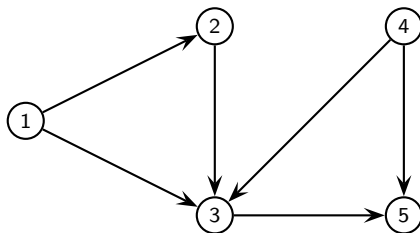
Nel grafo rimasto scegliamo ancora una foglia w (diversa dal nodo 1) e consideriamo l'unico arco a' che incide sul nodo w .

Poniamo il nodo w come seconda riga di E_T e l'arco a' come seconda colonna.

Iterando questo procedimento si ottiene la matrice E_T in forma triangolare inferiore.

Problemi di flusso di costo minimo

Consideriamo il grafo connesso:



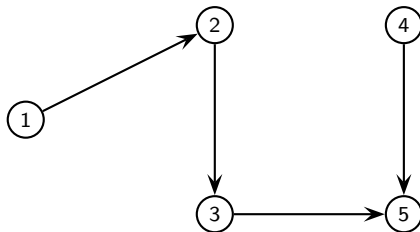
La sua matrice di incidenza, senza la riga 1, è la seguente:

| | (1,2) | (1,3) | (2,3) | (3,5) | (4,3) | (4,5) |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $E =$ 2 | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | -1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Problemi di flusso di costo minimo

$$T = \{(1,2), (2,3), (3,5), (4,5)\}$$

forma un albero di copertura, infatti il grafo



è connesso e non contiene cicli.

La matrice E_T è invertibile; scriviamola in forma triangolare con una visita per foglie.

Problemi di flusso di costo minimo

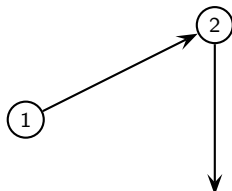
Partiamo con una foglia di T : l'unica foglia diversa dal nodo 1 è il nodo 4.

Scegliamo l'unico arco di T che incide sul nodo 4, cioè l'arco $(4,5)$.

Costruiamo E_T mettendo il nodo 4 come prima riga e l'arco $(4,5)$ come prima colonna:

$$E_T = \begin{array}{c|cccc} & (4,5) & & & & \\ \hline 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Cancellando dal grafo (N, T) il nodo 4 e l'arco $(4,5)$ otteniamo il sottografo



Problemi di flusso di costo minimo

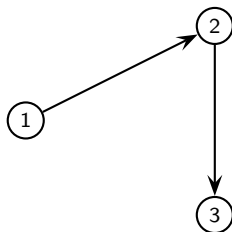
Scegliamo una foglia diversa dal nodo 1, cioè il nodo 5, e troviamo l'unico arco (nel sottografo) che incide sul nodo 5, cioè l'arco (3,5).

Mettiamo il nodo 5 come seconda riga di E_T e l'arco (3,5) come seconda colonna ottenendo:

| | | (4,5) | (3,5) | | | |
|---------|---|-------|-------|---|---|--|
| $E_T =$ | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 | |
| | 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | |

Problemi di flusso di costo minimo

Cancellando il nodo 5 e l'arco $(3,5)$ otteniamo il sottografo



Scegliamo la foglia 3 e l'arco $(2,3)$ che saranno terza riga e terza colonna di E_T :

| | | (4,5) | (3,5) | (2,3) | |
|---------|---|-------|-------|-------|---|
| $E_T =$ | 4 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| | 5 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| | 3 | 0 | -1 | 1 | 0 |

Problemi di flusso di costo minimo

Rimangono il nodo 2 e l'arco (1,2) che sono quarta riga e quarta colonna di E_T :

$$E_T = \begin{array}{c|cccc} & (4,5) & (3,5) & (2,3) & (1,2) \\ \hline 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

Abbiamo scritto la matrice E_T in forma triangolare inferiore con elementi diagonali ± 1 , quindi E_T è invertibile con determinante uguale a -1 .

Vale anche il viceversa.

Se E_T è una sottomatrice invertibile di E , di dimensione $(n - 1)$, allora T è un albero di copertura.

Supponiamo che T non sia un albero di copertura. Allora T contiene un ciclo.

Moltiplichiamo per 1 o -1 le colonne di E_T in modo che il ciclo diventi orientato (il determinante di E_T cambia eventualmente solo il segno).

La somma delle colonne del ciclo è uguale al vettore nullo e quindi il determinante di E_T è uguale 0, ma questo contraddice l'ipotesi che E_T sia invertibile.

Flussi di base

Studiamo le soluzioni di base del problema di flusso di costo minimo.

Riscriviamo il problema in forma duale aggiungendo le variabili di scarto w :

$$\begin{cases} \min c^T x \\ E x = b \\ x + w = u \\ x, w \geq 0 \end{cases}$$

ossia in forma matriciale come

$$\begin{cases} \min (x, w)^T \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \\ (x, w)^T \begin{pmatrix} E^T & I \\ 0 & I \end{pmatrix} = (b, u)^T \\ (x, w) \geq 0 \end{cases}$$

Flussi di base

La matrice

$$M = \left(\begin{array}{c|c} E^T & I \\ \hline 0 & I \end{array} \right)$$

ha dimensione $(m + m) \times (n - 1 + m)$ e ha rango $n - 1 + m$.

Vediamo come trovare $n - 1 + m$ righe di M linearmente indipendenti.

Consideriamo una tripartizione (T, L, U) dell'insieme degli archi dove T è un albero di copertura.

Indichiamo con T' , L' ed U' le righe di M corrispondenti alle variabili di scarto w .

Teorema

L'insieme

$$B = T \cup U \cup T' \cup L'$$

è una base ed il determinante della corrispondente matrice è 1 oppure -1 .

Flussi di base

Indicizziamo le righe di M come T, L, U, T', L', U' e riscriviamo M a blocchi:

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} E_T^T & I_T & 0 & 0 \\ E_L^T & 0 & I_L & 0 \\ E_U^T & 0 & 0 & I_U \\ \hline 0 & I_{T'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{L'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{U'} \end{array} \right)$$

Consideriamo la sottomatrice

$$M_B = \left(\begin{array}{cccc} E_T^T & I_T & 0 & 0 \\ E_U^T & 0 & 0 & I_U \\ 0 & I_{T'} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{L'} & 0 \end{array} \right)$$

Calcoliamo il determinante di M_B :

$$\det(M_B) = \det \left(\begin{array}{ccc} E_T^T & I_T & 0 \\ E_U^T & 0 & I_U \\ 0 & I_{T'} & 0 \end{array} \right) = \det \left(\begin{array}{cc} E_T^T & 0 \\ E_U^T & I_U \end{array} \right) = \det(E_T^T).$$

Poiché T è un albero di copertura sappiamo che E_T ha determinante ± 1 e quindi M_B è invertibile.

Il determinante della matrice di base, anche in tal caso, è ± 1 .

Se i vettori u e b sono a componenti intere, allora le soluzioni di base del poliedro dei flussi sono a componenti intere.

Si può sempre togliere nei problemi che hanno come modello un problema di flusso di costo minimo il vincolo $x \in \mathbb{Z}^n$ ed ottenere un problema equivalente di PL.

Flussi di base

Calcoliamo ora la soluzione di base relativa alla base $B = T \cup U \cup T' \cup L'$.

Gli indici in L e in U' non sono in base quindi si ha $\bar{x}_L = 0$ e $\bar{w}_{U'} = 0$ cioè $\bar{x}_U = u_U$.

Calcoliamo \bar{x}_B .

$$b = E \bar{x} = \begin{pmatrix} E_T & E_L & E_U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_T \\ \bar{x}_L \\ \bar{x}_U \end{pmatrix} = E_T \bar{x}_T + E_L \bar{x}_L + E_U \bar{x}_U = E_T \bar{x}_T + E_U u_U,$$

si ha

$$\bar{x}_T = E_T^{-1} (b - E_U u_U).$$

Quindi la soluzione di base (\bar{x}, \bar{w}) è

$$\begin{array}{lll} \bar{x}_T = E_T^{-1} (b - E_U u_U) & \bar{x}_L = 0 & \bar{x}_U = u_U \\ \bar{w}_T = u_T - E_T^{-1} (b - E_U u_U) & \bar{w}_L = u_L & \bar{w}_U = 0 \end{array}$$

Tale flusso di base è ammissibile se e solo se

$$0 \leq \bar{x}_{ij} \leq u_{ij} \quad \text{per ogni } (i, j) \in T,$$

Tale soluzione è degenere se e solo se almeno una componente di base è nulla.

Poiché non è possibile che una componente di \bar{x}_U o di \bar{w}_L sia nulla il flusso è degenere quando esiste un arco $(i, j) \in T$ tale che $\bar{x}_{ij} = 0$ oppure $\bar{x}_{ij} = u_{ij}$.

Il primo caso corrisponde ad una componente nulla di x_T , il secondo ad una componente nulla di w_T .

Potenziali di base

Il duale del problema del flusso di costo minimo, detto problema dei potenziali, è dato da:

$$\begin{cases} \max (b, u)^T \begin{pmatrix} \pi \\ \mu \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} E^T & I \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ \mu \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

che equivale a:

$$\begin{cases} \max \pi^T b + \mu^T u \\ \pi^T E + \mu^T \leq c^T \\ \mu \leq 0 \end{cases}$$

Potenziali di base

Calcoliamo la soluzione di base del problema dei potenziali associata alla base $B = T \cup U \cup T' \cup L'$.

$$\pi^T E_T + \mu_T^T = c_T^T$$

$$\pi^T E_U + \mu_U^T = c_U^T$$

$$\mu_T = 0$$

$$\mu_L = 0$$

quindi dalla prima equazione ricaviamo $\pi^T E_T = c_T^T$.

Si pone $\pi_1 = 0$ in quanto il sistema ha $n - 1$ equazioni e n incognite.

Si ha $\pi^T = c_T^T E_T^{-1}$.

Dalla seconda equazione otteniamo $\mu_U^T = c_U^T - c_T^T E_T^{-1} E_U$, quindi:

$$\bar{\pi}^T = c_T^T E_T^{-1}$$

$$\bar{\mu}_T = 0$$

$$\bar{\mu}_L = 0$$

$$\bar{\mu}_U^T = c_U^T - \bar{\pi}^T E_U$$

Potenziali di base

Tale potenziale di base è ammissibile se sono soddisfatti i vincoli non di base:

$$\begin{aligned}\bar{\pi}^T E_L + \bar{\mu}_L^T &= \bar{\pi}^T E_L \leq c_L^T \\ \bar{\mu}_U &= c_U^T - \bar{\pi}^T E_U \leq 0\end{aligned}$$

ossia

$$\begin{cases} c_{ij} + \bar{\pi}_i - \bar{\pi}_j \geq 0 & \text{per ogni } (i,j) \in L, \\ c_{ij} + \bar{\pi}_i - \bar{\pi}_j \leq 0 & \text{per ogni } (i,j) \in U. \end{cases}$$

Definiamo il costo ridotto dell'arco (i,j) relativo al potenziale $\bar{\pi}$:

$$c_{ij}^{\bar{\pi}} = c_{ij} + \bar{\pi}_i - \bar{\pi}_j \quad (1)$$

Il potenziale di base $\bar{\pi}$ è ammissibile se e solo se i costi ridotti degli archi in L sono non negativi ed i costi ridotti degli archi in U sono non positivi.

Osserviamo inoltre che, dall'equazione che definisce $\bar{\pi}$, si deduce che i costi ridotti degli archi in T sono uguali a 0.

Il potenziale di base $\bar{\pi}$ è degenere quando un arco di L oppure un arco di U ha costo ridotto nullo.

Flussi e potenziali di base

Riassumiamo nella tabella i possibili casi per i flussi ed i potenziali di base:

| | flusso di base $\bar{x}_T = E_T^{-1}(b - E_U u_U) \quad \bar{x}_L = 0 \quad \bar{x}_U = u_U$ | potenziale di base $\bar{\pi}^T = c_T^T E_T^{-1}$ |
|----|---|--|
| A | $\forall (i,j) \in T$ si ha $0 \leq \bar{x}_{ij} \leq u_{ij}$ | $\forall (i,j) \in L$ si ha $c_{ij}^{\bar{\pi}} \geq 0$ $\forall (i,j) \in U$ si ha $c_{ij}^{\bar{\pi}} \leq 0$ |
| NA | $\exists (i,j) \in T$ tale che $\bar{x}_{ij} < 0$ oppure $\exists (i,j) \in T$ tale che $\bar{x}_{ij} > u_{ij}$ | $\exists (i,j) \in L$ tale che $c_{ij}^{\bar{\pi}} < 0$ oppure $\exists (i,j) \in U$ tale che $c_{ij}^{\bar{\pi}} > 0$ |
| D | $\exists (i,j) \in T$ tale che $\bar{x}_{ij} = 0$ oppure $\exists (i,j) \in T$ tale che $\bar{x}_{ij} = u_{ij}$ | $\exists (i,j) \in L$ tale che $c_{ij}^{\bar{\pi}} = 0$ oppure $\exists (i,j) \in U$ tale che $c_{ij}^{\bar{\pi}} = 0$ |
| ND | $\forall (i,j) \in T$ si ha $\bar{x}_{ij} \neq 0$ e $\bar{x}_{ij} \neq u_{ij}$ | $\forall (i,j) \in L$ si ha $c_{ij}^{\bar{\pi}} \neq 0$ $\forall (i,j) \in U$ si ha $c_{ij}^{\bar{\pi}} \neq 0$ |

Flussi e potenziali di base

Applicando il test di ottimalità alla coppia di problemi flusso/potenziali otteniamo la seguente condizione sufficiente di ottimalità per flussi di base.

Teorema di Bellman

Supponiamo che una tripartizione (T, L, U) generi un flusso di base \bar{x} ammissibile.

Se il potenziale di base $\bar{\pi}$ è tale che

$$\begin{cases} c_{ij}^{\bar{\pi}} \geq 0 & \text{per ogni } (i, j) \in L, \\ c_{ij}^{\bar{\pi}} \leq 0 & \text{per ogni } (i, j) \in U, \end{cases} \quad (\text{condizioni di Bellman})$$

allora \bar{x} è ottimo.

Le condizioni sui costi ridotti sono equivalenti all'ammissibilità della soluzione complementare $(\bar{\pi}, \bar{\mu})$.

Flussi e potenziali di base

Poiché le condizioni di Bellman rappresentano l'ammissibilità duale, la cosa importante è la differenza tra i valori delle componenti di π (differenza di potenziale).

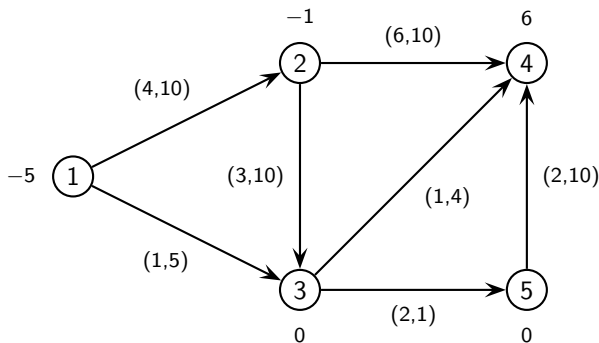
Se il flusso di base \bar{x} è non degenere le condizioni di Bellman diventano anche necessarie per l'ottimalità.

Supponiamo che una tripartizione (T, L, U) generi un flusso di base \bar{x} ammissibile e non degenere. Sia $\bar{\pi}$ il potenziale di base associato. Allora si ha che:

$$\bar{x} \text{ è ottimo} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} c_{ij}^{\bar{\pi}} \geq 0 & \text{per ogni } (i,j) \in L \\ c_{ij}^{\bar{\pi}} \leq 0 & \text{per ogni } (i,j) \in U \end{cases}$$

Esempio

Consideriamo il seguente problema di flusso di costo minimo:



Sia data la tripartizione

$$T = \{(1,2), (1,3), (2,4), (5,4)\} \quad L = \{(2,3), (3,4)\} \quad U = \{(3,5)\},$$

calcoliamo il flusso ed il potenziale di base.

Esempio

Gli archi di L sono vuoti e l'arco di U saturo, quindi abbiamo

$$\bar{x}_{23} = 0, \quad \bar{x}_{34} = 0, \quad \bar{x}_{35} = u_{35} = 1.$$

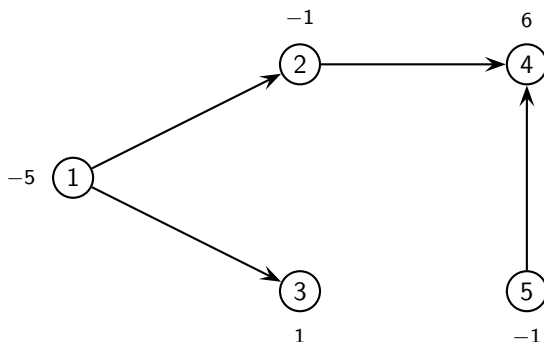
Fissato il flusso sull'arco $(3, 5)$, dobbiamo aggiornare i bilanci dei nodi 3 e 5:

$$b_3 = b_3 + \bar{x}_{35} = 0 + 1 = 1, \quad b_5 = b_5 - \bar{x}_{35} = 0 - 1 = -1.$$

Ora possiamo calcolare i flussi sugli archi di T rispettando i bilanci aggiornati dei nodi.0

Esempio

L'albero T è il seguente:



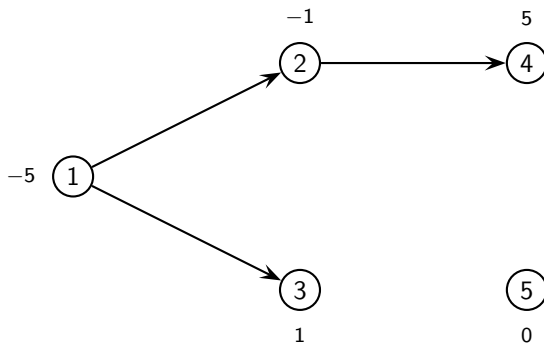
Partiamo da una foglia di T , ad esempio il nodo 5 che ha bilancio -1 .

L'arco $(5,4)$ dovrà avere perciò flusso uguale a 1, quindi aggiorniamo anche il bilancio dei nodi 4 e 5:

$$\bar{x}_{5,4} = 1, \quad b_4 = 6 - 1 = 5, \quad b_5 = -1 + 1 = 0.$$

Esempio

Abbiamo così bilanciato il nodo 5 e rimane da trovare il flusso sul sottoalbero:

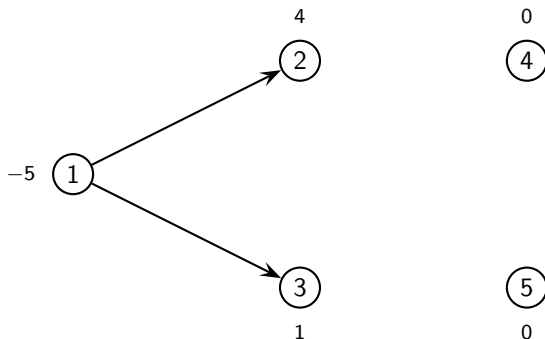


Esempio

Applichiamo la procedura a questo sottoalbero partendo da una foglia, ad esempio il nodo 4 che ha bilancio 5 e su cui incide solo l'arco (2,4) che deve quindi avere flusso uguale a 5:

$$\bar{x}_{24} = 5, \quad b_4 = 5 - 5 = 0, \quad b_2 = -1 + 5 = 4.$$

Rimangono da determinare solamente i flussi sugli archi (1,2) e (1,3):

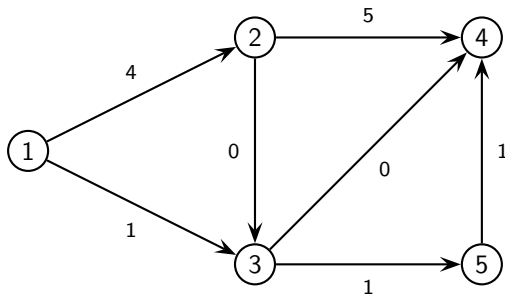


Esempio

Poiché il nodo 2 ha bilancio 4 ed il nodo 3 ha bilancio 1 si ha che

$$\bar{x}_{12} = 4, \quad \bar{x}_{13} = 1.$$

Poiché tutti i flussi sugli archi di T soddisfano i vincoli di capacità, il flusso di base



è ammissibile.

E' non degenera perché nessun arco di T è vuoto o saturo.

Esempio

Calcoliamo ora il potenziale di base.

Fissiamo $\bar{\pi}_1 = 0$, e calcoliamo il potenziale degli altri nodi passando sugli archi di T .

Sappiamo che il costo ridotto degli archi di T deve essere nullo, ossia

$$\bar{\pi}_j - \bar{\pi}_i = c_{ij} \quad \forall (i,j) \in T,$$

quindi consideriamo gli archi di T che incidono sul nodo 1, ossia (1,2) e (1,3) e ricaviamo i potenziali dei nodi 2 e 3:

$$\bar{\pi}_2 = \bar{\pi}_1 + c_{12} = 0 + 4 = 4, \quad \bar{\pi}_3 = \bar{\pi}_1 + c_{13} = 0 + 1 = 1.$$

Esempio

A questo punto non ci sono altri archi di T incidenti sul nodo 3, ma c'è l'arco (2,4) incidente sul nodo 2, quindi ricaviamo il potenziale del nodo 4:

$$\bar{\pi}_4 = \bar{\pi}_2 + c_{24} = 4 + 6 = 10.$$

Infine calcoliamo il potenziale del nodo 5 sfruttando l'arco (5,4):

$$\bar{\pi}_5 = \bar{\pi}_4 - c_{54} = 10 - 2 = 8.$$

Per controllare l'ammissibilità calcoliamo i costi ridotti degli archi di L e U :

$$c_{23}^{\bar{\pi}} = c_{23} + \bar{\pi}_2 - \bar{\pi}_3 = 3 + 4 - 1 = 6 > 0,$$

$$c_{34}^{\bar{\pi}} = c_{34} + \bar{\pi}_3 - \bar{\pi}_4 = 1 + 1 - 10 = -8 < 0,$$

$$c_{35}^{\bar{\pi}} = c_{35} + \bar{\pi}_3 - \bar{\pi}_5 = 2 + 1 - 8 = -5 < 0.$$

Il potenziale non è ammissibile perché l'arco $(3, 4) \in L$ ha costo ridotto negativo.

Il potenziale è non degenere perché nessuno dei tre archi di L e U ha costo ridotto nullo.

Riassumendo, il flusso di base è ammissibile e non degenere, mentre il potenziale di base non è ammissibile, quindi, il flusso di base non è ottimo.

Algoritmo del simplesso per flussi

Come detto in un problema di flusso di costo minimo il vincolo di interezza può essere rimosso e quindi il problema è un problema di PL.

L'algoritmo del simplesso ha in tali problemi delle specifiche interessanti dal punto di vista teorico e dal punto di vista computazionale.

Analizziamo il simplesso duale applicato al flusso di costo minimo che chiameremo simplesso per flussi.

ALGORITMO DEL SIMPLESSO PER FLUSSI

- Trova una tripartizione degli archi (T, L, U) , con T un albero di copertura, che generi un flusso di base ammissibile.
- Calcola il flusso di base \bar{x} :

$$\bar{x}_T = E_T^{-1} (b - E_U u_U), \quad \bar{x}_L = 0, \quad \bar{x}_U = u_U,$$

ed il potenziale di base $\bar{\pi}^T = c_T^T E_T^{-1}$.

- Indica con $c_{ij}^{\bar{\pi}} = c_{ij} + \bar{\pi}_i - \bar{\pi}_j$ il costo ridotto.

Algoritmo del simplesso per flussi

- **Se** sono soddisfatte le condizioni di Bellman:

$$\begin{array}{ll} c_{ij}^{\bar{\pi}} \geq 0 & \text{per ogni } (i,j) \in L, \\ c_{ij}^{\bar{\pi}} \leq 0 & \text{per ogni } (i,j) \in U, \end{array}$$

allora STOP (\bar{x} è un flusso di costo minimo e $\bar{\pi}$ è un potenziale ottimo).
altrimenti calcola l'arco entrante

$$(p, q) = \min(\text{lex}) \left(\{(i,j) \in L : c_{ij}^{\bar{\pi}} < 0\} \cup \{(i,j) \in U : c_{ij}^{\bar{\pi}} > 0\} \right)$$

L'arco (p, q) forma un ciclo \mathcal{C} con gli archi di T .

Fissa su \mathcal{C} un verso concorde con (p, q) , se $(p, q) \in L$, oppure discorde con (p, q) , se $(p, q) \in U$.

Indica con \mathcal{C}^+ gli archi del ciclo concordi con il verso e con \mathcal{C}^- quelli discordi.

Algoritmo del simplesso per flussi

- Calcola

$$\begin{aligned}\vartheta^+ &= \min\{u_{ij} - \bar{x}_{ij} : (i,j) \in \mathcal{C}^+\} \\ \vartheta^- &= \min\{\bar{x}_{ij} : (i,j) \in \mathcal{C}^-\} \\ \vartheta &= \min\{\vartheta^+, \vartheta^-\}\end{aligned}$$

trova l'arco uscente

$$(r,s) = \min(\text{lex}) \left(\{(i,j) \in \mathcal{C}^+ : u_{ij} - \bar{x}_{ij} = \vartheta\} \cup \{(i,j) \in \mathcal{C}^- : \bar{x}_{ij} = \vartheta\} \right).$$

Algoritmo del simplesso per flussi

- Aggiorna la tripartizione: se $(p, q) \in L$, $(r, s) \in \mathcal{C}^+$ e $(p, q) = (r, s)$, allora

$$L = L \setminus \{(p, q)\}, \quad U = U \cup \{(p, q)\};$$

se $(p, q) \in L$, $(r, s) \in \mathcal{C}^+$ e $(p, q) \neq (r, s)$, allora

$$T = T \setminus \{(r, s)\} \cup \{(p, q)\}, \quad L = L \setminus \{(p, q)\}, \quad U = U \cup \{(r, s)\};$$

se $(p, q) \in L$, $(r, s) \in \mathcal{C}^-$, allora

$$T = T \setminus \{(r, s)\} \cup \{(p, q)\}, \quad L = L \setminus \{(p, q)\} \cup \{(r, s)\};$$

se $(p, q) \in U$, $(r, s) \in \mathcal{C}^-$ e $(p, q) = (r, s)$, allora

$$L = L \cup \{(p, q)\}, \quad U = U \setminus \{(p, q)\};$$

se $(p, q) \in U$, $(r, s) \in \mathcal{C}^-$ e $(p, q) \neq (r, s)$, allora

$$T = T \setminus \{(r, s)\} \cup \{(p, q)\}, \quad L = L \cup \{(r, s)\}, \quad U = U \setminus \{(p, q)\};$$

se $(p, q) \in U$, $(r, s) \in \mathcal{C}^+$, allora

$$T = T \setminus \{(r, s)\} \cup \{(p, q)\}, \quad U = U \setminus \{(p, q)\} \cup \{(r, s)\}.$$

Torna al passo 2.

Algoritmo del simplesso per flussi

Al passo 3, se le condizioni di Bellman non sono soddisfatte, si opera un cambio di base scegliendo come arco entrante in base il primo (**regola di Bland**) che viola queste condizioni.

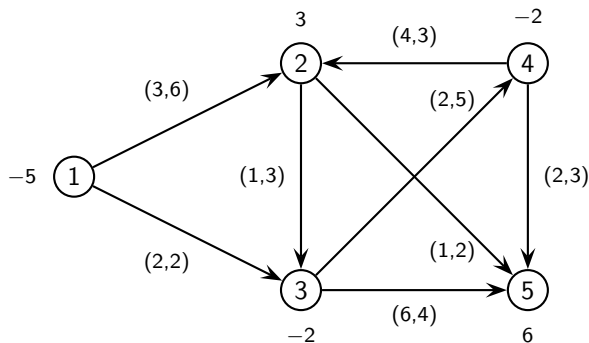
L'arco entrante (p, q) , che sta in L o in U , forma un ciclo \mathcal{C} con gli archi di T .

Consideriamo un flusso ottenuto da \bar{x} spedendo flusso sul ciclo \mathcal{C} . Se l'arco $(p, q) \in L$, cioè $\bar{x}_{pq} = 0$, il flusso su (p, q) può solo aumentare e quindi fissiamo su \mathcal{C} un verso concorde con (p, q) .

Fissiamo un verso discorde con (p, q) se $(p, q) \in U$, perché in tal caso l'arco è saturo.

Esempio

Consideriamo il flusso di costo minimo sul seguente grafo:



Esempio

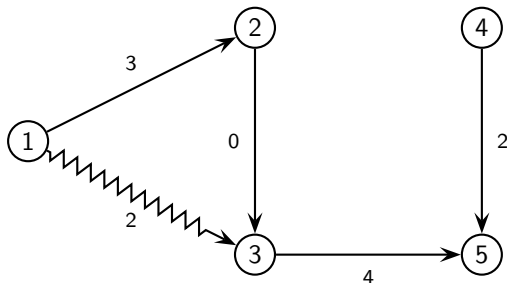
Iter. 1. Partiamo dalla base relativa alla tripartizione

$$T = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 5)\} \quad L = \{(2, 5), (3, 4), (4, 2)\} \quad U = \{(1, 3)\}.$$

Il corrispondente flusso di base ha $\bar{x}_{13} = 2$, ed i flussi sugli archi di T :

$$\bar{x}_{12} = 3, \quad \bar{x}_{23} = 0, \quad \bar{x}_{35} = 4, \quad \bar{x}_{45} = 2,$$

ossia



Esempio

Tale flusso è degenere perché l'arco $(2, 3) \in T$ è vuoto. I potenziali di base sono:

$$\bar{\pi}_1 = 0$$

$$\bar{\pi}_2 = \bar{\pi}_1 + c_{12} = 0 + 3 = 3$$

$$\bar{\pi}_3 = \bar{\pi}_2 + c_{23} = 3 + 1 = 4$$

$$\bar{\pi}_5 = \bar{\pi}_3 + c_{35} = 4 + 6 = 10$$

$$\bar{\pi}_4 = \bar{\pi}_5 - c_{45} = 10 - 2 = 8$$

Calcoliamo i costi ridotti degli archi di L ed U in ordine lessicografico:

$$(1, 3) \in U : \quad c_{13}^{\bar{\pi}} = 2 + 0 - 4 = -2$$

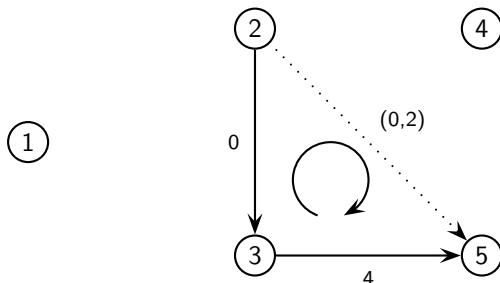
$$(2, 5) \in L : \quad c_{25}^{\bar{\pi}} = 1 + 3 - 10 = -6 < 0,$$

quindi l'arco $(2, 5)$ viola le condizioni di Bellman.

Esempio

Tale arco forma con gli archi di T un ciclo con verso concorde a $(2,5)$

Sull'arco $(2,5)$ indichiamo il flusso e la capacità, mentre su quelli discordi il flusso:



$$\vartheta^+ = u_{25} - \bar{x}_{25} = 2,$$

$$\vartheta^- = \min \{ \bar{x}_{23}, \bar{x}_{35} \} = \min \{ 0, 4 \} = 0,$$

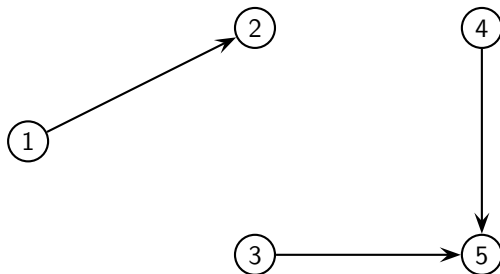
Esempio

Iter. 2. La nuova tripartizione è la seguente:

$$T = \{(1, 2), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\} \quad L = \{(2, 3), (3, 4), (4, 2)\} \quad U = \{(1, 3)\}.$$

Il flusso non cambia perché $\vartheta = 0$.

Per aggiornare i potenziali, osserviamo che la rimozione da T dell'arco $(2,3)$ crea due sottoinsiemi sconnessi di nodi $\{1, 2\}$ e $\{3, 4, 5\}$:



Aggiorniamo i potenziali:

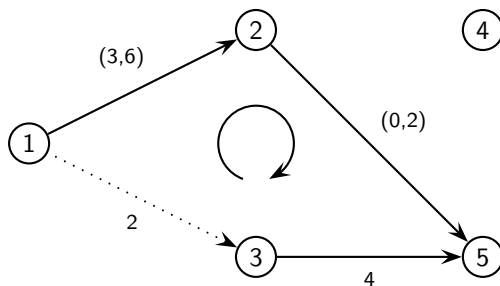
$$\begin{aligned}\bar{\pi}_1 &= 0, & \bar{\pi}_2 &= 3, \\ \bar{\pi}_3 &= 4 - 6 = -2, & \bar{\pi}_4 &= 8 - 6 = 2, & \bar{\pi}_5 &= 10 - 6 = 4.\end{aligned}$$

Calcoliamo di nuovo i costi ridotti degli archi di L ed U :

$$(1, 3) \in U, \quad c_{13}^{\bar{\pi}} = 2 + 0 - (-2) = 4 > 0.$$

L'arco $(1,3)$ viola le condizioni di Bellman e forma con T il seguente ciclo sul quale fissiamo un verso discorde a $(1,3)$ (sugli archi concordi $(1,2)$ e $(2,5)$ indichiamo il flusso e la capacità, mentre su quelli discordi solo il flusso).

Esempio



Quindi si ha:

$$\vartheta^+ = \min \{u_{12} - \bar{x}_{12}, u_{25} - \bar{x}_{25}\} = \min \{6 - 3, 2 - 0\} = 2,$$

$$\vartheta^- = \min \{\bar{x}_{13}, \bar{x}_{35}\} = \min \{2, 4\} = 2,$$

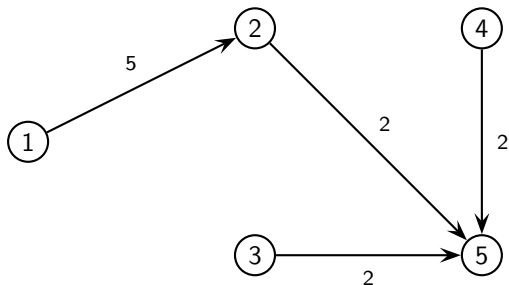
Esempio

$\vartheta = \vartheta^+ = \vartheta^- = 2$ e per la regola anticiclo di Bland tra gli archi $(1,3)$ e $(2,5)$ scegliamo come arco uscente l'arco $(1,3)$ che va da U in L .

Iter. 3. La nuova tripartizione degli archi diventa:

$$T = \{(1,2), (2,5), (3,5), (4,5)\} \quad L = \{(1,3), (2,3), (3,4), (4,2)\} \quad U = \emptyset.$$

Il nuovo flusso di base si ottiene spedendo 2 unità di flusso lungo il ciclo indicato sopra:



Esempio

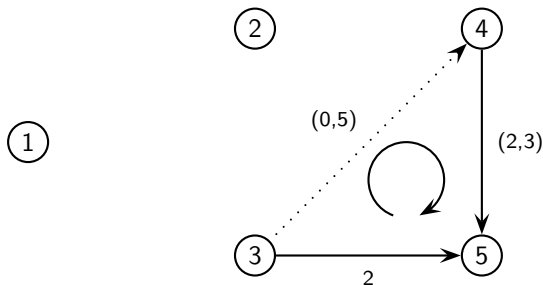
L'albero T è invariato, quindi $\bar{\pi} = (0, 3, -2, 2, 4)$.

$$c_{13}^{\bar{\pi}} = 2 + 0 - (-2) = 4$$

$$c_{23}^{\bar{\pi}} = 1 + 3 - (-2) = 6$$

$$c_{34}^{\bar{\pi}} = 2 - 2 - 2 = -2 < 0$$

quindi l'arco $(3,4)$ viola le condizioni di Bellman e forma con T il seguente ciclo sul quale fissiamo un verso concorde a $(3,4)$ (sugli archi concordi $(3,4)$ e $(4,5)$ indichiamo il flusso e la capacità, mentre sugli altri solo il flusso):



Quindi si ha:

$$\begin{aligned}\vartheta^+ &= \min \{u_{34} - \bar{x}_{34}, u_{45} - \bar{x}_{45}\} = \min \{5 - 0, 3 - 2\} = 1, \\ \vartheta^- &= \bar{x}_{35} = 2,\end{aligned}$$

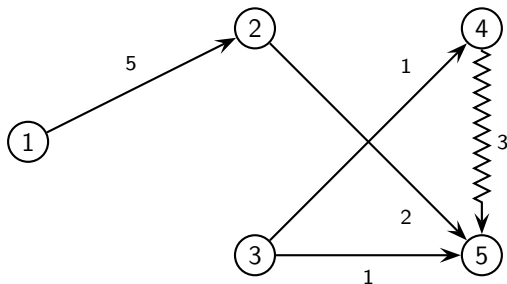
pertanto $\vartheta = \vartheta^+ = 1$, (4,5) va da T in U , mentre (3,4) va da L in T .

Iter. 4. La nuova tripartizione degli archi diventa:

$$T = \{(1,2), (2,5), (3,4), (3,5)\} \quad L = \{(1,3), (2,3), (4,2)\} \quad U = \{(4,5)\}.$$

Il nuovo flusso di base è ottenuto spedendo 1 unità di flusso in più lungo il ciclo:

Esempio



Aggiorniamo i potenziali:

$$\bar{\pi}_1 = 0, \quad \bar{\pi}_2 = 3, \quad \bar{\pi}_3 = -2, \quad \bar{\pi}_5 = 4, \\ \bar{\pi}_4 = 2 - 2 = 0$$

Calcoliamo di nuovo i costi ridotti degli archi di L e di U :

$$(1, 3) \in L : c_{13}^{\bar{\pi}} = 2 - (-2) = 4$$

$$(2, 3) \in L : c_{23}^{\bar{\pi}} = 1 + 3 - (-2) = 6$$

$$(4, 2) \in L : c_{42}^{\bar{\pi}} = 4 + 0 - 3 = 1$$

$$(4, 5) \in U : c_{45}^{\bar{\pi}} = 2 + 0 - 4 = -2$$

Sono soddisfatte le condizioni di Bellman, il flusso di base corrente è ottimo.

Al passo 1 è necessario conoscere una tripartizione (T, L, U) ammissibile.

Essendo un semplice duale, per tripartizione ammissibile (T, L, U) si applica il duale ausiliario.

Flusso di costo minimo non capacitato

Consideriamo il caso in cui le capacità superiori sugli archi sono $u = +\infty$:

$$\begin{cases} \min c^T x \\ E x = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

che è già in forma duale.

Le basi coincidono con gli alberi di copertura del grafo:

$$B \text{ è una base} \quad \Longleftrightarrow \quad B \text{ è un albero di copertura}$$

Una base è data una partizione degli archi in (T, L) , dove T è un albero di copertura.

Il flusso di base \bar{x} è dato da

$$\bar{x}_T = E_T^{-1} b, \quad \bar{x}_L = 0.$$

Flusso di costo minimo non capacitato

Tale flusso è ammissibile se e solo se $\bar{x}_T \geq 0$ ed è degenere se e solo se esiste un arco $(i, j) \in T$ tale che $\bar{x}_{ij} = 0$.

Il problema dei potenziali diventa:

$$\begin{cases} \max \pi^T b \\ \pi^T E \leq c^T \end{cases}$$

Il potenziale di base relativo alla base T è

$$\bar{\pi}^T = c_T^T E_T^{-1},$$

che è ammissibile se $\bar{\pi}^T E_L \leq c_L$, ossia i costi ridotti degli archi di L non sono negativi:

$$c_{ij}^{\bar{\pi}} = c_{ij} + \bar{\pi}_i - \bar{\pi}_j \geq 0 \quad \forall (i, j) \in L.$$

Il potenziale di base è degenere se e solo se esiste un arco $(i, j) \in L$ con $c_{ij}^{\bar{\pi}} = 0$.

Flusso di costo minimo non capacitato

Riassumiamo nella tabella i possibili casi per i flussi ed i potenziali di base:

| | flusso di base $\bar{x}_T = E_T^{-1}b \quad \bar{x}_L = 0$ | potenziale di base $\bar{\pi}^T = c_T^T E_T^{-1}$ |
|-----------------|---|---|
| ammissibile | $\forall (i,j) \in T$ si ha $\bar{x}_{ij} \geq 0$ | $\forall (i,j) \in L$ si ha $c_{ij}^{\bar{\pi}} \geq 0$ |
| non ammissibile | $\exists (i,j) \in T$ tale che $\bar{x}_{ij} < 0$ | $\exists (i,j) \in L$ tale che $c_{ij}^{\bar{\pi}} < 0$ |
| degenere | $\exists (i,j) \in T$ tale che $\bar{x}_{ij} = 0$ | $\exists (i,j) \in L$ tale che $c_{ij}^{\bar{\pi}} = 0$ |
| non degenere | $\forall (i,j) \in T$ si ha $\bar{x}_{ij} \neq 0$ | $\forall (i,j) \in L$ si ha $c_{ij}^{\bar{\pi}} \neq 0$ |

Flusso di costo minimo non capacitato

Supponiamo che una partizione (T, L) generi un flusso di base \bar{x} ammissibile.

Se $\bar{\pi}$ è tale che

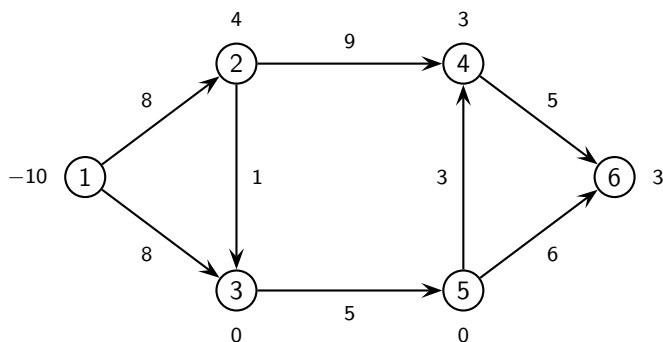
$$c_{ij}^{\bar{\pi}} \geq 0 \quad \text{per ogni } (i, j) \in L, \quad (\text{condizioni di Bellman})$$

allora \bar{x} è ottimo.

Se il flusso \bar{x} è non degenere, le condizioni di Bellman sono necessarie e sufficienti per l'ottimalità.

Esempio

Consideriamo il flusso di costo minimo non capacitato sul seguente grafo:

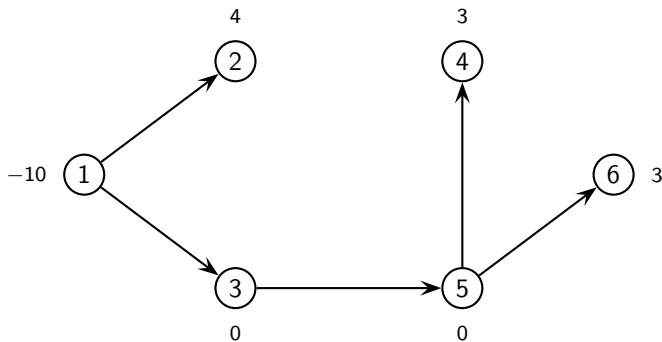


Consideriamo la base generata dalla partizione

$$T = \{(1, 2), (1, 3), (3, 5), (5, 4), (5, 6)\} \quad L = \{(2, 3), (2, 4), (4, 6)\}.$$

Esempio

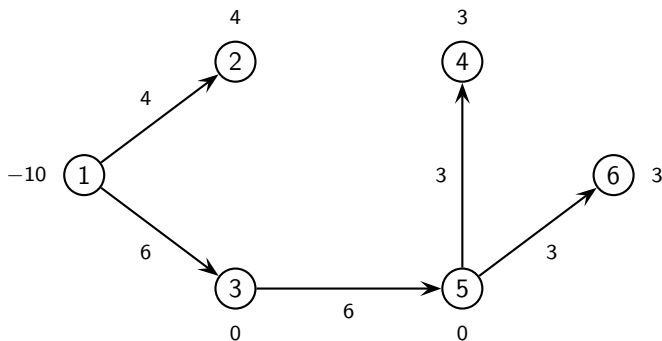
Calcoliamo il flusso di base \bar{x} facendo una visita per foglie di T .



Partendo dalla foglia 6 che ha bilancio 3 si trova che $\bar{x}_{56} = 3$. Anche la foglia 4 ha bilancio 3 e quindi $\bar{x}_{54} = 3$. Il bilancio del nodo 5 è 0, il flusso sull'arco (3,5) deve essere uguale alla somma dei flussi sugli archi (5,4) e (5,6), cioè $\bar{x}_{35} = 6$.

Esempio

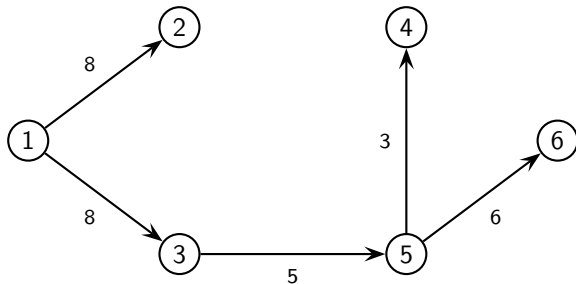
Anche il bilancio del nodo 3 è 0 e quindi $\bar{x}_{13} = 6$. Il bilancio del nodo 2 è 4 e si ottiene $\bar{x}_{12} = 4$. Sul grafo indichiamo il flusso sugli archi ed i bilanci ai nodi:



Tale flusso è ammissibile e non degenere.

Esempio

Calcoliamo ora il potenziale di base $\bar{\pi}$. Sul grafo indichiamo il costo sugli archi di T :



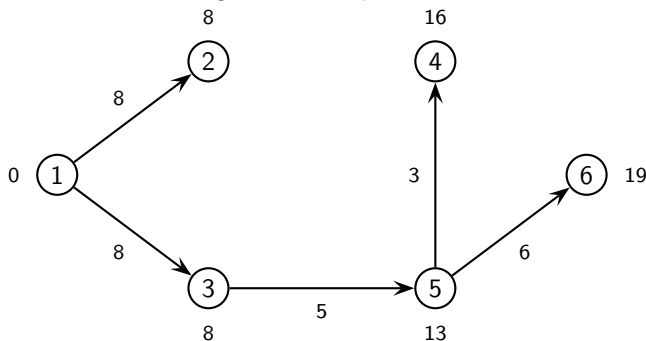
$$\bar{\pi}_2 = \bar{\pi}_1 + c_{12} = 8 \text{ e } \bar{\pi}_3 = \bar{\pi}_1 + c_{13} = 8.$$

Dal potenziale del nodo 3 otteniamo il potenziale del nodo 5: $\bar{\pi}_5 = \bar{\pi}_3 + c_{35} = 13$.

Dal potenziale del nodo 5 troviamo il potenziale del nodo 4: $\bar{\pi}_4 = \bar{\pi}_5 + c_{54} = 16$
ed il potenziale del nodo 6, $\bar{\pi}_6 = \bar{\pi}_5 + c_{56} = 19$.

Esempio

Sul grafo indichiamo il costo sugli archi ed i potenziali ai nodi:



$$c_{23}^{\bar{\pi}} = 1 + 8 - 8 = 1$$

$$c_{24}^{\bar{\pi}} = 9 + 8 - 16 = 1$$

$$c_{46}^{\bar{\pi}} = 5 + 16 - 19 = 2$$

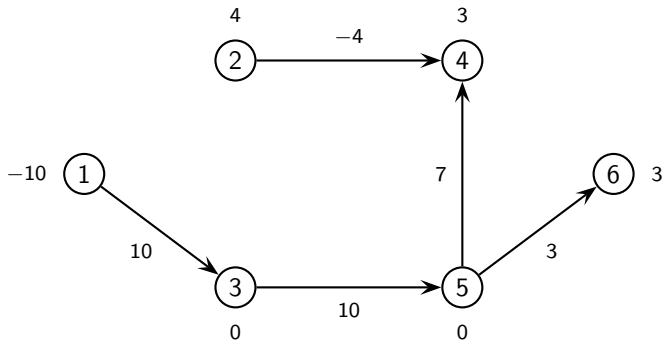
I costi ridotti sono tutti positivi, $\bar{\pi}$ è ammissibile e quindi il flusso \bar{x} è ottimo.

Esempio

Consideriamo ora la partizione:

$$T = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (5, 4), (5, 6)\} \quad L = \{(1, 2), (2, 3), (4, 6)\}.$$

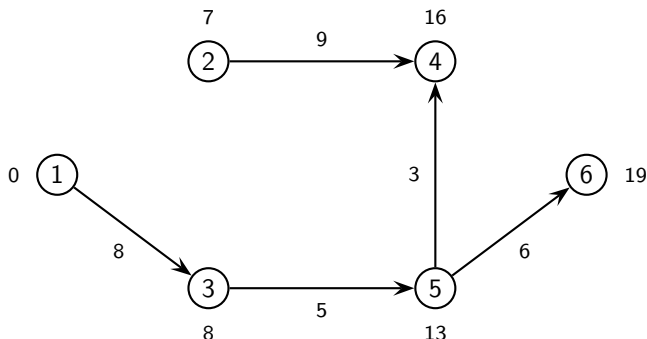
Sul grafo indichiamo il flusso di base sugli archi ed i bilanci ai nodi:



Tale flusso è non ammissibile e non degenere.

Esempio

Sul grafo indichiamo il costo sugli archi ed i potenziali di base:



$$c_{12}^{\bar{\pi}} = 8 + 0 - 7 = 1$$

$$c_{23}^{\bar{\pi}} = 1 + 7 - 8 = 0$$

$$c_{46}^{\bar{\pi}} = 5 + 16 - 19 = 2$$

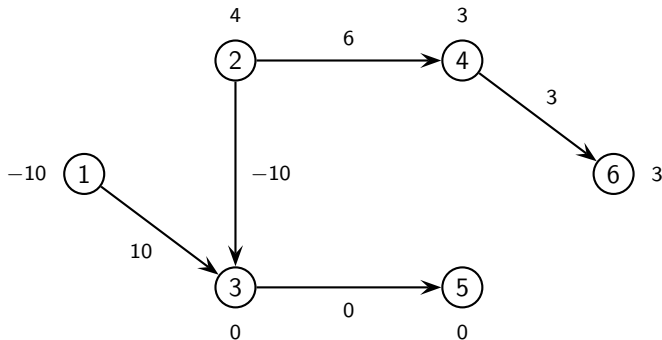
Il potenziale di base è ammissibile e degenero.

Esempio

Consideriamo infine la seguente partizione:

$$T = \{(1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\} \quad L = \{(1, 2), (5, 4), (5, 6)\}.$$

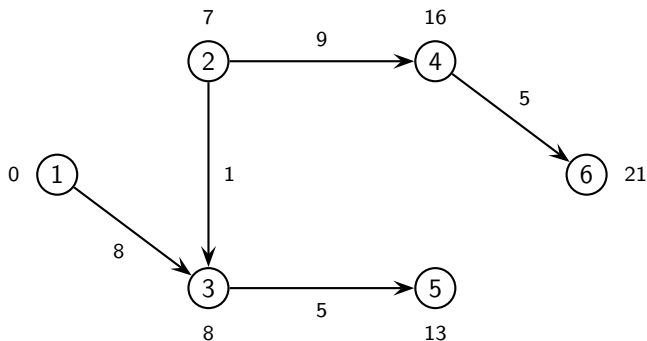
Sul grafo indichiamo il flusso di base sugli archi ed i bilanci ai nodi:



Tale flusso è non ammissibile e degenere.

Esempio

Sul grafo che segue indichiamo il costo sugli archi ed i potenziali di base:



Esempio

Calcoliamo i costi ridotti degli archi di L :

$$c_{12}^{\bar{\pi}} = 8 + 0 - 7 = 1$$

$$c_{54}^{\bar{\pi}} = 3 + 13 - 16 = 0$$

$$c_{56}^{\bar{\pi}} = 6 + 13 - 21 = -2$$

Il potenziale di base è non ammissibile e degenere.

ALGORITMO DEL SIMPLESSO PER FLUSSI (non capacitato)

- 1 Trova una partizione degli archi (T, L) , con T che generi un flusso ammissibile.
- 2 Calcola il flusso di base \bar{x} :

$$\bar{x}_T = E_T^{-1} b, \quad \bar{x}_L = 0,$$

ed il potenziale di base $\bar{\pi}^T = c_T^T E_T^{-1}$. Indica con $c_{ij}^{\bar{\pi}} = c_{ij} + \bar{\pi}_i - \bar{\pi}_j$ il costo ridotto di ogni arco (i, j) .

- 3 Se sono soddisfatte le condizioni di Bellman:

$$c_{ij}^{\bar{\pi}} \geq 0 \quad \text{per ogni } (i, j) \in L,$$

allora STOP (\bar{x} è un flusso di costo minimo e $\bar{\pi}$ è un potenziale ottimo).
altrimenti calcola l'arco entrante

$$(p, q) = \min \{(i, j) \in L : c_{ij}^{\bar{\pi}} < 0\}$$

dove il minimo è fatto rispetto all'ordine lessicografico sugli archi.

L'arco (p, q) forma un ciclo \mathcal{C} con gli archi di T con verso concorde con (p, q) ed indica con \mathcal{C}^- l'insieme gli archi del ciclo discordi con il verso fissato.

- 4 Se $\mathcal{C}^- = \emptyset$

ALGORITMO DEL SIMPLESSO PER FLUSSI (non capacitato)

- ① **allora** STOP (il flusso di costo minimo ha valore $-\infty$.
altrimenti calcola

$$\vartheta = \min \{ \bar{x}_{ij} : (i,j) \in \mathcal{C}^- \}.$$

e trova l'arco uscente

$$(r,s) = \min \{ (i,j) \in \mathcal{C}^- : \bar{x}_{ij} = \vartheta \}$$

dove il minimo è sempre fatto rispetto all'ordine lessicografico sugli archi.

- ② aggiorna la partizione:

$$T = T \setminus \{(r,s)\} \cup \{(p,q)\}, \quad L = L \setminus \{(p,q)\} \cup \{(r,s)\},$$

e torna al passo 2.

Simplexso per flussi

Per calcolare il nuovo flusso di base basta spedire ϑ unità di flusso lungo il ciclo.

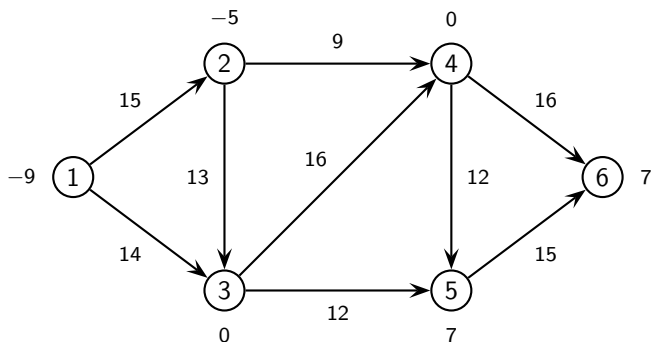
Il primo (in ordine lessicografico) arco del ciclo che si svuota esce dall'albero T .

Quando $\vartheta = 0$ significa che siamo in un flusso di base degenerare, cioè si cambia la partizione (T, L) senza cambiare il flusso \bar{x} .

Se non ci sono archi discordi nel ciclo, allora non ci sono limiti sul flusso che può essere spedito lungo il ciclo, e quindi il valore della funzione obiettivo tende a $-\infty$.

Esempio

Consideriamo il seguente problema di flusso di costo minimo:

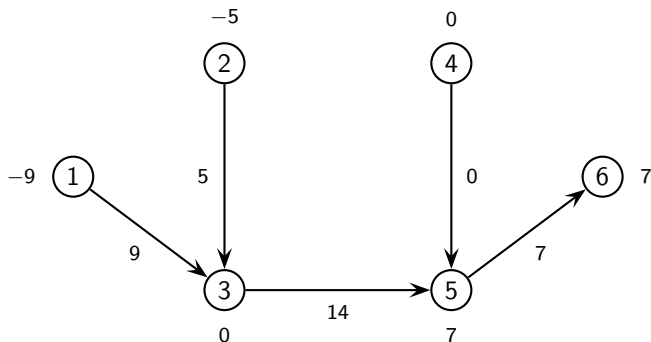


Partiamo dalla base

$$T = \{(1, 3), (2, 3), (3, 5), (4, 5), (5, 6)\}.$$

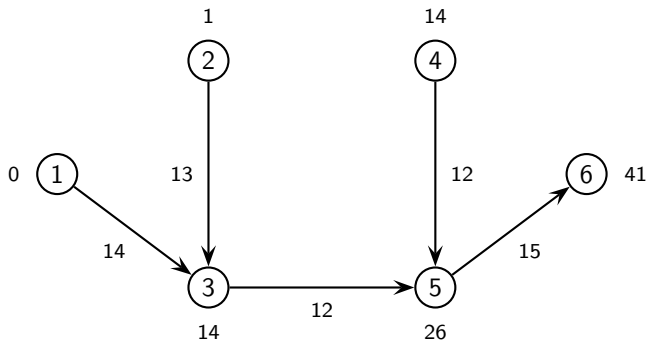
Esempio

Iter. 1. Facendo una visita per foglie di T troviamo il seguente flusso di base:



Esempio

Tale flusso di base è degenere perché l'arco (4,5) ha flusso nullo. Calcoliamo ora il potenziale di base (sugli archi indichiamo i costi):



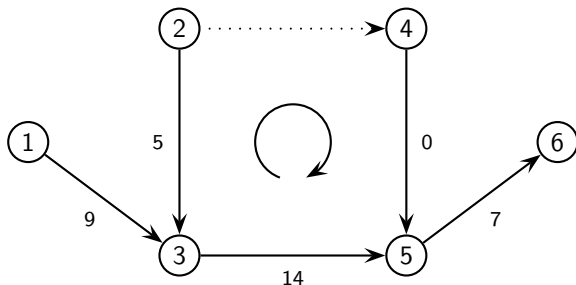
Calcoliamo, in ordine lessicografico, i costi ridotti degli archi che non appartengono a T :

$$c_{12}^{\bar{\pi}} = 15 + 0 - 1 = 14$$

$$c_{24}^{\bar{\pi}} = 9 + 1 - 14 = -4$$

Esempio

L'arco (2,4) ha costo ridotto negativo e quindi entra in base. Esso forma con gli archi di T il seguente ciclo (sugli archi sono indicati i flussi):



Gli archi discordi al verso del ciclo sono (2,3) e (3,5), quindi

$$\vartheta = \min \{ \bar{x}_{23}, \bar{x}_{35} \} = \min \{ 5, 14 \} = 5.$$

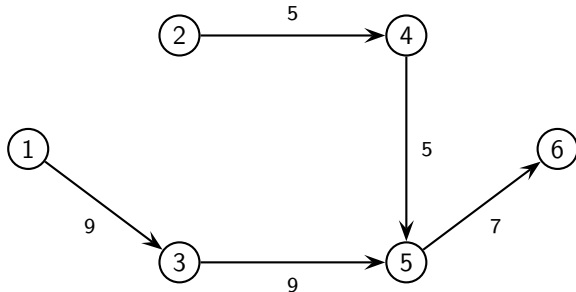
L'arco (2,3) si svuota ed esce dalla base.

Esempio

Iter. 2. La nuova base risulta essere

$$T = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 5), (5, 6)\}$$

ed il nuovo flusso di base diventa:

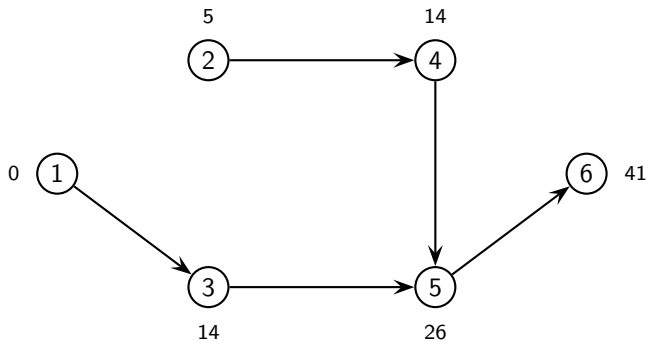


Nel nuovo potenziale di base cambia solo il valore del nodo 2:

$$\pi'_2 = \bar{\pi}_2 - c_{23}^{\bar{\pi}} = 1 - (-4) = 5.$$

Esempio

I potenziali diventano:



Esempio

Calcoliamo i costi ridotti degli archi non di base:

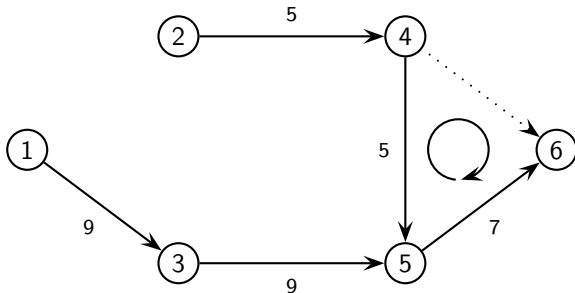
$$c_{12}^{\bar{\pi}} = 15 + 0 - 5 = 10$$

$$c_{23}^{\bar{\pi}} = 13 + 5 - 14 = 4$$

$$c_{34}^{\bar{\pi}} = 16 + 14 - 14 = 16$$

$$c_{46}^{\bar{\pi}} = 16 + 14 - 41 = -11$$

L'arco (4,6) ha costo ridotto negativo e quindi entra in base. Forma con gli archi di T il seguente ciclo (sugli archi sono indicati i flussi):



Esempio

Gli archi discordi al verso del ciclo sono (4,5) e (5,6), quindi

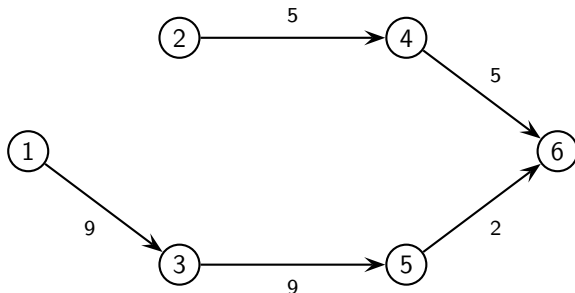
$$\vartheta = \min \{ \bar{x}_{45}, \bar{x}_{56} \} = \min \{ 5, 7 \} = 5.$$

L'arco (4,5) si svuota ed esce dalla base.

Iter. 3. La nuova base è

$$T = \{ (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 6) \}$$

ed il nuovo flusso di base diventa:



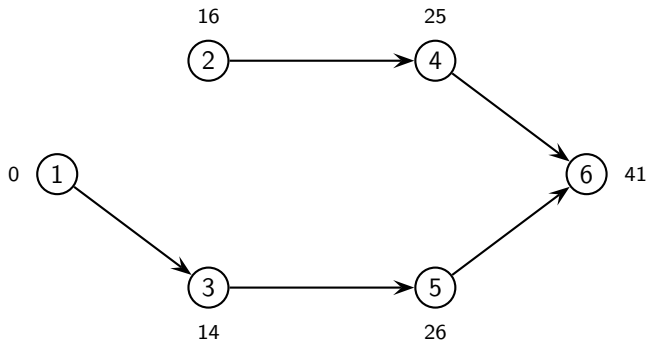
Esempio

Nel nuovo potenziale di base cambiano solo i valori dei nodi 2 e 4:

$$\pi'_2 = \bar{\pi}_2 - c_{45}^{\bar{\pi}} = 5 - (-11) = 16$$

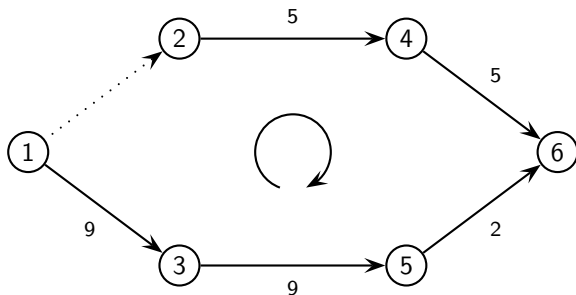
$$\pi'_4 = \bar{\pi}_4 - c_{45}^{\bar{\pi}} = 14 - (-11) = 25$$

quindi i potenziali diventano:



Esempio

Poichè $c_{12}^{\bar{\pi}} = 15 + 0 - 16 = -1$, l'arco $(1,2)$ ha costo ridotto negativo, entra in base e forma con gli archi di T il seguente ciclo (sugli archi sono indicati i flussi):



Gli archi discordi al verso del ciclo sono $(1,3)$, $(3,5)$ e $(5,6)$, quindi

$$\vartheta = \min \{ \bar{x}_{13}, \bar{x}_{35}, \bar{x}_{56} \} = \min \{ 9, 9, 2 \} = 2.$$

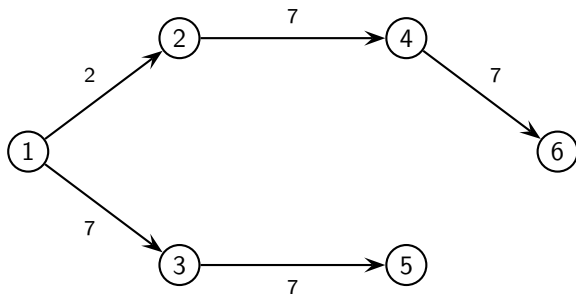
L'arco $(5,6)$ si svuota ed esce dalla base.

Esempio

Iter. 4. La nuova base è

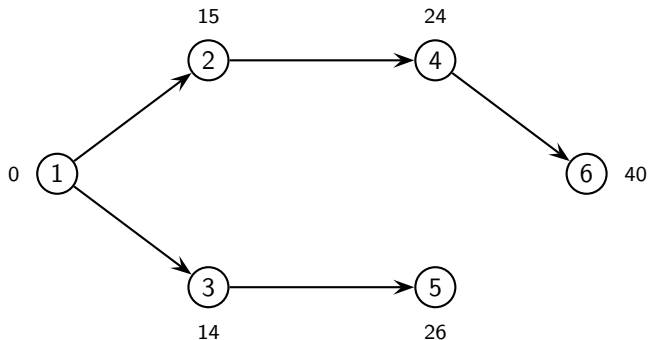
$$T = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$$

ed il nuovo flusso di base diventa:



Esempio

I nuovi potenziali diventano:



$$c_{23}^{\bar{\pi}} = 13 + 15 - 14 = 14$$

$$c_{34}^{\bar{\pi}} = 16 + 14 - 24 = 6$$

$$c_{45}^{\bar{\pi}} = 12 + 24 - 26 = 10$$

$$c_{56}^{\bar{\pi}} = 15 + 26 - 40 = 1$$

Problema ausiliario

Per il flusso di costo minimo non capacitato il problema ausiliario è:

$$\begin{cases} \min \sum_{i \in N} \epsilon_i \\ E_i x + \epsilon_i = b_i & \text{se } b_i \geq 0 \\ E_i x - \epsilon_i = b_i & \text{se } b_i < 0 \\ x, \epsilon \geq 0 \end{cases}$$

dove ϵ_i sono le variabili ausiliarie, una per ogni nodo $i \in N$, ed E_i sono le righe della matrice di incidenza E .

Tale problema ausiliario è un flusso di costo minimo su un grafo i cui ci sono i nodi di N più un nodo ausiliario 0 (con bilancio nullo) e gli archi sono gli archi di A più gli archi ausiliari che vanno dai nodi i con bilancio $b_i < 0$ al nodo 0 e dal nodo 0 ai nodi i con $b_i \geq 0$.

Gli archi ausiliari hanno costo 1, mentre gli archi di A hanno costo nullo.

Problema ausiliario

La seguente partizione:

$$T = \{\text{archi ausiliari}\} \quad L = \{\text{archi di } A\},$$

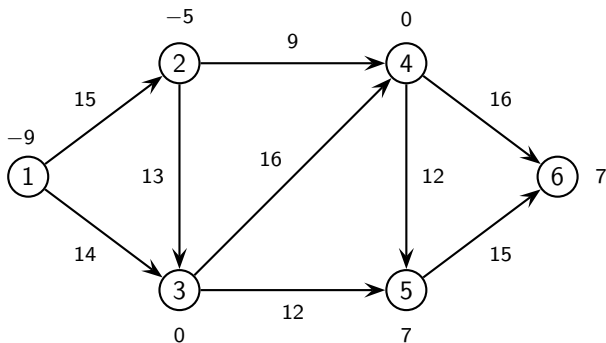
fornisce un flusso di base ammissibile per il problema ausiliario.

Da tale base può partire il simplesso per flussi per risolvere il problema ausiliario.

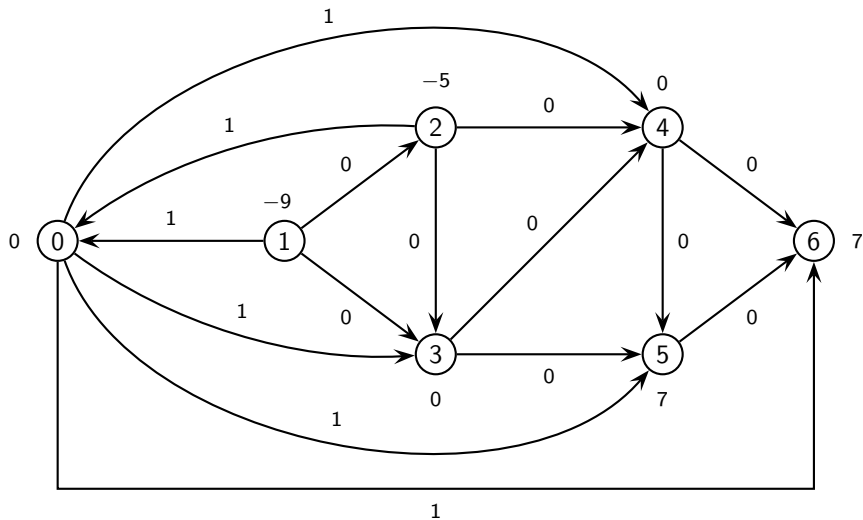
Se il problema ausiliario ha valore ottimo positivo, allora non esiste un flusso ammissibile sul grafo originario (N, A) ; se invece il problema ausiliario ha valore ottimo nullo, allora il flusso ottimo del problema ausiliario è ammissibile per il problema originario e dalla base ottima del problema ausiliario si può ricavare una base ammissibile per il problema originario.

Esempio

Consideriamo il seguente problema di flusso di costo minimo:

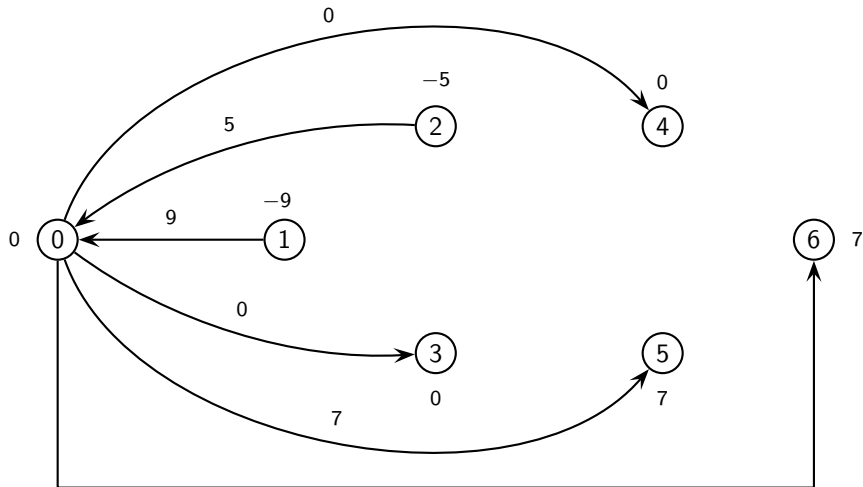


Esempio



Esempio

$T = \{(0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6), (1, 0), (2, 0)\}$ fornisce il seguente flusso:

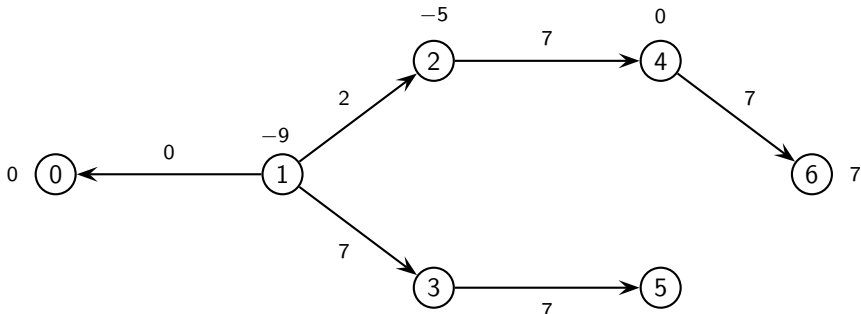


Esempio

Applichiamo il simplesso per flussi al problema ausiliario a partire da tale base ammissibile e, alla fine, otteniamo la base ottima:

$$T = \{(1, 0), (1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}$$

con il relativo flusso ottimo:



Il valore ottimo del problema ausiliario è 0 (gli archi ausiliari hanno flusso nullo) e quindi il flusso precedente è ammissibile per il problema iniziale e corrisponde alla base ammissibile:

$$T = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}.$$

Il simplesso per flussi può partire da questa base per risolvere il problema iniziale.

Cammini minimi

Nel problema dei cammini minimi di radice r , senza perdita di generalità possiamo supporre che per ogni nodo $i \neq r$ esista un cammino orientato da r a i , a meno di aggiungere archi fittizi (r, i) di costo $+\infty$.

Tale problema può essere formulato come flusso di costo minimo

$$\left\{ \begin{array}{l} \min c^T x \\ E x = b \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad \text{dove} \quad b_i = \begin{cases} -(n-1) & \text{se } i = r, \\ 1 & \text{se } i \neq r. \end{cases} \quad (2)$$

Ciò equivale a supporre che $n - 1$ unità di flusso si debbano dirigere dal nodo r ognuna verso un nodo $i \neq r$ minimizzando il costo complessivo $c^T x$.

In questo caso non abbiamo capacità superiori sugli archi, per cui B è una base se e solo se rappresenta un albero di copertura del grafo.

B è una base ammissibile se e solo se è un albero di copertura orientato di radice r , ossia contiene un cammino orientato da r verso ogni altro nodo $i \neq r$.

Consideriamo ora un albero di copertura T_r orientato di radice r .

Il flusso di base associato a T_r è sempre non degenere perché i bilanci dei nodi sono tutti uguali a 1 (tranne quello della radice r).

Cammini minimi

Il vettore π dei potenziali di base associati a T_r è tale che

$$\pi_j - \pi_i = c_{ij} \quad \forall (i,j) \in T_r,$$

per cui π_i rappresenta il costo del cammino orientato da r a i nell'albero T_r .

Poiché i flussi di base ammissibili sono non degeneri, le condizioni di Bellman sono necessarie e sufficienti per l'ottimalità.

Sia T_r un albero di copertura orientato di radice r e π il vettore dei potenziali associati a T_r . Allora T_r è un albero dei cammini minimi se e solo se T_r verifica le condizioni di Bellman:

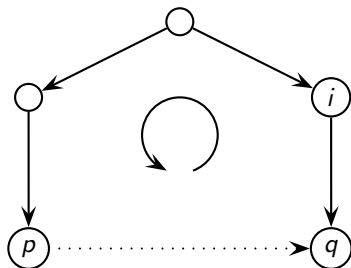
$$c_{ij}^{\pi} = c_{ij} + \pi_i - \pi_j \geq 0 \quad \forall (i,j) \notin T_r.$$

Algoritmo del simplesso per cammini

L'algoritmo del simplesso per flussi diventa un simplesso per cammini:

- Non ci sono capacità superiori: $u = +\infty$.
- Le basi ammissibili corrispondono agli alberi orientati di radice r .
- Non sono necessarie regole anticiclo perché non ci sono soluzioni di base degeneri, quindi possiamo scegliere come arco entrante in base quello che ha il costo ridotto più grande in valore assoluto.
- Se (p, q) è l'arco entrante in base, allora l'arco uscente dalla base è l'unico arco che entra nel nodo q , diciamo (i, q) (tale arco è unico perché T_r è un albero), perché tra gli archi discordi al verso del ciclo formato, (i, q) è sicuramente quello di flusso minimo.

Algoritmo del simplesso per cammini



- L'uscita di un arco dalla base sconnette l'insieme N dei nodi generando una partizione dei nodi (N_1, N_2) , dove N_1 e N_2 sono le due componenti connesse e $r \in N_1$. I potenziali si aggiornano solo sui nodi appartenenti a N_2 .

I costi ridotti si aggiornano solo sugli archi che hanno un estremo in N_1 e l'altro in N_2 .

ALGORITMO DEL SIMPLESSO PER CAMMINI

- 1 Trova un albero T orientato di radice r .
- 2 Calcola il potenziale di base $\bar{\pi}^T = c_T^T E_T^{-1}$.
- 3 Se sono soddisfatte le condizioni di Bellman:

$$c_{ij}^{\bar{\pi}} \geq 0 \quad \text{per ogni } (i, j) \notin T,$$

allora STOP (T è un albero dei cammini minimi).

altrimenti scegli come arco entrante un arco (p, q) tale che $c_{pq}^{\bar{\pi}} < 0$.
L'arco (p, q) forma un ciclo \mathcal{C} con gli archi di T .

- 4 Se tutti gli archi di \mathcal{C} sono concordi con (p, q)

allora STOP (l'albero dei cammini minimi non esiste).

altrimenti scegli come arco uscente l'unico arco $(i, q) \in T$ che entra nel nodo q .

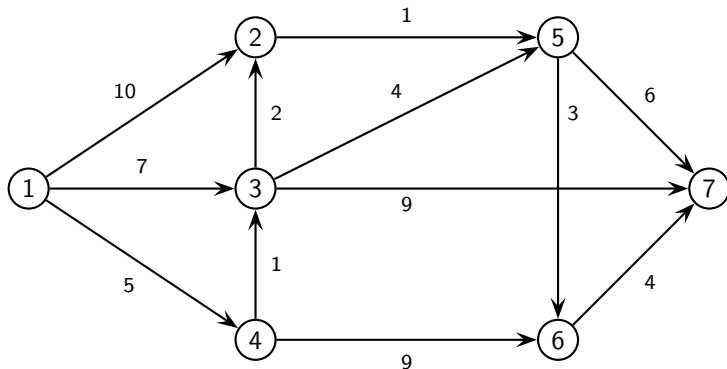
- 5 Aggiorna l'albero:

$$T = T \setminus \{(i, q)\} \cup \{(p, q)\},$$

e torna al passo 2.

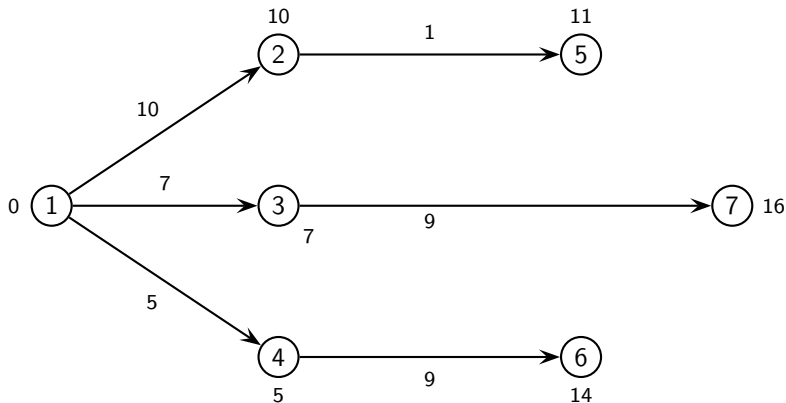
Algoritmo del simplesso per cammini

Applichiamo il simplesso per cammini:



Algoritmo del simplesso per cammini

Iter. 1. Partiamo dalla seguente base (sugli archi indichiamo i costi e sui nodi i potenziali):

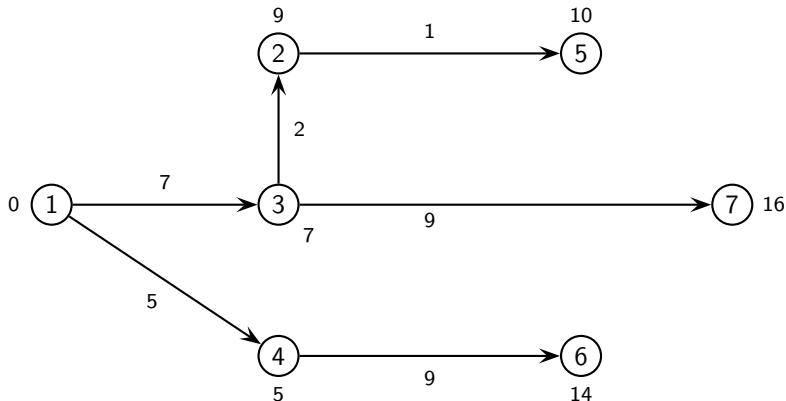


Algoritmo del simplesso per cammini

$$c_{32}^{\pi} = 2 + 7 - 10 = -1,$$

quindi l'arco (3,2) entra in base ed esce l'arco (1,2).

Iter. 2. La nuova base è la seguente (sugli archi i costi e sui nodi i potenziali):



Algoritmo del simplesso per cammini

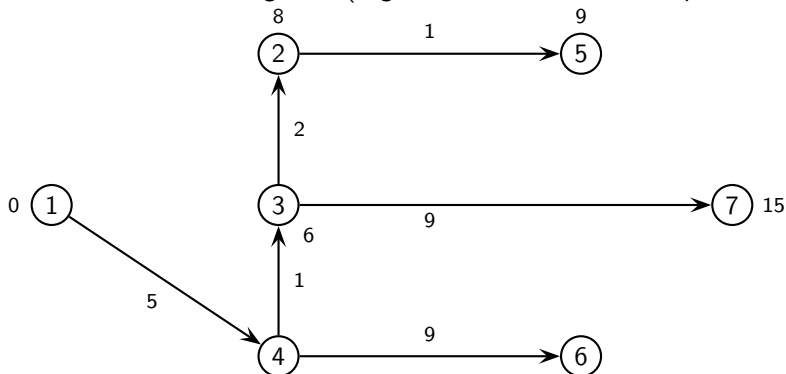
$$c_{12}^{\pi} = 10 + 0 - 9 = 1$$

$$c_{35}^{\pi} = 4 + 7 - 10 = 1$$

$$c_{43}^{\pi} = 1 + 5 - 7 = -1$$

quindi l'arco (4,3) entra in base ed esce l'arco (1,3).

Iter. 3. La nuova base è la seguente (sugli archi i costi e sui nodi i potenziali):



$$c_{12}^{\pi} = 10 + 0 - 8 = 2$$

$$c_{13}^{\pi} = 7 + 0 - 6 = 1$$

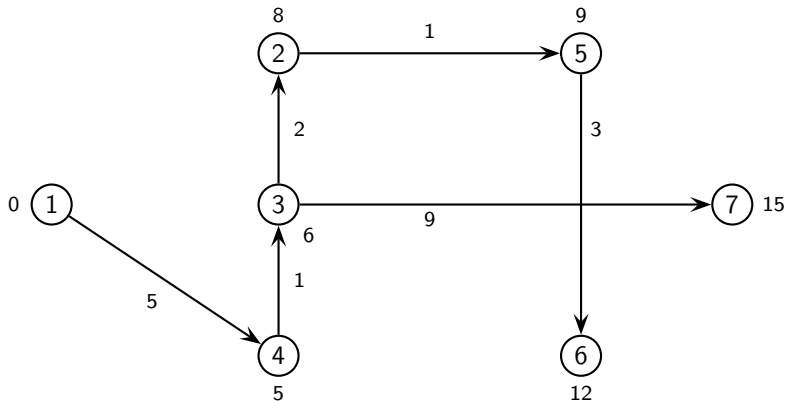
$$c_{35}^{\pi} = 4 + 6 - 9 = 1$$

$$c_{56}^{\pi} = 3 + 9 - 14 = -2$$

quindi l'arco (5,6) entra in base ed esce l'arco (4,6).

Algoritmo del simplesso per cammini

Iter. 4. La nuova base (sugli archi i costi e sui nodi i potenziali):



Algoritmo del simplesso per cammini

$$c_{12}^{\pi} = 10 + 0 - 8 = 2$$

$$c_{13}^{\pi} = 7 + 0 - 6 = 1$$

$$c_{35}^{\pi} = 4 + 6 - 9 = 1$$

$$c_{46}^{\pi} = 9 + 5 - 12 = 2$$

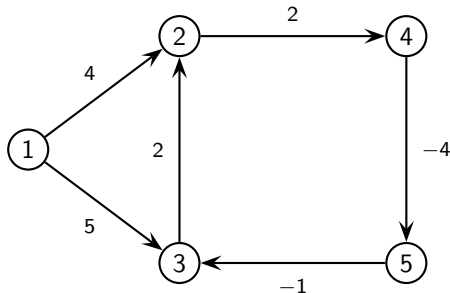
$$c_{56}^{\pi} = 6 + 9 - 15 = 0$$

$$c_{67}^{\pi} = 4 + 12 - 15 = 1$$

Poiché i costi ridotti sono non negativi, abbiamo trovato un albero dei cammini minimi.

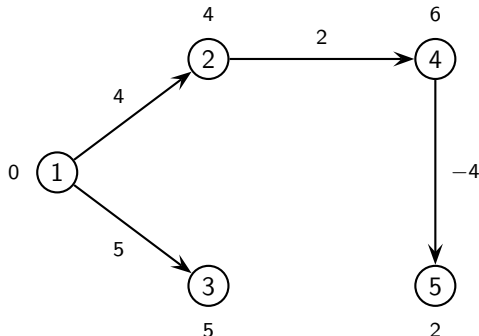
Algoritmo del semplice per cammini

Applichiamo il semplice per cammini per trovare, se esiste, l'albero dei cammini minimi di radice 1 sul seguente grafo con costi sia positivi che negativi:



Algoritmo del simplesso per cammini

Iter. 1. Partiamo con il seguente albero ed indichiamo sui nodi i potenziali:



Calcoliamo i costi ridotti degli archi non in base:

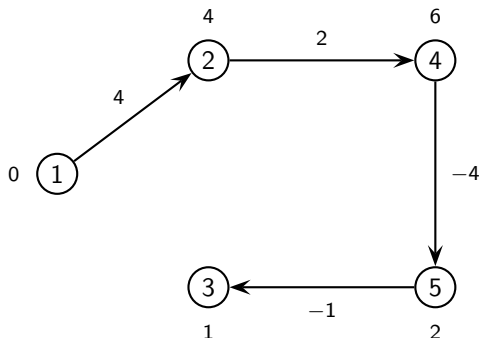
$$c_{32}^{\pi} = 2 + 5 - 4 = 3$$

$$c_{53}^{\pi} = -1 + 2 - 5 = -4$$

L'arco (5,3) entra in base, mentre l'arco uscente è (1,3).

Algoritmo del simplesso per cammini

Iter. 2. La nuova base ed i nuovi potenziali sono i seguenti:



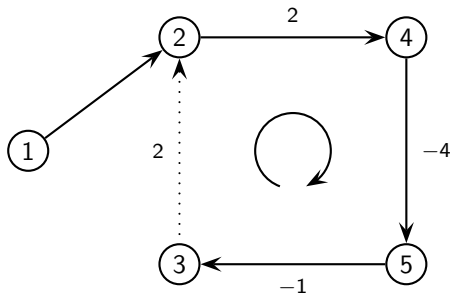
Calcoliamo i costi ridotti degli archi non in base:

$$c_{13}^{\pi} = 5 + 0 - 1 = 4$$

$$c_{32}^{\pi} = 2 + 1 - 4 = -1$$

Algoritmo del simplesso per cammini

L'arco (3,2) entra in base e forma un ciclo con tutti gli archi concordi a (3,2):



Quindi l'albero dei cammini minimi non esiste perché il ciclo 2-4-5-3-2 ha costo negativo uguale a $2 - 4 - 1 + 2 = -1$.

Algoritmo di Dijkstra

Sono stati studiati algoritmi specifici per risolvere il problema dei cammini minimi. Descriviamo l'algoritmo di Dijkstra nell'ipotesi aggiuntiva $c_{ij} \geq 0$.

Ad ogni iterazione l'algoritmo mantiene un albero di copertura orientato di radice r (memorizzato in un vettore p di predecessori dei nodi) ed un vettore π di etichette ai nodi, con la proprietà che π_i rappresenta il costo del cammino da r a i contenuto nell'albero.

Inizialmente l'albero è formato da archi fittizi (r, i) per ogni $i \neq r$, che collegano la radice r a tutti i nodi con costo $c_{ri} = +\infty$, il vettore p è definito come:

$$p_i = \begin{cases} -1 & i \neq r, \\ 0 & i = r. \end{cases}$$

mentre le corrispondenti etichette sono:

$$\pi_i = \begin{cases} +\infty & i \neq r, \\ 0 & i = r. \end{cases}$$

Algoritmo di Dijkstra

Ad ogni iterazione si cercano gli archi che violano le condizioni di Bellman e si cambiano l'albero e le corrispondenti etichette in modo da soddisfare tali condizioni.

L'algoritmo mantiene anche un insieme Q formato dai nodi le cui stelle uscenti contengono gli archi che potenzialmente possono violare le condizioni di Bellman.

Inizialmente Q contiene solo la radice r , ad ogni iterazione si estrae da Q un nodo u con etichetta minima e si controlla la stella uscente da u .

Algoritmo di Dijkstra

Se un arco (u, v) viola le condizioni di Bellman, cioè

$$\pi_v > \pi_u + c_{uv},$$

significa che il cammino da r a v contenuto nell'albero ha un costo π_v maggiore del cammino formato unendo al cammino da r a u , contenuto nell'albero, l'arco (u, v) .

L'albero viene modificato assegnando il nodo u come predecessore del nodo v e modificando l'etichetta del nodo v in modo corrispondente, ossia $\pi_v = \pi_u + c_{uv}$.

A questo punto il nodo v si inserisce (se non è già stato inserito) nell'insieme Q dei nodi candidati.

L'algoritmo termina quando $Q = \emptyset$.

ALGORITMO DI DIJKSTRA

- ① Inizializza l'insieme $Q = \{r\}$, le etichette $\pi_i = \begin{cases} +\infty & i \neq r, \\ 0 & i = r, \end{cases}$

ed i predecessori $p_i = \begin{cases} -1 & i \neq r, \\ 0 & i = r. \end{cases}$

- ② Estrai da Q un nodo u con etichetta π_u minima.

- ③ Controlla gli archi uscenti da u :

se l'arco (u, v) è tale che $\pi_v > \pi_u + c_{uv}$

allora poni: $p_v = u,$
 $\pi_v = \pi_u + c_{uv},$
 $Q = Q \cup \{v\}.$

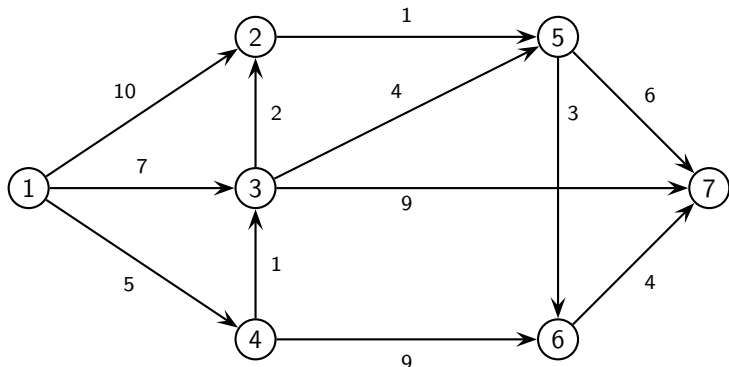
- ④ **Se** $Q = \emptyset,$
allora STOP (p fornisce un albero dei cammini minimi).
altrimenti torna al passo 2.

Algoritmo di Dijkstra

L'algoritmo di Dijkstra trova un albero dei cammini minimi dopo n iterazioni.

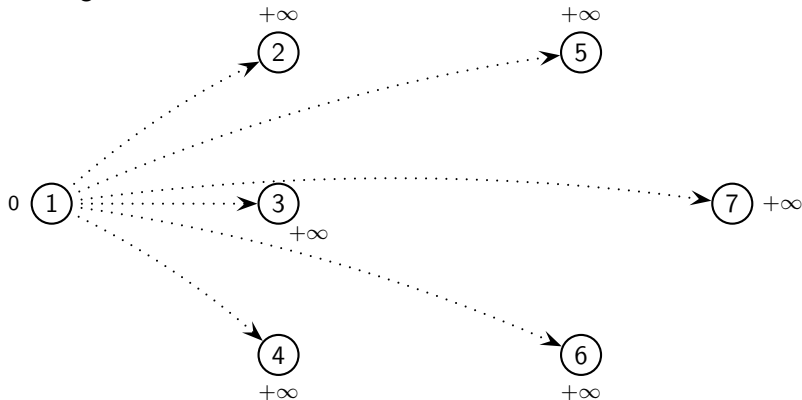
La complessità dell'algoritmo di Dijkstra è $O(n^2)$ perché il numero di iterazioni è al più n ed ogni iterazione richiede un numero di passi proporzionale al numero dei nodi appartenenti a Q , che sono al più n .

Applichiamo l'algoritmo di Dijkstra per trovare l'albero dei cammini minimi:



Algoritmo di Dijkstra

Inizializziamo $Q = \{1\}$. L'albero iniziale è formato da tutti archi fittizi dalla radice 1 verso tutti gli altri nodi con costo $+\infty$.



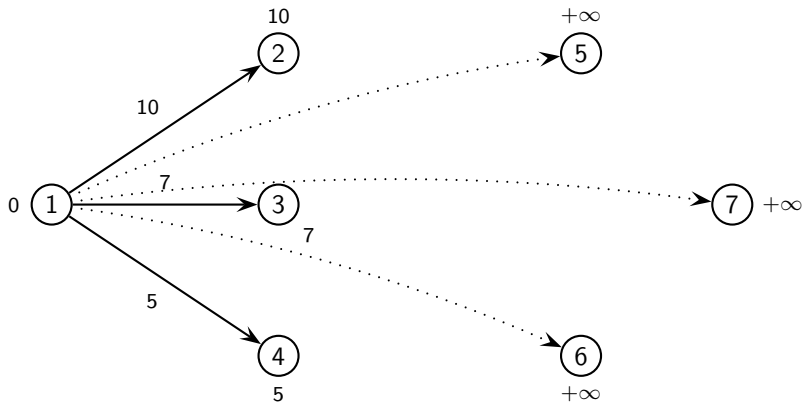
Iter. 1. Si estrae da Q il nodo 1 e si esamina la stella uscente da 1, cioè $(1,2)$, $(1,3)$ e $(1,4)$:

$$(1,2): +\infty = \pi_2 > \pi_1 + c_{12} = 10 \implies p_2 = 1, \pi_2 = 10, Q = \{2\}$$

$$(1,3): +\infty = \pi_3 > \pi_1 + c_{13} = 7 \implies p_3 = 1, \pi_3 = 7, Q = \{2, 3\}$$

Algoritmo di Dijkstra

L'albero aggiornato e le relative etichette sono:



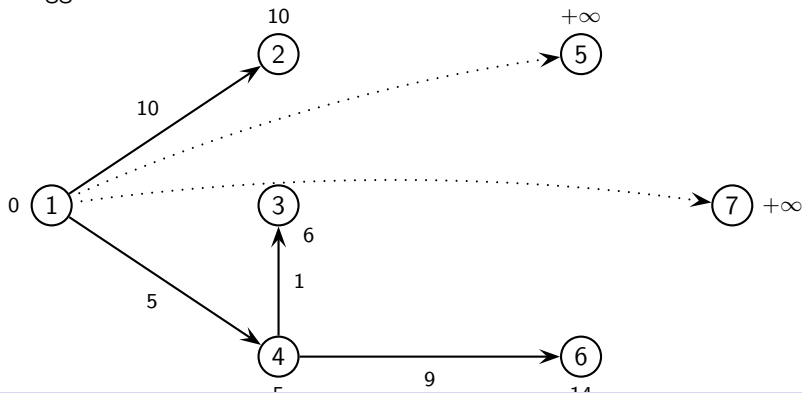
Algoritmo di Dijkstra

Iter. 2. Nell'insieme $Q = \{2, 3, 4\}$ il nodo con etichetta minima è il nodo 4. Si estrae da Q il nodo 4 e si esamina la stella uscente da 4, cioè gli archi $(4,3)$ e $(4,6)$:

$$(4,3): 7 = \pi_3 > \pi_4 + c_{43} = 6 \implies p_3 = 4, \pi_3 = 6, Q = \{2, 3\}$$

$$(4,6): +\infty = \pi_6 > \pi_4 + c_{46} = 14 \implies p_6 = 4, \pi_6 = 14, Q = \{2, 3, 6\}$$

L'albero aggiornato e le relative etichette sono:



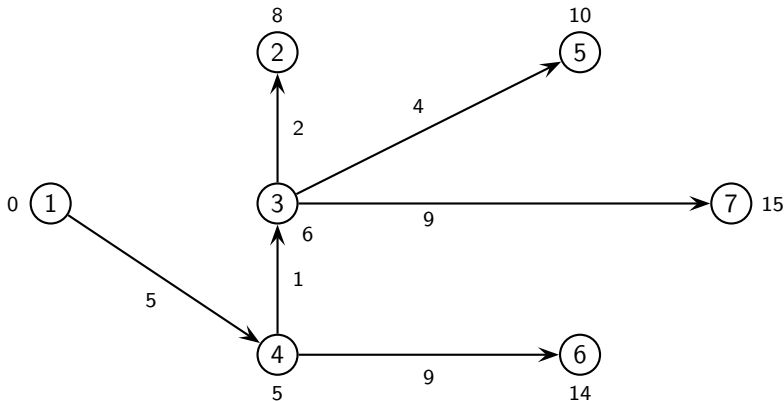
Algoritmo di Dijkstra

Iter. 3 In $Q = \{2, 3, 6\}$ il nodo con etichetta minima è il nodo 3. Si estrae da Q il nodo 3 e si esamina la stella uscente da 3, cioè gli archi $(3,2)$, $(3,5)$ e $(3,7)$:

$$(3,2): 10 = \pi_2 > \pi_3 + c_{32} = 8 \implies p_2 = 3, \pi_2 = 8, Q = \{2, 6\}$$

$$(3,5): +\infty = \pi_5 > \pi_3 + c_{35} = 10 \implies p_5 = 3, \pi_5 = 10, Q = \{2, 5, 6\}$$

$$(3,7): +\infty = \pi_7 > \pi_3 + c_{37} = 15 \implies p_7 = 3, \pi_7 = 15, Q = \{2, 5, 6, 7\}$$

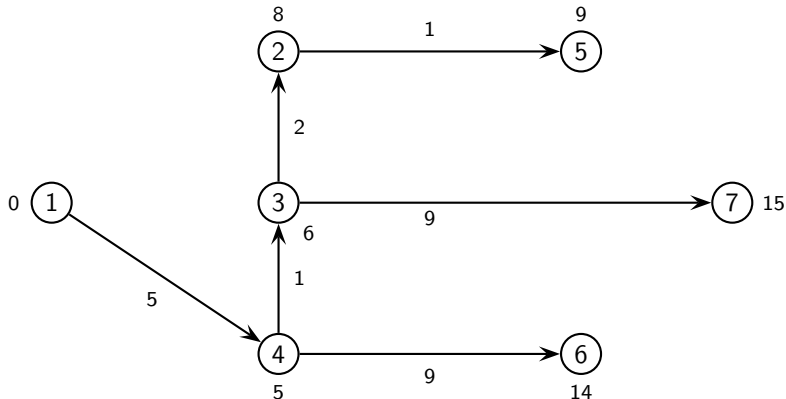


Algoritmo di Dijkstra

Iter. 4. Nell'insieme $Q = \{2, 5, 6, 7\}$ il nodo con etichetta minima è il nodo 2. Si estrae da Q il nodo 2 e si esamina l'unico arco uscente da 2, cioè $(2,5)$:

$$(2,5): 10 = \pi_5 > \pi_2 + c_{25} = 9 \implies p_5 = 2, \pi_5 = 9, Q = \{5, 6, 7\}$$

L'albero aggiornato e le relative etichette sono:



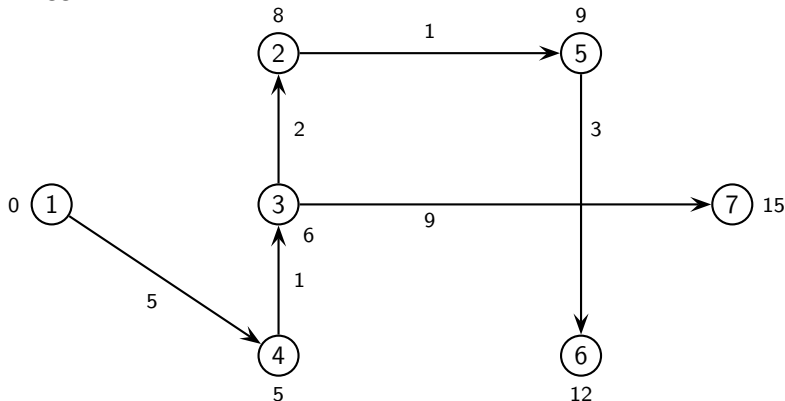
Algoritmo di Dijkstra

Iter. 5. In $Q = \{5, 6, 7\}$ il nodo con etichetta minima è il nodo 5. Si estrae da Q il nodo 5 e si esamina la stella uscente da 5, cioè gli archi $(5,6)$ e $(5,7)$:

$$(5,6): 14 = \pi_6 > \pi_5 + c_{56} = 12 \implies p_6 = 5, \quad \pi_6 = 12, \quad Q = \{6, 7\}$$

$$(5,7): 15 = \pi_7 = \pi_5 + c_{57} = 15$$

L'albero aggiornato e le relative etichette sono:



Algoritmo di Dijkstra

Iter. 6. Si estrae da $Q = \{6, 7\}$ il nodo di etichetta minima che è 6 e si esamina la stella uscente da 6, cioè l'arco (6,7):

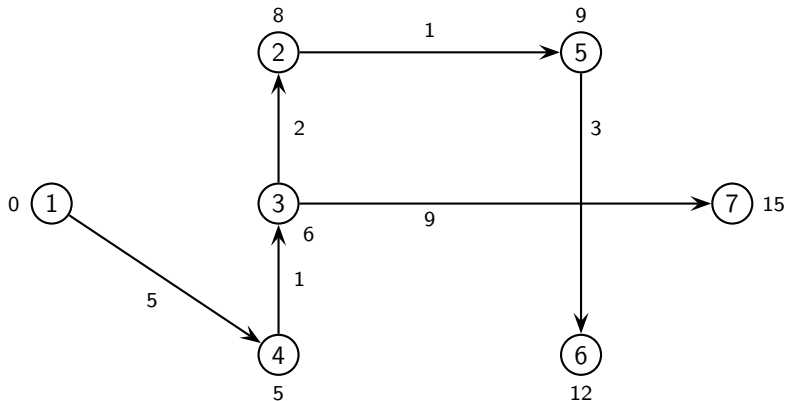
$$(6,7): 15 = \pi_7 < \pi_6 + c_{67} = 16$$

L'albero e le relative etichette rimangono le stesse dell'iterazione precedente.

Iter. 7. Dall'insieme $Q = \{7\}$ si estrae il nodo 7. Non ci sono archi uscenti dal nodo 7, quindi $Q = \emptyset$ e l'algoritmo si ferma.

Algoritmo di Dijkstra

Pertanto l'albero dei cammini minimi e le relative etichette ai nodi sono i seguenti:



Flusso massimo

Supponiamo di avere un grafo $G = (N, A)$ con capacità superiori u_{ij} .

Il problema del flusso massimo può essere formulato come problema di PL:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max v \\ E x = b \\ 0 \leq x \leq u \end{array} \right. \quad \text{dove} \quad b_i = \left\{ \begin{array}{ll} -v & \text{se } i = s \\ v & \text{se } i = t \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{array} \right. \quad (3)$$

Il valore di un flusso ammissibile x è indicato da v e rappresenta la quantità di flusso uscente dall'origine s ed entrante nella destinazione t , cioè

$$v = \sum_{(s,j) \in A} x_{sj} = \sum_{(i,t) \in A} x_{it}.$$

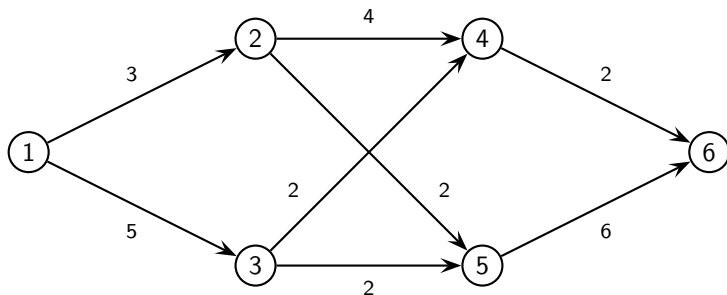
Algoritmo del simplesso per il flusso massimo

Il problema del flusso massimo può essere risolto mediante l'algoritmo del simplesso per flussi, dopo averlo trasformato in un problema di flusso di costo minimo aggiungendo un arco fittizio (t, s) di costo -1 e di capacità $+\infty$, assegnando costo nullo a tutti gli altri archi e ponendo bilanci nulli a tutti i nodi.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min -v \\ \left(\begin{array}{c|c} E & \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{array} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = 0 \\ 0 \leq x \leq u \\ v \geq 0 \end{array} \right.$$

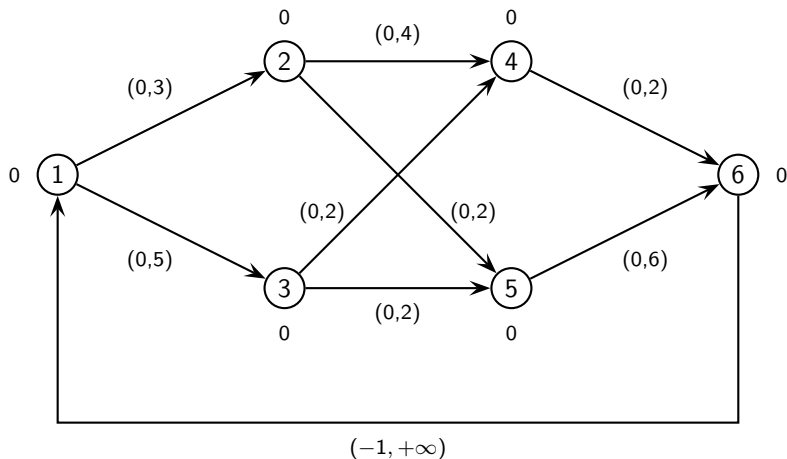
Algoritmo del simplesso per il flusso massimo

Consideriamo il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sul grafo seguente:



Algoritmo del simplesso per il flusso massimo

Tale problema equivale al problema di flusso di costo minimo sul seguente grafo:

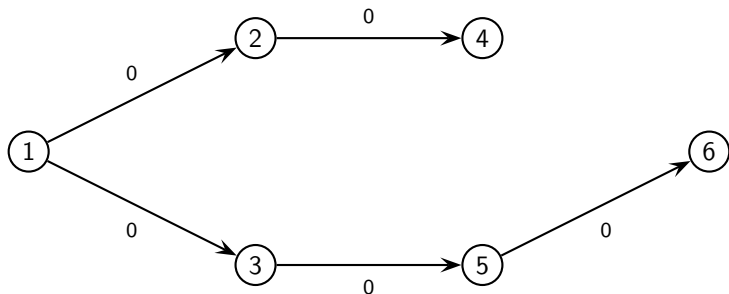


Algoritmo del simplesso per il flusso massimo

Partiamo dalla tripartizione:

$$\begin{aligned}T &= \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (5, 6)\}, \\L &= \{(2, 5), (3, 4), (4, 6), (6, 1)\}, \\U &= \emptyset.\end{aligned}$$

Iter. 1. Poiché tutti i nodi hanno bilancio nullo, il flusso di base iniziale è $\bar{x} = 0$:



Algoritmo del simplesso per il flusso massimo

I costi degli archi di T sono nulli e quindi anche i potenziali di base sono tutti uguali a zero. Calcoliamo i costi ridotti degli archi di L e U :

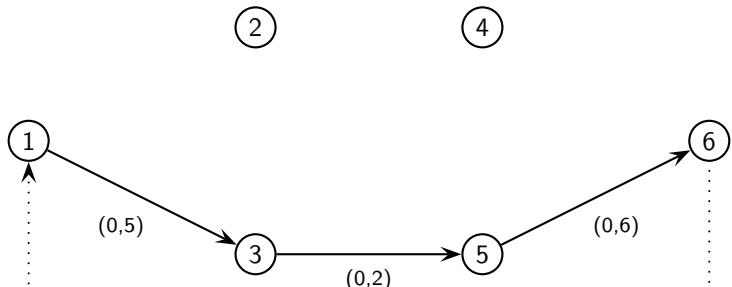
$$(2, 5) \in L : c_{25}^{\bar{\pi}} = 0$$

$$(3, 4) \in L : c_{34}^{\bar{\pi}} = 0$$

$$(4, 6) \in L : c_{46}^{\bar{\pi}} = 0$$

$$(6, 1) \in L : c_{61}^{\bar{\pi}} = -1$$

L'arco $(6,1)$ viola le condizioni di Bellman e forma con gli archi di T il seguente ciclo (sugli archi sono indicati il flusso e la capacità):



Algoritmo del simplesso per il flusso massimo

Non ci sono archi discordi al verso del ciclo, quindi abbiamo:

$$\vartheta^+ = \min \{u_{13} - \bar{x}_{13}, u_{35} - \bar{x}_{35}, u_{56} - \bar{x}_{56}, u_{61} - \bar{x}_{61}\} = \min \{5, 2, 6, +\infty\} = 2$$

$$\vartheta^- = \min \emptyset = +\infty$$

$$\vartheta = \vartheta^+ = 2$$

L'arco (6,1) da L va in T mentre l'arco (3,5) da B va in U . La nuova base è:

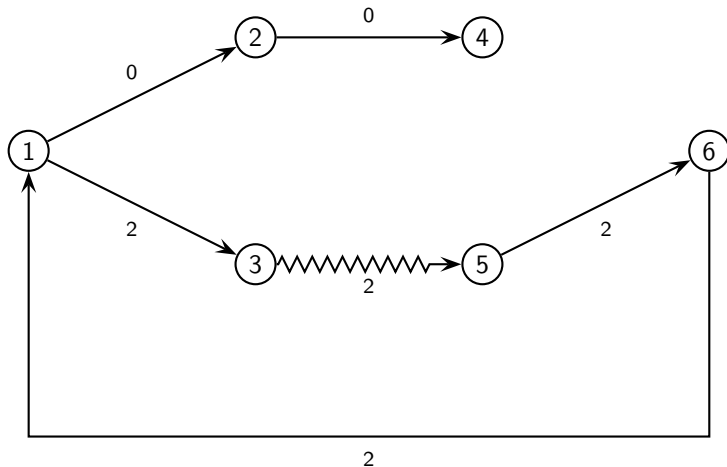
$$T = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (5, 6), (6, 1)\},$$

$$L = \{(2, 5), (3, 4), (4, 6)\},$$

$$U = \{(3, 5)\}.$$

Algoritmo del simplesso per il flusso massimo

Iter. 2. Il nuovo flusso di base è:



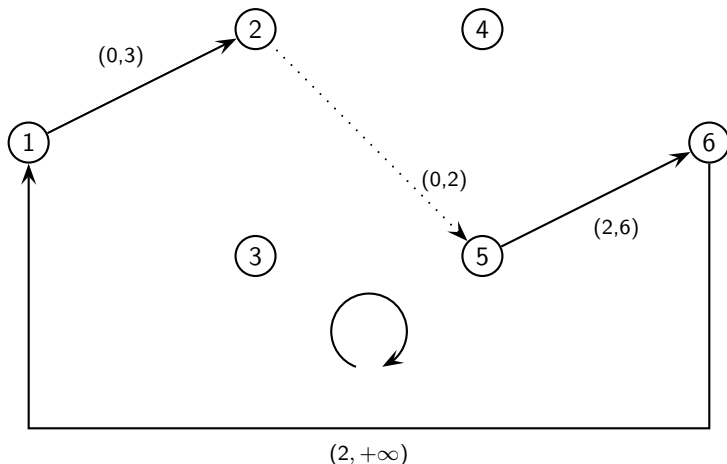
I potenziali di base diventano:

$$\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_2 = \bar{\pi}_3 = \bar{\pi}_4 = 0 \quad \bar{\pi}_6 = \bar{\pi}_1 - c_{61} = 0 - (-1) = 1 \quad \bar{\pi}_5 = \bar{\pi}_6 = 1.$$

Algoritmo del simplesso per il flusso massimo

$$(2, 5) \in L \quad c_{25}^{\bar{\pi}} = 0 + 0 - 1 = -1,$$

l'arco $(2,5)$ forma con T il seguente ciclo (sugli archi flusso e capacità):



Algoritmo del simplesso per il flusso massimo

$$\vartheta^+ = \min \{u_{12} - \bar{x}_{12}, u_{25} - \bar{x}_{25}, u_{56} - \bar{x}_{56}, u_{61} - \bar{x}_{61}\} = \min \{3, 2, 4, +\infty\} = 2$$

$$\vartheta^- = \min \emptyset = +\infty$$

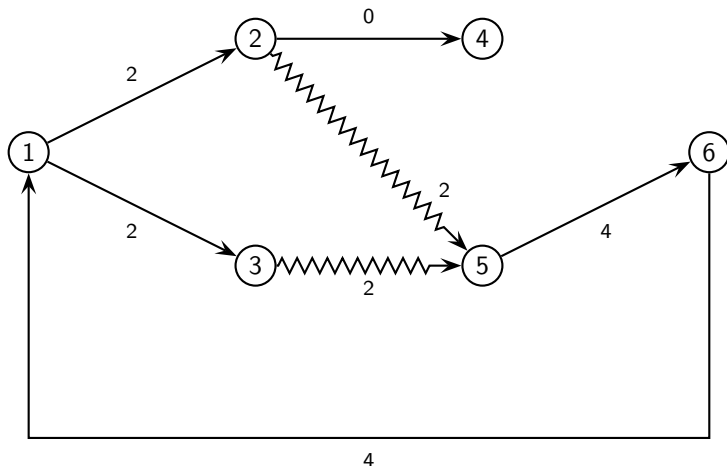
$$\vartheta = \vartheta^+ = 2$$

L'arco (2,5) da L va direttamente in U . La nuova tripartizione è:

Algoritmo del simplesso per il flusso massimo

$$T = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (5, 6), (6, 1)\},$$
$$L = \{(3, 4), (4, 6)\}, U = \{(2, 5), (3, 5)\}.$$

Iter. 3. Il nuovo flusso di base è:



Algoritmo del simplesso per il flusso massimo

Poiché l'albero T non è stato modificato, i potenziali di base rimangono invariati:

$$\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_2 = \bar{\pi}_3 = \bar{\pi}_4 = 0 \quad \bar{\pi}_5 = \bar{\pi}_6 = 1.$$

e

$$(2, 5) \in U : c_{25}^{\bar{\pi}} = 0 + 0 - 1 = -1$$

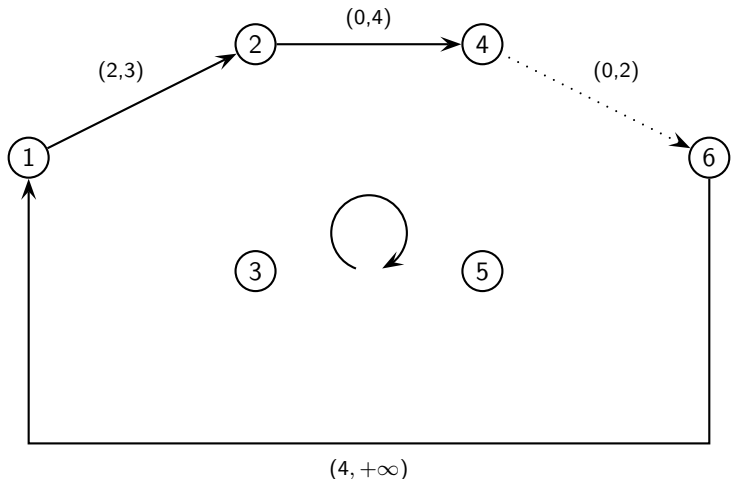
$$(3, 4) \in L : c_{34}^{\bar{\pi}} = 0 + 0 - 0 = 0$$

$$(3, 5) \in U : c_{35}^{\bar{\pi}} = 0 + 0 - 1 = -1$$

$$(4, 6) \in L : c_{46}^{\bar{\pi}} = 0 + 0 - 1 = -1$$

l'arco $(4,6)$ forma con gli archi di T il seguente ciclo (sugli archi flusso e capacità):

Algoritmo del simplesso per il flusso massimo



$$\vartheta^+ = \min \{u_{12} - \bar{x}_{12}, u_{24} - \bar{x}_{24}, u_{46} - \bar{x}_{46}, u_{61} - \bar{x}_{61}\} = \min \{1, 4, 2, +\infty\} = 1$$

$$\vartheta^- = \min \emptyset = +\infty$$

$$\vartheta = \vartheta^+ = 1$$

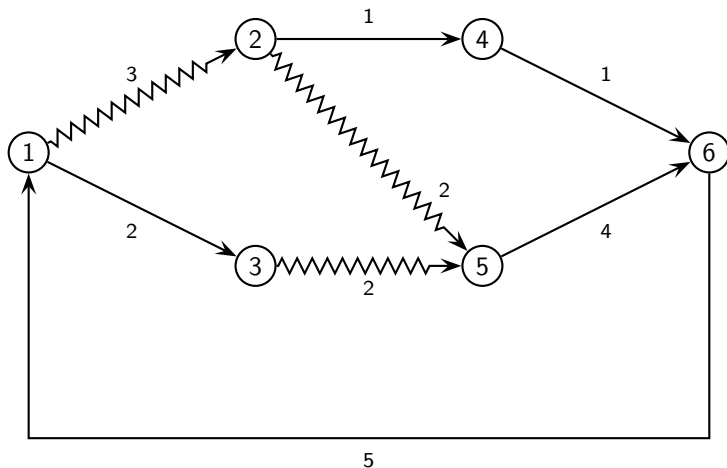
L'arco (1,2) da T va in U mentre (4,6) da L va in T . La nuova base è:

$$T = \{(1, 3), (2, 4), (4, 6), (5, 6), (6, 1)\},$$

$$L = \{(3, 4)\},$$

$$U = \{(1, 2), (2, 5), (3, 5)\}.$$

Iter. 4. Il nuovo flusso di base è:



Algoritmo del simplesso per il flusso massimo

I potenziali di base diventano:

$$\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_3 = 0 \quad \bar{\pi}_6 = \bar{\pi}_5 = \bar{\pi}_4 = \bar{\pi}_2 = 1.$$

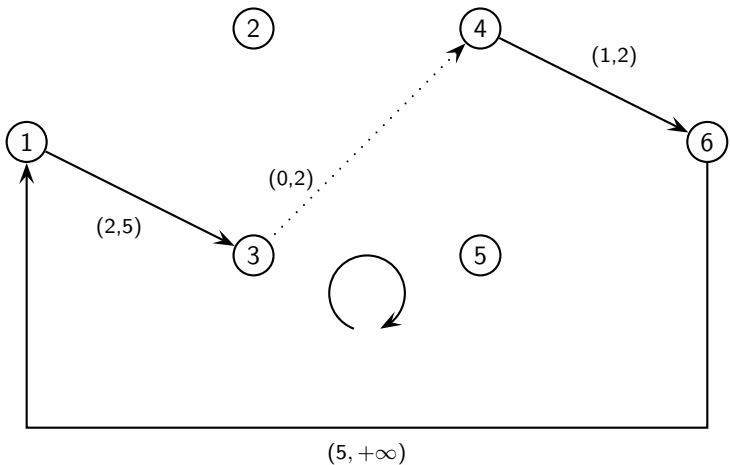
Calcoliamo, in ordine lessicografico, i costi ridotti degli archi di L e U :

$$(1, 2) \in U : c_{12}^{\bar{\pi}} = 0 + 0 - 1 = -1$$

$$(2, 5) \in U : c_{25}^{\bar{\pi}} = 0 + 1 - 1 = 0$$

$$(3, 4) \in L : c_{34}^{\bar{\pi}} = 0 + 0 - 1 = -1$$

quindi l'arco $(3,4)$ viola le condizioni di Bellman e forma con gli archi di T il seguente ciclo (sugli archi sono indicati il flusso e la capacità):



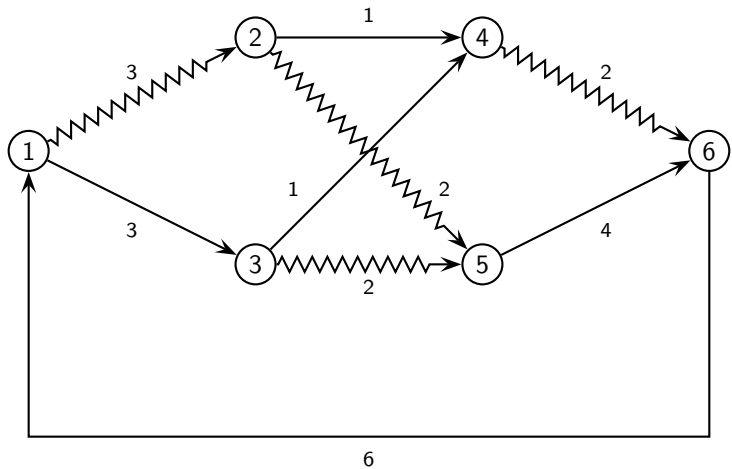
Non ci sono archi discordi al verso del ciclo, quindi abbiamo:

$$\begin{aligned}\vartheta^+ &= \min \{u_{13} - \bar{x}_{13}, u_{34} - \bar{x}_{34}, u_{46} - \bar{x}_{46}, u_{61} - \bar{x}_{61}\} = \min \{3, 2, 1, +\infty\} = 1 \\ \vartheta^- &= \min \emptyset = +\infty \\ \vartheta &= \vartheta^+ = 1\end{aligned}$$

Perciò l'arco (4,6) da T va in U mentre l'arco (3,4) da L va in T . La nuova tripartizione è:

$$\begin{aligned}T &= \{(1, 3), (2, 4), (3, 4), (5, 6), (6, 1)\}, \\ L &= \emptyset, \\ U &= \{(1, 2), (2, 5), (3, 5), (4, 6)\}.\end{aligned}$$

Iter. 5. Il nuovo flusso di base è:



I potenziali di base diventano:

$$\bar{\pi}_1 = \bar{\pi}_3 = \bar{\pi}_4 = \bar{\pi}_2 = 0 \quad \bar{\pi}_6 = \bar{\pi}_5 = 1.$$

$$(1, 2) \in U: \quad c_{12}^{\bar{\pi}} = 0 + 0 - 0 = 0$$

$$(2, 5) \in U: \quad c_{25}^{\bar{\pi}} = 0 + 0 - 1 = -1$$

$$(3, 5) \in U: \quad c_{35}^{\bar{\pi}} = 0 + 0 - 1 = -1$$

$$(4, 6) \in U: \quad c_{46}^{\bar{\pi}} = 0 + 0 - 1 = -1$$

quindi il flusso è ottimo di valore massimo uguale a 6. Il potenziale di base

$$\bar{\pi} = (0, 0, 0, 0, 1, 1)$$

è ottimo per il problema del taglio di capacità minima ed il taglio associato a $\bar{\pi}$ è

$$N_s = \{1, 2, 3, 4\} \quad N_t = \{5, 6\},$$

che infatti ha capacità uguale a 6.

Problema del taglio di capacità minima

Le condizioni di ottimalità per il problema del flusso massimo si basano sul concetto di taglio in un grafo.

Un taglio (N_s, N_t) è una partizione di N in due sottoinsiemi, cioè

$$N = N_s \cup N_t, \quad \text{con} \quad N_s \cap N_t = \emptyset,$$

Un taglio (N_s, N_t) si dice ammissibile se N_s contiene almeno s e N_t contiene almeno t .

Gli archi diretti e inversi del taglio (N_s, N_t) sono così definiti:

$$\begin{aligned} A^+ &= \{(i, j) \in A : i \in N_s, j \in N_t\} && \text{archi diretti,} \\ A^- &= \{(i, j) \in A : i \in N_t, j \in N_s\} && \text{archi inversi.} \end{aligned}$$

La capacità del taglio (N_s, N_t) è data da:

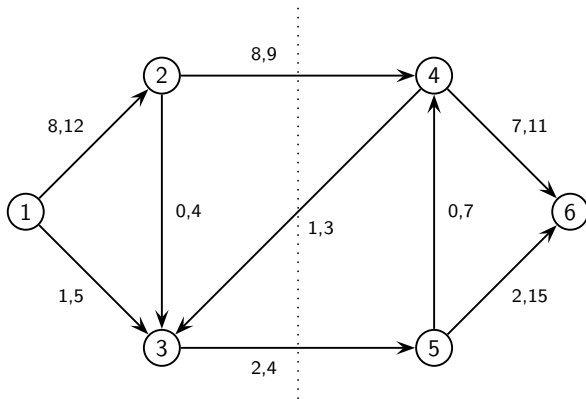
$$u(N_s, N_t) = \sum_{(i,j) \in A^+} u_{ij}. \quad (4)$$

Dato un flusso x , il valore del flusso sul taglio (N_s, N_t) è definito da:

$$x(N_s, N_t) = \sum_{(i,j) \in A^+} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in A^-} x_{ij}. \quad (5)$$

Problema del taglio di capacità minima

Consideriamo il grafo seguente in cui sugli archi sono indicati flusso e capacità:



Il taglio ammissibile (N_s, N_t) indicato in figura è

$$N_s = \{1, 2, 3\} \quad N_t = \{4, 5, 6\},$$

gli archi diretti e inversi del taglio sono rispettivamente

$$A^+ = \{(2, 4), (3, 5)\} \quad \text{e} \quad A^- = \{(4, 3)\},$$

Problema del taglio di capacità minima

La capacità del taglio è

$$u(N_s, N_t) = u_{24} + u_{35} = 9 + 4 = 13,$$

mentre il valore del flusso sul taglio è

$$x(N_s, N_t) = x_{24} + x_{35} - x_{43} = 8 + 2 - 1 = 9.$$

Dimostriamo un'importante relazione che lega il flusso e la capacità di un qualunque taglio.

Dato un flusso ammissibile x ed un taglio ammissibile (N_s, N_t) si ha che

$$v = x(N_s, N_t) \leq u(N_s, N_t).$$

Teorema max flow – min cut

Se esistono un flusso ammissibile x ed un taglio ammissibile (N_s, N_t) tali che

$$x(N_s, N_t) = u(N_s, N_t),$$

allora x è un flusso di valore massimo e (N_s, N_t) è un taglio di capacità minima.

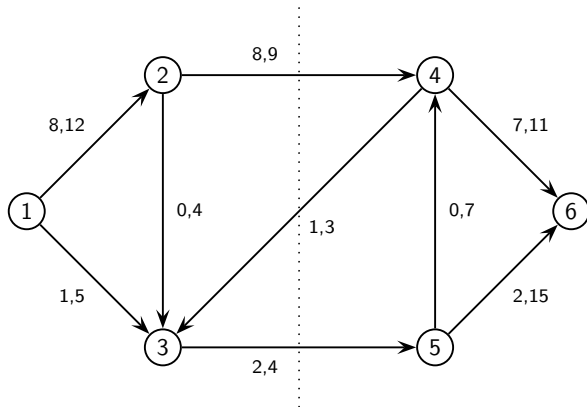
Algoritmo di Ford–Fulkerson

Sul teorema max flow – min cut si basa l'algoritmo di Ford–Fulkerson. Dato un flusso x ammissibile, il grafo residuo (relativo a x) è un grafo $G(x) = (N, A(x))$ con gli stessi nodi del grafo G , mentre gli archi e le loro capacità r_{ij} , dette residue, sono così definiti:

$$\begin{aligned} (i, j) \in A, \quad x_{ij} < u_{ij} &\implies (i, j) \in A(x), \quad r_{ij} = u_{ij} - x_{ij}, \\ (i, j) \in A, \quad x_{ij} > 0 &\implies (j, i) \in A(x), \quad r_{ji} = x_{ij} \end{aligned}$$

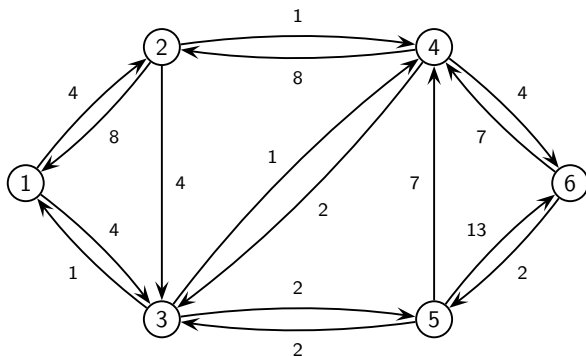
Algoritmo di Ford–Fulkerson

Consideriamo il grafo seguente in cui sugli archi sono indicati flusso e capacità:



Algoritmo di Ford–Fulkerson

Il grafo residuo (con capacità residue indicate sugli archi) è dato da:



Definiamo il concetto di cammino aumentante.

Dato un flusso x ammissibile, un cammino aumentante (rispetto a x) è un cammino orientato da s a t nel grafo residuo $G(x)$.

Un cammino aumentante può essere non orientato nel grafo di partenza.

L'algoritmo di Ford–Fulkerson cerca ad ogni iterazione un cammino aumentante.

Se tale cammino esiste, allora il flusso viene aggiornato spedendo il massimo flusso possibile sul cammino aumentante, uguale alla minima capacità residua degli archi che formano il cammino aumentante.

Se non esistono cammini aumentanti, allora il flusso corrente è di valore massimo e l'algoritmo trova anche un taglio di capacità minima.

ALGORITMO DI FORD-FULKERSON

- ❶ Inizializza il flusso $x_{ij} = 0$ per ogni arco $(i, j) \in A$.
- ❷ Costruisci il grafo residuo $G(x)$.
- ❸ **se** esiste un cammino aumentante \mathcal{C}
 allora calcola $\delta = \min\{r_{ij} : (i, j) \in \mathcal{C}\}$
 spedisci δ unità di flusso lungo il cammino \mathcal{C} , cioè

$$\text{per ogni arco } (i, j) \in A \text{ poni } x_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + \delta & \text{se } (i, j) \in \mathcal{C}, \\ x_{ij} - \delta & \text{se } (j, i) \in \mathcal{C}, \\ x_{ij} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e torna al passo 2.

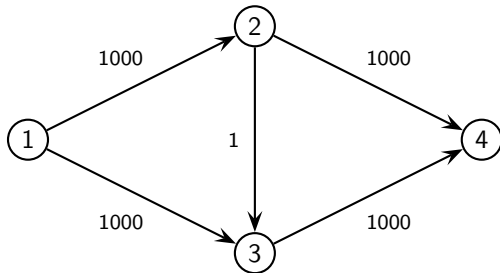
altrimenti STOP

(x è un flusso massimo ed un taglio di capacità minima è (N_s, N_t) con
 $N_s = \{i \in N : \text{esiste un cammino orientato da } s \text{ a } i \text{ in } G(x)\}$
 $N_t = N \setminus N_s$).

Se le capacità u_{ij} sono intere, l'algoritmo di Ford–Fulkerson trova un flusso massimo ed un taglio di capacità minima in un numero finito di iterazioni. In questa versione l'algoritmo di Ford–Fulkerson ha complessità $O(mU)$, dove $U = n \max_{(i,j) \in A} u_{ij}$.

Infatti l'algoritmo per la ricerca di un cammino aumentante, essendo una visita del grafo, ha complessità $O(m)$ e poiché ad ogni iterazione il flusso cresce di almeno una unità l'algoritmo termina al più dopo U iterazioni.

Se non abbiamo regole precise per scegliere i cammini aumentanti, la convergenza dell'algoritmo può risultare molto lenta.



Possiamo risolvere il problema applicando l'algoritmo di Ford–Fulkerson in cui alla prima iterazione scegliamo il cammino aumentante 1–2–3–4, sul quale possiamo spedire al massimo 1 unità di flusso. Alla seconda iterazione scegliamo il cammino aumentante 1–3–2–4, sul quale possiamo spedire ancora 1 sola unità di flusso. Proseguendo in questo modo, troviamo il flusso massimo (di valore 2000) dopo 2000 iterazioni.

C'è una variante dell'algoritmo di Ford–Fulkerson, dovuta ad Edmonds–Karp, in cui tra tutti i possibili cammini aumentanti si sceglie quello col minimo numero di archi.

Descriviamo ora l'algoritmo di Edmonds–Karp per la ricerca del cammino aumentate.

Se nel grafo residuo $G(x)$ esiste almeno un cammino orientato da s a t , tale procedura trova in $G(x)$ un cammino da s a t con il minimo numero di archi, altrimenti trova un taglio di capacità minima.

Tale procedura è una visita a ventaglio del grafo residuo a partire dall'origine s . L'algoritmo fa uso dell'insieme Q dei nodi raggiunti nell'esplorazione del grafo e del vettore p dei predecessori (i nodi non ancora raggiunti hanno predecessore uguale a -1).

L'insieme Q rappresenta una fila i cui elementi vengono esaminati in ordine *first-in first-out*, cioè si estraggono dalla testa e si aggiungono in coda.

Si parte con Q che contiene solo l'origine s . Ad ogni passo si estrae il *primo* nodo di Q , diciamo i , si esaminano gli archi uscenti dal nodo i in ordine lessicografico e si aggiungono *in fondo* a Q tutti i nodi collegati al nodo i che non sono ancora stati raggiunti.

L'algoritmo termina in due casi: o quando il nodo t entra in Q , oppure quando Q si svuota.

Nel primo caso l'algoritmo fornisce un cammino aumentante dato dal vettore p dei predecessori, nel secondo caso non esiste un cammino aumentante e l'algoritmo fornisce un taglio di capacità minima (N_s, N_t) dato da:

$$N_s = \{i \in N : p_i \neq -1\} \quad N_t = \{i \in N : p_i = -1\},$$

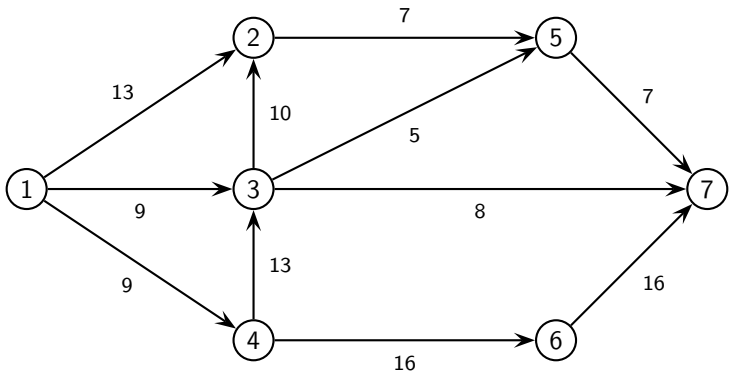
Osserviamo che l'insieme N_s è costituito da tutti e soli i nodi raggiungibili dall'origine s con un cammino orientato nel grafo residuo.

ALGORITMO DI EDMONDS–KARP

- ❶ Sia $A(x)$ l'insieme degli archi del grafo residuo. Inizializza l'insieme $Q = \boxed{s}$ ed i predecessori $p_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = s, \\ -1 & \text{se } i \neq s. \end{cases}$
- ❷ **se** $Q = \emptyset$
 allora STOP (p fornisce un taglio di capacità minima).
 altrimenti estrai il primo elemento i di Q .
- ❸ **se** $(i, t) \in A(x)$
 allora $p_t = i$, STOP (p fornisce un cammino aumentante).
- ❹ Nel grafo residuo analizza in ordine lessicografico gli archi uscenti dal nodo i . Per ogni arco $(i, j) \in A(x)$ tale che $p_j = -1$, poni $p_j = i$ e aggiungi il nodo j in fondo a Q . Torna al passo 2.

Figure : algoritmo di Edmonds–Karp per la ricerca di un cammino aumentante.

Risolviamo il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7 sul grafo seguente con l'algoritmo di Edmonds–Karp per la ricerca di un cammino aumentante.



Iter. 1. Partiamo con il flusso x nullo su tutti gli archi.
Applichiamo ora l'algoritmo di Edmonds–Karp per trovare un cammino aumentante.

Inizializziamo $Q = \boxed{1}$ ed il vettore dei predecessori $p = (0, -1, -1, -1, -1, -1, -1)$. Si estrae il primo elemento di Q , cioè il nodo 1, e si considera la stella uscente dal nodo 1 formata dagli archi (1,2), (1,3) e (1,4). Poiché i nodi 2, 3 e 4 hanno il predecessore uguale a -1 , cioè non sono stati ancora raggiunti da un cammino orientato che parte dall'origine 1, assegnamo loro il nodo 1 come predecessore e li inseriamo in coda a Q , quindi si ottiene

$$Q = \boxed{2 \mid 3 \mid 4} \quad p = (0, 1, 1, 1, -1, -1, -1).$$

Si estrae il primo elemento di Q , cioè il nodo 2. C'è un solo arco uscente dal nodo 2, l'arco (2,5). Anche in questo caso il nodo 5 ha predecessore uguale a -1 , quindi cambiamo il suo predecessore in 2 e inseriamo il nodo 5 in fondo a Q :

$$Q = \boxed{3 \mid 4 \mid 5} \quad p = (0, 1, 1, 1, 2, -1, -1).$$

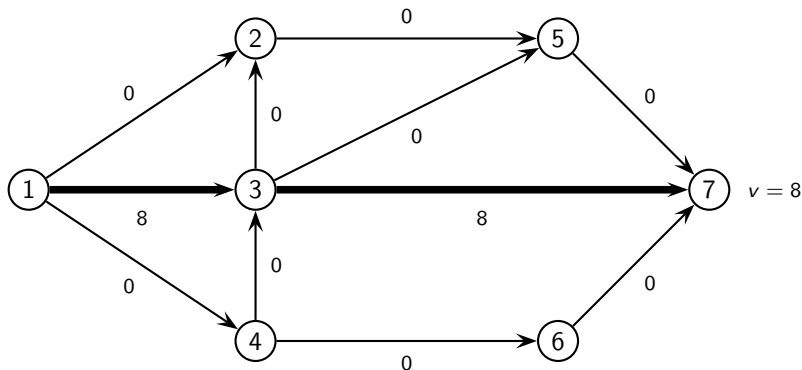
Selezioniamo il nodo 3. Gli archi uscenti dal nodo 3 sono (3,2), (3,5) e (3,7). Poiché possiamo raggiungere la destinazione 7 dal nodo 3, poniamo $p_7 = 3$ e l'algoritmo si ferma. Il cammino aumentante lo ricaviamo dal vettore dei predecessori

$$p = (0, 1, 1, 1, 2, -1, 3).$$

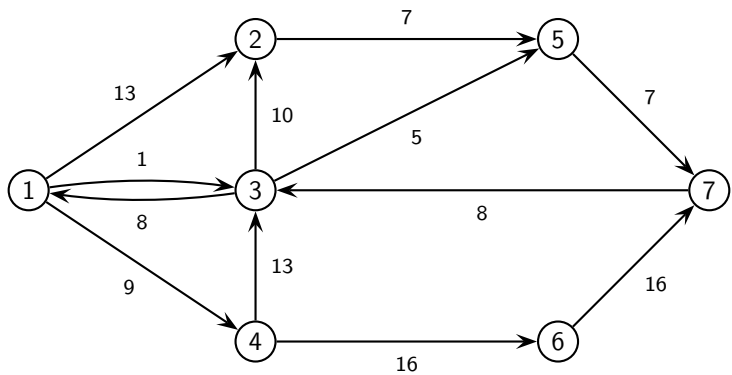
Partiamo dalla destinazione 7, passiamo al suo predecessore $p_7 = 3$ e torniamo ancora indietro al predecessore del nodo 3, cioè $p_3 = 1$, quindi il cammino aumentante è 1–3–7. Per trovare la quantità di flusso δ da spedire lungo il cammino aumentante, osserviamo che le capacità residue degli archi che formano tale cammino sono:

$$r_{13} = 9, \quad r_{37} = 8,$$

per cui $\delta = \min\{9, 8\} = 8$. Aggiorniamo il flusso spedendo 8 unità lungo il cammino 1–3–7:



Iter. 2. Il grafo residuo diventa:



Applichiamo l'algoritmo di Edmonds–Karp e partiamo con

$$Q = \boxed{1} \quad \text{e} \quad p = (0, -1, -1, -1, -1, -1, -1).$$

Nel grafo residuo gli archi uscenti dal nodo 1 sono (1,2), (1,3) e (1,4) ed i nodi 2, 3 e 4 non sono stati ancora raggiunti nella visita del grafo, cioè hanno predecessore uguale a -1 , perciò

$$Q = \boxed{2} \boxed{3} \boxed{4} \quad p = (0, 1, 1, 1, -1, -1, -1).$$

Selezioniamo il nodo 2. L'unico arco uscente dal nodo 2 è (2,5) ed il nodo 5 non è stato raggiunto, quindi lo inseriamo in fondo a Q e poniamo $p_5 = 2$:

$$Q = \boxed{3} \boxed{4} \boxed{5} \quad p = (0, 1, 1, 1, 2, -1, -1).$$

Selezioniamo il nodo 3. Gli archi uscenti dal nodo 3, stavolta, sono (3,1), (3,2) e (3,5) (l'arco (3,7) si è saturato alla prima iterazione per cui non può comparire nel grafo residuo corrente). I nodi 1, 2 e 5 sono stati già raggiunti nella visita, infatti $p_2 = 1$ e $p_5 = 2$, e quindi non possiamo inserire nessun nodo in Q che diventa

$$Q = \boxed{4} \boxed{5}$$

Selezioniamo il nodo 4, la sua stella uscente è formata da (4,3) e (4,6). Il nodo 3 è già stato raggiunto, ma il nodo 6 non ancora, per cui si ha

$$Q = \boxed{5 \mid 6} \quad p = (0, 1, 1, 1, 2, 4, -1).$$

Selezioniamo il nodo 5. L'unico arco uscente dal nodo 5 è (5,7) e quindi abbiamo raggiunto la destinazione 7. Poniamo $p_7 = 5$ e l'algoritmo termina. Il cammino aumentante è dato da:

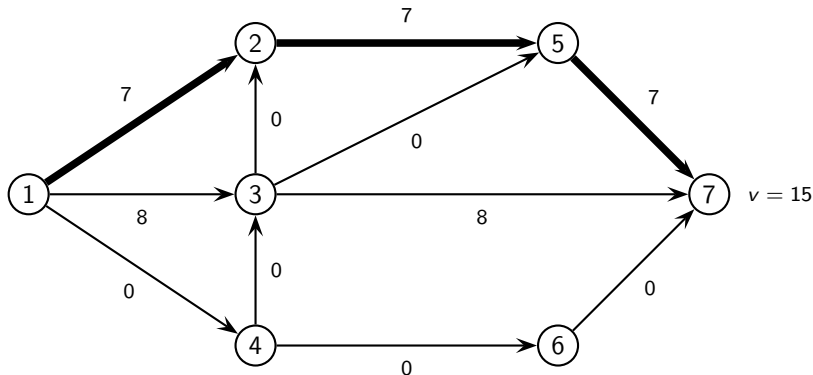
$$p_7 = 5, \quad p_5 = 2, \quad p_2 = 1,$$

cioè 1–2–5–7. Per trovare δ calcoliamo le capacità residue degli archi che formano il cammino aumentante:

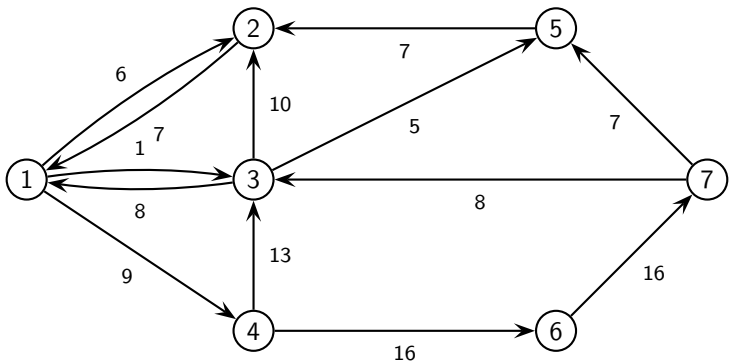
$$r_{12} = 13 \quad r_{25} = 7 \quad r_{57} = 7,$$

quindi $\delta = 7$.

Aggiorniamo il flusso spedendo 7 unità lungo il cammino 1-2-5-7:



Iter. 3. Il grafo residuo diventa:



Cerchiamo un altro cammino aumentante con l'algoritmo di Edmonds–Karp.
Inizializziamo

$$Q = \boxed{1} \quad \text{e} \quad p = (0, -1, -1, -1, -1, -1, -1).$$

Nel grafo residuo gli archi uscenti dal nodo 1 sono sempre (1,2), (1,3) e (1,4) ed i nodi 2, 3 e 4 non sono stati ancora raggiunti nella visita, perciò

$$Q = \boxed{2 \mid 3 \mid 4} \quad p = (0, 1, 1, 1, -1, -1, -1).$$

Si estrae il nodo 2. L'unico arco uscente dal nodo 2 è (2,1) (l'arco (2,5) si è saturato alla precedente iterazione) ed il nodo 1 è il nodo origine:

$$Q = \boxed{3 \mid 4} \quad p = (0, 1, 1, 1, -1, -1, -1).$$

Selezioniamo il nodo 3: gli archi uscenti dal nodo 3 sono (3,1), (3,2) e (3,5). I nodi 1 e 2 sono già stati raggiunti nella visita, ma il nodo 5 non ancora, per cui 5 si inserisce in fondo a Q e si pone $p_5 = 3$, ottenendo:

$$Q = \boxed{4 \mid 5} \quad p = (0, 1, 1, 1, 3, -1, -1).$$

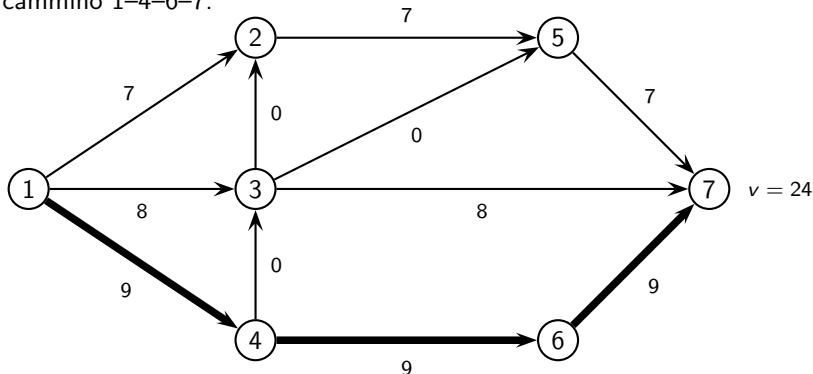
Selezioniamo il nodo 4. La stella uscente dal nodo 4 è (4,3) e (4,6), quindi inseriamo in fondo a Q solo il nodo 6 (il nodo 3 è già stato raggiunto) e poniamo $p_6 = 4$:

$$Q = \boxed{5 \mid 6} \quad p = (0, 1, 1, 1, 3, 4, -1).$$

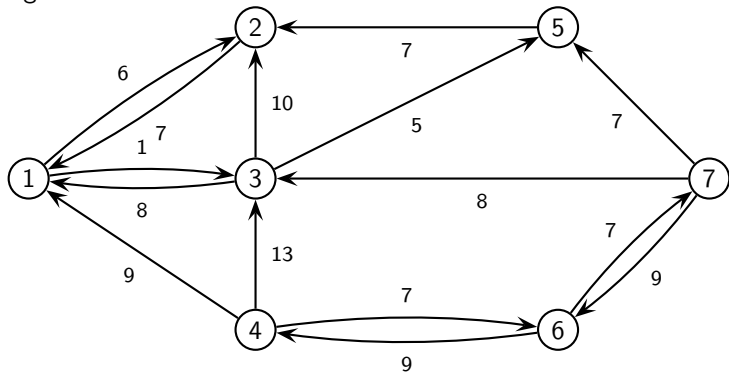
Selezioniamo il nodo 5. L'unico arco uscente dal nodo 5 è $(5,2)$, ma il nodo 2 è già stato raggiunto, per cui otteniamo $Q = \boxed{6}$. Selezionando il nodo 6, abbiamo l'arco $(6,7)$, quindi poniamo $p_7 = 6$ e ci fermiamo. Il cammino aumentante è:

$$p_7 = 6, \quad p_6 = 4, \quad p_4 = 1,$$

cioè $1-4-6-7$ con $\delta = \min\{9, 16, 16\} = 9$. Aggiorniamo il flusso spedendo 9 unità lungo il cammino $1-4-6-7$:



Iter. 4. Il grafo residuo diventa:



Cerchiamo un altro cammino aumentante con l'algoritmo di Edmonds–Karp. Inizializziamo

$$Q = \boxed{1} \quad e \quad p = (0, -1, -1, -1, -1, -1, -1).$$

Nel grafo residuo gli archi uscenti dal nodo 1 sono (1,2) e (1,3) (l'arco (1,4) si è saturato alla precedente iterazione) ed i nodi 2, 3 e 4 non sono stati ancora raggiunti nella visita, perciò

$$Q = \boxed{2 \mid 3} \quad p = (0, 1, 1, -1, -1, -1, -1).$$

Selezioniamo il nodo 2. L'unico arco uscente dal nodo 2 è (2,1) ed il nodo 1 è il nodo origine, quindi:

$$Q = \boxed{3} \quad p = (0, 1, 1, -1, -1, -1, -1).$$

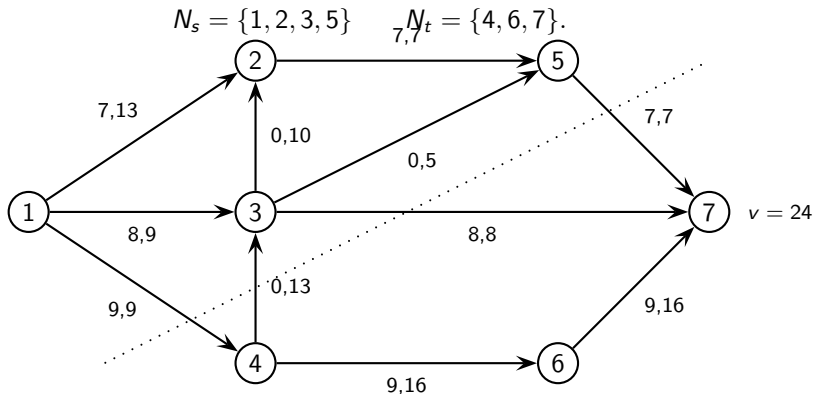
Selezioniamo il nodo 3: gli archi uscenti dal nodo 3 sono (3,1), (3,2) e (3,5). I nodi 1 e 2 sono già stati raggiunti nella visita, ma il nodo 5 non ancora, per cui 5 si inserisce in fondo a Q e si pone $p_5 = 3$, ottenendo:

$$Q = \boxed{5} \quad p = (0, 1, 1, -1, 3, -1, -1).$$

Selezioniamo il nodo 5. L'unico arco uscente dal nodo 5 è (5,2), ma il nodo 2 è già stato raggiunto, quindi Q diventa vuoto:

$$Q = \emptyset \quad p = (0, 1, 1, -1, 3, -1, -1).$$

L'algoritmo si ferma senza aver trovato un cammino aumentante, questo significa che l'ultimo flusso che abbiamo trovato è ottimo. Inoltre l'algoritmo di Edmonds–Karp fornisce anche un taglio (N_s, N_t) di capacità minima, inserendo in N_s tutti i nodi raggiunti nella visita del grafo ed in N_t quelli non raggiunti, cioè



Osserviamo che gli archi diretti del taglio $(1,4)$, $(3,7)$ e $(5,7)$ sono saturi, mentre l'arco inverso $(4,3)$ è vuoto ed inoltre che il taglio ha capacità 24 uguale al valore del flusso massimo.

Terminazione dell'algoritmo di Ford–Fulkerson

Abbiamo visto che se le capacità superiori degli archi sono intere, allora l'algoritmo di Ford–Fulkerson termina dopo un numero finito di iterazioni perché su ogni cammino aumentante si spedisce almeno una unità di flusso.

L'algoritmo termina dopo un numero finito di iterazioni anche nel caso in cui le capacità superiori siano razionali, infatti se D è un denominatore comune a tutte le capacità superiori, allora su ogni cammino aumentante si spediscono almeno $1/D$ unità di flusso.

Nel caso in cui le capacità superiori siano numeri irrazionali, l'algoritmo di Ford–Fulkerson può non terminare dopo un numero finito di iterazioni e può generare un flusso che converge ad un valore strettamente minore di quello ottimo.