

ANN201 Projet

GIOVANNINI Mathéo BOULOGNE Pierre

1 Introduction

Ce projet constitue le sujet numéro 3 et consiste à la résolution numérique à l'aide de Matlab des équations de Stokes avec des éléments finis $P^2 - P^1$. On s'intéresse dans ce TP à l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible et stationnaire dans un canal bidimensionnel, en régime à faible nombre de Reynolds. Ce problème est modélisé par les équations de Stokes:

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

qui correspondent à une simplification des équations de Navier-Stokes dans lesquelles on a négligé le phénomène de convection par rapport au phénomène de diffusion.

Pour discrétiser ces équations, nous allons utiliser des éléments finis P^2 . Avant d'employer ce type d'éléments finis pour les équations de Stokes, nous allons d'abord les mettre en œuvre sur le problème de Poisson du TP 1.

2 Éléments finis P^2 pour le problème de Poisson avec condition de Neumann

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 à frontière polygonale et $f \in L^2(\Omega)$. On rappelle le problème du TP 1 : Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} u - \Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Afin d'étudier plus facilement le problème avec Matlab, on va chercher à le discrétiser. Pour cela, on pose T_h une triangulation du domaine Ω et $(T_l)_{l=1,L}$ les triangles de T_h . On approche $H^1(\Omega)$ par des éléments finis P^2 associés à la triangulation. On note V_h l'approximation de $H^1(\Omega)$ obtenue:

$$V_h = \{v_h \in C^0(\Omega), v_h|_{T_l} \in \mathbb{P}^2 \forall l = 1, \dots, L\}$$

où \mathbb{P}^2 est l'espace des polynômes de degré au plus 2. Les fonctions de base sont associées aux sommets des triangles et aux milieux des arêtes. On note donc $(M_I)_{I=1,N}$ les noeuds du maillage (qui incluent les sommets et les milieux des arêtes) et $(w_I)_{I=1,N}$ la base de V_h définie par $w_I(M_J) = \delta_{IJ}$, $1 \leq I, J \leq N$.

La formulation variationnelle discrète vérifiée par la solution approchée u_h devient: Trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$\forall v_h \in V_h, \int_{\Omega} u_h v_h d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h d\Omega = \int_{\Omega} f v_h d\Omega \quad (FV_h)$$

Comme $V_h = Vect((w_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket})$ et que $w_i(M_j) = \delta_{ij}$, la solution approchée u_h vérifie : $\forall (x, y) \in \bar{\Omega}$, $u_h(x, y) = \sum_{I=1}^N u_h(M_I) w_I(x, y)$ ($w_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ étant une base de V_h on remarque que u_h est solution de (FV_h) si et seulement si u_h vérifie :

$$\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket, \int_{\Omega} u_h w_j d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla w_j d\Omega = \int_{\Omega} f w_j d\Omega$$

On a alors :

$$(FV_h) \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \sum_{j=1}^N \left(u_h(M_j) \int_{\Omega} w_i w_j d\Omega \right) + \sum_{j=1}^N \left(u_h(M_j) \int_{\Omega} \nabla w_i \cdot \nabla w_j d\Omega \right) = \int_{\Omega} f w_i d\Omega$$

Finalement, (FV_h) est équivalent au système matriciel : $(\mathbb{M} + \mathbb{K})\vec{U} = \vec{L}$.

Avec :

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, \mathbb{M}_{i,j} &= \int_{\Omega} w_i w_j d\Omega \\ \mathbb{K}_{i,j} &= \int_{\Omega} \nabla w_i \cdot \nabla w_j d\Omega \\ \vec{U}_i &= u_h(M_i) \\ \vec{L}_i &= \int_{\Omega} f w_i d\Omega = \ell(w_i) \end{aligned}$$

a étant coercive, $\mathbb{M} + \mathbb{K}$ est définie positive, donc inversible, de plus, ces matrices sont creuses, c'est une propriété inhérente aux fonctions de base choisies.
 $(x,y) = (1+5\pi^2) \cos(\pi x) \cos(2\pi y)$ veut désormais résoudre le problème dans l'ouvert $\Omega = [0,2] \times [0,2]$. Pour cela, nous allons créer des maillages d'ordre 2 du carré Ω avec le logiciel Gmsh, en voici un exemple :

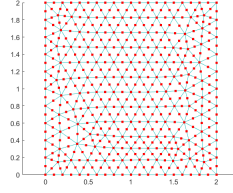


Figure 1: Maillage

On calcule à présent les matrices élémentaires $\mathbb{M}^{élé}$ et $\mathbb{K}^{élé}$ sur les différents triangles à partir des coordonnées des 3 sommets de chaque triangle, puis on assemble les matrices élémentaires pour former les matrices de rigidité et de masse \mathbb{K} et \mathbb{M} . Pour ce faire, nous allons utiliser la méthode du passage à l'élément fini de référence. Pour calculer les matrices élémentaires associées à ce triangle composé des points M_1 , M_2 et M_3 , on se ramène d'abord au triangle de référence \hat{T} composé des points $\hat{M}_1=(0,0)$, $\hat{M}_2=(1,0)$ et $\hat{M}_3=(0,1)$

La transformation $F_l: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui permet de passer du triangle de référence au triangle $T_l: \forall i = 1, 2, 3, F_l(\hat{M}_i) = M_i$, s'écrit sous la forme:

$$\forall \hat{M} \in \mathbb{R}^2, F_l(\hat{M}) = B_l \hat{M} + S_l \text{ avec}$$

$$B = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}, S_l = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Les intégrales de masse sur \hat{T} peuvent alors s'écrire:

$$\int_{T_l} w_I(M) w_J(M) d\Omega = \int_{\hat{T}} \hat{w}_I(\hat{M}) \hat{w}_J(\hat{M}) d\hat{\Omega} |det B_l| d\hat{\Omega}, I, J = 1, \dots, 6$$

et les intégrales de rigidité:

$$\int_{T_l} \nabla w_I(M) \cdot \nabla w_J(M) d\Omega = \int_{\hat{T}} [(B_l^T)^{-1} \nabla \hat{w}_I(\hat{M})] [(B_l^T)^{-1} \nabla \hat{w}_J(\hat{M})] |det B_l| d\hat{\Omega}$$

Les coordonnées barycentriques du triangle \hat{T} s'écrivent alors:

$$\hat{\lambda}_1 = 1 - \hat{x} - \hat{y}, \hat{\lambda}_2 = \hat{x}, \hat{\lambda}_3 = \hat{y}$$

Pour calculer les éléments finis P^2 , nous allons faire appel à une formule de quadrature de Gauss-Legendre, de la forme:

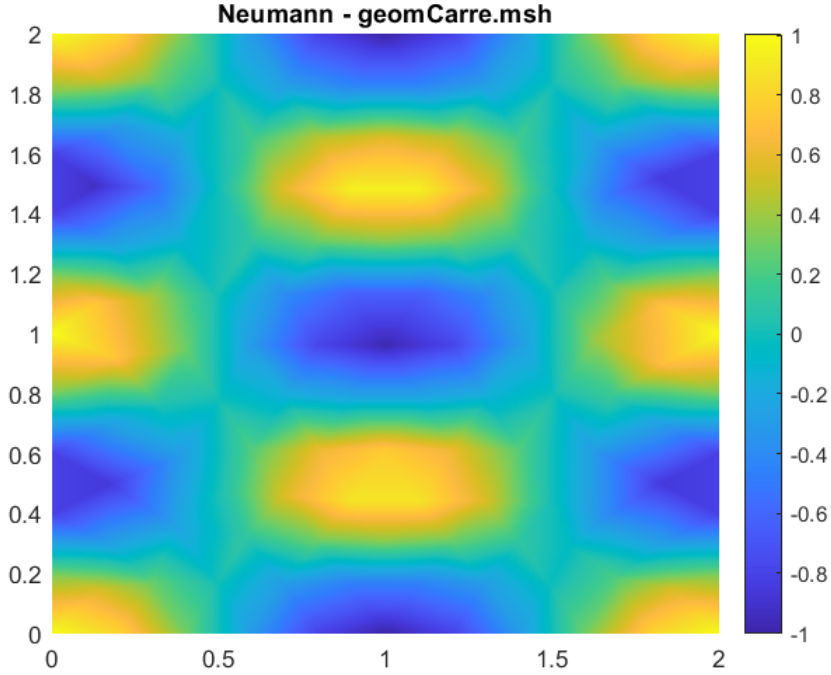
$$\int_{\hat{T}} G d\hat{\Omega} \simeq \sum_{q=1}^N \hat{c}^q G(\hat{S}^q)$$

On applique cette méthode dans les routines correspondantes aux matrices de masse et de rigidité.

Enfin, on veut vérifier que le code calcule une solution approchée u_h correcte. Pour cela, on résout le problème (1) avec une solution u connue égale à:

$u(x, y) = \cos(\pi x)\cos(2\pi y)$, pour $(x, y) \in \bar{\Omega} = [0, 2] \times [0, 2]$.

Après calcul de Δu , on injecte le résultat dans la formulation variationnelle, et on obtient $f(x, y) = (1 + 5\pi^2) \cos(\pi x) \cos(2\pi y)$



En assimilant u à son interpolée $\pi_h u$, on calcule la norme L^2 de l'erreur:

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|\pi_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\pi_h u - u_h|^2 d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^N (u(M_i) - u_h(M_i)) w_i \right|^2 d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (u(M_i) - u_h(M_i))(u(M_j) - u_h(M_j)) w_i w_j d\Omega \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (u(M_i) - u_h(M_i))(u(M_j) - u_h(M_j)) (\mathbb{M})_{ij} \\
&= {}^T(U - U_h) \mathbb{M} (U - U_h)
\end{aligned}$$

On calcule également la semi-norme H^1 de l'erreur:

$$\begin{aligned}
|u - u_h|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|\nabla \pi_h u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla \pi_h u - \nabla u_h|^2 d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (u(M_i) - u_h(M_i))(u(M_j) - u_h(M_j)) \nabla w_i \nabla w_j d\Omega \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (u(M_i) - u_h(M_i))(u(M_j) - u_h(M_j)) (\mathbb{K})_{ij} \\
&= {}^T(U - U_h) \mathbb{K} (U - U_h)
\end{aligned}$$

On obtient les courbes d'erreur suivantes, la convergence semble être d'ordre 2,2 pour la norme L^2 et d'ordre 1,7 pour la norme H^1 .

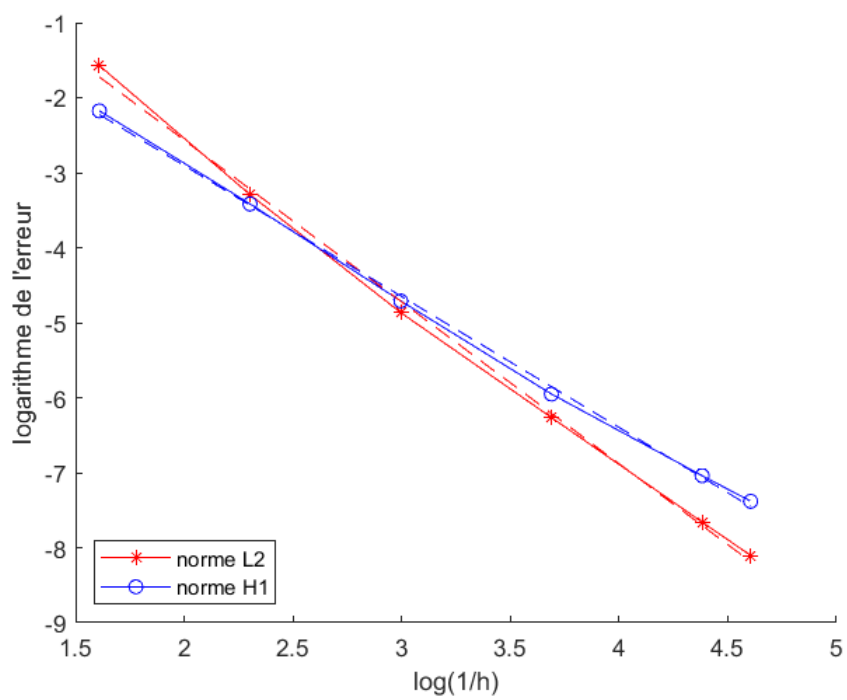


Figure 2: Courbes d'erreur

3 Éléments finis P^2 pour le problème de Poisson avec condition de Dirichlet

Nous considérons maintenant un problème de Poisson avec une condition au bord de Dirichlet homogène : trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} u - \Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Nous avons vu dans le cours que la formulation variationnelle de ce problème s'écrit: Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que
 $\int_{\Omega} uv d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega, \forall v \in H_0^1(\Omega)$
et qu'elle est bien posée.

Pour la discrétisation du problème, nous reprenons les notations de la section précédente. Pour définir une approximation interne P^2 de $H_0^1(\Omega)$, on procède de la façon suivante : si on suppose que les nœuds (sommets et milieux) de la frontière $\partial\Omega$ sont numérotés de N_0+1 à N et que les nœuds à l'intérieur sont numérotés de 1 à N_0 , on définit:

$$V_h^0 = Vect(w_1, \dots, w_{N_0}).$$

Par construction, $V_h^0 \subset H_0^1(\Omega)$.

La formulation variationnelle discrète vérifiée par la solution approchée u_h devient: Trouver $u_h \in V_h^0$ tel que

$$\forall v_h \in V_h^0, \int_{\Omega} u_h v_h d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h d\Omega = \int_{\Omega} f v_h d\Omega \quad (FV_h)$$

La solution approchée u_h s'écrit sous la forme:

$$u_h = \sum_{J=1}^{N_0} U_J w_J \quad \text{avec } U_J = u_h(M_J).$$

Ainsi, la formulation variationnelle discrète s'écrit sous la forme d'un système linéaire équivalent:

Trouver $\vec{U}^0 \in \mathbb{R}^{N_0}$ tel que

$$\mathbb{A}^0 \vec{U}^0 = \vec{L}^0 \quad (1)$$

où $(\vec{U}^0)_I = U_I = u_h(M_I)$ et $\mathbb{A}^0 = \mathbb{M}^0 + \mathbb{K}^0$ avec: $\forall I = 1, \dots, N_0$,
 $\mathbb{M}_{I,J}^0 = \int_{\Omega} w_J w_I d\Omega$; $\mathbb{K}_{I,J}^0 = \int_{\Omega} \nabla w_J \cdot \nabla w_I d\Omega$; $L_I = \int_{\Omega} f w_I d\Omega$
 \mathbb{A}^0 est bien symétrique définie positive.

A présent, on applique la technique de la pseudo-élimination au système et

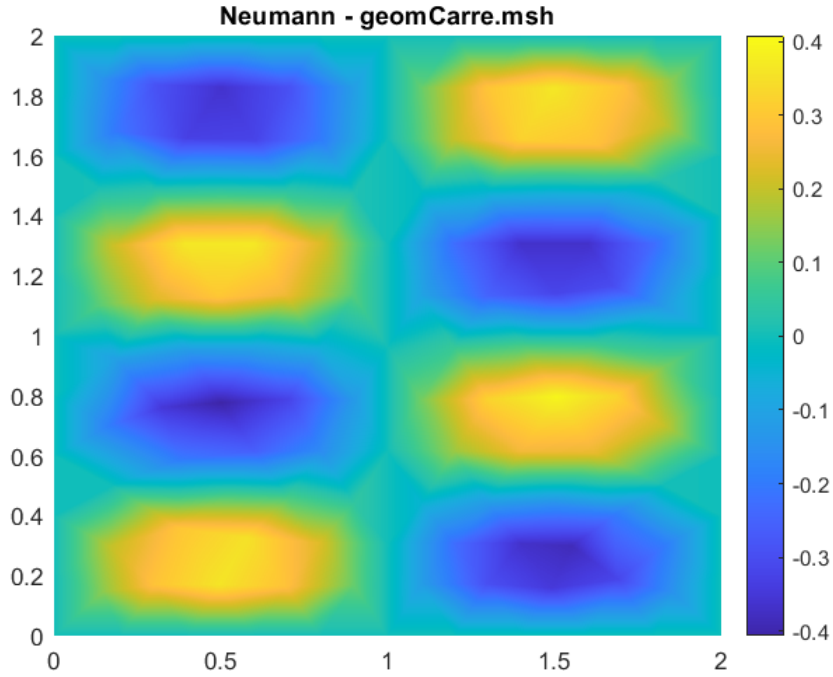
on obtient:

$$\tilde{\mathbb{A}}\vec{U} = \tilde{\vec{L}} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \tilde{\mathbb{A}} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}^0 & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{I}_{N-N_0} \end{array} \right) \\ \vec{U} = \begin{bmatrix} U_I \\ 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{\vec{L}} = \begin{bmatrix} \vec{L}^0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Enfin, on veut vérifier que le code calcule une solution approchée u_h correcte. Pour cela, on résout le problème avec une solution u connue égale à:

$u(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$. pour $(x, y) \in \bar{\Omega} = [0, 2] \times [0, 2]$
 u satisfait bien la condition de Dirichlet homogène car $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

Après calcul de Δu , on injecte le résultat dans la formulation variationnelle, et on obtient $f(x, y) = (1 + 2\pi^2) \sin(\pi x) \sin(2\pi y)$



Nous considérons maintenant un problème de Poisson avec une condition de Dirichlet non-homogène :

Pour $g \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$, trouver $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Nous avons vu dans le cours que la formulation variationnelle du problème (2) peut s'écrire :

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ avec $u|_{\partial\Omega} = g$ tel que

$$\int_{\Omega} uv d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (3)$$

Il est possible d'étendre la technique de pseudo-élimination à des conditions de Dirichlet non homogènes. Pour ce faire, en supposant que les noeuds de la frontière sont numérotés en dernier, nous admettons qu'il suffit de modifier la matrice et le second membre assemblés avec toutes les fonctions de base:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}_{II} & \mathbb{A}_{IB} \\ \mathbb{A}_{BI} & \mathbb{A}_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{U}_I \\ \mathbb{U}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{L}_I \\ \mathbb{L}_B \end{bmatrix}$$

en imposant $\mathbb{A}_{BI} = 0$, $\mathbb{A}_{BB} = \mathbb{I}$, et $\mathbb{L}_B = \vec{g}$, où \vec{g} est le vecteur colonne composé des valeurs prises par g aux noeuds M_J du bord. On remarquera que nous n'avons pas imposé $\mathbb{A}_{IB} = 0$, ce qui revient à ne pas annuler les colonnes lors de la pseudo-élimination.

Enfin, on veut vérifier que le code calcule une solution approchée u_h correcte. Pour cela, on résout le problème avec une solution u connue égale à:

$$u(x, y) = \cos(\pi x) \cos(2\pi y) \text{ pour } (x, y) \in \bar{\Omega} = [0, 2] \times [0, 2]$$

On choisit alors $f(x, y) = (1 + 5\pi^2) \cos(\pi x) \cos(2\pi y)$ et $g = u|_{\partial\Omega}$

4 Exercice 3 : Équations de Stokes

Nous allons maintenant aborder le problème de Stokes. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 à frontière polygonale et $\Gamma = \partial\Omega$. La frontière Γ est partitionnée en $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, avec $\Gamma_N \neq \emptyset$. On impose une condition de Dirichlet sur Γ_D et une condition de Neumann sur Γ_N . On s'intéresse au calcul de la vitesse $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y) = (u_1(x, y), u_2(x, y))$ et de la pression $p = p(x, y)$ solutions des équations de Stokes :

Trouver $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in [H^1(\Omega)]^2$ et $p \in H^1(\Omega)$ tels que

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ -\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{sur } \Gamma_D, \\ \nu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} - p \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (4)$$

où la viscosité dynamique ν du fluide est constante et \mathbf{g} est la donnée sur le bord de Dirichlet.

\mathbf{n} désigne la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$.

(4) peut s'écrire composante par composante de la façon suivante :

$$\begin{cases} -\nu \Delta u_1 + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ -\nu \Delta u_2 + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ (u_1, u_2) = (g_1, g_2) & \text{sur } \Gamma_D, \\ \nu \nabla u_1 \cdot \mathbf{n} - p n_1 = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ \nu \nabla u_2 \cdot \mathbf{n} - p n_2 = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad (5)$$

4.1 Formulation variationnelle

Soient $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in [H^1(\Omega)]^2$ et $p \in H^1(\Omega)$ solutions de (4).

On a bien $\mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \mathbf{g}$ et :

$$\forall q \in L^2(\Omega), \quad - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} q d\Omega = 0.$$

De plus, soit $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in [H_{0,D}^1(\Omega)]^2 = \left\{ \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2 \text{ tel que } \mathbf{v}|_{\Gamma_D} = (0, 0) \right\}$,

on a, avec la deuxième équation de (5) : $\Delta u_1 = \frac{1}{\nu} \frac{\partial p}{\partial x}$, donc $\Delta u_1 \in L^2(\Omega)$ et donc $u_1 \in H^1(\Omega, \Delta)$. On sait alors (résultat admis dans le cours) que $u_1 \in H^2(\Omega)$, ce qui permet d'écrire, avec encore la même équation :

$$- \int_{\Omega} \nu \Delta u_1 v_1 d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x} v_1 d\Omega = 0$$

$u_1 \in H^2(\Omega)$ et $v_1 \in H^1(\Omega)$ on peut donc appliquer la formule de Green à la première intégrale. De plus $p \in H^1(\Omega)$ et $v_1 \in H^1(\Omega)$ donc on peut également

l'appliquer à la seconde et on obtient alors :

$$\int_{\Omega} \nu \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 d\Omega - \int_{\Gamma_N} v_1 \nabla u_1 \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \underbrace{\int_{\Gamma_D} v_1 \nabla u_1 \cdot \mathbf{n} d\Gamma}_{=0 \text{ car } v_1|_{\Gamma_D}=0} - \int_{\Omega} p \frac{\partial v_1}{\partial x} d\Omega + \int_{\Gamma_N} p v_1 n_1 d\Gamma + \underbrace{\int_{\Gamma_D} p v_1 n_1 d\Gamma}_{=0 \text{ car } v_1|_{\Gamma_D}=0} = 0$$

Or l'avant-dernière équation de (5) donne $\nu \nabla u_1 \cdot \mathbf{n} - p n_1 = 0$ sur Γ_N donc :

$$- \int_{\Gamma_N} v_1 \nabla u_1 \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_N} p v_1 n_1 d\Gamma = 0$$

On obtient donc finalement :

$$\int_{\Omega} \nu \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 d\Omega - \int_{\Omega} p \frac{\partial v_1}{\partial x} d\Omega = 0$$

De la même manière avec v_2 , on obtient :

$$\int_{\Omega} \nu \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 d\Omega - \int_{\Omega} p \frac{\partial v_2}{\partial y} d\Omega = 0$$

Et finalement en sommant ces deux équations :

$$\nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} d\Omega = 0$$

où l'on a noté $\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} = \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_2$.

Ainsi, la formulation variationnelle du problème s'écrit :

Trouver $\mathbf{u} \in [H^1(\Omega)]^2$ avec $\mathbf{u}|_{\Gamma_D} = \mathbf{g}$ et $p \in L^2(\Omega)$ tels que

$$\begin{cases} \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} d\Omega = 0, & \forall \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in [H_{0,D}^1(\Omega)]^2 \\ - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} q d\Omega, & \forall q \in L^2(\Omega), \end{cases} \quad (6)$$

4.2 Maillage

Avec le fichier geomRectangle.geo donné on crée un maillage d'ordre 2 du rectangle $\Omega = [0, 2] \times [0, 1]$.

Les lignes permettant par la suite d'imposer des conditions aux bords sont les lignes suivantes :

```
Physical Line(1) = {4};
Physical Line(2) = {1,3};
Physical Line(3) = {2};
```

Dans le cadre du problème l'index du bord vertical gauche est 4, l'index des côtés horizontaux est 2 et celui du côté vertical droit est 3.

On discrétise désormais le problème.

Si on suppose que les sommets des triangles sont numérotés de 1 à N_S et les milieux des arêtes de $N_S + 1$ à N , le vecteur \vec{U} des inconnues du système linéaire issu de la discrétisation de (6) est un vecteur de \mathbb{R}^{2N+N_S} :

$$\vec{U} = [u_{1h}(M_1), \dots, u_{1h}(M_N), u_{2h}(M_1), \dots, u_{2h}(M_N), p_h(M_1), \dots, p_h(M_{N_S})]^T,$$

consistué des inconnues relatives à la première composante de la vitesse, puis à la seconde composante de la vitesse, puis à la pression. La matrice du système linéaire peut alors s'écrire par blocs sous la forme :

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \nu\mathbb{K} & 0 & \mathbb{E} \\ 0 & \nu\mathbb{K} & \mathbb{F} \\ \mathbb{G} & \mathbb{H} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(2N+N_S) \times (2N+N_S)}$$

où :

- Les deux blocs $\nu\mathbb{K} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ contiennent les contributions issues de la discrétisation des termes $\int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 d\Omega$ et $\int_{\Omega} \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 d\Omega$. En d'autres termes, on a

$$\mathbb{K}_{IJ} = \int_{\Omega} \nabla w_I \cdot \nabla w_J d\Omega,$$

avec $(w_I)_{I=1,N}$ les fonctions de base \mathbb{P}^2 utilisées dans les parties précédentes.

- Le bloc rectangulaire $\mathbb{E} \in \mathbb{R}^{N \times N_S}$ contient les contributions issues de la discrétisation du terme $-\int_{\Omega} p \frac{\partial v_1}{\partial x} d\Omega$, soit

$$\mathbb{E}_{IJ} = - \int_{\Omega} \tilde{w}_J \frac{\partial w_I}{\partial x} d\Omega,$$

avec $(\tilde{w}_J)_{J=1,N_S}$ les fonctions de base \mathbb{P}^1 utilisées dans le TP 1.

- Le bloc rectangulaire $\mathbb{F} \in \mathbb{R}^{N \times N_S}$ contient les contributions issues de la discrétisation du terme $-\int_{\Omega} p \frac{\partial v_2}{\partial y} d\Omega$, soit

$$\mathbb{F}_{IJ} = - \int_{\Omega} \tilde{w}_J \frac{\partial w_I}{\partial y} d\Omega.$$

- Le bloc rectangulaire $\mathbb{G} \in \mathbb{R}^{N_S \times N}$ contient les contributions issues de la discrétisation du terme $-\int_{\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial x} q d\Omega$, soit

$$\mathbb{G}_{IJ} = - \int_{\Omega} \frac{\partial w_J}{\partial x} \tilde{w}_I d\Omega = \mathbb{E}_{JI},$$

donc $\mathbb{G} = \mathbb{E}^T$.

- Le bloc rectangulaire $\mathbb{H} \in \mathbb{R}^{N_S \times N}$ contient les contributions issues de la discrétisation du terme $-\int_{\Omega} \frac{\partial u_2}{\partial y} q d\Omega$, soit

$$\mathbb{H}_{IJ} = - \int_{\Omega} \frac{\partial w_J}{\partial y} \tilde{w}_I d\Omega = \mathbb{F}_{JI},$$

donc $\mathbb{H} = \mathbb{F}^T$.

Le calcul du bloc \mathbb{K} a déjà été implémenté, il reste donc à calculer les blocs \mathbb{F} et \mathbb{E} , ces derniers donnant directement les blocs \mathbb{G} et \mathbb{H} .

4.3 Calcul des matrices élémentaires

Nous cherchons à calculer les matrices élémentaires $\mathbb{E}^l \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$ et $\mathbb{F}^l \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$. Par passage à l'élément fini de référence, nous obtenons ces formules : pour $I = 1, \dots, 6, J = 1, \dots, 3$, le coefficient $\mathbb{E}_{I,J}^l$ peut s'écrire

$$-\int_{T_l} \lambda_J(M) \frac{\partial w_I(M)}{\partial x} d\Omega = -\int_{\hat{T}} \hat{\lambda}_J(\hat{M}) \text{colonne}_1 \{\mathcal{B}_l^{-1}\} \hat{\nabla} \hat{w}_I(\hat{M}) |\det \mathcal{B}_l| d\hat{\Omega},$$

et le coefficient $\mathbb{F}_{I,J}^l$ peut s'écrire

$$-\int_{T_l} \lambda_J(M) \frac{\partial w_I(M)}{\partial y} d\Omega = -\int_{\hat{T}} \hat{\lambda}_J(\hat{M}) \text{colonne}_2 \{\mathcal{B}_l^{-1}\} \hat{\nabla} \hat{w}_I(\hat{M}) |\det \mathcal{B}_l| d\hat{\Omega},$$

où l'on a utilisé la notation $\text{colonne}_m \{\mathbb{B}\}$ pour indiquer la m -ième colonne de la matrice \mathbb{B} .

La pression est discrétisée par des éléments finis P^1 donc les λ_J sont au plus de degré 1, chaque composante de la vitesse est discrétisée par des éléments finis P^2 donc les w_I sont de degré au plus 2 et donc leurs dérivées sont de degré au plus 1. Finalement les fonctions intégrées sont de degré au plus 2, ainsi, une formule de quadrature de Gauss à 3 points suffit pour calculer de manière exacte toutes les intégrales, c'est cette dernière qu'on va donc utiliser pour les matrices élémentaires \mathbb{E}^l et \mathbb{F}^l .

4.4 Assemblages et pseudo-éliminations

On commence par contruire des matrices \mathbb{K} , \mathbb{E}_{temp} et \mathbb{F}_{temp} carrées de dimension N , on les assemble comme on le fait d'habitude à l'aide des matrices élémentaires préalablement calculées.

On construit ensuite \mathbb{E} et \mathbb{F} à partir de \mathbb{E}_{temp} et \mathbb{F}_{temp} en ne prenant que les colonnes correspondant à un sommet de triangle, on obtient alors bien des matrices rectangulaires de $M_{N_s, N}(\mathbb{R})$.

On est alors capables d'assembler la matrice \mathbb{A} par blocs.

Pour imposer les conditions aux limites de Dirichlet sur le bord Γ_D on procède à l'étape de pseudo-élimination : grâce au vecteur *Refneu* on détecte sur quel bord se trouve le point : la référence correspond aux *Physical Line* définies dans le fichier .geo. Pour un sommet numéroté I on fixe les lignes I et $N + I$ de \mathbb{A} nulles sauf pour les termes diagonaux qu'on fixe égaux à 1. Dans le vecteur \mathbb{L} on fixe le terme d'indice I égal à g_1 évaluée au sommet I et le terme d'indice $N + I$ égal à g_2 évaluée au sommet I , chaque composante de \mathbf{g} imposant une contrainte pour chaque composante de la vitesse.

4.5 Vérification

On se propose de vérifier le code avec un problème de solution connue :

Pour cela, on résout le problème (5) avec le domaine rectangulaire $\bar{\Omega} = [0, 2] \times [0, 1]$, une viscosité $\nu = 1$ et :

- des conditions de Dirichlet homogènes (c'est-à-dire $(g_1, g_2) = (0, 0)$) sur les deux côtés horizontaux du rectangle;
- des conditions de Dirichlet non homogènes avec $(g_1, g_2) = (4(1-y)y, 0)$ sur le côté gauche du rectangle, pour imposer un profil d'écoulement entrant parabolique;
- des conditions de Neumann homogènes comme dans (5) en sortie, sur le côté vertical à droite du rectangle.

Montrons d'abord que la solution exacte est $(u_1, u_2) = (4 \times (1-y)y, 0)$ et $p = -8 \times (x-2)$:

- Dans Ω ,

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + \frac{\partial p}{\partial x} &= -(-8) + (-8) = 0, \\ -\Delta u_2 + \frac{\partial p}{\partial y} &= -0 + 0 = 0, \\ -\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} &= -0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

- Sur Γ_D :

- Sur le côté vertical gauche ($x = 0$), $(u_1, u_2) = (4 \times (1-y)y, 0) = (g_1, g_2)$.
- Sur les côtés horizontaux, $y = 1$ ou $y = 0$ donc $4 \times (1-y)y = 0$ d'où $(u_1, u_2) = (0, 0) = (g_1, g_2)$.

- Sur Γ_N , $\mathbf{n} = (1, 0)$ et $x = 2$, donc :

$$\begin{aligned} \nabla u_1 \cdot \mathbf{n} - pn_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -8y - 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-8 \times (2-2)) \times 1 = 0 \\ \nabla u_2 \cdot \mathbf{n} - pn_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (-8 \times (2-2)) \times 0 = 0 \end{aligned}$$

On a donc la solution du problème (4), on va alors pouvoir comparer avec la solution approchée trouvée par notre algorithme.

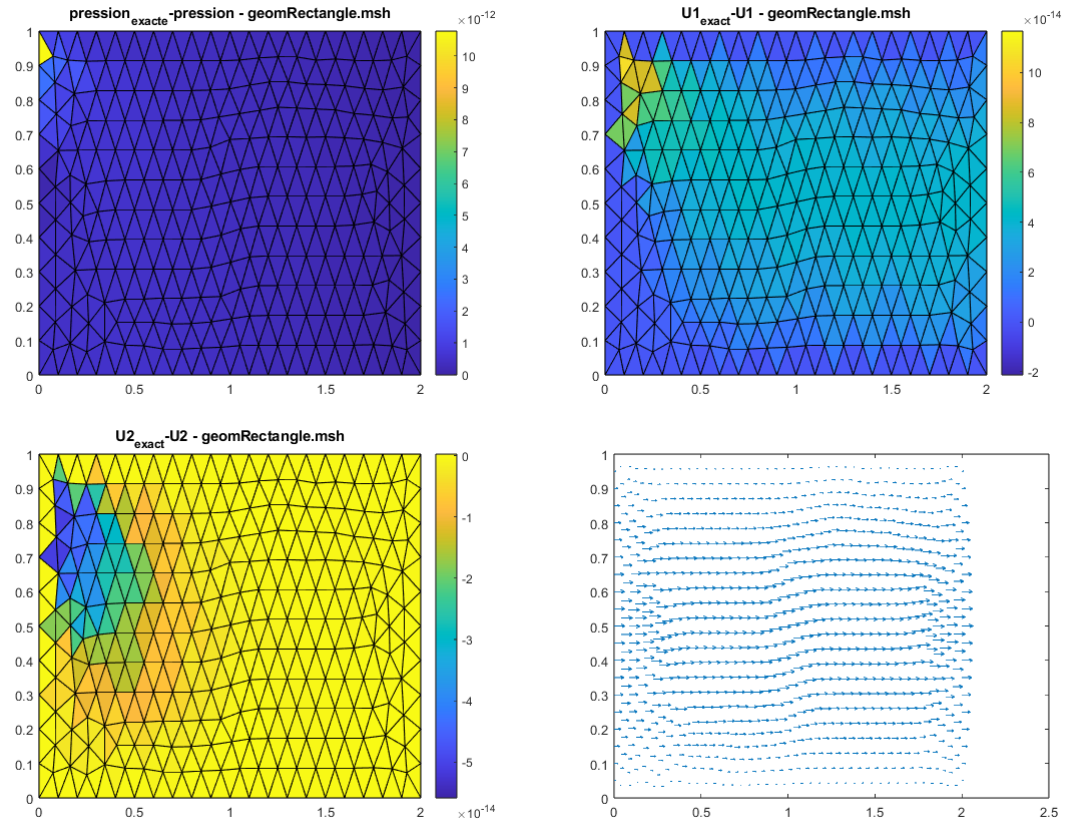


Figure 3: Différences entre solutions approchées et solutions exactes pour les 3 premières images et vecteurs vitesse en bas à droite, avec $h=0.1$

On obtient une solution très proche de la solution exacte avec une erreur de l'ordre de 10^{-13} pour la vitesse et de l'ordre de 10^{-11} pour la pression. Si la solution approchée est plus proche de la solution exacte pour la vitesse que pour la pression c'est sûrement car on a utilisé des approximations paraboliques par morceaux pour la vitesse et seulement affines par morceaux pour la pression.

4.6 Marche

On modifie désormais la géométrie du problème en ajoutant une marche.

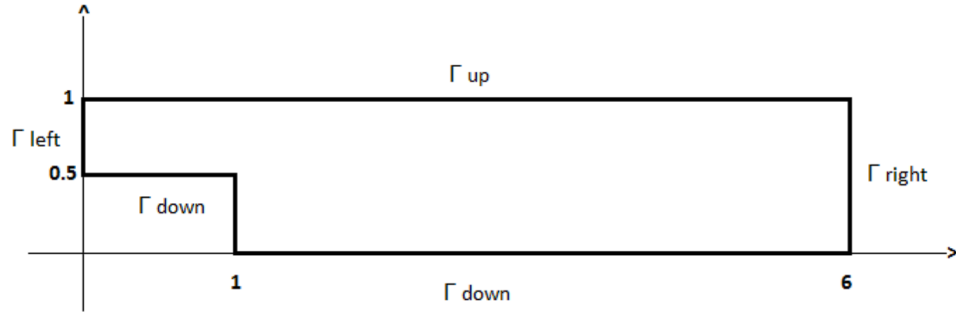


Figure 4: Domaine de calcul avec une marche descendante

On impose également sur Γ_{left} un profil d'écoulement entrant parabolique de vitesse maximale unitaire et valant 0 en $y = 0.5$ et $y = 1$, c'est à dire un profil de vitesse $\mathbf{g}_{left} = (-(y-1)(y-0.5)/16, 0)$, une vitesse nulle sur Γ_{up} et Γ_{down} et une condition de Neumann homogène en sortie sur Γ_{right} .

Ici pour définir la routine `gl.m` on doit discriminer selon la référence de l'arête, en effet, la contrainte sur la géométrie précédente $(4 \times (1-y)y, 0)$ imposait directement une vitesse nulle sur les bords horizontaux mais pas ici, on ajoute alors la référence du sommet dans les arguments d'entrée de `gl_marche.m`.

On crée alors un fichier `geomMarche.geo` représentant cette nouvelle géométrie et on crée un maillage 2D d'ordre 2 associé.

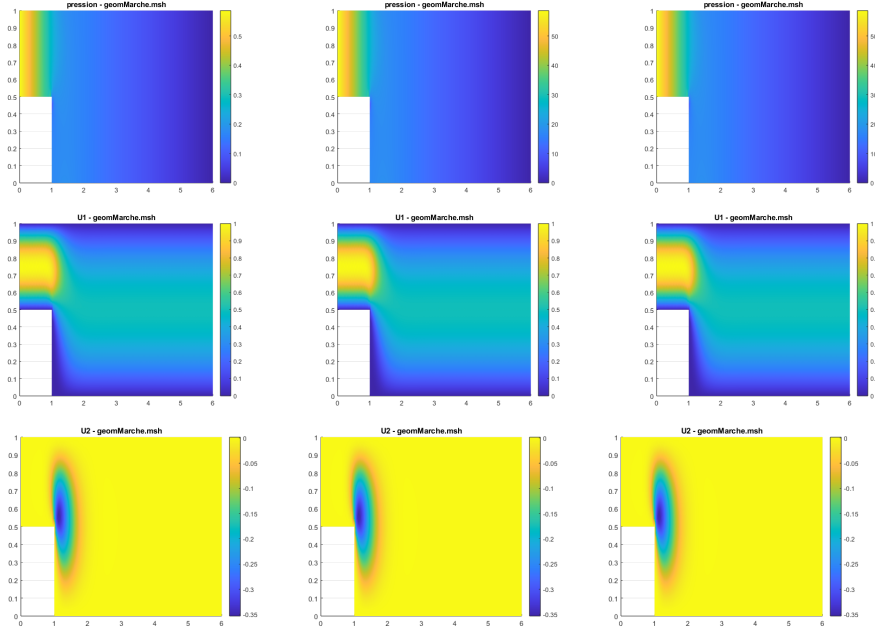


Figure 5: De gauche à droite : $\nu = 0.01$, $\nu = 1$ et $\nu = 100$
 De haut en bas : pression, vitesse horizontale et vitesse verticale
 $h = 0.05$

On remarque que les vitesses sont les mêmes quelle que soit la valeur de ν , en revanche la pression est multiplié par le même facteur multiplicatif que ν entre deux simulations.

En observant l'équation (4) on remarque qu'en effet, $(\mathbf{u}, p/\nu)$ est indépendant du paramètre ν .

4.7 Bonus

On reprend certaines routines du TP1 pour discrétiser le problème de Stokes avec des éléments finis $P^1 - P^1$ au lieu des éléments finis $P^2 - P^1$ implémentés précédemment.

(Les profils discutés sont donnés en annexe)

Les profils de vitesse ne semblent pas avoir été modifiés, en revanche le profil de pression présente des valeurs éloignées des valeurs de la solution, même en diminuant fortement le pas. Par exemple sur les profils de pression avec $h = 0.02$ et $h = 0.015$ certaines zones sont de pression négative (on atteint -20) alors que la pression est censée être positive d'après la simulation de 4.6.

On peut supposer qu'il n'y a plus convergence de la solution approchée ou alors que cette convergence est très lente comparée à celle de la discrétisation à l'aide des éléments finis $P^2 - P^1$.

5 Conclusion

Ce TP nous a permis de mettre en oeuvre la méthode des éléments finis avec des cas plus complexes qu'au TP1 : discrétisation avec les éléments finis $P^2 - P^1$, géométries plus complexes, contraintes aux bords...

Nous avons également pu constater que la convergence n'était pas toujours assurée et que le choix du mode de discrétisation était crucial.

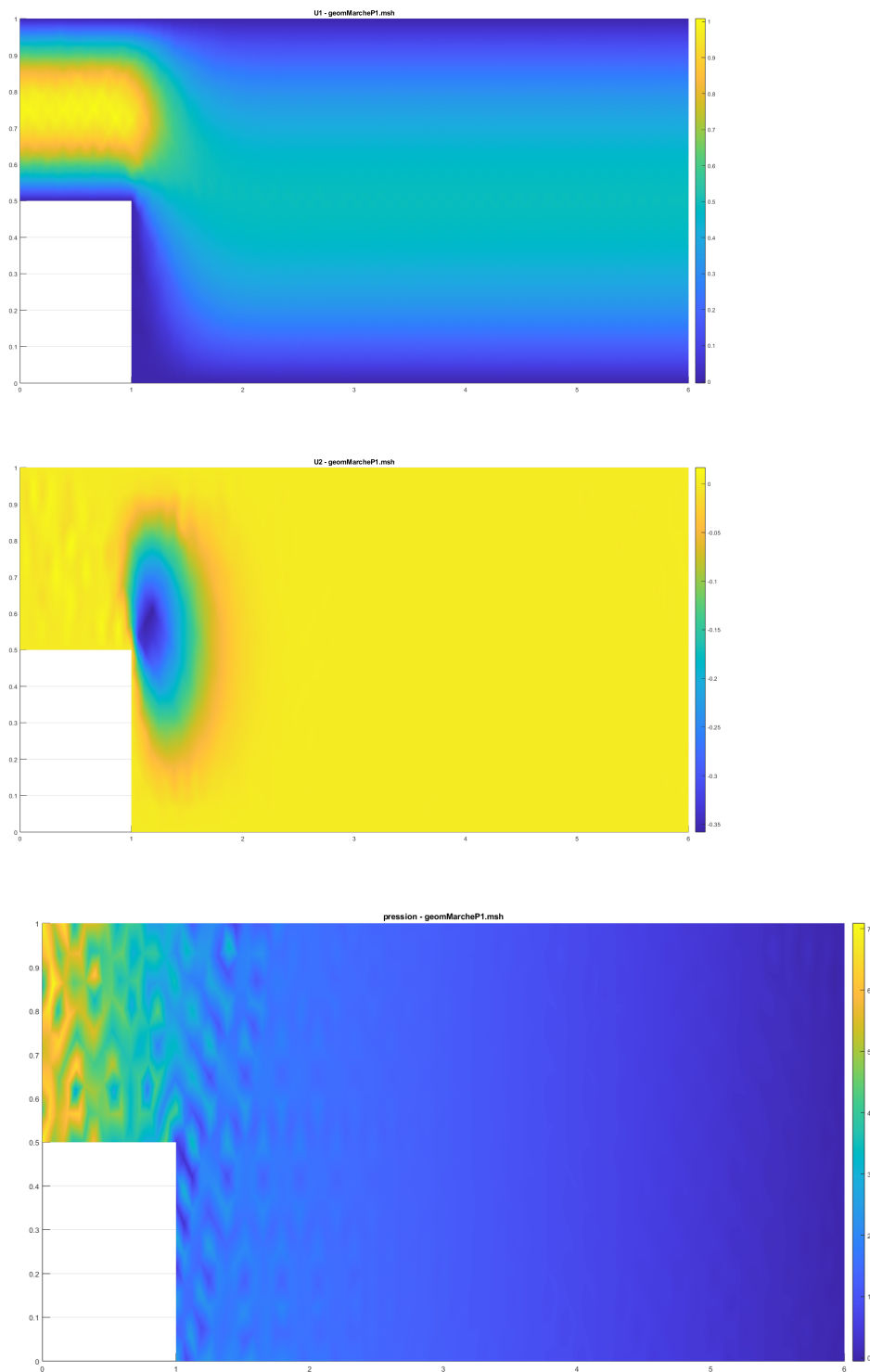


Figure 6: u_1 , u_2 et p avec $h = 0.08$

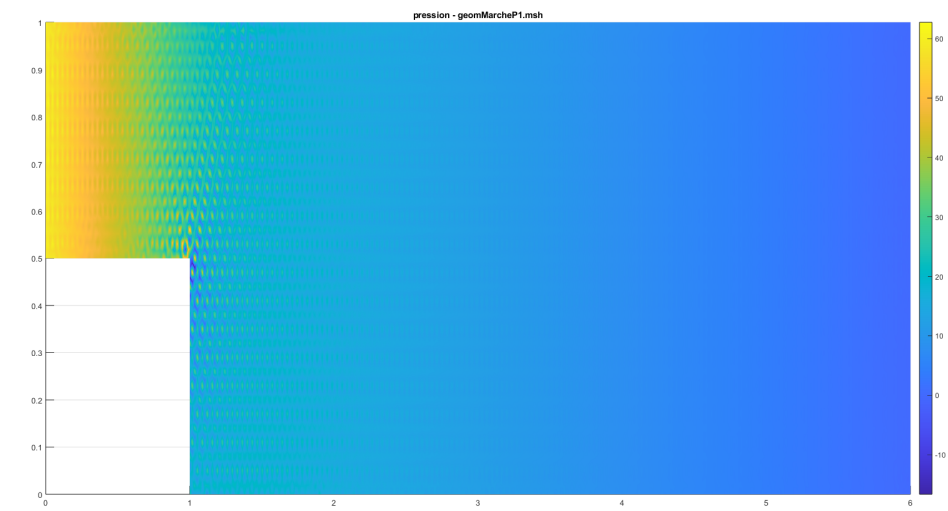
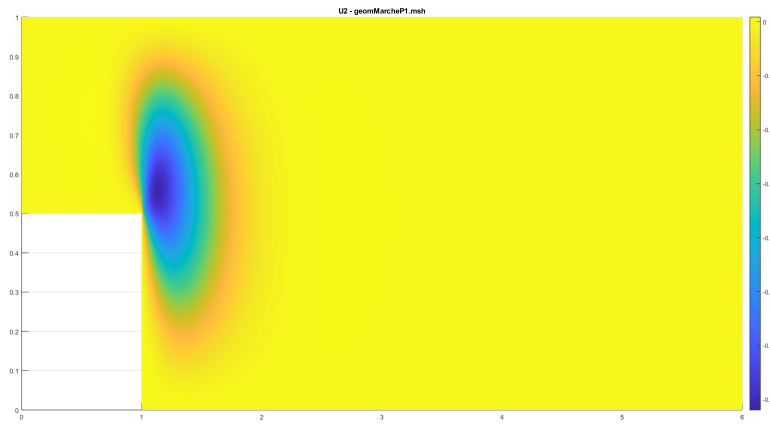
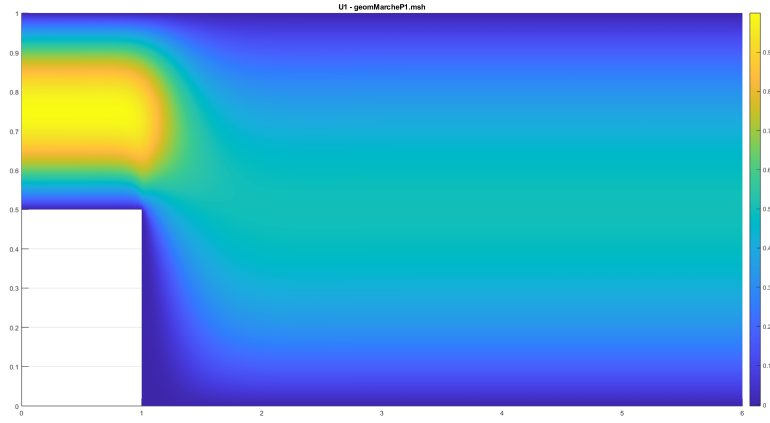


Figure 7: u_1 , u_2 et p avec $h = 0.02$

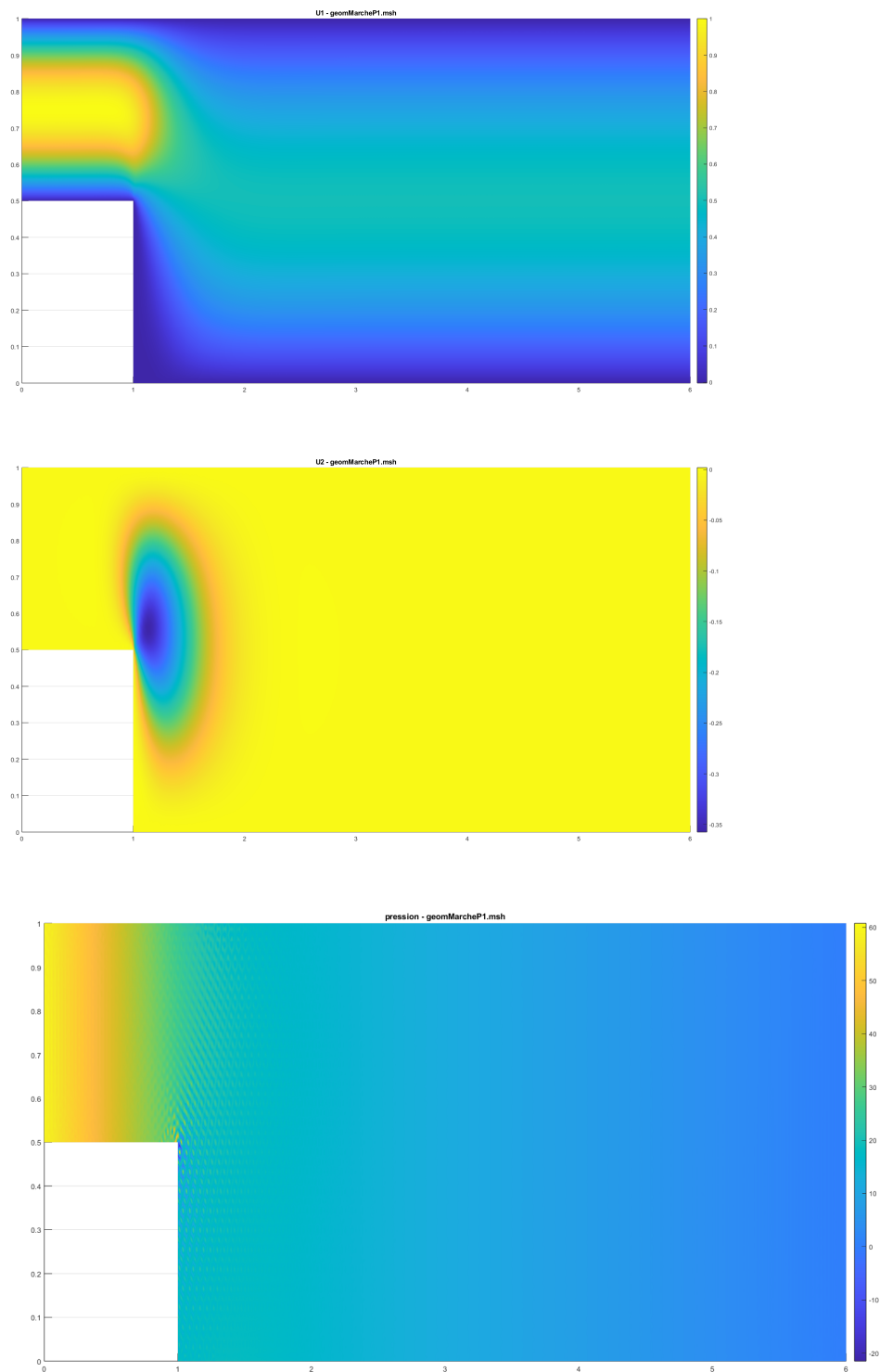


Figure 8: u_1 , u_2 et p avec $h = 0.015$