

ANN 202

Rapport TP1

Aubriet Clément, Boulogne Pierre

10 Février 2023

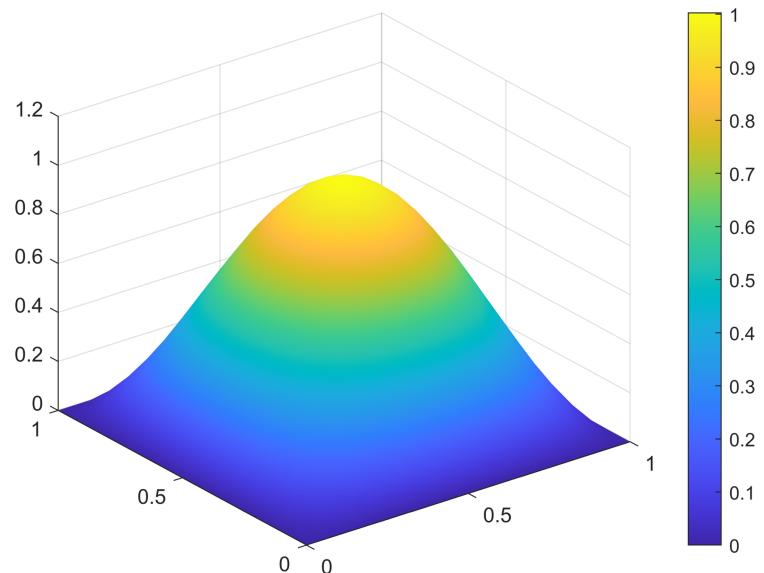


Table des matières

1	Introduction	3
2	Etude du cas avec condition homogène	3
2.1	Calcul des paramètres du problème	3
2.2	Solution approchée sous conditions homogène : $u = 0$ sur $\partial\Omega$	5
2.3	Visualisation des erreurs	6
2.4	Reconstruction du potentiel	7
2.5	Reconstruction du flux	8
2.6	Estimation d'erreurs a posteriori	9
3	Etude du cas avec condition non homogène	13
3.1	Solution approchée sous condition non-homogène	13
3.2	Visualisation des erreurs	14
3.3	Reconstruction du potentiel	15
3.4	Reconstruction du flux	16
3.5	Estimation d'erreurs a posteriori	17
4	Maillage adaptatif	20
5	Conclusion	22
A	Méthode de raffinement du maillage	23

1 Introduction

Le cadre de ce projet est de découvrir la méthode des éléments finis non-conformes en utilisant l'équation de Poisson avec condition de Dirichlet homogène suivante :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

La solution du problème (1) est une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Soit \mathcal{T}_h un maillage de Ω composé de triangles. L'espace de polynômes faiblement continus de Crouzeix-Raviart de plus bas degré $p = 1$ est donné par

$$V_{h1}^{\text{nc}} = \left\{ v_h \in \mathcal{P}_1(\mathcal{T}_h); \langle [\![v_h]\!], 1 \rangle_F = 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}_h \right\}$$

2 Etude du cas avec condition homogène

2.1 Calcul des paramètres du problème

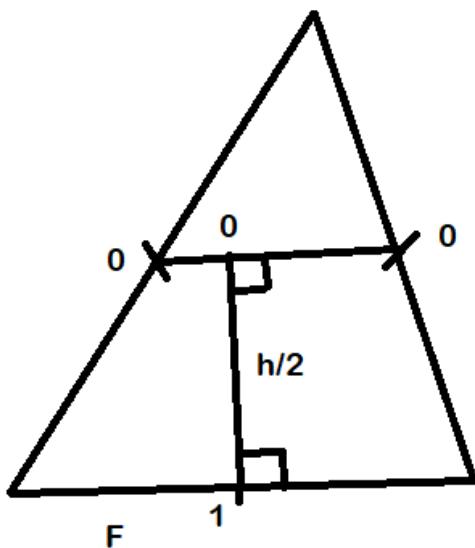
Premièrement on calcule la matrice de rigidité de notre problème soit :

$$\mathbb{K}_{FF'}^{\text{nc}} := \left(\nabla_h \psi^{F'}, \nabla_h \psi^F \right) \quad F, F' \in \mathcal{F}_h^{\text{int}} \quad (1)$$

On a :

$$(\nabla_h \psi^F)|_K = \nabla (\psi^F|_K) = \frac{|F|}{|K|} (\mathbf{n}_K)|_F$$

En effet, $\nabla_h \psi^F$ est de degré 1, ainsi, étant nulle sur les deux barycentres reliés par un segment sur le schéma, elle est nulle sur le segment. Ainsi, son gradient, constant, est normal à ce segment. D'après le théorème de Thalès ce segment est parallèle à l'arête du bas, ainsi le gradient de $\nabla_h \psi^F$ est normal à cette arête et est donc selon $\mathbf{n}_K|_F$. ψ_K^F varie de 1 sur une distance $h/2$ selon une direction colinéaire à son gradient donc $|(\nabla_h \psi^F)|_K| = \frac{2}{h} = \frac{|F|}{|K|}$, d'où l'égalité.



On calcule aussi une approximation du second membre :

$$B_F := (f, \psi^F) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h, F \in \mathcal{F}_K} (f, \psi^F)_K = \sum_{K \in \mathcal{T}_h, F \in \mathcal{F}_K} \int_K f(\mathbf{x}) \psi^F(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_{K \in \mathcal{T}_h, F \in \mathcal{F}_K} \frac{|K|}{3} \sum_{F \in \mathcal{F}_K} f(\mathbf{x}_F) \psi^F(\mathbf{x}_F)$$

Or on s'est placé dans une base Lagrangienne donc $\psi^F(\mathbf{x}_F) = 1$, nous montrons en figure 1 une représentation d'une fonction de la base lagrangienne.

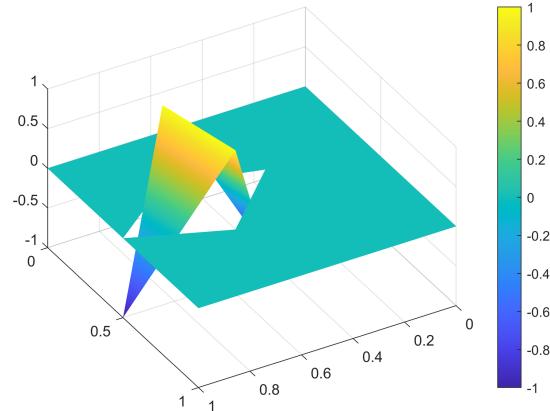


Figure 1 - Une fonction de base ψ^F de l'espace V_{h1}^{nc} , $d = 2$ et $p = 1$

On en déduit donc :

$$B_F \approx \sum_{K \in \mathcal{T}_h, F \in \mathcal{F}_K} \frac{|K|}{3} f(\mathbf{x}_F) \quad (2)$$

2.2 Solution approchée sous conditions homogène : $u = 0$ sur $\partial\Omega$

On a ensuite mis en œuvre informatiquement la méthode (4). C'est à dire pour un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, un maillage \mathcal{T}_h de triangles et une fonction $f \in L^2(\Omega)$ donnés, on a implémenté la matrice \mathbb{K}^{nc} et le vecteur B .

Une solution approchée nous a donc été donné par

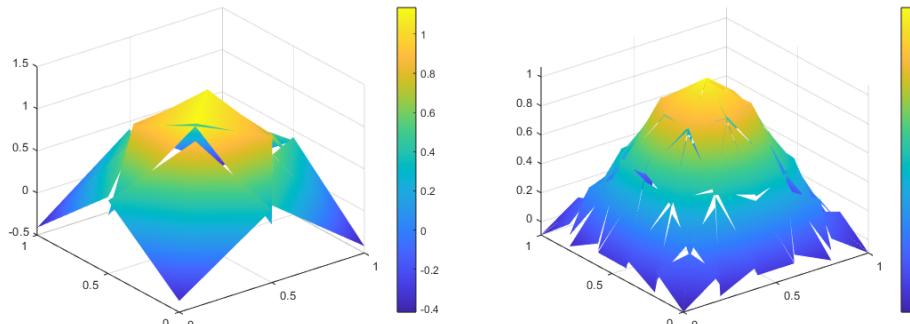
$$u_h = \sum_{F \in \mathcal{F}_h^{\text{int}}} (\mathbf{U}_h)_F \psi^F.$$

avec \mathbf{U}_h solution du système : $\mathbb{K}^{nc} \mathbf{U}_h = \mathbf{B}$

En se plaçant dans $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ avec la solution exacte $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. on a donc le terme source f :

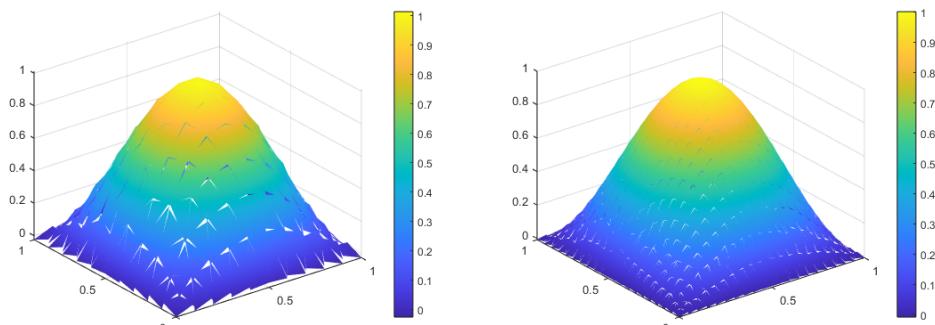
$$\begin{aligned} f(x, y) &= -\Delta u(x, y) \\ &= -\left(\frac{\partial^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)}{\partial y^2} \right) \\ &= -(-\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) - \pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)) \\ &= 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \end{aligned}$$

On peut donc tracer la solution approchée pour plusieurs h :



(a) Solution pour $h = 0.5$

(b) Solution pour $h = 0.2$



(c) Solution pour $h = 0.1$

(d) Solution pour $h = 0.05$

2.3 Visualisation des erreurs

Ensuite nous avons considéré une suite de maillage \mathcal{T}_h avec $h \rightarrow 0$ où chaque triangle est divisé en 4 triangles en joignant les points-milieux des arêtes (chaque arête F est coupée en deux). Cela nous permet d'avoir un raffinement uniforme du maillage.

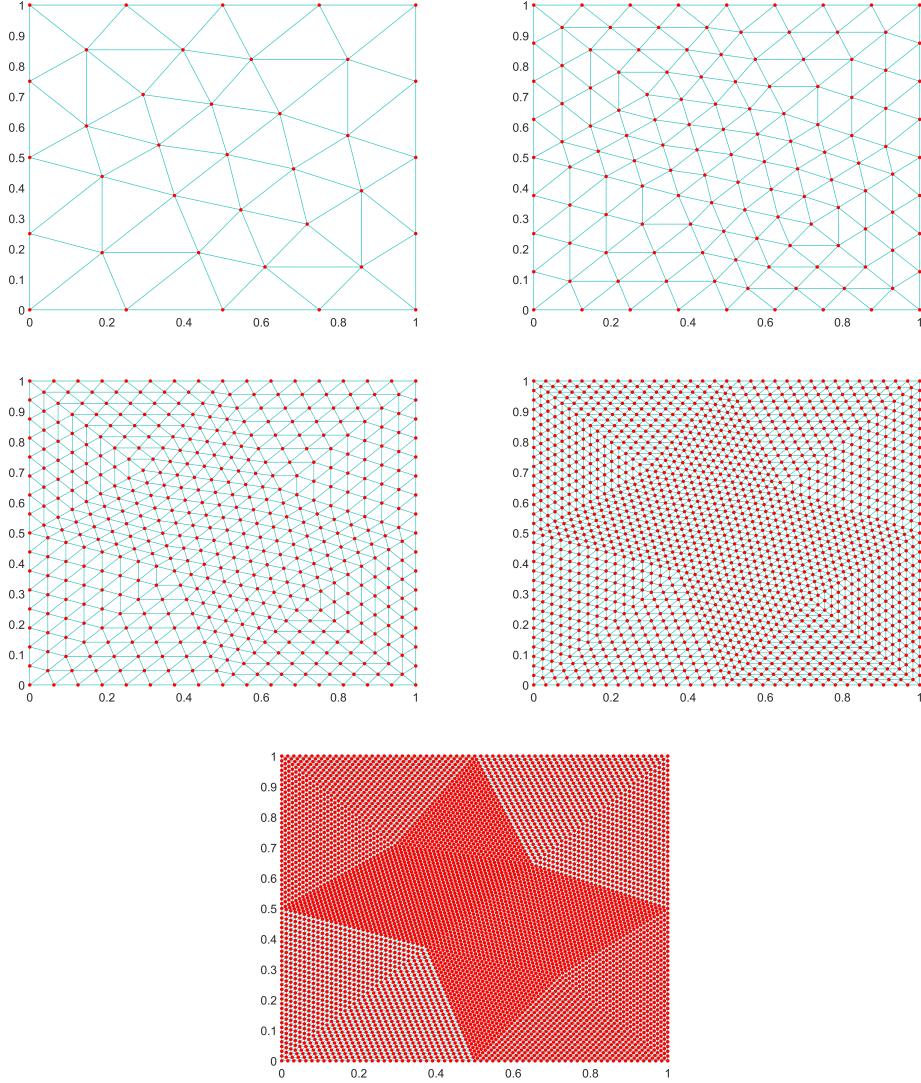
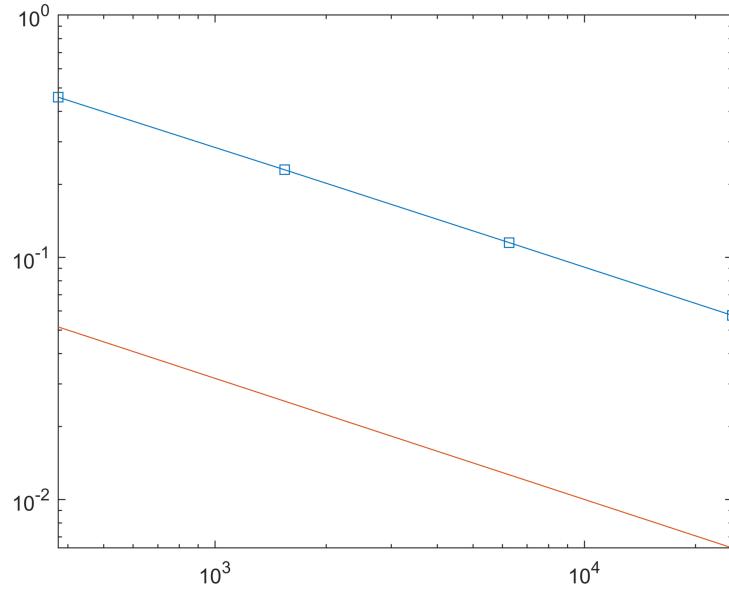


FIGURE 2 – Raffinement uniforme du maillage

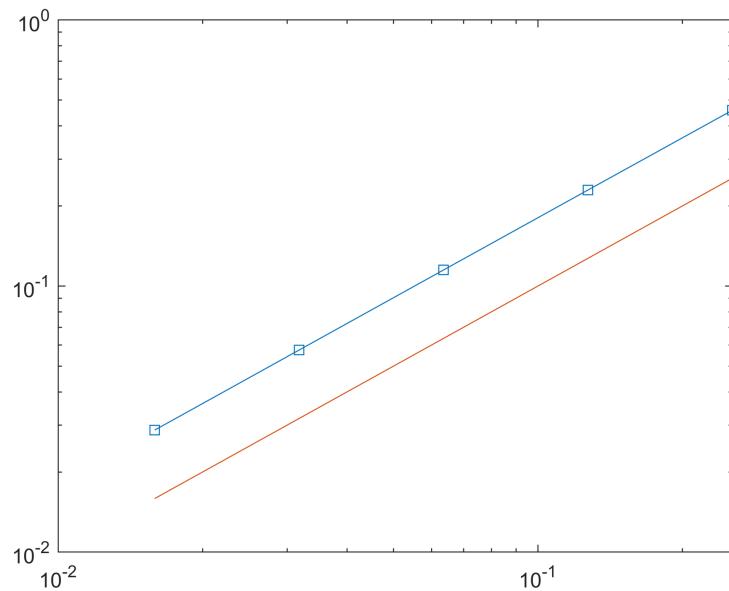
Pour calculer l'erreur nous avons utilisé l'approximation que nous avons utilisé pour trouver (2). Nous traçons ainsi deux courbes : la première celle de $\|\nabla_h(u - u_h)\|$ en fonction de $|V_{h1}^{\text{nc}}|$, puis celle de $\|\nabla_h(u - u_h)\|$ en fonction de h .

On obtient ceci :

On trouve pour le tracé en fonction de $|V_{h1}^{\text{nc}}|$ une erreur en $O(|V_{h1}^{\text{nc}}|^{-\frac{1}{2}})$. Pour celle en fonction de h , on trouve une erreur en $O(h)$.



(a) Erreur en fonction de $|V_{h1}^{\text{nc}}|$



(b) Erreur en fonction de h

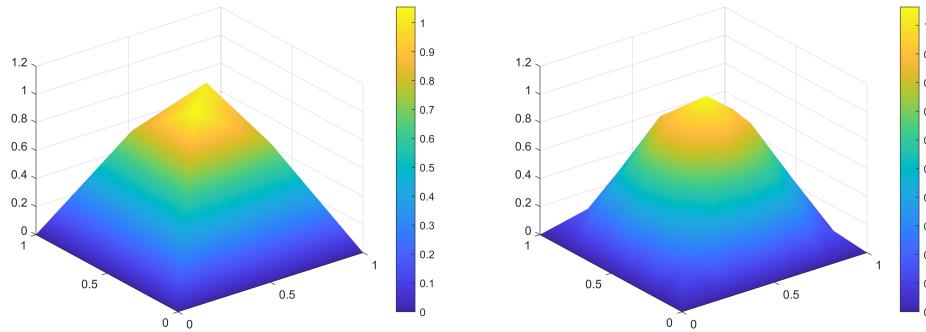
2.4 Reconstruction du potentiel

On reconstruit le potentiel selon la procédure de la définition (2.3.1) :

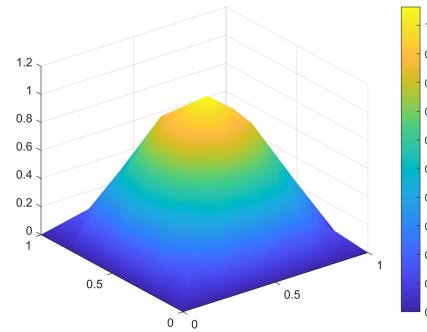
$$s_h(\mathbf{x}) := \frac{1}{|\mathcal{T}_x|} \sum_{K \in \mathcal{T}_x} v_h|_K(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \text{ est un point de Lagrange } V_{hp} \text{ inclus dans } \Omega, \\ s_h(\mathbf{x}) := 0 \quad \text{si } \mathbf{x} \text{ est un point de Lagrange de } V_{hp} \text{ inclus dans } \partial\Omega,$$

où \mathcal{T}_x sont les éléments du maillage \mathcal{T}_h qui contiennent le point \mathbf{x} et $|\mathcal{T}_x|$ est le cardinal de cet ensemble.

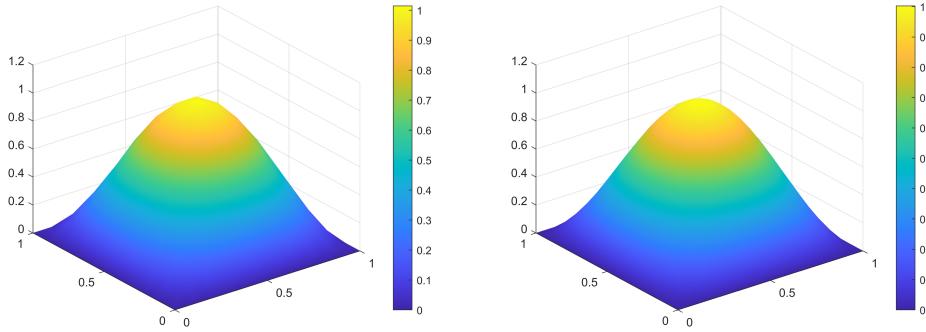
On obtient les solutions suivantes dans V_{h1} :



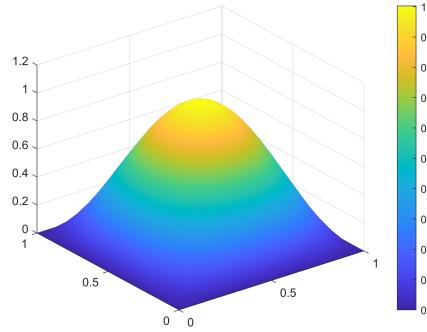
(a) Potentiel pour $h = 0.5$



(b) Potentiel pour $h = 0.2$



(c) Potentiel pour $h = 0.1$



(d) Potentiel pour $h = 0.05$

2.5 Reconstruction du flux

On applique la reconstruction du flux équilibré σ_h d'après la définition 1.6.6 du polycopié :

$$\sigma_h|_K := -\nabla_h u_h|_K + \mathbf{f}_h|_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

où $\mathbf{f}_h|_K$ est définie par

$$\mathbf{f}_h|_K(\mathbf{x}) := \frac{f|_K}{d}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$$

avec \mathbf{x}_K le barycentre du triangle K . (Ici $d = 2$)

Dans notre cas f n'est pas dans \mathcal{P}^0 donc on prend la moyenne de f sur chaque maille.

On obtient les champs suivants :

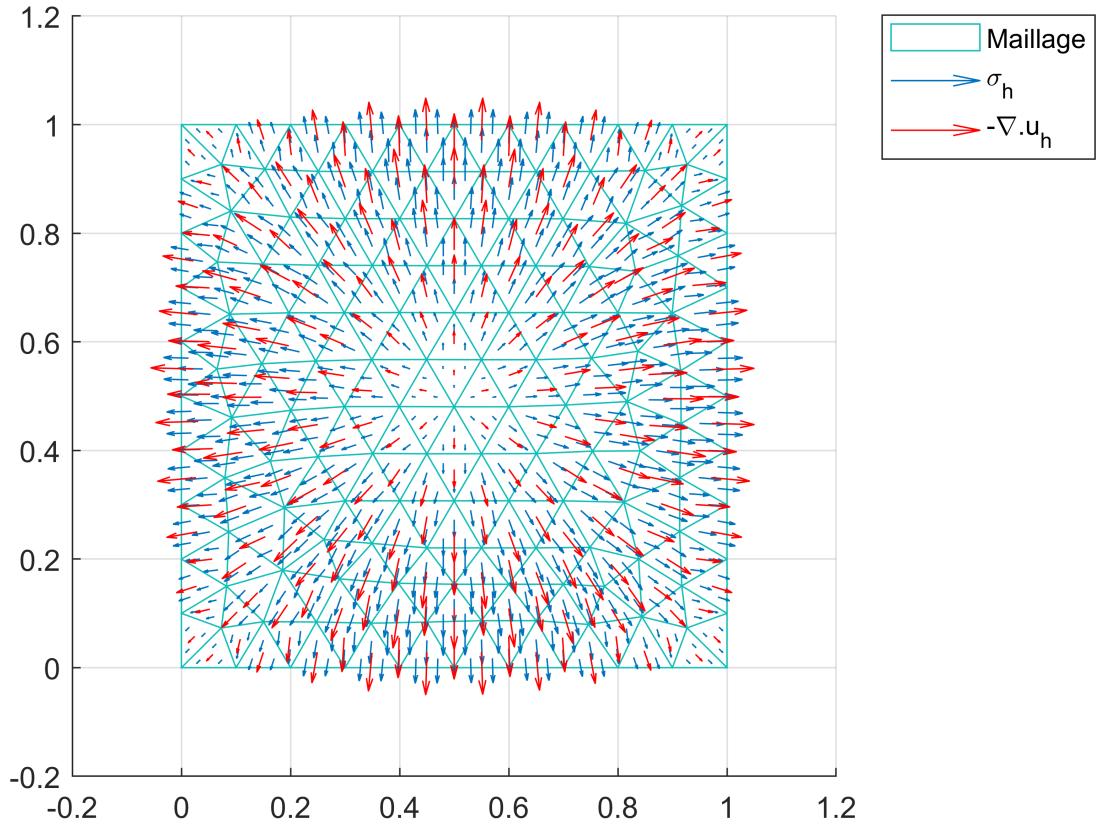


FIGURE 5 – Champs du flux reconstruit et de l’opposé du gradient brisé pour le premier problème

2.6 Estimation d’erreurs a posteriori

On calcule les estimateurs sur chaque triangle :

$$\eta_K^2(u_h) := \|\nabla_h u_h + \sigma_h\|_K^2 + \|\nabla_h(u_h - s_h)\|_K^2$$

qui vient directement avec ce qu’on a calculé avant.

On peut alors avoir l’estimateur :

$$\eta(u_h) = \sqrt{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\|\nabla_h u_h + \sigma_h\|_K^2 + \|\nabla_h(u_h - s_h)\|_K^2)}$$

En traçant l’estimateur et l’erreur en fonction du nombre d’arêtes on remarque que les vitesses de convergence sont identiques :

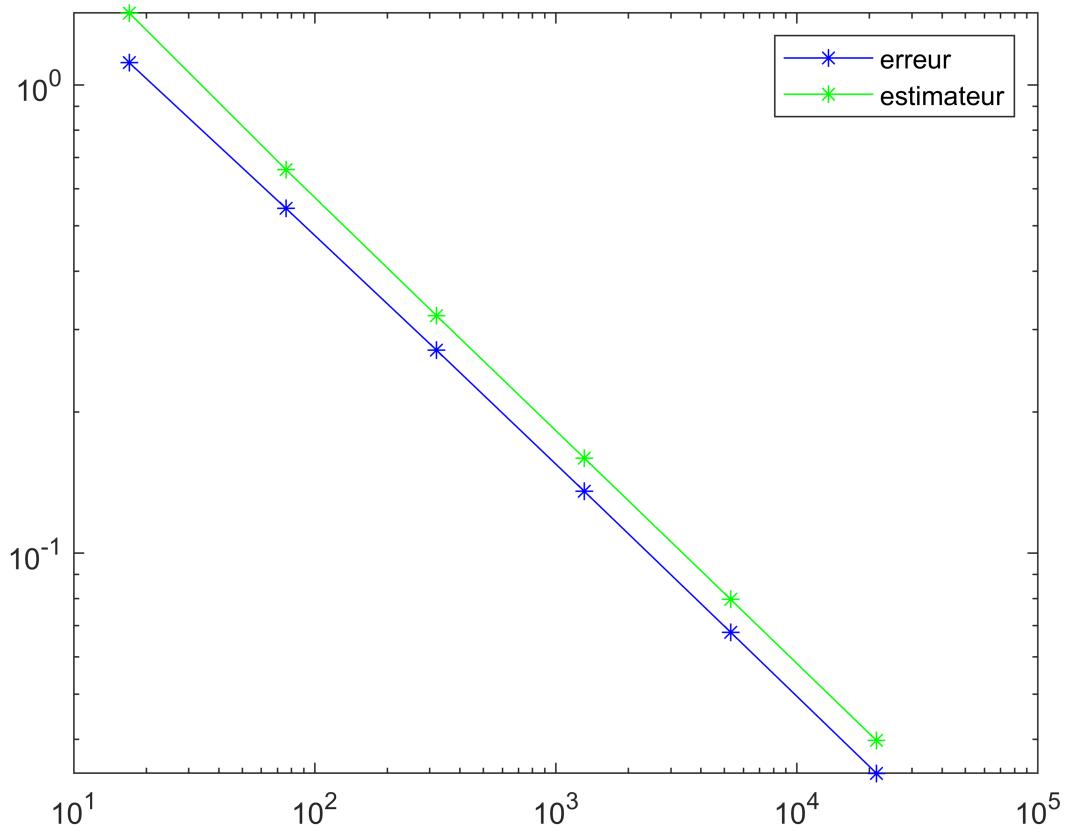


FIGURE 6 – Erreur $\|\nabla_h(u - u_h)\|$ et estimateur $\eta(u_h)$ en fonction du nombre d’arêtes

En fait la valeur de l'estimateur tend vers celle de l'erreur, on peut tracer l'indice d'efficacité $I_{\text{eff}} := \frac{\eta(u_h)}{\|\nabla_h(u - u_h)\|}$:

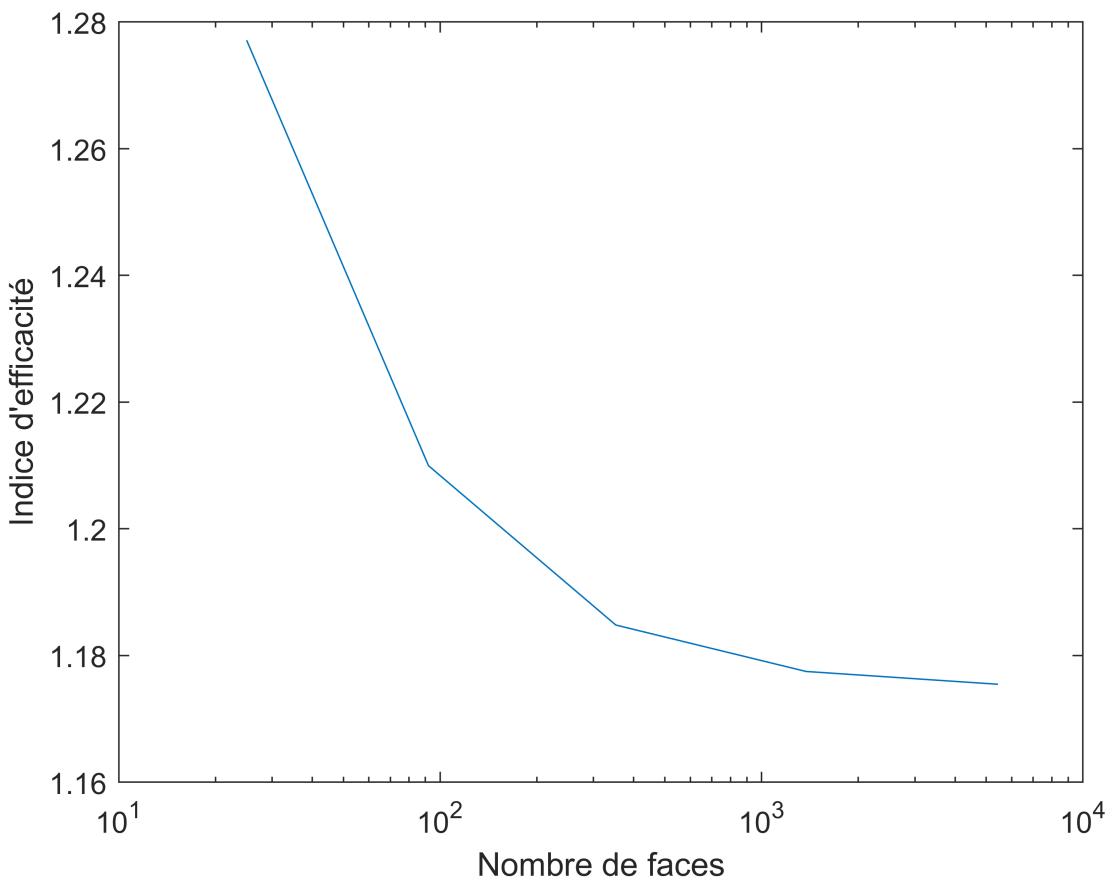
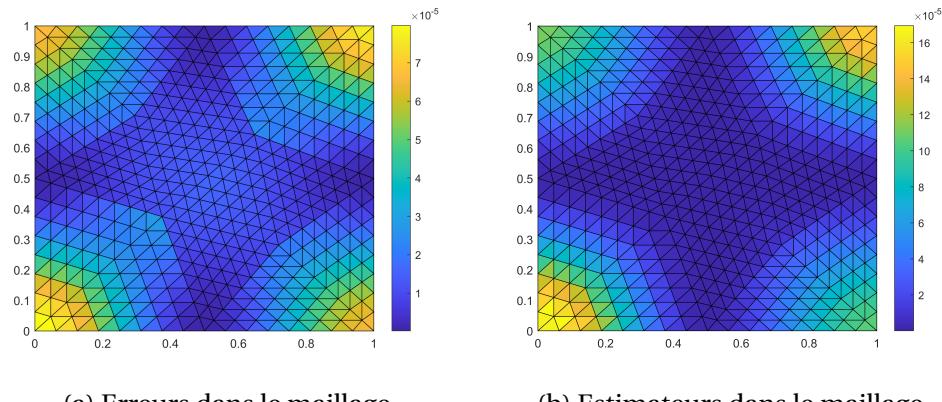


FIGURE 7 – Indice d'efficacité en fonction du nombre d'arêtes

On peut afficher les estimateurs $\eta_K^2(u_h)$ et les erreurs dans chaque triangle :



On remarque que les deux figures sont très proches, dans la pratique on ne connaît pas les erreurs mais on peut calculer les estimateurs, on peut alors savoir où raffiner le maillage pour améliorer la qualité de la solution approchée sans pour autant demander autant de calcul qu'avec une raffinement uniforme.

3 Etude du cas avec condition non homogène

3.1 Solution approchée sous condition non-homogène

Considérons maintenant dans $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \setminus [0, 1] \times [-1, 0]$ avec une solution exacte $u(r, \theta) = r^{\frac{2}{3}} \sin(2\theta/3)$. Calculons le terme source f :

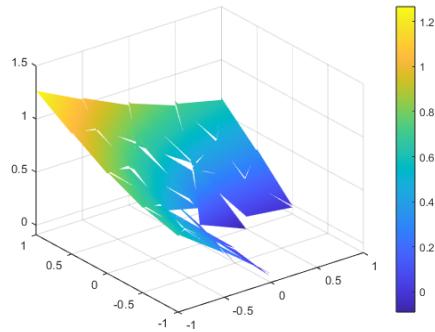
$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= -\Delta u(r, \theta) \\
 &= -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) \\
 &= -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial r^{\frac{2}{3}} \sin(2\theta/3)}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 r^{\frac{2}{3}} \sin(2\theta/3)}{\partial \theta^2}\right) \\
 &= -\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r^{2/3} \frac{2}{3} \sin(2\theta/3) + r^{-\frac{4}{3}} \frac{4}{9} \sin(2\theta/3)\right) \\
 &= -\left(-r^{-\frac{4}{3}} \frac{4}{9} \sin(2\theta/3) + r^{-\frac{4}{3}} \frac{4}{9} \sin(2\theta/3)\right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Dans ce cas les conditions aux bords ne sont plus homogènes, on ne peut donc plus appliquer directement la méthode du premier cas. On considère alors un relèvement de la solution : la seule fonction g de V_{h1}^{nc} valant la valeur de la solution sur les barycentres du bord et 0 sur les autres barycentres. On a alors : $\forall v_h \in V_{h1}^{\text{nc}}, (\nabla_h u_h, \nabla_h v_h) = -(\nabla_h g, \nabla_h v_h)$
 Et donc : $\forall F \in \mathcal{F}_h^{\text{int}}, (\nabla_h u_h, \nabla_h \psi^F) = -(\nabla_h g, \nabla_h \psi^F)$
 g étant nulle sur tous les triangles n'ayant pas d'arête aux bords on peut se contenter de prendre une matrice :

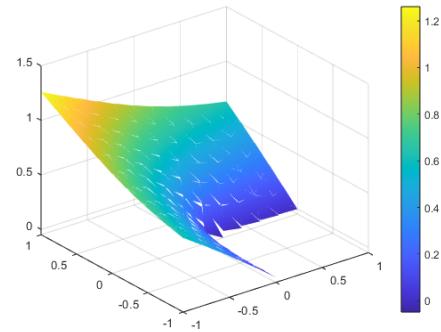
$$\mathbb{K}_{FF'}^{\text{ext,int}} := \left(\nabla_h \psi^{F'}, \nabla_h \psi^F \right) \quad F \in \mathcal{F}_h^{\text{int}}, \quad F' \in \mathcal{F}_h^{\text{ext}}$$

On a alors la valeur de la solution sur les arêtes intérieures en résolvant le système linéaire, on fixe la valeurs sur les bords à l'aide de la condition aux bords.

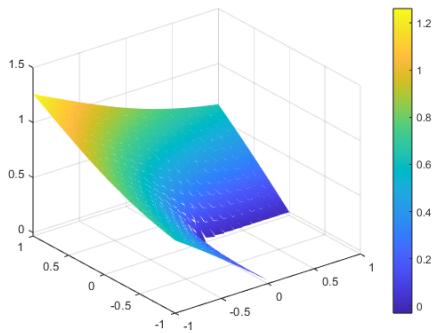
On obtient pour solutions :



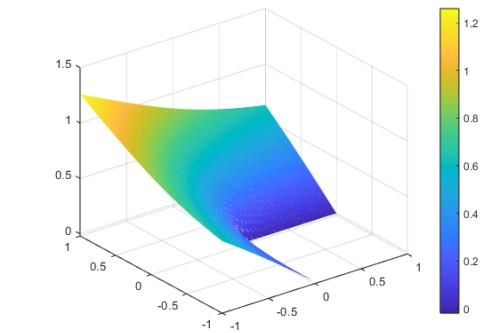
(a) Solution pour $h = 0.5$



(b) Solution pour $h = 0.2$

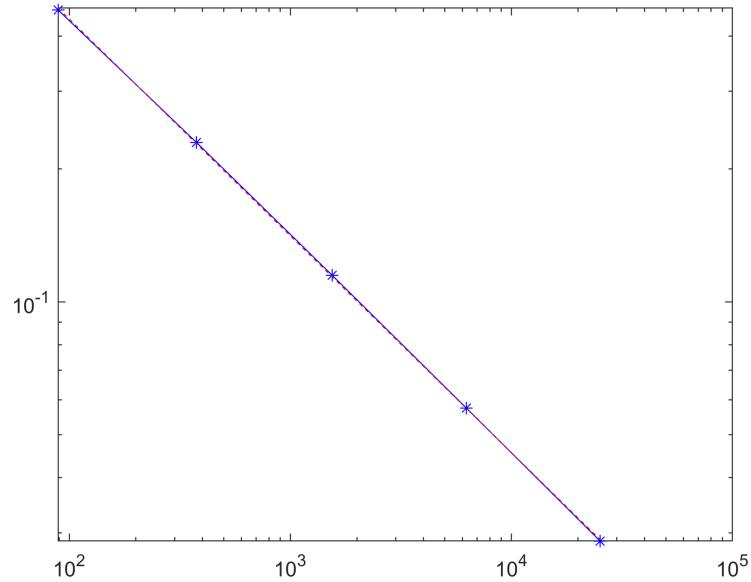


(c) Solution pour $h = 0.1$

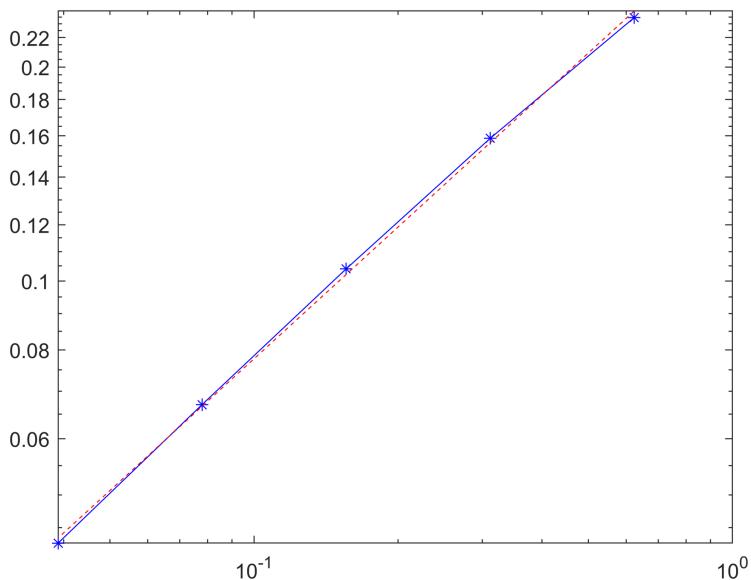


(d) Solution pour $h = 0.05$

3.2 Visualisation des erreurs



(a) Erreur en fonction de $|V_{h1}^{\text{nc}}|$



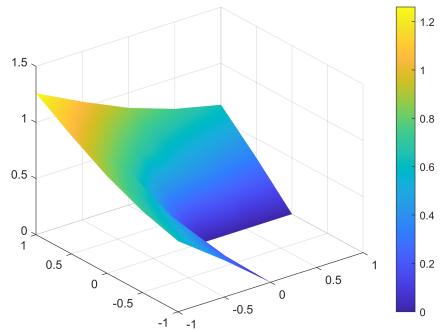
(b) Erreur en fonction de h

On trouve ici pour le tracé en fonction de $|V_{h1}^{\text{nc}}|$ une erreur en $O(|V_{h1}^{\text{nc}}|^{-0.3})$. Pour celle en fonction de h , on trouve une erreur en $O(h^{0.62})$.

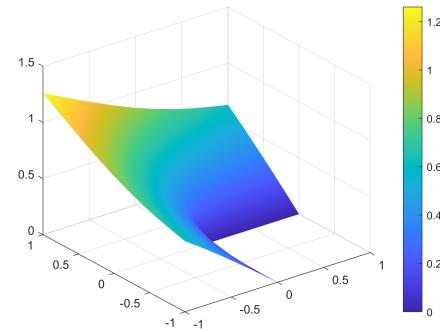
3.3 Reconstruction du potentiel

Le cas non homogène requiert une modification : au lieu de fixer la valeur de s_h à 0 sur le bord on la fixe à la valeur de la solution sur le bord.

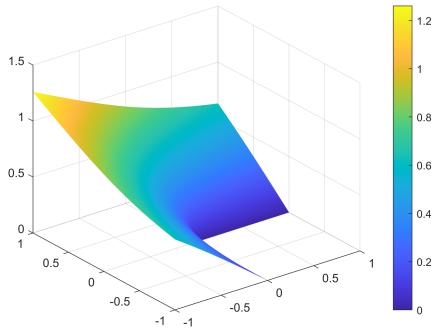
On obtient les solutions suivantes dans V_{h1} :



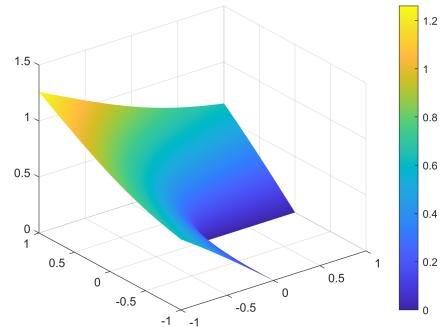
(a) Potentiel pour $h = 0.5$



(b) Potentiel pour $h = 0.2$



(c) Potentiel pour $h = 0.1$



(d) Potentiel pour $h = 0.05$

3.4 Reconstruction du flux

On applique la reconstruction du flux équilibré σ_h d'après la définition 1.6.6 du polycopié, ici $f = 0$ donc on a directement le flux reconstruit avec le gradient brisé de u_h .

On obtient les champs suivants :

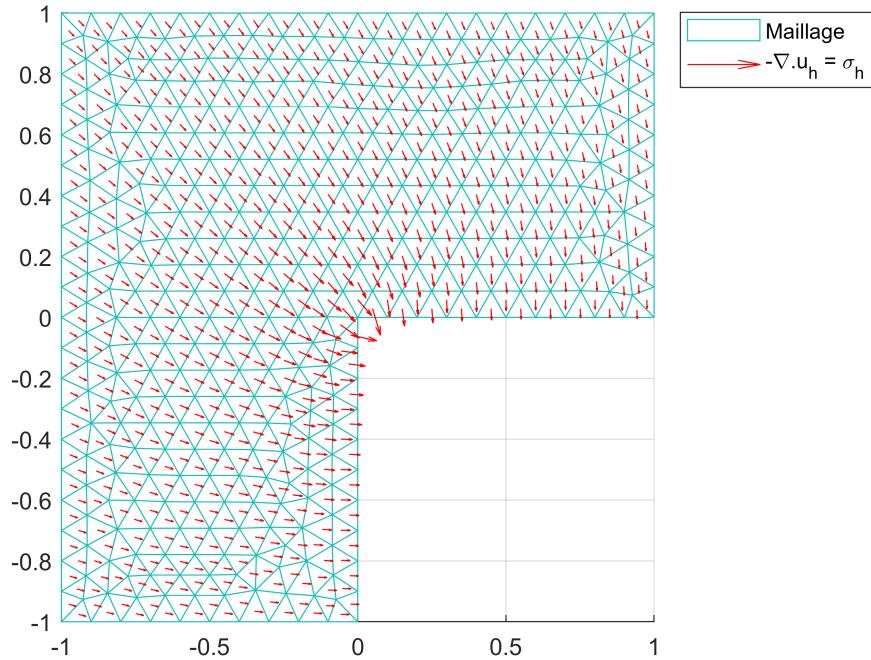


FIGURE 12 – Champs du flux reconstruit et de l’opposé du gradient brisé pour le second problème

3.5 Estimation d’erreurs a posteriori

On calcule les estimateurs sur chaque triangle.

En traçant l’estimateur et l’erreur en fonction du nombre d’arêtes on remarque que les vitesses de convergence sont identiques :

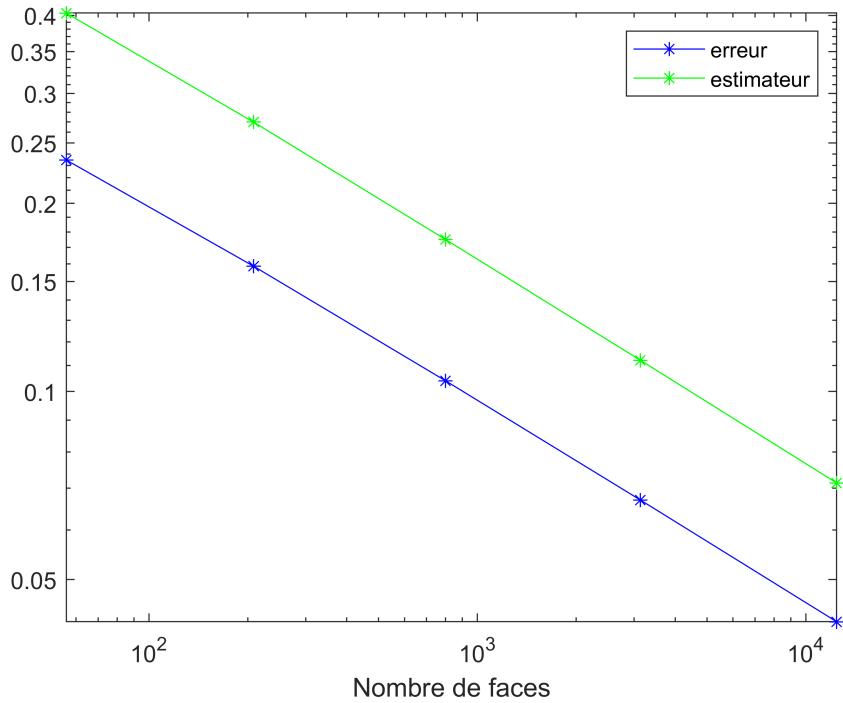


FIGURE 13 – Erreur $\|\nabla_h(u - u_h)\|$ et estimateur $\eta(u_h)$ en fonction du nombre d’arêtes

On voit que l’indice d’efficacité est moins bon que dans le cas homogène mais décroît quand même :

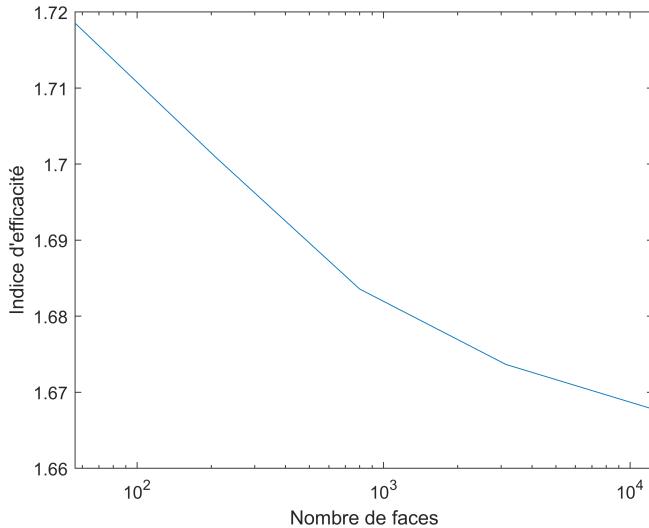
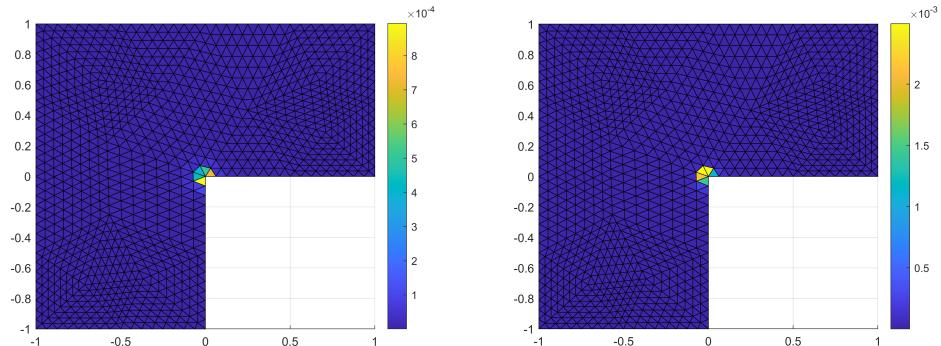


FIGURE 14 – Indice d’efficacité en fonction du nombre d’arêtes

On peut afficher les estimateurs $\eta_K(u_h)$ et les erreurs dans chaque triangle :



(a) Erreurs dans le maillage

(b) Estimateurs dans le maillage

On a encore des images très similaires. Ici l'erreur est presque nulle partout sauf autour de 0, peut-être dû au fait que le gradient de la solution tende vers l'infini en 0.

4 Maillage adaptatif

Connaissant les estimateurs sur chaque triangle on essaye de raffiner le maillage en priorité sur les zones où les estimateurs sont grands.

Pour cela on va simplement choisir les triangles tels que la somme de leurs estimateurs dépasse une valeur θ et on va les raffiner de la même manière que précédemment. Cependant, cela va créer des points au milieux des arêtes d'autres triangles, pour que le maillage reste valide et que l'opération soit licite on crée de nouveaux triangles dans ces triangles voisins (détails en annexe).

On obtient de nouveaux maillage où la précision est concentrée sur les zones de forte erreur. Les zones de faibles précisions sont bien renforcées :

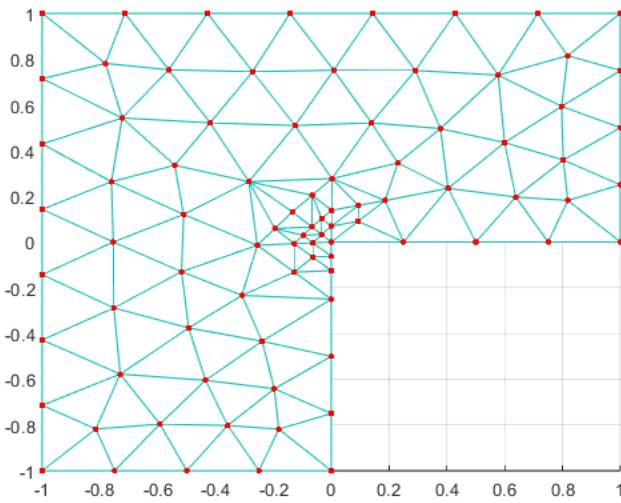


FIGURE 16 – Exemple de maillage avec raffinement adaptatif

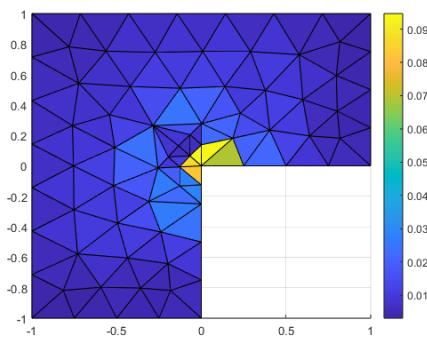
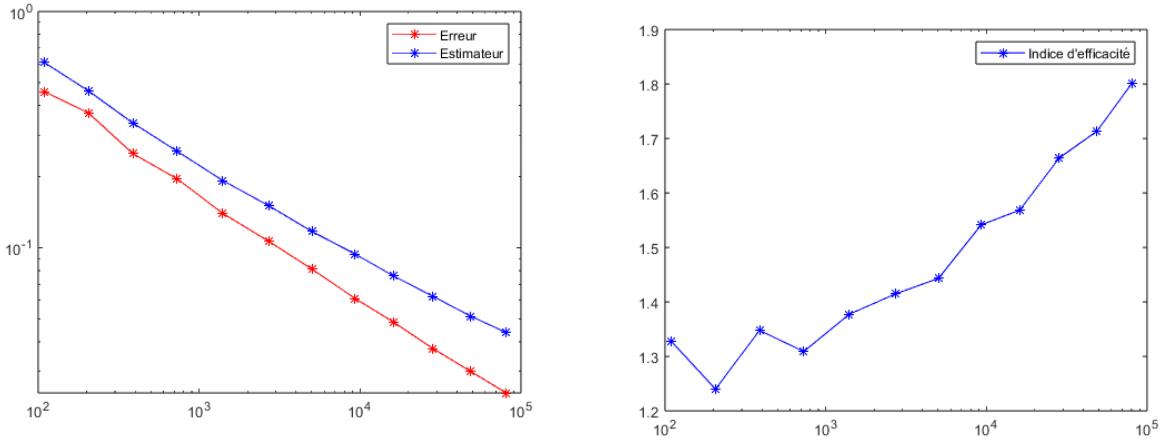


FIGURE 17 – Estimateur sur un maillage adaptatif

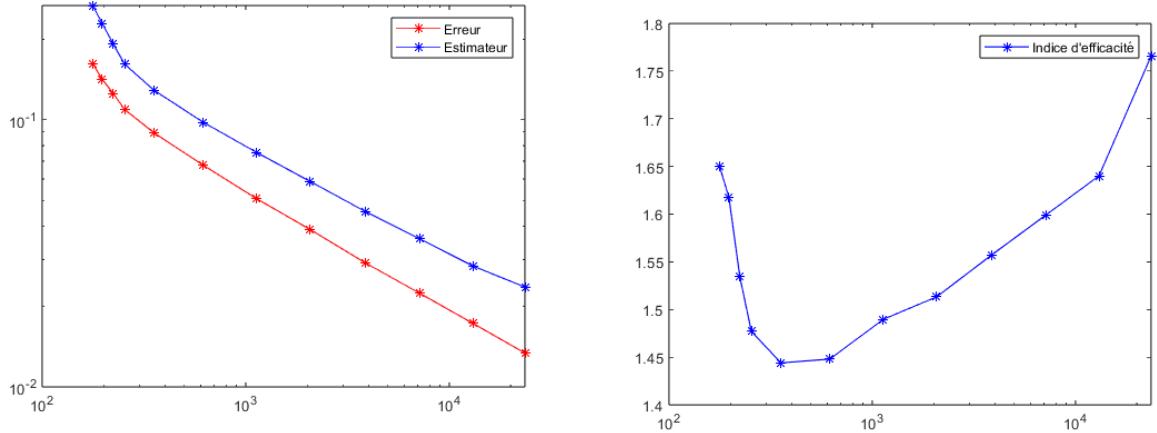
On remarque que la régularité des mailles est bien moins bonne que dans le cas d'un maillage uniforme, ceci devrait modifier la convergence de la méthode.



(a) Erreurs et estimateurs en fonction du nombre de faces

(b) Indice d'efficacité en fonction du nombre de faces

FIGURE 18 – Problème 1

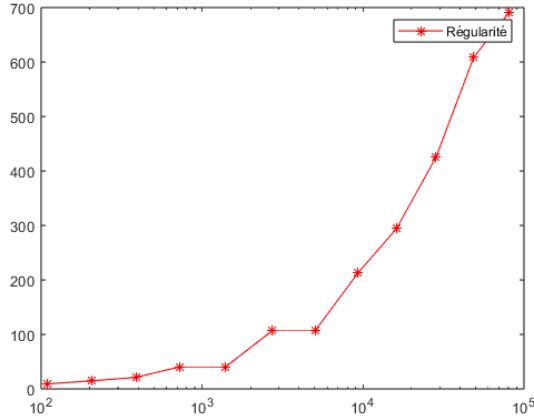


(a) Erreurs et estimateurs en fonction du nombre de faces

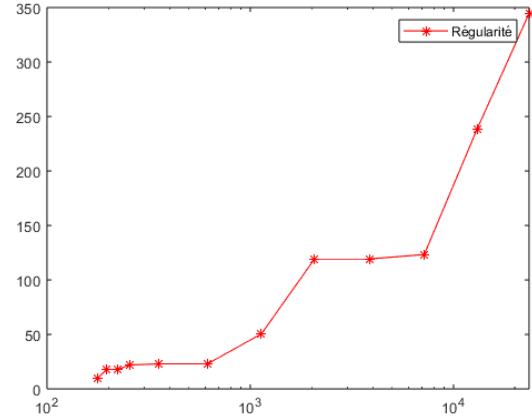
(b) Indice d'efficacité en fonction du nombre de faces

FIGURE 19 – Problème 2

On remarque que l'indice d'efficacité décroît puis croît fortement ce qui s'éloigne du cas de raffinement uniforme où l'indice d'efficacité à plutôt tendance à tendre vers 1. La raison provient de l'analyse théorique, on sait que l'indice d'efficacité croît avec la régularité du maillage, or, ici notre maillage a une régularité qui explose en raison de notre façon de découper les triangles.



(a) Problème 1



(b) Problème 2

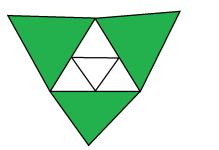
FIGURE 20 – Régularités des maillages en fonction du nombre d'arêtes, obtenus après plusieurs raffinement adaptatifs, pour chaque problème.

5 Conclusion

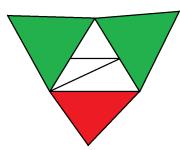
Ce projet nous a permis d'appliquer sur des cas concrets la méthode des éléments finis non conformes, d'utiliser les procédures de reconstruction du flux et du potentiel et d'examiner les estimateurs d'erreur a posteriori, utiles pour raffiner de manière plus optimale le maillage que dans le cas uniforme. Le code peut être grandement optimisé et clarifié et un travail reste à fournir pour utiliser le maillage adaptatif mais nous avons pu observer des résultats obtenus dans le cours et créer des programmes intéressants tels que le raffinement ou l'estimation a posteriori.

A Méthode de raffinement du maillage

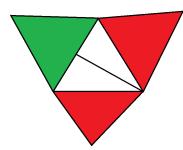
Pour chaque triangle n'étant pas à diviser on doit regarder ses voisins pour que le maillage reste conforme. Si tous les voisins de ce triangle sont à diviser (cas 1) on peut scinder les arêtes en deux ce qui donnera 4 triangles identiques à homothétie près du triangle initial. Les angles de ces nouveaux triangles correspondent donc aux angles du triangle initial, ces triangles ne modifient pas la régularité du maillage. Si deux triangles voisins sont à diviser (cas 2) on ne peut pas procéder de la même façon, on ne peut pas placer de sommet sur l'arête du triangle n'étant pas divisé. On procède alors de la façon illustrée sur la figure du cas 2. Si un seul triangle voisin est à diviser (cas 3), on ne peut pas placer de sommet sur les autres côtés du triangle initial, on joint alors le milieu de l'arête à scinder avec le sommet opposé. Dans les cas 2 et 3 les nouveaux triangles n'ont pas les mêmes angles que le triangle initial, d'où une modification de la régularité.



(a) Cas 1



(b) Cas 2



(c) Cas 3

FIGURE 21 – Méthode de raffinement des triangles voisins aux triangles divisés.

Pour conserver une bonne régularité il faudrait se tourner vers d'autres algorithmes de raffinement, a priori plus complexes.