

École Nationale Supérieure de Techniques Avancées - ENSTA Paris

Cours PRB222

Option sur Spread

Pierre BOULOGNE

Maxime MEYER

Palaiseau

Avril 2023

Table des matières

1	Question 1	2
1.1	Existence	2
1.2	Unicité	2
1.3	Conclusion	2
2	Question 2	3
3	Q3	4
4	Q4	4
5	Q5	5
6	Q6	5
7	Q7	6
8	Q8	7
9	Q9	7
10	Q10	8
11	Q11	9
12	Q12	10
13	Q13	10
14	Q14	11
15	Q15	11

1 Question 1

Soit $i \in \{1; 2\}$.

On s'intéresse à l'équation

$$\begin{cases} dS_i(t) = S_i(t)(r dt + \sigma_i dW_i(t)) \\ S_i(0) = S_{i,0} > 0 \end{cases} \quad (1)$$

1.1 Existence

$S_i(t) = S_{i,0} \exp[(r - \frac{\sigma_i^2}{2})t + \sigma_i W_i(t)]$ est bien solution de 1.

En effet, c'est clairement un processus d'Itô, et en appliquant la formule d'Itô (on pose $S_i(t) = f(t, W_i(t))$:

$$f(t, W_i(t)) = S_{i,0} + \int_0^t S_i(s) r ds + \int_0^t \sigma_i S_i(s) dW_i(s)$$

1.2 Unicité

Soit X une autre solution de 1. On note $Z(t) = \exp[(-r + \frac{\sigma_i^2}{2})t - \sigma_i W_i(t)] = \exp[(r' - \frac{\sigma_i'^2}{2})t + \sigma_i' W_i(t)]$ (en notant $r' = -r + \sigma_i^2$ et $\sigma' = -\sigma$).

En appliquant la formule d'Itô comme précédemment, on a

$$Z(t) = 1 + \int_0^t Z(s)(r' ds + \sigma' dW_i(s)) = 1 + \int_0^t Z(s)((-r + \sigma_i^2)ds - \sigma_i dW_i(s)).$$

Grâce à la formule d'intégration par parties pour les processus d'Itô,

$$d(X(t)Z(t)) = X(t)dZ(t) + Z(t)dX(t) + d[X, Z](t)$$

D'où, comme $X(t)$ est solution de 1,

$$[X, Z](t) = - \int_0^t \sigma_i^2 X(s)Z(s)ds.$$

$$\text{Donc } X(t)Z(t) = X(0)Z(0) + \int_0^t X(s)Z(s)((-r + \sigma_i^2)ds - \sigma_i dW_i(s)) + \int_0^t Z(s)X(s)(r ds + \sigma_i dW_i(s)) - \int_0^t \sigma_i^2 X(s)Z(s)ds = X(0)Z(0).$$

$$\text{Or, } Z(t) = S_{i,0} S_i(t)^{-1}.$$

$$\text{Donc } X(t) = \frac{X(0)Z(0)S_i(t)}{S_{i,0}} = \frac{X(0)}{S_{i,0}} S_i(t).$$

1.3 Conclusion

$$S_i(t) = S_{i,0} \exp[(r - \frac{\sigma_i^2}{2})t + \sigma_i W_i(t)]$$

2 Question 2

On remarque que, en notant $W_3(t) = \frac{W_2(t) - \rho W_1(t)}{\sqrt{1 - \rho^2}}$, $Cov(W_3(t), W_1(t)) = 0$. Or $W = (W_1(t), W_2(t))$ est gaussien. Donc $(W_1(t), W_3(t))$ est également gaussien, s'obtenant en effectuant des combinaisons linéaires sur les vecteurs de W . $W_3(t)$ est donc un mouvement brownien indépendant de $W_1(t)$, et $W_2(t) = \rho W_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W_3(t)$.

On a :

$$P = e^{-rT} E_P \left[e^{(r - \frac{\sigma_1^2}{2})T + \int_0^T \sigma_1 dW_1(s)} (\alpha S_{1,0} - \beta S_{2,0} \exp(\frac{\sigma_1^2}{2} - \frac{\sigma_2^2}{2})T + \int_0^T (\rho \sigma_2 - \sigma_1) dW_1(s) + \int_0^T \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} dW_3(s))_+ \right]$$

$$P = E_P[L(T)(\alpha S_{1,0} - \beta S_{2,0} M(T))_+]$$

$$L(T) = \exp(\sigma_1 W_1(T) - \frac{\sigma_1^2 T}{2}) = \exp(-\int_0^T \theta_s dW_1(s) - \frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds)$$

Avec $\theta_s = -\sigma_1$

D'après le théorème de Girsanov, en notant

$$B(t) = (\rho \sigma_2 - \sigma_1) W_1(t) + \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2} W_3(t)$$

$$M(t) = e^{(\frac{\sigma_1^2}{2} - \frac{\sigma_2^2}{2})t} e^{B(t)}$$

$P = E_{P^*}[(\alpha S_{1,0} - \beta S_{2,0} M(T))_+]$, avec $W_1(T) - \sigma_1 T$ un mouvement brownien standard sous P^* . Comme W_3 et W_1 sont indépendantes, W_3 suis la même loi sous P et P^* .

De plus, on a :

$$E_{P^*}(W_1(T)) = \sigma_1 T$$

$$E_{P^*}(W_3(T)) = 0$$

$$E_{P^*}(B(T)) = (\rho \sigma_2 - \sigma_1) \sigma_1 T$$

$$V_{P^*}(W_1(T)) = T$$

$$V_{P^*}(W_3(T)) = \frac{1}{1 - \rho^2} (V_P(W_2) + \rho^2 V_P(W_1) - 2\rho^2) = \frac{1 + \rho^2}{1 - \rho^2} T - 2\rho^2$$

$$V_{P^*}(B(T)) = (\sigma_1^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2) T$$

On note :

$$\hat{\sigma}^2 = V_{P^*}(B(1))$$

$$\hat{K} = \alpha S_{1,0}$$

$$\hat{S}_0 = \beta S_{2,0}$$

$$\hat{r} = 0$$

\hat{W} un mouvement brownien standard sous P^*

Et on obtient $P e^{-\hat{r}T} = e^{-\hat{r}T} E_{P^*}[(\hat{K} - \hat{S}_0 e^{(\hat{r} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2})T + \hat{\sigma} \hat{W}(T)})_+]$.

On reconnaît la formule d'un put européen dans le modèle de Black & Scholes, et on obtient finalement :

$$Pe^{-\hat{r}T} = -\hat{S}_0\phi(-d_1) + \hat{K}e^{-\hat{r}T}\phi(-d_2)$$

$$\text{Avec } d_1 = \frac{\ln(\frac{\hat{S}_0}{\hat{K}}) + (\hat{r} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2})T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} \text{ et } d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P = \alpha S_{1,0}\phi(-d_2) - \beta S_{2,0}\phi(-d_1) \\ d_1 = \frac{\ln(\frac{\beta S_{2,0}}{\alpha S_{1,0}}) + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} \\ d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T} \\ \hat{\sigma}^2 = (\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) \end{array} \right. \quad (2)$$

3 Q3

W est un mouvement Brownien sous probabilité risque neutre de matrice de corrélation $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ que l'on simulera à l'aide de l'algorithme de Box-Müller pour obtenir des gaussiennes et de la décomposition de Choleski pour avoir la matrice de covariance souhaitée.

4 Q4

En conditionnant par W_1 et en utilisant le freezing lemma, on obtient

$$P = E_P(E_P[L(T)(\alpha S_{1,0} - \beta S_{2,0}M(T))_+ | W_1(T)]) = e^{-rT} E_P[(K_4 - S_4 e^{(r - \frac{\sigma_4^2}{2})T + \sigma_4 \tilde{W}(T)})_+] \text{ où } \tilde{W} \text{ est un mouvement brownien standard.}$$

C'est le prix d'un put européen d'échéance T, de strike $K_4 = \alpha S_{1,0} e^{(r - \frac{\sigma_1^2}{2})T + \sigma_1 W}$, de valeur initiale $S_4 = \beta S_{2,0} e^{\sigma_2 \rho W - \frac{\rho^2 \sigma_2^2}{2}T}$ et de volatilité $\sigma_4 = \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}$.

5 Q5

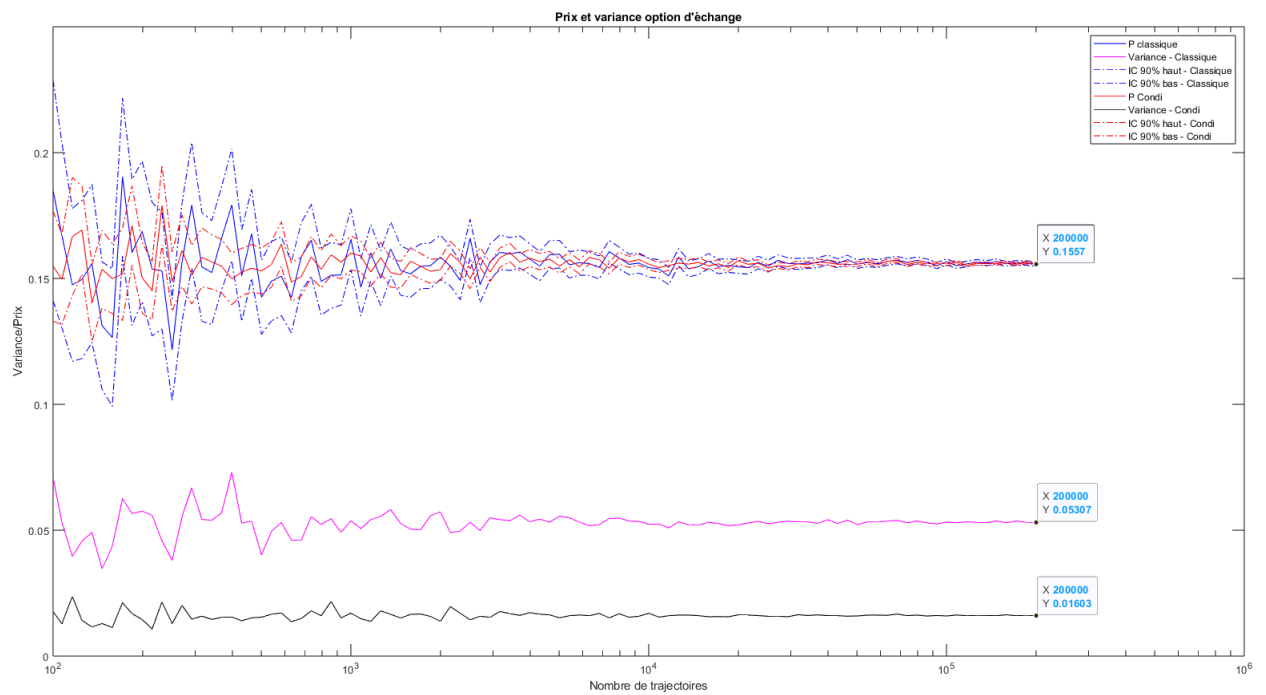


FIGURE 1 – Comparaison sur l’option d’échange des techniques Monte Carlo classique et par technique de réduction de variance basée sur le conditionnement

On constate que les deux techniques fonctionnent. En effet, elles convergent toutes deux vers un prix qui correspond au prix théorique. De plus, la technique de réduction de variance basée sur le conditionnement fonctionne mieux que le Monte Carlo classique. Sa variance ainsi que son intervalle de confiance sont plus petits.

6 Q6

On utilise la technique de Monte Carlo pour tracer le graphique suivant :

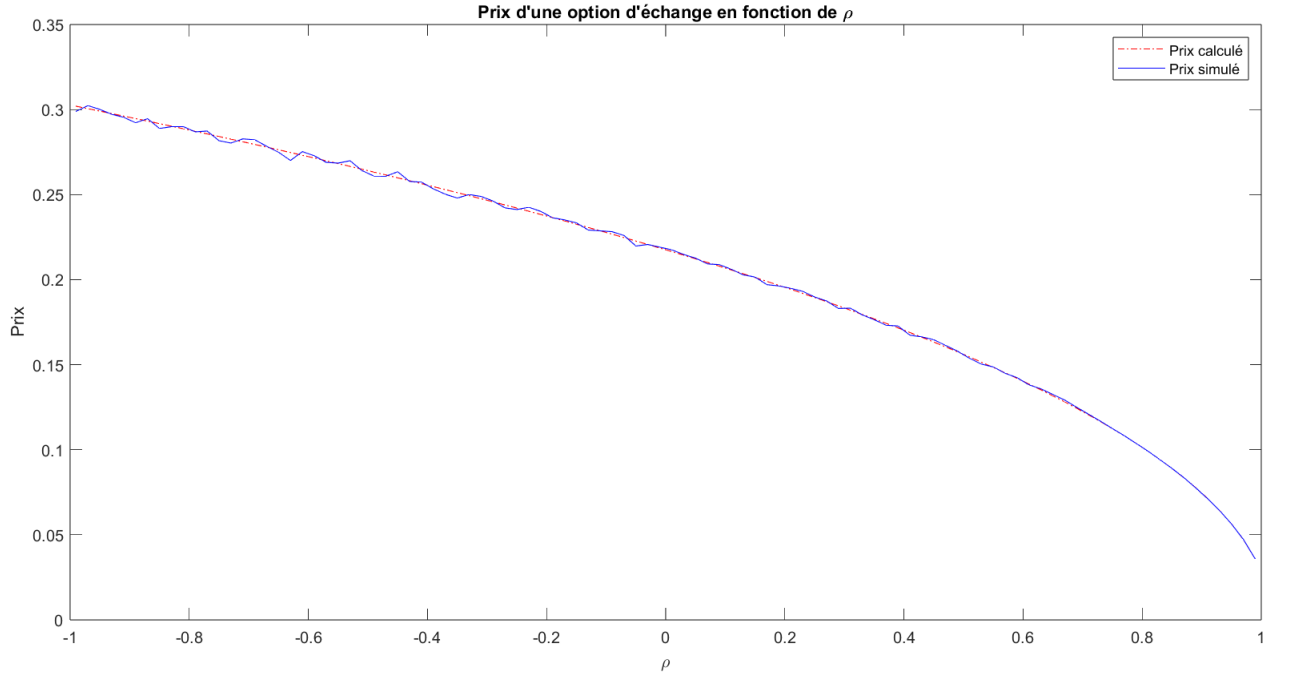


FIGURE 2 – Prix de l'option d'échange en fonction de ρ

La courbe théorique correspond bien à celle tracée par Monte Carlo.

On se ramène à l'écriture du prix de l'option d'échange comme celle d'un put de volatilité $\hat{\sigma}^2 = (\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)$. On sait que le prix d'un put est une fonction croissante de la volatilité, on s'attend donc bien à avoir un prix décroissant en fonction de ρ . La limite en 1 n'est pas 0 car on a choisi des volatilités différentes pour S_1 et S_2 .

7 Q7

En conditionnant par W_1 et en utilisant le freezing lemma, on obtient

$$P = e^{-rT} E_P[(K_5 - S_5 e^{(r - \frac{\sigma_5^2}{2})T + \sigma_5 \tilde{W}(T)})_+] \text{ où } \tilde{W} \text{ est un mouvement brownien standard.}$$

C'est le prix d'un put européen d'échéance T , de strike $K_5 = \alpha S_{1,0} e^{(r - \frac{\sigma_1^2}{2})T + \sigma_1 W} - K$, de valeur initiale $S_5 = \beta S_{2,0} e^{\sigma_2 \rho W - \frac{\rho^2 \sigma_2^2}{2} T}$ et de volatilité $\sigma_5 = \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}$.

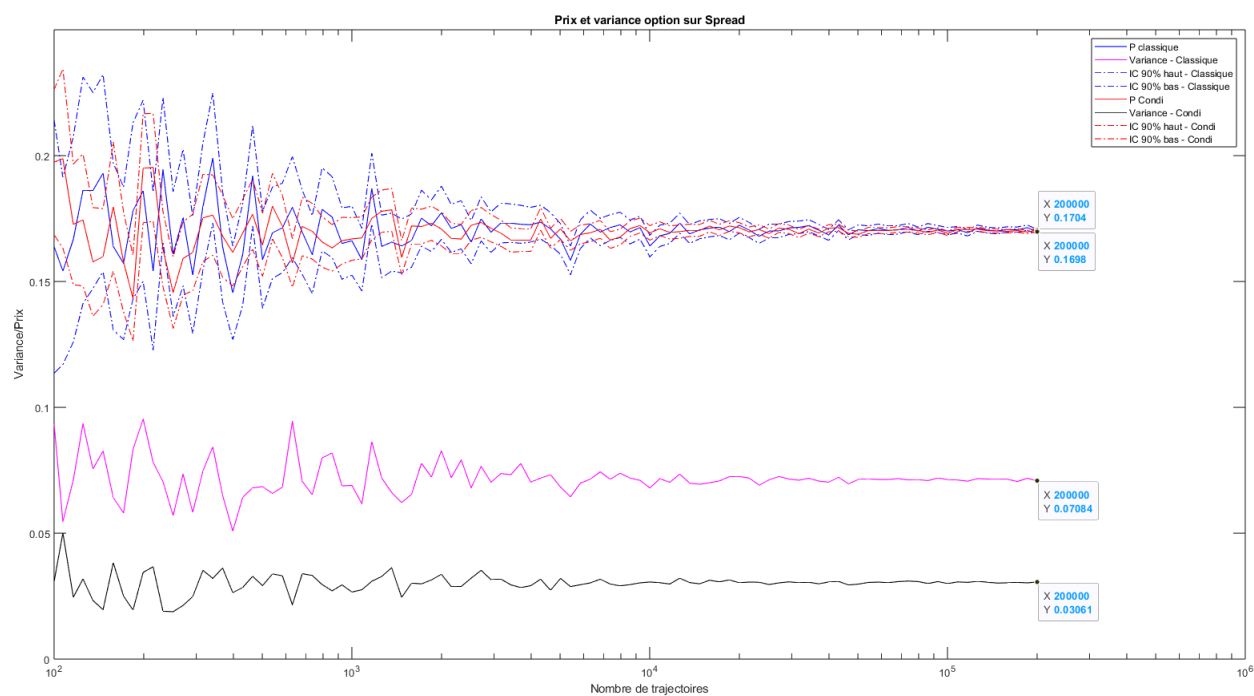


FIGURE 3 – Prix de l’option sur Spread estimée par Monte Carlo en fonction du nombre de trajectoires, et variance associée

9 Q9

On utilise la technique de Monte Carlo par réduction de variance basée sur le conditionnement pour tracer le graphique suivant :

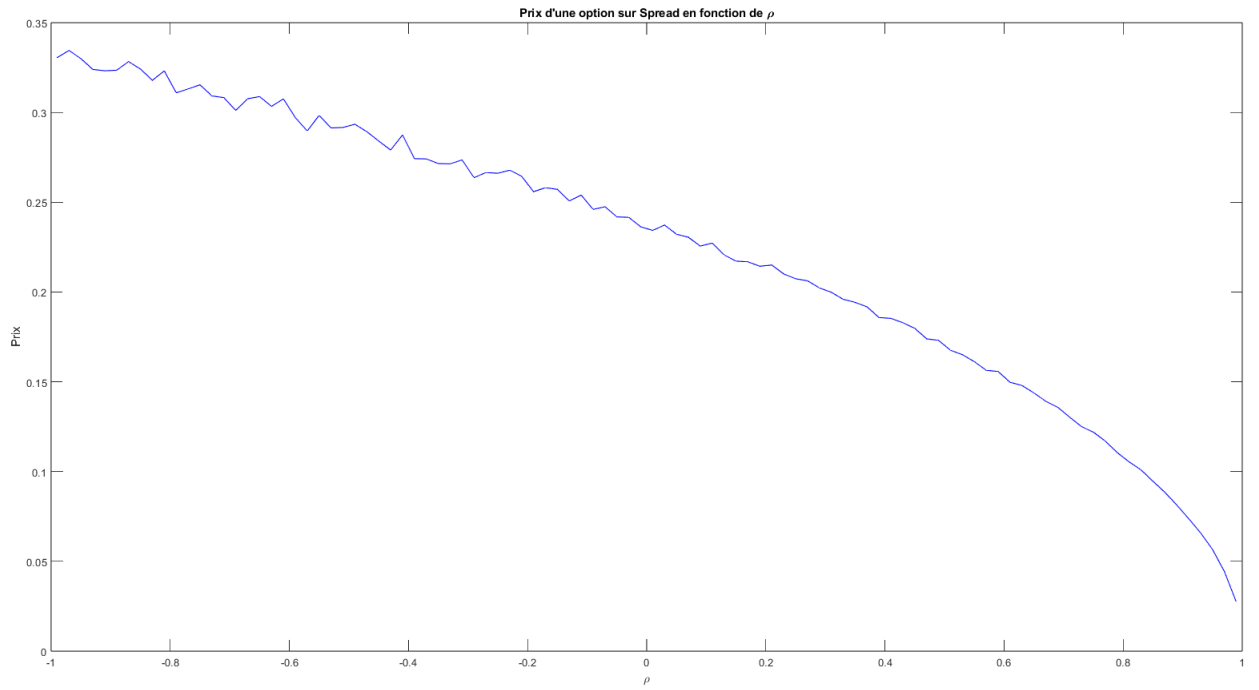


FIGURE 4 – Prix de l’option sur Spread en fonction de ρ

La fonction à la même allure que 2 pour les même raisons.

10 Q10

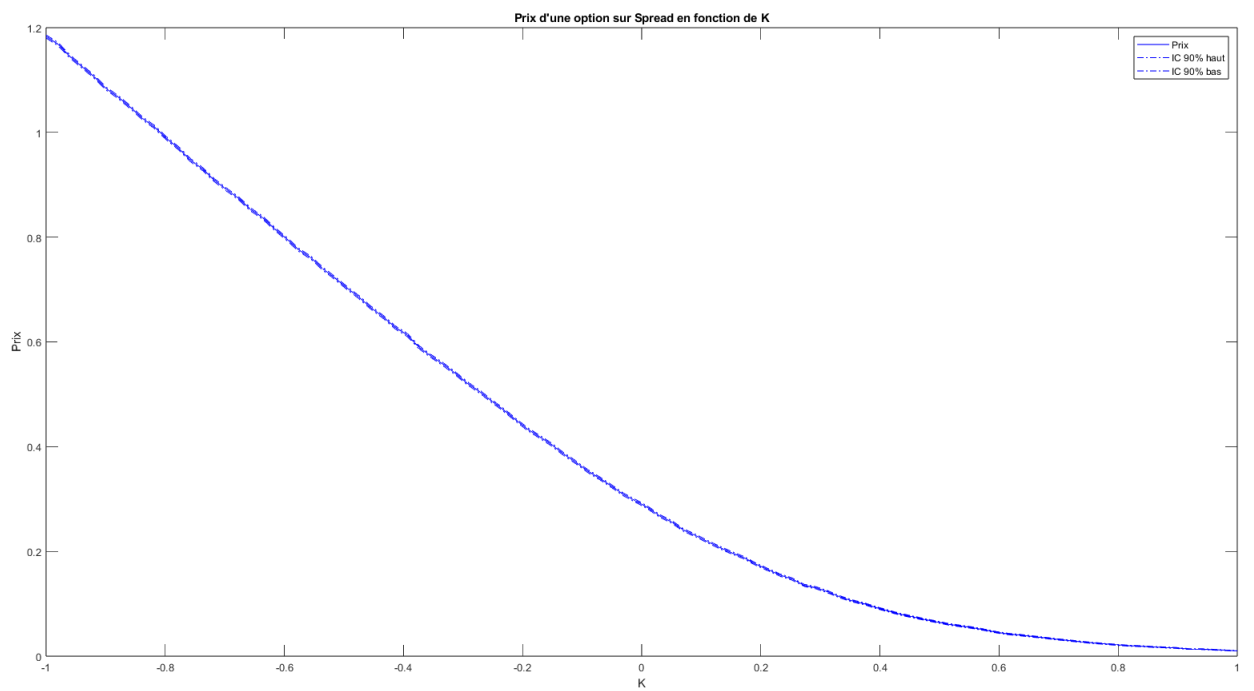


FIGURE 5 – Prix de l’option de spread en fonction de K

$K \mapsto (\alpha S_1(T) - \beta S_2(T) - K)_+$ étant décroissante et convexe presque sûrement, $K \mapsto \mathbb{E}[(\alpha S_1(T) - \beta S_2(T) - K)_+]$ est décroissante et convexe. De plus on observe une décroissance linéaire pour de faibles valeurs de K ce qui correspond aux valeurs pour lesquelles la probabilité que $\alpha S_1(T) - \beta S_2(T) - K$ soit négative est très faible donc $\mathbb{E}[(\alpha S_1(T) - \beta S_2(T) - K)_+] \approx \mathbb{E}[(\alpha S_1(T) - \beta S_2(T) - K)]$ qui a bien une décroissance linéaire en fonction de K . Au contraire quand K est grand la probabilité que $\alpha S_1(T) - \beta S_2(T) - K$ soit négative est proche de 1 donc $(\alpha S_1(T) - \beta S_2(T) - K)_+$ a une probabilité proche de 1 de valoir 0 et donc $\mathbb{E}[(\alpha S_1(T) - \beta S_2(T) - K)_+] \approx 0$ ce qu'on retrouve sur le graphique.

11 Q11

$$\text{Soit } a \in \mathbb{R}, \text{ on a : } (a)_+ - (-a)_+ = \begin{cases} a - 0 & \text{si } a \geq 0 \\ 0 - (-a) & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Dans tous les cas : $(a)_+ - (-a)_+ = a$

Donc

$$\begin{aligned} e^{-rT} \mathbb{E}[\alpha S_1(T) - \beta S_2(T) - K] - e^{-rT} \mathbb{E}[\beta S_2(T) - \alpha S_1(T) + K] &= e^{-rT} (\mathbb{E}[\alpha S_1(T)] - \mathbb{E}[\beta S_2(T)] - K) \\ &= \alpha S_1(0) - \beta S_2(0) - e^{-rT} K \end{aligned}$$

Cette remarque nous permet de construire une méthode de réduction de variance par variable de contrôle qui donne les résultats suivants :

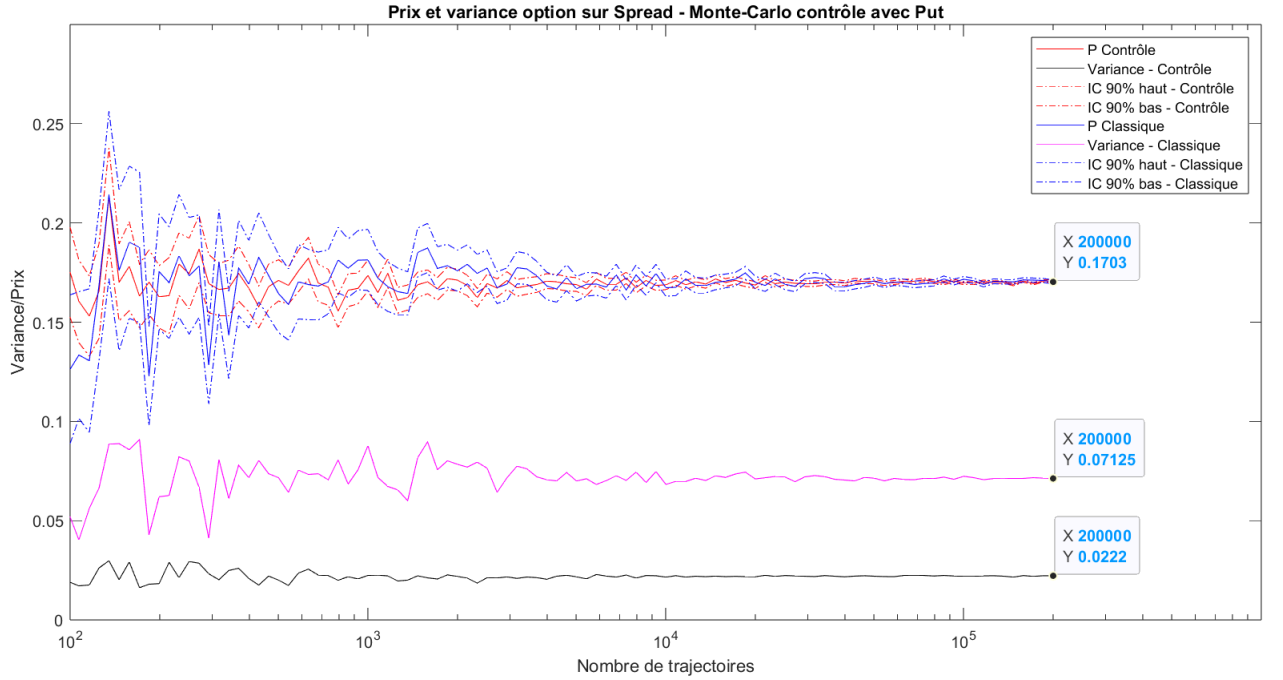


FIGURE 6 – Prix et variance de l’option sur Spread avec variable de contrôle avec Put en fonction du nombre de trajectoires

12 Q12

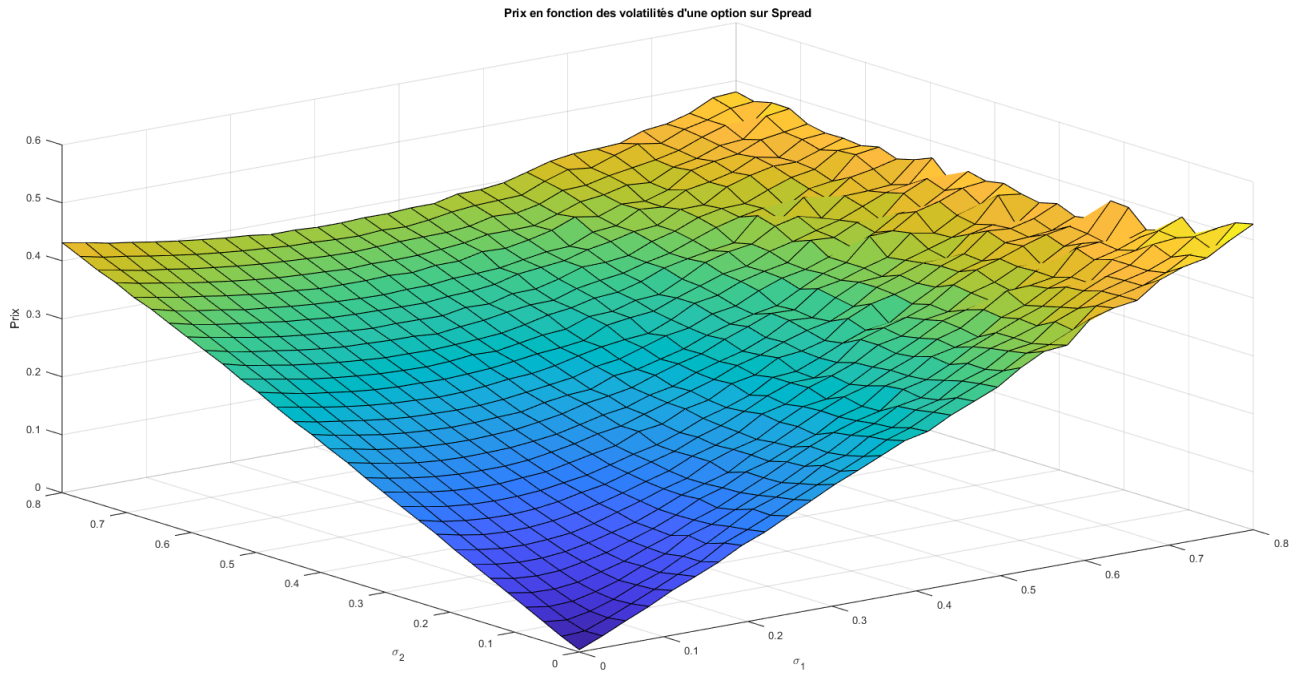


FIGURE 7 – Prix de l'option sur Spread en fonction de σ_1 et σ_2

En se ramenant à la volatilité $\hat{\sigma}^2 = (\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)$, La forme de la courbe s'explique par le fait que le prix d'un Call est une fonction croissante de la volatilité et cette volatilité atteint un minimum en $\rho\sigma_1$ à σ_1 fixé et en $\rho\sigma_2$ à σ_2 fixé (ici $\rho = 0.5$).

De plus le prix en 0 correspond à un prix déterministe qui correspond au calcul.

Enfin on remarque que le prix est quasiment exact à σ_1 faible quelle que soit la valeur de σ_2 mais pas l'inverse, c'est dû au fait que l'on a conditionné par rapport à W_1 et donc que la contribution aléatoire de W_2 liée à σ_2 a disparue.

13 Q13

On a :

$$\begin{aligned} \max(S_1(T), S_2(T)) - K &= \max(S_1(T) - S_2(T), 0) + S_2(T) - K \\ &= (S_1(T) - S_2(T))_+ + S_2(T) - K \end{aligned}$$

Le prix théorique d'un forward sur Best Of avec le payoff donnée est :

$$P = e^{-rT} \mathbb{E}[\max(S_1(T), S_2(T)) - K] = S_{1,0}\phi(-d_2) - S_{2,0}\phi(-d_1) + S_2(0) - e^{-rT}K$$

où

$$\begin{cases} d_1 = \frac{\ln(\frac{S_2(0)}{S_1(0)}) + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} \\ d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T} \\ \hat{\sigma}^2 = (\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) \end{cases} \quad (3)$$

à l'aide de la question 2.

14 Q14

Une simulation du prix du forward sur Best Of par une méthode de Monte Carlo classique donne 0.308397 avec un intervalle de confiance à 95% égal à $[0.306372, 0.310422]$.

Le prix calculé avec les paramètres précédents donne 0.3093.

15 Q15

En utilisant l'option d'échange comme variable de contrôle on obtient une variance bien plus réduite qu'avec les autres techniques.

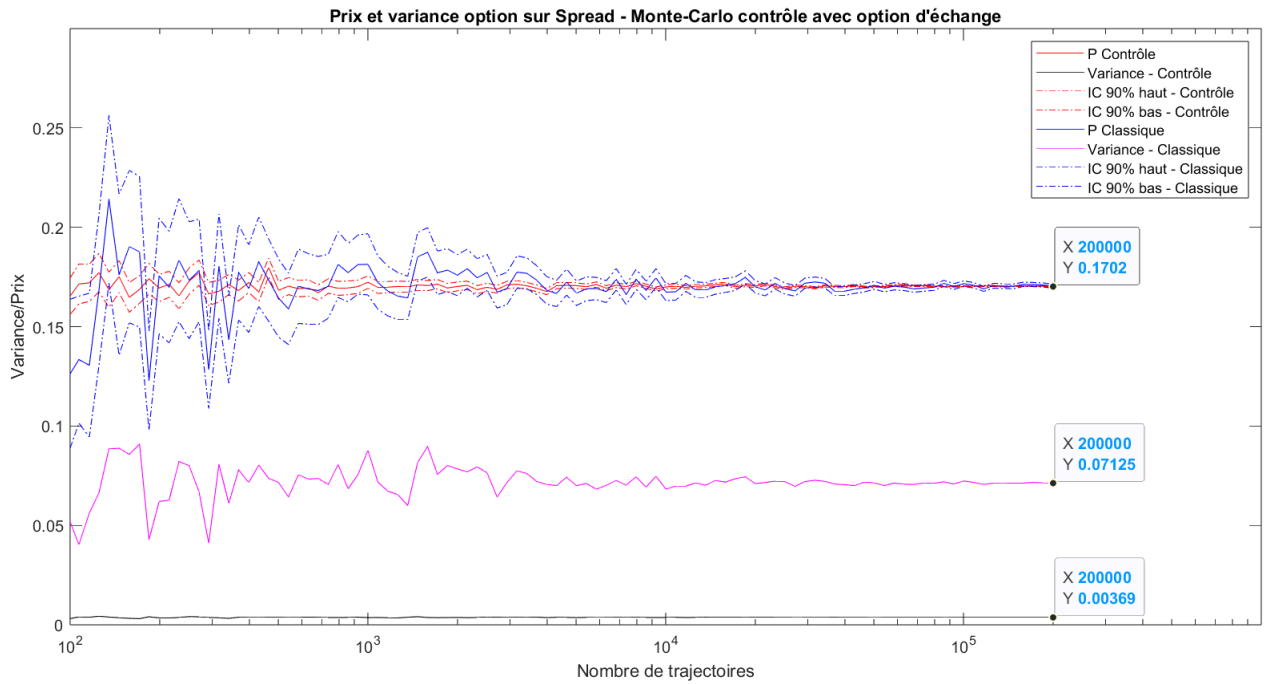


FIGURE 8 – Prix et variance de l'option sur Spread avec option d'échange comme variable de contrôle