Práctica 4

Programación lineal

4.1. Introducción

La programación lineal estudia la optimización (en el sentido de maximizar o minimizar) de una función lineal sujeta a restricciones, también lineales, de desigualdad. Desde que George B. Dantzig desarrolló el método simplex en 1947 la programación lineal se ha utilizado ampliamente para la resolución de numerosos problemas entre los que podemos citar el transporte de bienes, la optimización de la producción industrial (refinerías de petróleo) o la asignación óptima de tareas.

De manera general un problema de programación lineal se escribe como:

$$\begin{array}{rccccccc} \text{máx} / \text{mín} & c_1x_1 & + & \cdots & + & c_nx_n & & \\ s.a: & a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array}$$

Los coeficientes $c_1, \dots c_n$ son los *coeficientes de coste*, los a_{ij} se denominan *coeficientes tecnológicos*, y $b_1, \dots, b_m$ forman el *vector de recursos*. Las *variables de decisión* son $x_1, \dots, x_n$.

Nótese que el problema anterior se puede escribir en formato matricial como

$$\begin{array}{rccc} \text{máx} / \text{mín} & C^tX & & \\ s.a: & AX & \leq & B \end{array}$$

donde

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A continuación veremos algunos ejemplos de problemas de programación lineal y como resolverlos utilizando R.

4.2. Algunos ejemplos

4.2.1. El problema del transporte

Consideremos n plantas de producción y m mercados de consumo. Cada planta puede producir como máximo a_i toneladas de producto y cada mercado demanda una cantidad de b_j toneladas (se supone que la oferta total supera a la demanda, con objeto de que el problema tenga solución). El coste de transporte entre la fábrica i y el mercado j, de cada tonelada de producto, es de c_{ij} euros. El objetivo es satisfacer la demanda de todos y cada uno de los mercados con el mínimo coste.

Más concretamente, vamos a considerar la siguiente instancia del problema en la que se consideran 2 orígenes y tres destinos. La tabla refleja la distancia, en miles de kilómetros, desde cada origen a cada destino y el coste de transporte de una tonelada de producto es de 90 euros por cada 1000 kilómetros.

	Distancias (en miles de Km.)			Producción
	Mercados			
Plantas	Madrid (1)	Badajoz (2)	Santander (3)	
Huelva (1)	0.632	0.251	0.962	600
Cartagena (2)	0.401	0.675	0.794	350
Demandas	325	300	275	

Las variables de decisión del problema serán las toneladas de producto transportadas desde la planta i hasta el mercado j y las denotaremos por x_{ij}, $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 3$. La formulación del problema sería entonces:

$$\text{mín} \quad 90 \cdot 0.632x_{11} + 90 \cdot 0.251x_{12} + 90 \cdot 0.962x_{13} + 90 \cdot 0.401x_{21} + 90 \cdot 0.675x_{22} + 90 \cdot 0.794x_{23}$$

$$\begin{array}{rcccccccccccl}
s.a: & x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & & & & & \leq & 600 & \text{(Restricción 1)} \\
 & & & & & & x_{21} & + & x_{22} & + \; x_{23} & \leq & 350 & \text{(Restricción 2)} \\
 & x_{11} & + & & & & x_{21} & & & & \geq & 325 & \text{(Restricción 3)} \\
 & & & x_{12} & & & & + & x_{22} & & \geq & 300 & \text{(Restricción 4)} \\
 & & & & & x_{13} & & & & + \; x_{23} & \geq & 275 & \text{(Restricción 5)} \\
 & & & \multicolumn{7}{l}{x_{ij} \geq 0, i \in \{1,2\}, j \in \{1,2,3\}} & & &
\end{array}$$

esto es, minimizar el coste de enviar el producto solicitado desde las dos plantas, hasta los tres mercados, teniendo en cuenta que desde cada planta no se puede enviar una cantidad de producto superior a la oferta de cada una (restricciones 1 y 2) y que, a cada mercado, debe enviarse una cantidad total de producto que satisfaga la demanda correspondiente (restricciones 3, 4 y 5).

4.2.2. Problema de planificación de la producción

Una refinería tiene equipamiento para un proceso I, con capacidad de proceso de 2 Tm. de petróleo por día, y para un proceso II, con capacidad de proceso de 3 Tm. de petróleo por día. Como resultado, ambos procesos generan dos combustibles A y B. El proceso I requiere 20 horas de trabajo para convertir 1 Tm. de petróleo en 3/4 Tm. de A y 1/4 Tm de B, mientras que el proceso II requiere 10 horas de trabajo para convertir 1 Tm. de petróleo en 1/4 Tm. de A y 3/4 Tm. de B. El coste de la conversión es de 60 u.m. por tonelada de petróleo, para el proceso I y 30 u.m. por Tm. de petróleo para el proceso II. Se dispone de 40 horas de trabajo y 4 Tm. de petróleo por día, el precio de venta de A es de 285 u.m. y el de B de 105 u.m. ¿Cómo debe planificarse la producción diaria para maximizar el beneficio?

Usaremos las variables:

- x_1: Tm. de petróleo procesadas por el proceso I.
- x_2: Tm. de petróleo procesadas por el proceso II.

La cantidad obtenida de combustible de tipo A es $\frac{3}{4}x_1+\frac{1}{4}x_2$, la cantidad obtenida de combustible de tipo B es $\frac{1}{4}x_1+\frac{3}{4}x_2$ y la formulación del problema queda como

$$\begin{array}{lll}
\text{máx} & 285(\frac{3}{4}x_1+\frac{1}{4}x_2)+105(\frac{1}{4}x_1+\frac{3}{4}x_2)-60x_1-30x_2 & \text{(Beneficio obtenido)} \\
s.a: & x_1 \leq 2 & \text{(Capacidad máxima del proceso I)} \\
 & x_2 \leq 3 & \text{(Capacidad máxima del proceso II)} \\
 & 20x_1+10x_2 \leq 40 & \text{(Restricción relativa a las horas de trabajo)} \\
 & x_1+x_2 \leq 4 & \text{(Restricción relativa al petróleo diario disponible)} \\
 & x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}$$

4.3. El método gráfico

Cuando el problema está formado por un máximo de dos variables y el número de restricciones no es muy elevado, el método gráfico es una herramienta que permite resolverlo de menera sencilla. No obstante, hay que tener en cuenta que este procedimiento sólo permite resolver problemas de tamaño muy pequeño. Lo explicaremos con un ejemplo.

Consideremos el problema:

$$\begin{array}{lcccc}
\text{máx} & \multicolumn{4}{l}{f(x_1,x_2)=2x_1+x_2} \\
s.a: & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 3 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Cada una de las restricciones define un semiplano limitado por la recta cuya ecuación se obtiene al sustituir el símbolo '$\leq$' por '$=$'. De este modo, los puntos (x_1, x_2) que verifican la desigualdad $x_1+x_2 \leq 5$ definen un semiplano limitado por la recta

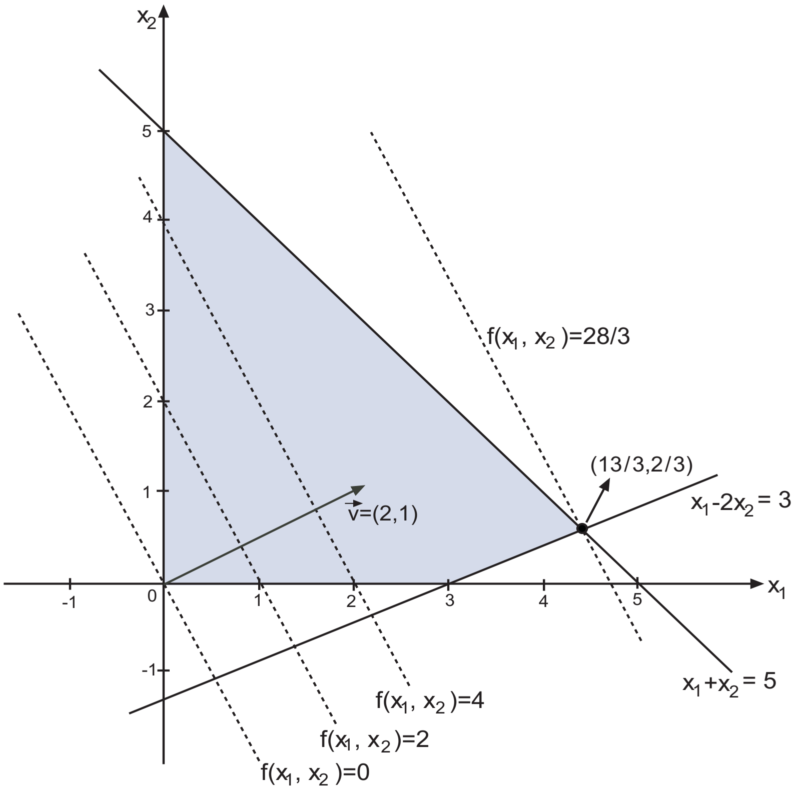

Figura 4.1: Región factible

$x_1 + x_2 = 5$. Para definir si se trata del semiplano situado sobre dicha recta o bajo ella, tomaremos un punto cualquiera y veremos si sus coordenadas verifican la desigualdad o no. En caso afirmativo, el semiplano que estamos buscando será aquel al cual pertenece el punto considerado; en caso negativo, el semiplano buscado será aquél que no contiene al punto. Así pues vamos a considerar el punto $(x_1, x_2) = (0, 0)$ que, efectivamente, verifica la desigualdad $x_1 + x_2 \leq 5$ lo que nos indica que el semiplano buscado es el que contiene a dicho punto, esto es, el semiplano por debajo de la recta $x_1 + x_2 = 5$.

De manera similar llegamos a la conclusión de que el conjunto de puntos que verifican la restricción $x_1 - 2x_2 \leq 3$ dan lugar al semiplano situado por encima de la recta $x_1 - 2x_2 = 3$. Puesto que, adicionalmente, debe cumplirse $x_1 \geq 0$ y que $x_2 \geq 0$, la región factible corresponde a la región sombreada representada en la figura 4.1 y, como ya hemos dicho, está formada por el conjunto de puntos que verifican las restricciones (puntos factibles).

En consecuencia, la solución del problema debe ser un punto de dicha región y ahora se trata de buscar dicho punto. En la figura, las rectas de trazo discontinuo representan las rectas $f(x_1, x_2) = k$ para los valores de k indicados en la figura. Podemos observar que si trazamos paralelas a la recta $f(x_1, x_2) = 0$ o, equivalentemente, movemos esa recta en la direccción del vector $(2, 1)$ -vector de coeficientes de la función objetivo- la función objetivo toma valor constante en los puntos de cada una de esas rectas y, además, dicho valor es mayor cuanto máyor sea el desplazamiento. Por lo tanto, para encontrar la solución del problema bastará desplazar la recta $f(x_1, x_2) = 0$, en la dirección del vector $(2, 1)$ hasta que "deje de tocar.ª la región factible. La solución del problema será el último punto de la región factible que toquemos al desplazar la recta paralela y que, en el ejemplo, es el punto $(x_1, x_2) = (13/3, 2/3)$. El valor óptimo de de la función objetivo será por tanto $f(13/3, 2/3) = 28/3$.

4.4. Tipos de soluciones óptimas

Cuando resolvemos un problema de programación lineal se nos pueden presentar cuatro situaciones distintas, atendiendo al número de soluciones que presente el problema. Tomaremos como referencia un problema con dos variables, si bien los resultados se generalizan, de manera inmediata, a cualquier problema con tres o más variables.

- El problema tiene una única solución óptima: es la situación que se da en el ejemplo resuelto mediante el método gráfico.

- El problema tiene solución múltiple. Este caso se da cuando, al desplazar la recta definida por $f(x_1, x_2) = 0$, en la dirección de vector de coeficientes de la función objetivo (vector gradiente), la recta alcanza el óptimo tocando dos vértices de la región factible. En ese caso, todos los puntos del lado de la región factible, definido por ambos vértices, son soluciones óptimas del problema. Es lo que ocurre con el siguiente problema:

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ s.a: & \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ x_1 & - & 2x_2 & \leq & 3 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \end{array}$$

- El problema es infactible: esto ocurre cuando no existe ningún punto que cumpla las restricciones del problema. Un ejemplo de este tipo de problema sería el siguiente:

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\ s.a: & \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & \geq & 5 \\ x_1 & - & 2x_2 & \geq & 3 \\ x_1 & & & \leq & 4 \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array} \end{array}$$

- La solución del problema no está acotada. En este caso la función objetivo puede crecer (o decrecer) de manera indefinida. El problema no tiene solución, no porque no existan puntos factibles, sino porque no existe un punto en el que se alcance la solución óptima. El siguiente problema ilustra esta situación:

$$\begin{array}{rl} \text{máx} & f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \\ s.a: & \begin{array}{rcrcl} x_1 & - & 2x_2 & \geq & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & \leq & 3 \end{array} \end{array}$$

Cuando se resuelve un problema de programación lineal con tres variables en lugar de dos, la región factible forma un poliedro en $\mathbb{R}^3$. Si tenemos n variables, ($n \geq 4$) la región factible será un politopo, que no es más que la generalización de un polígono bidimensional (o poliedro tridimensional) a un espacio de dimensión n. En todos estos casos, el tipo de solución óptima será uno de los indicados anteriormente, esto es, solución única, solución múltiple, solución no acotada o problema infactible.

4.5. Resolución de un problema de optimización con R

R dispone de varios paquetes para la resolución de problemas de optimización. Usaremos el paquete *lpSolve* que permite resolver problemas de programación lineal. También admite variables enteras y variables binarias (programación 0-1).

El primer paso consiste en instalar el paquete *lpSolve*, que podemos descargar de moodle. Una vez descargado el archivo **lpSolve.zip**, lo instalamos desde la consola de R, utilizando el menú `Paquetes`→ `Install package(s) from local files...` Desde la ventana emergente seleccionamos el archivo **lpSolve.zip** y pulsamos el botón *Aceptar*.

Una vez hecho esto debemos cargarlo para uso. Para ello, en la ventana de R-Commander, seleccionamos el menú `Herramientas` → `Cargar Paquete(s)` y, en la ventana emergente, seleccionamos el paquete *lpsolve*. Finalmente pulsamos el botón `Aceptar`.

Este paquete nos proporciona la función *lp()* que permite resolver problemas de programación lineal. También admite variables enteras y variables binarias (variables que sólo toman los valores 0 ó 1). Usaremos la función introduciendo los argumentos en la siguiente forma:

lp (direccion, vec_obj, mat_rest, signo_rest, vec_rec),

Cada uno de estos argumentos debe contener la siguiente información:

- *direccion:* variable de cadena de caracteres que indica el sentido de la optimización; *min:* minimizar, *max:* maximizar.
- *vec_obj:* vector numérico con los coeficientes de la función objetivo.
- *mat_rest:* matriz que contiene los coeficientes de las restricciones.
- *signo_rest:* vector de cadenas de caracteres que indica el signo de las restricciones (>=, =, <=).
- *vec_rec:* vector de recursos.

Si en el problema hay variables enteras y/o binarias podemos indicarlo añadiendo como argumentos de la función los parámetros `int.vec` y `binary.vec`, en la forma `int.vec=c(·)` o `binary.vec=c(·)`, donde `c(·)` es un vector que contiene las posiciones de las variables que se desean declarar como enteras o binarias, según el caso. Si todas las variables son enteras o binarias, podemos indicarlo añadiendo a la función los argumentos `all.int=TRUE` o `all.bin=TRUE`, respectivamente.

La salida de la función es una lista con componentes en la que encontramos (entre otras cosas):

- *objval:* valor de la función objetivo.
- *solution:* solución óptima.
- *status:* indicador numérico. 0: éxito, 2: no hay solución factible, 3 solución no acotada.

La función *lp()* asume que las variables de decisión son mayores o iguales que 0. Si el problema tiene variables negativas o sin restricción, mediante un sencillo cambio de variable, podemos convertir estas variables en otras variables positivas.

Ejemplo1: Resolver el problema formulado en la sección 4.3.

Previamente a la resolución del problema es necesario instalar el paquete *lpSolve*, si no se ha hecho con anterioridad, y cargarlo para su uso como se detalló en la sección 6.5. Recuérdese que el problema a resolver viene dado por las ecuaciones

$$\begin{array}{lcccrl} \text{máx} & 2x_1 + x_2 & & & & \\ s.a: & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 3 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Procedemos introducir los distintos vectores de datos en variables que después usaremos como argumentos de la función *lp()*. Nótese que también podríamos utilizar los datos, directamente, como argumentos de la función pero el almacenarlos previamente en variables permitirá su modificación, si fuera necesario, de manera más sencilla.

En la ventana *RScript* de R-Commander introducimos las siguientes instrucciones,[1]

```
direccion="max"
vec_obj=c(2,1)
mat_rest=matrix(c(1,1,1,-2),nrow=2,byrow=TRUE)
signo_rest=c("<=","<=")
```
[2]

[1]Nótese que las variables *dirección, vec_obj*, etc. podrían llamarse de cualquier otra forma

[2]Para introducir los datos de la matriz de restricciones creamos un vector con dichos coeficientes ordenados por filas, de izquierda a derecha y de arriba a abajo. Mediante la instrucción `nrow`, le indicamos a R el número de filas de la matriz de restricciones

```
vec_rec=c(5,3)
```

Finalmente, llamamos a la función *lp()* para resolver el problema:

```
solucion=lp(direccion,vec_obj,mat_rest,signo_rest,vec_rec)
```

Una vez hecho esto seleccionamos todas las instrucciones en la ventana `R Script` y pulsamos en el botón ejecutar. De este modo se guarda la salida de la función *lp* en el objeto *solucion*.

Para visualizar el valor óptimo de la función objetivo, tenemos que mostrar los elementos *objval* y *solution* del objeto *solucion* que hemos creado previamente. Esto lo hacemos mediante las instrucciones *solucion$objval* y *solucion$solution*, que debemos escribir y ejecutar desde la ventana *RScript*. Obtenemos entonces un valor óptimo de la función objetivo igual a 9.33333 para los valores de las variables $x_1 = 4.3333333$ y $x_2 = 0.6666667$.

Si deseamos imponer que, por ejemplo, la segunda variable sea entera añadimos la instrucción `var_ent=c(2)` y llamamos a la función como:

```
solucion=lp(direccion,vec_obj,mat_rest,signo_rest,vec_rec,int.vec=var_ent)
```

Ejemplo 2: Resolver el problema de transporte formulado en la sección 4.2.1.

Solución: $x_{11} = 0, x_{12} = 300, x_{13} = 250, x_{21} = 325, x_{22} = 0, x_{23} = 25$. Valor de la función objetivo: 41937.75.

Ejemplo 3: Una empresa que fabrica ordenadores debe planificar la producción semanal de los mismos. La compañía fabrica 3 tipos de ordenadores: de mesa (A), portátil básico (B) y portátil de alto rendimiento (C). Todos los ordenadores que se montan durante la semana se venden, proporcionando un beneficio neto de 350, 470 y 610 euros, respectivamente. Los ordenadores A y B pasan un control de calidad y la empresa dispone de 120 h. para realizar estos controles. Los ordenadores de tipo C pasan otro control distinto y la empresa dispone de 48 h. a la semana para realizarlos. Cada control requiere de 1 h. El resto de operaciones de montaje requieren 10, 15 y 20 h. para los ordenadores de tipo A, B y C, respectivamente. La empresa dispone de una capacidad de trabajo de 2000 horas/semana ¿Cuántos ordenadores de cada tipo debe producir para maximizar el beneficio?

La formulación del problema es la siguiente:

Variables, x_A, x_B, x_C: número de ordenadores que se deben fabricar de tipo A, B y C, respectivamente.

$$
\begin{array}{llcccccl}
\text{máx} & 350x_A + 470x_B + 610x_C & & & & & & \\
s.a: & x_A & + & x_B & & & \leq & 120 \\
 & & & & & x_C & \leq & 48 \\
 & 10x_A & + & 15x_B & + & 20x_C & \leq & 2000 \\
 & \multicolumn{7}{l}{x_A, x_B, x_C \geq 0 \text{ y enteras}}
\end{array}
$$

Solución: $x_A = 120$, $x_B = 0$, $x_C = 40$. Valor de la función objetivo: 66400.

Ejemplo 4: Se dispone de tres máquinas en las que se deben procesar tres tareas. Cada máquina puede hacerse cargo de una y sólo una de ellas y se deben procesar todas las tareas. El coste de procesar cada tarea en cada máquina aparece reflejado en la siguiente tabla:

	T_1	T_2	T_3
M_1	2	3	1
M_2	1	3	5
M_3	3	4	2

Encontrar la asignación de tareas a máquinas que minimiza el coste.
Variables:

$$
x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la máquina } i \text{ se asigna a la tarea } j \\ 0 & \text{si la máquina } i \text{ no se asigna a la tarea } j \end{cases}
$$

Formulación:

$$
\begin{array}{lllllllllll}
\text{mín} & 2x_{11} & +3x_{12} & +x_{13} & +x_{21} & +3x_{22} & +5x_{23} & +3x_{31} & +4x_{32} & +2x_{33} & \\
 & & & & & & & & & & \\
s.a: & x_{11} & +\,x_{12} & +x_{13} & & & & & & & = 1 \\
 & & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & & & & = 1 \\
 & & & & & & & x_{31} & +\,x_{32} & +\,x_{33} & = 1 \\
 & x_{11} & & & +x_{21} & & & +\,x_{31} & & & = 1 \\
 & & x_{21} & & & +x_{22} & & & +x_{32} & & = 1 \\
 & & & x_{13} & & & +x_{23} & & & +x_{33} & = 1 \\
 & \multicolumn{10}{l}{x_{ij} \in \{0,1\}, i,j \in \{1,2,3\}}
\end{array}
$$

Para resolver el problema procedemos igual que en los apartados anteriores. Recuérdese que debemos añadir a la función lp($\cdot$) el argumento `all.bin=TRUE`.

Solución: la máquina 1 debe realizar la tarea 2, la máquina 2 realiza la tarea 1 y la máquina 3 realiza la tarea 3. El coste resultante es igual a 6.

4.6. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1: Un taller de automóviles va a organizar la plantilla de una planta en la que trabajan electricistas y mecánicos. Por las características de la planta es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y que el número de mecánicos no supere al doble del número de electricistas. En total hay disponibles 30 electricistas y 20 mecánicos. El beneficio que espera obtener la empresa en cada jornada de trabajo es de 150 euros por electricista y 120 por mecánico. Plantear y resolver un modelo de programación lineal adecuado para determinar cuántos trabajadores de cada tipo deben elegirse de manera que se maximice el beneficio.

Indicación: considerar las variables,
x_1: número de electricistas,
x_2: número de mecánicos.

Solución: en la plantilla debe haber 20 electricistas y 20 mecánicos. Se obtiene un beneficio de 5400 euros.

Ejercicio 2: Un orfebre fabrica joyas de tipo A, B y C. Para la fabricación de las joyas utiliza oro, plata y platino. La cantidad de cada metal (en gramos) que necesita para fabricar cada tipo de joya, así como el beneficio obtenido con su venta (en euros), aparece reflejado en la siguiente tabla:

Tipo de joya	Oro	Plata	Platino	Beneficio
A	1	2.5	2	20
B	1.5	1	1.25	25
C	2.5	1.5	1	40

Plantear y resolver un modelo de programación lineal adecuado para determinar el número de joyas que debe fabricar de cada tipo para maximizar el beneficio, sabiendo que sólo dispone de 600gr. de cada metal.

Indicación: considerar las variables (deben ser enteras),
x_1: número de joyas fabricadas de tipo A,
x_2: número de joyas fabricadas de tipo B,
x_3: número de joyas fabricadas de tipo C.

Solución: debe fabricar 112 joyas de tipo A, 272 de tipo B y 32 de tipo C, para obtener un beneficio de 10320 euros.

Ejercicio 3: Un fabricante de juguetes produce tres tipos de muñecas: andadoras, parlantes y de trapo. La cantidad de materiales y mano de obra necesarias para fabricar cada una de ellas, así como las disponibilidades de estos recursos se indican en la tabla siguiente:

	Plástico (gramos)	Telas (cm)	Mano de obra (horas)
Andadora	300	100	2
Parlante	450	75	1.5
De trapo	100	200	1.25
Disponibilidades	600000	150000	8000

Las muñecas andadoras y parlante necesitan de un motor eléctrico del que se disponen de 800 unidades. El fabricante calcula, además, que para atender la demanda de forma adecuada necesita entre 1000 y 2500 muñecas en total y el número de muñecas andadoras no puede ser superior al de las otras dos muñecas juntas. El beneficio neto de las ventas de las muñecas es: andadora, 12 euros, parlante, 10 euros y de trapo, 15 euros. Plantear y resolver un modelo de programación lineal adecuado para determinar el número de muñecas de cada tipo que deben producirse de cara a maximizar los beneficios.

Indicación: considerar las variables (deben ser enteras),

x_1: número de muñecas fabricadas de tipo andadora,

x_2: número de muñecas fabricadas de tipo parlante,

x_3: número de muñecas de trapo fabricadas.

Solución: se deben fabricar 584 muñecas andadoras, 216 parlantes y 377 de trapo, para obtener un beneficio de 14823 euros.