

# Projeto 4 Movimento realstico

Pedro de Carvalho Braga Ildio Silva - 9762595

19 de maio de 2017

## 1 Introdução

## 2 Efeito resistivo do ar em bicicletas

Partir-se-á da seguinte equação, que se trata de uma aproximação numérica para a velocidade  $v$  do centro de massa de um objeto em movimento retilíneo (bicicleta), obtida por meio do método de Euler.

$$v_{i+1} = v_i + \frac{P}{mv_i} \Delta t - \frac{\rho A v_i^2}{2m} \Delta t \quad (1)$$

É facilmente perceptível, pela equação 1, a inviabilidade de se aplicar este método a movimentos posteriores a instantes de repouso, em que a velocidade é nula, pois deparar-se-ia com divisão por zero no segundo termo e não seria possível dar continuidade aos procedimentos recursivos.

Foram definidos os seguintes termos como constantes:

- Massa:  $m = 70kg$
- Potência:  $P = 400W$
- Duração do movimento, máximo instante considerado:  $t_{max} = 300s$
- Intervalo entre os instantes de tempo considerados:  $\Delta t = 0.1s$
- Velocidade inicial:  $v_0 = 4m/s$
- Densidade do ar:  $\rho$
- Area frontal do objeto:  $A$

A partir dos quais foi elaborado um programa em Fortran90 para estimar a velocidade da bicicleta nos instantes determinados pelos parâmetros. Tal programa se baseava em um laço DO, que reatribuia um novo valor de velocidade a uma variável V em cada ciclo, de acordo com a 4.

Os valores para o caso em que  $\rho = 0$  foram então coletados em arquivo e graficados (Gráfico 1). No mesmo gráfico são também apresentados os valores exatos da velocidade, determinados pela equação 5.

$$v(t) = v_0^2 + \frac{2Pt}{m} \quad (2)$$

Pode se ver claramente que a velocidade não converge para um valor determinado, tende a um estado de crescimento linear com passar do tempo. Isto se deduz pela presença fortemente sugerida de assíntota oblíqua no gráfico 1.

A seguir, foram fixados  $\rho = 1.3kgm^{-3}$  e  $A = 0.333m^2$  e o programa foi novamente utilizado, gerando valores que culminaram no gráfico 2.

Os valores da velocidade retornados pelo programa convergiram, a partir do instante  $t = 280.5s$ , ao número 12.271589119894585, correspondente à velocidade terminal neste caso em m/s.

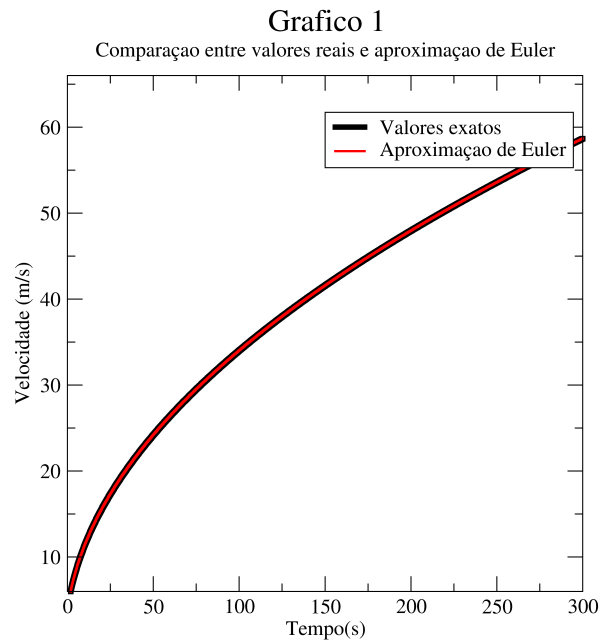
Utilizando a equação 3, chega-se ao valor 12.271589119894672, que difere apenas a partir da décima terceira casa decimal em relação ao resultado do método aproximado.

$$v_{terminal} = \left( \frac{2P}{\rho A} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3)$$

A distância percorrida pelo ciclista no movimento representado pelos dois primeiros gráficos foi calculada com uso de FORTRAN, assumindo-se velocidade constante dentro de cada  $\Delta t$  e, portanto, somando-se  $v_i \Delta t$  de todos os intervalos de tempo considerados.

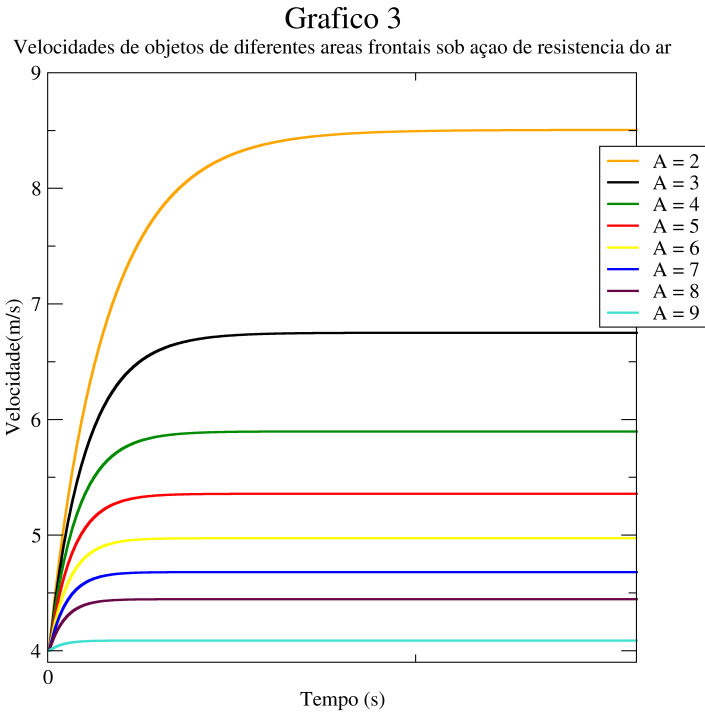
Disto resultam os valores (em m) 11797.044313018616 e 3616.1654669905975, de distância total percorrida para o caso sem resistência do ar (Gráfico 1) e com resistência (Gráfico 2), respectivamente.

Foi realizado o mesmo procedimento de cálculo da evolução da velocidade para  $\rho = 1.3kgm^{-3}$  e diversos valores de A. Disto resulta o gráfico 3.



Pelo gráfico 3 deduzimos que as velocidades terminais são atingidas mais rapidamente e tem menor valor quanto maior for a área do objeto com velocidade sob efeito da resistência do ar.

No ciclismo profissional esse resultado é aproveitado com técnicas que visam minimizar a área frontal do ciclista e da bicicleta: o ciclistas se mantém o mais abaixados (com as costas na horizontal) que conseguem, e os pneus são feitos mais estreitos que os convencionais.



### 3 Lançamento de projéteis

Nesta seção, foi desenvolvido um programa para simular a trajetória de um projétil lançado com velocidade inicial  $v_0 = 700\text{m s}^{-1}$  e ângulo  $\theta$  com a horizontal. Tal movimento é descrito pelas equações diferenciais:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g$$
(4)

Em que  $g = 9.80665$  é o valor adotado para a norma da aceleração da gravidade. Da aplicação do método de Euler às equações 4 resulta o seguinte laço:

```

v=700
vx=v*dcos(TETA)
vy=v*dsin(TETA)

DO WHILE (y .GE. 0)
    WRITE(10,*) x,y
    x = x + vx*dt
    y = y + vy*dt
    !vx=vx !vx constante
    vy = vy - g*dt
END DO

```

Em que  $x$  e  $y$  são as respectivas posições horizontal e vertical, e  $v_x$  e  $v_y$  são as componentes horizontal e vertical da velocidade do projétil, definidas inicialmente em função de  $TETA = \theta$ . Foram escritos oito arquivos de saída, para diferentes valores de  $TETA$ , que culminaram no gráfico 4.

Observa-se que o maior deslocamento horizontal foi atingido com  $\theta = 0.25\pi$ .

Da mesma forma que no caso anterior, estudar-se-á os efeitos da força de resistência do ar sobre as trajetórias, definida da seguinte forma:

$$\vec{F}_{res} = -\gamma_2 v \vec{v} = -\gamma_2 \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \vec{v}$$
(5)

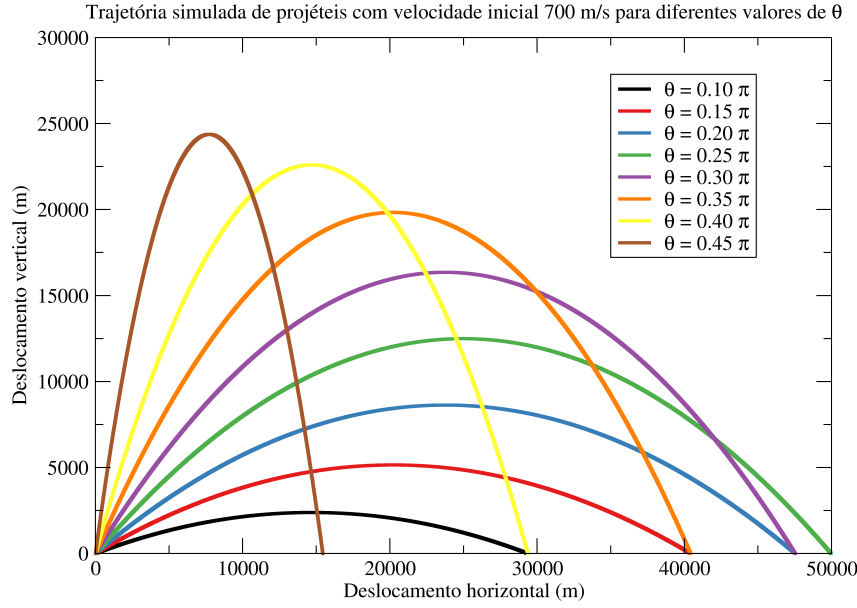
De maneira a reformular, após aplicação do método de Euler, o laço escrito para o código a seguir:

```

DO WHILE (y .GE. 0)
    WRITE(10,*) x,y
    x = x + vx*dt
    y = y + vy*dt

```

Gráfico 4



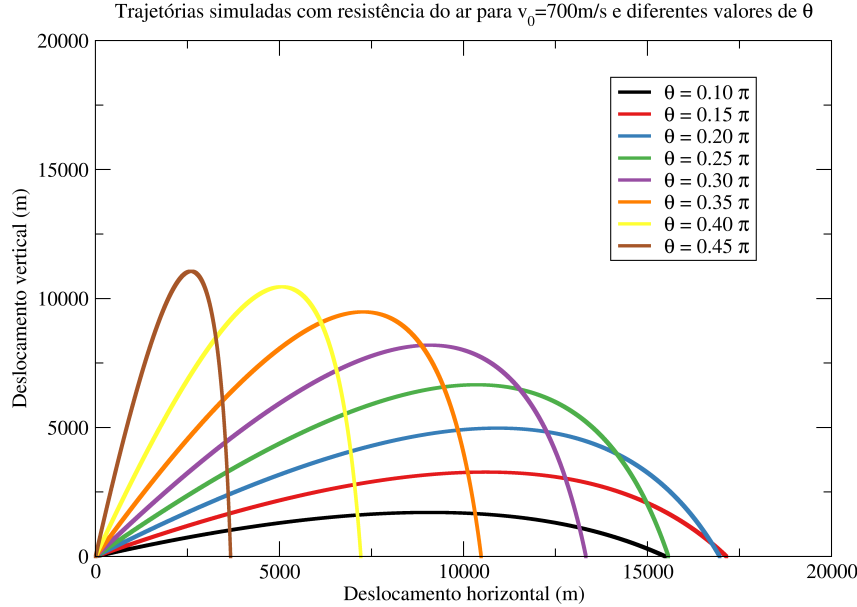
$$v_x = v_x - \text{GAMA} * v * v_x * dt$$

$$v_y = v_y - g * dt - \text{GAMA} * v * v_y * dt$$

END DO

No qual foi atribuído o valor  $4 \times 10^{-5} m^{-1}$  à constante GAMA, correspondente a  $\gamma_2$  dividida pela massa do projétil. Disso resulta o gráfico 5.

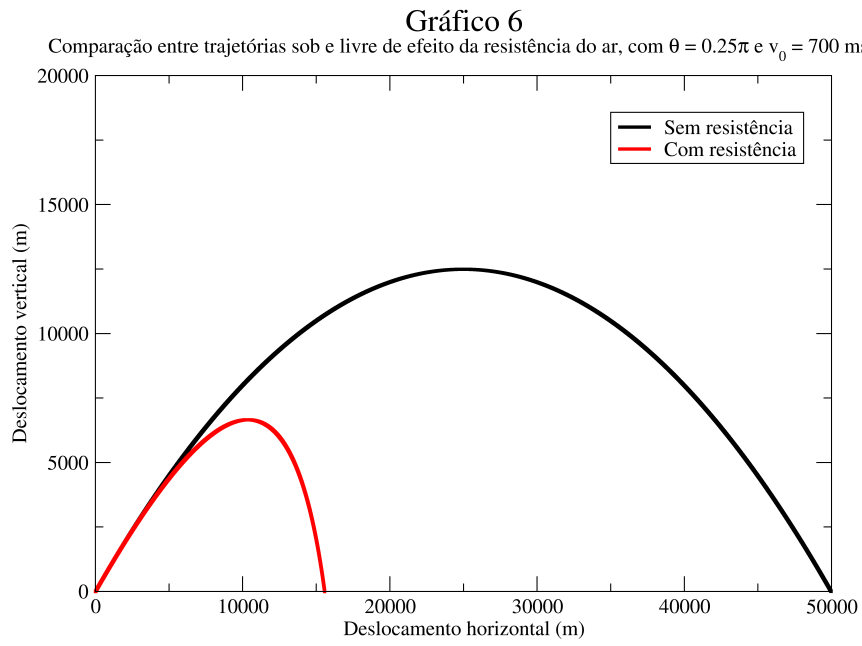
Gráfico 5



Neste caso, o ângulo de lançamento que gerou maior distância horizontal percorrida entre os casos estudados foi  $0.15\pi$ .

Nota-se que as trajetórias de valor simétrico a  $0.25\pi$ , que antes tinham mesmo alcance horizontal, perderam essa característica. Isto se deve à tendência de maior comprimento do trajeto de voo conforme mais vertical é a velocidade de início, o que permite maior trabalho da força de resistência e, portanto, mais perda de energia mecânica. A seguir, plotou-se novamente as trajetórias dos lançamentos com  $\theta = 0.25\pi$  sob efeito e livre da força de resistência do ar (gráfico 6).

Fica clara a perda de energia mecânica decorrente da aplicação da força de resistência do ar, pois mesmo as velocidades iniciais, e portanto as energias cinéticas iniciais, dos projéteis sendo equivalentes, as alturas máximas atingidas, e portanto máximas energias potenciais gravitacionais, foram evidentemente diferentes.



Com efeito da resistência, infere-se também que a aproximação do trajeto por função quadrática deve perder precisão, dadas as distorções da órbita em relação ao caso sem resistência, sendo necessários outros meios de modelagem.