

# 机械原理

机器人工程专业

2020-2021 学期（2）

# 任课教师

## 简要信息

杨平安

电话: 15123254645

邮箱: yangpa@cqupt.edu.cn

办公室: 信息科技大厦418室

本科专业: 电气工程与自动化

博士专业: 仪器科学与技术

## 教育背景

- 2008.09~2012.06 重庆邮电大学 自动化学院 学士学位
- 2012.09~2013.06 重庆大学 物理学院 硕博连读(硕士阶段)
- 2013.07~2017.12 重庆大学 光电工程学院 硕博连读(博士阶段)

## 工作经历

- 2018.01~至今, 重庆邮电大学, 自动化学院电气工程系

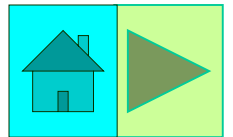
# 第四章 平面机构的力分析

§ 4—1 机构力分析的任务、目的和方法

§ 4—2 构件惯性力的确定

§ 4—3 运动副中摩擦力的确定

§ 4—4 不考虑摩擦时机机构的力分析

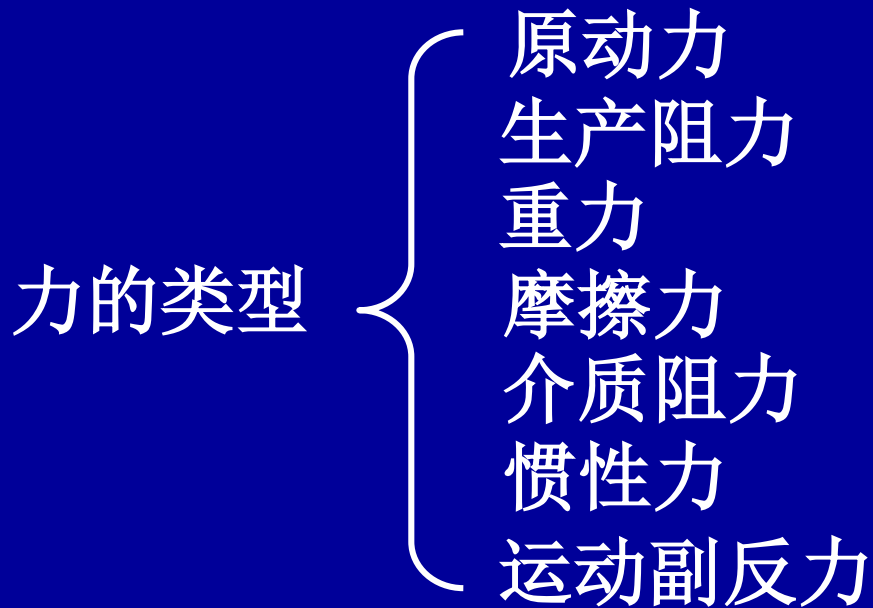


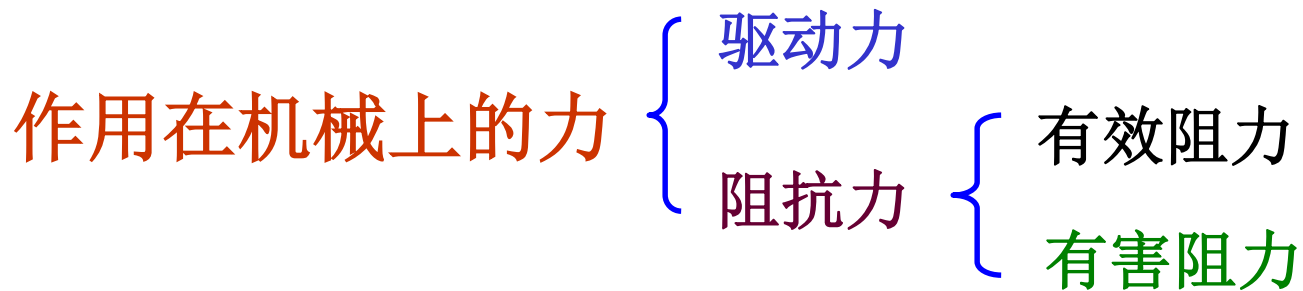
# § 4—1机构力分析的任务、目的与方法

## 力分析的必要性:

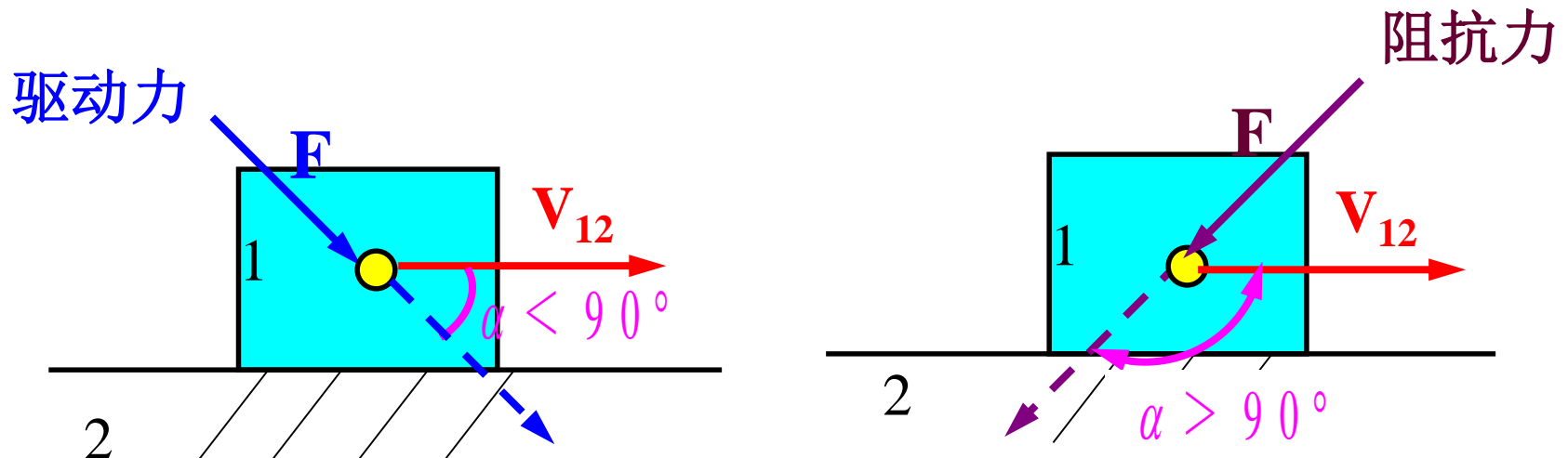
- ▲作用在机械上的力是影响机械运动和动力性能的主要因素;
- ▲是决定构件尺寸和结构形状的重要依据。

## 1.作用在机械上的力





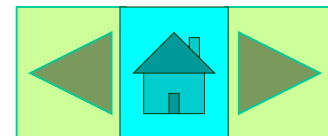
**阻力**—阻止机械运动的力。阻力与其作用点的速度**方向相反或成钝角**，其所作的功为**负功**。



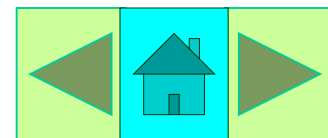
## 抵抗力又可分为

**有效阻力**—即**工作阻力**，它是机械在生产过程中为了**改变工件的外形、位置或状态**时所受到的阻力，克服这些阻力就完成了工作。如机床中作用在刀具上的切削阻力，起重机提升重物的重力等都是**有效阻力**。

**有害阻力**—为**非工作阻力**，克服这些阻力所做的功纯粹是一种浪费，故称为损失功。摩擦力、介质阻力等一般为**有害阻力**。



## § 4—1 机构力分析的任务、目的和方法



### 机构力分析的任务

#### 1) 确定运动副中的反力

**运动副反力**指运动副处作用的**正压力**和**摩擦力的合力**

#### 2) 确定机械中的平衡力

**平衡力**是指机械在**已知外力**的作用下，为了使该机械能按给定运动规律运动，还须加于机械上的**未知外力**

### 平衡力

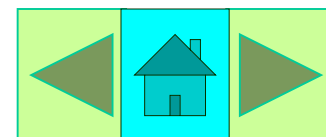
- { **驱动力**—根据机构的**阻力**大小选择适当的**驱动力**来平衡
- { **生产阻力**—根据机构的**驱动力**大小选择适当的**阻力**来平衡

**平衡力即可以是驱动力又可以是阻力**

# 机构力分析的目的

- 1) 为现有机机械**工作性能**的评价、鉴定提供参数；
- 2) 为新机械的**强度计算**、**结构设计**提供重要依据。

机构力分析的方法 { 图解法  
解析法





机械力分析的理论依据：

静力分析----适用于低速机械，惯性力可忽略不计；

动态静力分析----适用于高速重型机械，惯性力往往比外力要大，不能忽略。

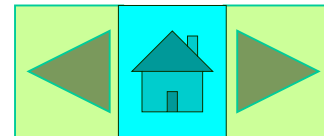
一般情况下，需要对机械做动态静力分析时，可忽略重力和摩擦力，通常可满足工程要求。

质点的惯性力( )作用在质点上的( )?

- ☐ A 是，真实力
- ☒ B 不是，真实力
- ☐ C 不知道
- ☐ D 本次课以后知道

提交

## § 4—2 构件惯性力的确定



### 1 构件惯性力的确定

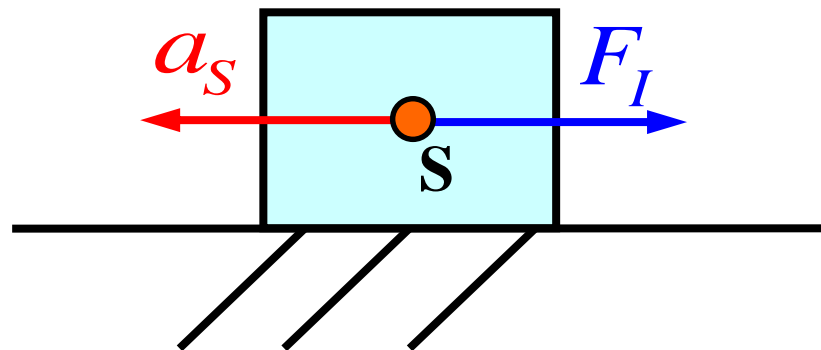
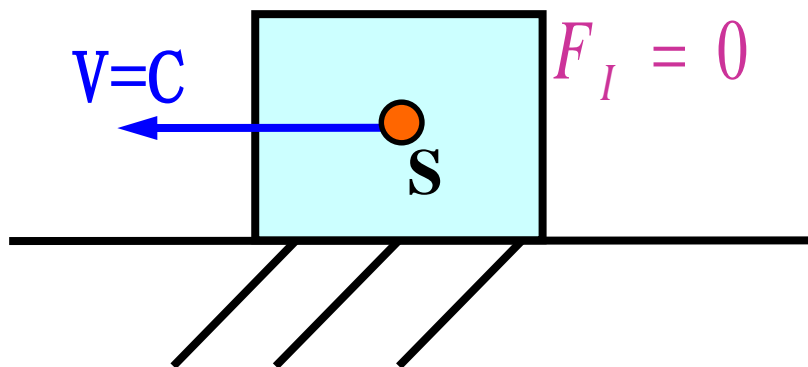
#### 1) 直线移动构件惯性力的确定

{ 匀速直线移动构件的惯性力:  
加速直线移动构件的惯性力:

$$F_I = -ma_s = 0$$

$$F_I = -ma_s \neq 0$$

$a_s$ —质心的加速度

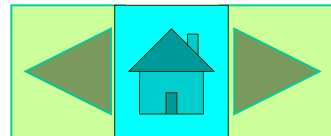
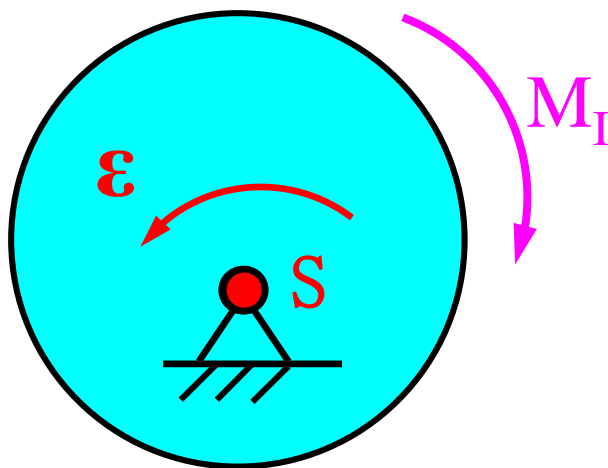
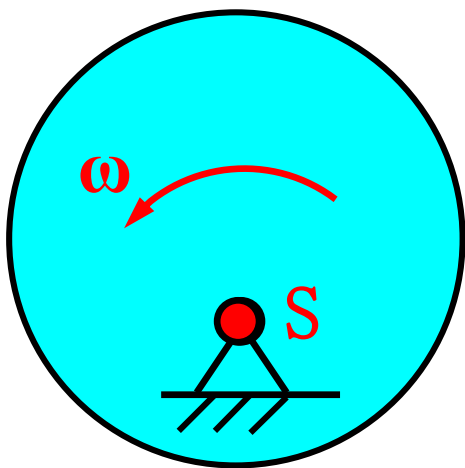


## 2) 定轴转动构件惯性力的确定

### ① 构件的质心在转轴

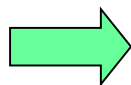
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{匀角速度 } \omega \text{ 转动} \\ \text{角加速度 } \varepsilon \text{ 转动} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} F_I = -m a_S = 0 \\ M_I = -J_S \alpha = 0 \\ F_I = -m a_S = 0 \\ M_I = -J_S \alpha \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ V_S = 0 \\ a_S = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha \neq 0 \\ V_S = 0 \\ a_S = 0 \end{array} \right.$$



# 刚体的平面运动微分方程

平面运动  $\left\{ \begin{array}{l} \text{随质心平移} \\ \text{绕质心转动} \end{array} \right.$



$$\left. \begin{array}{l} m\vec{a}_C = \Sigma \vec{F}^{(e)} \\ J_C \alpha = \Sigma M_C(\vec{F}^{(e)}) \end{array} \right\}$$

投影式:

$$\left. \begin{array}{l} ma_{Cx} = \Sigma F_x^{(e)} \\ ma_{Cy} = \Sigma F_y^{(e)} \\ J_C \alpha = \Sigma M_C(\vec{F}^{(e)}) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} ma_C^t = \Sigma F_t^{(e)} \\ ma_C^n = \Sigma F_n^{(e)} \\ J_C \alpha = \Sigma M_C(\vec{F}^{(e)}) \end{array} \right\}$$

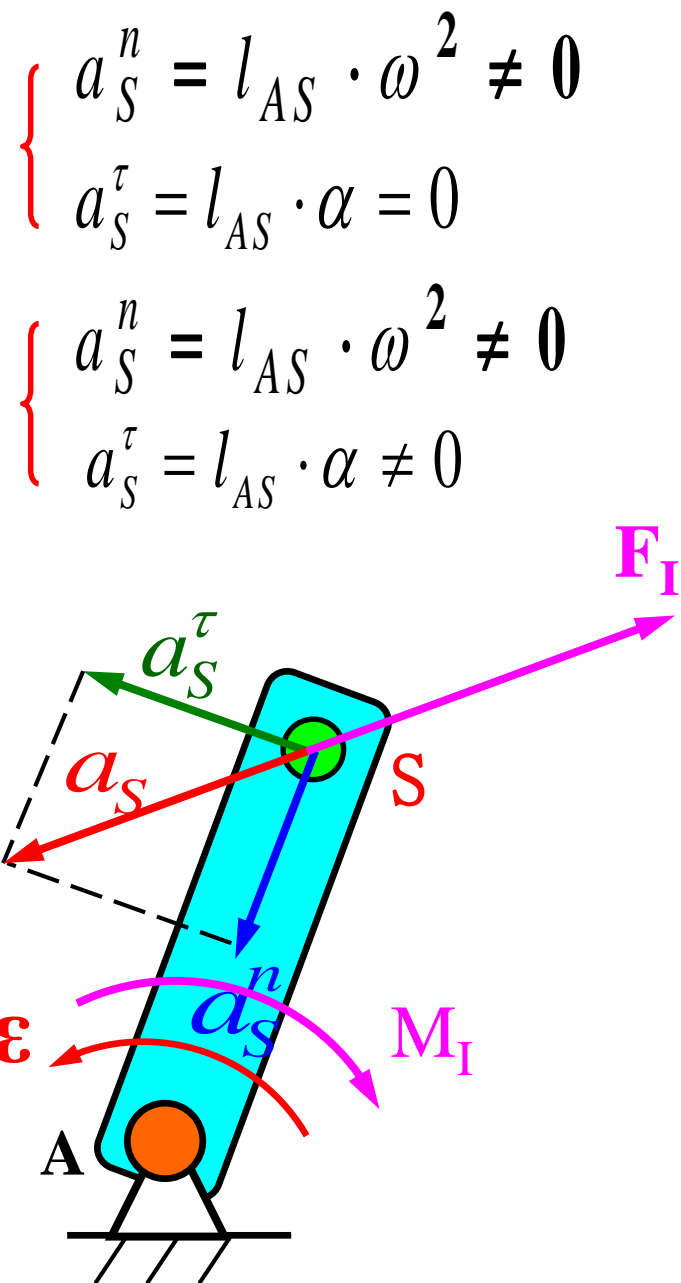
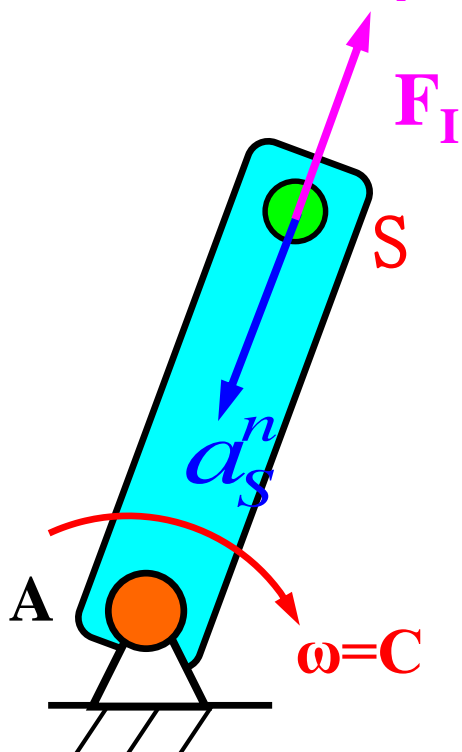
$$\left. \begin{array}{l} m \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2} = \Sigma \vec{F}^{(e)} \\ J_C \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \Sigma M_C(\vec{F}^{(e)}) \end{array} \right\}$$

以上各组均称为刚体平面运动微分方程.



# 构件的质心不在转轴

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{匀角速度 } \omega \text{ 转动} \\ \text{角加速度 } \varepsilon \text{ 转动} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} F_I = -m a_S^n \neq 0 \\ M_I = -J_S \alpha = 0 \\ F_I = -m a_S \neq 0 \\ M_I = -J_S \alpha \neq 0 \end{array} \right.$$



## 1. 点的运动方程

$$s = R\varphi$$

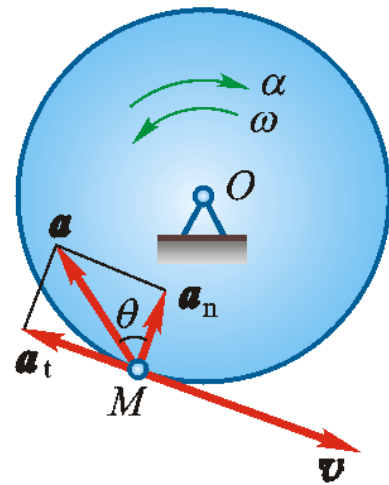
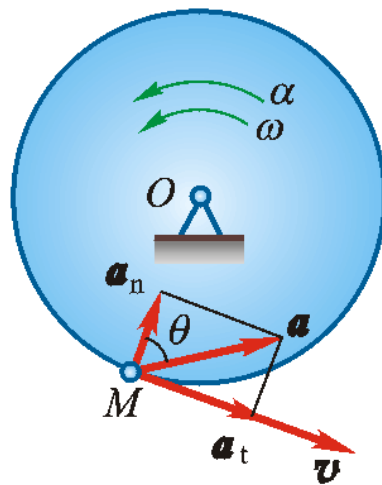
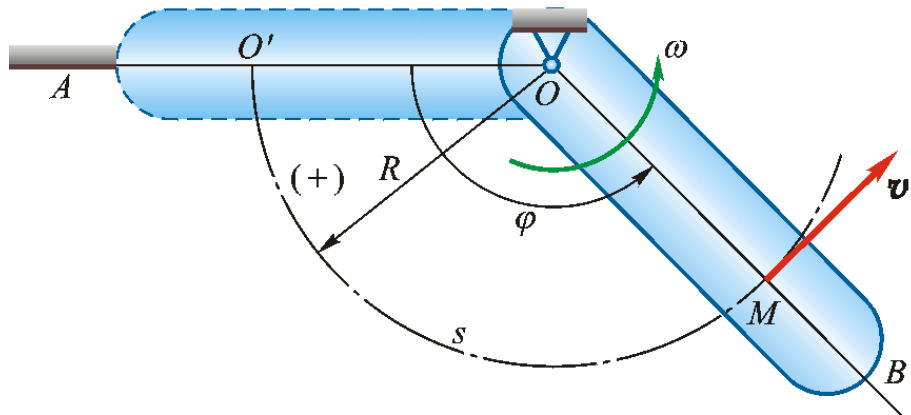
## 2. 速度

$$v = \dot{s} = R\dot{\varphi} = R\omega$$

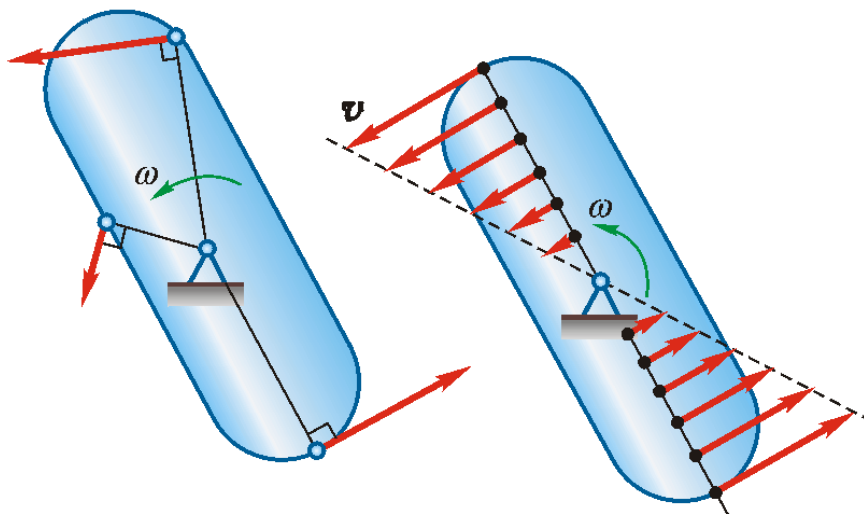
## 3. 加速度

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \ddot{s} = R\alpha$$

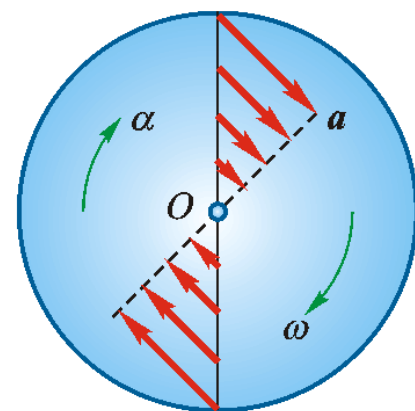
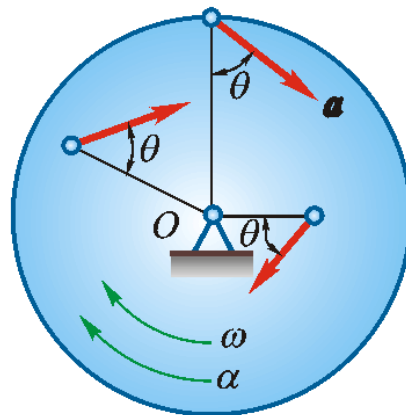
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{1}{R}(R\omega)^2 = R\omega^2$$



## 4. 速度与加速度分布图



$$v = R\omega$$



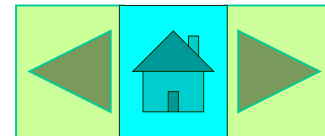
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

$$\tan \theta = \frac{a_t}{a_n} = \frac{\alpha}{\omega^2}$$



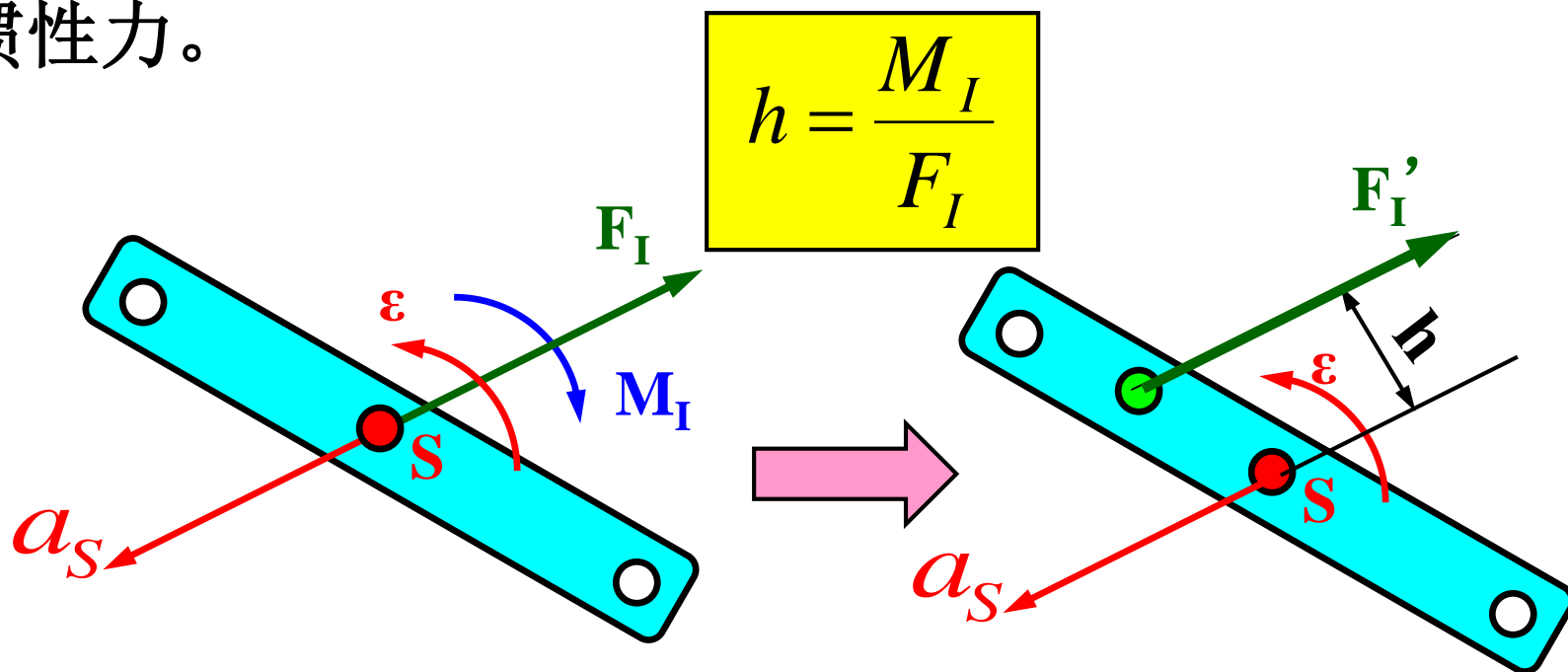


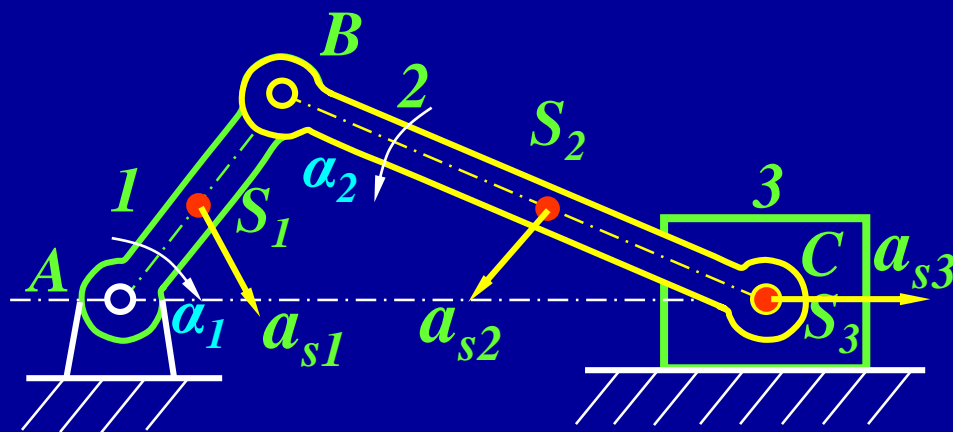
### 3) 作平面运动构件惯性力的确定



$$\begin{cases} F_I = -m a_S \neq 0 \\ M_I = -J_S \alpha \neq 0 \end{cases}$$

也可将上述  $F_I$ ,  $M_I$  合成为距质心  $S$  为距离  $h$  的总惯性力。





惯性力:  $\mathbf{F}_I = F_I(m_i, J_{si}, a_{si}, \alpha_i)$

惯性力偶:  $\mathbf{M}_I = M_I(m_i, J_{si}, a_{si}, \alpha_i)$

其中:  $m_i$  ---- 构件质量;

$J_{si}$  ---- 绕质心的转动惯量;

$a_{si}$  ---- 质心的加速度;

$\alpha_i$  ---- 构件的角加速度。

构件运动形式不同，惯性力的表达形式不一样。

1) 作平面运动的构件：

$$\mathbf{F}_{I2} = -m_2 \mathbf{a}_{s2} \quad \mathbf{M}_{I2} = -J_{s2} \alpha_2$$

合力：  $\mathbf{F}'_{I2} = \mathbf{F}_{I2}$

$$l_{h2} = \mathbf{M}_{I2} / \mathbf{F}_{I2}$$

2) 作平移运动的构件

$$\mathbf{F}_I = -m_i \mathbf{a}_{si}$$

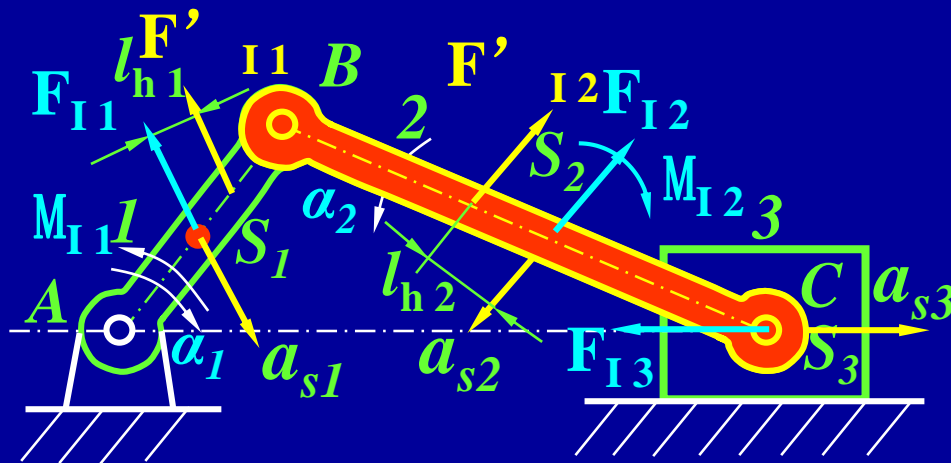
3) 作平定轴转动的构件

一般情况：  $\mathbf{F}_{I1} = -m_1 \mathbf{a}_{s1}$

$$\mathbf{M}_{I1} = -J_{s1} \alpha_1$$

合力：  $\mathbf{F}'_{I1} = \mathbf{F}_{I1}$  ,  $l_{h1} = \mathbf{M}_{I1} / \mathbf{F}_{I1}$

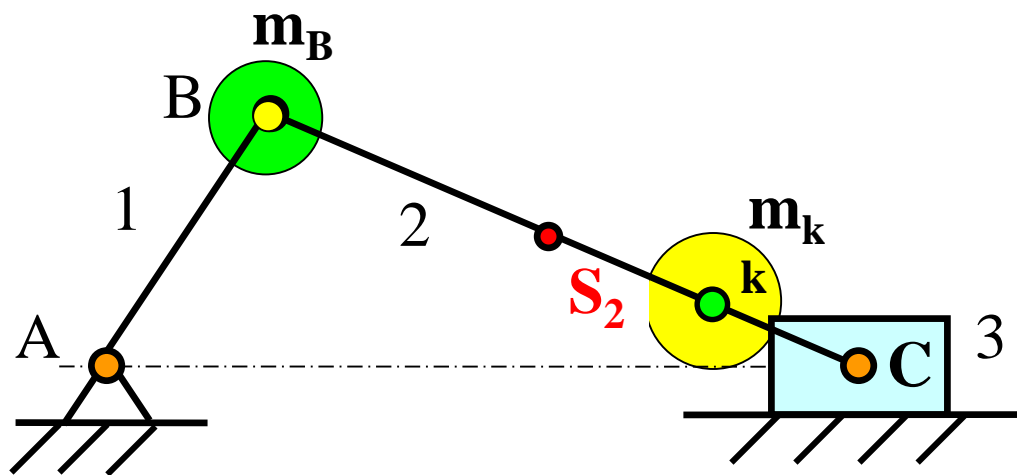
若质心位于回转中心：  $\mathbf{M}_{I1} = -J_{s1} \alpha_1$



## 质量代换法的方法

把构件的质量用集中作用在构件的几个**选定点**的假想**集中质量**来代替，这些假想的集中质量被称作代换质量。

B、K为所选定的代换点      $m_B$ 、 $m_k$ 为代换质量



# 应用质量代换法应满足的条件

- 1) 代换前后构件的质量不变;
- 2) 代换前后构件的质心位置不变;
- 3) 代换前后构件对质心轴的转动惯量不变;

同时满足三个条件的叫做动质量代换

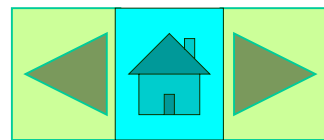
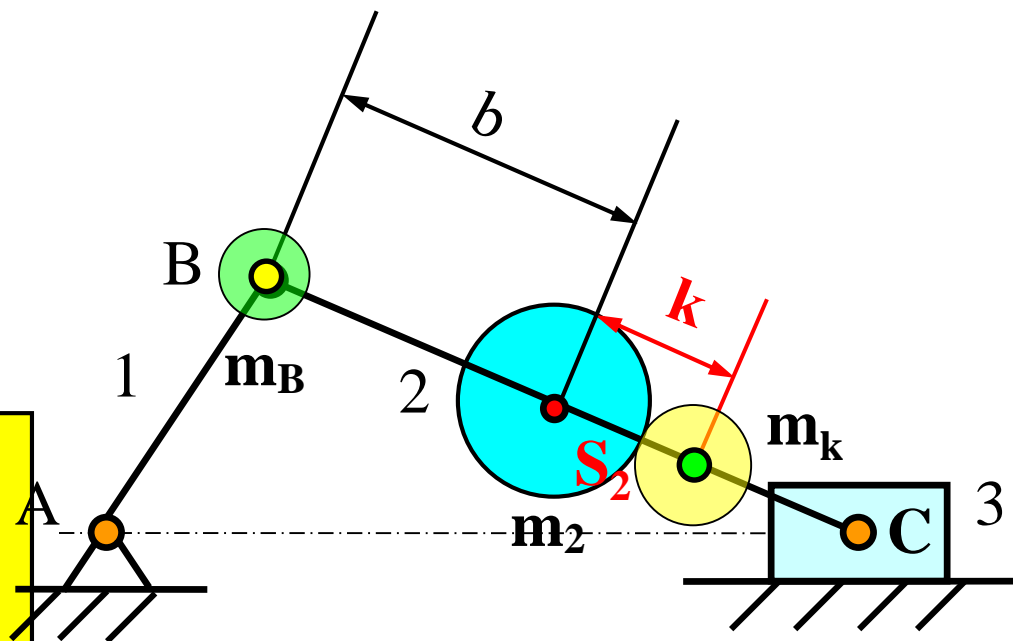
$$\begin{cases} m_B + m_k = m_2 \\ m_B b = m_k k \\ m_B b^2 + m_k k^2 = J_{S_2} \end{cases}$$

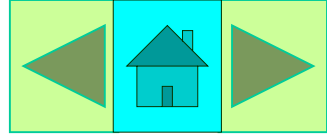
上式中有四个未知量:

$m_B$ 、 $m_k$ 、 $b$ 、 $k$

选定 $b$ 后求出其余的三个量:

$$\begin{cases} k = J_{S_2} / (m_2 b) \\ m_B = m_2 k / (b + k) \\ m_k = m_2 b / (b + k) \end{cases}$$





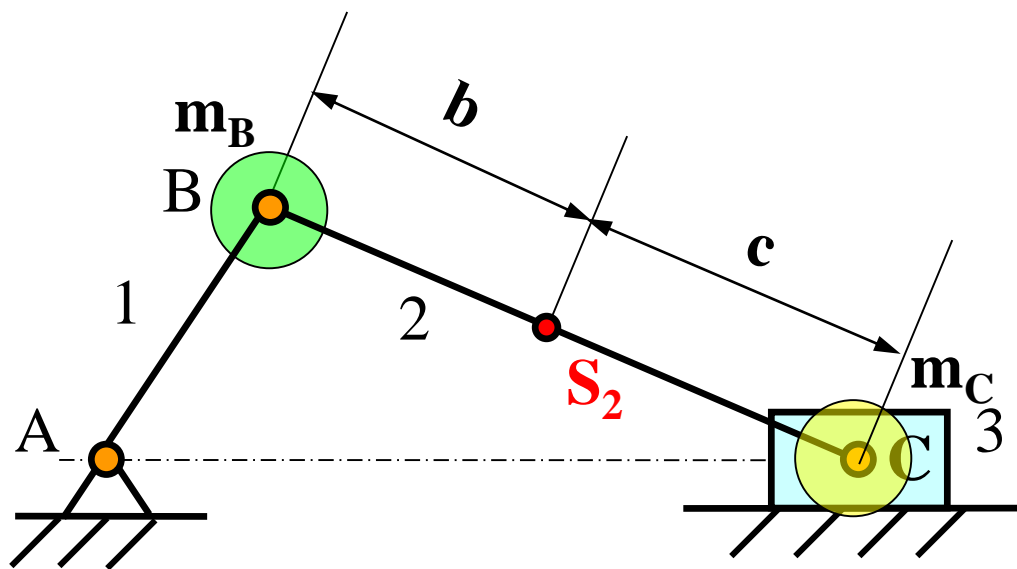
只满足上述前两个条件的代换被称作**静代换**。

- 1) 代换前后构件的质量不变;
- 2) 代换前后构件的质心位置不变

$$\begin{cases} m_B + m_k = m_2 \\ m_B b = m_k k \end{cases}$$

**静代换的具体做法为:**

任选**两个代换点**的位置 (下图选在**B**、**C**两铰链点处)将假想集中质量分别作用在**B**、**C**点。

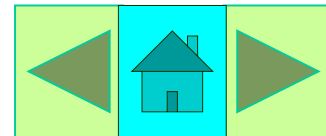


则有:

$$m_B = m_2 \cdot c / (b + c)$$

$$m_C = m_2 \cdot b / (b + c)$$

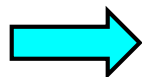
小结：1 动质量代换须同时满足三个条件。



- 1) 代换前后构件的质量不变;
- 2) 代换前后构件的质心位置不变;
- 3) 代换前后构件对质心轴的转动惯量不变;

即

$$\begin{cases} m_B + m_k = m_2 \\ m_B b = m_k k \\ m_B b^2 + m_k k^2 = J_{S2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} m_B = m_2 k / (b + k) \\ m_k = m_2 b / (b + k) \\ k = J_{S2} / (m_2 b) \end{cases}$$

2 静质量代换只须满足前两个条件

结论:

$$\begin{cases} m_B = m_2 c / (b + c) \\ m_C = m_2 b / (b + c) \end{cases}$$

用动质量代换法计算机构的惯性力与采用一般力学方法计算机构惯性力**完全等效**，而静质量代换则只**部分等效**。

## § 4—3运动副中摩擦力的确定

### 概述:

摩擦产生源—运动副元素之间相对滑动。

摩擦的缺点: 效率↓ 磨损↑ →强度↓ →精度↓  
→寿命↓ 发热↑ →润滑恶化 →卡死。

### 优点:

利用摩擦完成有用的工作。

如摩擦传动（皮带、摩擦轮）、 离合器(摩托车)、  
制动器（刹车）。

研究目的: 减少不利影响, 发挥其优点。

运动副中摩擦的类型:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{低副—产生滑动摩擦力} \\ \text{高副—滑动兼滚动摩擦力。} \end{array} \right.$



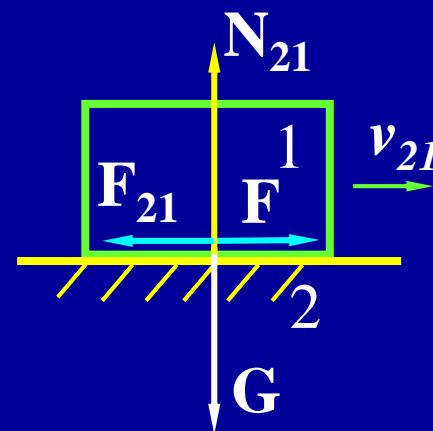
# 一、移动副的摩擦

## 1. 移动副中摩擦力的确定

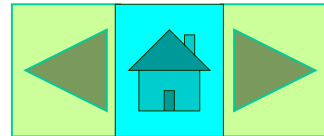
**G**—铅垂载荷； **N<sub>21</sub>**—法向反力；

**F**—水平力， **F<sub>21</sub>**—摩擦力。

由库仑定律得：  **$F_{21} = f N_{21}$**



摩擦副材料	摩 擦 系 数			
	静 摩 擦		动 摩 擦	
	无润滑剂	有润滑剂	无润滑剂	有润滑剂
钢—钢	<b>0.15</b>	<b>0.1 ~ 0.12</b>	<b>0.1</b>	<b>0.05 ~ 0.1</b>
钢—铸铁	<b>0.2 ~ 0.3</b>		<b>0.16 ~ 0.18</b>	<b>0.05 ~ 0.15</b>
钢—青铜		<b>0.1 ~ 0.15</b>	<b>0.15 ~ 0.18</b>	<b>0.07</b>
铸铁—铸铁		<b>0.15 ~ 0.16</b>	<b>0.15</b>	<b>0.07 ~ 0.12</b>
铸铁—青铜	<b>0.28</b>	<b>0.16</b>	<b>0.15 ~ 0.21</b>	<b>0.07 ~ 0.15</b>
青铜—青铜			<b>0.15 ~ 0.20</b>	<b>0.04 ~ 0.1</b>
皮革—铸铁或钢			<b>0.3 ~ 0.5</b>	<b>0.12 ~ 0.15</b>
橡皮—铸铁			<b>0.8</b>	<b>0.5</b>



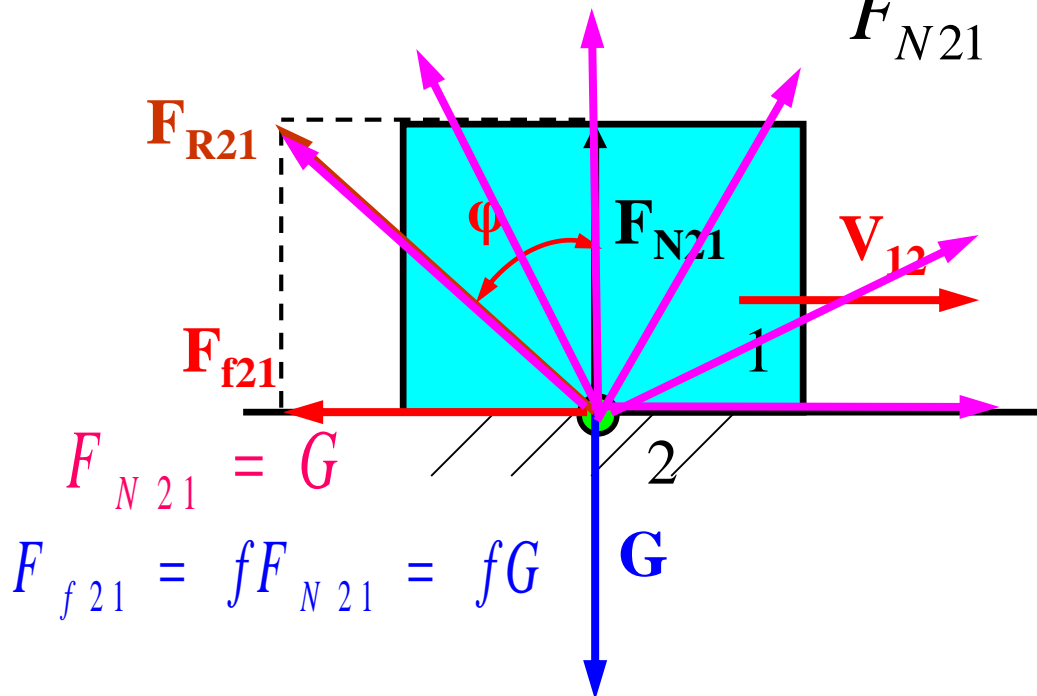
## § 4—3 运动副中摩擦力的确定

### 1 移动副中摩擦力的计算

#### 1) 平滑块的摩擦力

$\mathbf{F}_{R21}$ —总反力，其方向与滑块运动的方向呈 $90^\circ + \varphi$ 。

$\varphi$ —摩擦角，  $\varphi = \arctan \frac{F_{f21}}{F_{N21}} = \arctan \frac{fF_{N21}}{F_{N21}} = \arctan f$

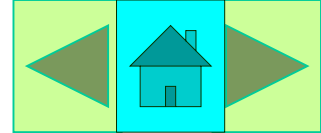


总反力 $\mathbf{F}_{R21}$ 方向恒与与滑块  
滑动速度 $\mathbf{V}_{12}$ 方向相反。  
两者间夹角为 $90^\circ + \varphi$ 。

两接触面间摩擦力的大小与接触面的几何形状有关

## 2) V型槽滑块的摩擦力

$$\alpha = 90^\circ - \theta$$



由图可得:

$$\begin{cases} F_{N21} = \frac{G}{\cos \alpha} = \frac{G}{\cos(90^\circ - \theta)} = \frac{G}{\sin \theta} \\ F_{f21} = f F_{N21} = G \frac{f}{\sin \theta} = G f_v \end{cases}$$

其中:

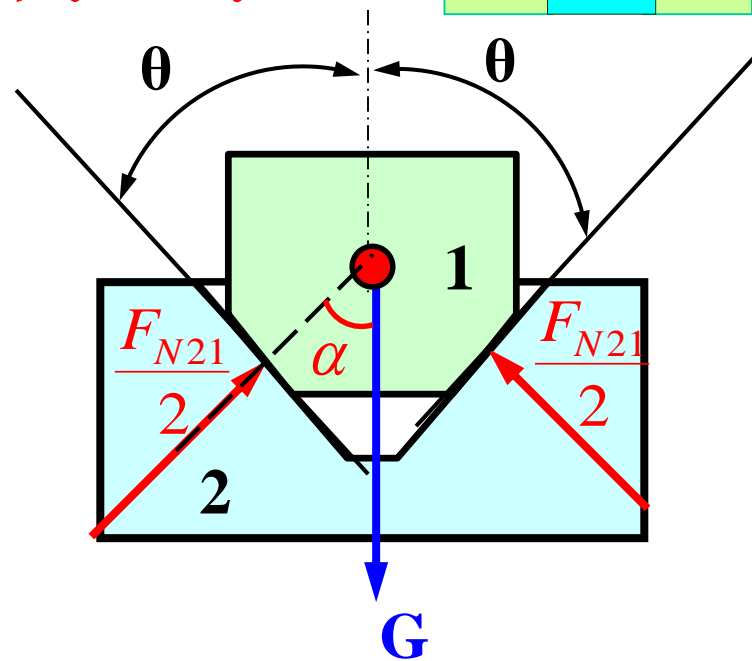
$$f_v = \frac{f}{\sin \theta}$$

## 3) 半柱面槽滑块的摩擦力

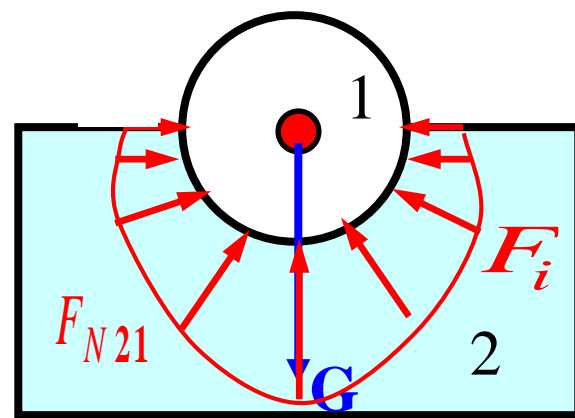
$$F_{f21} = f_v G = K f G$$

$$f_v = K f$$

$$\text{其中: } k = \begin{cases} 1 & \text{一点、线接触;} \\ \pi/2 & \text{一半圆面均匀接触;} \\ [1 \sim \pi/2] & \text{一其余。} \end{cases}$$



$$F_{N21} = \int_0^\pi F_i = G$$



总结：移动副的摩擦力  $F_{f21}$

$$F_{f21} = f_v G \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{平面接触} & f_v = f \\ \text{槽形面接触} & f_v = \frac{f}{\sin \theta} \\ \text{半圆柱面接触} & f_v = k f \quad (k = 1 \sim \pi/2) \end{array} \right.$$

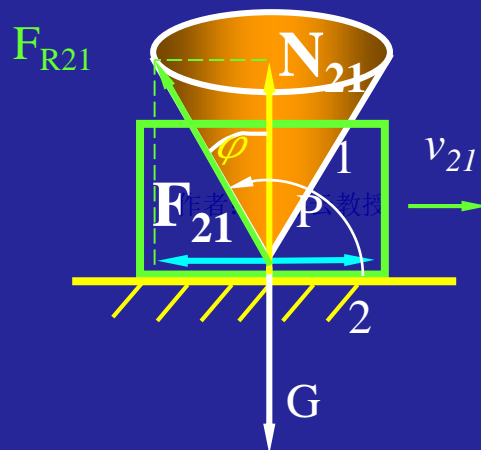
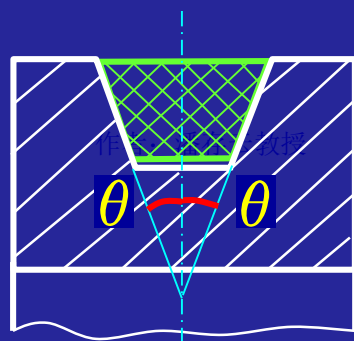
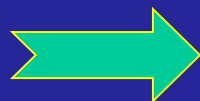
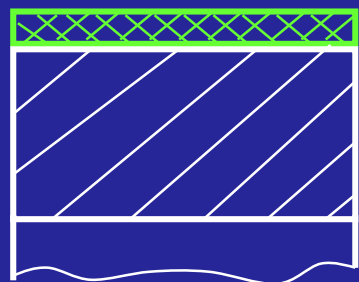
( $f_v$  称为当量摩擦系数)

- 1、 $f_v$  引入的意义：对摩擦力的计算可以先不考虑接触面间的几何形状，用一个公式表达，仅需对接触面之间不同几何形状需引入不同的当量摩擦系数。
- 2、因  $f_v \geq f$ ，故在其他条件相同的情况下，槽面摩擦大于平面摩擦。因此，在一些需利用摩擦力来工作的地方，可将平面接触改为槽面接触，以增大摩擦力。三角带传动和三角螺纹联接，就是其应用实例。

**应用：**当需要增大滑动摩擦力时，可将接触面设计成槽面或柱面。如圆形皮带（缝纫机）、三角形皮带、螺栓联接中采用的三角形螺纹。

对于三角带： $\theta = 18^\circ$   $f_v = 3.24 f$

不论P的方向如何改变，P与R两者始终在同一平面内



2.移动副中总反力的确定  
总反力为法向反力与摩擦力的合成：

$$F_{R21} = N_{21} + F_{21}$$

$$\tan \varphi = F_{21} / N_{21} = f N_{21} / N_{21} = f$$

$\varphi$  — 摩擦角，方向： $\angle F_{R21} V_{12} = (90^\circ + \varphi)$

**摩擦锥**----以 $F_{R21}$ 为母线所作圆锥。

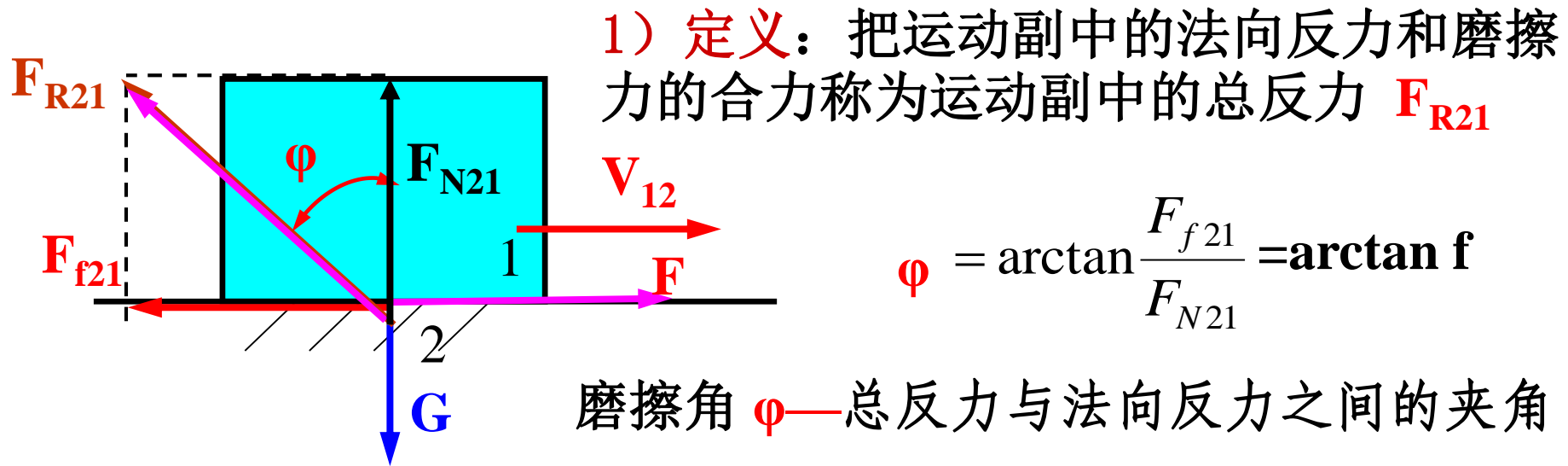
**结论：**移动副中总反力恒切于摩擦锥。

在一些需利用磨擦力来工作的地方，可将( )改为( )，以增大磨擦力

- ☐ A 槽面接触,平面接触
- ☒ B 平面接触, 槽面接触
- ☐ C 曲面接触, 平面接触
- ☐ D 平面接触, 点接触

提交

## 2、移动副中的总反力 $\mathbf{F}_{R21}$



- 2)  $\mathbf{F}_{R21}$  方向确定
- ① 总反力与法向反力偏斜一摩擦角  $\phi$
  - ② 总反力与  $\mathbf{V}_{12}$  间的夹角总是一钝角 ( $90^\circ + \phi$ )

3) 关于摩擦角  $\phi$ ，当量摩擦角  $\phi_v$

$$\phi = \arctan f \quad \phi_v = \arctan f_v$$

4) 总反力方向确定后，就可对机构进行力分析。

**例** 一滑块置于升角为 $\alpha$ 的斜面2上， $G$ 为作用在滑块1上的铅垂载荷。求使滑块1沿斜面2等速上升（正行程）时所需的水平驱动力 $F$ ；求使滑块1沿斜面2等速下滑时的力 $F'$ 。

**解：1 分析受力（正行程）**

已知力： $G$  未知力： $F$ 、 $F_{R21}$

$$\vec{G} + \vec{F} + \vec{F}_{R21} = 0$$

滑块匀速上滑时力平衡条件：

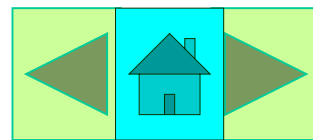
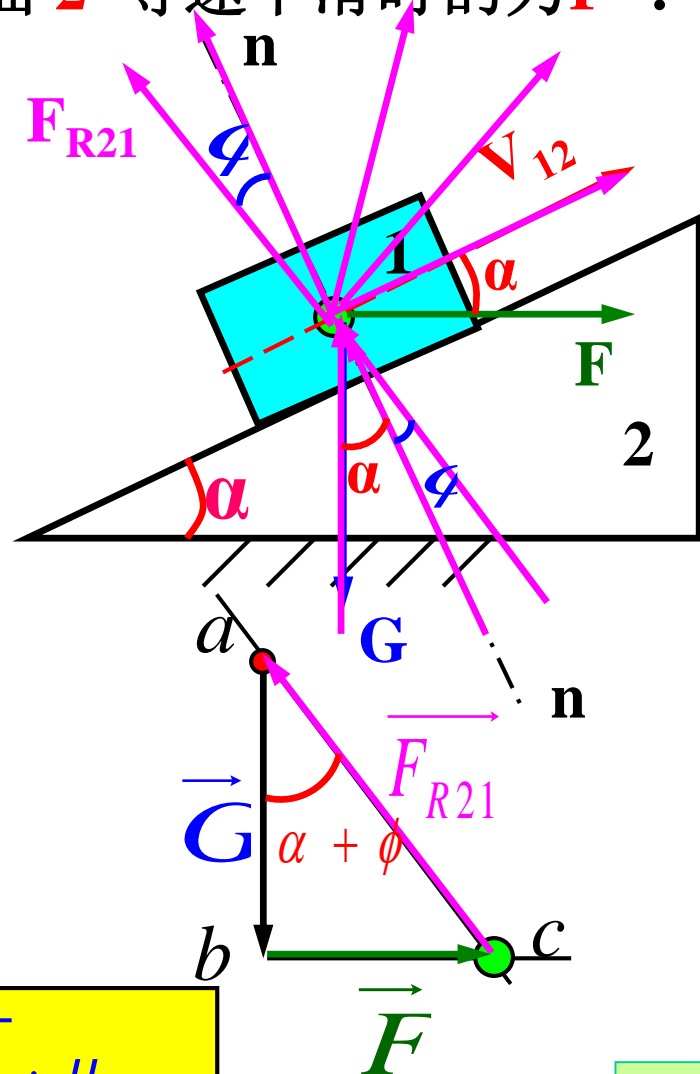
所受三力汇交于一点，且三力力矢为首尾相交的封闭图形。

**2 取力比例尺作图求解**

$$\mu_P = \frac{\text{真实力大小 (N)}}{\text{图示力大小 (mm)}}$$

$$F = G \tan(\alpha + \phi)$$

$$F = \overline{bc} \cdot \mu_P$$



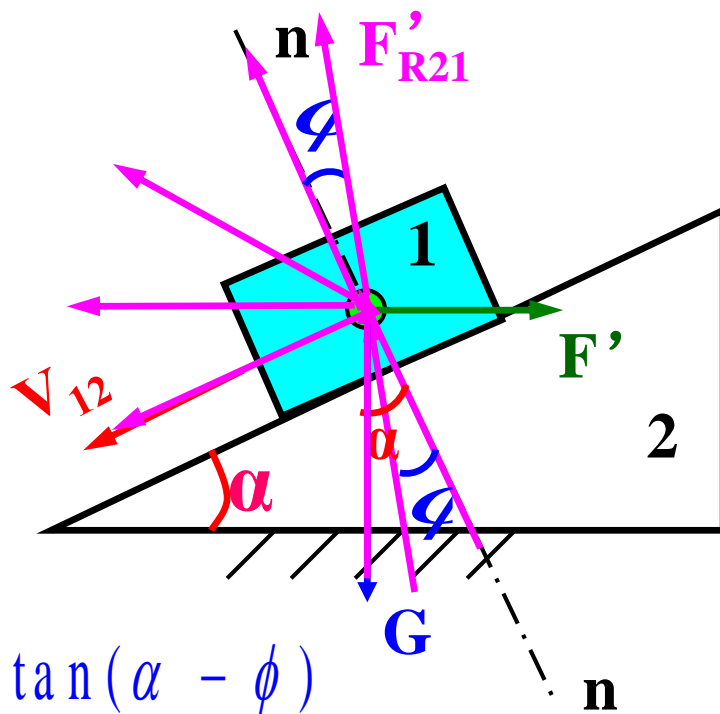
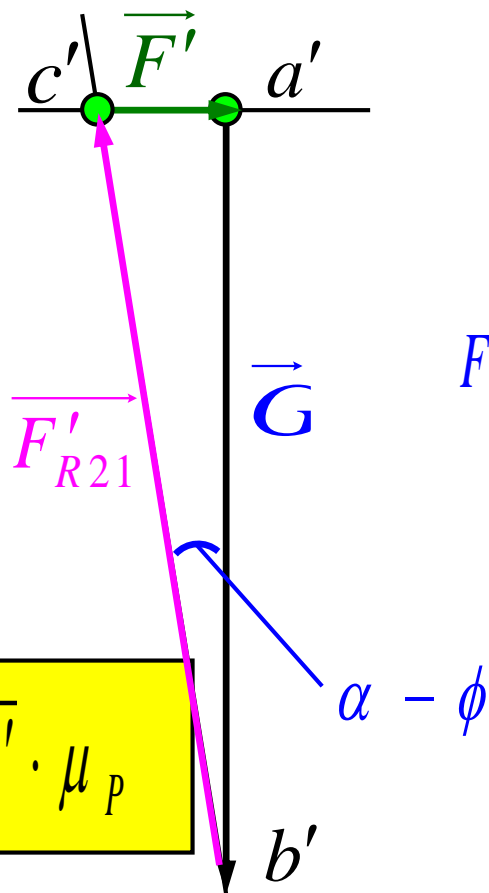


### 3 分析滑块反行程受力

已知力:  $G$  (驱动力)

未知力:  $F'$ 、 $F'_{R21}$

### 4 作图求解

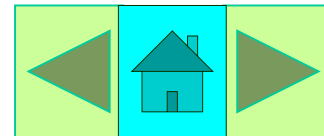


$$F' = G \tan(\alpha - \phi)$$

$\alpha > \phi$ , 则  $F'$  为正, 其方向与图示方向相同,  $F'$  为阻力, 其作用为阻止滑块加速下滑。

如  $\alpha < \phi$ , 则  $F'$  为负, 其方向与图示方向相反,  $F'$  也成为一部分驱动力, 其作用是促使滑块等速下滑。

## 小结:



1) 关于摩擦角  $\phi$ ，当量摩擦角  $\phi_v$

$$\phi = \arctan f$$

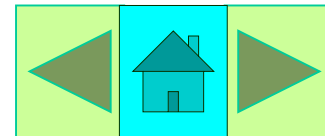
$$\phi_v = \arctan f_v$$

2) 关于总反力  $F_{R21}$

(1)  $F_{R21}$  与法向反力  $F_{N21}$  偏斜一摩擦角  $\phi$ ;

(2)  $F_{R21}$  的方向与相对速度  $V_{12}$  的方向夹角为  $90^\circ + \phi$ 。

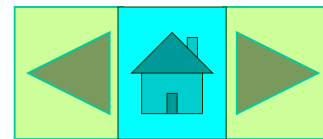
### 3) 关于摩擦力 $F_{f21}$



$$F_{f21} = \begin{cases} fG & \text{—平面接触;} \\ f_v G & \text{—槽形面接触;} \quad f_v = \frac{f}{\sin \theta} \\ f_v G = kfG & \text{—半圆柱面接触。} \end{cases}$$

$$\text{其中: } k = \begin{cases} 1 & \text{—点、线接触;} \\ \pi/2 & \text{—半圆面均匀接触;} \\ [1 \sim \pi/2] & \text{—其余。} \end{cases}$$

## 2 转动副中摩擦力的计算



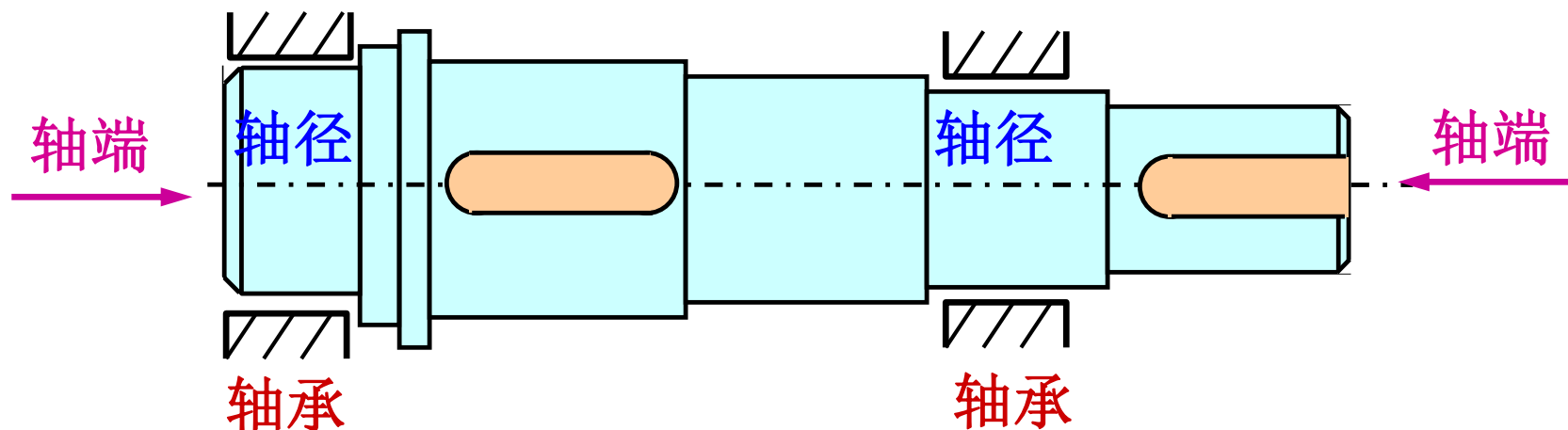
### 1) 轴颈的摩擦

#### 名词解释

轴承—支承轴的部件。

轴颈—轴伸入轴承的部分。

轴端—轴两端的表面。



如图所示，在驱动力矩  $M$  未作用时，轴静止不动。

在驱动力矩  $M$  的作用下，轴开始转动，在瞬间较大的摩擦阻力矩的作用下，轴沿着轴承孔的内表面向右上方滚动至B点接触。

在B点处，法向反力  $F_{N21}$ 、摩擦力  $F_{f21}$  的合力  $F_{R21}$  与施加在轴上的径向载荷  $G$  平衡。

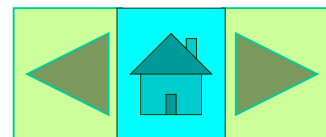
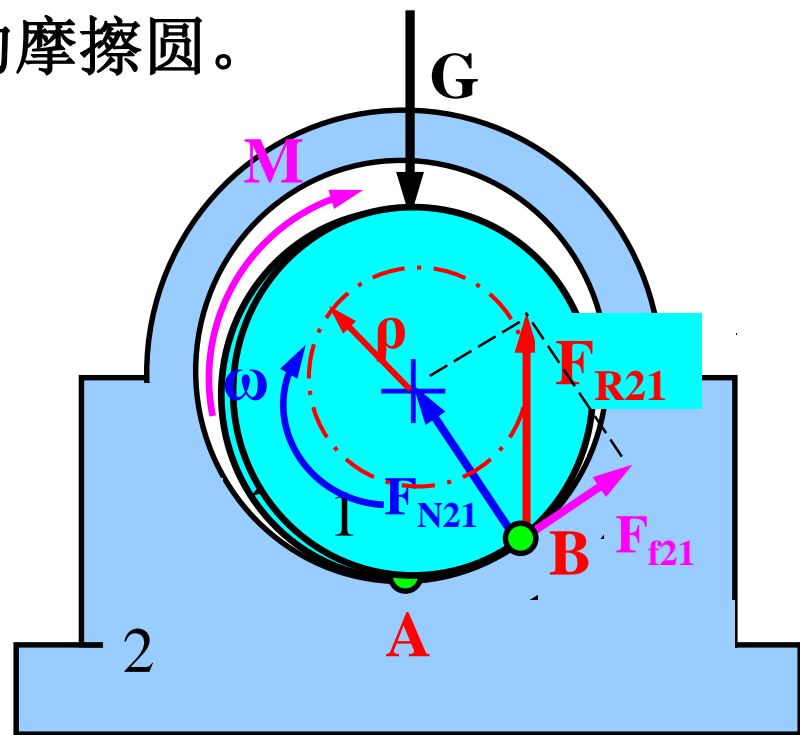
$F_{R21}$  与其作用线切于一个以  $\rho$  为半径的摩擦圆。

结论：  $\rho = f_v \cdot r$

1. 当考虑摩擦时，只要轴颈相对于轴承滑动，轴承对轴颈的总反力  $F_{R21}$  将始终切于摩擦圆。

2. 总反力  $F_{R21}$  对轴颈中心之矩的方向必与轴颈1相对于轴承2的相对角速度  $\omega_{12}$  的方向相反。

3. 当不考虑摩擦时，根据力平衡条件，确定不计摩擦力时的总反力方向。



## 注意点:

1、 $F_{R21}$ 是构成转动副的两构件中构件2作用在构件1上的力，即构件1所受的力， $\omega_{12}$ 是构件1相对构件2的角速度，即受该力作用的构件相对于构成转动副的另一构件的角速度。如分析得是 $F_{R12}$ ，则其对转动副中心的矩，便应与构件2相对于构件1的角速度 $\omega_{21}$ 方向相反。

2、当需计算磨擦力矩或利用磨擦圆解题时，首先需确定 $f_v$ ，而 $f_v$ 除与转动副两元素材料及表面质量有关外，还直接与两元素的接触情况有关，由于变形及跑合的关系，轴颈和轴承的实际接触介于线接触与沿整个半圆柱面接触之间。

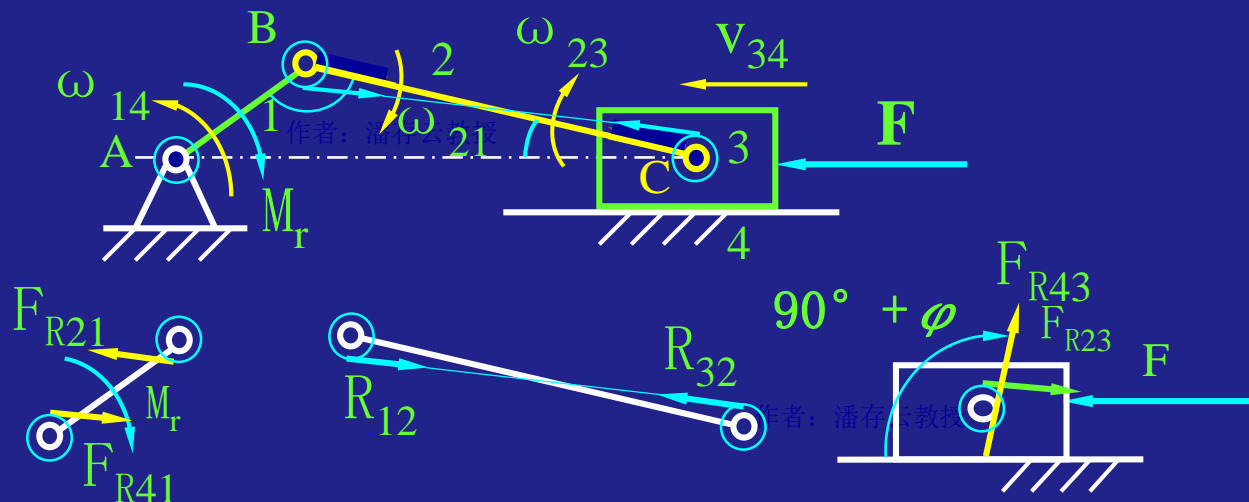
$$f_v = \begin{cases} f & (\text{线接触}) \\ \pi/2 \quad f = 1.57f & (\text{半圆面均匀接触且尚未经跑合}) \end{cases}$$

$f_v$ 应在 $(1—1.57)f$ 范围内选取，当轴承间隙较小，轴承材料较软时，接触面较大，故应选用较大值。而当轴承和轴颈材料都很硬（如仪表中的钻石轴承），接近于线接触，故应取较小值。另外，为偏于安全，在计算机械的效率及损耗时，常选用较大值，而在需要利用机械的自锁时，常选用较小值。

## 运动副总反力判定准则

1. 由力平衡条件，初步确定总反力方向（受拉或压）。
2. 对于转动副有： $F_{R21}$ 恒切于摩擦圆。  
对于移动副有： $F_{R21}$ 恒切于摩擦锥
3. 对于转动副有： $M_f$ 的方向与 $\omega_{12}$ 相反  
对于移动副有： $\angle F_{R21} V_{12} = (90^\circ + \varphi)$

例1：图示机构中，已知驱动力 $F$ 和阻力 $M_r$ 和摩擦圆半径 $\rho$ ，画出各运动副总反力的作用线。



## 2) 轴端摩擦

在G的作用下产生摩擦力矩 $M_f$

取环形面积:  $ds = 2\pi \rho d\rho$

设ds上的压强为p, 正压力为:

$$dN = p ds$$

摩擦力为:  $dF = f dN = f p ds$

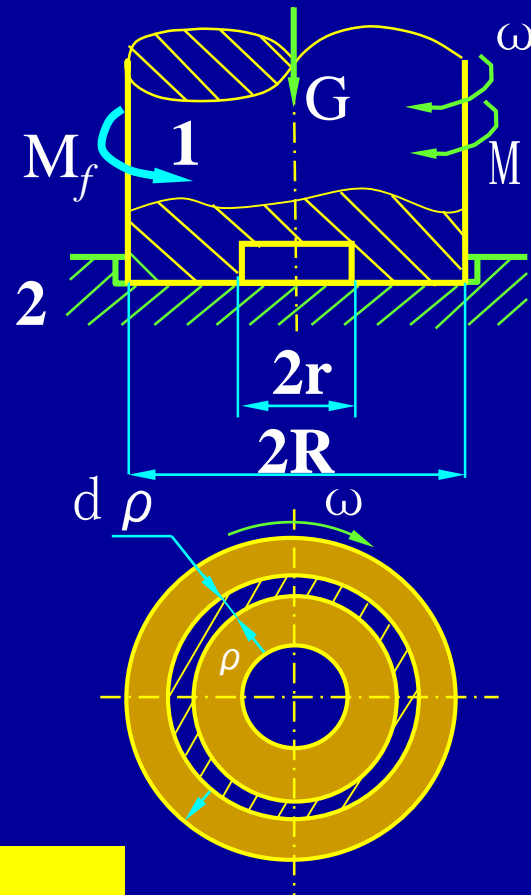
摩擦力矩:  $dM_f = \rho dF = \rho f dN$   
 $= \rho f p ds$

总摩擦力矩:

$$M_f = \int_r^R \rho f p ds = 2\pi f \int_r^R p \rho^2 d\rho$$

(1) 新轴端,  $p = \text{常数}$ , 则:  $p = G / \pi(R^2 - r^2)$

$$M_f = 2\pi f \int_r^R p \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} \pi f p (R^3 - r^3) = \frac{2}{3} f G \frac{(R^3 - r^3)}{R^2 - r^2}$$





## (2)跑合轴端

跑合初期:  $p = \text{常数}$

外圈  $V \uparrow \rightarrow$  磨损快  $\rightarrow p \downarrow \rightarrow$  磨损变慢

内圈  $V \downarrow \rightarrow$  磨损慢  $\rightarrow p \uparrow \rightarrow$  磨损变快

跑合结束:

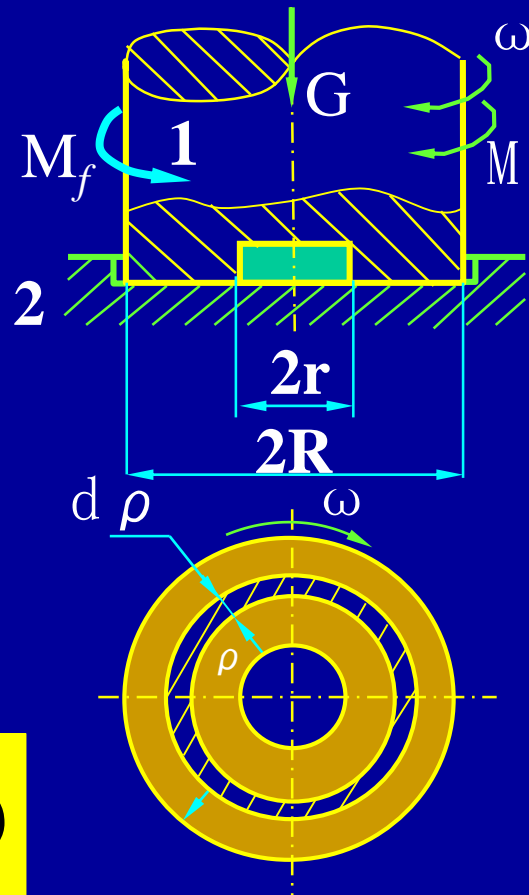
正压力分布规律为:  $p \rho = \text{常数}$

$$M_f = 2\pi f p \rho \int_r^R \rho d\rho = \pi f p \rho (R^2 - r^2)$$

$$G = \int_r^R p ds = 2\pi p \rho (R - r)$$

结论:  $M_f = f G(R+r)/2$

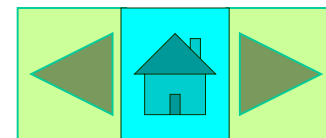
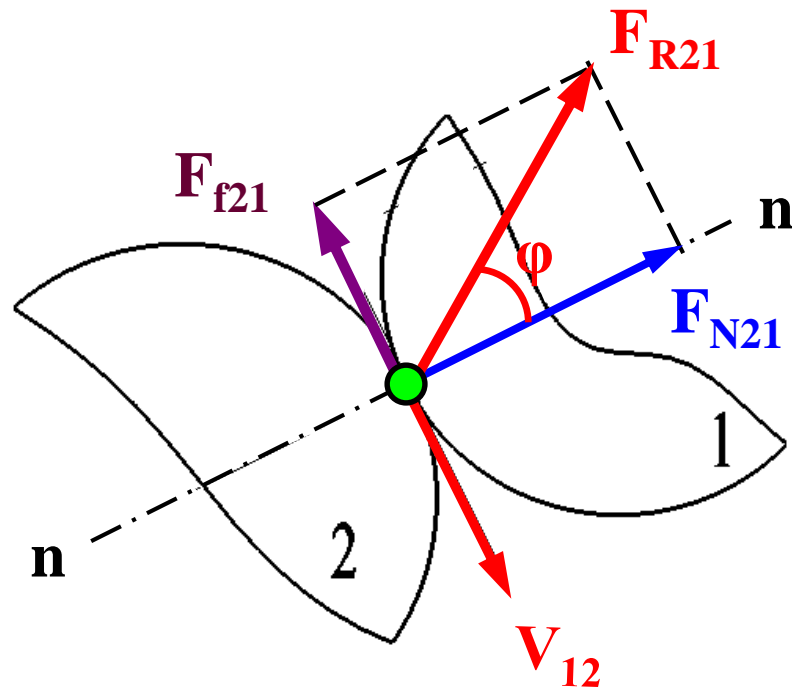
$p\rho = \text{const}$ , 中心压强高, 容易压溃, 故做成中空状。



### 3 平面高副中摩擦力的计算

常见的平面高副一般为滚滑副，滚动摩擦力很小，对机构进行力分析时，仅考虑滑动摩擦力。一般将其所受的摩擦力 $\mathbf{F}_{f21}$ 与其所受的法向反力 $\mathbf{F}_{N21}$ 合成为一总反力 $\mathbf{F}_{R21}$ 。

总反力 $\mathbf{F}_{R21}$ 的方向与其相对速度的方向偏转 $90^\circ + \varphi$ 角。



## § 4-4 考虑摩擦时机机构的受力分析

### 1. 机构组的静定条件:

在不考虑摩擦时，平面运动副中反力作用线的方向及大小未知要素如下：

**转动副** 通过转动副中心，大小及方向未知；

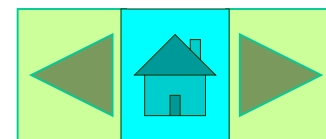
**移动副** 沿导路法线方向，作用点的位置及大小未知；

**平面高副** 沿高副两元素接触点的公法线上，仅大小未知。

设由 $n$ 个构件和  $p_l$ 个低副和 $p_h$ 个高副组成的构件组， 根据每个构件可列独立力平衡方程数等于力的未知数， 则得此构件组的静定条件为

$$3n = 2p_l + p_h$$

**结论** 基本杆组都满足静定条件。



## § 4-4 考虑摩擦时机机构的受力分析

---

### 2. 用图解法作机构的动态静力分析

#### (1) 分析步骤

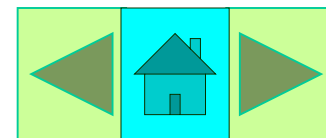
首先, 求出各构件的惯性力, 并把它们视为外力加于产生惯性力的机构上;

其次, 根据静定条件将机构分解为若干个构件组和 平衡力作用的构件;

最后, 按照由外力全部已知的构件组开始, 逐步推算到平衡力作用的构件, 顺序依次建立力平衡条件, 并进行作图求解。

#### (2) 举例

平面六杆机构的受力分析



## § 4-4 考虑摩擦时机机构的受力分析

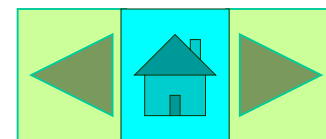
### 3. 用解析法作机构的动态静力分析

由于图解法精度不高，而且当需机构一系列位置的力分析时，图解过程相当繁琐。为了提高分析力分析精度，所以需要采用解析法。

机构力分析的解析方法很多，

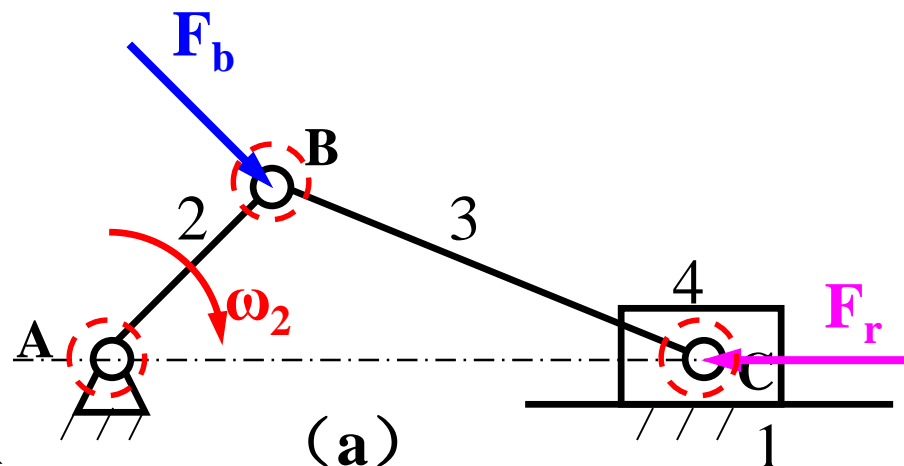
下面介绍三种方法：关系方程解析法、复数法和矩阵法。

- (1) 矢量方程解析法
- (2) 复数法（留给同学课外自学）
- (3) 矩阵法

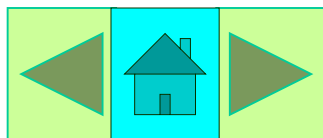
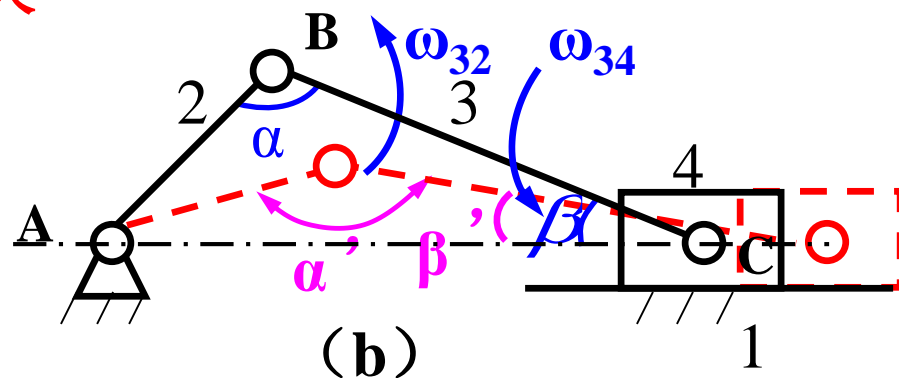


**例4—1** 如图所示为一曲柄滑块机构。设已知各构件的尺寸（包括转动副的半径 $r$ ），各运动副中的摩擦系数 $f$ ，作用在滑块上的水平阻力为 $F_r$ ，试对该机构在图示位置进行力分析（各构件的重力及惯性力均略而不计），并确定加于点B与曲柄AB垂直的平衡力 $F_b$ 的大小。

**解：** 1. 根据已知条件作出各转动副处的摩擦圆（a图中虚线小圆）。

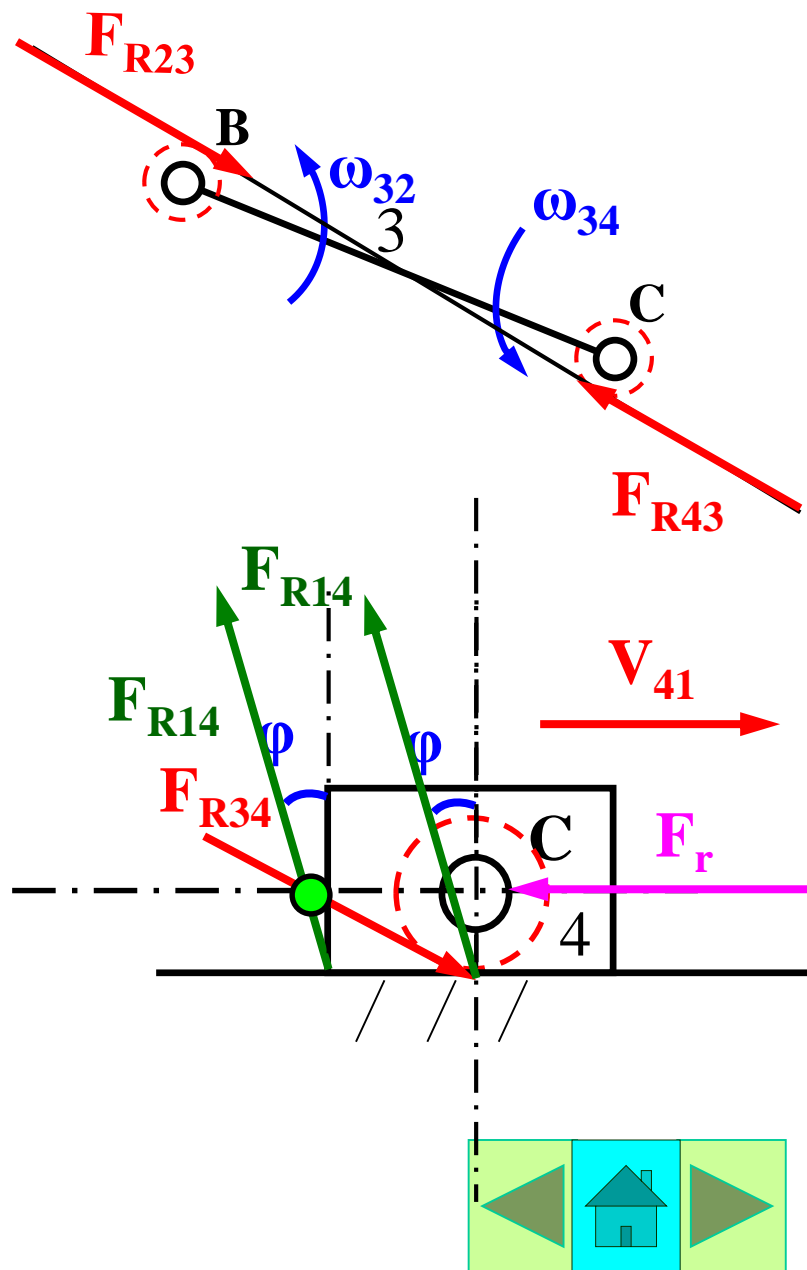
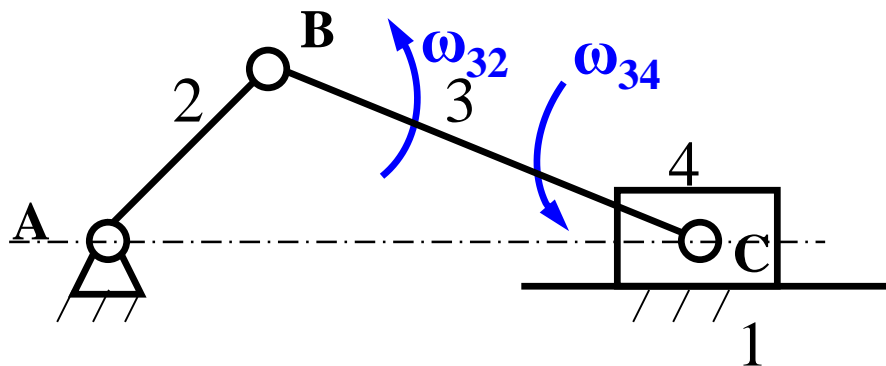


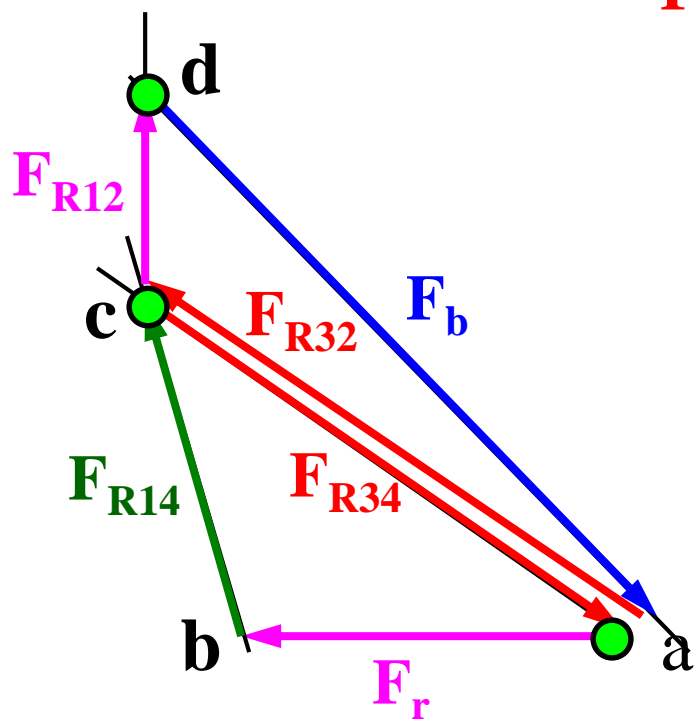
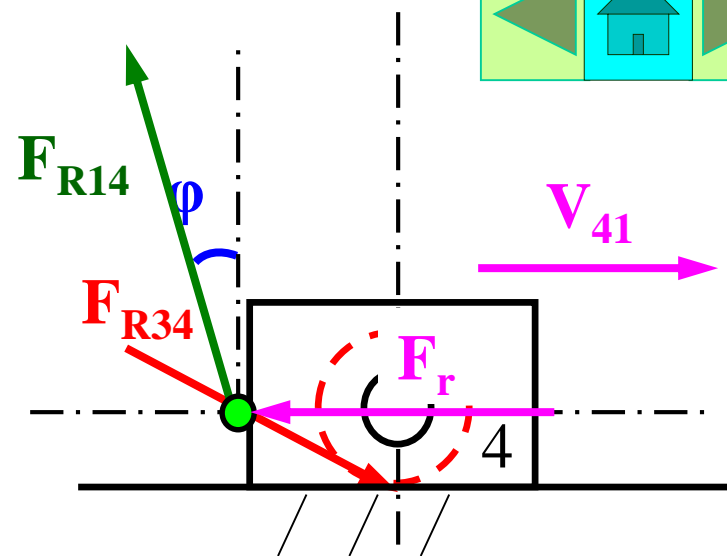
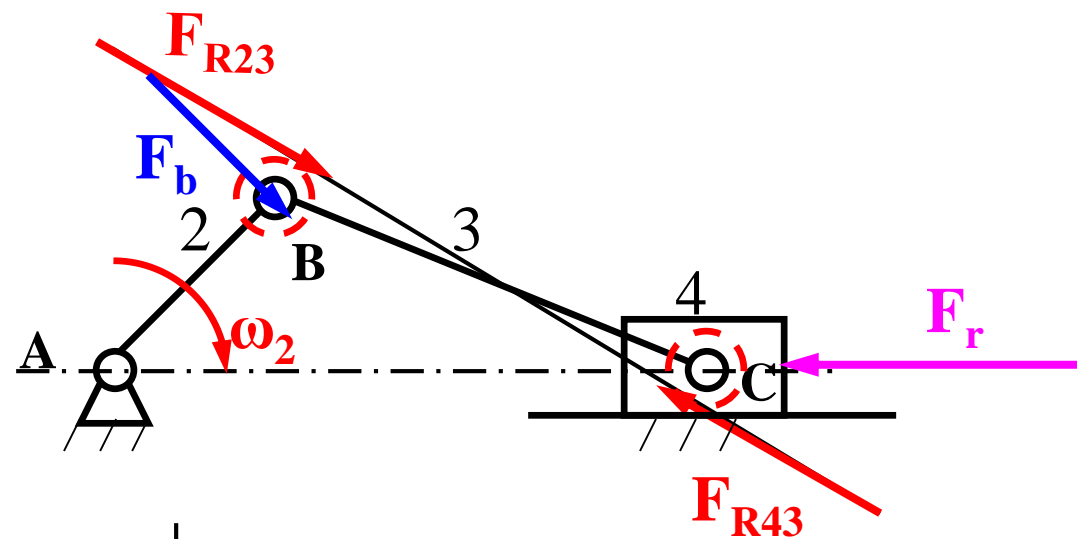
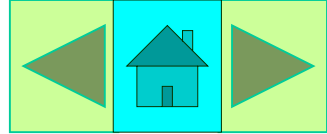
2. 作第二位置图,以判断构件3相对于构件2、4的相对转向关系（图（b）所示）。



3. 二力杆BC 杆两端受压，  
 $F_{R23}$  对B点所取力矩应与  $\omega_{32}$  相反，  
 $F_{R43}$  对C点所取力矩应与  $\omega_{34}$  相反。

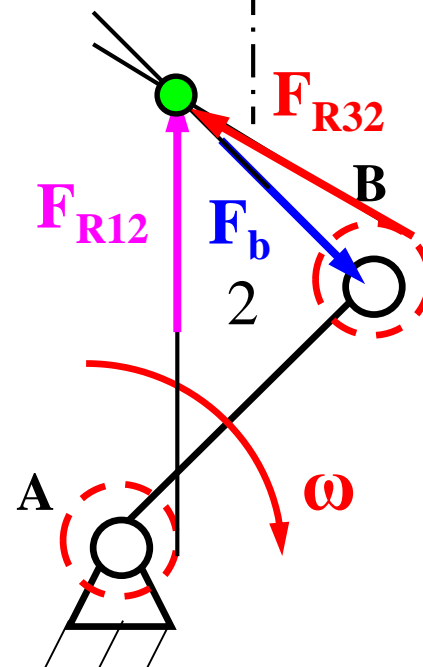
4. 滑块4受三个汇交力作用，  
 三力构成封闭力矢多边形





最后求得:

$$F_b = \overline{ad} \mu_P$$

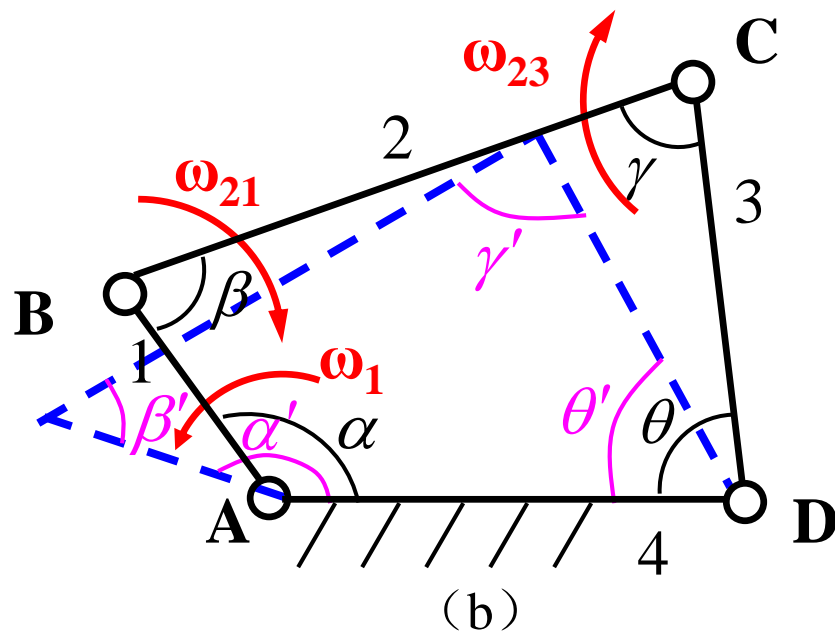
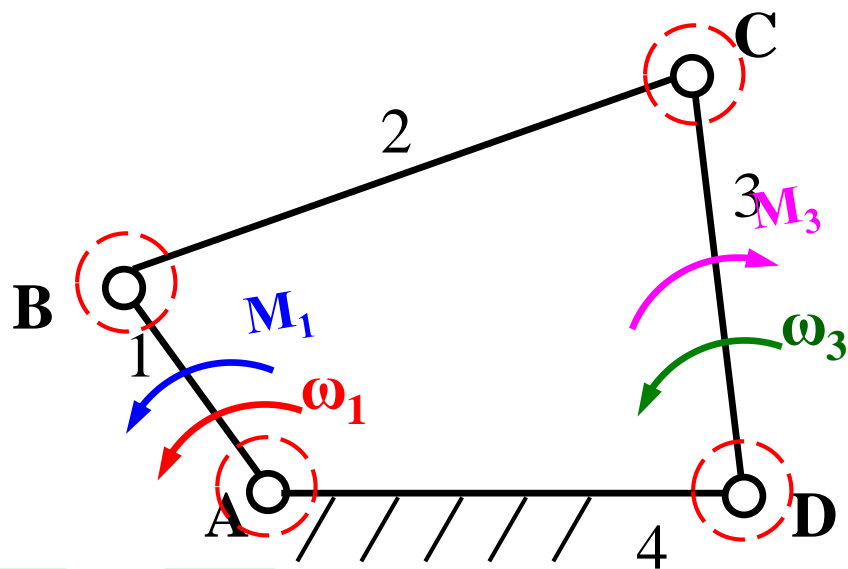




**例4—2** 如图所示为一四杆机构。曲柄1为主动件，在力矩 $M_1$ 的作用下沿 $\omega_1$ 方向转动，试求转动副 B、C中作用力方向线的位置，若 $M_1$ 为已知，求构件3上作用的力矩 $M_3$ 。图中**虚线小圆为摩擦圆**，解题时不考虑构件的自重及惯性力。

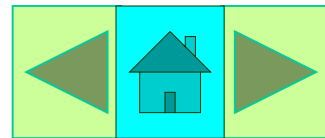
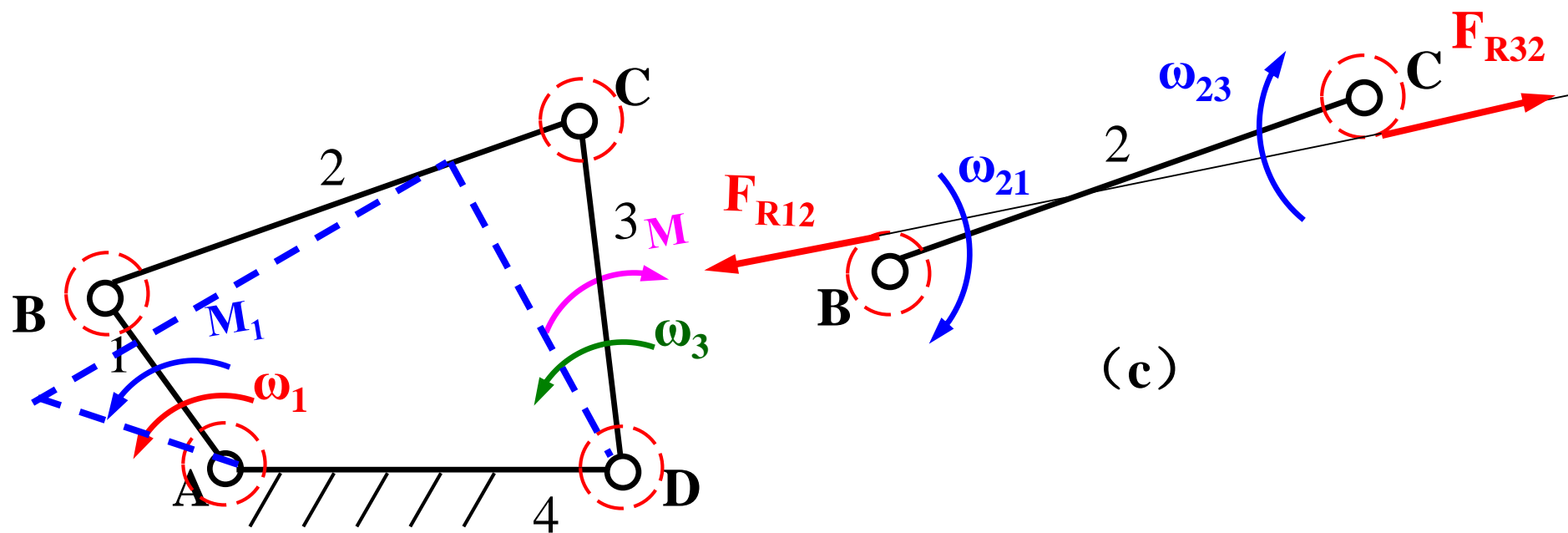
**解：**考虑摩擦时，各转动副处的**反力作用线应切于摩擦圆**，但切点位置应根据构件间的相对转动关系来确定。

**1.** 作机构的**第二位置图**以确定各构件间的相对转动关系（图b所示）。



## 2. 先取二力杆BC杆分析受力。

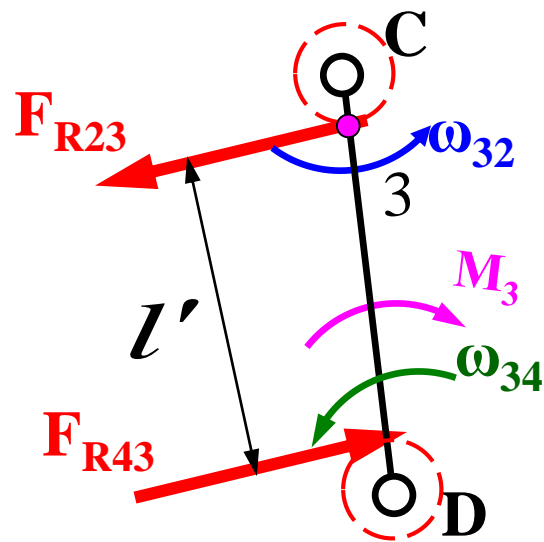
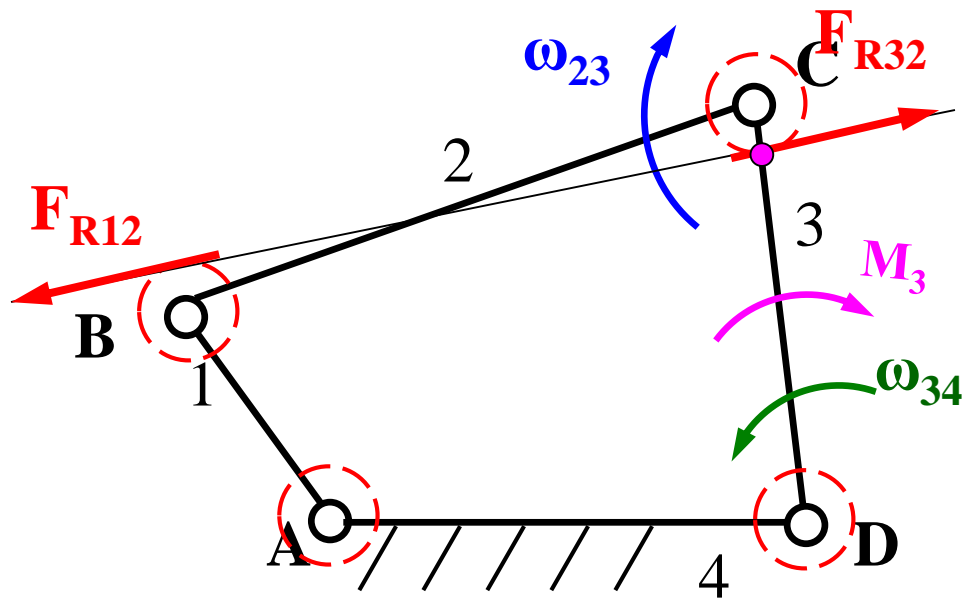
由图可知，BC杆受拉力作用，其拉力 $F_{R12}$ 、 $F_{R32}$ 应分别切于B、C处的摩擦圆，且 $F_{R12}$ 对B点所取的力矩应与 $\omega_{21}$ 转向相反， $F_{R32}$ 对C点所取的力矩应与 $\omega_{23}$ 转向相反（图c）所示。





#### 4. 取构件3作受力分析。

构件3在C点所受的力 $F_{R23}$ 与 $F_{R32}$ 符合作用力反作用力的关系，其方向和作用位置如图（e）所示；构件3在D点受到的机架反力 $F_{R43}$ 对D点之矩与 $\omega_3$ 转向相反（图e所示）。



(e)

求得:  $F_{R23} = F_{R43} = F_{R21} = F_{R12}$

$$M_3 = F_{R23} \cdot l' \cdot \mu_l = F_{R12} \cdot l' \cdot \mu_l$$

**例4-3** 图示双滑块机构，假定阻力 $Q$ 、转动副 $A$ 、 $B$ 处的轴径 $d$ 、当量摩擦系数 $f_v$ 、摩擦系数 $f$ 均为已知，试求驱动力 $F$ 。

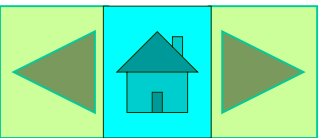
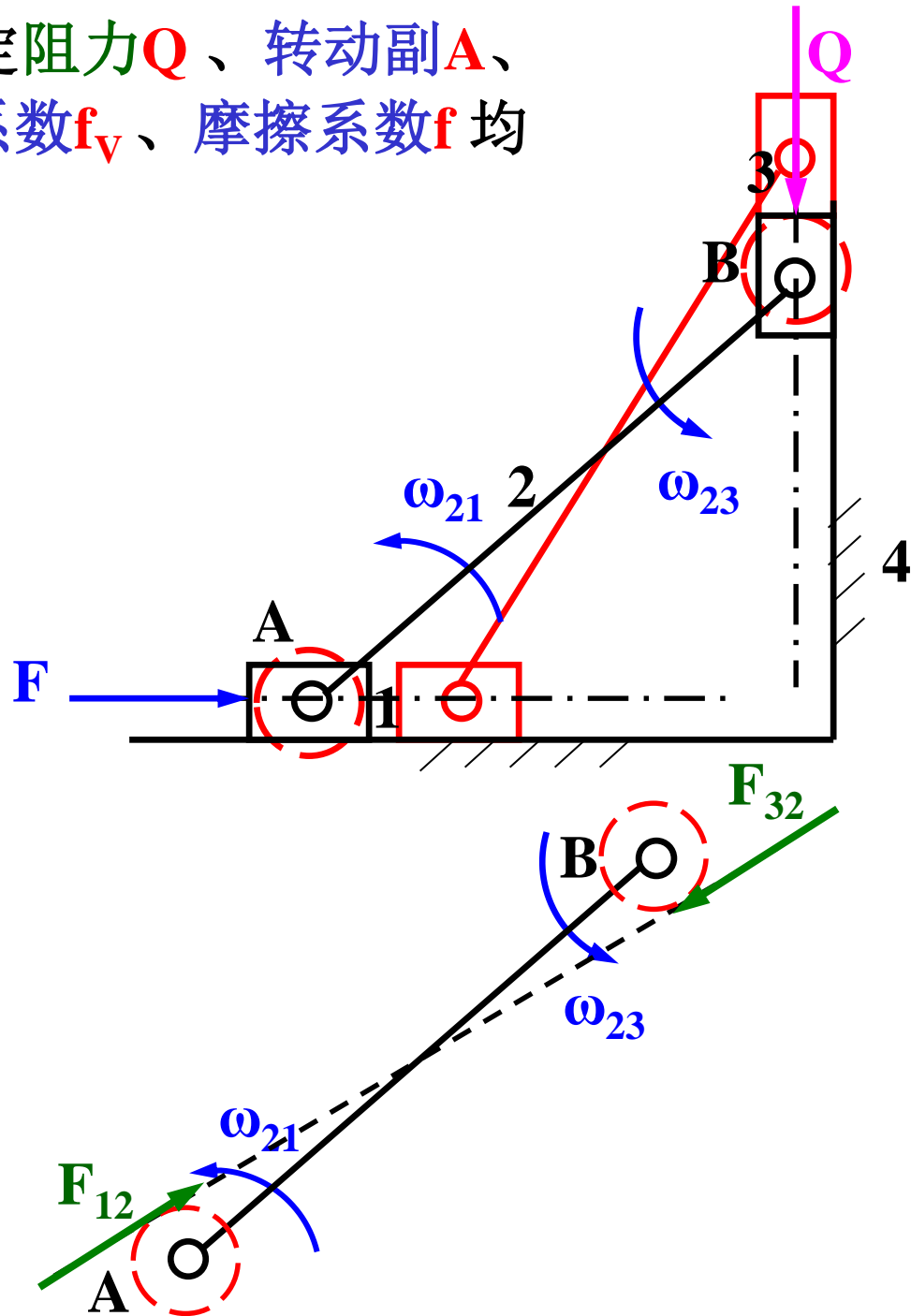
**解：1** 求摩擦圆和摩擦角

$$\rho = \frac{d}{2} \cdot f_v$$

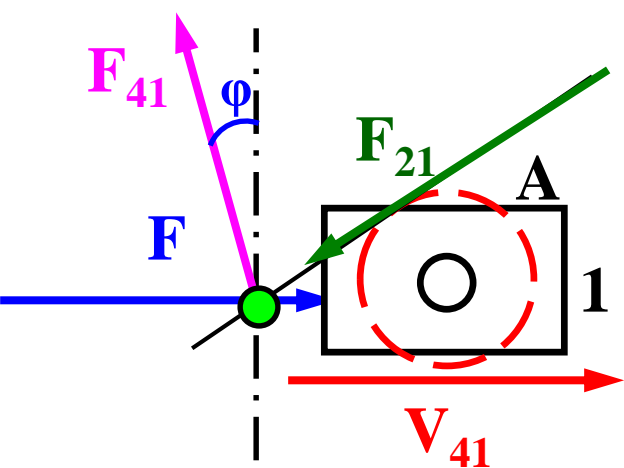
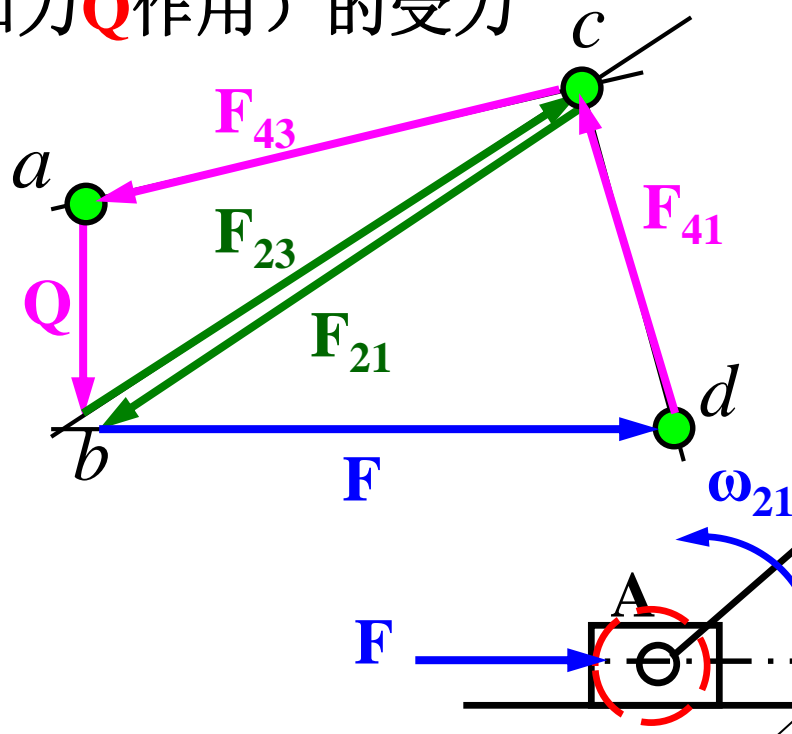
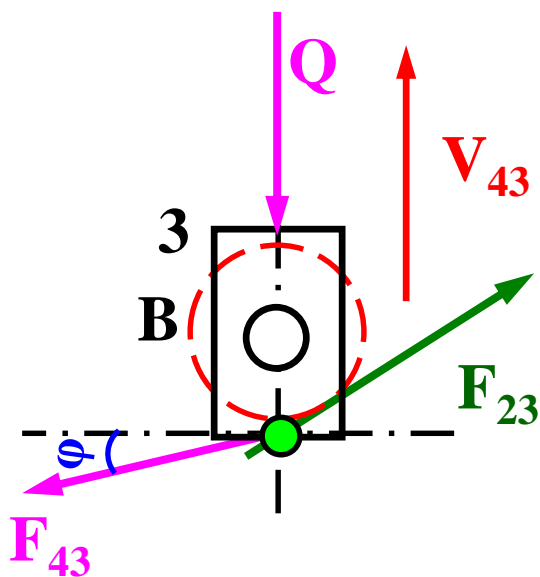
$$\phi = \arctan f$$

**2** 作第2位置图分析  
相对运动

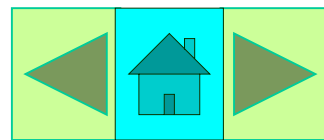
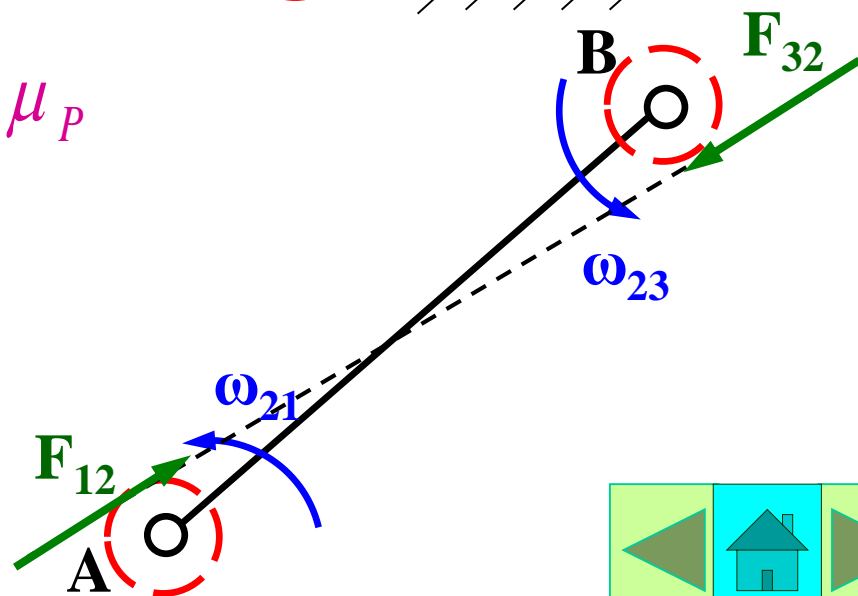
**3** 分析二力杆2的受力



#### 4 分析滑块3（受已知力 $Q$ 作用）的受力



$$F = \overline{bd} \cdot \mu_p$$



**例4-4** 在图示的摆动凸轮机构中，已知机构各部尺寸和作用在摆杆3上的外载荷 $Q$ 、各转动副的轴径半径 $r$ 和当量摩擦系数 $f_v$ 、摩擦系数 $f$ ，凸轮2的转向如图所示。试求图示位置作用在凸轮2上的的驱动力矩 $M$ 。

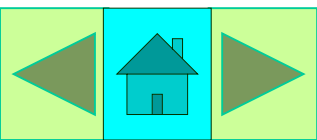
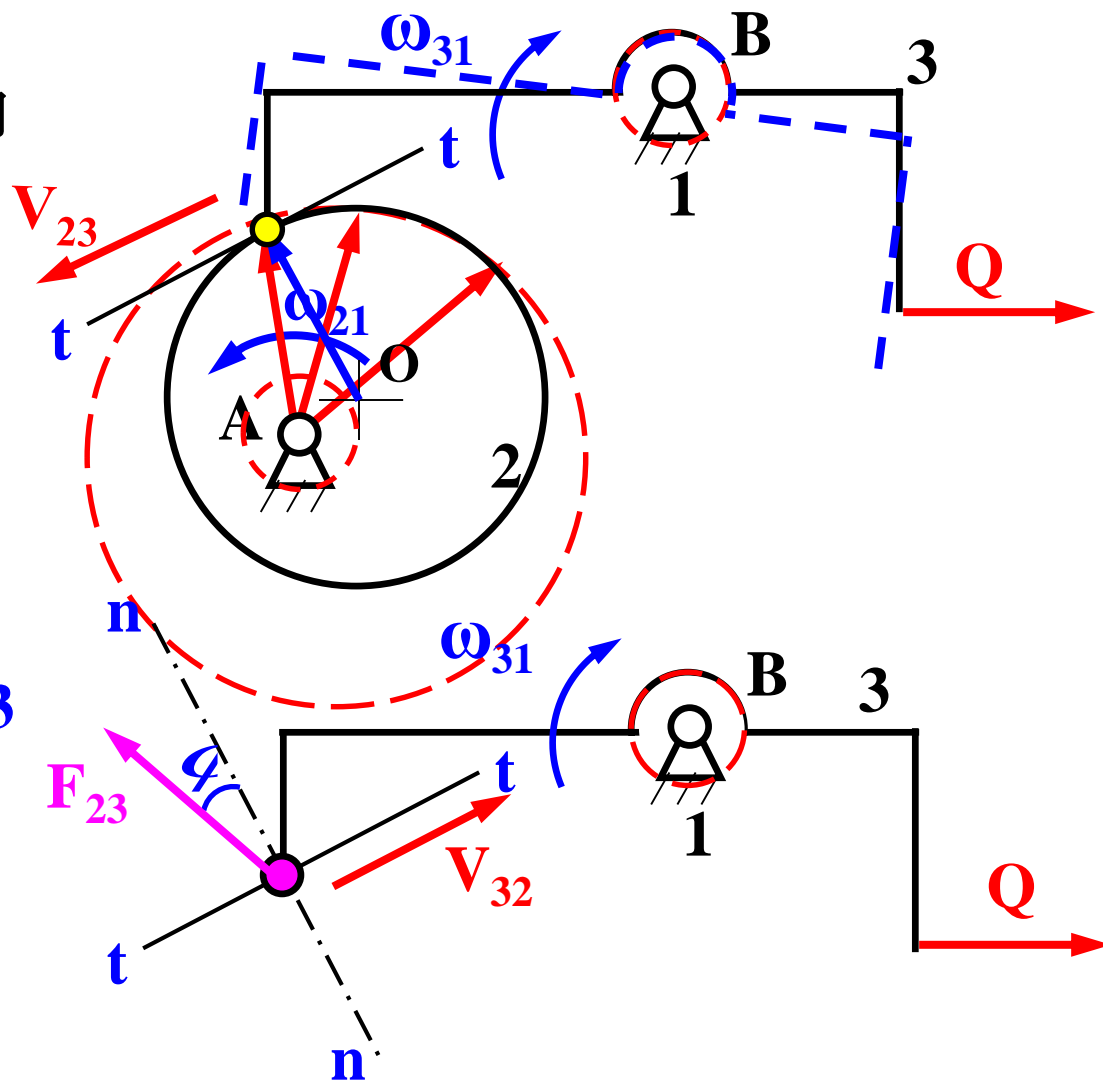
**解：1** 求摩擦圆和摩擦角

$$\rho = r \cdot f_v$$

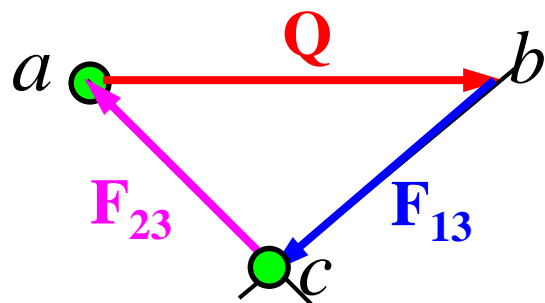
$$\phi = \arctan f$$

**2** 作第2位置图分析  
相对运动

**3** 从已知力 $Q$  作用的杆件3  
开始分析受力



### 3 从已知力 $Q$ 作用的杆件3 开始分析受力



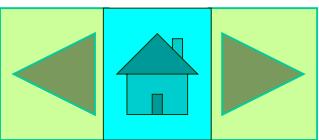
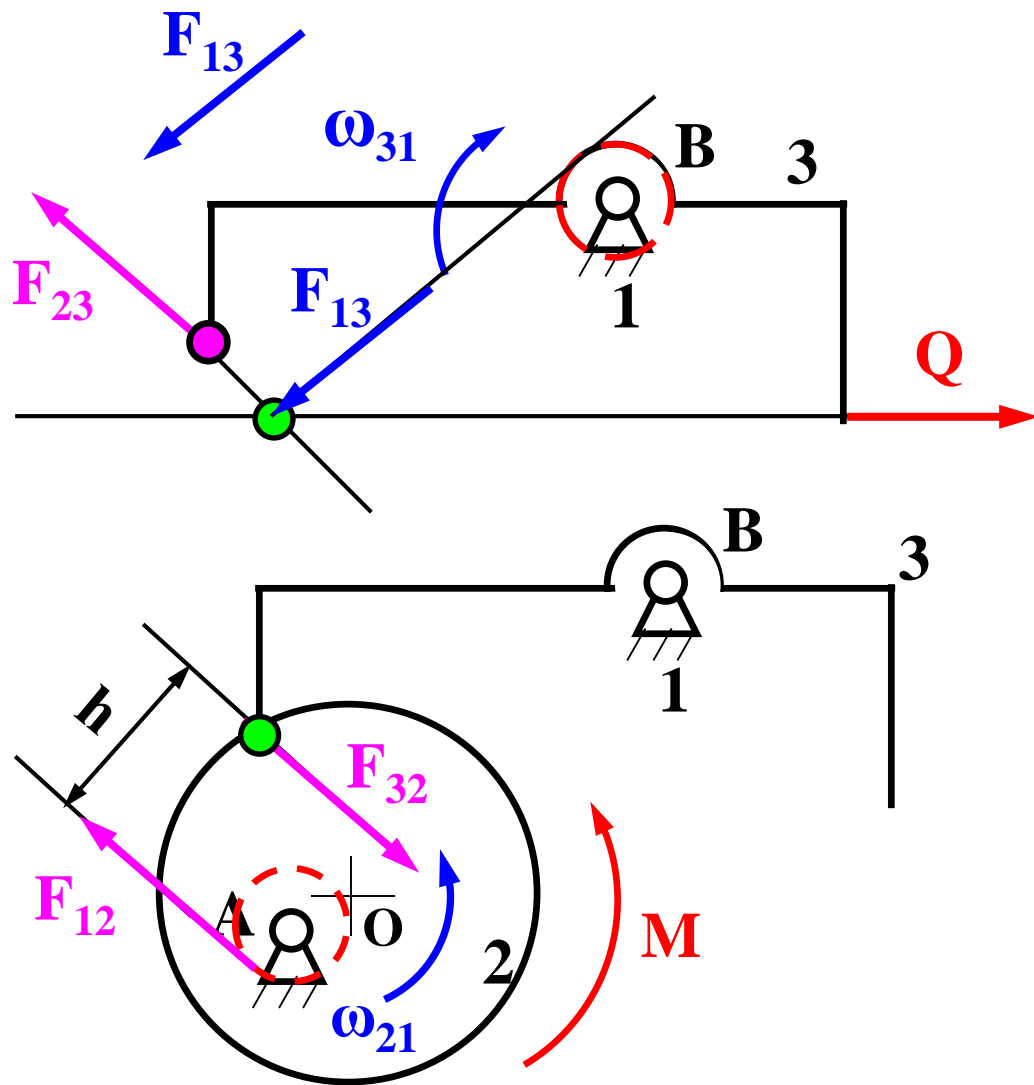
$$F_{23} = \overline{ca} \cdot \mu_p$$

### 4 分析构件2受力

$$\sum M_{i=0}$$

$$M - F_{32} \times h = 0$$

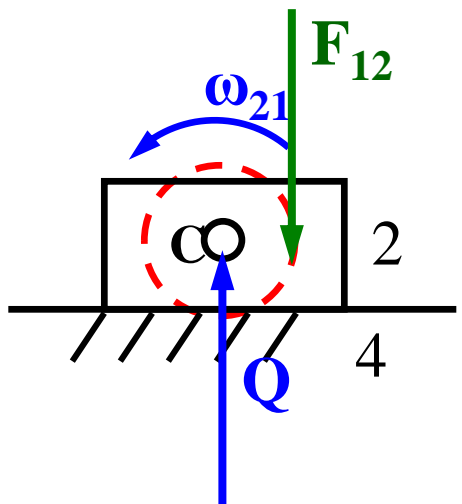
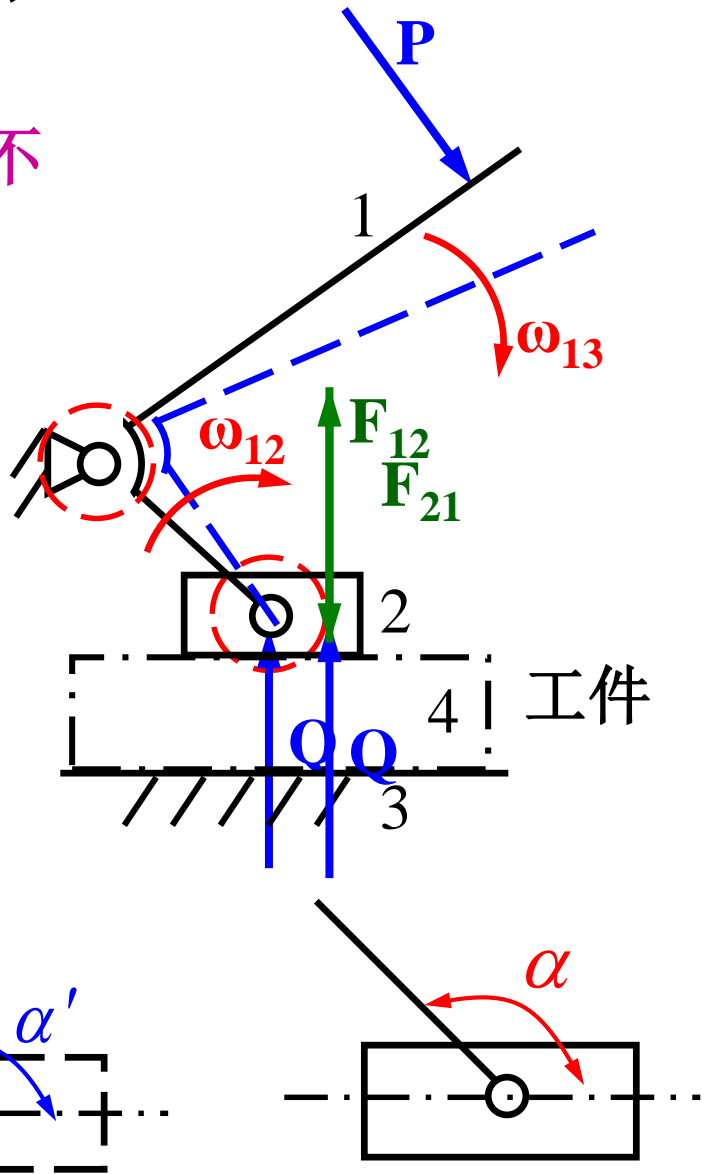
$$M = F_{32} \times h$$



**例4-5**图示为一夹紧机构，已知各构件尺寸。

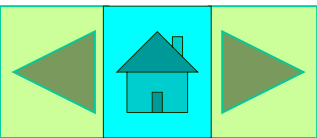
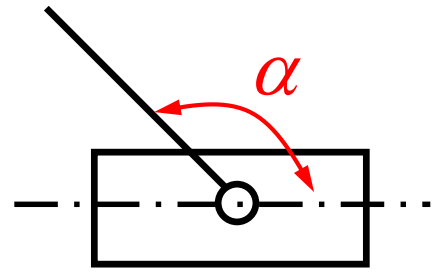
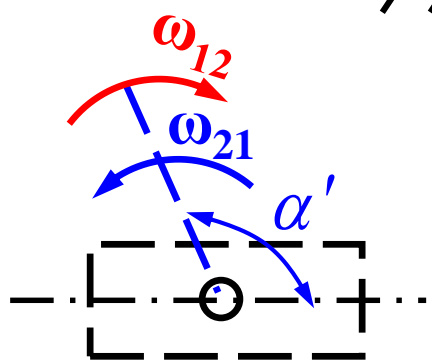
摩擦圆如图中的虚线小圆。试求欲产生夹紧力 $Q=100\text{N}$ 时所需动力 $P$ （不计构件2与工件4之间的摩擦力）。

- 解： 1 作第2 位置图分析相对运动关系  
 2 取有已知力作用的滑块分析受力。



$$F_{12} = Q$$

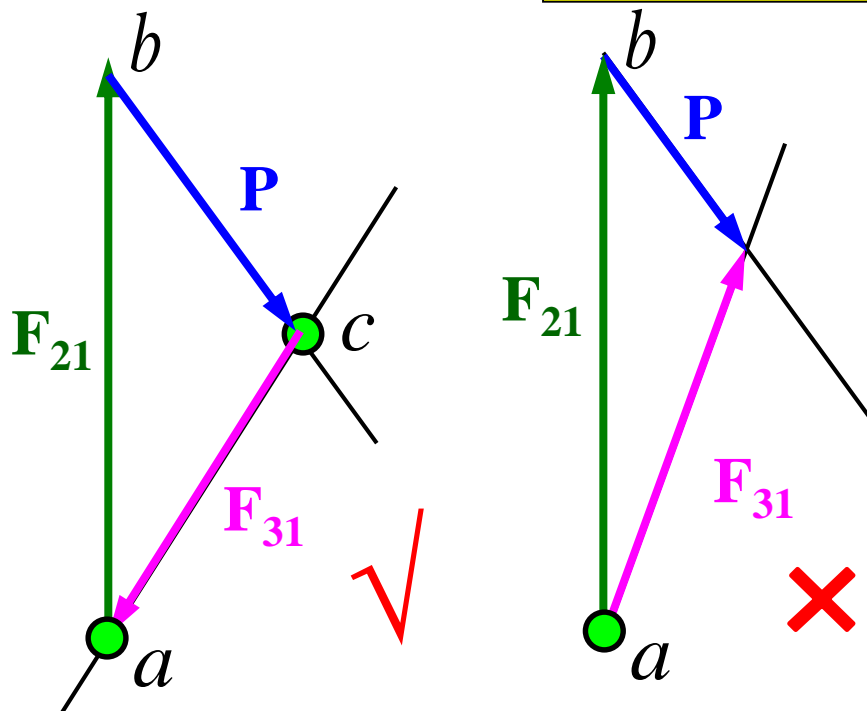
$$F_{12} = F_{21}$$



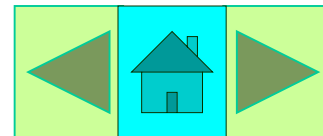
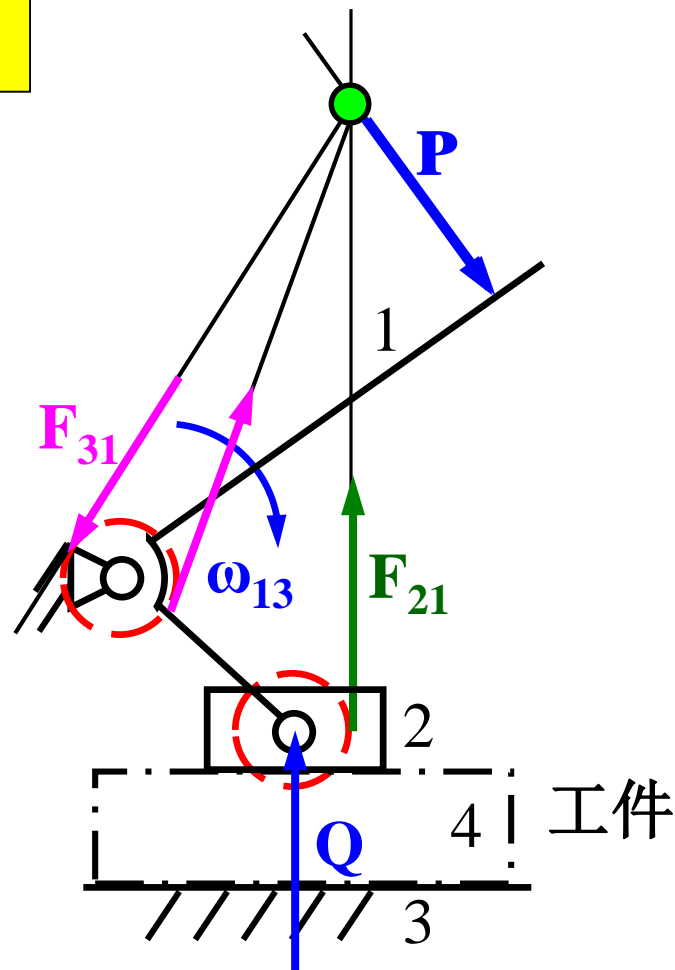


### 3 分析杆件1受力

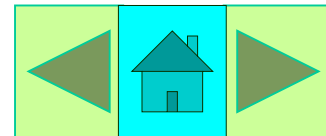
$$P = \overline{bc} \cdot \mu_P$$



注意：考虑摩擦的受力分析中，未知反力的方向不能任意假设，而应根据相对运动方向准确确定。

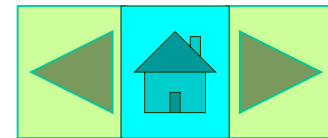


注意 按考虑摩擦求解受力时：



- 1 做第二位置图 以确定相对转向关系；
- 2 如构件中存在二力杆, 应先从二力杆件入手分析受力, 若无二力杆, 则先从受已知力作用的构件开始分析受力；
- 3 转动构件在铰链点处所受的反力对铰链点之矩应与构件相对角速度相反, 移动构件受到的反力应与移动构件的相对速度偏转 $90^\circ + \phi$ 角；
- 4 与不考虑摩擦时的受力分析不同, 考虑摩擦时的受力分析中, 未知反力的方向判定必须明确, 应结合力多边形进行判定.

## § 4-4 不考虑摩擦时机机构的受力分析



首先 应将机构拆成若干个杆组逐个进行受力分析。

构件组应满足的静定条件—

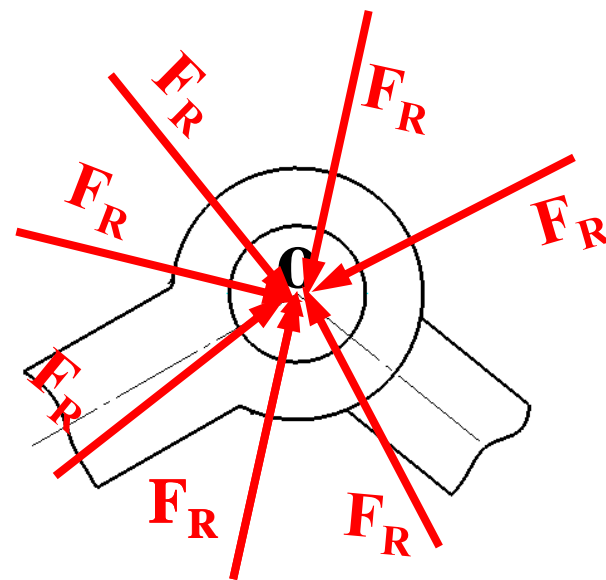
对构件组所能列出的独立力平衡方程数应等于构件组中所有力的未知要素数目。

### 1 构件组的静定条件

不考虑摩擦时各种运动副反力

转动副反力 $F_R$ 未知要素两个：

{ 大小：未知  
方向：未知



$F_R$ 通过转动副中心

移动副反力 $F_R$ 未知要素两个：

- 大小：未知
- 作用点位置：未知

高副反力 $F_R$ 未知要素一个：

仅大小未知

由上述可知：低副反力未知要素有两个；高副反力未知要素有一个。

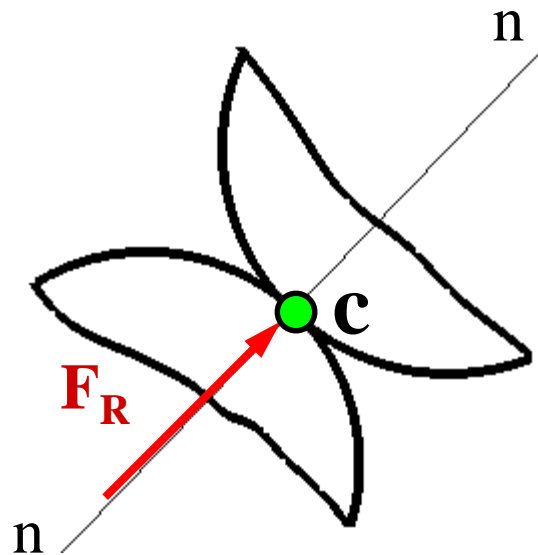
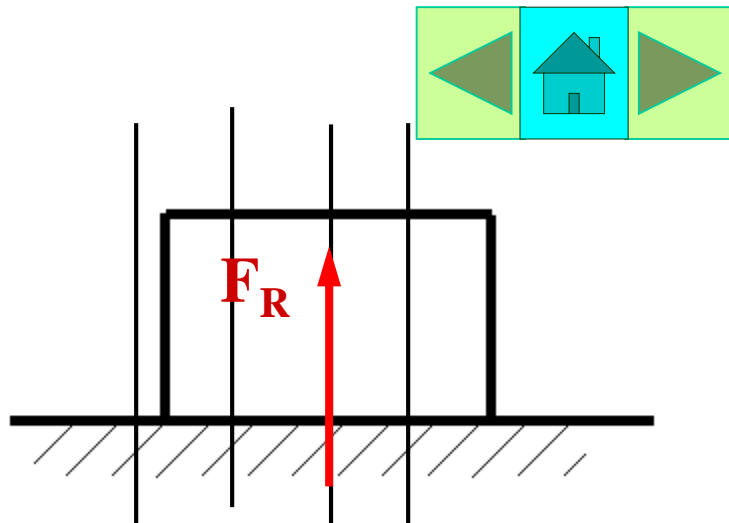
若构件组中有 $P_L$ 个低副、 $P_H$ 个高副，则共有 $2P_L + P_H$ 未知要素。

一个构件的独立力平衡方程数：3个

$n$ 个构件的独立力平衡方程数： $3n$ 个

构件组的静定条件为：

$$3n = 2P_L + P_H$$



**例1** 在图示的凸轮机构中，已知作用在从动件2上的载荷

$P_2 = 100\text{ N}$  , 又知:  $l_{AO} = 30\text{ mm}$  ,  $R = 60\text{ mm}$  ,  $\beta = 30^\circ$  ,  $\angle OAC = 90^\circ$  ,

试用图解法求各运动副中的反力及作用在**凸轮1**上的平衡力矩。

构件重量及惯性力不计。

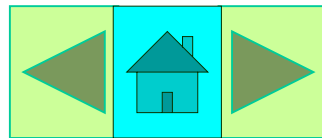
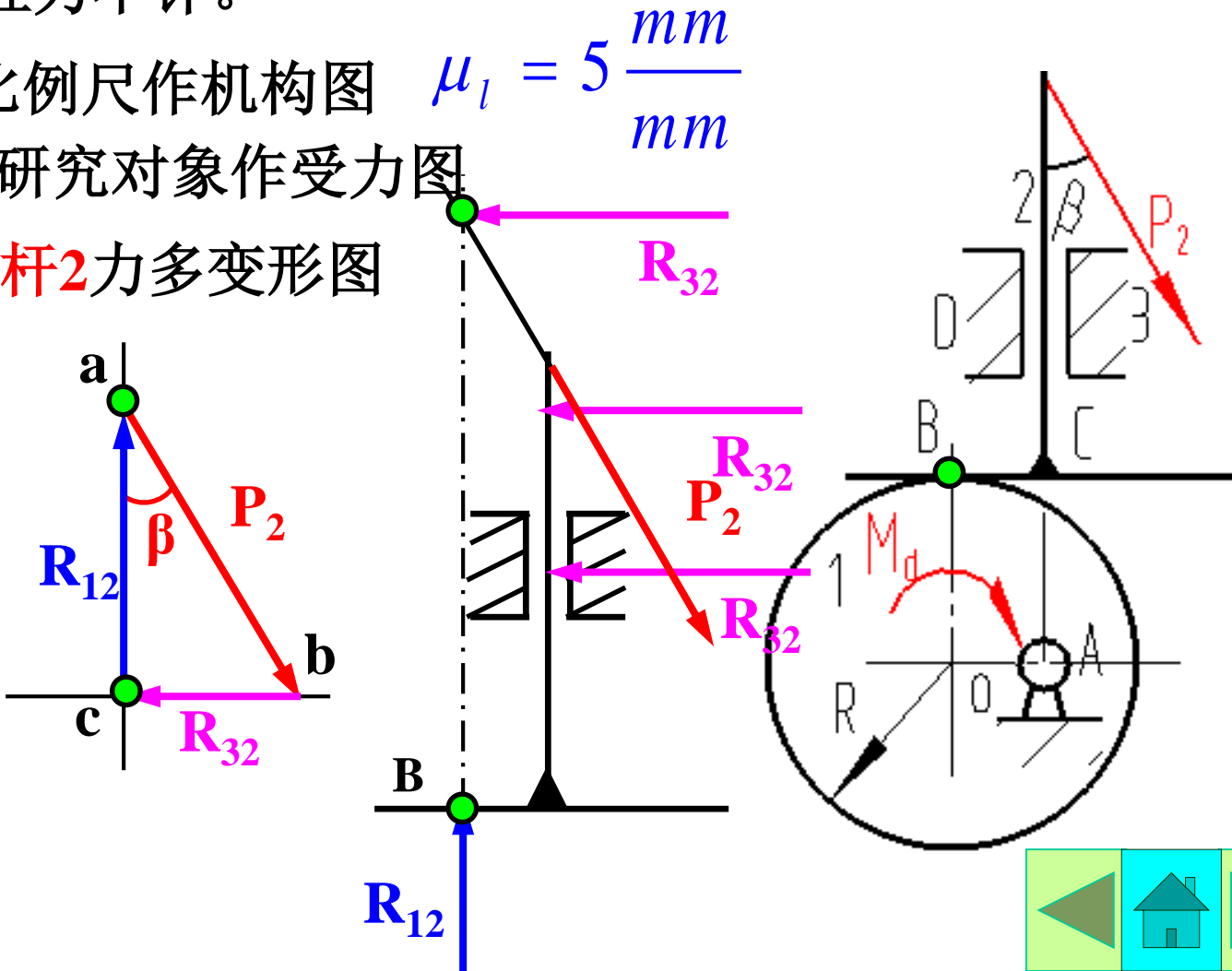
**解:** 1. 取长度比例尺作机构图

## 2. 取从动杆2为研究对象作受力图

## 取力比例尺作杆2力多变形图

$$\mu_P = 20 \frac{N}{mm}$$

$$\begin{aligned} R_{12} &= \overline{ac} \cdot \mu_P \\ &= P_2 \cos \beta \\ &= 866 N \end{aligned}$$

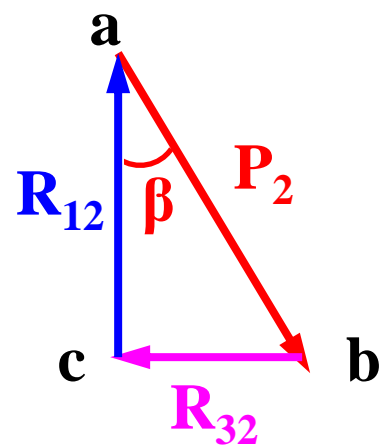
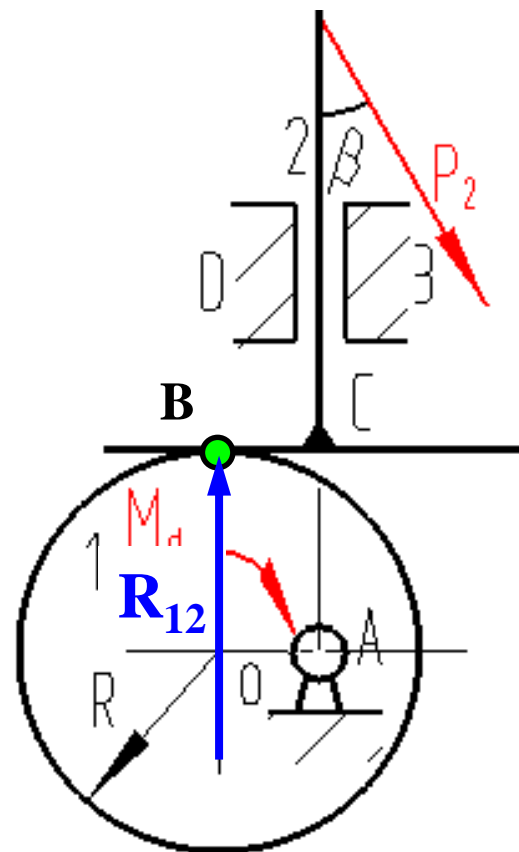
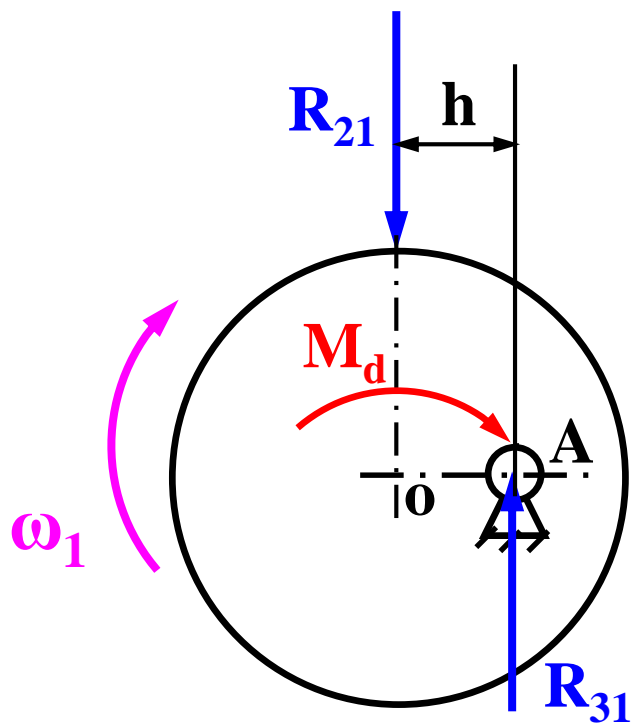
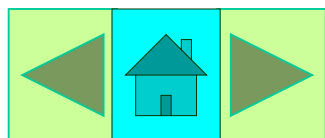


### 3. 取凸轮为研究对象做其受力图

$$R_{21} = R_{12} = R_{31}$$

$$M_d = R_{21} \cdot h \cdot \mu_l$$

$$= 26 N \cdot m$$



**例2** 在图示摆动导杆机构中，已知： $l_{AB} = 300\text{ mm}$ ， $\phi_3 = 30^\circ$ ， $\phi_1 = 90^\circ$ ，  
加于导杆3的力矩  $M_3 = 60\text{ N}$ ，试求图示位置各运动副中的反  
和应加于曲柄1上的平衡力矩  $M_d$ 。

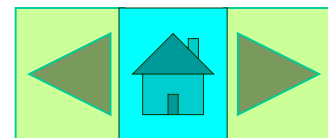
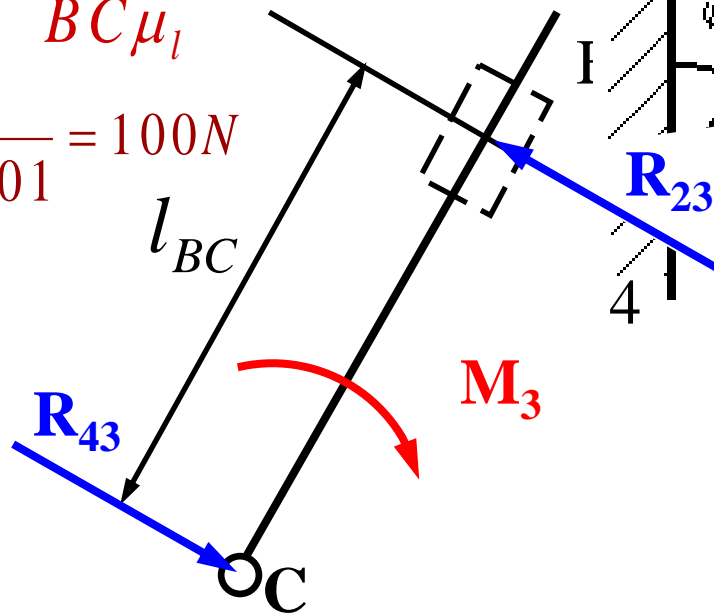
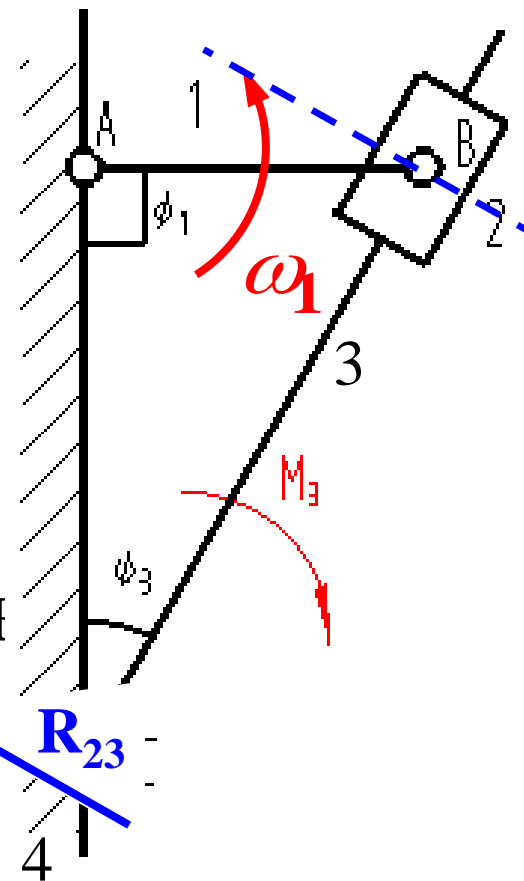
**解：** 1 取长度比例尺 作机构图  $\mu_l = 0.1 \frac{\text{mm}}{\text{mm}}$

2 取滑块为研究对象

3 取从动杆3为研究对象，分析其受力。

$$M_3 = R_{23} \cdot l_{BC} \quad R_{23} = \frac{M_3}{l_{BC}} = \frac{60}{BC \mu_l} = \frac{60}{60 \times 0.01} = 100\text{ N}$$

$$R_{12} = R_{32} = R_{23} = 100\text{ N}$$

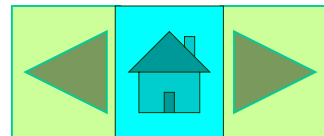
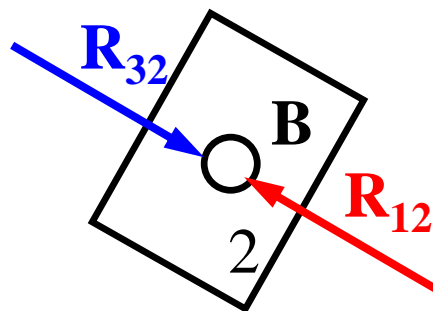
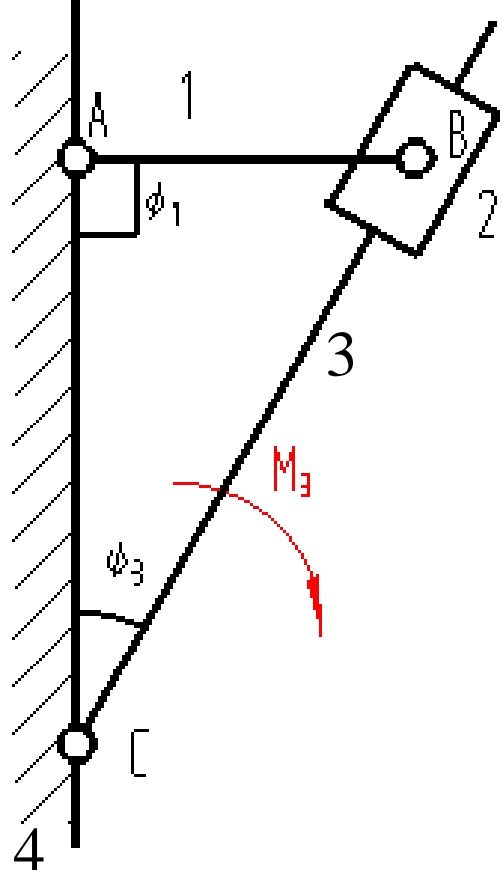
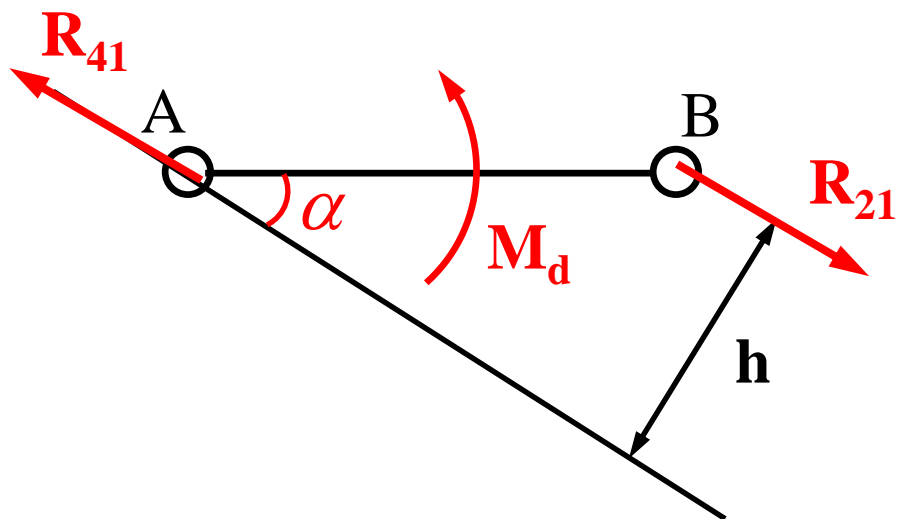


#### 4 取杆1为研究对象

$$R_{12} = R_{21} = 100 \text{ N}$$

$$\sum M_i = 0$$

$$\begin{aligned} M_d &= R_{21} \cdot h \\ &= R_{21} \cdot l_{AB} \cdot \sin \alpha \\ &= 100 \times 0.3 \times \sin 30^\circ = 15 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$





## 2 用图解法作机构的动态静力分析

**动态静力分析**—根据达朗贝尔原理，假想将惯性力当作一般外力加在相应的构件上，采用**静力学**方法进行的受力分析称作**动态静力分析**

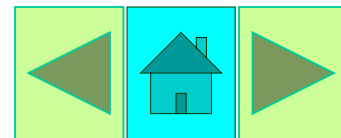
**步骤：**

- 1) 先求出各构件的惯性力；
- 2) 将机构拆分成杆组和平衡力作用的构件进行受力分析。

**顺序：**

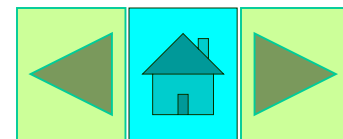
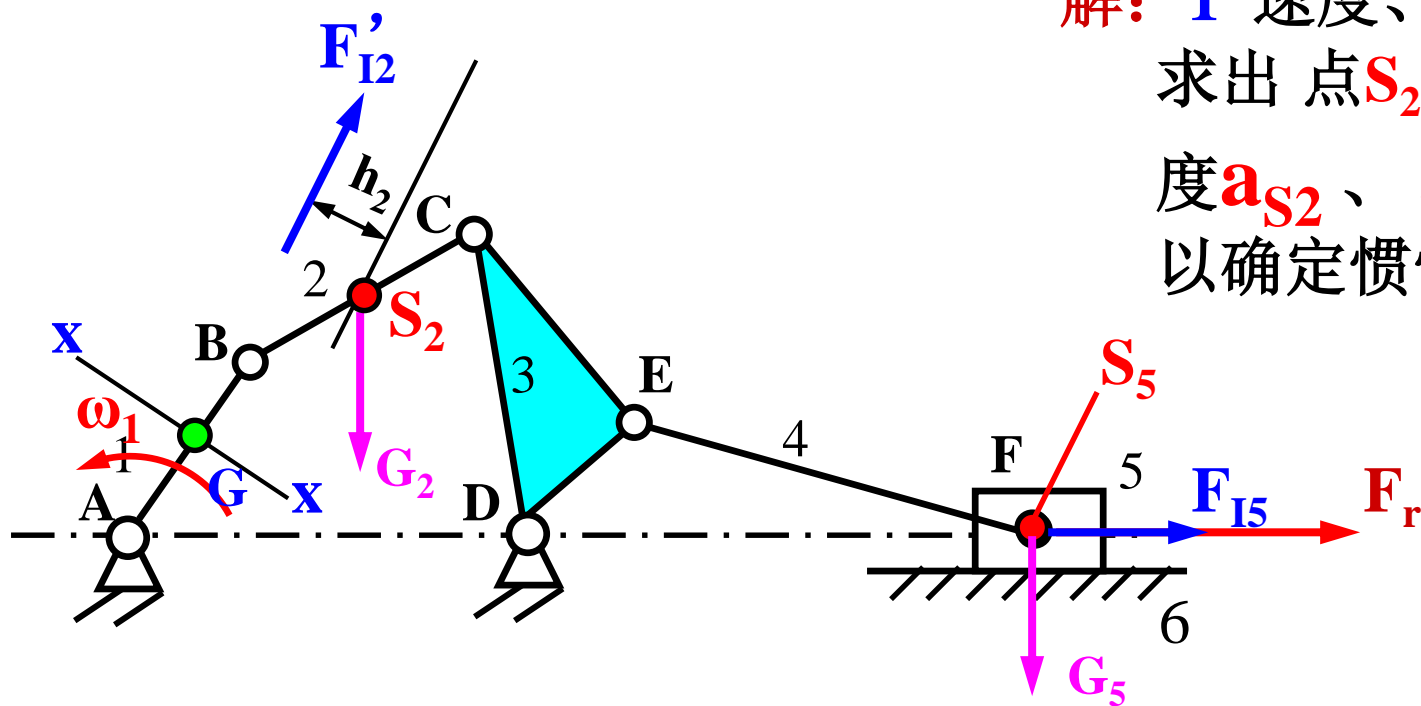
从**外力全部已知**的构件开始→**未知外力**作用的构件

※ 本节要求自学内容：教材 **P954** 例题**4-2**



**例4-2**图示为一六杆机构的运动简图。设已知各构件的尺寸，**连杆2**的重量 **$G$** ，转动惯量 **$J_{S_2}$** （质心 **$S_2$** 在**杆2**的中点）滑块**5**的重量 **$G_5$** （质心 **$S_5$** 在**F**处）其他构件的重量和转动惯量不计；原动件**1**以等角速度 **$\omega_1$** 回转；作用于**滑块5**上**F**点的生产阻力为 **$F_r$** 。求在图示位置时，各运动副的反力，以及需加在构件**1**上**G**点处沿**xx**方向的平衡力 **$F_b$** 。

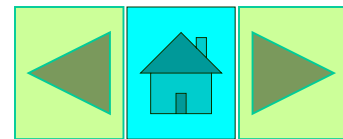
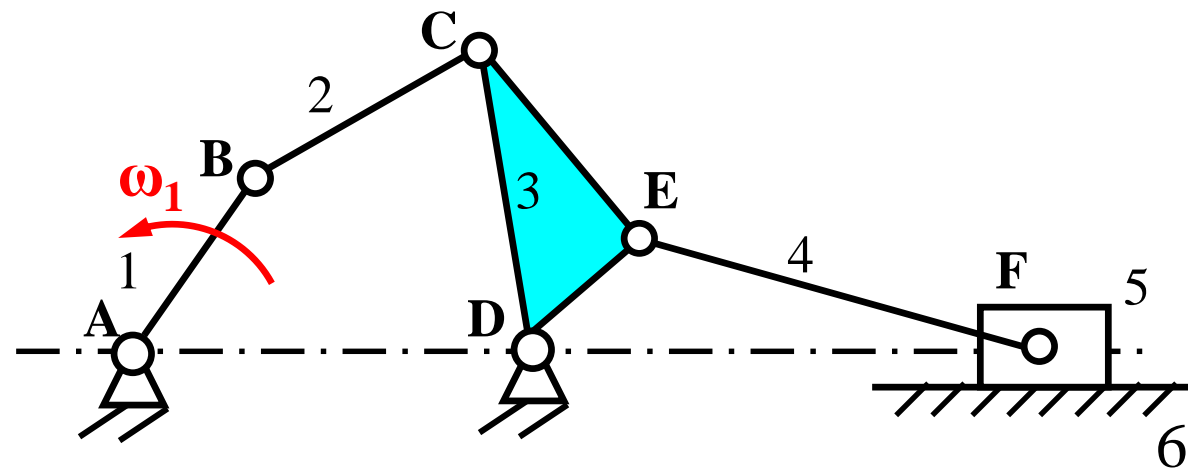
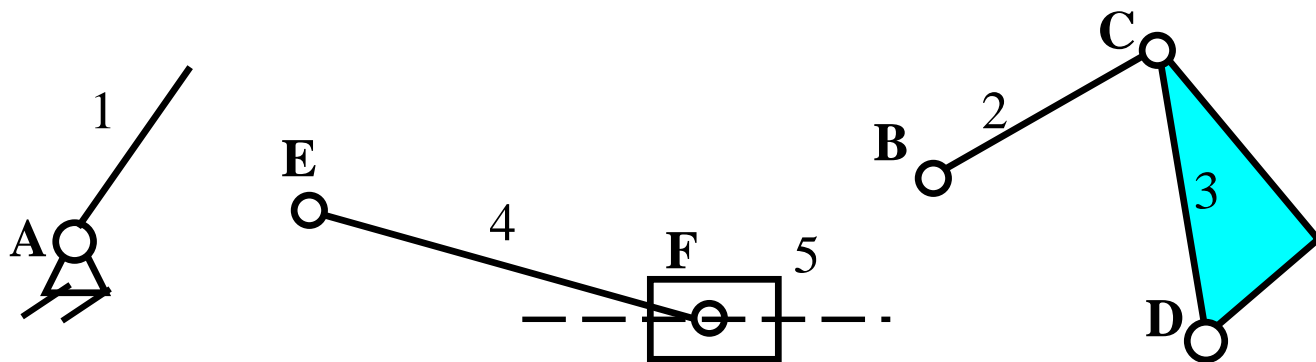
**解：**1 速度、加速度分析  
 求出点 **$S_2$** 、 **$S_5$** 的加速度  
 **$a_{S_2}$** 、 **$a_{S_5}$** （略）。  
 以确定惯性力 **$F_{I2}$** 、 **$F_{I5}$** 。



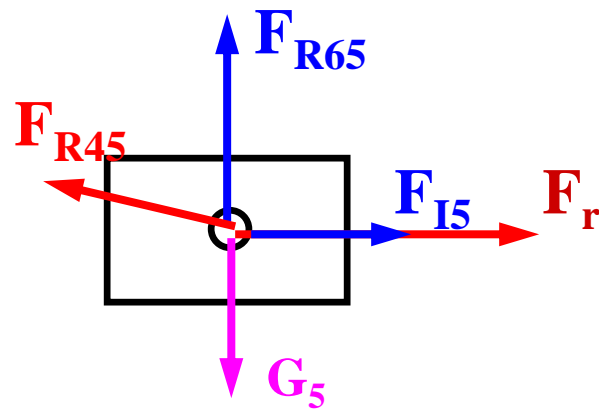
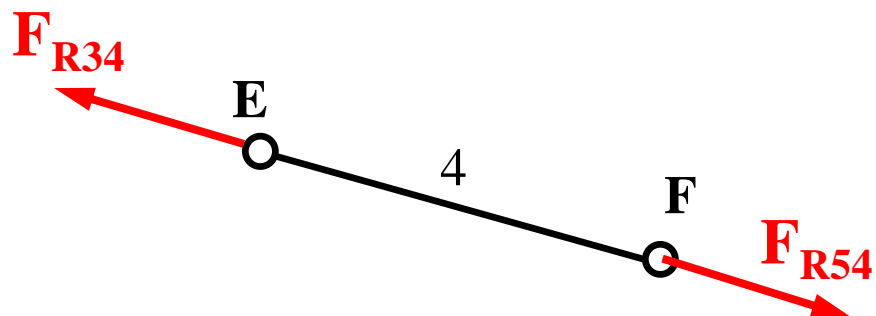
(2) 确定各构件的惯性力、惯性力矩 (略)

(3) 机构的动态静力分析

先拆分杆组

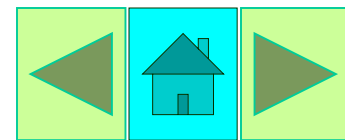
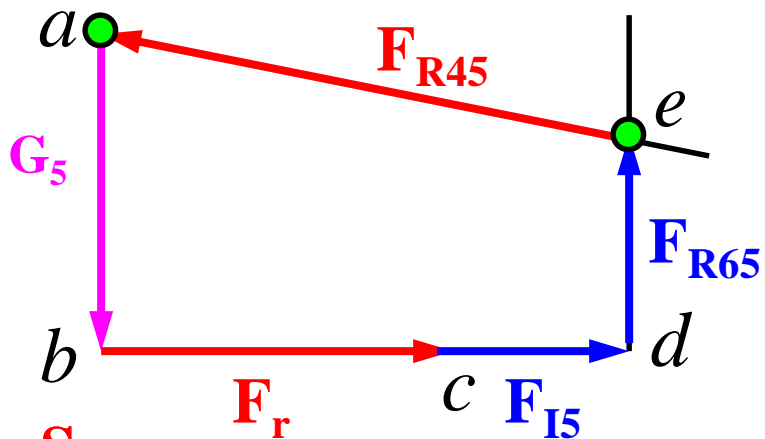
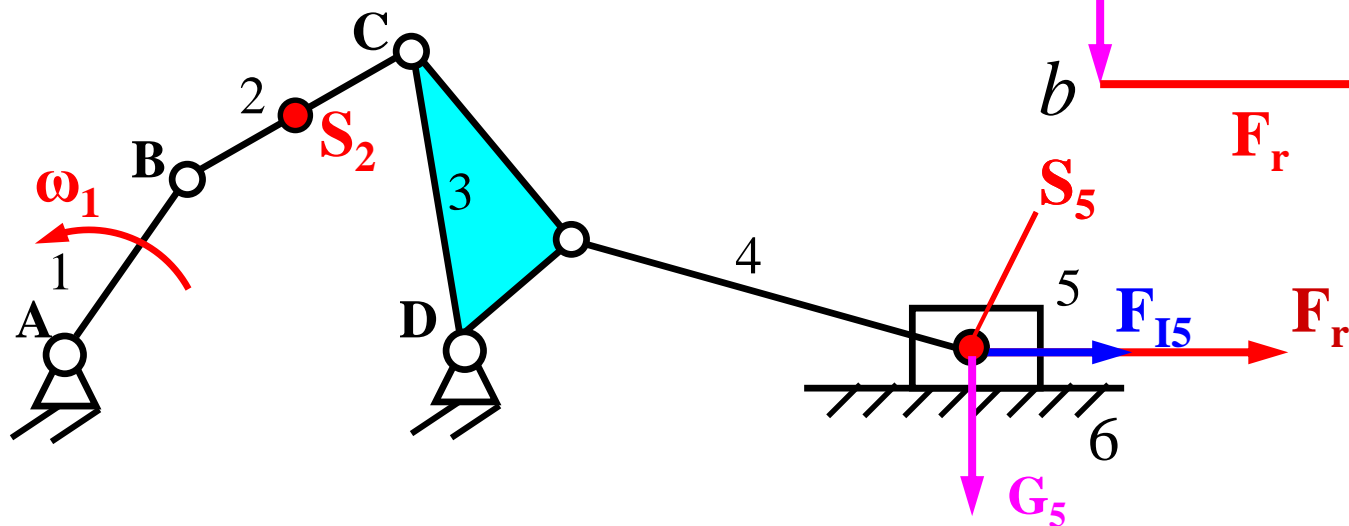


# 分析受力



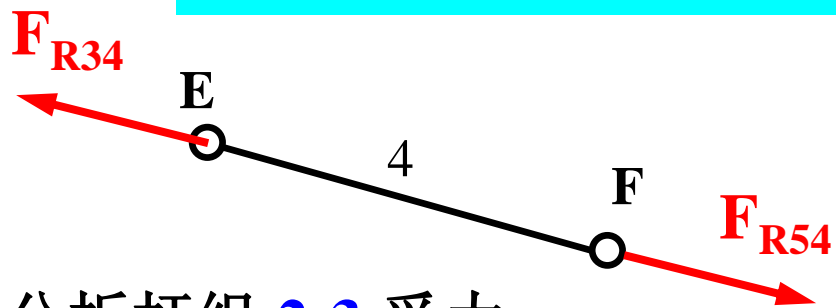
$$F_{R34} = F_{R54} = F_{R45}$$

$$G_5 + F_r + F_{I5} + F_{R45} + F_{R65} = 0$$





$$F_{R34} = F_{R54} = F_{R45}$$



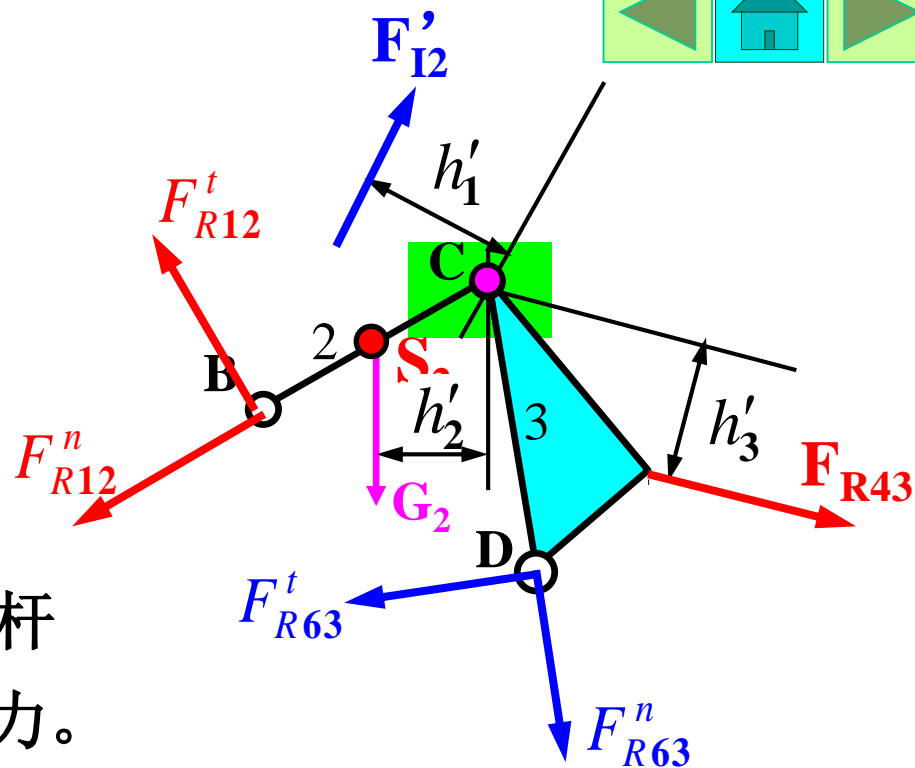
分析杆组 **2-3** 受力

(1) 先将**B**、**C**点的反力分解成沿杆线作用的和垂直于干线方向的反力。

(2) 再分别将构件 **2**、**3** 向**C**点取矩  
根据力矩平衡条件可得：

$$G_2 \cdot h'_2 - F'_{I2} \cdot h'_1 - F_{R12}^t \cdot l_2 = 0 \Rightarrow F_{R12}^t = (G_2 \cdot h'_2 - F'_{I2} \cdot h'_1) / l_2$$

$$F_{R63}^t \cdot l_{CD} - F_{R43} \cdot h'_3 = 0 \Rightarrow F_{R63}^t = F_{R43} \cdot h'_3 / l_{CD}$$



**注意：**未知反力的方向可以任意假设

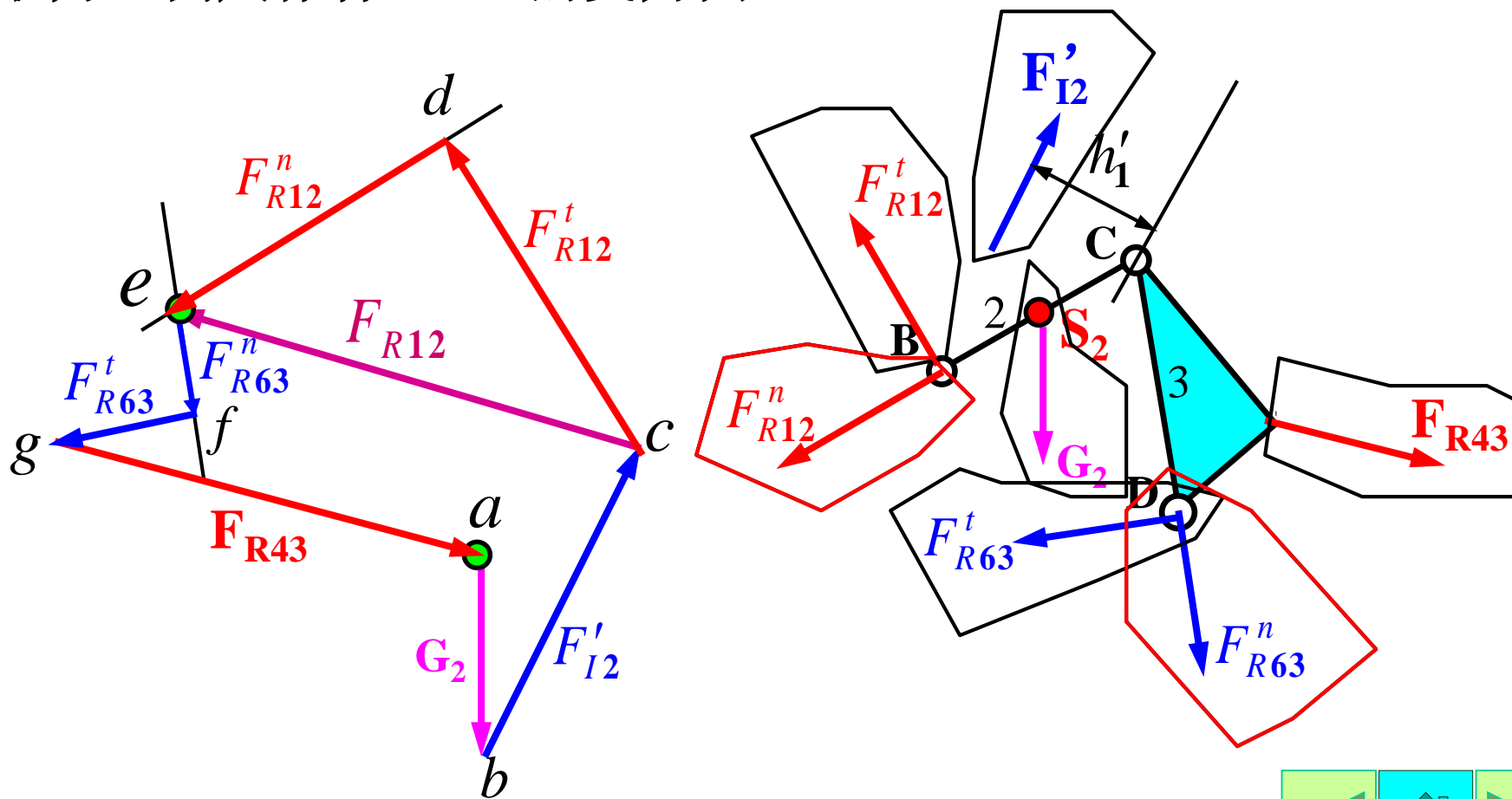
杆组 **2-3** 的平衡方程:

$$F_{R63}^n + F_{R63}^t + F_{R43} + F_{I2}' + G_2 + F_{R12}^t + F_{R12}^n = \mathbf{0}$$

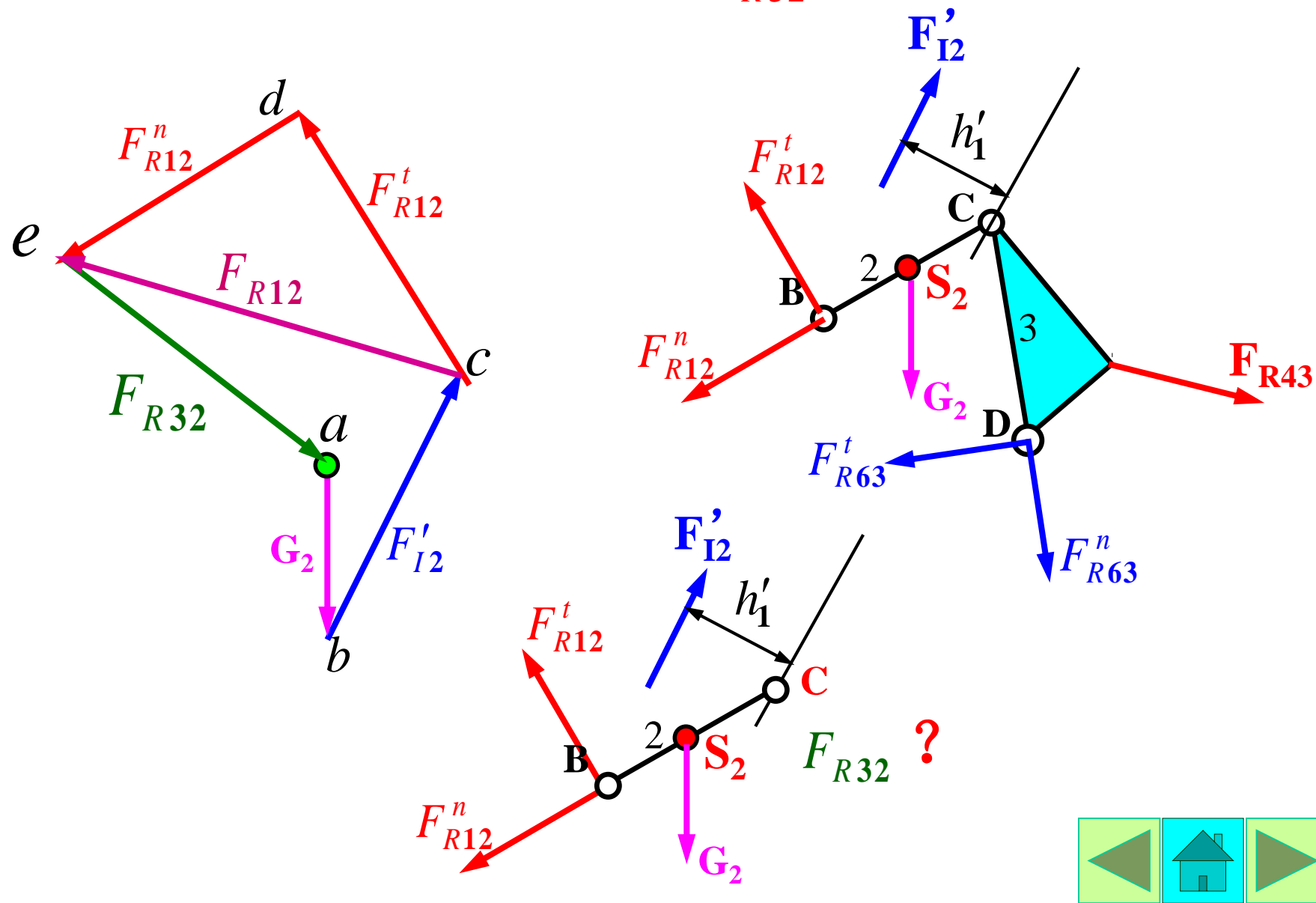
?

?

取力比例尺作杆组 **2-3** 的受力图:



再拆开杆 2 作受力图求出C点反力  $F_{R32}$



取杆件 **1** 分析受力

$$F_b = \overline{bc} \cdot \mu_p$$

