Laboratorio Avanzado I
Tarea No. 2

Universidad de Guanajuato,
División de Ciencias e Ingenierias.
Pedro Eduardo Medina Gonzalez

15 de febrero de 2024

1 Demostrar las expresiones para la ordenada al origen y la pendiente del modelo lineal en el método de mínimos cuadrados

Para comenzar recordamos que laa característica principal para obtener estos datos es utilizando la ecuación del residuo:

$$R^2 = \sum_{i=0}^{N} [Y_i - f(X_i, a_1, a_2, .., a_r)]^2 \tag{1}$$

Pero asumiendo una regresión de tipo lineal, entonces podemos considerar que $f(X_i, a_1, a_2, --a_r) = aX_i + b$, por lo tanto nos queda:

$$R^2 = \sum_{i=0}^{N} [Y_i - (aX_i + b)]^2 \tag{2}$$

Entonces el problema se reduce a minimizar la expresión para los parametros del residuo en este caso son

$$\frac{\partial R^2}{\partial a} = 0, \; \frac{\partial R^2}{\partial b} = 0 \tag{3}$$

Para la primer ecuación la derivada nos queda:

$$\frac{\partial R^2}{\partial a} = \sum_{i=0}^{N} -2X_i[Y_i - (aX_i + b)] \tag{4}$$

$$\frac{\partial R^2}{\partial a} = -2\Big(\sum_{i=0}^{N} Y_i X_i - \sum_{i=0}^{N} aX_i^2 - \sum_{i=0}^{N} bX_i\Big) \tag{5}$$

Y a su vez para la otra parcial, tenemos:

$$\frac{\partial R^2}{\partial b} = -\Big(\sum_{i=0}^{N} Y_i - \sum_{i=0}^{N} aX_i - \sum_{i=0}^{N} b\Big) \tag{6}$$

Esta última ecuación es igual a:

$$\frac{\partial R^2}{\partial b} = -\Big(\sum_{i=0}^{N} Y_i - \sum_{i=0}^{N} aX_i - Nb\Big)$$

Ahora a la ecuación (5) la multiplicamos por N y a la ecuación (6) por $\sum_{i=0}^{N} X_i$ nos quedan, recordando que están igualadas a cero:

$$N\sum_{i=0}^{N} Y_i X_i - Na\sum_{i=0}^{N} X_i^2 - Nb\sum_{i=0}^{N} X_i = 0 \tag{7}$$

$$\sum_{i=0}^{N} X_i \sum_{i=0}^{N} Y_i - a\sum_{i=0}^{N} X_i \sum_{i=0}^{N} X_i - Nb\sum_{i=0}^{N} X_i = 0 \tag{8}$$

O bien, puestas las ecuaciones (7) y (8) de otra manera:

$$\sum_{i=0}^{N} X_i \sum_{i=0}^{N} Y_i X_i = Na\sum_{i=0}^{N} X_i^2 + Nb\sum_{i=0}^{N} X_i \tag{9}$$

$$\sum_{i=0}^{N} X_i^2 \sum_{i=0}^{N} Y_i = a\Big(\sum_{i=0}^{N} X_i\Big)^2 + Nb\sum_{i=0}^{N} X_i \tag{10}$$

Ahora restando las ecuaciones (9) y (10) nos queda:

$$\sum_{i=0}^{N} X_i^2 \sum_{i=0}^{N} Y_i - \sum_{i=0}^{N} X_i \sum_{i=0}^{N} X_i Y_i = a\Big(\sum_{i=0}^{N} X_i\Big)^2 - Na\sum_{i=0}^{N} X_i^2 \tag{11}$$

Despejando el parametro $<< a >>$ de la ecuación (11):

$$a = \frac{\sum_{i=0}^{N} X_i^2 \sum_{i=0}^{N} Y_i - \sum_{i=0}^{N} X_i \sum_{i=0}^{N} X_i Y_i}{\left(\sum_{i=0}^{N} X_i\right)^2 - N \sum_{i=0}^{N} X_i^2} \tag{12}$$

Rescatando nuestra ecuación (6)

$$\sum_{i=0}^{N} Y_i - \sum_{i=0}^{N} a X_i - N b = 0$$

Podemos despejar el valor de b

$$b = \frac{\sum_{i=0}^{N} Y_i}{N} - a \frac{\sum_{i=0}^{N} X_i}{N}$$

El primer término del lado derecho de la ecuación es la definición del valor promedio de Y_i ($\bar{Y}$), analogo para $\bar{X}$. Sustituyendo el valor de $<< a >>$ tenenmos como resultado:

$$b = \frac{\sum_{i=0}^{N} X_i Y_i - N \bar{X} \bar{Y}}{\left(\sum_{i=0}^{N} X_i\right)^2 - N \sum_{i=0}^{N} X_i^2} \tag{13}$$