

**ELEMENTOS DE APOIO ÀS AULAS DE**

**INTRODUÇÃO À  
INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL**

**Mestrado em Engenharia Informática**

**RUY ARAÚJO DA COSTA**

**Departamento de Matemática**

**F C T - U N L**

**2011 / 2012**

## **NOTA PRÉVIA**

Estes "Elementos de Apoio às Aulas de **Introdução à Investigação Operacional**" destinam-se aos alunos do Mestrado em Engenharia Informática da F.C.T. - U.N.L., devendo ser encarados exclusivamente como 'elementos de apoio' às aulas da respectiva disciplina e não como 'bibliografia recomendada'.

Estes 'Elementos de Apoio' visam atingir alguns objectivos, dos quais se destaca:

- dotar os alunos de um 'texto-base' correspondente à matéria leccionada na unidade curricular "**Introdução à Investigação Operacional**)";
- diminuir as tarefas de 'cópia de informação' na sala de aula, de modo a permitir uma utilização mais proveitosa do tempo lectivo;
- facultar aos alunos comentários complementares às exposições feitas nas aulas, de modo a facilitar a apreensão dos conceitos apresentados.

Assim, estes 'Apontamentos' não se substituem à Bibliografia recomendada ! O autor considera-os como uma via para facilitar a compreensão das matérias expostas e, um convite para explorar a Bibliografia recomendada.

O autor desde já agradece os comentários que possam ser feitos para melhorar estes "Elementos de Apoio às Aulas de **Introdução à Investigação Operacional**".

Ruy Araújo da Costa

F.C.T. - U.N.L., Setembro de 2011.

## **BIBLIOGRAFIA**

- **Programação Linear (Vol. 1, 2)** (1984), Ramalhete *et al* - Mc Graw Hill
- **Investigação Operacional** (1996), Valadares Tavares *et al* - Mc Graw Hill
- **Introduction to Operations Research** (1990 - 5<sup>a</sup>Ed.), Hillier, Lieberman - Mc Graw Hill
- **Operations Research - An Introduction**(1992 - 5<sup>a</sup> Ed.) Taha - Prentice Hall

## **ÍNDICE**

	pág
<b>PROGRAMAÇÃO LINEAR</b>	<b>5</b>
I - Introdução à Programação Linear	6
II - Formulação de Problemas de Programação Linear	10
III - Resolução de Problemas de Programação Linear - o Método Gráfico	27
IV - Programação Linear: Conceitos Fundamentais	34
V - Introdução ao Algoritmo Simplex	42
VI - O Algoritmo Simplex Primal	53
VII - Formulação Matricial do Simplex	67
VIII - O Algoritmo Simplex Revisto	78
IX - Análise de Sensibilidade / Pós-Optimalidade	82
X - Utilização de variáveis binárias na Formulação de Problemas de Programação Linear Mista	97
XI - Programação Linear Inteira: Algoritmo de Branch and Bound	113
XII - O Problema dos Transportes – Algoritmos de resolução	122
XI - Conclusão	149
<b>TEORIA DA DECISÃO</b>	<b>150</b>
I - Introdução à Teoria de Decisão	151
I - Tomada de Decisão em Situações de Incerteza e em Situações de Risco	154
II - Decisões Sequenciais	161
III - Conclusão	176
<b>TEORIA DAS FILAS DE ESPERA</b>	<b>177</b>
I - Estrutura básica das Filas de Espera	178
II - A Distribuição Exponencial	181
III - O Processo de Nascimento e Morte	186
IV - Modelos de Filas de Espera baseados no Processo de Nascimento e Morte (Modelos com distribuições exponenciais)	190
V - Modelos envolvendo distribuições não exponenciais	208
VI - Modelos de Filas de Espera com Disciplina Prioritária	212
VII - Redes de Filas de Espera	215
VIII - Conclusão	219
IX - Bibliografia específica	219
<b>SIMULAÇÃO</b>	<b>220</b>
I - Introdução à Simulação	221
II - Alguns 'Aspectos Técnicos' da Simulação	232
III - Métodos de Geração de Números Pseudo-Aleatórios	241
IV - Algumas Aplicações da Simulação	254
Simulação Aplicada à Gestão de Recursos Hídricos	254
Simulação de Processos de Poisson	267
Introdução à Simulação de Filas de Espera	269
V - Conclusão	281

# **PROGRAMAÇÃO LINEAR**

## INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO LINEAR

Um problema geral de Programação Matemática pode apresentar-se na forma seguinte:

**Maximizar (ou Minimizar)  $F(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$**

**sujeito a:**

$$f_1(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) \{ \leq; \geq; = \} b_1$$

$$f_2(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) \{ \leq; \geq; = \} b_2$$

...

$$f_m(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) \{ \leq; \geq; = \} b_m$$

Se a função objectivo  $F$  e as restrições  $f_1, f_2, \dots, f_m$  forem funções lineares em relação às variáveis  $X_1, X_2, \dots, X_n$  estaremos perante um caso particular do problema anterior - um **problema de Programação Linear**:

**Maximizar (ou Minimizar)  $F = c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + c_3 \cdot X_3 + \dots + c_n \cdot X_n$**

**sujeito a:**

$$a_{11} \cdot X_1 + a_{12} \cdot X_2 + a_{13} \cdot X_3 + \dots + a_{1n} \cdot X_n \{ \leq; \geq; = \} b_1$$

$$a_{21} \cdot X_1 + a_{22} \cdot X_2 + a_{23} \cdot X_3 + \dots + a_{2n} \cdot X_n \{ \leq; \geq; = \} b_2$$

...

$$a_{m1} \cdot X_1 + a_{m2} \cdot X_2 + a_{m3} \cdot X_3 + \dots + a_{mn} \cdot X_n \{ \leq; \geq; = \} b_m$$

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \{ \geq 0; \leq 0; \in \mathbb{R} \}$$

O problema de Programação Linear anterior diz-se estar na **forma geral**, já que a função objectivo pode ser maximizada ou minimizada e as restrições poderão ser de três tipos ( $\leq; \geq; =$ ). Nesta forma, admite-se ainda que um problema de Programação Linear possa, para além das variáveis não negativas ( $X_j \geq 0$ ), apresentar variáveis não positivas ( $X_j \leq 0$ ), ou ainda variáveis livres ( $X_j \in \mathbb{R}$ ).

Se se pretender maximizar a função objectivo, sendo todas as restrições do tipo  $\leq$  e todas as variáveis forem não negativas ( $X_i \geq 0$ ), diz-se que o problema de Programação Linear está na **forma canónica**.

Se se pretender maximizar a função objectivo, sendo todas as restrições do tipo  $=$  e todas as variáveis forem não negativas ( $X_i \geq 0$ ), diz-se que o problema de Programação Linear está na **forma standard**.

No quadro seguinte resume-se o que se acabou de referir:

	Problema de Programação Linear na forma		
	geral	canónica	standard
<b>Função Objectivo</b>	Max ; Min	Max	Max
<b>Restrições</b>	$\leq ; \geq ; =$	$\leq$	$=$
<b>Variáveis</b>	$\geq 0 ; \leq 0 ; \in \mathbb{R}$	$\geq 0$	$\geq 0$

Para efeitos de resolução analítica de um problema de Programação Linear, muitas vezes é necessário que o problema esteja apresentado na sua forma mais "simples", isto é, na forma standard.

### • Transformação "Forma Geral" $\Rightarrow$ "Forma Canónica"

Consideremos o seguinte problema de Programação Linear, que se deseja exprimir na forma canónica:

$$\text{Minimizar } F = 9 \cdot X_1 - 5 \cdot X_2 + 4 \cdot X_3 - 8 \cdot X_4$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} 2 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 - 1 \cdot X_4 &\leq 50 \\ 1 \cdot X_1 - 2 \cdot X_2 + 6 \cdot X_3 + 3 \cdot X_4 &\geq 20 \\ 3 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 2 \cdot X_3 + 1 \cdot X_4 &= 15 \end{aligned}$$

$$X_1 \leq 0 ; X_2 \in \mathbb{R} ; X_3, X_4 \geq 0$$

Como se vê, o problema anterior está apresentado na forma geral, havendo necessidade de fazer alterações na função objectivo, nas restrições e nas variáveis para que o problema esteja apresentado na forma canónica.

#### - Função objectivo

Minimizar uma função é equivalente a maximizar a sua simétrica, ou seja,  $F \Leftrightarrow \text{Max } G$  (com  $G = -F$ ). Relativamente ao problema que estamos a tratar, ter-se-ia:

$$\text{Min } F = 9 \cdot X_1 - 5 \cdot X_2 + 4 \cdot X_3 - 8 \cdot X_4 \Leftrightarrow \text{Max } G = -F = -9 \cdot X_1 + 5 \cdot X_2 - 4 \cdot X_3 + 8 \cdot X_4$$

O valor óptimo da função objectivo "original"  $F$  (que designaremos por  $F^*$ ) relaciona-se facilmente com  $G^*$ . Com efeito,  $F^* = -G^*$ .

### - Restrições

A primeira restrição é do tipo desejado ( $\leq$ ), não sendo, por isso, necessário fazer qualquer alteração. No entanto, as duas últimas restrições precisam de ser re-escritas.

A segunda restrição pode ser "multiplicada" por -1, obtendo-se:

$$1 \cdot X_1 - 2 \cdot X_2 + 6 \cdot X_3 + 3 \cdot X_4 \geq 20 \Leftrightarrow -1 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 - 6 \cdot X_3 - 3 \cdot X_4 \leq -20$$

De notar que este "expediente" nem sempre será muito útil, pois, por vezes, não desejaremos ter um termo independente de uma restrição com sinal negativo... Na altura própria voltaremos a esta questão.

Quanto à terceira restrição, poderemos escrever:

$$\begin{aligned} 3 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 2 \cdot X_3 + 1 \cdot X_4 = 15 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 2 \cdot X_3 + 1 \cdot X_4 \leq 15 \\ 3 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 2 \cdot X_3 + 1 \cdot X_4 \geq 15 \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 2 \cdot X_3 + 1 \cdot X_4 \leq 15 \\ -3 \cdot X_1 - 2 \cdot X_2 - 2 \cdot X_3 - 1 \cdot X_4 \leq -15 \end{array} . \right. \end{aligned}$$

### - Variáveis

A variável  $X_1$  é não positiva, pelo que não deverá figurar na forma canónica. Se considerarmos a variável  $Y_1 = -X_1 \geq 0$  estaremos perante uma variável não negativa, como se desejava. Deve-se trocar, na função objectivo e nas restrições, a variável  $X_1$  por  $-Y_1$ . O valor óptimo de  $X_1$  obtém-se facilmente a partir do valor óptimo de  $Y_1$ :  $X_1^* = -Y_1^*$ .

Quanto à variável livre  $X_2$ , poderemos socorrer-nos de um artifício que consiste em escrever essa variável como a diferença de duas variáveis não negativas, isto é,  $X_2 = Y_2 - Z_2$  com  $Y_2, Z_2 \geq 0$ . Com efeito, embora  $Y_2$  e  $Z_2$  sejam não negativas, a sua diferença poderá ser positiva, nula ou negativa, garantindo-se que  $X_2$  é efectivamente uma variável livre. Na função objectivo e nas restrições, a variável  $X_2$  deverá ser trocada por  $Y_2 - Z_2$ . O valor óptimo de  $X_2$  obtém-se facilmente a partir dos valores óptimos de  $Y_2$  e de  $Z_2$ :  $X_2^* = Y_2^* - Z_2^*$ .

As variáveis  $X_3$  e  $X_4$  são não negativas, pelo que não precisam de ser alteradas.

Poderemos, agora, escrever o problema, que temos vindo a tratar, na forma canónica:

$$\text{Maximizar } G = +9 \cdot Y_1 + 5 \cdot Y_2 - 5 \cdot Z_2 - 4 \cdot X_3 + 8 \cdot X_4$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} -2 \cdot Y_1 + 6 \cdot Y_2 - 6 \cdot Z_2 + 3 \cdot X_3 - 1 \cdot X_4 &\leq 50 \\ +1 \cdot Y_1 + 2 \cdot Y_2 - 2 \cdot Z_2 - 6 \cdot X_3 - 3 \cdot X_4 &\leq -20 \\ -3 \cdot Y_1 + 2 \cdot Y_2 - 2 \cdot Z_2 + 2 \cdot X_3 + 1 \cdot X_4 &\leq 15 \\ +3 \cdot Y_1 - 2 \cdot Y_2 + 2 \cdot Z_2 - 2 \cdot X_3 - 1 \cdot X_4 &\leq -15 \end{aligned}$$

$$Y_1, Y_2, Z_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Após a resolução do problema, obter-se-ia os valores óptimos das variáveis  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Z_2$ ,  $X_3$  e  $X_4$  e da função objectivo  $G$ . Para obter a solução óptima do problema original e o valor óptimo da função objectivo  $F$ , basta fazer :  $F^* = -G^*$  ,  $X_1^* = -Y_1^*$  e  $X_2^* = Y_2^* - Z_2^*$ . de notar que os valores óptimos das variáveis  $X_3$  e  $X_4$  se obtêm directamente sem ser necessário fazer qualquer transformação.

### • Transformação "Forma Canónica" $\Rightarrow$ "Forma Standard"

Esta transformação é muito fácil de se fazer. Com efeito, não há alterações a introduzir quer na função objectivo, quer nas variáveis. Basta apenas **transformar as restrições do tipo  $\leq$  (da forma canónica) para o tipo  $=$  (da forma standard)**.

Imagine-se que se pretende transformar a restrição  $2 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \leq 50$  numa igualdade. Tal pode ser feito com facilidade, mediante a **introdução de uma variável de folga ou de desvio  $F_1$  ( $F_1 \geq 0$ )**:

$$2 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \leq 50 \Leftrightarrow 2 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 + F_1 = 50, \text{ com } F_1 \geq 0.$$

Observemos que quando  $F_1 = 0$ , se tem  $2 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 = 50$  ; pelo contrário, se  $F_1 > 0$ , tem-se  $2 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 < 50$ , isto é, tal como se pretendia tem-se  $2 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 + 3 \cdot X_3 \leq 50$ .

Assim, para se re-escrever na forma standard um problema de Programação Linear expresso na forma canónica, bastará **adicionar ao primeiro membro de cada restrição uma variável de folga** [ Atenção: uma por cada restrição ! ] **passando a desigualdade  $\leq$  a uma igualdade**.

### • Transformação "Forma Geral" $\Rightarrow$ "Forma Standard"

Um problema de Programação Linear expresso na forma geral pode passar-se á forma standard levando a cabo os procedimentos já descritos ( Transformação "Forma Geral"  $\Rightarrow$  "Forma Canónica" ) relativos à função objectivo e às variáveis.

No tocante às restrições nada há a fazer relativamente às igualdades; relativamente às restrições do tipo  $\leq$  adopta-se o procedimento descrito acima ( Transformação "Forma Canónica"  $\Rightarrow$  "Forma Standard" ) e **relativamente às restrições do tipo  $\geq$**  adopta-se um procedimento similar (isto é, **bastará subtrair ao primeiro membro de cada restrição do tipo  $\geq$  uma variável de folga** [ Atenção: uma por cada restrição ! ] **passando a desigualdade a uma igualdade**).

## **FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR**

Comecemos por considerar o seguinte **problema 1**:

A FARLACT é uma fábrica onde são produzidos dois tipos de farinhas lácteas (A e B).

Estas farinhas são enriquecidas com dois aditivos. Por cada tonelada de farinha A são necessários um quilograma de aditivo P e três quilogramas de aditivo Q. Por cada tonelada de farinha B são necessários dois quilogramas de aditivo P e dois quilogramas de aditivo Q.

Sabe-se que, em cada semana, a FARLACT não dispõe de mais de 20 Kg e 30 Kg, respectivamente, de aditivos P e Q.

Os donos da FARLACT exigem que a produção mensal conjunta das farinhas A e B não seja inferior a 20 toneladas.

Por cada tonelada de farinha A vendida, a FARLACT tem um lucro de 7 unidades monetárias (u.m.), sendo de 10 u.m. o lucro associado à venda de uma tonelada de farinha B.

Como se pode determinar o plano de produção que maximiza o lucro da FARLACT?

Quando somos confrontados com um problema como o anterior, poderemos formular **três questões importantes**:

### **1 - Qual o objectivo a atingir?**

Relativamente a este problema, o enunciado é relativamente explícito: pretende-se **maximizar o lucro**.

Note-se que outros problemas similares (em termos de estrutura) poderemos ter objectivos muito diferentes: "minimizar desperdícios", "minimizar custos", "minimizar tempos de espera", "maximizar a satisfação" ...

Genericamente o objectivo do problema pode traduzir-se na maximização de um benefício, ou na minimização de um prejuízo.

## **2 - Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo?**

Referimo-nos, obviamente, a decisões ou actividades que influam no objectivo ...

Assim, relativamente ao problema em análise poderemos indicar sucintamente as decisões que irão influir no lucro da FARLACT:

- produzir farinha A
- produzir farinha B

## **3 - Que recursos são consumidos (quando se leva a cabo as actividades referidas) ? Que condicionalismos são impostos ?**

Como se pode constatar pelo enunciado:

- consome-se aditivo P
- consome-se aditivo Q
- exige-se a produção mensal mínima conjunta ( $A + B$ ) de 20 ton.

Retomemos a questão 2 ( Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo ? ). Poderemos associar às respostas a esta questão ( produzir farinha A / produzir farinha B ) uma nova questão: **Quanto ? Com que intensidade se deve levar a cabo as actividades referidas ?**

Que actividades ?	→	Quanto ?
produzir farinha A	→	$X_A$
produzir farinha B	→	$X_B$

Definamos, então, as **variáveis  $X_A$  e  $X_B$**  :

**$X_A$**  é a quantidade de farinha A a produzir;

**$X_B$**  é a quantidade de farinha B a produzir;

- Uma primeira conclusão a reter diz respeito à não negatividade destas variáveis:

$$X_A \geq 0, X_B \geq 0 .$$

Retomemos a questão 3 ( Que recursos são consumidos (quando se leva a cabo as actividades referidas) ? Que condicionalismos são impostos ? ).

Tínhamos referido que um dos recursos consumidos era o **aditivo P**. De acordo com o enunciado, semanalmente, só se dispõe de, no máximo, 20 Kg de aditivo P. Por outro lado, sabe-se que por cada tonelada de farinha A produzida é necessário 1 Kg de

aditivo P e que por cada tonelada de farinha B produzida são necessários 2 Kg desse mesmo aditivo.

Como já definimos  $X_A$  e  $X_B$  como "as **quantidades** de farinha A e B, respectivamente, a produzir", podemos agora tentar representar analiticamente a **restrição** associada ao **recurso "aditivo P"**. Mas ... **quantidades** ? Quilogramas ? Toneladas ? ... **Na definição das variáveis é fundamental dar particular atenção às unidades !**

Redefinamos, então, com mais cuidado, as variáveis:

$X_A$  é a quantidade (**em toneladas**) de farinha A a produzir;  
 $X_B$  é a quantidade (**em toneladas**) de farinha B a produzir;

Se cada tonelada de farinha A consome 1 Kg de aditivo P, poderemos dizer que  $1 \cdot X_A$  representa a quantidade (em Kg) de aditivo P consumido na produção de farinha A. Analogamente,  $2 \cdot X_B$  representa a quantidade (em Kg) de aditivo Q consumido na produção de farinha B. Assim,  $1 \cdot X_A + 2 \cdot X_B$  representa o consumo total de aditivo P (em Kg) necessário à produção das farinhas A e B.

Sabemos que, no máximo, se dispõe de 20 Kg de aditivo P **por semana**.

Poderemos agora tentar escrever a **restrição** relativa ao consumo do **aditivo P**:

$$\begin{array}{c} \text{Consumo total do aditivo P} \leq \text{Disponibilidade do aditivo P} \\ \Downarrow \\ ? \end{array} \quad \Downarrow \quad \text{semanal : 20 Kg}$$

Deverá ter-se o cuidado de verificar que a **restrição** esteja **dimensionalmente correcta** ! Isto é, se a disponibilidade de aditivo P é expressa em **Kg / semana**, esta deverá também ser a unidade a adoptar para o consumo total !

Ou seja, quando definimos as variáveis, dever-se-ia ter especificado o **período de tempo** associado à produção das farinhas ... Isto é, quando definimos  $X_A$  como a quantidade (em toneladas) de farinha A a produzir pela FARLACT, dever-se-ia ter indicado se se tratava de produção semanal, mensal ou anual ...

Redefinamos, então, cuidadosamente, as variáveis:

$X_A$  é a quantidade (em toneladas) de farinha A a produzir **semanalmente**;  
 $X_B$  é a quantidade (em toneladas) de farinha B a produzir **semanalmente**;

Nunca é demais recordar a não negatividade destas variáveis:  $X_A \geq 0$  ,  $X_B \geq 0$ .

Poderemos, agora, re-analisar o significado de "  $1 \cdot X_A + 2 \cdot X_B$  " : trata-se do consumo total de aditivo P (em Kg) necessário à produção semanal das farinhas A e B. Sabendo que a disponibilidade semanal deste recurso é de 20 Kg, poderemos, agora, escrever a correspondente restrição:

$$\text{Aditivo P : } 1 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \leq 20 \text{ (Kg/semana)}$$

Analogamente, se tivermos em conta que cada tonelada de farinha A requer 3 Kg de aditivo Q e que cada tonelada de farinha B requer 2 Kg desse mesmo aditivo (do qual se dispõe, no máximo, de 30 Kg por semana), poderemos escrever a correspondente restrição:

$$\text{Aditivo Q : } 3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \leq 30 \text{ (Kg/semana)}$$

Não há outros **recursos** envolvidos neste problema, mas há um **condicionalismo** que é imposto: "A produção mensal conjunta de A e B não deve ser inferior a 20 toneladas". Se nos recordarmos da definição das variáveis e se, por simplicidade, admitirmos que um mês tem quatro semanas, poderemos representar esse condicionalismo pela restrição seguinte:

$$\text{Prod.mensal A+B : } 4 \cdot (X_A + X_B) \geq 20 \text{ (ton)} , \text{ ou, equivalentemente,}$$

$$X_A + X_B \geq 5 \text{ (ton)} .$$

Poderemos agora tratar da questão **1 ( Qual o objectivo a atingir ? )**, que já tinha sido respondida (**maximizar o lucro**). Tentemos exprimir, usando as variáveis definidas, este objectivo.

Se o lucro associado à produção de uma tonelada de farinha A é de 7 u.m. e se o correspondente valor associado à produção de farinha B é de 10 u.m., poderemos escrever  $7 \text{ (u.m. / ton A)} \cdot X_A$  (ton A / sem.) +  $10 \text{ (u.m. / ton B)} \cdot X_B$  (ton B / sem.) que está expresso em u.m. por semana.

Assim,  $F = 7 \cdot X_A + 10 \cdot X_B$  é a **função objectivo**, que representa o lucro semanal da FARLACT (em u.m.), que se pretende maximizar.

De notar que o enunciado indicava apenas que se pretendia maximizar o lucro. Poderemos, sem qualquer problema, exprimir este objectivo numa base semanal, isto é, passar a maximizar o lucro semanal.

Poderemos agora resumir a **formulação do problema 1**:

**Seja  $X_i$  a quantidade (em toneladas) de farinha  $i = A ; B$  a produzir semanalmente, com  $X_i \geq 0$ .**

$$\text{MAX } F = 7 \cdot X_A + 10 \cdot X_B$$

**sujeito a:**

$$\begin{aligned} 1 \cdot X_A + 2 \cdot X_B &\leq 20 \\ 3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B &\leq 30 \\ 1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B &\geq 5 \end{aligned}$$

$$X_A, X_B \geq 0 .$$

Concluída a **formulação** deste problema, deixemos a sua **resolução** para uma altura posterior ...

Recordemo-nos que na **formulação de problemas** de Programação Linear pode ser útil responder a **três questões importantes**:

- Qual o **objectivo** a atingir ?

... Max / Min ... → **função objectivo**

- Que **actividades** (com influência no objectivo) devem ser levadas a cabo ?  
Que **decisões** devem ser tomadas ?

... Qual a sua **intensidade** ?

... → **variáveis**

Atenção ao cuidado a ter na definição das variáveis... Não esquecer as unidades ... Não esquecer o carácter de não negatividade das variáveis ...

- Que **recursos** são consumidos (quando se leva a cabo as actividades) ?  
Que **condicionalismos** são impostos ?

... → **restrições**

Consideremos agora uma variante do problema anterior - o **problema 2** :

A DUOLACT é uma empresa que produz dois tipos de farinhas lácteas ( A e B ) em duas fábricas (F1 e F2).

Estas farinhas são enriquecidas com dois aditivos. Por cada tonelada de farinha A são necessários um quilograma de aditivo P e três quilogramas de aditivo Q. Por cada tonelada de farinha B são necessários dois quilogramas de aditivo P e dois quilogramas de aditivo Q.

Sabe-se que, em cada semana, a fábrica F1 não dispõe de mais de 10 Kg e 18 Kg, respectivamente, de aditivos P e Q. Os correspondentes valores para a fábrica F2 são, respectivamente, 12 Kg e 14 Kg.

Os donos da DUOLACT exigem que a produção mensal conjunta das farinhas A e B não seja inferior a 20 toneladas.

O quadro seguinte indica os lucros (em u.m.) associados à produção de uma tonelada de cada tipo de farinha, em função da fábrica:

	F1	F2
A	6	7
B	10	11

Como se pode determinar o plano de produção que maximiza o lucro da DUOLACT ?

Para formularmos este problema poderemos recordar as **três questões importantes**:

### 1 - Qual o objectivo a atingir ?

À semelhança do problema anterior, também aqui se pretende **maximizar o lucro**.

### 2 - Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo?

- produzir farinha A
- produzir farinha B

### 3 - Que recursos são consumidos (quando se leva a cabo as actividades referidas) ? Que condicionalismos são impostos ?

- consome-se aditivo P
- consome-se aditivo Q
- exige-se a produção mensal mínima conjunta (A + B) de 20 ton.

Se adoptarmos as **variáveis  $X_A$  e  $X_B$**  definidas no problema 1:

**$X_A$**  é a quantidade (em toneladas) de farinha A a produzir **semanalmente**;  
 **$X_B$**  é a quantidade (em toneladas) de farinha B a produzir **semanalmente**;

verificando-se ainda:  **$X_A \geq 0$**  ,  **$X_B \geq 0$** , poderemos tentar formular o problema, em termos de restrições e de função objectivo::

Relativamente ao condicionalismo da produção mensal conjunta mínima pode escrever-se facilmente:

Prod.mensal A+B :     $4 \cdot (X_A + X_B) \geq 20$  (ton) , ou, equivalentemente,

$$X_A + X_B \geq 5 \text{ (ton)} .$$

No que toca aos aditivos P e Q já não conseguiremos chegar às restrições ...

Prob.2

→ 10 F1

$$\text{Aditivo P : } 1 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \leq [\text{Prob.1 : } 20]$$

→ 12 F2

→ 18 F1

$$\text{Aditivo Q : } 3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \leq [\text{Prob.1 : } 30]$$

→ 14 F2

Relativamente à função objectivo:

$$\begin{array}{c} \text{Prob.1: } F = 7 \cdot X_A + 10 \cdot X_B \\ \Downarrow \quad \Downarrow \end{array}$$

$$\text{Prob.2: } (F1:6 ; F2:7) \quad (F1:10 ; F2:11)$$

Como se vê, não conseguimos exprimir nem as restrições relativas aos aditivos P e Q nem a função objectivo ... Há necessidade de ter em conta as duas fábricas F1 e F2 ...

Retomemos, então a questão **2** ( **Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo?** ). **Quanto ? Com que intensidade se deve levar a cabo as actividades referidas ? E, já agora, onde ?**

Ruy Costa, 2011

**Que actividades ?** → **Quanto ?** → **Onde ?**

**produzir farinha A** →  **$X_A$**  →  $\begin{cases} \text{Fábrica F1} & \rightarrow X_{A1} \\ \text{Fábrica F2} & \rightarrow X_{A2} \end{cases}$

**produzir farinha B** →  **$X_B$**  →  $\begin{cases} \text{Fábrica F1} & \rightarrow X_{B1} \\ \text{Fábrica F2} & \rightarrow X_{B2} \end{cases}$

Definamos, então, as **variáveis**  $X_{A1}$ ,  $X_{A2}$ ,  $X_{B1}$ ,  $X_{B2}$ :

Genericamente  $X_{ij}$  é a quantidade (em toneladas) de farinha  $i = A ; B$  a produzir semanalmente na fábrica  $F_j$ ,  $j = 1 ; 2$ , isto é, por exemplo,  $X_{A1}$  é a quantidade (em toneladas) de farinha A a produzir semanalmente na fábrica F1.

Não nos esqueçamos de indicar que as **variáveis definidas são não negativas**:

$$X_{A1}, X_{A2}, X_{B1}, X_{B2} \geq 0$$

Poderemos agora voltar a tentar escrever as **restrições**:

Relativamente à produção mensal mínima conjunta já havíamos escrito  $X_A + X_B \geq 5$  (ton). Se tivermos presente que a variável "antiga"  $X_A$  mais não é do que a soma das variáveis "novas"  $X_{A1}$  e  $X_{A2}$  e que o mesmo sucede com  $X_B$  relativamente a  $X_{B1}$  e  $X_{B2}$ , pode escrever-se:

$$\text{Prod.Mensal A+B : } (X_{A1} + X_{A2}) + (X_{B1} + X_{B2}) \geq 5 \text{ (ton)}$$

Relativamente aos aditivos P e Q poderemos escrever duas restrições para cada aditivo (uma relativa a cada fábrica):

$$\text{Aditivo P : } 1 \cdot X_{A1} + 2 \cdot X_{B1} \leq 10 \text{ (Kg / sem.)} \quad [F1]$$

$$1 \cdot X_{A2} + 2 \cdot X_{B2} \leq 12 \text{ (Kg / sem.)} \quad [F2]$$

$$\text{Aditivo Q : } 3 \cdot X_{A1} + 2 \cdot X_{B1} \leq 18 \text{ (Kg / sem.)} \quad [F1]$$

$$3 \cdot X_{A2} + 2 \cdot X_{B2} \leq 14 \text{ (Kg / sem.)} \quad [F2]$$

Com as novas variáveis torna-se fácil escrever a **função objectivo**, que representa o lucro semanal da DUOLACT (em u.m.), que se pretende maximizar:

$$\text{MAX } F = 6 \cdot X_{A1} + 7 \cdot X_{A2} + 10 \cdot X_{B1} + 11 \cdot X_{B2} .$$

Poderemos agora resumir a **formulação do problema 2**:

Seja  $X_{ij}$  a quantidade (em toneladas) de farinha  $i = A ; B$  a produzir semanalmente na fábrica  $F_j , j = 1 ; 2$   $X_{ij} \geq 0$ .

$$\text{MAX } F = 6 \cdot X_{A1} + 7 \cdot X_{A2} + 10 \cdot X_{B1} + 11 \cdot X_{B2} .$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} 1 \cdot X_{A1} + 2 \cdot X_{B1} &\leq 10 \\ 1 \cdot X_{A2} + 2 \cdot X_{B2} &\leq 12 \\ 3 \cdot X_{A1} + 2 \cdot X_{B1} &\leq 18 \\ 3 \cdot X_{A2} + 2 \cdot X_{B2} &\leq 14 \\ X_{A1} + X_{A2} + X_{B1} + X_{B2} &\geq 5 \end{aligned}$$

$$X_{A1}, X_{A2}, X_{B1}, X_{B2} \geq 0.$$

Compliquemos um pouco o problema anterior... originando o **problema 3**:

A TRANSLACT é uma empresa que produz dois tipos de farinhas lácteas (A e B) em duas fábricas (F1 e F2).

Estas farinhas são enriquecidas com dois aditivos. Por cada tonelada de farinha A são necessários um quilograma de aditivo P e três quilogramas de aditivo Q. Por cada tonelada de farinha B são necessários dois quilogramas de aditivo P e dois quilogramas de aditivo Q.

Sabe-se que, em cada semana, a fábrica F1 não dispõe de mais de 10 Kg e 18 Kg, respectivamente, de aditivos P e Q. Os correspondentes valores para a fábrica F2 são, respectivamente, 12 Kg e 14 Kg.

Em cada semana é possível transferir entre as duas fábricas qualquer quantidade de aditivos (não utilizados numa fábrica e necessários na outra). A transferência de 1 Kg de qualquer dos aditivos entre as duas fábricas traduz-se num custo de 0,05 u.m..

Os donos da TRANSLACT exigem que a produção mensal conjunta das farinhas A e B não seja inferior a 20 toneladas.

O quadro seguinte indica os lucros (em u.m.) associados à produção de uma tonelada de cada tipo de farinha, em função da fábrica:

	F1	F2
A	6	7
B	10	11

Como se pode determinar o plano de produção que maximiza o lucro da TRANSLACT ?

Para formularmos este problema poderemos recordar as **três questões importantes**:

**1 - Qual o objectivo a atingir ?**

À semelhança do problema anterior, também aqui se pretende **maximizar o lucro**.

**2 - Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo?**

- produzir farinha A em F1 / em F2
- produzir farinha B em F1 / em F2
- transferir aditivo P de F1 para F2
- transferir aditivo P de F2 para F1
- transferir aditivo Q de F1 para F2
- transferir aditivo Q de F2 para F1

**3 - Que recursos são consumidos (quando se leva a cabo as actividades referidas) ? Que condicionalismos são impostos ?**

- consome-se aditivo P
- consome-se aditivo Q
- exige-se a produção mensal mínima conjunta (A + B) de 20 ton.

Definamos, então, as **variáveis  $X_{A1}$  ,  $X_{A2}$  ,  $X_{B1}$  ,  $X_{B2}$**  : genericamente  $X_{ij}$  é a quantidade (em toneladas) de farinha  $i = A ; B$  a produzir semanalmente na fábrica  $F_j$  ,  $j = 1 ; 2$  . Adicionalmente define-se as **variáveis  $T_{P1}$  ,  $T_{P2}$  ,  $T_{Q1}$  ,  $T_{Q2}$**  : genericamente  $T_{ki}$  é a quantidade (em Kg) de aditivo  $k = P ; Q$  a transferir semanalmente da fábrica  $F_i$  ,  $i = 1 ; 2$  para a outra.

Não nos esqueçamos de indicar que as variáveis definidas são não negativas:

$$X_{A1} , X_{A2} , X_{B1} , X_{B2} , T_{P1} , T_{P2} , T_{Q1} , T_{Q2} \geq 0$$

De notar que:

$$T_{P1} \leq 10 ; \quad T_{P2} \leq 12 ; \quad T_{Q1} \leq 18 ; \quad T_{Q2} \leq 14$$

Utilizando as variáveis indicadas poderemos indicar resumidamente a **formulação do problema 3**:

Seja  $X_{ij}$  a quantidade (em toneladas) de farinha  $i = A ; B$  a produzir semanalmente na fábrica  $F_j$ ,  $j = 1 ; 2$  e  $T_{kl}$  é a quantidade (em Kg) de aditivo  $k = P ; Q$  a transferir semanalmente da fábrica  $F_l$ ,  $l = 1 ; 2$  para a outra.  $X_{ij}, T_{kl} \geq 0$ .

$$\text{MAX } F = 6.X_{A1} + 7.X_{A2} + 10.X_{B1} + 11.X_{B2} - 0,05.(T_{P1} + T_{P2} + T_{Q1} + T_{Q2})$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} 1 . X_{A1} + 2 . X_{B1} &\leq 10 - T_{P1} + T_{P2} \\ 1 . X_{A2} + 2 . X_{B2} &\leq 12 - T_{P2} + T_{P1} \\ 3 . X_{A1} + 2 . X_{B1} &\leq 18 - T_{Q1} + T_{Q2} \\ 3 . X_{A2} + 2 . X_{B2} &\leq 14 - T_{Q2} + T_{Q1} \\ X_{A1} + X_{A2} + X_{B1} + X_{B2} &\geq 5 \\ T_{P1} \leq 10 ; \quad T_{P2} \leq 12 ; \quad T_{Q1} \leq 18 ; \quad T_{Q2} \leq 14 \end{aligned}$$

$$X_{A1}, X_{A2}, X_{B1}, X_{B2}, T_{P1}, T_{P2}, T_{Q1}, T_{Q2} \geq 0.$$

Os problemas 1, 2 e 3 anteriores são problemas de **Programação Linear**. Com efeito, quer a função objectivo, quer as restrições são lineares, sendo as variáveis não negativas.

O problema 4 seguinte poderá formular-se seguindo um raciocínio exactamente igual ao seguido para a formulação dos problemas anteriores. No entanto, este novo problema não é um *simples* problema de Programação Linear, mas sim de **Programação Linear Inteira**: embora as restrições e a função objectivo sejam lineares, as variáveis são inteiras (respeitando ainda a condição de não negatividade).

A **formulação** de um problema não apresenta qualquer particularidade por se exigir que as variáveis tomem valores inteiros (basta indicar essa condição) ... No entanto, a **resolução** de um Problema de Programação Linear Inteira exige alguns cuidados especiais, que a seu tempo serão referidos.

Ruy Costa 2011

Consideremos agora o seguinte **problema 4**:

"A Guerra está iminente !", exclamou o General. "É preciso tomar algumas decisões !".

O País pode dispor de 2 000 unidades monetárias (u.m.) de imediato e de 1 500 u.m. dentro de 90 dias. Poderão ser enviados de imediato 100 bombardeiros, 20 fragatas, 500 tanques e 80 000 homens. Dentro de 90 dias poderão ser enviados mais 30 bombardeiros, 10 fragatas, 200 tanques e 30 000 homens.

O envio de cada bombardeiro, fragata, tanque e 1 000 homens custará ao País, respectivamente, 2 u.m., 6 u.m., 1 u.m. e 1 u.m.. As reservas financeiras disponíveis de imediato deverão assegurar quer o envio imediato de homens e material, quer a sua manutenção nos próximos 90 dias.

As reservas financeiras disponíveis dentro de 90 dias deverão assegurar quer o envio posterior de homens e material, quer a manutenção da totalidade dos homens e materiais enviados desde o início do conflito durante, pelo menos, mais 90 dias.

O custo de manutenção de 1 bombardeiro, 1 fragata, 1 tanque e 1 000 homens durante 90 dias é, respectivamente, igual a 10 u.m., 8 u.m., 1 u.m. e 1 u.m..

De acordo com peritos militares, o número total de tanques deverá ser maior ou igual ao quíntuplo do número total de bombardeiros. Por outro lado, em cada envio de homens e materiais, deverão ser enviados, pelo menos, 1 000 homens por cada bombardeiro.

Estima-se que a eficácia ( medida em unidades de eficácia militar - u.e.m. ) de homens e material seja função da altura do seu envio, de acordo com o quadro seguinte.

Envio de:	Envio dentro de 90 dias	Envio imediato
1 000 homens	6	9
1 bombardeiro	9	10
1 fragata	4	5
1 tanque	1	3

Sabendo que se pretende maximizar a eficácia militar total face à Guerra que se aproxima, ajude os responsáveis militares do País na tomada de decisões.

Ruy Costa, 2011

Para formularmos este problema poderemos recordar as **três questões importantes**:

**1 - Qual o objectivo a atingir ?**

Relativamente a este problema, o enunciado é relativamente explícito : **pretende-se maximizar a eficácia militar total.**

Note-se que neste mesmo problema poder-se-ia conceber outros objectivos - a título de exemplo pode referir-se "maximizar a eficácia militar imediata", "minimizar o custo total (respeitando um nível mínimo de eficácia militar total)", "minimizar o número total de homens a enviar (respeitando um nível mínimo de eficácia militar total)".

## **2 - Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo?**

Relativamente ao problema em análise poderemos indicar sucintamente as decisões que irão influir na eficácia militar:

- enviar homens para a Guerra
- enviar bombardeiros para a Guerra
- enviar fragatas para a Guerra
- enviar tanques para a Guerra

## **3 - Que recursos são consumidos (quando se leva a cabo as actividades referidas) ? Que condicionalismos são impostos ?**

Como se pode constatar pelo enunciado:

- as actividades referidas traduzem-se num dispêndio do **recurso financeiro** ;
- um condicionalismo a ter em conta diz respeito ao **número de homens, bombardeiros, fragatas e tanques disponíveis** ;
- um outro condicionalismo a ter em conta diz respeito, por um lado, à **relação entre o número total de tanques e o número total de bombardeiros enviados** e, por outro lado, à **relação entre o número de homens e o número de bombardeiros enviados**.

Retomemos a questão 2 ( **Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo?** ). Poderemos associar às respostas a esta questão ( **enviar homens / enviar bombardeiros / enviar fragatas / enviar tanques** ) uma nova questão: **Quanto ? Com que intensidade se deve levar a cabo as actividades referidas ?**

Rui Costa, 2011

<b>Que actividades ?</b>	<b>→</b>	<b>Quanto ?</b>
<b>enviar Homens</b>	<b>→</b>	<b>X<sub>H</sub></b>
<b>enviar Bombardeiros</b>	<b>→</b>	<b>X<sub>B</sub></b>
<b>enviar Fragatas</b>	<b>→</b>	<b>X<sub>F</sub></b>
<b>enviar Tanques</b>	<b>→</b>	<b>X<sub>T</sub></b>

Definamos, então, as **variáveis X<sub>H</sub>, X<sub>B</sub>, X<sub>F</sub> e X<sub>T</sub>**:

**X<sub>H</sub>** é o número total de homens a enviar para a Guerra;

**X<sub>B</sub>** é o número total de bombardeiros a enviar para a Guerra;

**X<sub>F</sub>** é o número total de fragatas a enviar para a Guerra;

**X<sub>T</sub>** é o número total de tanques a enviar para a Guerra.

- Uma primeira conclusão a reter diz respeito à não negatividade destas variáveis:

$$X_H \geq 0, X_B \geq 0, X_F \geq 0 \text{ e } X_T \geq 0.$$

- Por outro lado, **estas variáveis são inteiras**.

Retomemos a questão 3 ( **Que recursos são consumidos (quando se leva a cabo as actividades referidas) ? Que condicionalismos são impostos ?** ) que tinha três respostas (recursos financeiros; recursos humanos e materiais; relações impostas pelos peritos militares).

Recordemos esta última resposta: **De acordo com peritos militares, o número total de tanques deverá ser maior ou igual ao quíntuplo do número total de bombardeiros. Por outro lado, em cada envio de homens e materiais, deverão ser enviados, pelo menos, 1 000 homens por cada bombardeiro.**

Poderemos tentar exprimir estes condicionalismos utilizando as variáveis definidas anteriormente:

O número total de tanques ( $X_T$ ) deverá ser maior ou igual ao quíntuplo do número total de bombardeiros ( $X_B$ ), isto é :  $X_T \geq 5 \cdot X_B$  .

O número *total* de homens a enviar ( $X_H$ ) deverá ser maior ou igual a 1 000 vezes o número *total* de bombardeiros enviados ( $X_B$ ), isto é :  $X_H \geq 1\,000 \cdot X_B$  . Esta representação não está rigorosamente correcta, já que o enunciado refere explicitamente "**em cada envio de homens e materiais**" ... Ora o que foi feito disse respeito à relação entre números *totais* ...

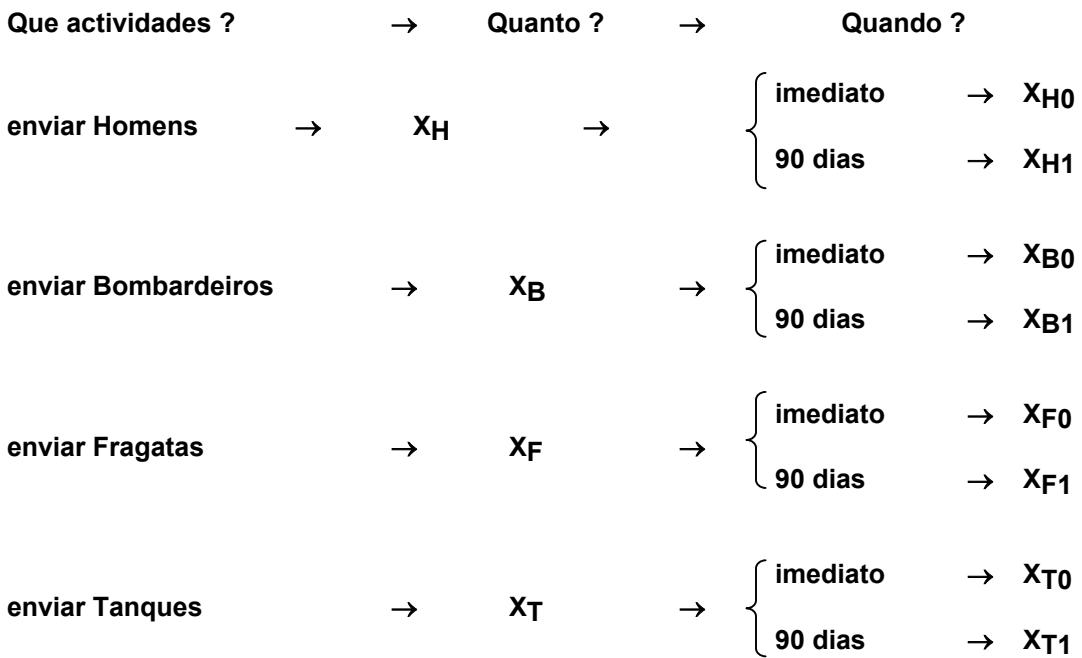
A questão 3 admitia ainda duas outras respostas (recursos financeiros; recursos humanos e materiais): de acordo com o enunciado pode dispor-se imediatamente de 2 000 u.m. e, dentro de 90 dias de 1 500 u.m. adicionais. Como relacionar estas informações com as variáveis definidas ?

Sabemos quanto custa o envio de cada bombardeiro, fragata, tanque e 1 000 homens ( respectivamente, 2 u.m., 6 u.m. , 1 u.m. e 1 u.m. ), pelo que é relativamente fácil indicar o **Custo Total de Envio** ( igual a  $2 \cdot X_B + 6 \cdot X_F + 1 \cdot X_T + 0,001 \cdot X_H$  ). No entanto, não poderemos exprimir o **Custo Total de Manutenção**, já que a determinação deste custo obriga ao conhecimento dos envios de homens e material em duas fases: de imediato e dentro de 90 dias.

Analogamente, se retomarmos a resposta dada à questão 1 ( pretende-se maximizar a **Eficácia Militar Total** ) e se tentarmos exprimir a eficácia militar total em função das variáveis definidas, constataremos não ser possível fazê-lo já que a determinação desta eficácia total obriga ao conhecimento dos envios de homens e material em duas fases: de imediato e dentro de 90 dias.

Assim, pode concluir-se que **a definição de variáveis que foi feita não é suficientemente fina**. Tal, no entanto, não corresponde a dizer que o que foi feito está errado ! ... Torna-se apenas necessário **refinar** a definição feita de modo a poder contemplar os aspectos referidos ( conhecimento dos envios de homens e material em duas fases: de imediato e dentro de 90 dias ).

Retomemos, então a questão 2 ( Que decisões deverão ser tomadas ? Que actividades deverão ser levadas a cabo? ). Quanto ? Com que intensidade se deve levar a cabo as actividades referidas ? E, já agora, quando ?



Definamos, então, as **variáveis**  $X_{H0}, X_{H1}, X_{B0}, X_{B1}, X_{F0}, X_{F1}, X_{T0}, X_{T1}$ :

$X_{H0}$  é o número de homens a enviar de imediato para a Guerra;

$X_{H1}$  é o número de homens a enviar dentro de 90 dias para a Guerra;

$X_{B0}, X_{B1}, X_{F0}, X_{F1}, X_{T0}, X_{T1}$  definem-se analogamente em relação aos Bombardeiros, Fragatas e Tanques.

Não nos esqueçamos de indicar que as **variáveis definidas são inteiras e não negativas**:

$X_{H0}, X_{H1}, X_{B0}, X_{B1}, X_{F0}, X_{F1}, X_{T0}, X_{T1} \geq 0$  e inteiras.

Recordemos os dois condicionalismos impostos pelos peritos militares: o **número total de tanques deverá ser maior ou igual ao quíntuplo do número total de bombardeiros** (condicionalismo que já tínhamos conseguido representar correctamente com as "variáveis antigas"). Por outro lado, em cada envio de homens e materiais, deverá ser enviados, pelo menos, 1 000 homens por cada bombardeiro.

Ribeiro, 2011

Utilizando as novas variáveis, poderemos exprimir os condicionalismos referidos:

O número total de tanques ( $X_{T0} + X_{T1}$ ) deverá ser maior ou igual ao quíntuplo do número total de bombardeiros ( $X_{B0} + X_{B1}$ ), isto é :  $X_{T0} + X_{T1} \geq 5 \cdot (X_{B0} + X_{B1})$ .

Por outro lado, em cada envio de homens e materiais, o número de homens ( $X_{H0}$  ou  $X_{H1}$ ) deverá ser maior ou igual a 1 000 vezes o número de bombardeiros

enviados ( $X_{B0}$  ou  $X_{B1}$ ), isto é :  $X_{H0} \geq 1\,000 \cdot X_{B0}$ , relativamente ao envio imediato e  $X_{H1} \geq 1\,000 \cdot X_{B1}$ , relativamente ao envio dentro de 90 dias.

Analisemos agora as questões associadas aos recursos financeiros, humanos e materiais que não podiam ser convenientemente representados pelas "variáveis antigas":

- De acordo com o enunciado pode dispor-se imediatamente de 2 000 u.m. e, dentro de 90 dias de 1 500 u.m. adicionais.

Sabemos quanto custa o envio de cada bombardeiro, fragata, tanque e 1 000 homens ( respectivamente, 2 u.m., 6 u.m. , 1 u.m. e 1 u.m. ), pelo que é relativamente fácil determinar o **Custo Total de Envio associado a cada uma das fases de envio de homens e materiais ( CTE0 e CTE1 ) :**

$$CTE0 = 2 \cdot X_{B0} + 6 \cdot X_{F0} + 1 \cdot X_{T0} + 0,001 \cdot X_{H0} \text{ e}$$

$$CTE1 = 2 \cdot X_{B1} + 6 \cdot X_{F1} + 1 \cdot X_{T1} + 0,001 \cdot X_{H1} .$$

Quanto ao **Custo Total de Manutenção correspondente aos primeiros 90 dias ( CTM0 )**, pode determinar-se:

$$CTM0 = 10 \cdot X_{B0} + 8 \cdot X_{F0} + 1 \cdot X_{T0} + 0,001 \cdot X_{H0}$$

O **Custo Total de Manutenção correspondente ao segundo período de 90 dias ( CTM1 )**, pode determinar-se:

$$CTM1 = 10 \cdot (X_{B0} + X_{B1}) + 8 \cdot (X_{F0} + X_{F1}) + 1 \cdot (X_{T0} + X_{T1}) + 0,001 \cdot (X_{H0} + X_{H1})$$

(recordese que, de acordo com o enunciado, no segundo período de 90 dias terá de ser assegurada a manutenção (durante 90 dias) dos homens e materiais expedidos de início e após os primeiros 90 dias).

Assim, poderemos agora escrever as **restrições associadas ao recurso financeiro**:

- inicialmente:  $CTE0 + CTM0 \leq 2\,000$ , ou equivalentemente,

$$12 \cdot X_{B0} + 14 \cdot X_{F0} + 2 \cdot X_{T0} + 0,002 \cdot X_{H0} \leq 2\,000 .$$

- dentro de 90 dias:  $CTE1 + CTM1 \leq 1\,500$ , ou equivalentemente,

$$10 \cdot X_{B0} + 8 \cdot X_{F0} + 1 \cdot X_{T0} + 0,001 \cdot X_{H0} + 12 \cdot X_{B1} + 14 \cdot X_{F1} + 2 \cdot X_{T1} + 0,002 \cdot X_{H1} \leq 1\,500 .$$

Poderemos também escrever os **condicionalismos decorrentes das disponibilidades de homens e materiais**:

- inicialmente:  $X_{B0} \leq 100 ; X_{F0} \leq 20 ; X_{T0} \leq 500 ; X_{H0} \leq 80\,000$ ;
- dentro de 90 dias:  $X_{B1} \leq 30 ; X_{F1} \leq 10 ; X_{T1} \leq 200 ; X_{H1} \leq 30\,000$ ;

Deveremos agora abordar a questão 1 ( Qual o **objectivo** a atingir ? ) e tentar exprimir a sua resposta ( pretende-se **maximizar a eficácia militar total** ) em função das "novas variáveis" ( já que as "antigas" também não eram adequadas ... ).

Se designarmos por **F** a **eficácia militar total** (em u.e.m.), poderemos facilmente concluir que:

$$F = (10.X_{B0} + 5.X_{F0} + 3.X_{T0} + 0,009.X_{H0}) + (9.X_{B1} + 4.X_{F1} + 1.X_{T1} + 0,006.X_{H1}).$$

Poderemos agora resumir a **formulação do problema**:

Seja  $X_{ij}$  o número de unidades de  $i = H$  (Homens);  $B$  (Bombardeiros);  $F$  (Fragatas);  $T$  (Tanques) a enviar para a Guerra na fase  $j = 0$  (envio imediato); 1 (envio dentro de 90 dias), com  $X_{ij} \geq 0$  e inteiros .

$$\text{MAX } F = 10.X_{B0} + 5.X_{F0} + 3.X_{T0} + 0,009.X_{H0} + \\ + 9.X_{B1} + 4.X_{F1} + 1.X_{T1} + 0,006.X_{H1}$$

sujeito a:

$$X_{B0} \leq 100; X_{F0} \leq 20; X_{T0} \leq 500; X_{H0} \leq 80\,000; \\ X_{B1} \leq 30; X_{F1} \leq 10; X_{T1} \leq 200; X_{H1} \leq 30\,000;$$

$$12.X_{B0} + 14.X_{F0} + 2.X_{T0} + 0,002.X_{H0} \leq 2\,000$$

$$10.X_{B0} + 8.X_{F0} + 1.X_{T0} + 0,001.X_{H0} + \\ + 12.X_{B1} + 14.X_{F1} + 2.X_{T1} + 0,002.X_{H1} \leq 1\,500$$

$$X_{H0} \geq 1\,000 \cdot X_{B0}$$

$$X_{H1} \geq 1\,000 \cdot X_{B1}$$

$$X_{T0} + X_{T1} \geq 5 \cdot (X_{B0} + X_{B1})$$

$$X_{H0}, X_{H1}, X_{B0}, X_{B1}, X_{F0}, X_{F1}, X_{T0}, X_{T1} \geq 0 \text{ e inteiros.}$$

E cá está a formulação de um **problema de Programação Linear Inteira** ... Como se viu, o raciocínio seguido em nada difere dos problemas anteriores (de Programação Linear).

A formulação de problemas poderá estar ligada a temas tão diversos quanto o planeamento da construção de habitações, o planeamento da renovação de frotas, o planeamento da produção industrial, o planeamento de acções culturais, o planeamento da abertura de balcões bancários ... o que mostra a sua importância. Por isso, mão à obra: é tempo de espreitar os Exercícios Propostos e fazer algumas formulações!

# RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR - O MÉTODO GRÁFICO -

Depois de formular um problema de Programação Linear, muitas vezes é necessário resolvê-lo.

Comecemos por considerar o **problema 1** apresentado quando se abordou a "Formulação de Problemas de Programação Linear" e que se formulava do modo seguinte:

**Seja  $X_i$  a quantidade (em toneladas) de farinha  $i = A ; B$  a produzir semanalmente, com  $X_i \geq 0$ .**

$$\text{MAX } F = 7 \cdot X_A + 10 \cdot X_B$$

**sujeito a:**

$$\begin{aligned} 1 \cdot X_A + 2 \cdot X_B &\leq 20 \\ 3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B &\leq 30 \\ 1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B &\geq 5 \end{aligned}$$

$$X_A, X_B \geq 0.$$

Uma primeira constatação diz respeito ao número de variáveis: temos **duas variáveis**, o que nos permite optar por uma **abordagem gráfica**, já que é fácil a representação gráfica bidimensional. De notar que a existência de três variáveis nos obrigaria a representações gráficas tridimensionais, o que não seria muito prático... Como se torna evidente, num problema de Programação Linear com três ou mais variáveis a resolução por via gráfica está completamente fora de causa... Abordaremos, posteriormente, métodos analíticos que utilizaremos nessas situações (e que também poderiam ser utilizados em problemas com duas variáveis).

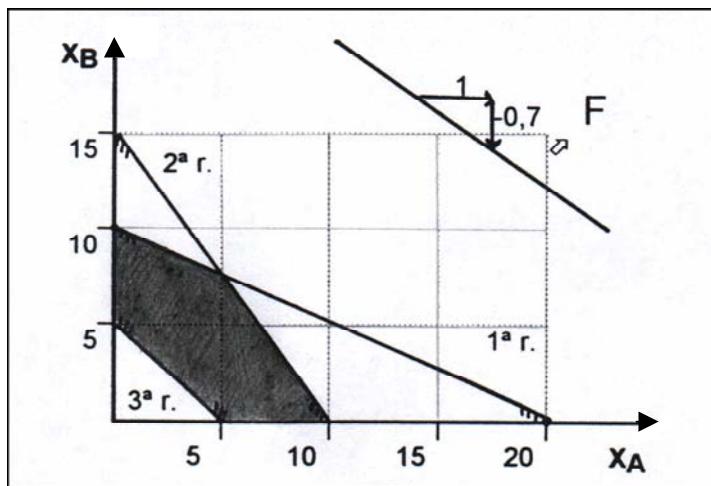
Uma segunda constatação diz respeito à **não negatividade das variáveis**, o que nos reduz ao 1º quadrante do referencial.

Poderemos ainda constatar que **cada restrição corresponde a uma região do plano delimitada por uma recta**.

Finalmente, pode verificar-se que **para cada valor de  $F$ , a função objectivo corresponde a uma recta**. Ou seja,  $F = 7 \cdot X_A + 10 \cdot X_B$  representa uma família de rectas paralelas de declive  $-0,7$  ( $X_B = F / 10 - 7/10 \cdot X_A$ ). Ainda relativamente à função objectivo, poderemos observar que se se pretende **maximizar  $F$**  e se o coeficiente de  $X_A$  é positivo, então interessa-nos **incrementar o valor de  $X_A$** ; analogamente, sendo positivo o coeficiente de  $X_B$ , também nos interessa **incrementar o valor de  $X_B$** . Conclui-se,

assim, que para incrementar o valor da função objectivo deve-se aumentar simultaneamente  $X_A$  e  $X_B$ .

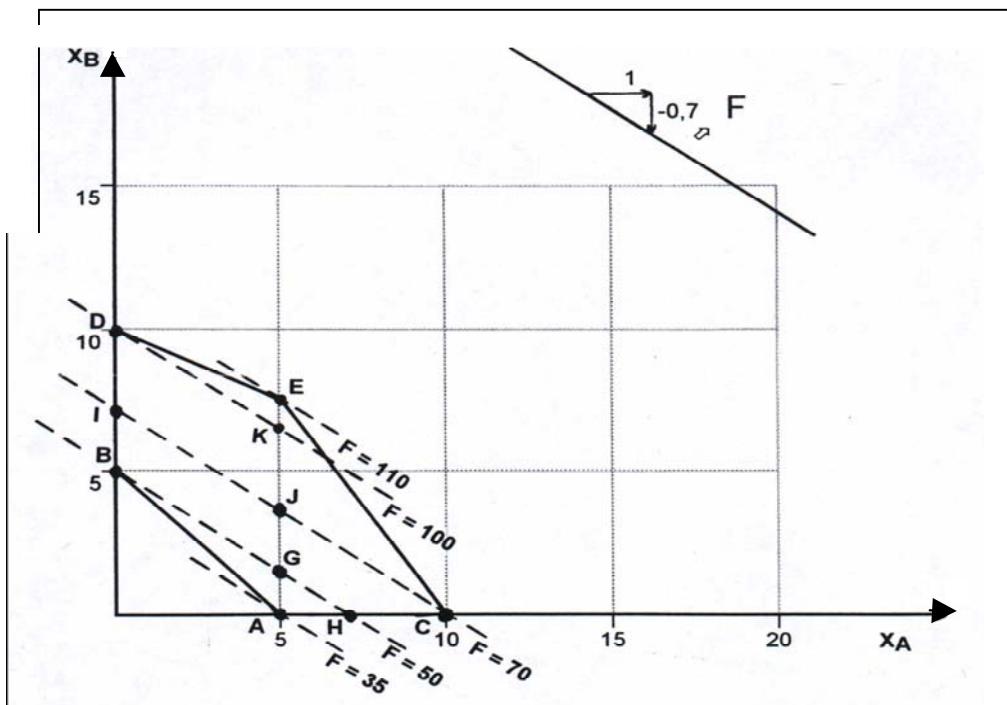
Observemos a representação gráfica das três restrições do problema:



A zona sombreada na figura anterior, corresponde ao conjunto de pontos que respeitam simultaneamente as três restrições, bem como às condições de não negatividade das variáveis, pelo que a designaremos por **espaço de soluções admissíveis**.

A função objectivo, como já tínhamos observado, aumenta de valor quando as variáveis  $X_A$  e  $X_B$  crescem simultaneamente. Assim, as rectas que representam a função objectivo  $F$  deverão ser deslocadas, tanto quanto possível, no sentido ↗.

Observemos, com atenção, os pontos assinalados no espaço de soluções admissíveis representado em seguida:



A **pior** solução admissível corresponde ao ponto **A**. Com efeito, se imaginarmos uma recta de declive -0,7 a movimentar-se no sentido  $\nearrow$ , o primeiro ponto do espaço de soluções admissíveis a ser tocado pela recta seria exactamente o ponto **A** ( 5 ; 0 ), a que corresponde o valor da função objectivo  $F = 35$ .

Uma solução admissível melhor que **A** seria, por exemplo, **B** ( 0 ; 5 ) a que corresponde o valor da função objectivo  $F = 50$ . De notar que uma recta de declive -0,7 que passe por **B** conterá uma infinidade de pontos pertencentes ao espaço de soluções admissíveis. Por exemplo, os pontos **G** ( 5 ; 1,5 ) e **H** ( 50/7, 0 ) correspondem a duas dessa soluções admissíveis com o valor da função objectivo  $F = 50$ .

Prosseguindo o movimento da recta de declive -0,7 no sentido  $\nearrow$ , encontramos os pontos **C** ( 10 ; 0 ), **I** ( 0 ; 7 ) e **J** ( 5 ; 3,5 ) que são algumas das infinitas soluções admissíveis que correspondem ao valor da função objectivo  $F = 70$ .

Continuando a procura de melhores soluções (isto é, prosseguindo o movimento da recta de declive -0,7 no sentido  $\nearrow$ ), encontramos os pontos **D** ( 0 ; 10 ) e **K** ( 5 ; 6,5 ) que são algumas das infinitas soluções admissíveis que correspondem ao valor da função objectivo  $F = 100$ .

Prosseguindo o movimento da recta de declive -0,7 no sentido  $\nearrow$ , tocamos no ponto **E** ( 5 ; 7,5 ) do espaço de soluções admissíveis a que correponde o valor da função objectivo  $F = 110$ . De notar que se prosseguirmos o movimento da recta de declive -0,7 no sentido  $\nearrow$  deixaremos de intersectar o espaço de soluções admissíveis, pelo que não é possível aumentar o valor da função objectivo além do valor 110 (respeitando simultaneamente as três restrições e as condições de não negatividade das variáveis). Podemos, assim, concluir que terminamos a nossa procura da solução óptima: ela corresponde ao ponto **E** ( 5 ; 7,5 ) do espaço de soluções admissíveis e ao valor da função objectivo  $F = 110$ . Ou seja,

$$\boxed{X_A^* = 5,0 ; X_B^* = 7,5} \\ F^* = 110 .$$

Se nos recordarmos do enunciado, poderemos "traduzir" a solução: a FARLACT deve produzir semanalmente 5,0 toneladas de farinha A e 7,5 toneladas de farinha B, sendo de 110 u.m. o correspondente lucro semanal.

Como podemos observar, para procurarmos a solução óptima de um Problema de Programação Linear (com **duas** variáveis) através do **Método Gráfico**, começamos por representar o espaço de soluções admissíveis e identificar uma recta pertencente à família de rectas paralelas correspondente à função objectivo. Em seguida deslocamos essa recta, tanto quanto possível, no sentido que permite *melhorar* o seu valor (*melhorar* = aumentar se se pretender maximizar a função objectivo, ou diminuir o seu valor, caso contrário). A solução óptima será a *última* a ser tocada por essa "recta em movimento".

Uma constatação parece ser imediata: **a solução óptima de um problema de Programação Linear é um vértice do espaço de soluções admissíveis !**

A afirmação anterior não é, no entanto, absolutamente correcta ...

Imaginemos que, no problema que se resolveu para apresentar o Método Gráfico se altera a função objectivo de  $F = 7 \cdot X_A + 10 \cdot X_B$  para  $F = 5 \cdot X_A + 10 \cdot X_B$  (que se pretende maximizar), mantendo-se inalteradas as restrições.

Como se vê a nova função objectivo representa a família de rectas paralelas de declive -0,5, verificando-se um aumento de F quando se desloca uma das rectas referidas no sentido  $\nearrow$ .

O ponto **A** ( 5 ; 0 ) corresponde à pior solução admissível com o valor da função objectivo **F = 25** .

Uma solução admissível melhor que **A** seria, por exemplo, **B** ( 0 ; 5 ) a que corresponde o valor da função objectivo **F = 50**. De notar que uma recta de declive -0,5 que passe por **B** conterá uma infinidade de pontos pertencentes ao espaço de soluções admissíveis ( por exemplo, o ponto **C** ( 10 ; 0 ) ) correspondentes ao valor da função objectivo **F = 50**.

Prosseguindo o movimento da recta de declive -0,5 no sentido ↗ , encontramos os pontos **D** ( 0 ; 10 ) e **E** ( 5 ; 7,5 ) ( e os infinitos pontos no segmento de recta **DE** ) que são soluções correspondentes ao valor da função objectivo **F = 100...** E constatamos não ser possível prosseguir o movimento da recta de declive -0,5 no sentido ↗ sem se deixar de intersectar o espaço de soluções admissíveis, pelo que não é possível aumentar o valor da função objectivo além do valor 100 (respeitando simultaneamente as três restrições e as condições de não negatividade das variáveis).

Podemos, assim, concluir que o "problema alterado" ( com  $F = 5 \cdot X_A + 10 \cdot X_B$  ) admite **múltiplas soluções óptimas**: **D** ( 0 ; 10 ) e **E** ( 5 ; 7,5 ) são soluções óptimas e são vértices do espaço de soluções admissíveis; todos os pontos do segmento de recta **DE** são soluções óptimas do "problema alterado" (sendo 100 o correspondente valor óptimo de F). Poderemos representar analiticamente este resultado do modo seguinte:

$$(X_A^*; X_B^*) = \lambda \cdot (0; 10) + (1 - \lambda) \cdot (5; 7,5) \text{ com } \lambda \in [0; 1]$$

$$F^* = 100 .$$

Na representação analítica anterior, se  $\lambda = 0$ , então  $(X_A^*; X_B^*) = (5; 7,5) = E$ ; se  $\lambda = 1$ , então  $(X_A^*; X_B^*) = (0; 10) = D$  . Se  $\lambda \in ]0; 1[$  , então  $(X_A^*; X_B^*)$  pertence ao segmento de recta **DE** (mas **não** às extremidades desse segmento - os vértices D e E do espaço de soluções admissíveis). De notar que, por exemplo se  $\lambda = 0,5$  ,  $(X_A^*; X_B^*) = (2,50; 8,75)$  - o ponto médio do segmento de recta **DE**; se  $\lambda = 0,1$  ,  $(X_A^*; X_B^*) = (4,5; 7,75)$  , ou seja, à medida que  $\lambda$  aumenta, a solução óptima afasta-se do vértice E, aproximando-se do vértice D.

Poderemos agora voltar à constatação que nos parecera ser imediata: "**a solução óptima de um problema de Programação Linear é um vértice do espaço de soluções admissíveis**" ... Como acabámos de observar, esta afirmação, para estar absolutamente correcta, precisa de um "retoque": "**a solução óptima de um problema de Programação Linear, se for única, é um vértice do espaço de soluções admissíveis**".

A propósito da afirmação anterior, deixo-vos três exercícios muito simples, mas muito interessantes:

**Utilizando o Método Gráfico, determine a solução óptima dos três problemas de Programação Linear seguintes:**

**- 1 -**

$$\text{MAX } F = 0 \cdot X_A + 0 \cdot X_B$$

**sujeito a:**

$$1 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \leq 20$$

$$3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \leq 30$$

$$1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B \geq 5$$

$$X_A, X_B \geq 0.$$

**- 2 -**

$$\text{MAX } F = -2 \cdot X_A + 1 \cdot X_B$$

**sujeito a:**

$$-1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B \leq 5$$

$$1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B \geq 5$$

$$X_A, X_B \geq 0.$$

**- 3 -**

$$\text{MAX } F = -2 \cdot X_A + 2 \cdot X_B$$

**sujeito a:**

$$-1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B \leq 5$$

$$1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B \geq 5$$

$$X_A, X_B \geq 0.$$

Aproveitemos a abordagem ao **Método Gráfico** para discutirmos, com brevidade, algumas questões ligadas à **resolução de problemas de Programação Linear Inteira**.

Consideremos o seguinte problema de Programação Linear Inteira (P.L.I.):

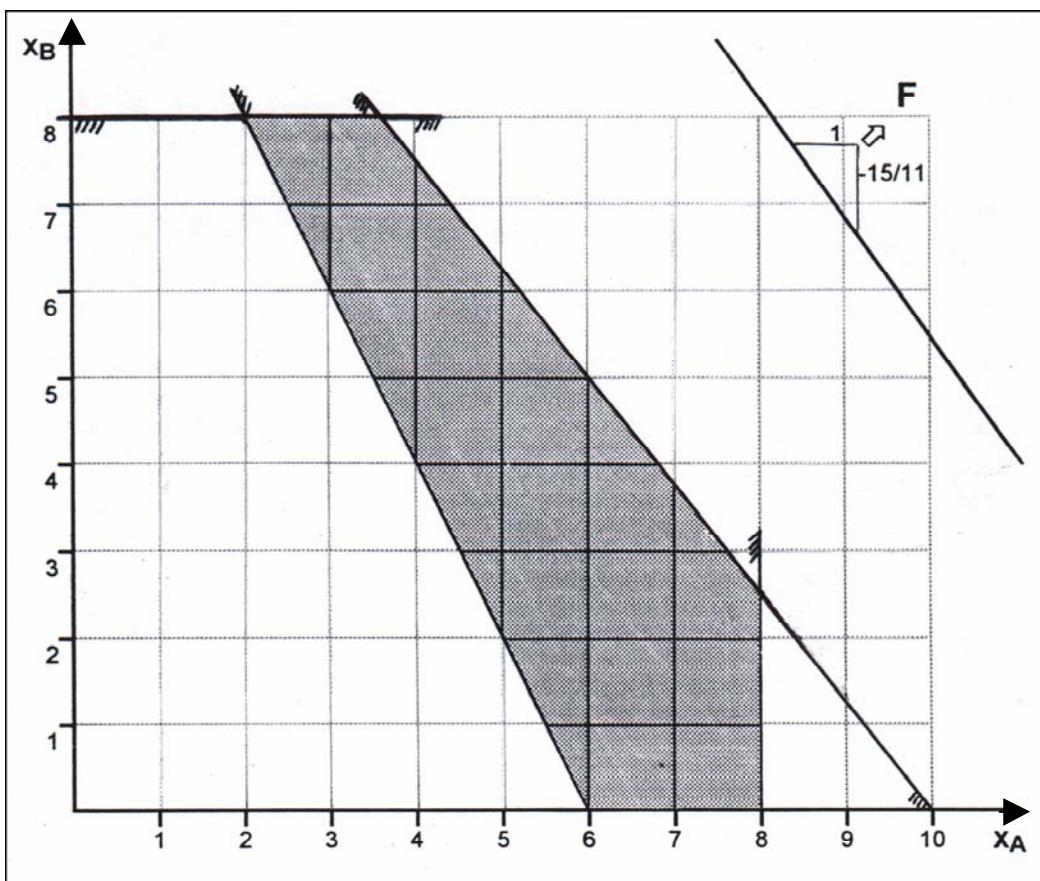
$$\text{MAX } F = 15 \cdot X_A + 11 \cdot X_B$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} X_A &\leq 8 \\ X_B &\leq 8 \\ 20 \cdot X_A + 10 \cdot X_B &\geq 120 \\ 10 \cdot X_A + 8 \cdot X_B &\leq 100 \end{aligned}$$

$X_A, X_B \geq 0$  e inteiiras.

Esbocemos a sua resolução gráfica:



Chamamos "**problema relaxado**" ao problema de Programação Linear resultante da relaxação da condição de integralidade das variáveis (isto é, da sua não consideração) no problema de P.L.I.. Na representação gráfica anterior, sombreou-se o espaço de soluções admissíveis do problema relaxado. A resolução gráfica do problema relaxado é muito fácil, conduzindo à solução óptima  $(X_A^*; X_B^*)_{PL} = (8; 2,5)$  a que corresponde o valor óptimo da função objectivo  $F_{PL}^* = 147,5$ .

Como se pode observar, esta solução óptima não respeita a condição de integralidade da variável  $X_A^*$ , pelo que não é "aceitável" como solução óptima do problema de P.L.I. .

Observando, com muita atenção, a representação gráfica apresentada, podemos concluir que o espaço de soluções admissíveis do problema de P.L.I. é constituído unicamente pelos "pontos inteiros" assinalados na zona sombreada. Assim, a solução óptima do problema de P.L.I., é o último desses pontos a ser tocado pela recta de declive  $-15/11$  em movimento no sentido ↗, ou seja,  $(X_A^*; X_B^*)_{PLI} = (6; 5)$  a que corresponde o valor óptimo da função objectivo  $F_{PLI}^* = 145,0$ .

Dois comentários devem ser feitos:

- Dado que o espaço de soluções admissíveis do problema de P.L.I. está contido no espaço de soluções admissíveis do correspondente problema relaxado, pode afirmar-se que **o valor óptimo da função objectivo no problema de P.L.I. será sempre pior ou igual ao valor óptimo da função objectivo no correspondente problema relaxado.**
- **Não se pode resolver um problema de P.L.I. "arredondando" a solução óptima do correspondente "problema relaxado" para a solução inteira admissível "mais próxima".** Se tal tivesse sido feito no problema acima apresentado, arredondaríamos  $(8; 2,5)$  para  $(8; 2)$  (já que  $(8; 3)$  não é solução do problema !), obtendo-se  $F = 142,0$  (valor inferior ao valor óptimo: 145,0). É interessante notar que uma outra solução inteira admissível "mais próxima" de  $(8; 2,5)$  seria  $(7; 3)$  a que corresponderia o valor  $F = 138,0$ ... É preciso "afastarmo-nos" mais de  $(8; 2,5)$  para encontrarmos  $(6; 5)$  que vem a ser a solução óptima do problema de P.L.I. !

A propósito da utilização do Método Gráfico na resolução de problemas de Programação Linear Inteira, deixo-vos um último exercício muito simples, mas muito interessante:

**Considere o seguinte problema de optimização:**

$$\text{MAX } F = 5 \cdot X_A + 6 \cdot X_B$$

**sujeito a:**

$$\begin{aligned} 2 \cdot X_A + 3 \cdot X_B &\leq 16 \\ 3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B &\leq 17 \end{aligned}$$

a ) Utilizando o "Método Gráfico", resolva-o considerando:

- I)  $X_A, X_B \geq 0$  (Programação Linear)
- II)  $X_A \geq 0$  e inteira ;  $X_B \geq 0$  (Programação Linear Mista)
- III)  $X_A \geq 0$  ;  $X_B \geq 0$  e inteira (Programação Linear Mista)
- IV)  $X_A, X_B \geq 0$  e inteiros (Programação Linear Inteira)

b ) Compare as soluções obtidas na alínea a).

**PROGRAMAÇÃO LINEAR :**  
**CONCEITOS FUNDAMENTAIS**

Consideremos um **problema de Programação Linear** apresentado na sua forma standard:

$$\text{Maximizar } F = c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + c_3 \cdot X_3 + \dots + c_n \cdot X_n$$

**sujeito a:**

$$a_{11} \cdot X_1 + a_{12} \cdot X_2 + a_{13} \cdot X_3 + \dots + a_{1n} \cdot X_n = b_1$$

$$a_{21} \cdot X_1 + a_{22} \cdot X_2 + a_{23} \cdot X_3 + \dots + a_{2n} \cdot X_n = b_2$$

$$\dots$$

$$a_{m1} \cdot X_1 + a_{m2} \cdot X_2 + a_{m3} \cdot X_3 + \dots + a_{mn} \cdot X_n = b_m$$

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \geq 0$$

Este problema pode escrever-se numa forma mais compacta:

$$\text{Maximizar } F = \sum_{k=1}^n c_k \cdot X_k \quad [1]$$

**sujeito a:**

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot X_k = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad [2]$$

$$X_k \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad [3]$$

Utilizando a notação matricial poderemos ainda simplificar a apresentação do problema:

$$\text{Maximizar } F = C \cdot X \quad [1]$$

**sujeito a:**

$$A \cdot X = b \quad [2]$$

$$X \geq 0 \quad [3]$$

Ruy Costa, 2011

Na representação anterior, o vector das incógnitas **X** é um vector coluna ( $n \times 1$ ), o vector dos coeficientes da função objectivo **C** é um vector linha ( $1 \times n$ ), a matriz dos

coeficientes das restrições **A** é uma matriz ( $m \times n$ ) e o vector dos termos independentes **b** é um vector coluna ( $m \times 1$ ). De notar que **0** é o vector nulo do tipo ( $n \times 1$ ).

**Relativamente a um problema de Programação Linear expresso na forma standard, com  $n$  variáveis e  $m$  restrições ( sendo  $n > m$  ), podem apresentar-se as seguintes definições :**

- **Solução** é todo o  $n$ -uplo ( $v_1, v_2, \dots, v_n$ ) associado às variáveis ( $X_1, X_2, \dots, X_n$ ) que verificam as restrições [ 2 ].
- **Solução admissível** é toda a solução que verifica as condições de não negatividade [ 3 ].
- **Solução básica ( s.b. )** é toda a solução constituída por ( $n - m$ ) variáveis não básicas (variáveis com valor nulo), sendo as restantes  $m$  variáveis básicas determinadas univocamente. Relativamente a uma solução básica, designa-se por **base** o conjunto das variáveis básicas.

[ Para que as  $m$  variáveis básicas possam ser determinadas univocamente, ter-se-á que exigir que a submatriz de **A**, correspondente aos coeficientes das variáveis básicas - que viremos a designar por **B** - seja regular, isto é, que o seu determinante seja não nulo. ]

- **Solução básica admissível ( s.b.a. )** é toda a solução básica que verifica as condições de não negatividade [ 3 ].
- **Solução básica admissível não degenerada** é toda a s.b.a. cujas variáveis básicas tomem valores estritamente positivos. Se alguma variável básica de uma s.b.a. for nula, estar-se-á perante uma **solução básica admissível degenerada**.
- **Solução óptima** é toda a solução que torna máximo o valor da função objectivo [ 1 ]. [ Geralmente, só nos interessa determinar uma solução óptima que seja admissível ... ]

Sintetizando, poderemos apresentar o quadro seguinte:

<b>n-uplo (<math>v_1, v_2, \dots, v_n</math>) associado às variáveis (<math>X_1, X_2, \dots, X_n</math>)</b>			
<b>Verifica as Restrições [ 2 ] ?</b>			
<b>Sim <math>\Rightarrow</math> É solução</b>		<b>Não <math>\Rightarrow</math> Não é solução</b>	
<b>Verifica as Condições de Não Negatividade das Variáveis [ 3 ] ?</b>			
<b>Sim <math>\Rightarrow</math> É solução admissível</b>		<b>Não <math>\Rightarrow</math> É solução não admissível</b>	
<b>É básica ?</b>		<b>É básica ?</b>	
<b>Sim: s.b.a.</b>	<b>Não: s.n.b.a</b>	<b>Sim: s.b.n.a.</b>	<b>Não: s.n.b.n.a</b>

Para uma melhor assimilação das noções apresentadas, recordemo-nos do **problema 1** apresentado quando se abordou a "Formulação de Problemas de Programação Linear" e retomado na apresentação do "Método Gráfico":

$$\text{MAX } F = 7 \cdot X_A + 10 \cdot X_B$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} 1 \cdot X_A + 2 \cdot X_B &\leq 20 \\ 3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B &\leq 30 \\ 1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B &\geq 5 \end{aligned}$$

$$X_A, X_B \geq 0.$$

É fácil passar-se à forma standard:

$$\text{MAX } F = 7 \cdot X_A + 10 \cdot X_B + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + 0 \cdot F_3$$

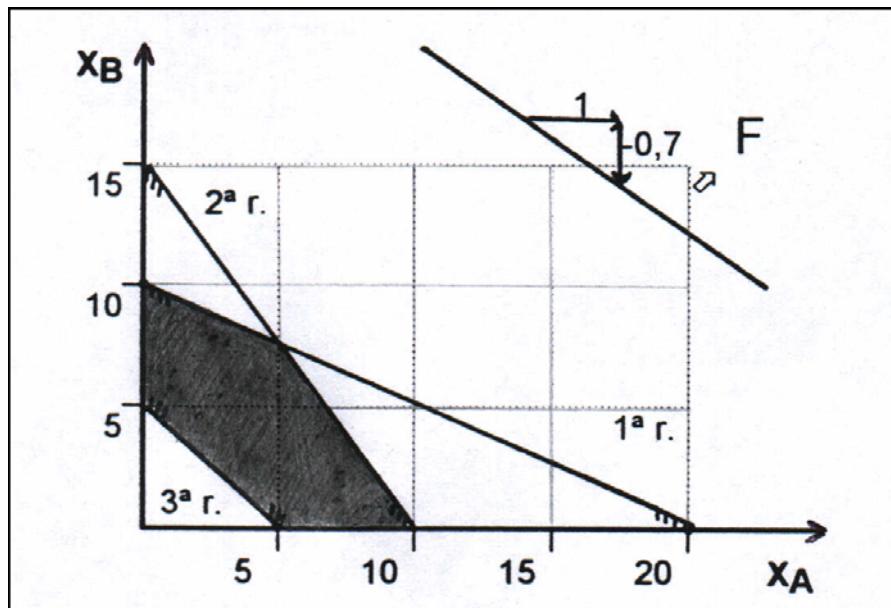
sujeito a:

$$\begin{aligned} 1 \cdot X_A + 2 \cdot X_B + 1 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + 0 \cdot F_3 &= 20 \\ 3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B + 0 \cdot F_1 + 1 \cdot F_2 + 0 \cdot F_3 &= 30 \\ 1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 - 1 \cdot F_3 &= 5 \end{aligned}$$

$$X_A, X_B, F_1, F_2, F_3 \geq 0.$$

Ruy Costa, 2011

Recordemos a representação gráfica das três restrições do problema:



Aproveitemos a figura anterior (em que se sombreou o **espaço de soluções admissíveis**) para observar os pontos que se indica no quadro seguinte e classificá-los adequadamente:

Ponto nº	Variáveis					Não é solução	É solução				Obs.
	X <sub>A</sub>	X <sub>B</sub>	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>		s.b.a	s.n.b.a.	s.b.n.a.	s.n.b.n.a.	
1	0	0	20	30	-5	✓					Origem do Ref.
2	10	5	0	-10	10	✓					∈ 1 <sup>a</sup> restr.
3	7	-1	15	11	1					✓	
4	-10	15	0	30	0			✓			Inters. 1 <sup>a</sup> /3 <sup>a</sup> restr.
5	-1	6	11	9	0					✓	∈ 3 <sup>a</sup> restr.
6	5	0	15	15	0		✓				Vértice esp.sol.adm.
7	6	0	14	12	1			✓			∈ eixo X <sub>A</sub>
8	10	0	10	0	5		✓				Vértice esp.sol.adm.
9	20/3	5	10/3	0	20/3			✓			∈ 2 <sup>a</sup> restr.
10*	5	7,5	0	0	7,5		✓				Vértice esp.sol.adm.
11	2	9	0	6	6			✓			∈ 1 <sup>a</sup> restr.
12	0	10	0	10	5		✓				Vértice esp.sol.adm.
13	0	8	4	14	3			✓			∈ eixo X <sub>B</sub>
14	0	5	10	20	0		✓				Vértice esp.sol.adm.
15	3	2	13	17	0			✓			∈ 3 <sup>a</sup> restr.
16	5	5	5	5	5			✓			∈ Int. esp.sol.adm.
17	7	3	7	3	5			✓			∈ Int. esp.sol.adm.

Nota (\*) : Destacou-se o ponto nº 10 correspondente à solução óptima do problema.

Relembremo-nos que o problema em análise tem 3 restrições e 5 variáveis (na forma standard). Assim, uma solução para ser básica deverá ser constituída por duas variáveis não básicas (isto é, nulas).

Uma primeira constatação pode ser feita: **todas as soluções básicas admissíveis são vértices do espaço de soluções admissíveis !** Podemos observar que o ponto nº 4 é um vértice do espaço de soluções (admissíveis, ou não) e é uma solução básica não admissível; se determinarmos o vértice do espaço de soluções resultante da intersecção da 2<sup>a</sup> com a 3<sup>a</sup> restrição poderemos concluir estar perante uma outra solução básica não admissível - em geral, **todas as soluções básicas são vértices do espaço de soluções !**

Observemos que **os pontos pertencentes ao interior do espaço de soluções admissíveis não têm variáveis nulas**. Os pontos pertencentes a uma aresta ( mas não a um vértice ! ) apresentam apenas uma variável nula - a variável de folga correspondente à restrição que origina a aresta, ou a a variável correspondente ao eixo que origina a aresta. **Os pontos correspondentes aos vértices têm duas variáveis nulas** a(s) variável(eis) de folga correspondente(s) à(s) restrição(ões) e/ou a(s) variável(eis) correspondente(s) ao(s) eixo(s) que originam o vértice.

Consideremos agora uma pequena variante do problema apresentado:

$$\text{MAX } F = 5 \cdot X_A + 10 \cdot X_B$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} 1 \cdot X_A + 2 \cdot X_B &\leq 20 \\ 3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B &\leq 30 \\ 1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B &\geq 5 \\ 1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B &\leq 12,5 \end{aligned}$$

$$X_A, X_B \geq 0.$$

É fácil passar-se à forma standard:

$$\text{MAX } F = 5 \cdot X_A + 10 \cdot X_B + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + 0 \cdot F_3 + 0 \cdot F_4$$

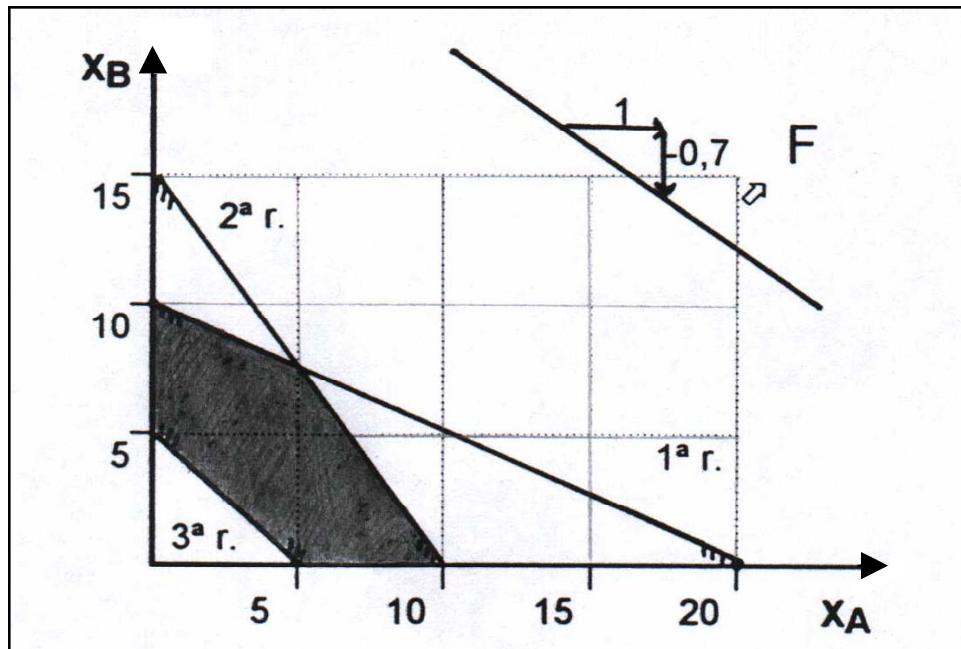
sujeito a:

$$\begin{aligned} 1 \cdot X_A + 2 \cdot X_B + 1 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + 0 \cdot F_3 + 0 \cdot F_4 &= 20 \\ 3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B + 0 \cdot F_1 + 1 \cdot F_2 + 0 \cdot F_3 + 0 \cdot F_4 &= 30 \\ 1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 - 1 \cdot F_3 + 0 \cdot F_4 &= 5 \\ 1 \cdot X_A + 1 \cdot X_B + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + 0 \cdot F_3 + 1 \cdot F_4 &= 12,5 \end{aligned}$$

$$X_A, X_B, F_1, F_2, F_3 \geq 0.$$

Ruy Costa, 2011

Esbocemos a resolução gráfica do problema:



A solução óptima do problema corresponde à aresta definida pelos pontos  $(5, 7,5)$  e  $(0, 10)$ , com o valor óptimo da função objectivo igual a 100.

Aproveitemos a figura anterior (em que se sombreou o **espaço de soluções admissíveis**) para observar os pontos, correspondentes a soluções, que se indica no quadro seguinte e classificá-los adequadamente:

Ponto nº	Variáveis						É solução				Obs.
	X <sub>A</sub>	X <sub>B</sub>	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>4</sub>	s.b.a	s.n.b.a.	s.b.n.a.	s.n.b.n.a.	
1	7	-1	15	11	1	6,5				✓	
2	-10	15	0	30	0	7,5			✓		Inters. 1 <sup>a</sup> /3 <sup>a</sup> restr.
3	-1	6	11	9	0	7,5				✓	∈ 3 <sup>a</sup> restr.
4	5	0	15	15	0	7,5	✓				Vértice esp.sol.adm.
5	6	0	14	12	1	6,5		✓			∈ eixo X <sub>A</sub>
6	10	0	10	0	5	2,5	✓				Vértice esp.sol.adm.
7	20/3	5	10/3	0	20/3	5/6		✓			∈ 2 <sup>a</sup> restr.
8*	5	7,5	0	0	7,5	0	✓ Degen !				Vértice esp.sol.adm.
9*	2	9	0	6	6	1,5		✓			∈ 1 <sup>a</sup> restr.
10*	0	10	0	10	5	2,5	✓				Vértice esp.sol.adm.
11	0	8	4	14	3	4,5		✓			∈ eixo X <sub>B</sub>
12	0	5	10	20	0	7,5	✓				Vértice esp.sol.adm.
13	3	2	13	17	0	7,5		✓			∈ 3 <sup>a</sup> restr.
14	5	5	5	5	5	2,5		✓			∈ Int. esp.sol.adm.
15	7	3	7	3	5	2,5		✓			∈ Int. esp.sol.adm.

Nota (\*) : Os pontos nº 8, 9 e 10 são algumas das soluções óptimas do problema.

Este problema tem 4 restrições e 6 variáveis (na forma standard). Assim, uma solução para ser básica deverá ser constituída por duas variáveis não básicas (isto é, nulas).

Como anteriormente, pode constatar-se que **todas as soluções básicas são vértices do espaço de soluções**.

Neste problema podemos observar duas particularidades:

- Está-se perante uma situação de multiplicidade de soluções óptimas (de que os pontos nº 8, 9 e 10 são alguns exemplos). Os pontos nº 8 e 10 representam soluções básicas, isto é, correspondem a vértices do espaço de soluções admissíveis. O ponto nº 9 representa uma solução não básica, isto é, não corresponde a um vértice do espaço de soluções admissíveis.
- Das cinco soluções básicas admissíveis indicadas no quadro, uma delas (a correspondente ao ponto nº 8) é **degenerada**. Com efeito, relativamente a essa solução têm-se **três variáveis nulas**... Ora, referiu-se anteriormente que, neste problema, "**uma solução para ser básica deverá ser constituída por duas variáveis não básicas (isto é, nulas)**".

Haverá aqui alguma contradição? Não, apenas a necessidade de precisar um pouco melhor este conceito: num problema de Programação Linear com **m restrições e n variáveis** (na forma standard), se uma solução tiver **exactamente (n-m) variáveis nulas**, estaremos perante uma **solução básica não degenerada**; se, pelo contrário, o **número de variáveis nulas exceder (n-m)**, estaremos perante uma **solução básica degenerada**.

Normalmente um vértice é definido pela intersecção de duas restrições. Quando um vértice é definido pela intersecção de mais de duas restrições, estar-se-á perante uma solução básica degenerada - no exemplo, o vértice correspondente

ao ponto nº 8 é definido pela intersecção de três restrições... isto é, "uma a mais", pelo que teremos uma variável nula "a mais"... [ Podemos imaginar que este vértice corresponde à "sobreposição de três vértices"; daí que a situação de degenerescência possa trazer algumas dificuldades aos algoritmos "normais" ... ]

Precisemos, então, a caracterização da noção "**solução básica**": num problema de Programação Linear com  $m$  restrições e  $n$  variáveis (na forma standard), uma solução é básica se tiver, pelo menos,  $(n-m)$  variáveis nulas. Se o número de variáveis nulas for exactamente igual a  $(n-m)$  estaremos perante uma **solução básica não degenerada**; se, pelo contrário, o número de variáveis nulas exceder  $(n-m)$ , estaremos perante uma **solução básica degenerada**.

Recordemo-nos dos aspectos mais importantes da resolução de um problema de Programação linear com duas variáveis, pelo "Método Gráfico": depois de representado o espaço de soluções admissíveis é importante representar uma recta pertencente à família de rectas paralelas associada à função objectivo; de seguida identificamos o sentido de movimento dessa recta correspondente ao aumento (num problema de maximização) do valor da função objectivo; finalmente, desloca-se a recta no sentido desejado até que, pela última vez, ela toque o espaço de soluções admissíveis - nessa altura, está identificada a solução óptima do problema.

Já se referiu que se um problema de Programação Linear admitir uma única solução óptima, ela é obrigatoriamente um vértice do espaço de soluções admissíveis. Numa situação de multiplicidade de soluções óptimas, sabe-se que, pelo menos, uma das soluções óptimas é um vértice do espaço de soluções admissíveis.

Referiu-se agora que todo o vértice do espaço de soluções admissíveis é uma solução básica.

Assim, resulta clara a **importância das soluções básicas** na pesquisa da solução óptima de um problema de Programação Linear. Um algoritmo para resolver um problema deste tipo deverá analisar as soluções básicas admissíveis para encontrar a(s) solução(ões) óptima(s).

Um algoritmo muito rudimentar consistiria em **enumerar** todas as soluções básicas admissíveis, determinar (para cada uma delas) o valor correspondente da função objectivo e, finalmente seleccionar a(s) solução(ões) que optimizam o valor da função objectivo...

Uma pergunta pertinente surge de imediato: **Quantas soluções básicas admissíveis tem um problema de Programação Linear ?** Para responder a esta questão lembremo-nos que numa solução básica há tantas variáveis básicas (normalmente não nulas) quantas as restrições. Assim, num problema de Programação Linear com  $m$  restrições e  $n$  variáveis (na forma standard) [  $n > m$  ], uma solução é básica se tiver  $m$  variáveis básicas e  $(n-m)$  variáveis não básicas. Só que nem toda a solução básica é admissível... Assim, poderemos, apenas, indicar um **limite superior para o número de soluções básicas admissíveis de um problema de Programação Linear com  $m$  restrições e  $n$  variáveis (na forma standard)** :  $C^n_m = n! / (m! / (n-m)!)$ .

Tomemos, como exemplo, a variante do problema 1 que apresentamos anteriormente - um problema de Programação Linear com 4 restrições e 6 variáveis (na forma standard). Para este (muito pequeno!) problema, esse limite superior viria igual a **15**. Na realidade, o espaço de soluções admissíveis tem apenas **5** vértices (ainda que um deles corresponda a uma s.b.a.degenerada) !

Num problema (ainda considerado pequeno) com 10 restrições e 15 variáveis, o limite superior do número de soluções básicas admissíveis subiria já a 3003... Como facilmente se comprehende, a enumeração de soluções básicas não é uma via razoável para

se pesquisar a solução óptima de um problema de Programação Linear ... Torna-se necessário encontrar um algoritmo "mais inteligente"...

Antes de pensarmos num algoritmo para a resolução de problemas de Programação Linear, convém realçar que todas as considerações feitas a partir da análise de um problema resolúvel pelo Método Gráfico são válidas em problemas com um número mais elevado de variáveis.

Aliás, recordando-nos de algumas noções da Álgebra Linear e Geometria Analítica, poderemos constatar muito facilmente que **cada restrição de um problema de Programação Linear representa um hiperplano**.

Por outro lado, é fácil mostrar que **um hiperplano é um conjunto convexo**. Sabendo que **a intersecção de conjuntos convexos é ainda um conjunto convexo**, torna-se imediata a conclusão: **o espaço de soluções admissíveis de um problema de Programação Linear é um conjunto convexo!** (E, dado o carácter linear das restrições, não se trata de um qualquer conjunto convexo, mas sim de um **politopo convexo**)

Uma solução admissível de um problema de Programação Linear é um ponto desse politopo convexo; uma solução básica admissível é um vértice desse politopo convexo.

**A função objectivo de um problema de Programação Linear representa também um hiperplano.**

Prova-se que **o máximo / mínimo de uma função linear sobre um politopo convexo corresponde a, pelo menos, um vértice do politopo**.

Os resultados anteriores podem ser sintetizados no **Teorema Fundamental da Programação Linear**:

**Dado um problema de Programação Linear, na forma**

**Maximizar  $F = c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + c_3 \cdot X_3 + \dots + c_n \cdot X_n$**

**sujeito a:**

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot X_1 + a_{12} \cdot X_2 + a_{13} \cdot X_3 + \dots + a_{1n} \cdot X_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot X_1 + a_{22} \cdot X_2 + a_{23} \cdot X_3 + \dots + a_{2n} \cdot X_n &= b_2 \end{aligned}$$

$$\dots$$

$$a_{m1} \cdot X_1 + a_{m2} \cdot X_2 + a_{m3} \cdot X_3 + \dots + a_{mn} \cdot X_n = b_m$$

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \geq 0$$

**se existe uma solução admissível, então existe uma solução básica admissível, e se existe uma solução óptima admissível, então existe uma solução básica óptima admissível.**

Podemos, assim, justificar as referências feitas à **importância das soluções básicas** na pesquisa da solução óptima de um problema de Programação Linear. Apresentaremos em seguida um algoritmo para resolver problemas de Programação Linear que, de um "modo inteligente" analisa as soluções básicas admissíveis para encontrar a(s) solução(ões) óptima(s) do problema.

## INTRODUÇÃO AO ALGORITMO SIMPLEX PRIMAL

Consideremos o seguinte problema de Programação Linear:

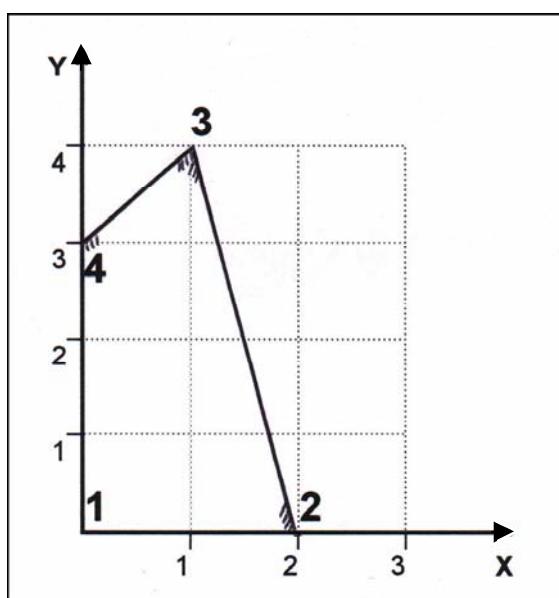
**Maximizar  $F = 4 \cdot X + 3 \cdot Y$**

**sujeito a:**

$$\begin{aligned} -1 \cdot X + 1 \cdot Y &\leq 3 \\ 4 \cdot X + 1 \cdot Y &\leq 8 \end{aligned}$$

$$X, Y \geq 0$$

Na figura seguinte representa-se as restrições e os quatro vértices do espaço de soluções admissíveis correspondente a este problema.



Relativamente a este problema é fácil enumerar os vértices do espaço de soluções admissíveis, calcular o respectivo valor da função objectivo e, seleccionar a solução óptima, isto é, o vértice correspondente ao maior valor da função objectivo - o que faremos no quadro seguinte:

Vértice			$F = 4 \cdot X + 3 \cdot Y$	Obs.
nº	X	Y		
<b>1</b>	0	0	0	sol.não óptima
<b>2</b>	2	0	8	sol.não óptima
<b>3</b>	1	4	16	solução óptima
<b>4</b>	0	3	9	sol.não óptima

Assim, é fácil indicar a solução óptima deste problema:  $X^* = 1$  ;  $Y^* = 4$ , a que corresponde  $F^* = 16$ .

No entanto, como já se referiu, normalmente é incomportável estar a enumerar os vértices do espaço de soluções admissíveis de um problema de Programação Linear (com n variáveis e m restrições), pelo que é necessário utilizar um algoritmo mais eficiente.

Seguidamente, faremos uma **introdução ao Algoritmo Simplex Primal** (na versão destinada à Maximização de uma função objectivo), indicando e comentando os passos a seguir para a resolução do exercício apresentado.

#### - 1º - Re-escrever o problema na forma standard

$$\text{Maximizar } F = 4 \cdot X + 3 \cdot Y + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} -1 \cdot X + 1 \cdot Y + 1 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 &= 3 \\ 4 \cdot X + 1 \cdot Y + 0 \cdot F_1 + 1 \cdot F_2 &= 8 \end{aligned}$$

$$X, Y, F_1, F_2 \geq 0$$

#### - 2º - Arbitrar uma solução básica inicial

Relativamente ao problema em análise (com 2 restrições e 4 variáveis, na forma standard), uma solução básica é constituída por 2 variáveis básicas [recorda-se que o número de variáveis básicas é igual ao número de restrições] e 2 ( $2 = 4 - 2$ ) variáveis não básicas (isto é, nulas).

 **Regra usual:** Sempre que possível, toma-se as variáveis de folga como variáveis básicas iniciais.

[ De notar que tal só é possível quando todas as restrições são do tipo  $\leq$  ! ]

Assim, ter-se-á:

S.b.a. inicial: (  $X = 0$  ;  $Y = 0$  ;  $F_1 = 3$  ;  $F_2 = 8$  ), com  $F = 0$ .

### **- 3º - Verificação da optimalidade da solução em análise**

Pretendemos responder à pergunta: Será que a solução em análise já é óptima ?

Para tal, é necessário

 re-escrever a função objectivo apenas em função das variáveis não básicas.

Normalmente, isto é, durante a aplicação do algoritmo, nesta altura a função objectivo não está escrita apenas em função das variáveis não básicas, pelo que é preciso fazê-lo. No entanto, dado que acabámos de tomar como variáveis básicas as variáveis de folga (e como essas variáveis têm coeficiente nulo na função objectivo), a função objectivo já está escrita apenas em função das variáveis não básicas:

A pergunta "**Será que a solução em análise já é óptima ?**" é equivalente a uma outra: "**Valerá a pena incrementar alguma das variáveis não básicas ?**". A resposta é muito fácil de dar depois de se ter a função objectivo expressa apenas em função das variáveis não básicas, originando o

## Critério de optimalidade:

Quando a função objectivo se encontra expressa apenas em função das variáveis não básicas e algum desses coeficientes for positivo, a solução em análise não é óptima, isto é, ainda será possível incrementar o valor da função objectivo (bastando, para tal, incrementar uma variável não básica com coeficiente positivo).

Conclusão: a s.b.a. em análise ( $X = 0$ ;  $Y = 0$ ;  $F_1 = 3$ ;  $F_2 = 8$ ) não é óptima já que qualquer incremento nas variáveis X e Y se traduzirá num incremento (que se deseja) na função objectivo.

Dado que o Algoritmo Simplex Primal, em cada iteração, só permite a entrada de uma nova variável para a base [ base é o conjunto das variáveis básicas ] (com a consequente saída de uma variável que estava na base), correspondendo ao salto de um vértice do espaço de soluções admissíveis para outro, surge uma nova preocupação ...

#### - 4º - Selecção da variável que entra na base

Presentemente a variável X vale 0 e a função objectivo vale 0 ( $F = 4.X + 3.Y + 0.F_1 + 0.F_2 + 0$ ). Se se incrementar a variável X de  $\Delta X = 1$  unidade, a função objectivo vem incrementada de  $\Delta F = 4 \cdot \Delta X = 4$  unidades. Se se incrementar a variável Y de  $\Delta Y = 1$  unidade, a função objectivo vem incrementada de  $\Delta F = 3 \cdot \Delta Y = 3$  unidades. Deve notar-se que se trata de incrementos da função objectivo devidos a incrementos unitários das variáveis... Um maior "incremento unitário" não está forçosamente associado a um maior "incremento total"...

De acordo com o Algoritmo Simplex Primal,

👉 Critério de selecção da variável que entra na base:

Deve ser escolhida a variável (até aí não básica) cujo incremento unitário se traduz no maior aumento da função objectivo, isto é, deve ser escolhida a variável que, na função objectivo (escrita apenas em função das variáveis não básicas) tenha o maior valor positivo como coeficiente.

Assim, selecciona-se a variável X para entrar na base. Teremos, agora, que pensar na

#### - 5º - Selecção da variável que sai da base

Para determinarmos a variável que deve deixar a base, deveremos tentar responder a uma outra questão: **Qual o incremento máximo que a variável seleccionada para entrar na base pode tomar?**

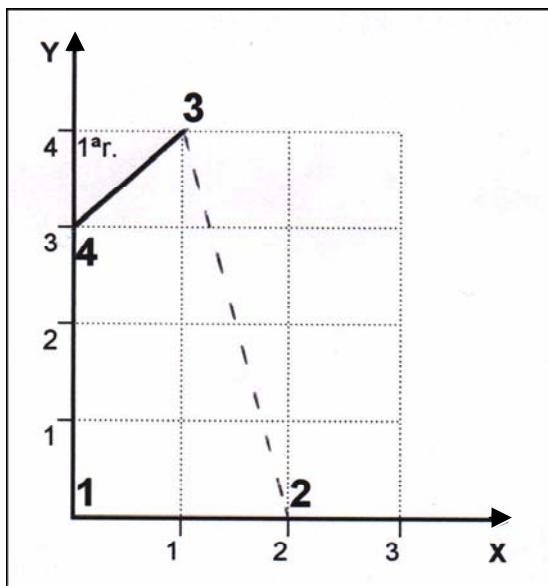
A s.b.a. ainda em análise é ( $X = 0 ; Y = 0 ; F_1 = 3 ; F_2 = 8$ ), correspondendo à base ( $F_1 = 3 ; F_2 = 8$ ). Na próxima iteração, a variável X vai ser incrementada, entrando na base. Uma das variáveis que actualmente estão na base deixa-la-á. A variável Y, actualmente fora da base, continuará fora da base, isto é, continuar-se-á a ter  $Y = 0$ .

Analisemos agora as restrições do problema:

$$\begin{array}{rcl} -1 \cdot X + 1 \cdot Y + 1 \cdot F_1 & = 3 & -1 \cdot X + 1 \cdot F_1 & = 3 \\ & \rightarrow Y = 0 & \rightarrow & \\ 4 \cdot X + 1 \cdot Y + 0 \cdot F_1 + 1 \cdot F_2 & = 8 & 4 \cdot X & + 1 \cdot F_2 = 8 \end{array}$$

Observemos, com atenção, a **1ª restrição** escrita apenas em função da única variável básica que lhe está associada ( $F_1$ ) e da variável X que pretendemos incrementar:  $-1 \cdot X + 1 \cdot F_1 = 3$ . Se incrementarmos a variável X de uma unidade, a variável  $F_1$  sofre um incremento de uma unidade (passando de 3 para 4). Genericamente, se incrementarmos de  $\Delta X$  a variável X, a variável  $F_1$  vem também incrementada de  $\Delta X$ . Tal ocorre porque  $-1 \cdot X + 1 \cdot F_1 = 3 \Leftrightarrow F_1 = (3 + 1 \cdot X) / 1$ , isto é, o sinal negativo do coeficiente de X na primeira restrição expressa apenas em função da única variável básica que lhe está associada ( $F_1$ ) e da variável X que pretendemos incrementar ( $-1 \cdot X + 1 \cdot F_1 = 3$ ) mostra que a primeira

restrição não limita o aumento da variável X, o que aliás se pode observar na figura seguinte.

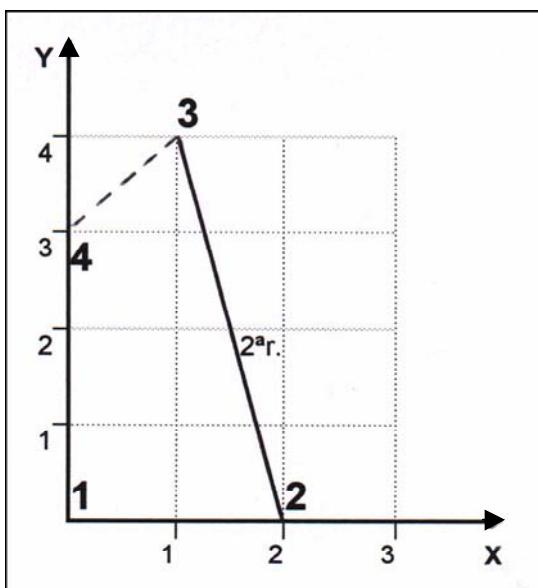


A solução em análise corresponde ao vértice 1 e pretende-se incrementar a variável X, mantendo nula a variável Y, isto é, pretendemos deslocar-nos ao longo do eixo X, para a direita. Como se vê, essa deslocação não é limitada pela 1ª restrição.

Observemos agora, com atenção, a 2ª restrição escrita apenas em função da única variável básica que lhe está associada ( $F_2$ ) e da variável X que pretendemos incrementar:  $4 \cdot X + 1 \cdot F_2 = 8$ . Se incrementarmos a variável X de uma unidade, a variável  $F_2$  sofre um decremento de quatro unidades. Assim, ao aumentarmos o valor da variável X, é preciso ter-se em atenção que **a variável  $F_2$  diminui à medida que X aumenta e que não pode tomar valores negativos!** Assim, o maior valor que X pode tomar estará associado ao menor valor possível de  $F_2$ , isto é  $F_2 = 0$ :

$$4 \cdot X + 1 \cdot F_2 = 8 \Rightarrow 4 \cdot X_{\max} + 1 \cdot 0 = 8 \Leftrightarrow X_{\max} = 8 / 4 = 2$$

**Conclusão: a segunda restrição limita o aumento da variável X ao máximo de 2 unidades**, o que se pode observar na figura seguinte.



A deslocação ao longo do eixo X, para a direita é limitada pela 2<sup>a</sup> restrição, correspondendo ao valor  $X_{\max} = 2$ .

Acabámos de descobrir que X entrará na base com o valor 2, devendo F<sub>2</sub> sair da base!

Generalizando os conceitos apresentados, poderemos enunciar o

☞ **Critério de selecção da variável que sai na base:**

Considere-se as restrições do problema de Programação Linear, na sua apresentação matricial  $A \cdot X = b$ , cada uma delas escrita apenas em função da única variável básica que lhe está associada e da(s) variável(es) não básicas.

Seja  $X_k$  a variável que se pretende incrementar.

O incremento máximo de  $X_k$  será dado por

$$\boxed{\text{Max } X_k = \min_i (b_i / a_{ik}) \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ para } a_{ik} > 0 \text{ (*)}.}$$

Se o incremento máximo de  $X_k$  for obtido pelo quociente relativo à r-ésima restrição, isto é, se

$$\text{Max } X_k = \min_i (b_i / a_{ik}) = b_r / a_{rk},$$

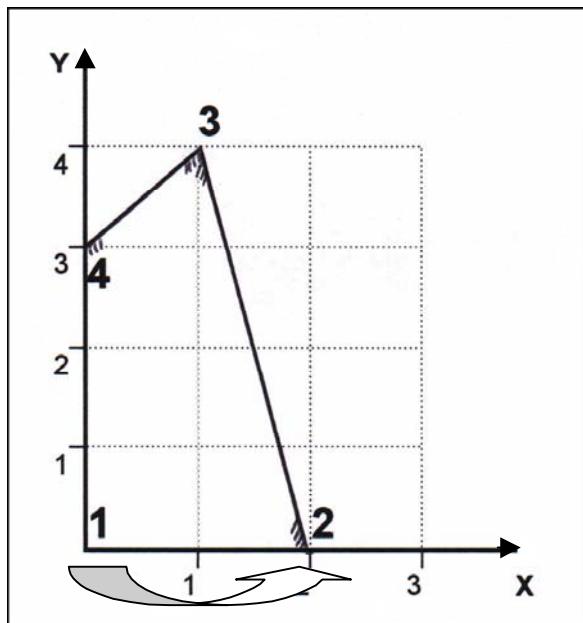
a variável básica correspondente à r-ésima restrição deverá deixar a base, cedendo o seu lugar (mas não necessariamente o seu valor) à variável  $X_k$  que entra para a base.

Nota(\*): Se  $a_{ik} \leq 0$ , a i-ésima restrição não limita o aumento da variável  $X_k$ .

Retomemos o problema em análise: sabemos que agora  $X = 2$ ,  $Y = 0$  e  $F_2 = 0$ . Para se determinar o valor da variável F<sub>1</sub> na nova base, basta recorrermos à 1<sup>a</sup> restrição -  $X + Y + F_1 = 3$  e substituirmos X por 2, obtendo-se  $F_1 = 5$ . O valor da função objectivo obtém-se facilmente:  $F = 4 \cdot X + 3 \cdot Y = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 8$ .

**Assim, a nova s.b.a. é : (  $X = 2$  ;  $Y = 0$  ;  $F_1 = 5$  ;  $F_2 = 0$  ), com  $F = 8$  .**

Antes de iniciarmos a segunda iteração, realçemos um aspecto para o qual se chamara já a vossa atenção: o critério de selecção da variável que entra na base selecciona a variável correspondente ao maior "incremento unitário" da função objectivo e, um maior "incremento unitário" não está forçosamente associado a um maior "incremento total"...



Se observarmos a representação gráfica do espaço de soluções admissíveis deste problema, poderemos constatar que o Algoritmo Simplex Primal fez-nos saltar do vértice **1** correspondente à origem do referencial, para o vértice **2** ( $X = 2 ; Y = 0$ ) a que corresponde o valor  $F = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 8$ . Tal ocorreu porque o incremento unitário da função objectivo associado à variável  $X$  era de 4 unidades e o incremento unitário da função objectivo associado à variável  $Y$  era de "apenas" 3 unidades (pelo que se seleccionou a variável  $X$  para entrar na base).

O que aconteceria se tivéssemos saltado do vértice **1**, não para o vértice **2**, mas para o outro vértice adjacente, o **4** ( $X = 0 ; Y = 3$ ) ? A função objectivo teria passado de 0 para  $F = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9$ . Ora cá está um caso em que se tivesse feito entrar para a base a variável  $Y$  correspondente a um menor incremento unitário (3), em vez da variável  $X$  (4), a função objectivo teria tido um maior incremento total ! Então **porque é que o Algoritmo Simplex Primal não selecciona para entrar na base a variável que provoca um maior incremento total na função objectivo (em vez do maior incremento unitário)** ? Resposta: por uma questão de simplicidade! É muito mais simples implementar informaticamente o critério de selecção da variável a entrar para a base adoptado pelo Algoritmo Simplex Primal do que o critério alternativo que se referiu... E para além de mais simples é seguramente mais rápido em cada iteração... mas pode conduzir a um maior número de iterações... embora se obtenha uma eficiência global superior.

### Começemos agora a 2<sup>a</sup> iteração !

Como se referiu, a nova s.b.a. é : ( $X = 2 ; Y = 0 ; F_1 = 5 ; F_2 = 0$  ), com  $F = 8$ . Torna-se pertinente a pergunta: **Será que é óptima ?** [ Claro que nós já sabemos, por simples análise da representação gráfica, que a resposta é negativa... Mas a pergunta é pertinente nesta fase da resolução de um qualquer problema de Programação Linear ! ]

Esta questão leva-nos, de novo ao terceiro passo do Algoritmo Simplex Primal, já apresentado

- 3º [2ªIter.] - Verificação da optimalidade da solução em análise

Recordemo-nos que é necessário

 re-escrever a função objectivo apenas em função das variáveis não básicas.

Neste momento, a função objectivo deve ser re-escrita apenas em função das variáveis Y e F<sub>2</sub>.

Recordemo-nos que  $F = 4 \cdot X + 3 \cdot Y + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + 0$  e que a segunda restrição é  $4 \cdot X + 1 \cdot Y + 1 \cdot F_2 = 8$ . Poderemos re-escrever esta restrição  $X = -\frac{1}{4} \cdot Y - \frac{1}{4} \cdot F_2 + 2$  e fazer a correspondente substituição na função objectivo:  $F = 4 \cdot (-\frac{1}{4} \cdot Y - \frac{1}{4} \cdot F_2 + 2) + 3 \cdot Y + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + 0$ , obtendo-se, assim,

## Recordando-nos do

 Critério de optimalidade:

Quando a função objectivo se encontra expressa apenas em função das variáveis não básicas e algum desses coeficientes for positivo, a solução em análise não é óptima, isto é, ainda será possível incrementar o valor da função objectivo (bastando, para tal, incrementar uma variável não básica com coeficiente positivo),

poderemos concluir que a s.b.a. em análise ( $X = 2$  ;  $Y = 0$  ;  $F_1 = 5$  ;  $F_2 = 0$ ) não é óptima já que qualquer incremento na variável  $Y$  se traduzirá num incremento (que se deseja) na função objectivo, pelo que poderemos avançar para

-  $4^o$  [2ºIter.] - Selecção da variável que entra na base

De acordo com o

### Critério de selecção da variável que entra na base:

Deve ser escolhida a variável (até aí não básica) cujo incremento unitário se traduz no maior aumento da função objectivo, isto é, deve ser escolhida a variável que, na função objectivo (escrita apenas em função das variáveis não básicas) tenha o maior valor positivo como coeficiente,

não temos qualquer dúvida: a variável  $Y$  deve entrar para a base. Teremos, agora, que pensar na

**- 5º [2ºIter.] - Selecção da variável que sai da base**

Recordemos as restrições do problema:

$$\begin{aligned} -1 \cdot X + 1 \cdot Y + 1 \cdot F_1 &= 3 \\ 4 \cdot X + 1 \cdot Y + 1 \cdot F_2 &= 8 \end{aligned}$$

Da segunda restrição, tem-se  $X = -1/4 \cdot Y - 1/4 \cdot F_2 + 2$ , que se pode substituir na primeira restrição:  $-1(-1/4 \cdot Y - 1/4 \cdot F_2 + 2) + 1 \cdot Y + 1 \cdot F_1 = 3$ , obtendo-se, então

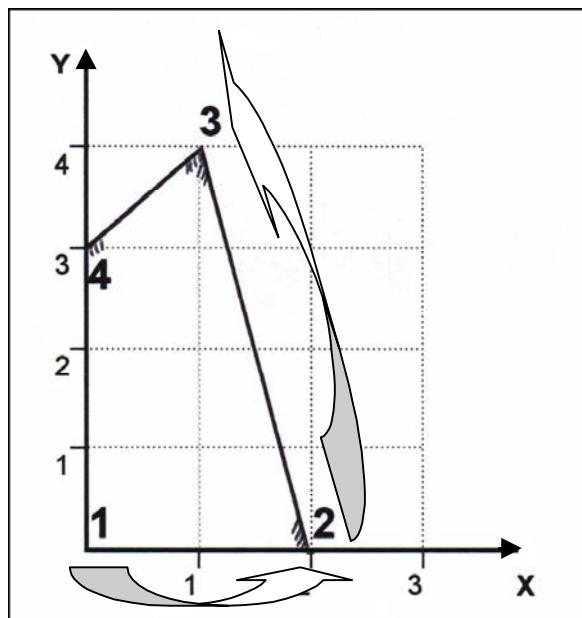
$$\begin{aligned} 0 \cdot X + 5/4 \cdot Y + 1 \cdot F_1 + 1/4 \cdot F_2 &= 5 & \frac{5}{4} \cdot Y + 1 \cdot F_1 &= 5 \\ 4 \cdot X + 1 \cdot Y + 0 \cdot F_1 + 1 \cdot F_2 &= 8 & \text{Como } F_2 = 0, \text{ temos} & \\ &&& 4 \cdot X + 1 \cdot Y &= 8 \end{aligned}$$

Poderemos, agora, determinar o maior incremento possível para Y:

$Y_{\max} = \min(5/5/4 ; 8/1) = 5/5/4 = 4 \Rightarrow F_1$  deve sair da base, ou seja,  $Y = 4$ ;  $F_1 = 0$ ;  $F_2 = 0$ . Substituindo na segunda restrição, obtém-se  $X = 1$ . O valor correspondente da função objectivo obtém-se facilmente:  $F = 4 \cdot X + 3 \cdot Y = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 16$ .

**Assim, a nova s.b.a. é : (  $X = 1$  ;  $Y = 4$  ;  $F_1 = 0$  ;  $F_2 = 0$  ), com  $F = 16$  .**

Podemos observar o "percurso gráfico" seguido pelo Algoritmo Simplex Primal: inicia-se com a s.b.a. correspondente ao vértice **1** ( $0 ; 0$ ) com  $F = 0$ , salta para o vértice **2** ( $2 ; 0$ ) a que corresponde  $F = 8$  e agora saltou para o vértice **3** ( $1 ; 4$ ) a que corresponde  $F = 16$ :



Estar-se-á perante a solução óptima do problema? Ainda que já saibamos previamente a resposta a esta questão, vamos ver como é que o Algoritmo Simplex Primal nos dá a resposta.

Comecemos então a 3<sup>a</sup> iteração!

**- 3º [3ªIter.] - Verificação da optimalidade da solução em análise**

Recordemo-nos que é necessário

☞ re-escrever a função objectivo apenas em função das variáveis não básicas.

Neste momento, a função objectivo deve ser re-escrita apenas em função das variáveis  $F_1$  e  $F_2$ . Comecemos por manipular algebricamente as restrições:

$$\begin{array}{rcl} -1 \cdot X + 1 \cdot Y + 1 \cdot F_1 = 3 & & 1 \cdot X - 1 \cdot Y - 1 \cdot F_1 = -3 \quad [1] \\ 4 \cdot X + 1 \cdot Y + 1 \cdot F_2 = 8 & \Leftrightarrow & 4 \cdot X + 1 \cdot Y + 1 \cdot F_2 = 8 \quad [2] \\ & + & \\ & \hline & 5 \cdot X - 1 \cdot F_1 + 1 \cdot F_2 = 5 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow X = 1 + 1/5 \cdot F_1 - 1/5 \cdot F_2 \quad [3]$$

De [1] e [3] obtém-se  $Y = 4 - 4/5 \cdot F_1 - 1/5 \cdot F_2 \quad [4]$

Recordemo-nos que  $F = 4 \cdot X + 3 \cdot Y + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + 0$ . Se nesta expressão substituirmos X e Y, respectivamente, pelos segundos membros das igualdades [3] e [4], obteremos  $F = 4 \cdot (1 + 1/5 \cdot F_1 - 1/5 \cdot F_2) + 3 \cdot (4 - 4/5 \cdot F_1 - 1/5 \cdot F_2) + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + 0$ , ou seja,  $F = 0 \cdot X + 0 \cdot Y - 8/5 \cdot F_1 - 7/5 \cdot F_2 + 16$ .

$\uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow$   
 coeficientes das variáveis valor da função  
 não básicas objectivo

Recordando-nos do

☞ Critério de optimalidade:

Quando a função objectivo se encontra expressa apenas em função das variáveis não básicas e algum desses coeficientes for positivo, a solução em análise não é óptima,

Ruy Coimbra 2011

poderemos concluir que a s.b.a. em análise ( $X = 1 ; Y = 4 ; F_1 = 0 ; F_2 = 0$ ) a que corresponde  $F = 16$  já é óptima, isto é

A solução óptima do problema é:

$(X^* = 1 ; Y^* = 4 ; F_1^* = 0 ; F_2^* = 0)$ , com  $F^* = 16$ .

Poderemos agora recordar os passos a seguir na resolução de um problema de Programação Linear com o **Algoritmo Simplex Primal**, que se acabou de introduzir:

- 1º - **Re-escrever o problema na forma standard**

☞ Introduzir variáveis de folga.

- 2º - **Arbitrar uma solução básica inicial**

☞ Regra usual: Sempre que possível, toma-se as variáveis de folga como variáveis básicas iniciais.

**REPETIR**

- 3º - **Verificação da optimalidade da solução em análise**

☞ re-escrever a função objectivo apenas em função das variáveis não básicas.

☞ Critério de optimalidade:

Quando a função objectivo se encontra expressa apenas em função das variáveis não básicas e algum desses coeficientes for positivo, a solução em análise não é óptima.

- 4º - **Selecção da variável que entra na base**

☞ Critério de selecção da variável que entra na base:

Deve ser escolhida a variável (até aí não básica) cujo incremento unitário se traduz no maior aumento da função objectivo, isto é, deve ser escolhida a variável que, na função objectivo (escrita apenas em função das variáveis não básicas) tenha o maior valor positivo como coeficiente.

- 5º - **Selecção da variável que sai da base**

☞ Critério de selecção da variável que sai na base:

Considere-se as restrições do problema de Programação Linear, na sua apresentação matricial  $A \cdot X = b$ , cada uma delas escrita apenas em função da única variável básica que lhe está associada e da(s) variável(eis) não básicas.

Seja  $X_k$  a variável que se pretende incrementar.

O incremento máximo de  $X_k$  será dado por

$$\text{Max } X_k = \min_i (b_i / a_{ik}) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{para } a_{ik} > 0 \quad (*)$$

Se o incremento máximo de  $X_k$  for obtido pelo quociente relativo à r-ésima restrição, isto é, se

$$\text{Max } X_k = \min_i (b_i / a_{ik}) = b_r / a_{rk},$$

a variável básica correspondente à r-ésima restrição deverá deixar a base, cedendo o seu lugar (mas não necessariamente o seu valor) à variável  $X_k$  que entra para a base.

**Nota (\*):** Se  $a_{ik} \leq 0$ , a i-ésima restrição não limita o aumento da variável  $X_k$ .

**ATÉ SE ATINGIR A SOLUÇÃO ÓPTIMA**

## O ALGORITMO SIMPLEX PRIMAL

Consideremos o problema de Programação Linear já apresentado na "Introdução ao Algoritmo Simplex Primal":

**Maximizar  $F = 4 \cdot X + 3 \cdot Y$**

**sujeito a:**

$$\begin{aligned} -1 \cdot X + 1 \cdot Y &\leq 3 \\ 4 \cdot X + 1 \cdot Y &\leq 8 \end{aligned}$$

$$X, Y \geq 0$$

Comecemos por re-escrever o problema na forma standard:

**Maximizar  $F = 4 \cdot X + 3 \cdot Y + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2$**

**sujeito a:**

$$\begin{aligned} -1 \cdot X + 1 \cdot Y + 1 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 &= 3 \\ 4 \cdot X + 1 \cdot Y + 0 \cdot F_1 + 1 \cdot F_2 &= 8 \end{aligned}$$

$$X, Y, F_1, F_2 \geq 0$$

Re-escrevamos  $F = 4 \cdot X + 3 \cdot Y + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2$

na forma equivalente  $F - 4 \cdot X - 3 \cdot Y + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 = 0$ .

Poderemos, então, apresentar o problema na forma seguinte:

**Max. F**

$$\begin{aligned} -1 \cdot X + 1 \cdot Y + 1 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 &= 3 \\ 4 \cdot X + 1 \cdot Y + 0 \cdot F_1 + 1 \cdot F_2 &= 8 \\ F - 4 \cdot X - 3 \cdot Y + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$X, Y, F_1, F_2 \geq 0,$$

ou na representação tabular equivalente:

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.
	-1	1	1	0	3
	4	1	0	1	8
F	-4	-3	0	0	0

O quadro anterior diz-se um "**Quadro do SIMPLEX**" pois apresenta as seguintes características:

- **É possível identificar uma variável básica associada a cada restrição.**

Uma variável pode considerar-se básica associada a uma restrição se o seu coeficiente na linha que representa essa restrição no Quadro do Simplex (QS) for unitário, sendo nulos todos os demais coeficientes dessa variável nas restantes linhas do QS (incluindo a linha que representa a função objectivo). É habitual utilizar-se a "coluna exterior esquerda" para identificar as variáveis básicas; relativamente a este problema ter-se-ia:

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.
F <sub>1</sub>	-1	1	1	0	3
F <sub>2</sub>	4	1	0	1	8
F	-4	-3	0	0	0

- Num QS a função objectivo está sempre representada apenas em função das variáveis não básicas. Assim, o coeficiente das variáveis básicas na linha que representa a função objectivo, é sempre nulo (como aliás decorria da primeira característica apresentada anteriormente).

De realçar que se apresentará o Algoritmo Simplex Primal para resolver problemas de maximização ( $\text{Max } F = c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + \dots + c_n \cdot X_n$ ) e que, nos QS a função objectivo será escrita na forma  $F - c_1 \cdot X_1 - c_2 \cdot X_2 - \dots - c_n \cdot X_n = 0$ .

- No Algoritmo Simplex Primal, um Quadro do Simplex corresponde sempre a uma solução básica admissível, isto é, a um vértice do espaço de soluções admissíveis.

- Os termos independentes (T.I.), indicados na "coluna exterior direita", correspondem aos valores assumidos pelas variáveis básicas e pela função objectivo, relativas à s.b.a. a que corresponde o QS. Assim, a leitura do QS apresentado permite concluir-se estarmos perante a base ( $F_1 = 3$ ;  $F_2 = 8$ ) a que corresponde o valor da função objectivo  $F = 0$ . Como  $X$  e  $Y$  não pertencem à base, conclui-se que  $X = Y = 0$ .

O Algoritmo Simplex Primal baseia-se nos princípios apresentados na "Introdução ao Algoritmo Simplex Primal" e na utilização dos "Quadros do Simplex" que condensam a informação relevante de um modo mais eficiente. Os cálculos aparentemente fastidiosos apresentados na "Introdução ao Algoritmo Simplex Primal" serão feitos de um modo expedito graças à utilização dos QS.

**Assim, um primeiro passo para a resolução de um problema de Programação Linear consiste na elaboração de um primeiro "Quadro do Simplex" correspondente a uma s.b.a. inicial.**

☞ Desde já se chama a atenção para o facto da representação tabular inicial de um problema de Programação Linear não ser obrigatoriamente um "Quadro do Simplex"! ... Com efeito, basta que uma restrição seja do tipo  $\geq$  para que a representação tabular inicial do problema não seja um "Quadro do Simplex"! Voltaremos posteriormente a esta questão...

Relativamente ao problema em análise o primeiro "Quadro do Simplex" é o seguinte:

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.
F <sub>1</sub>	-1	1	1	0	3
F <sub>2</sub>	4	1	0	1	8
F	-4	-3	0	0	0

Recordemo-nos de algumas noções apresentadas na "Introdução ao Algoritmo Simplex Primal": Depois de se ter arbitrado uma s.b.a. inicial, a primeira preocupação consistia em **verificar a optimalidade da solução em análise**. O critério de optimalidade enunciava: **Quando a função objectivo se encontra expressa apenas em função das variáveis não básicas e algum desses coeficientes for positivo, a solução em análise não é óptima.**

Dado que na apresentação tabular utilizada no Algoritmo Simplex Primal a função objectivo  $\text{Max } F = c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + \dots + c_n \cdot X_n$  é escrita na forma  $F - c_1 \cdot X_1 - c_2 \cdot X_2 - \dots - c_n \cdot X_n = 0$ , poderemos apresentar o

☞ **Critério de optimalidade do Algoritmo Simplex Primal:**

**Quando num "Quadro do Simplex" se pode observar, pelo menos, um coeficiente negativo na linha correspondente à função objectivo, a solução em análise não é óptima.**

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.
F <sub>1</sub>	-1	1	1	0	3
F <sub>2</sub>	4	1	0	1	8
F	-4	-3	0	0	0

Por simples inspecção do "Quadro do Simplex" apresentado acima, poder-se-á concluir que a correspondente s.b.a (X = 0 ; Y = 0 ; F<sub>1</sub> = 3 ; F<sub>2</sub> = 8) não é óptima.

É, também, muito fácil indicar o

☞ Critério do Algoritmo Simplex Primal para selecção da variável que entra na base:

Deve ser incrementada a variável com o coeficiente mais negativo na linha correspondente à função objectivo.

Assim, por simples inspecção do "Quadro do Simplex" apresentado acima, poder-se-á concluir que **a variável X deve ser incrementada** (já que o seu coeficiente na linha correspondente à função objectivo é o mais negativo: -4), o que se pode assinalar do modo seguinte:

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.
F <sub>1</sub>	-1	1	1	0	3
F <sub>2</sub>	4	1	0	1	8
F	<b>- 4</b>	-3	0	0	0

↑

Qual o incremento máximo a dar à variável X? E qual das variáveis F<sub>1</sub> ou F<sub>2</sub> deve deixar a base? Para responder a estas questões deveremos recordar-nos do

☞ Critério do Algoritmo Simplex Primal para selecção da variável que sai na base:

Considere-se as restrições do problema de Programação Linear, na sua apresentação matricial  $A \cdot X = b$ , cada uma delas escrita apenas em função da única variável básica que lhe está associada e da(s) variável(eis) não básicas.

Seja  $X_k$  a variável que se pretende incrementar.

O incremento máximo de  $X_k$  será dado por

$$\boxed{\max X_k = \min_i \left( \frac{b_i}{a_{ik}} \right) \quad i = 1, 2, \dots, m \text{ para } a_{ik} > 0 \ (*)}$$

Se o incremento máximo de  $X_k$  for obtido pelo quociente relativo à r-ésima restrição, isto é, se

$$\max X_k = \min_i \left( \frac{b_i}{a_{ik}} \right) = \frac{b_r}{a_{rk}},$$

a variável básica correspondente à r-ésima restrição deverá deixar a base, cedendo o seu lugar (mas não necessariamente o seu valor) à variável  $X_k$  que entra para a base.

Nota(\*): Se  $a_{ik} \leq 0$ , a i-ésima restrição não limita o aumento da variável  $X_k$ .

Assim, deveremos começar por calcular os incrementos  $\Delta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$  para todas as restrições  $i = 1, 2, \dots, m$  desde que  $a_{ik} > 0$ . O novo valor de  $X_k$  será igual a  $\Delta = \min(\Delta_i)$ . Aproveitando o "Quadro do Simplex" poderemos acrescentar uma "coluna exterior à direita":

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.	$\Delta_i$	
F <sub>1</sub>	-1 (*)	1	1	0	3	—	(*)
F <sub>2</sub>	4	1	0	1	8	8 / 4	←
F	-4	-3	0	0	0	$\Delta = 2$	

Nota(\*):  $a_{11} \leq 0$ , pelo que a 1ª restrição não limita o aumento da variável X.

Como o mínimo dos valores de  $\Delta_i$  corresponde à segunda restrição (segunda linha do "Quadro do Simplex", assinalou-se à direita essa linha com ←, indicando ser nesta restrição que se vai proceder à troca de variáveis na base. Assim, entra para a base a variável X e sai da base a variável F<sub>2</sub> (que era a variável básica "associada à segunda restrição"). F<sub>1</sub> manter-se-á a variável básica "associada à primeira restrição".

Podemos desde já indicar a base correspondente ao próximo "Quadro do Simplex": (F<sub>1</sub>, X) e proceder ao seu "preenchimento prévio":

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.
F <sub>1</sub>	0		1		
X	1		0		2
F	0		0		

O "preenchimento prévio" efectuado corresponde apenas à indicação da nova base e do valor que a variável que acaba de entrar na base vai tomar (X tomará o valor 2, que foi o valor de  $\Delta$  determinado no Quadro anterior).

☞ Para preenchermos o resto do Quadro deveremos começar por **escrever e destacar a "Linha-Pivot"**, isto é a linha correspondente à restrição onde se operou a troca de variáveis na base.

Para se obter a "Linha-Pivot" deve dividir-se os coeficientes da correspondente linha do Quadro anterior pelo coeficiente (nessa linha) da variável que acaba de entrar para a base. Assim, obtém-se o coeficiente unitário dessa variável nessa linha.

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.
	4	1	0	1	8
F					

Dividindo por 4

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.
	1	1/4	0	1/4	2
F					

Completemos o Quadro com os elementos do "preenchimento prévio", e destaquemos a "Coluna-Pivot" correspondente à variável que acabou de entrar na base. Será a partir da "Coluna-Pivot" e da "Linha-Pivot" que se fará o preenchimento do resto do Quadro.

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.
F <sub>1</sub>	0		1		
X	1	1/4	0	1/4	2
F	0		0		

Para obtermos uma linha do novo Quadro "multiplicaremos" a "Linha-Pivot" do novo Quadro pelo simétrico do coeficiente do Quadro anterior correspondente à variável que

entrou para a base e "soma-se" à linha correspondente do Quadro anterior. ( Hum... muito complicado de se enunciar... mas, muito simples de fazer ! )

Comecemos pela primeira linha:

Quadro Anterior	$F_1$	X	Y	$F_1$	$F_2$	T.I.
	-1	1	1	1	0	3

Simétrico do coeficiente do Quadro anterior correspondente à variável que entrou para a base =  $-(-1) = +1$

$(+1) \times$	1	$1/4$	0	$1/4$	2
+	-1	1	1	0	3
<hr/>					
Nova Linha	0	$5/4$	1	$1/4$	5
	X	$5/4$	1	$1/4$	T.I.
$F_1$	0				5
X	1	$1/4$	0	$1/4$	2
F	0		0		

Passemos à terceira linha:

Quadro Anterior	$F$	X	Y	$F_1$	$F_2$	T.I.
	-4		-3	0	0	0

Simétrico do coeficiente do Quadro anterior correspondente à variável que entrou para a base =  $-(-4) = +4$

$(+4) \times$	1	$1/4$	0	$1/4$	2
	-4	-3	0	0	0
<hr/>					
Nova Linha	0	-2	0	1	8
	X	$5/4$	1	$1/4$	T.I.
$F_1$	0				5
X	1	$1/4$	0	$1/4$	2
F	0	-2	0	1	8

E já está ! O segundo "Quadro do Simplex" ! Olhando para a última linha constatamos não se tratar ainda da solução óptima:

	X	Y	$F_1$	$F_2$	T.I.
$F_1$	0	$5/4$	1	$1/4$	5
X	1	$1/4$	0	$1/4$	2
F	0	-2	0	1	8

Ruy Costa, 2011

A variável Y deve entrar para a base. Determinemos agora qual a variável que deve sair da base:

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.	$\Delta_i$
F <sub>1</sub>	0	5/4	1	1/4	5	5/(5/4)
X	1	1/4	0	1/4	2	2/(1/4)
F	0	-2	0	1	8	$\Delta = 4$

↑

←

Conclusão: F<sub>1</sub> deve deixar a base, cedendo o seu lugar à variável Y.

Avancemos agora mais rapidamente para o terceiro "Quadro do Simplex":

"Preenchimento prévio":

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.
Y	0	1			4
X	1	0			
F	0	0			

"Linha-Pivot":

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.
	0	5/4	1	1/4	5
F					

Dividir a primeira linha por 5/4 →

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.
	0	1	4/5	1/5	4
F					

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.
Y	0	1	4/5	1/5	4
X	1	0			

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.
F	0	0			

Segunda linha:

Quadro Anterior	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.
	1	1/4	0	1/4	2

Simétrico do coeficiente do Quadro anterior correspondente à variável que entrou para a base = - ( 1/4 )

- ( 1/4 ) x	0	1	4/5	1/5	4
+	1	1/4	0	1/4	2
Nova Linha	1	0	-1/5	1/5	1

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.
Y	0	1	4/5	1/5	4



Passemos à terceira linha:

Quadro Anterior	<b>X</b>	<b>Y</b>	<b>F<sub>1</sub></b>	<b>F<sub>2</sub></b>	T.I.
F	0	-2	0	1	8

Simétrico do coeficiente do Quadro anterior correspondente à variável que entrou para a base = - (-2) = + 2

$(+2) \times$	0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	4	
	0	-2	0	1	8	
<b>Nova Linha</b>	0	0	$\frac{8}{5}$	$\frac{7}{5}$	16	
X	Y	<b>F<sub>1</sub></b>	<b>F<sub>2</sub></b>	T.I.		
0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	4		
X	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	
F	0	0	$\frac{8}{5}$	$\frac{7}{5}$	16	

E já está ! O terceiro "Quadro do Simplex" ! Olhando para a última linha constatamos tratar-se (finalmente...) da solução óptima ! (os coeficientes das variáveis não básicas na linha correspondente à função objectivo são positivos )

Ou seja, tal como já havíamos determinado gráficamente,

$$X^* = 1 ; Y^* = 4 ; F_1^* = 0 ; F_2^* = 0 ; F^* = 16 .$$

Poderemos, agora, recordar de modo mais condensado a resolução do problema

Maximizar  $F = 4 \cdot X + 3 \cdot Y$

sujeito a:

$$\begin{aligned} -1 \cdot X + 1 \cdot Y &\leq 3 \\ 4 \cdot X + 1 \cdot Y &\leq 8 \end{aligned}$$

$$X, Y \geq 0$$

pelo Algoritmo Simplex Primal:

	<b>X</b>	<b>Y</b>	<b>F<sub>1</sub></b>	<b>F<sub>2</sub></b>	<b>T.I.</b>	$\Delta_i$	Quadro Inicial
<b>F<sub>1</sub></b>	-1	1	1	0	3	—	
<b>F<sub>2</sub></b>	4	1	0	1	8	$8/4$	
<b>F</b>	-4	-3	0	0	0	$\Delta = 2$	$X = 0 ; Y = 0$

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.	$\Delta_i$	F = 0
F <sub>1</sub>	0	5/4	1	1/4	5	5/(5/4)	1 <sup>a</sup> Iteração
X	1	1/4	0	1/4	2	2/(1/4)	
F	0	-2	0	1	8	$\Delta = 4$	X = 2 ; Y = 0 F = 8

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.		2 <sup>a</sup> Iteração
Y	0	1	4/5	1/5	4		
X	1	0	-1/5	1/5	1		X* = 1 ; Y* = 4 F* = 16 Sol. Óptima
F	0	0	8/5	7/5	16		

Resolvamos agora um novo problema de Programação Linear utilizando o Algoritmo Simplex Primal:

<b>Maximizar F = 2 . X + 3 . Y</b>
sujeto a:
1 . X + 3 . Y ≤ 12
1 . X + 1 . Y ≤ 6
2 . X + 1 . Y ≤ 10
X , Y ≥ 0

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	T.I.	$\Delta_i$	Quadro Inicial
F <sub>1</sub>	1	3	1	0	0	12	12/3	
F <sub>2</sub>	1	1	0	1	0	6	6/1	X = 0 ; Y = 0 F = 0
F <sub>3</sub>	2	1	0	0	1	10	10/1	
F	-2	-3	0	0	0	0	$\Delta = 4$	

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	T.I.	$\Delta_i$	1 <sup>a</sup> Iteração
Y	1/3	1	1/3	0	0	4	4/(1/3)	
F <sub>2</sub>	2/3	0	-1/3	1	0	2	2/(2/3)	X = 0 ; Y = 4 F = 12
F <sub>3</sub>	5/3	0	-1/3	0	1	6	6/(5/3)	
F	-1	0	1	0	0	12	$\Delta = 3$	

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	T.I.		2 <sup>a</sup> Iteração
Y	0	1	1/2	-1/2	0	3		
X	1	0	-1/2	3/2	0	3		X* = 3 ; Y* = 3 F* = 15
F <sub>3</sub>	0	0	1/2	-5/2	1	1		
F	0	0	1/2	3/2	0	15		Sol. óptima

Na resolução do problema anterior, o Quadro do Simplex inicial corresponde (em termos gráficos) à origem do referencial, isto é, ( $X, Y$ ) = (0, 0) com  $F = 0$ . O Quadro correspondente à primeira iteração refere-se à solução ( $X, Y$ ) = (0, 4) com  $F = 12$ . O Quadro correspondente à segunda iteração refere-se à solução óptima ( $X^*, Y^*$ ) = (3, 3) com  $F^* = 15$ .

Façamos uma ligeira alteração no problema anterior, alterando a função objectivo:

Maximizar  $F = 3 \cdot X + 3 \cdot Y$

sujeito a:

$$1 \cdot X + 3 \cdot Y \leq 12$$

$$1 \cdot X + 1 \cdot Y \leq 6$$

$$2 \cdot X + 1 \cdot Y \leq 10$$

$$X, Y \geq 0$$

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	T.I.	$\Delta_i$	Quadro Inicial
F <sub>1</sub>	1	3	1	0	0	12	12/1	
F <sub>2</sub>	1	1	0	1	0	6	6/1	
F <sub>3</sub>	2	1	0	0	1	10	10/2	
F	-3	-3	0	0	0	0	$\Delta = 5$	$X = 0; Y = 0$ $F = 0$
	↑	↑						

Nota: Em caso de "empate", optaremos pela variável "empatada" que primeiro aparecer na "lista de variáveis".

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	T.I.	$\Delta_i$	1ª Iteração
F <sub>1</sub>	0	5/2	1	0	-1/2	7	7/(5/2)	
F <sub>2</sub>	0	1/2	0	1	-1/2	1	1/(1/2)	
X	1	1/2	0	0	1/2	5	5/(1/2)	$X = 5; Y = 0$ $F = 15$
F	0	-3/2	0	0	3/2	15	$\Delta = 2$	
	↑							

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	T.I.	2ª Iteração	
F <sub>1</sub>	0	0	1	-5	2	2		
Y	0	1	0	2	-1	2		
X	1	0	0	-1	1	4		
F	0	0	0	3	0	18	$X^* = 4; Y^* = 2$ $F^* = 18$ Sol. óptima	
	↑							

Observemos com atenção o Quadro do Simplex anterior. Trata-se de um Quadro correspondente a uma solução óptima,  $(X^*, Y^*) = (4, 2)$ , já que na linha que representa a função objectivo não há coeficientes negativos. No entanto, uma observação mais cuidadosa permite-nos constatar que o coeficiente da variável não básica F<sub>3</sub> nessa linha não é negativo, mas também não é estritamente positivo! Ora se esse coeficiente não fosse igual a zero, mas apenas "ligeiramente" negativo, diríamos não estar perante a solução óptima e incrementaríamos a variável F<sub>3</sub>. Experimentemos incrementar essa variável, fazendo-a entrar para a base...

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	T.I.	$\Delta_i$	2ª Iteração
F <sub>1</sub>	0	0	1	-5	2	2	2/2	
Y	0	1	0	2	-1	2	—	
X	1	0	0	-1	1	4	4/1	
F	0	0	0	3	0	18	$\Delta = 1$	$X^* = 4; Y^* = 2$ $F^* = 18$ Sol. óptima
	↑							

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	T.I.	3ª Iteração
F <sub>3</sub>	0	0	1/2	-5/2	1	1	
Y	0	1	1/2	-1/2	0	3	
X	1	0	-1/2	3/2	0	3	$X^* = 3; Y^* = 3$ $F^* = 18$

F	0	0	<b>0</b>	3	<b>0</b>	18
			↑			

Sol. óptima

O novo Quadro corresponde a uma nova solução básica óptima ! [ É claro que o valor da função objectivo permanece inalterável, pois já era o valor óptimo  $F^* = 18$  ]. A nova solução básica admissível óptima é  $(X^*, Y^*) = (3, 3)$ .

Observemos com cuidado a linha que representa a função objectivo. à semelhança do que já havíamos notado, o coeficiente da variável não básica  $F_1$  nessa linha é nulo. Ora se esse coeficiente não fosse igual a zero, mas apenas "ligeiramente" negativo, dirímos não estar perante a solução óptima e incrementaríamos a variável  $F_1$ . Se experimentarmos incrementar essa variável, fazendo-a entrar para a base...

	X	Y	$F_1$	$F_2$	$F_3$	T.I.	$\Delta_i$	3ª Iteração
$F_3$	0	0	$1/2$	$-5/2$	1	1	$1/(1/2)$	←
Y	0	1	$1/2$	$-1/2$	0	3	$3/(1/2)$	$X^* = 3 ; Y^* = 3$
X	1	0	$-1/2$	$3/2$	0	3	—	$F^* = 15$
F	0	0	<b>0</b>	3	<b>0</b>	18	$\Delta = 2$	Sol. óptima
			↑					

Conclusão: Deve entrar para a base a variável  $F_1$  (correspondendo à primeira linha do novo Quadro) em substituição da variável  $F_3$ . Mas essa é exactamente a solução básica admissível correspondente ao Quadro respeitante à segunda iteração ! Ou seja, o "2º Quadro" remete-nos para o "3º Quadro" e vice-versa !

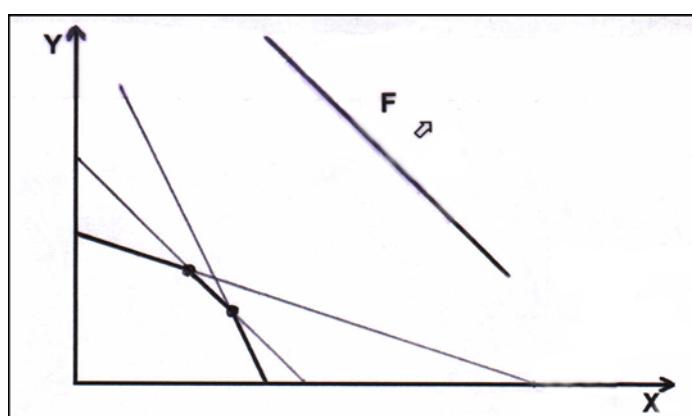
Poderemos assim concluir que **se na linha que representa a função objectivo num Quadro do Simplex não houver coeficientes negativos, mas se um coeficiente correspondente a uma variável não básica for nulo, então estaremos perante uma situação de multiplicidade de soluções óptimas !**

Relativamente ao problema em análise, o Algoritmo Simplex Primal indica-nos que são óptimas as duas soluções básicas admissíveis correspondentes a  $(X, Y) = (4, 2)$  e  $(X, Y) = (3, 3)$ , sendo ainda óptimas todas as soluções resultantes da combinação linear convexa dessas duas soluções básicas admissíveis, isto é

$$(X^*, Y^*) = \lambda \cdot (4, 2) + (1 - \lambda) \cdot (3, 3) ; \quad \lambda \in [0, 1].$$

Ruy Costa 2011

Em termos gráficos, ter-se-ia:



Recordemos a sequência dos Quadros do Simplex correspondentes à resolução deste problema:

↑      ↑

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	T.I.	$\Delta_j$	Quadro Inicial
F <sub>1</sub>	1	3	1	0	0	12	12/1	
F <sub>2</sub>	1	1	0	1	0	6	6/1	
F <sub>3</sub>	2	1	0	0	1	10	10/2	
F	-3	-3	0	0	0	0	$\Delta = 5$	← X = 0 ; Y = 0 F = 0

Nota: Em caso de "empate", optaremos pela variável "empatada" que primeiro aparecer na "lista de variáveis".

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	T.I.	$\Delta_j$	1 <sup>a</sup> Iteração
F <sub>1</sub>	0	5/2	1	0	-1/2	7	7/(5/2)	
F <sub>2</sub>	0	1/2	0	1	-1/2	1	1/(1/2)	
X	1	1/2	0	0	1/2	5	5/(1/2)	← X = 5; Y = 0 F = 15
F	0	-3/2	0	0	3/2	15	$\Delta = 2$	

↑

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	T.I.	$\Delta_j$	2 <sup>a</sup> Iteração
F <sub>1</sub>	0	0	1	-5	2	2	2/2	
Y	0	1	0	2	-1	—	—	
X	1	0	0	-1	1	4	4/1	
F	0	0	0	3	0	18	$\Delta = 1$	

↑

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	T.I.	$\Delta_j$	3 <sup>a</sup> Iteração
F <sub>3</sub>	0	0	1/2	-5/2	1	1	1/(1/2)	
Y	0	1	1/2	-1/2	0	3	3/(1/2)	
X	1	0	-1/2	3/2	0	3	—	
F	0	0	0	3	0	18	$\Delta = 2$	

↑

**Sol. óptima** ↗

**Sol. óptima** ↗

$$(X^*, Y^*) = \lambda \cdot (4, 2) + (1 - \lambda) \cdot (3, 3) ; \quad \lambda \in [0, 1].$$

Consideremos agora o seguinte problema de Programação Linear:

<b>Maximizar F = -2.X + 4.Y</b> <b>sujeito a:</b> $\begin{aligned} -4.X + 2.Y &\leq 1 \\ -1.X + 2.Y &\leq 6 \\ X, Y &\geq 0 \end{aligned}$
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.	$\Delta_j$	Quadro Inicial
F <sub>1</sub>	-4	2	1	0	1	1/2	
F <sub>2</sub>	-1	2	0	1	6	6/2	
F	2	-4	0	0	0	$\Delta = 1/2$	← X = 0 ; Y = 0 F = 0

↑

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.	$\Delta_j$	1 <sup>a</sup> Iteração
Y	-2	1	1/2	0	1/2	—	
F <sub>2</sub>	3	0	-1	1	5	5/3	← X = 0 ; Y = 1/2

<b>F</b>	-6	<b>0</b>	2	0	2	$\Delta = 5/3$	<b>F = 2</b>
	↑						
	<b>X</b>	<b>Y</b>	<b>F<sub>1</sub></b>	<b>F<sub>2</sub></b>	<b>T.I.</b>	<b><math>\Delta_j</math></b>	<b>1<sup>a</sup> Iteração</b>
<b>Y</b>	0	1	-1/6	2/3	23/6	—	$X^* = 5/3 ; Y^* = 23/6$
<b>X</b>	1	<b>0</b>	<b>-1/3</b>	<b>1/3</b>	<b>5/3</b>	—	<b>F* = 12</b>
<b>F</b>	0	0	<b>0</b>	2	12	$\Delta = ?$	<b>Sol. óptima não única !</b>
		↑					

Observemos o que se passou na resolução deste problema: inicialmente analisou-se a origem do referencial ( $X, Y = (0, 0)$ ) com  $F = 0$ , constatando-se não se tratar da solução óptima. Com a entrada de  $Y$  para a base, passou-se, então, para  $(X, Y) = (0, 1/2)$  com  $F = 2$ , que ainda não corresponde à solução óptima. De seguida, entrou  $X$  para a base, passando-se a  $(X, Y) = (5/3, 23/6)$  com  $F = 12$ , tendo-se verificado tratar-se de uma solução óptima. No entanto, a existência de um coeficiente nulo correspondente a uma variável não básica na linha da função objectivo indica-nos uma situação de multiplicidade de soluções óptimas.

Para determinar a outra solução básica admissível óptima incrementamos a variável  $F_1$ . No entanto, quando se vai investigar qual a variável da base ( $X$  ou  $Y$ ) que saí da base para dar lugar a  $F_1$  constata-se que nenhuma dessas variáveis ( $X$  ou  $Y$ ) limita o aumento da variável  $F_1$ , isto é, pode-se aumentar  $F_1$  tanto quanto se pretender, sem qualquer restrição relativamente a  $X$  ou  $Y$  !

Moral da história: Estamos perante uma **situação de multiplicidade de soluções óptimas, mas com apenas uma solução básica admissível óptima !**

Sabemos, assim, que  $(X^*, Y^*) = (5/3, 23/6)$  com  $F^* = 12$ . Sabemos ainda que de entre as variáveis não básicas do último Quadro do Simplex ( $F_1$  e  $F_2$ ) a variável  $F_1$  deveria ser incrementada (isto é,  $F_1^* \geq 0$ ) e, consequentemente,  $F_2$  continua fora da base (ou seja,  $F_2^* = 0$ ).

Como  $F_1^* \geq 0$  é equivalente a  $-4 \cdot X^* + 2 \cdot Y^* \leq 1$  e como  $F_2^* = 0$  se pode escrever na forma  $-1 \cdot X^* + 2 \cdot Y^* = 6$ , a conjunção destas duas condições é equivalente a  $Y^* = 3 + (1/2) \cdot X^*$

$$\begin{array}{lll} F_1^* \geq 0 & -4 \cdot X^* + 2 \cdot Y^* \leq 1 & -4 \cdot X^* + 2 \cdot (3 + (1/2) \cdot X^*) \leq 1 \quad X^* \geq 5/3 \\ \Leftrightarrow & & \Leftrightarrow \\ F_2^* = 0 & -1 \cdot X^* + 2 \cdot Y^* = 6 & Y^* = 3 + (1/2) \cdot X^* \quad \Leftrightarrow \quad Y^* = 3 + (1/2) \cdot X^* \end{array}$$

Assim, as soluções óptimas deste problema são os pares ordenados  $(X^*, Y^*)$  que verificam simultaneamente as duas condições  $X^* \geq 5/3$  e  $Y^* = 3 + (1/2) \cdot X^*$ . Se  $X^* = 5/3$ , então  $Y^* = 23/6$  (trata-se da única solução básica admissível óptima deste problema); se  $X^* > 5/3$ , então  $Y^* = 3 + (1/2) \cdot X^*$  (tratando-se de uma solução não básica admissível e óptima). De notar que, como é óbvio, todas as soluções óptimas estão associadas ao mesmo valor da função objectivo,  $F^* = 12$ .

☞ Aproveite para resolver este problema recorrendo ao Método Gráfico. Poderá, assim, observar um problema com um espaço de soluções admissíveis ilimitado e com um número ilimitado de soluções óptimas (sendo apenas uma dela básica).

 Altere adequadamente a função objectivo de modo a que o novo problema admita apenas uma única solução óptima (que, sendo única, será obrigatoriamente básica).

Terminaremos a apresentação do Algoritmo Simplex Primal com a resolução de uma variante do anterior problema de Programação Linear:

Maximizar $F = 2 \cdot X + 3 \cdot Y$						
sujeito a:						
$-4 \cdot X + 2 \cdot Y \leq 1$						
$-1 \cdot X + 2 \cdot Y \leq 6$						
$X, Y \geq 0$						

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.	Δ <sub>j</sub>
F <sub>1</sub>	-4	2	1	0	1	1/2
F <sub>2</sub>	-1	2	0	1	6	6/2
F	2	-3	0	0	0	Δ = 1/2

← Quadro Inicial  
 $X = 0 ; Y = 0$   
 $F = 0$

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.	Δ <sub>j</sub>
Y	-2	1	1/2	0	1/2	—
F <sub>2</sub>	3	0	-1	1	5	5/3
F	-8	0	3/2	0	3/2	Δ = 5/3

← 1<sup>a</sup> Iteração  
 $X = 0 ; Y = 1/2$   
 $F = 3/2$

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.	Δ <sub>j</sub>
Y	0	1	-1/6	2/3	23/6	—
X	1	0	-1/3	1/3	5/3	—
F	0	0	-7/6	8/3	89/6	Δ = ?

1<sup>a</sup> Iteração  
 $X^* = 5/3 ; Y^* = 23/6$   
 $F^* = 89/6$   
Sol. não óptima

Observemos o que se passou na resolução deste problema: inicialmente analisou-se a origem do referencial ( $X, Y$ ) = (0, 0) com  $F = 0$ , constatando-se não se tratar da solução óptima. Com a entrada de  $Y$  para a base, passou-se, então, para ( $X, Y$ ) = (0, 1/2) com  $F = 3/2$ , que ainda não corresponde à solução óptima. De seguida, entrou  $X$  para a base, passando-se a ( $X, Y$ ) = (5/3, 23/6) com  $F = 89/6$ , tendo-se verificado que ainda não se tratava de uma solução óptima. Quando vamos investigar qual a variável que deverá sair da base para ceder o seu lugar a  $F_1$ , constatamos que nem  $X$  nem  $Y$  limitam o aumento de  $F_1$ ! Ou seja, a solução deste problema é indeterminada, já que a função objectivo poderá aumentar de valor indefinidamente!

Ruy Coimbra

 Moral da história: Estamos perante um espaço de soluções admissíveis ilimitado e sem uma solução óptima do problema determinada, já que a função objectivo poderá aumentar de valor indefinidamente! (O que poderá constatar facilmente através da resolução gráfica).

## VII - FORMULAÇÃO MATRICIAL DO SIMPLEX

### • FORMULAÇÃO MATRICIAL DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR:

Na apresentação feita em "Programação Linear : Conceitos Fundamentais" já havíamos indicado que um problema de Programação Linear expresso na forma standard se pode representar matricialmente:

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar } F = C \cdot X \\ \text{sujeito a:} \\ A \cdot X = b \\ X \geq 0 \end{array}$$

Na representação anterior, o vector das incógnitas  $X = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n]^T$  é um vector coluna ( $n \times 1$ ), o vector dos coeficientes da função objectivo  $C = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]$  é um vector linha ( $1 \times n$ ), a matriz dos coeficientes das restrições  $A = [a_{kl}]$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ;  $l = 1, 2, \dots, n$ ) é uma matriz ( $m \times n$ ) e o vector dos termos independentes  $b = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]^T$  é um vector coluna ( $m \times 1$ ). De notar que  $0$  é o vector nulo do tipo ( $n \times 1$ ).

Exemplifiquemos a representação matricial de um problema de Programação Linear com o problema seguinte:

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar } F = 4 \cdot X + 3 \cdot Y \\ \text{sujeito a:} \\ -1 \cdot X + 1 \cdot Y \leq 3 \\ 4 \cdot X + 1 \cdot Y \leq 8 \\ X, Y \geq 0 \end{array}$$

Na sua forma standard, tem-se:

$\text{Maximizar } F = 4X + 3Y + 0.F_1 + 0.F_2$ sujeito a: $-1X + 1Y \leq 1.F_1 + 0.F_2 = 3$ $4X + 1Y + 0.F_1 + 1.F_2 = 8$ $X, Y, F_1, F_2 \geq 0$
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

a que corresponde a seguinte representação matricial:

$\text{Max } F = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$ sujeito a $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} X & Y & F_1 & F_2 \end{bmatrix}^T \geq 0$
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Ou seja,

$C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

#### • FORMULAÇÃO MATRICIAL DO SIMPLEX:

A representação tabular de um problema de Programação Linear (na forma standard) pode ser esquematizada do modo seguinte:

$\left[ \begin{array}{c c} A & b \\ \hline C & 0 \end{array} \right] \quad A \cdot X = b$ $F \cdot C \cdot X = 0$
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Recorde-se que esta representação tabular não corresponde necessariamente a um Quadro do Simplex !

Relativamente ao exemplo anterior, a correspondente representação tabular seria:

X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	
-1	1	1	0	3
4	1	0	1	8
-4	-3	0	0	0

Consideremos agora a **decomposição das matrizes X, C e A relativamente às variáveis básicas e não básicas**:

$X = \left[ \begin{array}{c c} X_B & X_D \end{array} \right]$	$X_B$ (m x 1) vector das variáveis básicas
	$X_D$ ((n-m) x 1) vector das variáveis não básicas
$C = \left[ \begin{array}{c c} C_B & C_D \end{array} \right]$	$C_B$ (1 x m) vector dos coeficientes f.o.(var. básicas)
	$C_D$ (1 x (n-m)) vector dos coeficientes f.o.(var. não básicas)
$A = \left[ \begin{array}{c c} B & D \end{array} \right]$	$B$ (m x m) matriz dos coeficientes restr.(var. básicas)
	$D$ (m x (n-m)) matriz dos coeficientes restr.(var. não básicas)

**NOTA MUITO IMPORTANTE:** A ordem das variáveis nos vectores  $X_B$  e  $X_D$  condiciona a ordem dos coeficientes de  $C_B$ ,  $C_D$ ,  $B$  e  $D$  !

Poderemos, agora, re-escrever a representação tabular do problema de Programação Linear:

$$\left[ \begin{array}{c|c} A & b \\ \hline -C & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} B & D & b \\ -C_B & -C_D & 0 \end{array} \right]$$

Retomemos o exemplo apresentado anteriormente e consideremos que X e Y são variáveis básicas (e, consequentemente, que F<sub>1</sub> e F<sub>2</sub> são variáveis não básicas). Ter-se-ia, então, a seguinte representação tabular:

X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	
-1	1	1	0	3
4	1	0	1	8
-4	-3	0	0	0

a que correspondem as seguintes matrizes:

B = [ X Y ]	D = [ F <sub>1</sub> F <sub>2</sub> ]	b = [ 3 8 ]
$C_B = [ +4 \quad +3 ]$	$C_D = [ 0 \quad 0 ]$	

Recordemo-nos de uma característica muito importante dos Quadros do Simplex: a coluna correspondente a cada variável básica tem apenas um coeficiente unitário (na linha correspondente à restrição relativamente à qual a variável é básica), sendo nulos os restantes coeficientes. Assim, num **Quadro do Simplex**, as colunas correspondentes às variáveis básicas formam uma matriz identidade e, por outro lado, são nulos os coeficientes das variáveis básicas na linha da função objectivo.

$\left[ \begin{array}{c c} A & b \\ \hline -C & 0 \end{array} \right]$	$\Rightarrow$	$\left[ \begin{array}{cc c} B & D & b \\ \hline -C_B & -C_D & 0 \end{array} \right]$
		$\downarrow$
		$\left[ \begin{array}{cc c} I & ? & ? \\ \hline 0 & ? & ? \end{array} \right]$

Como se poderá passar da representação tabular (decomposta relativamente às variáveis básicas e não básicas) ao correspondente Quadro do Simplex?

Comecemos por pré-multiplicar  $B^{-1}$  por  $[ B | D | b ]$ .

$$B^{-1} \cdot [ B | D | b ] = [ B^{-1} \cdot B | B^{-1} \cdot D | B^{-1} \cdot b ] = [ I | B^{-1} \cdot D | B^{-1} \cdot b ]$$

Obtivemos, assim, a desejada matriz identidade correspondendo às variáveis básicas. Só precisamos de garantir que os coeficientes dessas variáveis na linha da função objectivo sejam nulos. Na representação tabular, esses coeficientes são representados por  $-C_B$ . Assim, bastará pré-multiplicar  $+C_B$  por  $[ I | B^{-1} \cdot D | B^{-1} \cdot b ]$  e, em seguida somar à "anterior linha da função objectivo"  $[ -C_B | -C_D | 0 ]$ :

$$\begin{aligned} +C_B \cdot [ I | B^{-1} \cdot D | B^{-1} \cdot b ] &= [ +C_B | +C_B \cdot B^{-1} \cdot D | +C_B \cdot B^{-1} \cdot b ] \\ &\quad + [ -C_B | -C_D | 0 ] \\ &[ 0 | -C_D + C_B \cdot B^{-1} \cdot D | +C_B \cdot B^{-1} \cdot b ] \end{aligned}$$

Poderemos, agora, completar o esquema que anteriormente apresentámos:

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c|c} A & b \\ \hline -C & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} B & D & b \\ -C_B & -C_D & 0 \end{array} \right] \\
 \downarrow \\
 \left[ \begin{array}{cc|c} I & B^{-1}.D & B^{-1}.b \\ 0 & -C_D + C_B \cdot B^{-1}.D & C_B \cdot B^{-1}.b \end{array} \right] \\
 r = \mathbb{A} \quad F = \mathbb{A}
 \end{array}$$

Conseguimos, assim, determinar um Quadro do Simplex directamente, a partir da representação tabular inicial (sem levar a cabo qualquer processo iterativo)!

Os coeficientes das variáveis não básicas nas restrições são dados por  $B^{-1}.D$ . O vector das variáveis básicas é dado por  $X_B = B^{-1}.b$ . A função objectivo valerá  $F = C_B \cdot B^{-1}.b$ . Para simplificar a notação designaremos por  $r$  os coeficientes das variáveis não básicas na linha da função objectivo no Quadro do Simplex, isto é,  $r = -C_D + C_B \cdot B^{-1}.D$ .

Aproveitemos o exemplo que temos vindo a apresentar e determinemos o Quadro do Simplex correspondente à base ( $X, Y$ ) utilizando a formulação matricial do Simplex.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc|c}
 X & Y & F_1 & F_2 & \\
 \hline
 -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\
 4 & 1 & 0 & 1 & 8 \\
 -4 & -3 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 X & Y & \\
 \hline
 B = \left[ \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 4 & 1 \end{array} \right] & D = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] & b = \left[ \begin{array}{c} 3 \\ 8 \end{array} \right] \\
 C_B = \left[ \begin{array}{cc} +4 & +3 \end{array} \right] & C_D = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right] & \\
 B^{-1} = \left[ \begin{array}{cc} -1/5 & 1/5 \\ 4/5 & 1/5 \end{array} \right] & B^{-1}.D = \left[ \begin{array}{cc} -1/5 & 1/5 \\ 4/5 & 1/5 \end{array} \right] & X_B = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 4 \end{array} \right] \\
 r = \left[ \begin{array}{c} +8/5 \\ +7/5 \end{array} \right] & & F = \left[ \begin{array}{c} 16 \end{array} \right] \\
 \text{Nota: } r = -C_D + C_B \cdot B^{-1}.D & X_B = B^{-1}.b & F = C_B \cdot B^{-1}.b
 \end{array}$$

Poderemos, agora, escrever o correspondente Quadro do Simplex:

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.
X	I		B <sup>-1</sup> .D		B <sup>-1</sup> .b
Y		0	-C <sub>D</sub> + C <sub>B</sub> . B <sup>-1</sup> .D		C <sub>B</sub> . B <sup>-1</sup> .b
F					



	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.
X	1	0	-1/5	1/5	1
Y	0	1	4/5	1/5	4
F	0	0	8/5	7/5	16

Como se viu, obtivemos directamente este Quadro do Simplex (por acaso, correspondente à solução óptima do problema...) sem levar a cabo qualquer processo iterativo ! Poderemos comparar este Quadro com o obtido aquando da resolução do mesmo problema pelo Algoritmo Simplex Primal:

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	T.I.
Y	0	1	4/5	1/5	4
X	1	0	-1/5	1/5	1
F	0	0	8/5	7/5	16

2<sup>a</sup> Iteração

X\* = 1 ; Y\* = 4  
F\* = 16  
Sol. Óptima

Como se pode observar, trata-se exactamente da mesma solução e dos mesmos valores dos diferentes coeficientes. Apenas a **ordem** das variáveis não é igual ! Para obtermos exactamente este Quadro, através da utilização da formulação matricial do Simplex, bastaria constituir a matriz **B** considerando primeiro a variável Y e, só depois, a variável X. Relembra-se, assim, o que já anteriormente se frisara:

**NOTA MUITO IMPORTANTE:** A ordem das variáveis nos vectores  $X_B$  e  $X_D$  condiciona a ordem dos coeficientes de  $C_B$ ,  $C_D$ ,  $B$  e  $D$  ! Esta ordem condiciona, também, a ordem de apresentação dos resultados do cálculo matricial:  $-C_D + C_B \cdot B^{-1} \cdot D$  ;  $B^{-1} \cdot b$  !

Testemos estes novos conhecimentos com o seguinte exercício:

**Considere o seguinte problema de Programação Linear:**

Minimizar  $F = 1 \cdot X + 3 \cdot Y$

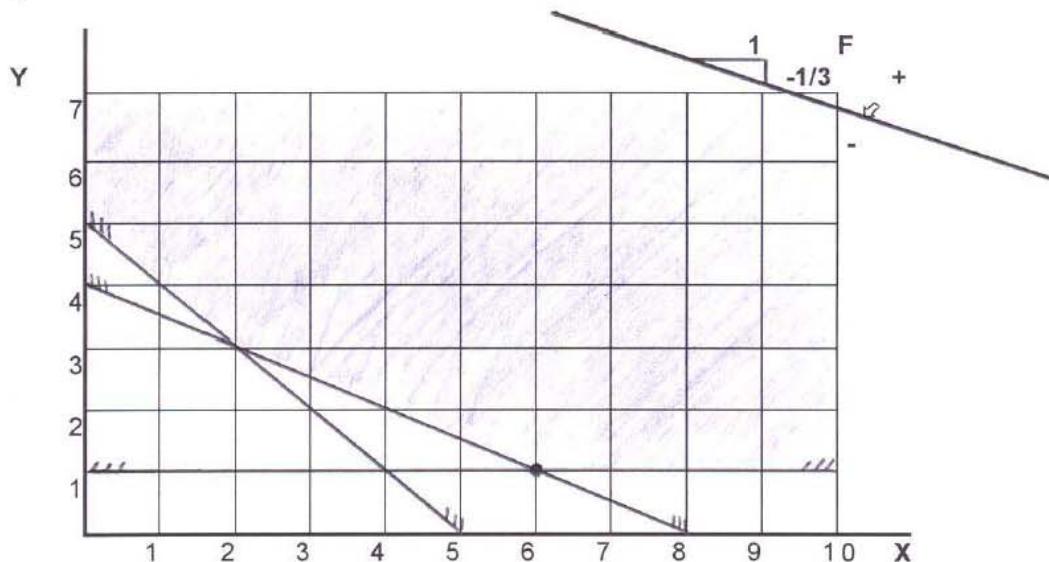
sujeito a:

$$\begin{aligned} 1 \cdot Y &\geq 1 \\ 1 \cdot X + 2 \cdot Y &\geq 8 \\ 1 \cdot X + 1 \cdot Y &\geq 5 \\ X, Y &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Resolva-o graficamente.

b) Utilizando a formulação matricial do Simplex, obtenha o Quadro do Simplex correspondente à solução óptima determinada na alínea anterior.

a)



A solução óptima do problema corresponde a  $(X^*, Y^*) = (6, 1)$ , com  $F^* = 9$ .

b) Antes de se avançar deve-se ter um cuidado inicial: escrever o problema na forma standard:

<b>Maximizar <math>G = -1 \cdot X - 3 \cdot Y \quad (G = -F)</math></b> <b>sujeto a:</b> $\begin{aligned} 1 \cdot Y - 1 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + 0 \cdot F_3 &= 1 \\ 1 \cdot X + 2 \cdot Y + 0 \cdot F_1 - 1 \cdot F_2 + 0 \cdot F_3 &= 8 \\ 1 \cdot X + 1 \cdot Y + 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 - 1 \cdot F_3 &= 5 \end{aligned}$ $X, Y, F_1, F_2, F_3 \geq 0$
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

E agora só precisamos de identificar a base correspondente à solução óptima ! Estamos perante um problema com três restrições pelo que uma base deste problema é constituída por três variáveis básicas. X e Y são positivas pelo que obviamente pertencem à base óptima.

Se observarmos com atenção a resolução gráfica do problema, constataremos que a solução óptima corresponde ao vértice definido pela intersecção da primeira com a segunda restrições. Assim, esse vértice corresponde a  $F_1 = 0$  e  $F_2 = 0$  (já que estas são as duas variáveis de folga que correspondem a essas restrições). Resta-nos, assim, a variável  $F_3$  para integrar a base.

Poderemos verificar o raciocínio exposto, substituindo os valores de X e Y ( $X^* = 6$ ;  $Y^* = 1$ ) nas três restrições e determinando os correspondentes valores das variáveis de folga:  $F_1^* = 0$ ;  $F_2^* = 0$  e  $F_3^* = 2$ . Ora cá está o que já havíamos concluído: a base correspondente à solução óptima é constituída pelas variáveis X, Y e  $F_3$ .

Avancemos agora para a utilização da formulação matricial do Simplex.

$B = \begin{bmatrix} X & Y & F_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	$D = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$
$C_B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$	$C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$	
$B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	$B^{-1} \cdot D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$X_B = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
	$r = \begin{bmatrix} +1 & +1 \end{bmatrix}$	$G = \begin{bmatrix} -9 \end{bmatrix}$
Nota: $r = -C_D + C_B \cdot B^{-1} \cdot D$ $X_B = B^{-1} \cdot b$ $G = C_B \cdot B^{-1} \cdot b$		

Conclusão: Trata-se da solução óptima, já que os coeficientes na linha da função objectivo são todos não negativos. A matriz B foi escrita considerando a seguinte ordem das variáveis: X, Y e  $F_3$ . Assim, os valores do vector  $X_B$  corresponderão, por esta ordem, a essas variáveis:  $X^* = 6$ ,  $Y^* = 1$  e  $F_3^* = 2$ , o que confirma os cálculos anteriormente apresentados. Finalmente,  $G^* = -9$ , ou seja,  $F^* = +9$ . De notar que todas estas conclusões foram obtidas sem que se tivesse escrito um único Quadro do Simplex !

Poderemos agora escrever o Quadro do Simplex correspondente à solução óptima (já que o enunciado do exercício o pedia) a partir dos elementos obtidos a partir da formulação matricial do Simplex:

	X	Y	$F_3$	$F_1$	$F_2$	T.I.
X						
Y		I		$B^{-1} \cdot D$		$B^{-1} \cdot b$
$F_3$						
G	0			$-C_D + C_B \cdot B^{-1} \cdot D$		$C_B \cdot B^{-1} \cdot b$

↓

	X	Y	$F_3$	$F_1$	$F_2$	T.I.
X	1	0	0	2	-1	6
Y	0	1	0	-1	0	1
$F_3$	0	0	1	1	-1	2
G	0	0	0	+1	+1	-9

Recordemo-nos do esquema que resume a formulação matricial do Simplex:

$\left[ \begin{array}{c c} A & b \\ \hline -C & 0 \end{array} \right]$	$\Rightarrow$	$\left[ \begin{array}{ccc c} B & & D & b \\ -C_B & & -C_D & 0 \end{array} \right]$
		↓
		$\left[ \begin{array}{ccc c} I & & B^{-1} \cdot D & B^{-1} \cdot b \\ 0 & & -C_D + C_B \cdot B^{-1} \cdot D & C_B \cdot B^{-1} \cdot b \end{array} \right]$

$r = \Delta$      $F = \Delta$

Se, relativamente às matrizes  $D$  e  $C_D$  for possível considerar a decomposição seguinte

$$D = \left[ \begin{array}{c|c} D_1 & I \end{array} \right] \quad I \text{ matriz identidade ( } m \times m \text{ )}$$

$$C = \left[ \begin{array}{c|c} C_{D1} & 0 \end{array} \right] \quad 0 \text{ vector nulo ( } 1 \times m \text{ )}$$

ter-se-á um caso particular da formulação matricial do Simplex:

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c} B & D_1 & I & b \\ \hline -C_B & -C_{D1} & 0 & 0 \end{array} \right]$$

↓

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c} I & B^{-1}D_1 & B^{-1} & B^{-1}b \\ \hline 0 & -C_{D1} + C_B \cdot B^{-1}D_1 & C_B \cdot B^{-1} & C_B \cdot B^{-1}b \end{array} \right]$$

$F = \dots$

Nesta situação pode identificar-se a inversa da matriz  $B$ ,  $B^{-1}$ , no Quadro do Simplex, bem como o vector linha  $C_B \cdot B^{-1}$  (que corresponde às variáveis duals - ver "Dualidade em Programação Linear").

Consideremos agora o exercício seguinte:

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$	TI
$X_8$	2	0	3	4	1	3	0	1	0	2
$X_7$	4	5	-1	0	2	5	1	0	0	4
$X_9$	0	1	1	0	6	1	0	0	1	6
F	-1	4	-3	-2	-2	4	0	0	0	0

Complete o Quadro do Simplex abaixo relativo ao mesmo problema e comente a solução em análise.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$	TI
$X_5$	0	0			1		-1/30	1/15	1/6	
$X_2$	0	1			0		1/5	-2/15	0	
$X_1$	1	0			0		1/60	7/15	-1/12	
F	0	0			0					

Para resolvemos o problema teremos de começar por re-ordenar as variáveis (adoptando a mesma ordem nos dois Quadros), de modo a podermos identificar as desejadas matrizes identidade.

B						D <sub>1</sub>			I		b
- C <sub>B</sub>			- C <sub>D1</sub>			0			0		
X <sub>8</sub>	1	0	2	3	4	3	1	0	0	0	2
X <sub>7</sub>	2	5	4	-1	0	5	0	1	0	0	4
X <sub>9</sub>	6	1	0	1	0	1	0	0	1	0	6
F	-2	4	-1	-3	-2	4	0	0	0	0	0
	- C <sub>B</sub>			- C <sub>D1</sub>			0				



I						B <sup>-1</sup> .D <sub>1</sub>			B <sup>-1</sup>		
X <sub>5</sub>						1/15 -1/30 1/6			B <sup>-1</sup> .b		
X <sub>2</sub>						-2/15 1/5 0					
X <sub>1</sub>						7/15 1/60 -1/12					
F						0			- C <sub>D1</sub> +C <sub>B</sub> .B <sup>-1</sup> .D <sub>1</sub>		
						C <sub>B</sub> .B <sup>-1</sup>			C <sub>B</sub> .B <sup>-1</sup> .b		
						0			F = ↗		

Cálculos auxiliares:

$$B^{-1}.D_1 = \begin{bmatrix} 1/15 & -1/30 & 1/6 \\ -2/15 & 1/5 & 0 \\ 7/15 & 1/60 & -1/12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 4/15 & 1/5 \\ -3/5 & -8/15 & +3/5 \\ 13/10 & 28/15 & 7/5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -C_{D1} + C_B \cdot B^{-1}.D_1 &= \begin{bmatrix} -3 & -2 & +4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2/5 & 4/15 & 1/5 \\ -3/5 & -8/15 & +3/5 \\ 13/10 & 28/15 & 7/5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & -2 & +4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9/2 & 68/15 & -3/5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} +3/2 & +38/15 & +17/5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sol. não óptima

$$C_B \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2/5 & 4/15 & 1/5 \\ -3/5 & -8/15 & +3/5 \\ 13/10 & 28/15 & 7/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +9/2 & +68/15 & -3/5 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}.b = \begin{bmatrix} 2/5 & 4/15 & 1/5 \\ -3/5 & -8/15 & +3/5 \\ 13/10 & 28/15 & 7/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46/15 \\ 4/15 \\ 277/15 \end{bmatrix} \leftarrow \text{s.b.a. não degenerada}$$

$$C_B \cdot B^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 46/15 \\ 4/15 \\ 277/15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 353/15 \\ 4/15 \\ 277/15 \end{bmatrix}$$

Poderemos, agora, preencher o Quadro do Simplex:

	X <sub>5</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>8</sub>	X <sub>7</sub>	X <sub>9</sub>	TI
X <sub>5</sub>	1	0	0	2/5	4/15	1/5	1/15	-1/30	1/6	46/15
X <sub>2</sub>	0	1	0	-3/5	-8/15	+3/5	-2/15	1/5	0	4/15
X <sub>1</sub>	0	0	1	13/10	28/15	7/5	7/15	1/60	-1/12	277/15
F	0	0	0	3/2	38/15	17/5	9/2	68/15	-3/5	353/15

Re-ordenando as variáveis, poderemos escrever:

	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>	X <sub>8</sub>	X <sub>9</sub>	TI
X <sub>5</sub>	0	0	2/5	4/15	1	1/5	-1/30	1/15	1/6	46/15
X <sub>2</sub>	0	1	-3/5	-8/15	0	3/5	1/5	-2/15	0	4/15
X <sub>1</sub>	1	0	13/10	28/15	0	7/5	1/60	7/15	-1/12	277/15
F	0	0	3/2	38/15	0	17/5	68/15	9/2	-3/5	353/15

A solução correspondente é básica admissível, não degenerada e não óptima.

## **ALGORITMO SIMPLEX REVISTO**

O Algoritmo Simplex Revisto tira partido da formulação matricial do Simplex de modo a reduzir ao mínimo o volume de cálculos efectuados.

Consideremos um problema de Programação Linear expresso na forma standard e representado matricialmente:

**Maximizar  $F = C \cdot X$**

**sujeito a:**

$$A \cdot X = b$$

$$X \geq 0$$

Na representação anterior, as matrizes são as apresentadas na "Formulação Matricial do Simplex".

Poderemos resumir os **passos principais do Algoritmo Simplex Revisto, relativos a uma dada iteração:**

### **1 - Critério de Optimalidade**

Exprimir a função objectivo em função das variáveis não básicas, ou seja, calcular os coeficientes dessas variáveis,  $r = -C_D + C_B \cdot B^{-1}D$  ( $1 \times (n-m)$ ).

Se todos os coeficientes  $r_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n-m$ ) forem não negativos, então a solução em análise é óptima, verificando-se  $X_B^* = B^{-1}b$  e  $F^* = +C_B \cdot B^{-1}b$ . [Atenção: se se tratar da base inicial, dever-se-ia verificar se a solução era admissível, isto é, se  $X_B \geq 0$ ]. Se algum dos coeficientes  $r_k$  for negativo, então a solução em análise não é óptima, devendo seleccionar-se para entrar na base a variável correspondente ao coeficiente  $r_k$  mais negativo.

### **2 - Determinação das variáveis que pertencem à Nova Base**

Se pretendermos fazer **entrar para a base a k-ésima variável**, deve-se determinar qual a variável que deve sair da base.

Para tal,

- Começa-se por calcular o vector  $v_k$  ( $m \times 1$ ), correspondente à coluna que representa a  $k$ -ésima variável no novo Quadro do Simplex [ Nota:  $v_k$  é uma coluna da matriz  $B^{-1}D$  ] :

$v_k = B^{-1} \cdot a_k$ , sendo  $a_k$  a coluna da matriz dos coeficientes  $A$  correspondente à  $k$ -ésima variável.

• Calcula-se, em seguida, os quocientes  $\Delta_i = (B^{-1} \cdot b)_i / (v_k)_i$ , para  $(v_k)_i > 0$  e  $i = 1, 2, \dots, m$ .

• Calcula-se  $\Delta = \min(\Delta_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Se  $\Delta = \Delta_s$ , a  $s$ -ésima variável deverá deixar a base.

**Conhecemos, assim, as variáveis que pertencem à nova base.**

### 3 - Mudança de Base

Escrever as matrizes  $B$ ,  $D$ ,  $C_B$  e  $C_D$  correspondentes à nova base.

Calcular  $B^{-1}D$  e  $B^{-1}b$ .

Voltar a 1.

Sintetizando, poderemos apresentar os passos mais importantes a seguir, numa dada iteração, pelo

### ALGORITMO SIMPLEX REVISTO

- 1 - Calcular  $r = -C_D + C_B \cdot B^{-1}D$  .  
 $r \geq 0 \Rightarrow$  solução óptima:  $X_B^* = B^{-1}b$  e  $F^* = +C_B \cdot B^{-1}b$  ;  
caso contrário, seleccionar a variável correspondente ao  $r_k$  mais negativo para entrar na base.
- 2 - Calcular  $v_k = B^{-1} \cdot a_k$  .  
Calcular  $\Delta_i = (B^{-1} \cdot b)_i / (v_k)_i$ , para  $(v_k)_i > 0$  e  $i = 1, 2, \dots, m$ .  
Calcular  $\Delta = \min(\Delta_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Se  $\Delta = \Delta_s$ , a  $s$ -ésima variável deverá deixar a base.
- 3 - Escrever as matrizes  $B$ ,  $D$ ,  $C_B$  e  $C_D$  correspondentes à nova base.  
Calcular  $B^{-1}D$  e  $B^{-1}b$ .

Voltar a 1.

Um aspecto importante deve ser focado: **a escolha da base inicial**. Num exercício meramente académico a base inicial é, geralmente, indicada. Contudo, se tivermos que escolher uma base inicial, **tentaremos que as "variáveis originais do problema" estejam, tanto quanto possível, na base inicial**, visando diminuir o volume de cálculo. Assim, não fará sentido adoptarmos uma base inicial formada maioritariamente (ou exclusivamente) por variáveis de folga (a regra habitual do Algoritmo Simplex Primal).

Teremos sempre que ter um cuidado importante: **a base inicial adoptada deverá corresponder sempre a uma solução básica admissível!** Se, por acaso, se tivesse adoptado uma determinada base e se tivesse constatado posteriormente tratar-se de uma solução básica não admissível, dever-se-ia adoptar uma nova base inicial e refazer os cálculos.

Resolvamos agora o seguinte exercício:

**Consideremos o seguinte problema de Programação Linear:**

Maximizar  $F = 3 \cdot X + Y$   
 sujeito a:  

$$\begin{aligned} X &\geq 1 \\ Y &\geq 2 \\ X + Y &\leq 5 \\ X, Y &\geq 0 \end{aligned}$$

Resolva-o recorrendo ao Algoritmo Simplex Revisto, a partir da base inicial  $(X, Y, F_3)$ .

Nota:  $F_3$  designa a variável de folga associada à terceira restrição.

### 1ª Iteração

Base inicial:

$$1 - \begin{array}{ccc|c} & X & Y & F_3 \\ \hline B = & \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right] & & \left[ \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \\ & C_B = \left[ \begin{array}{ccc} +3 & +1 & 0 \end{array} \right] & & C_D = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right] \\ & b = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 5 \end{array} \right] & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} B^{-1} = & \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \right] & B^{-1} \cdot D = & \left[ \begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right] \\ & & & X_B = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \end{array} \right] \\ r = & \left[ \begin{array}{cc} -3 & -1 \end{array} \right] & & F = \left[ \begin{array}{c} 5 \end{array} \right] \end{array}$$

↑  
F<sub>1</sub> deve entrar para a base

Nota:  $r = -C_D + C_B \cdot B^{-1} \cdot D$      $X_B = B^{-1} \cdot b$      $F = C_B \cdot B^{-1} \cdot b$

### 2 -

$$v_{F1} = B^{-1} \cdot a_{F1} = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right]$$

$$v_{F1} = \left[ \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] \quad X_B = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \end{array} \right] \quad \Delta_1 = \underline{\underline{\Delta}} \quad \Delta_2 = \underline{\underline{\Delta}} \quad \Delta_3 = 2 / 1 \leftarrow \text{a } 3^{\text{a}} \text{ variável básica ( } F_3 \text{ ) saí da base}$$

3 - X, Y , F<sub>1</sub>

Nova base: (

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} F_2 & F_3 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C_B = \begin{bmatrix} +3 & +1 & 0 \end{bmatrix} \quad C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad X_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- 2<sup>a</sup> iteração -

$$1 - r = \begin{bmatrix} +2 & +3 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}$$

Conclusão: Trata-se da solução óptima, isto é, X\* = 3; Y\* = 2 com F\* = 11.

Aproveite para resolver este problema utilizando o Método Gráfico e para constatar que, para o resolver pelo Algoritmo Simplex Primal, não poderia tomar como base inicial (F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>, F<sub>3</sub>) [teria que recorrer à Técnica da Base Artificial ...].

Ainda relativamente a este problema, e embora o enunciado o não peça, aproveitaremos os cálculos efectuados para apresentar o Quadro do Simplex correspondente à solução óptima:

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	TI
X	1	0	0	1	1	3
Y	0	1	0	-1	0	2
F <sub>1</sub>	0	0	1	1	1	2
F	0	0	0	+2	+3	11

## ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

### ANÁLISE PÓS-OPTIMALIDADE

Recordemos o exercício apresentado para ilustrar a aplicação do Algoritmo Simplex Revisto:

**Consideremos o seguinte problema de Programação Linear:**

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar } F = 3 \cdot X + Y \\
 & \text{sujeito a:} \\
 & \begin{aligned}
 X &\geq 1 \\
 Y &\geq 2 \\
 X + Y &\leq 5 \\
 X, Y &\geq 0
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

**Resolva-o recorrendo ao Algoritmo Simplex Revisto, a partir da base inicial  $(X, Y, F_3)$ .**

**Nota:**  $F_3$  designa a variável de folga associada à terceira restrição.

Ao resolvê-lo constatámos que a base óptima correspondia às variáveis  $X$ ,  $Y$  e  $F_1$ .

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{ccc|c} & X & Y & F_1 \\ \hline B = & \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right] & & \end{array} \quad D = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \quad b = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 5 \end{array} \right] \\
 & C_B = \left[ \begin{array}{ccc} +3 & +1 & 0 \end{array} \right] \quad C_D = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right] \\
 & B^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \quad B^{-1} \cdot D = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right] \quad X_B = \left[ \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 2 \end{array} \right] \\
 & r = \left[ \begin{array}{cc} +2 & +3 \end{array} \right] \quad F = \left[ \begin{array}{c} 11 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

**Conclusão:** Trata-se da solução óptima, isto é,  $X^* = 3$ ;  $Y^* = 2$ ;  $F^* = 11$

Imagine que o coeficiente da variável  $X$  na função objectivo (originalmente igual a 3) poderia variar ligeiramente, tomando valores no intervalo  $[1 ; 5]$ . Poder-se-ia perguntar "Qual a sensibilidade da solução óptima do problema a essa variação?". Será que a solução óptima é sempre a mesma nesse domínio de variação do coeficiente de  $X$  na função

objectivo ? Ou, pelo contrário, a solução óptima do problema é muito sensível à variação desse coeficiente ?

Podemos também imaginar que o termo independente da primeira restrição tinha sido alterado de 1 para 2. É legítima a pergunta: "Será que se mantém a solução óptima determinada ?".

E o que acontece se, depois de determinar a solução óptima de um dado problema de Programação Linear, descobrirmos que se deveria ter introduzido uma restrição adicional ? Dever-se-ia voltar ao início da resolução ?

As questões levantadas justificam a **Análise de Sensibilidade / Análise de Pós-Optimalidade**, isto é o estudo da sensibilidade da solução óptima de um determinado problema de Programação Linear à variação de algum(ns) dos coeficientes intervenientes / estudo da variação da solução óptima de um problema de Programação Linear face à alteração de algum(ns) dos coeficientes intervenientes e/ou introdução de novas restrições ou novas variáveis.

Comecemos por apresentar, de um modo mais geral, algumas das situações mais importantes com que nos poderemos deparar:

- **Variações nos coeficientes da função objectivo**

$\left[ \begin{array}{c cc c} I & B^{-1}.D & B^{-1}.b \\ \hline 0 & -C_D + C_B \cdot B^{-1}.D & C_B \cdot B^{-1}.b \\ r = \nearrow & & F = \nearrow \end{array} \right]$
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------



$\left[ \begin{array}{c cc c} I & B^{-1}.D & B^{-1}.b \\ \hline 0 & -C_D' + C_B' \cdot B^{-1}.D & C_B' \cdot B^{-1}.b \\ r' = \nearrow & & F' = \nearrow \end{array} \right]$
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Uma alteração nos coeficientes da função objectivo** (novos valores dos coeficientes:  $C_D'$ ;  $C_B'$ ) não põe em causa a admissibilidade da solução correspondente ao último Quadro (antes de se efectuar as alterações). Com efeito, não há qualquer alteração em  $B^{-1}.b$ . No entanto, a **optimalidade pode ser posta em causa**, já que os coeficientes das variáveis não básicas na função objectivo são alterados:  $r' = -C_D' + C_B' \cdot B^{-1}.D$ . [De notar que  $B^{-1}.D$  corresponde ao último Quadro (óptimo)].

Assim, há que verificar se se mantém a optimalidade da solução. Se  $r' \geq 0$ , então a solução anteriormente determinada mantém-se óptima, devendo-se apenas alterar o valor óptimo da função objectivo para  $F' = C_B' \cdot B^{-1}.b$ . [De notar que  $B^{-1}.b$  corresponde ao último Quadro (óptimo)]. Se, pelo contrário, algum dos coeficientes do vector  $r'$  for negativo, a solução anteriormente determinada deixou de ser óptima, devendo prosseguir-se com o Algoritmo Simplex Primal (eventualmente na versão matricial - Algoritmo Simplex Revisto).

- Variações nos termos independentes das restrições

$\left[ \begin{array}{c cc c} I & B^{-1}.D & B^{-1}.b \\ \hline 0 & -CD + CB \cdot B^{-1}.D & CB \cdot B^{-1}.b \\ r = \geq & & F = \geq \end{array} \right]$
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------



$\left[ \begin{array}{c cc c} I & B^{-1}.D & B^{-1}.b' \\ \hline 0 & -CD + CB \cdot B^{-1}.D & CB \cdot B^{-1}.b' \\ r = \geq & & F' = \geq \end{array} \right]$
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Uma alteração nos termos independentes das restrições** (novos valores no vector dos termos independentes:  $b'$ ) **não põe em causa a optimalidade** da solução correspondente ao último Quadro (antes de se efectuar as alterações). Com efeito, não há qualquer alteração em  $r = -CD + CB \cdot B^{-1}.D$ . No entanto, a **admissibilidade pode ser posta em causa**, já que o vector das variáveis básicas sofre alterações:  $X_B' = B^{-1}.b'$  [De notar que  $B^{-1}$  corresponde ao último Quadro (óptimo)].

Assim, há que verificar se se mantém a admissibilidade da solução. Se  $X_B' \geq 0$ , então a solução anteriormente determinada mantém-se admissível (e óptima), devendo-se apenas alterar o valor óptimo da função objectivo para  $F' = CB \cdot B^{-1}.b'$ . [De notar que  $CB \cdot B^{-1}$  corresponde ao último Quadro (óptimo)]. Se, pelo contrário, algum dos coeficientes do vector  $X_B'$  for negativo, a solução anteriormente determinada deixou de ser admissível, continuando, no entanto, a verificar o critério de optimalidade. Para determinar a nova solução óptima a partir do último Quadro, poder-se-á prosseguir com o Algoritmo Simplex **Dual** (ou, alternativamente, arbitrar uma nova solução básica admissível inicial e utilizar o Algoritmo Simplex Primal).

- Variações nos coeficientes das restrições

A introdução de alterações nos coeficientes das restrições pode afectar só a matriz B, só a matriz D, ou ambas.

Como a matriz B intervém no vector das variáveis básicas e no vector dos coeficientes das variáveis não básicas na função objectivo, podemos concluir que **uma alteração que envolva a matriz B obriga à verificação quer da admissibilidade quer da optimalidade**. Se  $X'_B \geq 0$  e  $r' \geq 0$ , mantém-se óptima a base correspondente ao Quadro anterior (embora se alterem os valores das variáveis básicas  $X'_B = B'^{-1}.b$  e o valor da função objectivo  $F' = CB \cdot B'^{-1}.b$ ). Se  $X'_B \geq 0$  e  $r' < 0$ , mantém-se a admissibilidade da base correspondente ao Quadro anterior, mas não a sua optimalidade (pelo que se deverá prosseguir com o Algoritmo Simplex Primal). Se  $X'_B < 0$  e  $r' \geq 0$ , continua a verificar-se a optimalidade da base correspondente ao Quadro anterior, mas não a admissibilidade (para determinar a nova solução óptima a partir do último Quadro, poder-se-á prosseguir com o Algoritmo Simplex **Dual** ou, alternativamente, arbitrar uma nova solução básica admissível inicial e utilizar o Algoritmo Simplex Primal). Se  $X'_B < 0$  e  $r' < 0$ , a base correspondente ao

último Quadro deixou de ser admissível e deixou de ser óptima, pelo que se deverá arbitrar uma nova solução básica admissível inicial e utilizar o Algoritmo Simplex Primal.

Como a matriz  $D$  não intervém no vector das variáveis básicas, podemos concluir que **uma alteração que envolva a matriz  $D$  obriga à verificação apenas da optimalidade, já que a admissibilidade não éposta em causa**. Se  $r' \geq 0$ , mantém-se óptima a base correspondente ao Quadro, embora se tenham alterado os valores das variáveis básicas ( $X'B = B^{-1}b$ ) e o valor da função objectivo ( $F' = C_B \cdot B'^{-1}b$ ); se  $r' < 0$  a base correspondente ao Quadro anterior deixa de ser óptima, pelo que se deverá prosseguir com o Algoritmo Simplex Primal.

Esquematicamente, tem-se:

$$\left[ \begin{array}{c|cc|c} I & B^{-1} \cdot D & B^{-1} \cdot b \\ \hline 0 & -C_D + C_B \cdot B^{-1} \cdot D & C_B \cdot B^{-1} \cdot b \\ r = \nearrow & & F = \nearrow \end{array} \right]$$



$$\left[ \begin{array}{c|cc|c} I & B'^{-1} \cdot D' & B'^{-1} \cdot b \\ \hline 0 & -C_D + C_B \cdot B'^{-1} \cdot D' & C_B \cdot B'^{-1} \cdot b \\ r' = \nearrow & & F' = \nearrow \end{array} \right]$$

### • Introdução de novas variáveis

A introdução de uma nova variável (que, claro está, não pertence à base óptima correspondente ao último Quadro) representa a introdução de uma nova coluna na matriz  $D$ , que designaremos por  $d_n$ , e de um novo coeficiente na função objectivo (formalmente, uma coluna adicional em  $C_D$ ), que designaremos por  $c_n$ .

A admissibilidade da base correspondente ao último Quadro não éposta em causa, já que nada afecta o vector das variáveis básicas,  $X_B = B^{-1}b$ . No entanto, a optimalidade deverá ser verificada, no tocante à nova variável. Será que ela deve entrar para a base e, assim, contribuir para uma melhoria da função objectivo? Ou, pelo contrário, sabemos que ela deve continuar fora da base óptima? Para responder a estas questões calcularemos o coeficiente da nova variável na função objectivo no Quadro do Simplex:  $r_n = -C_n + C_B \cdot B^{-1} \cdot d_n$ . [De notar que  $C_B \cdot B^{-1}$  corresponde ao último Quadro (óptimo)].

Se  $r_n \geq 0$ , mantém-se a optimalidade da base correspondente ao último Quadro, mantendo-se quer os valores das variáveis básicas, quer o valor da função objectivo. Se  $r_n < 0$ , a nova variável deverá entrar para a base, prosseguindo-se com o Algoritmo Simplex Primal (com a determinação da variável que deve sair da base).

### • Introdução de novas restrições

A introdução de uma nova restrição corresponde a uma eventual alteração no espaço de soluções admissíveis. Esta alteração, ainda que efectiva, não significa

necessariamente uma alteração na solução óptima do problema previamente determinada. Ilustremos o que se acaba de referir com um exemplo:

Considere-se o problema de Programação Linear seguinte:

$$\text{Maximizar } F = 3 \cdot X + 2 \cdot Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y &\leq 5 \\ X &\leq 3 \end{aligned}$$

$$X, Y \geq 0$$

É fácil de verificar (por exemplo, recorrendo ao Método Gráfico) que a solução óptima é  $X^* = 3$ ;  $Y^* = 2$ , com  $F^* = 13$ .

Imaginemos que se introduz a nova restrição  $2 \cdot X + 3 \cdot Y \leq 16$ . Como se pode constatar muito facilmente, esta nova restrição é dominada pela restrição  $X + Y \leq 5$ , pelo que em nada altera o espaço de soluções admissíveis do problema original. Assim, a solução óptima do "problema alterado" coincide com a do "problema original".

Se, no "problema original", se introduzir a nova restrição  $4 \cdot X + 6 \cdot Y \leq 25$ , o espaço de soluções admissíveis do problema original é alterado (é "reduzido" - por exemplo,  $(0; 5)$  é solução admissível do "problema original", mas não respeita a nova restrição, pelo que nem sequer é uma solução do "problema alterado"). No entanto, a solução óptima do "problema alterado" coincide com a do "problema original", já que  $(3; 2)$  também respeita a nova restrição.

Se a nova restrição a introduzir no "problema original" for  $4 \cdot X + 6 \cdot Y \leq 22$ , o espaço de soluções admissíveis do problema original também é alterado e, dado que a solução óptima do "problema original" não respeita a nova restrição, a solução óptima do "problema alterado" não coincidirá com a do "problema original". A nova solução óptima será  $X^* = 3$ ;  $Y^* = 5/3$ , com  $F^* = 37/3$ . De notar que, como se esperaria, o valor óptimo da função objectivo do "problema alterado" não é melhor do que o correspondente valor do "problema original".

Assim, se a solução óptima original não violar a nova restrição, continuará a ser a solução óptima do "problema alterado". Se, pelo contrário, a solução óptima original violar a nova restrição, então ela será uma solução não admissível que verifica o critério de optimalidade do "problema alterado", pelo que a determinação da solução admissível óptima do "problema alterado" pode ser feita com o recurso ao Algoritmo Simplex Dual (alternativamente, dever-se-á arbitrar uma nova solução básica admissível inicial para o "problema alterado" e utilizar o Algoritmo Simplex Primal).

Para se utilizar o Algoritmo Simplex Dual, a partir da solução óptima do "problema original" que viola a nova restrição, deve adoptar-se o seguinte procedimento:

1 - No Quadro do Simplex correspondente à solução óptima do "problema original" deve adicionar-se uma nova linha correspondente à nova restrição (e, se necessário, uma nova coluna para a eventual nova variável de folga). Com este passo deixamos de estar perante um Quadro do Simplex.

**2** - Efectuar as "operações elementares" sobre as linhas do Quadro, de modo a ser possível identificar uma variável básica associada à nova linha e, estar-se de novo perante um Quadro do Simplex (correspondente a uma solução não admissível, que respeita o critério de optimalidade).

**3** - Iniciar o Algoritmo Simplex Dual.

Aproveitemos, agora, o exercício apresentado para ilustrar a aplicação do Algoritmo Simplex Revisto, com vista a exemplificarmos as situações agora abordadas:

**Consideremos o seguinte problema de Programação Linear:**

**Maximizar  $F = 3 \cdot X + Y$**

**sujeito a:**

$$X \geq 1$$

$$Y \geq 2$$

$$X + Y \leq 5$$

$$X, Y \geq 0$$

Ao resolvê-lo constatámos que a base óptima correspondia às variáveis X, Y e F<sub>1</sub>.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_B = \begin{bmatrix} +3 & +1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} +2 & +3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$X_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}$$

Conclusão: Trata-se da solução óptima, isto é,  $X^* = 3$ ;  $Y^* = 2$  com  $F^* = 11$ .

a) Admita que o coeficiente da variável X na função objectivo pode variar. Para que valores desse coeficiente se mantém óptima a solução previamente determinada?

b) Imagine que por lapso de edição se tinha indicado que o coeficiente da variável Y na função objectivo era 1, mas o valor real é 10. Manter-se-á a solução óptima determinada? Em caso negativo, determine a nova solução óptima.

c) Se, no problema original, se alterar o termo independente da segunda restrição de 2 para 3, mantém-se a base óptima original ? E a solução óptima original ? Justifique.

d) Se, no problema original, se alterar a terceira restrição para  $(3/2) \cdot X + Y \leq 5$ , manter-se-á a base óptima original? E a solução óptima original? Justifique.

e) Imagine que se introduz, no problema original, uma nova variável não negativa, Z, com coeficiente + 7 na função objectivo F e coeficientes +1, 0 e +2, respectivamente, na 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> restrições.

**Manter-se-á a solução óptima determinada ? Em caso negativo, determine a nova solução óptima.**

f) Se, ao problema original, se acrescentar a restrição  $2 \cdot X + Y \leq 7$ , manter-se-á a solução óptima determinada? Em caso negativo, determine a nova solução óptima.

## Resolução:

a) Seja  $\theta$  o valor do coeficiente de  $X$  na função objectivo  $F$ .

$$C'B = \begin{bmatrix} 0 & +1 & 0 \end{bmatrix} \quad C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r' = \begin{bmatrix} \theta - 1 & \theta \end{bmatrix}$$

A solução óptima anteriormente determinada mantém-se óptima se

$$\theta - 1 \geq 0 \quad \wedge \quad \theta \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta \geq 1$$

b)  $C'B = \begin{bmatrix} +3 & +10 & 0 \end{bmatrix}$        $C_D = \begin{bmatrix} & & 0 \end{bmatrix}$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad X_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r' = \begin{bmatrix} -7 & +3 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 29 \end{bmatrix}$$

$$v_{F2} = B^{-1} \cdot a_{F2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$vF2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad XB = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \Delta_1 &= 3 / 1 \\ \Delta_2 &= - \\ \Delta_3 &= 2 / 1 \leftarrow \text{a } 3^{\text{a}} \text{ variável} \\ \Delta &= 2 \quad \text{básica (F}_1\text{) sói} \\ &\quad \text{da base} \end{aligned}$$

Nova base: (X, Y, F<sub>2</sub>)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} F_1 & F_3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C'_B = \begin{bmatrix} +3 & +10 & 0 \end{bmatrix} \quad C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1}.D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad X_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} +7 & +10 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 43 \end{bmatrix}$$

Assim, a nova solução óptima é X\* = 1; Y\* = 4 com F\* = 43.

c)  $C_B = \begin{bmatrix} +3 & +1 & 0 \end{bmatrix} \quad C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1}.D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad X'_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} +2 & +3 \end{bmatrix} \quad F' = \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$$

Conclusão: Mantém-se óptima a base (X, Y, F<sub>1</sub>), embora se alterem os valores das variáveis básicas e da função objectivo: X\* = 2; Y\* = 3 com F\* = 9.

d)  $X \quad Y \quad F_1 \quad F_2 \quad F_3$

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C_B = \begin{bmatrix} +3 & +1 & 0 \end{bmatrix} \quad C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B'^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \quad B'^{-1}.D = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 \\ -1 & 0 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \quad X'_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$r' = \begin{bmatrix} +1 & +2 \end{bmatrix} \quad F' = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$$

Conclusão: Mantém-se óptima a base (X, Y, F<sub>1</sub>), embora se alterem os valores das variáveis básicas e da função objectivo: X\* = 2; Y\* = 2 com F\* = 8.

e)  $r_Z = -c_Z + C_B . B^{-1}.d_Z$

$$= -7 + \begin{bmatrix} +3 & +1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= -7 + \begin{bmatrix} +3 & +1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$= -7 + 6 = -1 \leftarrow$  a solução deixa de ser óptima; Z deve entrar para a base

$$v_Z = B^{-1} \cdot a_Z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_Z = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Delta_1 = 3/2 \leftarrow \text{a 1ª var. básica}\\ \Delta_2 = \text{---} \quad (\text{X}) \text{ sai da base} \\ \Delta_3 = 2/1 \\ \Delta = 3/2$$

Nova base: (Z, Y, F<sub>1</sub>)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C_B = \begin{bmatrix} +7 & +1 & 0 \end{bmatrix} \quad C_D = \begin{bmatrix} +3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad B^{-1} \cdot D = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad X_B = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} +1/2 & +5/2 & +7/2 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 25/2 \end{bmatrix}$$

Assim, a nova solução óptima é X\* = 0; Y\* = 2; Z\* = 3/2 com F\* = 25/2.

f) Introdução da nova restrição: 2 . X + Y ≤ 7

$$(X^*, Y^*) = (3, 2) \Rightarrow 2 \cdot 3 + 2 = 8 > 7 !$$

Conclusão: a solução óptima vai ser alterada !

1 - Introduzir a nova restrição no último Quadro do Simplex.

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>4</sub>	Tl
X?	1	0	0	1	1	0	3
Y?	0	1	0	-1	0	0	2
F <sub>1</sub>	0	0	1	1	1	0	2
?	2	1	0	0	0	1	7
F	0	0	0	+2	+3	0	11

De notar que se deixou de estar perante um Quadro do Simplex !

**2 - Efectuar "operações elementares" para se estar perante um Quadro do Simplex.**

- multiplicar a 1<sup>a</sup> linha por (- 2) e somar à 4<sup>a</sup> linha
- multiplicar a 2<sup>a</sup> linha por (- 1) e somar à 4<sup>a</sup> linha

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>4</sub>	TI
X	1	0	0	1	1	0	3
Y	0	1	0	-1	0	0	2
F <sub>1</sub>	0	0	1	1	1	0	2
F <sub>4</sub>	0	0	0	-1	-2	1	-1
F	0	0	0	+ 2	+ 3	0	11

**3 - Prosseguir com o Algoritmo Simplex Dual**

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>4</sub>	TI
X	1	0	0	1	1	0	3
Y	0	1	0	-1	0	0	2
F <sub>1</sub>	0	0	1	1	1	0	2
F <sub>4</sub>	0	0	0	-1	-2	1	-1
F	0	0	0	+ 2	+ 3	0	11

2/1      3/2  
↑  
F<sub>3</sub> entra na base

← F<sub>4</sub> sai da base

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>4</sub>	TI
X	1	0	0	1/2	0	1/2	5/2
Y	0	1	0	-1	0	0	2
F <sub>1</sub>	0	0	1	1/2	0	1/2	3/2
F <sub>3</sub>	0	0	0	1/2	1	-1/2	1/2
F	0	0	0	+ 1/2	0	+ 3/2	19/2

Conclusão: A nova solução óptima é X\* = 5/2; Y\* = 2 com F\* = 19/2.

### • Introdução de novas restrições

A introdução de uma nova restrição corresponde a uma eventual alteração no espaço de soluções admissíveis. Esta alteração, ainda que efectiva, não significa necessariamente uma alteração na solução óptima do problema previamente determinada. Ilustremos o que se acaba de referir com um exemplo:

Considere-se o problema de Programação Linear seguinte:

$$\text{Maximizar } F = 3 \cdot X + 2 \cdot Y$$

sujeito a

$$\begin{aligned} X + Y &\leq 5 \\ X &\leq 3 \end{aligned}$$

$$X, Y \geq 0$$

É fácil de verificar (por exemplo, recorrendo ao Método Gráfico) que a solução óptima é  $X^* = 3$ ;  $Y^* = 2$ , com  $F^* = 13$ .

Imaginemos que se introduz a nova restrição  $2 \cdot X + 3 \cdot Y \leq 16$ . Como se pode constatar muito facilmente, esta nova restrição é dominada pela restrição  $X + Y \leq 5$ , pelo que em nada altera o espaço de soluções admissíveis do problema original. Assim, a solução óptima do "problema alterado" coincide com a do "problema original".

Se, no "problema original", se introduzir a nova restrição  $4 \cdot X + 6 \cdot Y \leq 25$ , o espaço de soluções admissíveis do problema original é alterado (é "reduzido" - por exemplo,  $(0; 5)$  é solução admissível do "problema original", mas não respeita a nova restrição, pelo que nem sequer é uma solução do "problema alterado"). No entanto, a solução óptima do "problema alterado" coincide com a do "problema original", já que  $(3; 2)$  também respeita a nova restrição.

Se a nova restrição a introduzir no "problema original" for  $4 \cdot X + 6 \cdot Y \leq 22$ , o espaço de soluções admissíveis do problema original também é alterado e, dado que a solução óptima do "problema original" não respeita a nova restrição, a solução óptima do "problema alterado" não coincidirá com a do "problema original". A nova solução óptima será  $X^* = 3$ ;  $Y^* = 5/3$ , com  $F^* = 37/3$ . De notar que, como se esperaria, o valor óptimo da função objectivo do "problema alterado" não é melhor do que o correspondente valor do "problema original".

Assim, se a solução óptima original não violar a nova restrição, continuará a ser a solução óptima do "problema alterado". Se, pelo contrário, a solução óptima original violar a nova restrição, então ela será uma solução não admissível que verifica o critério de optimalidade do "problema alterado", pelo que a determinação da solução admissível óptima do "problema alterado" pode ser feita com o recurso ao Algoritmo Simplex Dual (alternativamente, dever-se-á arbitrar uma nova solução básica admissível inicial para o "problema alterado" e utilizar o Algoritmo Simplex Primal).

Aproveitemos, agora, o exercício apresentado para ilustrar a aplicação do Algoritmo Simplex Revisto, com vista a exemplificarmos as situações agora abordadas:

Consideremos o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Maximizar } F = 3 \cdot X + Y$$

sujeito a:

$$X \geq 1$$

$$Y \geq 2$$

$$X + Y \leq 5$$

$$X, Y \geq 0$$

Ao resolvê-lo constatámos que a base óptima correspondia às variáveis X, Y e F<sub>1</sub>.

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{matrix} X & Y & F_1 \\ \hline B = & \left[ \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix} \right] & D = \left[ \begin{matrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right] & b = \left[ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{matrix} \right] \\
 C_B = & \left[ \begin{matrix} +3 & +1 & 0 \end{matrix} \right] & C_D = \left[ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \right] & \\
 B^{-1} = & \left[ \begin{matrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{matrix} \right] & B^{-1} \cdot D = \left[ \begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right] & X_B = \left[ \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{matrix} \right] \\
 r = & \left[ \begin{matrix} +2 & +3 \end{matrix} \right] & & F = \left[ \begin{matrix} 11 \end{matrix} \right]
 \end{matrix}
 \end{array}$$

Conclusão: Trata-se da solução óptima, isto é, X\* = 3; Y\* = 2 com F\* = 11.

- a) Admita que o coeficiente da variável X na função objectivo pode variar. Para que valores desse coeficiente se mantém óptima a solução previamente determinada ?
- b) Imagine que por lapso de edição se tinha indicado que o coeficiente da variável Y na função objectivo era 1, mas o valor real é 10. Manter-se-á a solução óptima determinada ? Em caso negativo, determine a nova solução óptima.
- c) Se, no problema original, se alterar o termo independente da segunda restrição de 2 para 3, mantém-se a base óptima original ? E a solução óptima original ? Justifique.
- d) Se, no problema original, se alterar a terceira restrição para  $(3/2) \cdot X + Y \leq 5$ , manter-se-á a base óptima original ? E a solução óptima original ? Justifique.
- e) Imagine que se introduz, no problema original, uma nova variável não negativa, Z, com coeficiente + 7 na função objectivo F e coeficientes +1, 0 e +2, respectivamente, na 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> restrições.
- Manter-se-á a solução óptima determinada ? Em caso negativo, determine a nova solução óptima.
- f) Se, ao problema original, se acrescentar a restrição  $2 \cdot X + Y \leq 7$ , manter-se-á a solução óptima determinada ? Em caso negativo, determine a nova solução óptima.

## Resolução:

- a) Seja  $\theta$  o valor do coeficiente de  $X$  na função objectivo  $F$ .

$$C'B = \begin{bmatrix} \theta & +1 & 0 \end{bmatrix} \quad C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad X_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r' = \begin{bmatrix} \theta - 1 & \theta \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 3\theta + 2 \end{bmatrix}$$

A solução óptima anteriormente determinada mantém-se óptima sse

$$\theta - 1 \geq 0 \quad \wedge \quad \theta \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta \geq 1$$

- $$b) \quad C'B = \begin{bmatrix} +3 & +10 & 0 \end{bmatrix} \quad C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad X_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r' = \begin{bmatrix} -7 & +3 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 29 \end{bmatrix}$$

$$vF_2 = B^{-1} \cdot aF_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = \underline{\quad}$$

$$\Delta_3 = 2 / 1 \leftarrow \text{a } 3^{\text{a}} \text{ variável}$$

$$\Delta = 2 \quad \text{básica (F}_1\text{) sái}$$

$$\quad \quad \quad \text{da base}$$

**Nova base: (X, Y , F<sub>2</sub>)**

$$\text{Matrix form: } \begin{bmatrix} x & y & f_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} f_1 & f_3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C_B' = \begin{bmatrix} +3 & +10 & 0 \end{bmatrix} \quad C_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} \cdot D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} +7 & +10 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 43 \end{bmatrix}$$

Assim, a nova solução óptima é  $X^* = 1$ ;  $Y^* = 4$  com  $F^* = 43$ .

$$\begin{aligned}
c) \quad C_B &= \begin{bmatrix} +3 & +1 & 0 \end{bmatrix} & C_D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & b' &= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\
B^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} & B^{-1} \cdot D &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & X'_B &= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \\
r &= \begin{bmatrix} +2 & +3 \end{bmatrix} & F' &= \begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusão: Mantém-se óptima a base ( $X, Y, F_1$ ), embora se alterem os valores das variáveis básicas e da função objectivo:  $X^* = 2$ ;  $Y^* = 3$  com  $F^* = 9$ .

$$\begin{aligned}
d) \quad &\begin{array}{ccccc} X & Y & F_1 & F_2 & F_3 \end{array} \\
B' &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & b &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \\
C_B &= \begin{bmatrix} +3 & +1 & 0 \end{bmatrix} & C_D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\
B'^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix} & B'^{-1} \cdot D &= \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 \\ -1 & 0 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} & X'_B &= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
r' &= \begin{bmatrix} +1 & +2 \end{bmatrix} & F' &= \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusão: Mantém-se óptima a base ( $X, Y, F_1$ ), embora se alterem os valores das variáveis básicas e da função objectivo:  $X^* = 2$ ;  $Y^* = 2$  com  $F^* = 8$ .

$$\begin{aligned}
e) \quad r_Z &= -c_Z + C_B \cdot B^{-1} \cdot d_Z \\
&= -7 + \begin{bmatrix} +3 & +1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= -7 + \begin{bmatrix} +3 & +1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= -7 + 6 = -1 \leftarrow \text{a solução deixa de ser óptima; } Z \text{ deve entrar para a base}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_Z &= B^{-1} \cdot a_Z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
v_Z &= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & X_B &= \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} & \Delta_1 &= 3/2 \leftarrow \text{a 1ª var. básica} \\
&&&&\Delta_2 &= \text{---} & (X) \text{ sai da base} \\
&&&&\Delta_3 &= 2/1 \\
&&&&\Delta &= 3/2
\end{aligned}$$

Nova base: ( $Z, Y, F_1$ )

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 Z & Y & F_1 \\
 \mathbf{B} = \left[ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right] & \mathbf{D} = \left[ \begin{array}{ccc} X & F_2 & F_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right] & \mathbf{b} = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 5 \end{array} \right] \\
 \mathbf{C}_B = \left[ \begin{array}{ccc} +7 & +1 & 0 \end{array} \right] & \mathbf{C}_D = \left[ \begin{array}{ccc} +3 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{array} \\
 \mathbf{B}^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1/2 \end{array} \right] & \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{D} = \left[ \begin{array}{ccc} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right] & \mathbf{x}_B = \left[ \begin{array}{c} 3/2 \\ 2 \\ 1/2 \end{array} \right] \\
 \mathbf{r} = \left[ \begin{array}{c} +1/2 \\ +5/2 \\ +7/2 \end{array} \right] & & \mathbf{F} = \left[ \begin{array}{c} 25/2 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Assim, a nova solução óptima é  $X^* = 0$ ;  $Y^* = 2$ ;  $Z^* = 3/2$  com  $F^* = 25/2$ .

f) Introdução da nova restrição:  $2 \cdot X + Y \leq 7$

$$(X^*, Y^*) = (3, 2) \Rightarrow 2 \cdot 3 + 2 = 8 > 7 !$$

Conclusão: a solução óptima vai ser alterada !

Para se determinar a nova solução óptima poder-se-ia recorrer ao Algoritmo Simplex Dual (a partir do último Quadro do Simplex), ou, alternativamente, poderemos arbitrar uma nova solução básica admissível inicial e recorrer ao Algoritmo Simplex Primal. Dado que este problema tem apenas duas "variáveis originais", poderemos resolvê-lo graficamente.

A nova solução óptima é  $X^* = 5/2$ ;  $Y^* = 2$  com  $F^* = 19/2$ .

 Verifique o resultado anterior ! Aproveite para fazer uma resolução gráfica do problema "alterado". Identifique a base óptima a partir da resolução gráfica. Recorrendo à formulação matricial do Simplex obtenha o Quadro correspondente à base óptima. A partir da resolução gráfica, escolha uma solução básica admissível não óptima para adoptar como solução inicial e resolva o problema com o Algoritmo Simplex Revisto.

[ E mais nada ? ... ]

Rui Costa 11

Quadro do Simplex correspondente à nova solução óptima:

	X	Y	F <sub>1</sub>	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	F <sub>4</sub>	TI
X	1	0	0	1/2	0	1/2	5/2
Y	0	1	0	-1	0	0	2
F <sub>1</sub>	0	0	1	1/2	0	1/2	3/2
F <sub>3</sub>	0	0	0	1/2	1	-1/2	1/2
F	0	0	0	+1/2	0	+3/2	19/2

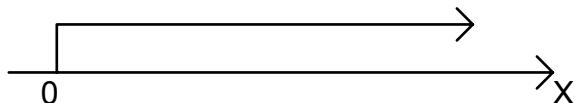
## ***UTILIZAÇÃO DE VARIÁVEIS BINÁRIAS NA FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR MISTA***

Muitas vezes, bastam pequenas alterações a um enunciado de um problema de Programação Linear para que esse ele deixe de ser um problema de Programação Linear e a sua formulação não seja possível fazer-se apenas com o recurso às tradicionais variáveis não negativas... Nestes casos, é frequente poder-se "dar a volta" ao problema utilizando variáveis binárias (que tomam os valores 0 ou 1)...

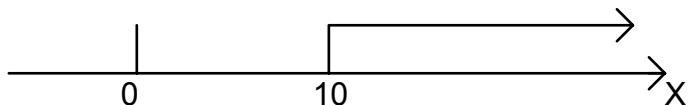
Veremos, em seguida, algumas das situações clássicas em que o recurso às variáveis binárias nos permitirá levar a cabo a formulação, conduzindo, geralmente, a um modelo de programação Linear Mista (isto é, um modelo de P.L. onde, além das variáveis não negativas, existem também variáveis inteiros).

### **1 - O Lote mínimo**

As variáveis utilizadas nos modelos de Programação Linear são não negativas:



Muitas vezes, torna-se necessário, exigir que uma variável  $X$  ou seja nula, ou seja não inferior a um determinado valor (por exemplo, 10) - a situação que normalmente se conhece como "o lote mínimo": ou não se produz um determinado artigo, ou então produz-se, pelo menos, o "lote mínimo". Esquematicamente ter-se-ia:



Seja  $Z$  uma variável binária que toma ou o valor 0, ou o valor 1 -  $Z \in \{ 0 ; 1 \}$ , o que se pode exprimir como uma **conjunção** de três condições:  $Z \leq 1$  ;  $Z \geq 0$  ;  $Z$  inteiro .

**Seja  $M$  um valor numérico positivo muito elevado (relativamente aos valores dos outros coeficientes intervenientes no problema)** - [sempre que necessário, ao longo das várias situações a apresentar, utilizaremos esta notação sem qualquer outra indicação adicional] .

A condição  **$X = 0$  ou  $X \geq 10$**  pode representar-se pela conjunção das seguintes condições:

$X \geq 10 \cdot Z$
$X \leq M \cdot Z$
$Z \in \{ 0 ; 1 \}$
$X \geq 0$

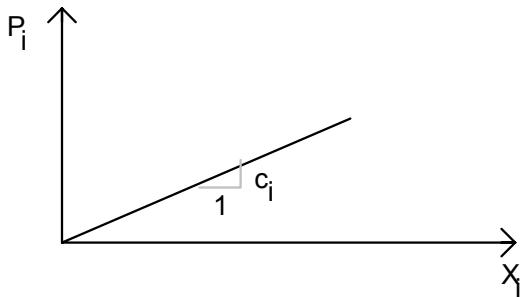
<b>Se <math>Z = 0</math></b>	$X \geq 0$	
	$X \leq 0$ ,	<b>ou seja, <math>X = 0</math>.</b>
<b>Se <math>Z = 1</math></b>		
	$X \geq 10$	
	$X \leq M$ ,	<b>ou seja, <math>X \geq 10</math> .</b>

De notar que  $X \leq M$ , em termos práticos nada restringe, já que  $M$  é um valor positivo tão grande quanto se queira... Daí que a conjunção de  $X \leq M$  com  $X \geq 10$  se traduza, em termos práticos, em  $X \geq 10$ .

Assim, conseguiu-se através de restrições lineares, representar a situação de "Lote mínimo".

## 2 - Custo fixo de arranque de produção

O objectivo dos problemas de Programação Linear pode exprimir-se do modo seguinte:  $\text{MIN } F = c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + \dots + c_n \cdot X_n$ , ou seja, a parcela  $P_i$  correspondente à variável  $X_i$  é igual a  $c_i \cdot X_i$ , podendo representar-se graficamente do modo seguinte:



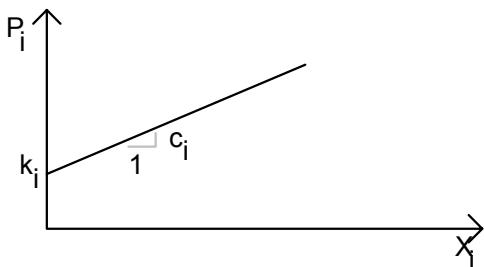
Em muitas situações reais não é adequado admitir que  $P_i$  tem o comportamento linear indicado anteriormente.

Imaginemos, por exemplo, que  $F$  representa o custo total (em u.m.) de produção semanal de uma fábrica que produz dois tipos de peças (A e B). Se  $X_A$  e  $X_B$  representar, respectivamente, o número de peças A e B a produzir semanalmente, pode não ser realista representar  $P_A = 5 \cdot X_A$  (o que corresponderia a afirmar que, por cada peça A produzida, se incorre num custo de 5 u.m.); muitas vezes, para se iniciar o processo de produção incorre-se num custo fixo de arranque do processo produtivo (*set-up cost*), por exemplo 1 u.m., e, para além desse custo fixo, tem que se admitir o custo variável que depende do número de peças A produzidas - por exemplo, admitir um custo unitário de 4 u.m.. Ou seja, em vez de  $P_A = 5 \cdot X_A$  que se tinha anteriormente, passar-se-ia a ter  $P_A = 0$  (se  $X_A = 0$ ), ou alternativamente,  $P_A = 1 + 4 \cdot X_A$  (se  $X_A > 0$ ).

Generalizando, se  $k_i$  e  $c_i$  representarem, respectivamente, o custo fixo e o custo unitário relativo à parcela  $P_i$  ter-se-ia:

$$P_i = 0 \text{ (se } X_i = 0\text{), ou alternativamente, } P_i = k_i + c_i \cdot X_i \text{ (se } X_i > 0\text{),}$$

o que se pode representar graficamente do modo seguinte:



A condição  $P_j = 0$  (se  $X_j = 0$ ) , ou alternativamente,  $P_j = k_j + c_j \cdot X_j$  (se  $X_j > 0$ ) pode representar-se pela conjunção das seguintes condições:

$$\begin{aligned} \text{Min } F &= \dots + k_j \cdot Z_j + c_j \cdot X_j + \dots \\ X_j &\leq M \cdot Z \\ Z &\in \{0; 1\} \\ X_j &\geq 0 \end{aligned}$$

$$Z = 0 \Rightarrow X_j \leq 0 \wedge X_j \geq 0 \Leftrightarrow X_j = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Min } F &= \dots + K_j \cdot 0 + c_j \cdot 0 + \dots , \\ \text{ou seja, } P_j &= 0 . \end{aligned}$$

$$Z = 1 \Rightarrow X_j \leq M \wedge X_j \geq 0 \Leftrightarrow X_j \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{Min } F &= \dots + K_j \cdot 1 + c_j \cdot X_j + \dots , \\ \text{ou seja, } P_j &= k_j + c_j \cdot X_j . \end{aligned}$$

Relembra-se que  $X \leq M$ , em termos práticos nada restringe, já que  $M$  é um valor positivo tão grande quanto se queira... Daí que a conjunção de  $X \leq M$  com  $X \geq 0$  se traduza, em termos práticos, em  $X \geq 0$ .

Assim, conseguiu-se através de restrições lineares, representar a situação de "Custo fixo de arranque de produção".

### 3 - Variável que toma valores de um dado conjunto discreto

Em determinados problemas reais, uma variável só pode tomar valores pertencentes a um determinado conjunto discreto (por exemplo, para o dimensionamento de uma rede de abastecimento de água, a variável diâmetro das canalizações comerciais só pode tomar valores correspondentes aos diâmetros comercializados; como exemplo mais quotidiano pode apresentar-se a variável "nº de ovos a comprar" - obviamente em múltiplos de 6 ... ).

Suponha-se que  $X \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ .

Esta situação pode modelar-se com a conjunção das seguintes condições:

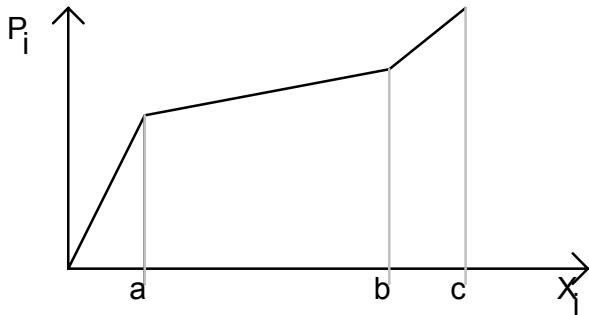
$$\begin{aligned} X &= Z_1 \cdot x_1 + Z_2 \cdot x_2 + \dots + Z_k \cdot x_k \\ Z_1 + Z_2 + \dots + Z_k &= 1 \\ Z_1, Z_2, \dots, Z_k &\in \{0; 1\} \end{aligned}$$

Note-se que a conjunção das duas últimas condições obriga a que uma, e só uma, das variáveis  $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$  tome o valor 1, tomando as restantes variáveis o valor 0. Assim, se, por exemplo,  $Z_2 = 1$  ter-se-á  $X = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \dots + 0 \cdot x_k$ , ou seja,  $X = x_2$ . Genericamente, se  $Z_i = 1$ , então  $X = x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ).

Conseguiu-se, assim, representar facilmente a situação de "Variável que toma valores de um dado conjunto discreto".

#### 4 - Função objectivo com troços lineares de diferentes inclinações

Já se apresentou a situação em que na função objectivo de um problema de Programação Linear a parcela  $P_i$  correspondente à variável  $X_i$  deixa de ser igual a  $c_i \cdot X_i$ , passando a ser  $k_i + c_i \cdot X_i$ . Como se poderá tratar uma situação em que a parcela  $P_i$  seja representada por troços lineares de diferentes inclinações? Veja-se, a título de ilustração a figura seguinte:



Imagine-se, sem perda de generalidade, que, relativamente à figura anterior se tinha:  $a = 5$  (declive da f.o. = 1,0);  $b = 12$  (declive da f.o. = 0,5) e  $c = 20$  (declive da f.o. = 0,7).

Poderemos imaginar que a variável  $X_i$  se exprime como a soma de **três variáveis não negativas**  $Y_1$  (correspondente ao intervalo  $X_i \in [0; a]$ ),  $Y_2$  (correspondente ao intervalo  $X_i \in [a; b]$ ) e  $Y_3$  (correspondente ao intervalo  $X_i \in [b; c]$ ), ou seja,

$$X_i = Y_1 + Y_2 + Y_3, \text{ verificando-se adicionalmente}$$

$$0 \leq Y_1 \leq 5 \quad (5 \text{ é a amplitude do intervalo } [0; a = 5])$$

$$0 \leq Y_2 \leq 7 \quad (7 \text{ é a amplitude do intervalo } [a = 5; b = 12])$$

$$0 \leq Y_3 \leq 8 \quad (8 \text{ é a amplitude do intervalo } [b = 12; c = 20]).$$

Nestas condições poder-se-ia escrever:

$$P_i = 1,0 \cdot Y_1 + 0,5 \cdot Y_2 + 0,7 \cdot Y_3.$$

No entanto, para que este artifício seja válido, é preciso garantir que:

$$Y_1 = 5 \text{ sempre que } Y_2 > 0 \quad \underline{\text{e}} \quad Y_2 = 7 \text{ sempre que } Y_3 > 0.$$

Tal consegue-se com a introdução de duas variáveis binárias  $Z_1, Z_2 \in \{0; 1\}$ :  $Z_1$  toma o valor 1 sempre que  $Y_1$  atinja o seu valor máximo (5) e toma o valor 0, caso contrário; analogamente,  $Z_2$  toma o valor 1 sempre que  $Y_2$  atinja o seu valor máximo (7) e toma o valor 0, caso contrário.

Assim, o exemplo indicado de **função objectivo com troços lineares de diferentes inclinações**, pode modelar-se com a conjunção das seguintes condições:

$$X_i = Y_1 + Y_2 + Y_3 \quad [1]$$

$$P_i = 1,0 \cdot Y_1 + 0,5 \cdot Y_2 + 0,7 \cdot Y_3 \quad [2]$$

$$5 \cdot Z_1 \leq Y_1 \leq 5 \quad [3]$$

$$7 \cdot Z_2 \leq Y_2 \leq 7 \cdot Z_1 \quad [4]$$

$$0 \leq Y_3 \leq 8 \cdot Z_2 \quad [5]$$

$$Z_1, Z_2 \in \{0; 1\} \quad [6]$$

Note-se que:

- a função objectivo  $F$  (de que  $P_i$  é uma parcela) tanto pode ser maximizada como minimizada.

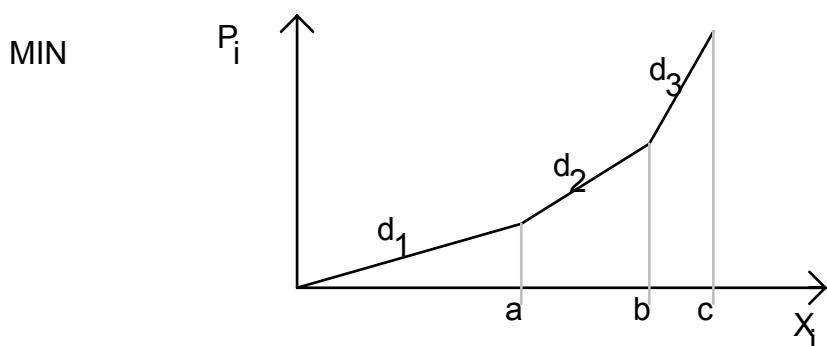
• se  $Z_1 = 0$ , então  $Z_2 = 0$  (condição [4]). Tal ocorre quando  $X \in [0; a = 5]$  e, consequentemente,  $0 \leq Y_1 \leq 5$  (condição [3]);  $Y_2 = 0$  (condição [4]) e  $Y_3 = 0$  (condição [5]).

• se  $Z_1 = 1$ , então  $Z_2$  pode tomar o valor 0 ou o valor 1 (condições [4],[5]).

• se  $Z_1 = 1$  e  $Z_2 = 0$ , então  $X \in [a = 5; b = 12]$ , isto é,  $Y_1 = 5$  (condição [3]),  $0 \leq Y_2 \leq 7$  (condição [4]) e  $Y_3 = 0$  (condição [5]).

• se  $Z_1 = 1$  e  $Z_2 = 1$ , então  $X \in [b = 12; c = 20]$ , isto é,  $Y_1 = 5$  (condição [3]),  $Y_2 = 7$  (condição [4]) e  $0 \leq Y_3 \leq 8$  (condição [5]).

Um caso particular de função objectivo com troços lineares de diferentes inclinações diz respeito às chamadas deseconomias de escala - função que se pretende minimizar com troços com declives crescentes (ou, alternativamente, maximizar uma função com troços com declives decrescentes).



Na figura anterior  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$  designam, respectivamente, os declives dos troços  $[0; a]$ ,  $[a; b]$  e  $[b; c]$ , verificando-se  $d_1 \leq d_2 \leq d_3$ .

A situação de **deseconomias de escala - função que se pretende minimizar com troços com declives crescentes**, pode modelar-se com a conjunção das seguintes condições:

$$X_i = Y_1 + Y_2 + Y_3 \quad [1]$$

$$P_i = d_1 \cdot Y_1 + d_2 \cdot Y_2 + d_3 \cdot Y_3 \quad [2]^{*} \\ (\text{MIN } F \text{ e } d_1 \leq d_2 \leq d_3)$$

$$0 \leq Y_1 \leq a \quad [3]$$

$$0 \leq Y_2 \leq b - a \quad [4]$$

$$0 \leq Y_3 \leq c - b \quad [5]$$

De notar que, relativamente ao caso geral apresentado anteriormente, existem as seguintes peculiaridades:

- a função objectivo **F** (de que **P<sub>i</sub>** é uma parcela) **apenas pode ser minimizada** (estamos a tratar da situação de declives crescentes:  $d_1 \leq d_2 \leq d_3$  ).
- **não é necessário introduzir variáveis binárias** para garantir que  $Y_1 = a$  **sempre que**  $Y_2 > 0$  **e**  $Y_2 = b - a$  **sempre que**  $Y_3 > 0$ , já que como se pretende **minimizar F** e como os declives dos troços são crescentes  $d_1 \leq d_2 \leq d_3$ , fica garantido o cumprimento das condições referidas (é sempre melhor, em termos do objectivo, incrementar a variável  $Y_1$  do que  $Y_2$  ou  $Y_3$ , pelo que só depois de  $Y_1$  tomar o seu valor máximo ( $a$ ) se incrementa  $Y_2$ ; analogamente, só depois de  $Y_2$  tomar o seu valor máximo ( $b - a$ ) se incrementa  $Y_3$ ).
- se se pretender resolver um problema de maximização de uma função com troços lineares de declives crescentes, deve optar-se pela formulação correspondente ao caso geral apresentado anteriormente (com as variáveis binárias).

## 5 - Activação de uma de entre duas restrições

Imaginemos que se pretende **garantir que seja cumprida, pelo menos uma, de entre duas restrições** de um problema de Programação Linear. A título de exemplo consideremos:

$$\text{Ou } 3 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 \leq 18 ,$$

$$\text{ou } X_1 + 4 \cdot X_2 \leq 16 .$$

Se somarmos ao segundo membro de uma restrição do tipo " $\leq$ " um valor positivo muito elevado **M**, estamos, em termos práticos a "anular" a restrição. Com efeito, por exemplo,  $3 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 \leq 18 + M$  nada restringe, em termos práticos, já que por muito elevados que sejam os valores atribuídos às variáveis **X<sub>1</sub>** e **X<sub>2</sub>** a restrição continua a ser verificada.

Assim, pode dizer-se que há uma equivalência entre

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Ou } & 3 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 \leq 18 , \\ \text{ou } & X_1 + 4 \cdot X_2 \leq 16 . \end{aligned}}$$

e

$$\boxed{\begin{aligned} \text{ou } & 3 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 \leq 18 \wedge X_1 + 4 \cdot X_2 \leq 16 + M, \\ \text{ou } & X_1 + 4 \cdot X_2 \leq 16 \wedge 3 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 \leq 18 + M. \end{aligned}}.$$

Assim, a situação de **escolha de uma de entre duas restrições** (relativa ao exemplo apresentado), pode modelar-se com a conjunção das seguintes condições:

$$\boxed{3 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 \leq 18 + M \cdot Z \quad [1]}$$

$$\boxed{X_1 + 4 \cdot X_2 \leq 16 + M \cdot (1 - Z) \quad [2]}$$

$$\boxed{Z \in \{0; 1\} \quad [3]}$$

De notar que:

- se  $Z = 0$ , então exige-se o cumprimento da primeira restrição; caso contrário, exige-se o cumprimento da segunda restrição [ No entanto, nada impede que ambas sejam pontualmente verificadas ].
- se uma restrição for do tipo " $\geq$ ", a parcela  $M \cdot Z$  ( ou,  $M \cdot (1 - Z)$  ) deverá ser subtraída ao segundo membro da desigualdade.
- se a disjunção não for exclusiva, bastará a cada uma das duas restrições fazer corresponder uma variável binária e, adicionalmente, exigir que a soma dessas variáveis binárias não exceda 1.

## 6 - Activação de k restrições de entre um grupo de restrições

A generalização do caso anterior pretende garantir que, de entre um grupo com **mais de k restrições, sejam cumpridas, pelo menos k restrições** de um problema de Programação Linear.

Imaginemos que, de entre as N restrições seguintes pretendemos activar, pelo menos k ( $k < n$ ).

$$f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq d_1 ,$$

$$f_2(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq d_2 ,$$

$$f_3(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq d_3 ,$$

.

.

.

$$f_N(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq d_N ,$$

Tal, poder-se-ia conseguir do modo seguinte:

$$f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq d_1 + M \cdot Z_1$$

$$f_2(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq d_2 + M \cdot Z_2$$

$$f_3(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq d_3 + M \cdot Z_3$$

.

.

.

$$f_N(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq d_N + M \cdot Z_N$$

$$Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N = N - k$$

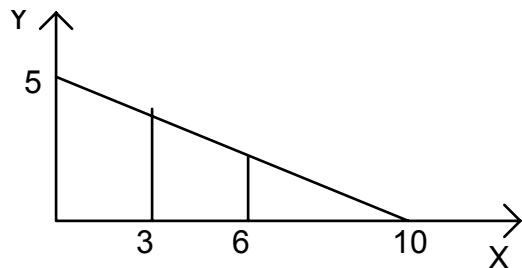
$$Z_1, Z_2, \dots, Z_N \in \{0;1\}$$

De notar que se a variável  $Z_i$  tomar o valor 0, a restrição  $f_i(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq d_i$  é activada. Por outro lado, a condição  $Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N = N - k$ , em simultâneo com  $Z_1, Z_2, \dots, Z_N \in \{0;1\}$  garante-nos que exactamente  $k$  variáveis  $Z_i$  tomem o valor 0, isto é, que exactamente  $k$  restrições sejam activadas, como se pretendia.

## 7 - Representação de domínios planos não convexos por disjunção de restrições lineares

Exemplificaremos esta situação com a apresentação dos três exemplos seguintes:

**Exemplo A** - Considere-se o domínio plano representado na figura seguinte:



Este domínio plano pode representar-se por

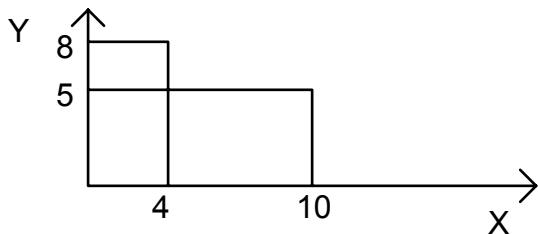
$$\{ X + 2 \cdot Y \leq 10 \wedge X \geq 0 \wedge Y \geq 0 \wedge (X \leq 3 \vee X \geq 6) \} ,$$

ou, alternativamente, pela conjunção das condições seguintes:

$X + 2 \cdot Y \leq 10$	[ 1 ]
$X \geq 0$	[ 2 ]
$Y \geq 0$	[ 3 ]
$X \leq 3 + M \cdot Z$	[ 4 ]
$X \geq 6 - M \cdot (1 - Z)$	[ 5 ]
$Z \in \{0; 1\}$	[ 6 ]

De notar que as condições [ 1 ], [ 2 ] e [ 3 ] são **sempre** verificadas. Se  $Z = 0$ , restrição " $X \leq 3$ " é activada e a restrição " $X \geq 6$ " é desactivada, acontecendo o inverso se  $Z = 1$ .

**Exemplo B** - Considere-se o domínio plano representado na figura seguinte:



Este domínio plano pode representar-se por

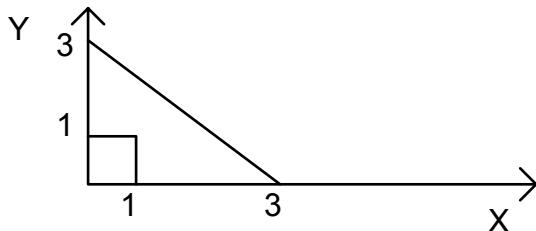
$$\{ X \leq 10 \wedge Y \leq 8 \wedge X \geq 0 \wedge Y \geq 0 \wedge (X \leq 4 \vee Y \leq 5) \} ,$$

ou, alternativamente, pela conjunção das condições seguintes:

$X \leq 10$	[ 1 ]
$Y \leq 8$	[ 2 ]
$X \geq 0$	[ 3 ]
$Y \geq 0$	[ 4 ]
$X \leq 4 + M \cdot Z$	[ 5 ]
$Y \leq 5 + M \cdot (1 - Z)$	[ 6 ]
$Z \in \{ 0 ; 1 \}$	[ 7 ]

De notar que as condições [ 1 ], [ 2 ], [ 3 ] e [ 4 ] são **sempre** verificadas. Se  $Z = 0$ , a restrição " $X \leq 4$ " é activada e a restrição " $Y \leq 5$ " é desactivada, acontecendo o inverso se  $Z = 1$ .

**Exemplo C** - Considere-se o domínio plano representado na figura seguinte:



Este domínio plano pode representar-se por

$$\{ X + Y \leq 3 \wedge X \geq 0 \wedge Y \geq 0 \wedge (X \geq 1 \vee Y \leq 1) \} ,$$

ou, alternativamente, pela conjunção das condições seguintes:

$$X + Y \leq 3 \quad [1]$$

$$X \geq 0 \quad [2]$$

$$Y \geq 0 \quad [3]$$

$$X \geq 1 - M \cdot Z \quad [4]$$

$$Y \geq 1 - M \cdot (1 - Z) \quad [5]$$

$$Z \in \{0; 1\} \quad [6] .$$

De notar que as condições [ 1 ], [ 2 ] e [ 3 ] são **sempre** verificadas. Se  $Z = 0$ , a restrição " $X \geq 1$ " é activada e a restrição " $Y \geq 1$ " é desactivada, acontecendo o inverso se  $Z = 1$ .

## 8 - Implicação de restrições

A utilização de variáveis binárias permite ainda modelar a relação de implicação entre restrições. Para tal, basta recordarmo-nos da equivalência entre  $a \Rightarrow b$  e  $\sim a \vee b$ .

Considere-se um **primeiro exemplo**:

**Se ( $X + Y > 10$ ), então ( $Z \geq 3 \wedge W \leq 5$ ).**

Esta implicação é equivalente a ( $X + Y \leq 10$ ) ou ( $Z \geq 3 \wedge W \leq 5$ ), o que pode representar-se com a conjunção das condições seguintes:

$X + Y \leq 10 + M \cdot Z_1$	[ 1 ]
$Z \geq 3 - M \cdot Z_2$	[ 2 ]
$W \leq 5 + M \cdot Z_2$	[ 3 ]
$Z_1 + Z_2 \leq 1$	[ 4 ]
$Z \in \{0 ; 1\}$	[ 5 ]

De notar que se  $Z = 0$ , a restrição " $X + Y \leq 10$ " é activada e as restrições " $Z \geq 3$ " e " $W \leq 5$ " são desactivadas, acontecendo o inverso se  $Z = 1$ .

Consideremos agora um **segundo exemplo**: Representar, como conjunção de condições,  $|X| > 5$ .

Como se sabe,

$ X  > 5$	$\Leftrightarrow$	$X > 5, \text{ se } X \geq 0$ $-X > 5, \text{ se } X < 0$
-----------	-------------------	--------------------------------------------------------------

Relativamente à implicação  $X \geq 0 \Rightarrow X > 5$ , pode-se escrever equivalentemente  $X < 0 \vee X > 5$ , o que pode representar-se com a conjunção das condições seguintes:

$X < 0 + M \cdot Z$	[ 1 ]
$X > 5 - M \cdot (1 - Z)$	[ 2 ]
$Z_1 + Z_2 \leq 1$	[ 3 ]
$Z \in \{0 ; 1\}$	[ 4 ]

De notar que, se  $Z = 0$ , então  $X < 0$ ; se  $Z = 1$ , então  $X > 5$ . Isto é,  $X < 0$  ou  $X > 5$ , como se pretendia.

Relativamente à implicação  $X < 0 \Rightarrow -X > 5$ , pode-se escrever equivalentemente  $X \geq 0 \vee -X > 5$ , o que pode representar-se com a conjunção das condições seguintes:

$$X \geq 0 - M \cdot (1 - Z) \quad [1]$$

$$-X > 5 - M \cdot Z \quad [2]$$

$$Z \in \{0; 1\} \quad [3].$$

De notar que, se  $Z = 0$ , então  $-X > 5$ ; se  $Z = 1$ , então  $X \geq 0$ . Isto é,  $X \geq 0$  ou  $-X > 5$ , como se pretendia. De realçar ainda o facto de se ter tido o cuidado de escrever os dois conjuntos de conjunções de condições relativos às duas implicações, de modo a que os "resultados" sejam compatíveis, permitindo a sua sobreposição. Com efeito, se  $Z = 0$ ,  $X$  toma sempre um valor negativo; e se  $Z = 1$ ,  $X$  toma sempre um valor não negativo [Tal não aconteceria se a conjunção de condições relativa à segunda implicação fosse  $X \geq 0 - M \cdot Z$  e  $-X > 5 - M \cdot (1 - Z)$  e  $Z \in \{0; 1\}$ , que representaria correctamente essa implicação...].

Assim, poderemos sintetizar os resultados:

$$|X| > 5$$

$\Leftrightarrow$

$$X < 0 + M \cdot Z \quad [1]$$

$$X > 5 - M \cdot (1 - Z) \quad [2]$$

$$X \geq 0 - M \cdot (1 - Z) \quad [3]$$

$$-X > 5 - M \cdot Z \quad [4]$$

$$Z \in \{0; 1\} \quad [5].$$

De notar que, se  $Z = 0$ , então  $X < 0$  [1] e  $-X > 5$  [4], ou seja  $X < -5$  se  $Z = 1$ , então  $X > 5$  [2] e  $X \geq 0$  [3], ou seja  $X > 5$ . Isto é,  $X < -5$  ou  $X > 5$ , que é efectivamente o que acontece com  $|X| > 5$ .

## 9 - Problemas de escolha múltipla

Admita-se que as variáveis  $X_1, X_2, \dots, X_n$  estão associadas a  $n$  actividades que poderão ser levadas a cabo.  $X_i$  corresponde à "intensidade" com que a  $i$ -ésima actividade deve ser levada a cabo ( se  $X_i = 0$  a  $i$ -ésima actividade não deve ser levada a cabo; se  $X_i > 0$  a  $i$ -ésima actividade deve ser executada ).

Admita-se ainda que as  $n$  actividades estão divididas em  $k$  grupos. Seja  $N_j$  o número de actividades pertencentes ao grupo  $j$ , pelo que  $N_1 + N_2 + \dots + N_k = n$ .

Admita-se que se pretende garantir que apenas uma actividade de cada grupo venha a ser levada a cabo.

Tal, pode conseguir-se fazendo:

<b>Grupo 1</b>	$X_j \leq 0 + M \cdot Z_j, \quad \forall j \in \text{"Grupo 1"}$ [ 1 ]
	$\sum_{j \in \text{"Grupo 1"}} Z_j = 1$ [ 2 ]
	$Z_j \in \{ 0 ; 1 \}, \quad \forall j \in \text{"Grupo 1"}$ [ 3 ]
.	.
.	.
.	.
<b>Grupo k</b>	$X_j \leq 0 + M \cdot Z_j, \quad \forall j \in \text{"Grupo k"}$ [ 1 ]
	$\sum_{j \in \text{"Grupo k"}} Z_j = 1$ [ 2 ]
	$Z_j \in \{ 0 ; 1 \}, \quad \forall j \in \text{"Grupo k"}$ [ 3 ]
	$X_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$ [ 4 ]

Relativamente a cada grupo de actividades, as restrições [ 2 ] e [ 3 ] garantem que só uma das variáveis  $Z_j$  tome o valor 1, sendo nulas as restantes. Assim, garante-se que a variável  $X_j$  possa ser positiva; pelo contrário, a conjunção das restrições [ 1 ], [ 2 ] e [ 3 ] do grupo de actividades e da restrição [ 4 ], obriga as restantes variáveis  $X_i$  do grupo a tomarem o valor 0. Ou seja, relativamente a cada grupo de actividades, apenas uma actividade é levada a cabo, como se pretendia.

É fácil fazer pequenas variantes: exigir que, pelo menos, uma actividade por grupo seja levada a cabo; exigir que duas actividades por grupo sejam levadas a cabo ...

Para terminarmos a abordagem da utilização das variáveis binárias na formulação de problemas de Programação Linear Mista, consideraremos o seguinte **problema-global**:

O responsável pelos serviços de informática de uma grande empresa pretende planear a aquisição de novo equipamento (microcomputadores, impressoras e monitores).

Estão disponíveis no mercado três marcas de microcomputadores considerados adequados ( A, B e C ), duas marcas de impressoras ( D e E ) e quatro marcas de monitores ( F, G\*, H e I\* - \* designa monitores de alta resolução ).

Sabe-se que os microcomputadores da marca A são incompatíveis com os monitores da marca H e que os microcomputadores da marca C são incompatíveis com as impressoras da marca E.

O responsável pelos serviços de informática decidiu que:

- 1) devem ser comprados, pelo menos, 30 microcomputadores e 5 impressoras;
- 2) devem ser comprados, pelo menos, tanta monitores quantos os microcomputadores comprados; o número de monitores comprado não poderá, no entanto, exceder em mais de 15 % o número de microcomputadores comprado;
- 3) pelo menos, 30 % dos monitores comprados deverão ser de alta resolução;
- 4) só se deverá comprar microcomputadores de uma única marca.
- 5) só se deverá comprar impressoras de uma única marca.
- 6) poderão ser comprados monitores de, no máximo, duas marcas diferentes.

Sabe-se que se dispõe de 550 u.m. para proceder às aquisições de equipamento informático e pretende-se maximizar a Utilidade Global do equipamento adquirido.

Conhece-se o quadro seguinte:

Marca	Utilidade unitária	Custo total (*) (u.m.)
A	10	$15 \cdot X_A$
B	8	$3 + 12 \cdot X_B$
C	9	$13 \cdot X_C, X_C \leq 10 ; 130 + 10 \cdot (X_C - 10), X_C > 10$
D	4	$1 + 5 \cdot X_D$
E	3	$2 + 4 \cdot X_E$
F	1	$X_F, X_F \leq 6; 1,2 + 0,8 \cdot X_F, 6 < X_F \leq 12; 3,6 + 0,6 \cdot X_F, X_F > 12$
G	5	1,2 · X_G - só vendido em lotes de 12 unidades
H	2	$0,8 \cdot X_H$
I	6	$0,4 + 1,0 \cdot X_I$

Ruy Costa, 2011

Nota (\*) :  $X_i$  designa o número unidades de equipamento de marca  $i$  a adquirir

Formule o problema com um modelo de Programação Linear Mista adequado.

Considerando que  $X_i$  representa o número unidades de equipamento de marca  $i$  a adquirir,  $i = A, B, \dots, I$ , pode formular-se o problema do modo seguinte:

$$\text{MAX } U = 10 X_A + 8 X_B + 9 X_C + 4 X_D + 3 X_E + 1 X_F + 5 X_G + 2 X_H + 6 X_I$$

sujeito a:

$X_A \leq M \cdot Z_1$   
 $X_B \leq M \cdot Z_2$   
 $X_C \leq M \cdot Z_3$   
 $Z_1 + Z_2 + Z_3 = 1$       apenas se compra microcomputadores de uma única marca

$X_D \leq M \cdot Z_4$   
 $X_B \leq M \cdot Z_5$   
 $Z_4 + Z_5 = 1$  apenas se compra impressoras de uma única marca  
 $Z_5 = 1 - Z_3$  incompatibilidade C / E

$$\begin{aligned}
 X_F &\leq M \cdot Z_6 \\
 X_G &\leq M \cdot Z_7 \\
 X_H &\leq M \cdot Z_8 \\
 X_I &\leq M \cdot Z_9 \\
 1 \leq Z_6 + Z_7 + Z_8 + Z_9 &\leq 2 \quad \text{compra-se monitores de, no máx., duas marcas} \\
 Z_8 = 1 - Z_1 &\quad \text{incompatibilidade A / H}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \textbf{XA} + \textbf{XB} + \textbf{XC} \geq 30 & \text{nº mínimo de microcomputadores a adquirir} \\ \textbf{XD} + \textbf{XE} \geq 50 & \text{nº mínimo de impressoras a adquirir} \end{array}$$

$$1,15 \cdot (X_A + X_B + X_C) \geq (X_F + X_G + X_H + X_I) \geq (X_A + X_B + X_C) \quad \text{relação n°comp./n°monit.}$$

$$(X_G + X_I) \geq 0,30 \cdot (X_F + X_G + X_H + X_I) \quad \text{Nº mínimo de monitores de alta resol.}$$

$$X_G = 12 \cdot Z_{10} + 24 \cdot Z_{11} + 36 \cdot Z_{12} + 48 \cdot Z_{13}$$

$Z_{10} + Z_{11} + Z_{12} + Z_{13} \leq 1$  monitores G vendidos em lotes de 12 unidades

$$15 \cdot X_A + (3 \cdot Z_2 + 12 \cdot X_B) + (13 \cdot Y_1 + 10 \cdot Y_2) + (1 \cdot Z_4 + 5 \cdot X_D) + \\ + (2 \cdot Z_5 + 4 \cdot X_E) + (1 \cdot Y_3 + 0,8 \cdot Y_4 + 0,6 \cdot Y_5) + 1,2 \cdot X_G + 0,8 \cdot X_H + \\ + (0,4 \cdot Z_9 + 1,0 \cdot X_I) \leq 550 \quad \text{recurso financeiro}$$

$X_C = Y_1 + Y_2$   
 $10 \cdot Z_{14} \leq Y_1 \leq 10$   
 $0 \leq Y_2 \leq 50 \cdot Z_{14}$  custo unitário dos computadores C variável com  $X_C$

$$X_F = Y_3 + Y_4 + Y_5$$

$$6 \cdot Z_{15} \leq Y_3 \leq 6$$

$$6 \cdot Z_{16} \leq Y_4 \leq 6 \cdot Z_{15}$$

$$0 \leq Y_5 \leq 50 \cdot Z_{16}$$

custo unitário dos monitores F variável com  $X_F$

$X_i \geq 0$  e inteiros,  $i = A, B, \dots, I$ .  
 $Z_k \in \{0; 1\}$ ,  $k = 1, \dots, 16$  - variáveis auxiliares  
 $Y_m \geq 0$ ,  $m = 1, 2, \dots, 5$  - variáveis auxiliares

**R E S O L U Ç Ã O      D E      P R O B L E M A S      D E**  
**P R O G R A M A Ç Ã O      L I N E A R      I N T E I R A :**  
**O    A L G O R I T M O    'B R A N C H    A N D    B O U N D'**  
**( P E S Q U I S A    E M    Á R V O R E )**

Considere-se o **problema 1** seguinte:

$$\text{MAX } F = 2 \cdot X_A + 3 \cdot X_B$$

sujeito a:

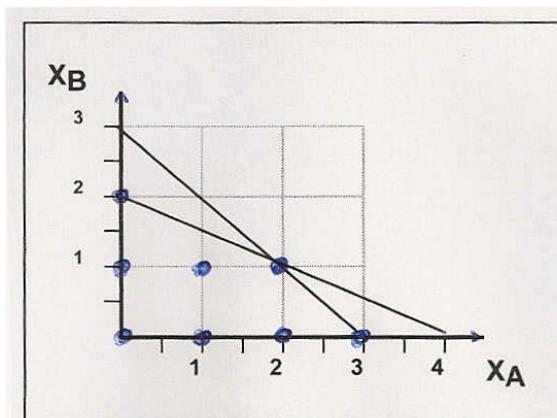
$$\begin{aligned} 2 \cdot X_A + 4 \cdot X_B &\leq 8 \\ 2 \cdot X_A + 2 \cdot X_B &\leq 6 \end{aligned}$$

$X_A, X_B \geq 0$  e inteiras.

Trata-se de um problema de Programação Linear Inteira Pura (PLIP), isto é, um problema de Programação Linear a que adicionalmente se exige a integralidade de todas as variáveis.

Tratando-se de um problema com duas variáveis, podemos resolvê-lo graficamente. Para tal, começemos por representar o conjunto de soluções admissíveis correspondente:

Ruy Costa



Como se pode observar na figura anterior, o conjunto de soluções admissíveis corresponde ao conjunto formado pelos oito pontos assinalados, que verificam simultaneamente as duas restrições, as condições de não negatividade e de integralidade das variáveis.

Dado que se pretende maximizar a função objectivo  $F = 1 \cdot X_A + 3 \cdot X_B$ , devemos deslocar, tanto quanto possível, no sentido crescente de  $X_A$  e de  $X_B$ , uma recta de declive ( $-1/3$ ).

Assim, é fácil determinar o ‘último’ dos oito ‘pontos/soluções admissíveis’ a ser tocado pela recta de declive ( $-1/3$ ) no seu movimento ‘ascendente’, isto é, tem-se  $(X_A^*, X_B^*) = (2, 1)$  a que corresponde  $F^* = 7$ .

Se, no problema 1 anterior, relaxarmos a condição de integralidade das variáveis (ou seja, prescindirmos da exigência de integralidade das variáveis), estaremos perante um problema de Programação Linear (PL), que diremos ser a **relaxação linear** do problema de PLI original. Com efeito, o conjunto de soluções do problema de PLI está contido no espaço de soluções admissíveis do ‘problema relaxado’ de PL, pelo que é fácil de concluir que a solução óptima do problema de PLI nunca poderá corresponder a um valor da função objectivo melhor do que o correspondente à solução óptima do respectivo ‘problema relaxado’ de PL.

No problema 1, a solução óptima do problema relaxado respeita a condição de integralidade, pelo que, obviamente, coincide com a solução óptima do problema de PLI. Ou seja, neste caso, ter-se-á  $F^*_{PLI} = F^*_{PL}$ . Em geral, para um problema de **maximização**, tem-se  $F^*_{PLI} \leq F^*_{PL}$ .

Assim, podemos, desde já, indicar um caminho a seguir na resolução de problemas de PLI:



- Começa-se por resolver a relaxação linear do problema de PLI, isto é, o problema de PL ‘associado’.
- Se a solução óptima desse problema respeitar a condição de integralidade das variáveis, essa será também a solução óptima do problema de PLI original.

Consideremos, agora, o **problema 2** seguinte:

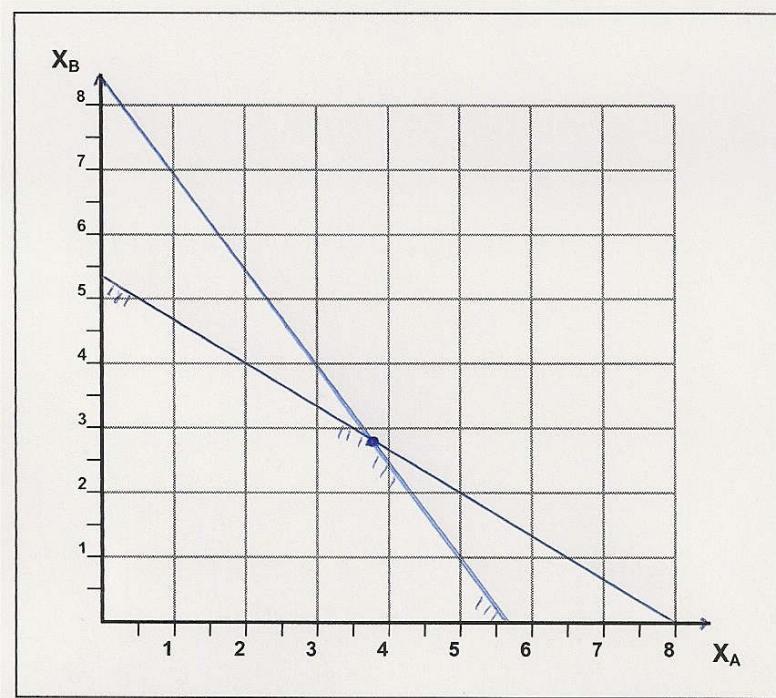
$$\text{MAX } F = 5 \cdot X_A + 6 \cdot X_B$$

**sujeito a:**

$$\begin{aligned} 2 \cdot X_A + 3 \cdot X_B &\leq 16 \\ 3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B &\leq 17 \end{aligned}$$

$$X_A, X_B \geq 0 \text{ e inteiras.}$$

Comecemos por representar o conjunto de soluções admissíveis correspondente:



Comecemos por resolver graficamente a relaxação linear do problema. A solução óptima do correspondente problema de PL é  $(X_A^*, X_B^*) = (3,8; 2,8)$  a que corresponde  $F_{PL}^* = 35,8$ . Como é óbvio, esta não pode ser a solução óptima do problema de PLI ! Como os coeficientes das variáveis na função objectivo são inteiros, o valor óptimo da função objectivo (do problema de PLI) será inteiro e, consequentemente, não excederá 35 ...

Observe-se que se pretendessemos obter a solução óptima do problema de PLI arredondando cegamente a solução anterior, obteríamos  $(4, 3)$ , que não é sequer uma solução admissível do problema !

Se tivessemos o cuidado de ‘arredondar’ a solução óptima do problema de PL para a solução admissível ‘mais próxima’ do problema de PLI teríamos  $(3, 3)$ , a que corresponderia  $F = 33$ . Será que essa é a solução óptima do problema de PLI ?

A resposta é negativa ! Com efeito, se deslocarmos uma recta de declive  $(-5/6)$ , que representa a função objectivo, no sentido crescente de  $X_A$  e de  $X_B$ , o último ‘ponto/solução admissível de PLI’ a ser tocado é  $(2, 4)$ , ou seja,  $(X_A^*, X_B^*) = (2, 4)$ , a que corresponde  $F_{PLI}^* = 34$ .

Assim, parece importante reter que,

 Quando se pretende resolver um dado problema de PLI, começando por resolver a sua relaxação linear, nunca se deve assumir que a solução óptima do problema de PLI se pode obter pelo ‘arredondamento’ da solução óptima dessa relaxação linear !

Uma questão pode por-se, neste momento: ‘A resolução da relaxação linear de um problema de PLI não pode servir de base para a resolução desse problema de PLI?’

A questão anterior tem resposta afirmativa. O Método de Pesquisa em Árvore (‘Branch and Bound’), vai permitir obter a solução de um problema de PLI, partindo da resolução da sua relaxação linear (PL), como se verá em seguida.

Dois conceitos estão na base deste método: ‘branching’, ou seja, **ramificação** e ‘bounding’, isto é, **limitação**.

Consideremos um problema de PLI de maximização. Para o resolver pelo Algoritmo ‘Branch and Bound’, começa-se por resolver a sua relaxação linear (um problema que, por simplicidade, designaremos por PL).

- Se a solução óptima respeitar a condição de integralidade das variáveis, então essa será também a solução óptima do problema de PLI.

- Caso contrário, o valor da função objectivo do problema PL poderá ser considerado um limite superior do valor óptimo da função objectivo do problema de PLI .

- Considere-se uma das variáveis que na solução óptima do problema de PL não verifica a condição de integralidade. Assuma-se, sem perda de generalidade, que X é essa variável. Constitua-se as duas restrições seguintes:

$$X \geq \lceil X^* \rceil + 1 \quad \text{e}$$

$$X \leq \lceil X^* \rceil ,$$

onde  $\lceil X^* \rceil$  designa o maior valor inteiro que não excede  $X^*$ .

- Ramifique-se o problema PL, em dois novos problemas de Programação Linear, PL1 e PL2, obtidos a partir de PL, cada um deles por adição de cada uma das duas restrições anteriormente definidas.

Desta forma está-se a partitionar o conjunto de soluções admissíveis de PLI em dois subconjuntos, contidos respectivamente no espaço de soluções admissíveis de PL1 e PL2 .

--- Interrompemos a apresentação do Algoritmo ‘Branch and Bound’ para o exemplificarmos com a resolução do **problema 2** anteriormente apresentado ---

PLI	PL
$\text{MAX } F = 5 \cdot X_A + 6 \cdot X_B$ sujeito a: $2 \cdot X_A + 3 \cdot X_B \leq 16$ $3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \leq 17$ $X_A, X_B \geq 0$ e inteiros.	$\text{MAX } F = 5 \cdot X_A + 6 \cdot X_B$ sujeito a: $2 \cdot X_A + 3 \cdot X_B \leq 16$ $3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \leq 17$ $X_A, X_B \geq 0$ .

Começemos por escrever o enunciado ...

Passemos à Relaxação Linear PL e



determinemos a correspondente solução óptima:

$$X_A^* = 3,8 ; X_B^* = 2,8 ; F^* = 35,8$$

Actualizemos o limite superior da função objectivo F :

$Lsup F = 35,8 \rightarrow 35$  pois os coefs. das vars. na f.o. são inteiros.

Ramifiquemos PL a partir da variável  $X_A$ :  $X_A^* = 3,8 \rightarrow X_A \geq 4 ; X_A \leq 3$



PL1	PL2
$\text{MAX } F = 5 \cdot X_A + 6 \cdot X_B$ sujeito a: $2 \cdot X_A + 3 \cdot X_B \leq 16$ $3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \leq 17$ $X_A \geq 4$ $X_A, X_B \geq 0$ .	$\text{MAX } F = 5 \cdot X_A + 6 \cdot X_B$ sujeito a: $2 \cdot X_A + 3 \cdot X_B \leq 16$ $3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \leq 17$ $X_A \leq 3$ $X_A, X_B \geq 0$ .



Resolvendo, obtemos:

$$X_A^* = 4 ; X_B^* = 2,5 ; F^* = 35,0$$

O que nos permitiria 'actualizar' o limite superior da função objectivo F:

$$Lsup F = 35,0$$



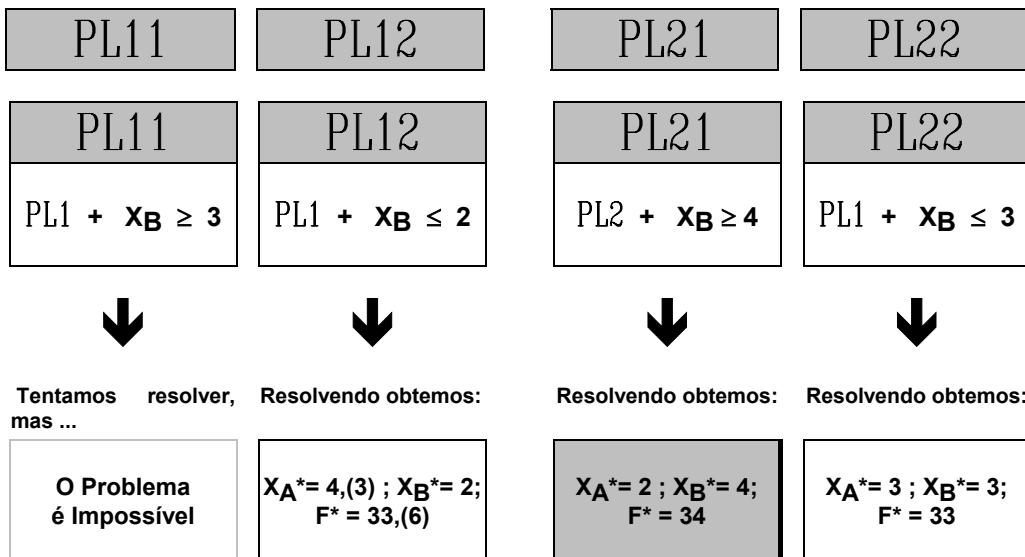
Resolvendo, obtemos:

$$X_A^* = 3 ; X_B^* = 3,(3) ; F^* = 35,0$$

O que nos permitiria 'actualizar' o limite superior da função objectivo F:

$$Lsup F = 35,0$$





Normalmente, nos algoritmos de pesquisa em árvore, **a pesquisa é feita em profundidade**, escolhendo-se ramificar o subproblema mais recentemente criado, escolhendo-se, em caso de empate, o subproblema correspondente ao melhor valor da função objectivo.

Assim, na resolução do problema 2, acima esquematizada, começámos por resolver a relaxação linear  $PL$ . Constatamos não ter obtido a solução óptima do problema de PLI e concluímos que 35 é um limite superior do valor óptimo da função objectivo.

Ramificando  $PL$  a partir da variável  $X_A$ , criámos então os subproblemas  $PL1$  e  $PL2$ . Resolvemos  $PL1$ , constatando não se ter obtido a solução óptima do problema de PLI, uma vez que  $X_B^*$  não toma um valor inteiro. Pode-se ainda manter 35 como limite superior do valor óptimo da função objectivo. De notar que, por coincidência, o valor óptimo da função objectivo nestes dois subproblemas é igual ... daí que prossigamos com a ramificação do primeiro desses problemas.

Ramificando  $PL1$  a partir da variável  $X_B$ , criámos então os subproblemas  $PL11$  e  $PL12$ . Resolvemos  $PL11$ , constatando que o mesmo é impossível. Resolvemos  $PL12$ , constatando não se ter ainda obtido a solução óptima do problema de PLI, uma vez que  $X_A^*$  não toma um valor inteiro. De notar que qualquer ramificação de  $PL12$  conduziria a soluções correspondentes a valores da função objectivo não superiores a 33.

Como podemos ramificar o subproblema  $PL2$  a que corresponde um *melhor* limite superior da função objectivo ( 35 ), deixaremos, por agora, o subproblema  $PL12$ .

Ramificando  $PL2$  a partir da variável  $X_B$ , criámos então os subproblemas  $PL21$  e  $PL22$ . Resolvendo o subproblema  $PL21$  obtemos, pela primeira vez, uma solução inteira: (  $X_A^* = 2 ; X_B^* = 4$  ) a que corresponde  $F^* = 34$ . Poderemos estar perante a solução óptima do problema de PLI ! Diremos então que esta é a **solução incumbente**.

De notar que, neste momento, podemos concluir ser desnecessário prosseguir a ramificação do subproblema  $PL22$ . Com efeito, já havíamos concluído que essa ramificação conduziria a soluções óptimas correspondentes a valores da função objectivo não superiores a 33. Ora a solução incumbente, neste momento, corresponde a  $F^* = 34$ , pelo que, não se justifica ramificar subproblemas correspondentes a valores de  $F$  inferiores a 34.

E porque não concluir, de imediato, que a solução ( $X_A^* = 2$  ;  $X_B^* = 4$ ) é a solução óptima do problema de PLI? ... É que o subproblema PL2 correspondia a  $F^* = 35$ , pelo que a ramificação que originou PL22 deverá ser explorada, já que pode corresponder a uma solução óptima correspondente a  $F$  não inferior a 34 ...

Resolvendo PL22 obtém-se uma solução inteira correspondente a  $F^* = 33$ , pelo que termina a resolução do nosso problema! A solução, até aí, incumbente passa a poder ser considerada a **solução óptima do problema de PLI**: ( $X_A^* = 2$  ;  $X_B^* = 4$ ) a que corresponde  $F^* = 34$ .

[ De notar que, como já se referiu, para a resolução do problema de PLI não fazia sentido prosseguir a ramificação de PL12 ... No entanto, se pretender verificar o que se referiu, poderá ramificar PL12 a partir da variável  $X_A$  ( $X_A \geq 5$  ;  $X_A \leq 4$ ), obtendo PL121 e PL122, a que correspondem, respectivamente, ( $X_A^* = 5$  ;  $X_B^* = 1$ ) ;  $F^* = 31$  e ( $X_A^* = 4$  ;  $X_B^* = 4$ ) ;  $F^* = 32$  - por acaso, duas soluções inteiras, mas obviamente piores do que a 'solução incumbente / óptima' ... ].

Para apresentarmos a resolução do **problema 2**, interrompemos a apresentação do **Algoritmo 'Branch and Bound'**. Sintetizemos agora o funcionamento deste Algoritmo.

**Considere-se o problema de Programação Linear Inteira, que se designará por PLI, de maximização, cuja Relaxação Linear se designará por PL.**

**Para resolver o problema PLI recorrendo ao Algoritmo 'Branch and Bound', recorre-se à Relaxação Linear, PL, e**

I - **EM CADA ITERAÇÃO devem ser seguidos os três passos seguintes:**

### **1 - Ramificação**

De entre os subproblemas ainda não pesquisados, seleccionar o que foi criado mais recentemente. Em caso de empate, seleccionar o correspondente ao maior valor da função objectivo.

De entre as variáveis ineiras que apresentem um valor não inteiro, seleccionar a primeira de acordo com a ordem atribuída originalmente. Essa será a 'variável de ramificação'. Assuma-se, sem perda de generalidade, que  $X_k$  é essa variável. Constituam-se as duas restrições seguintes:

$$X_k \geq \lceil X_k^* \rceil + 1 \quad \text{e}$$

$$X_k \leq \lceil X_k^* \rceil ,$$

onde  $\lceil X_k^* \rceil$  designa o maior valor inteiro que não excede  $X_k^*$ .

Ramifique-se o nó correspondente ao subproblema em análise, em dois novos subproblemas, cada um deles obtidos a partir do subproblema em análise por adição de cada uma das restrições anteriormente definidas.

## 2 - Limitação

Para cada novo subproblema  $PL_k$ , determinar o correspondente valor óptimo da função objectivo,  $F^*_{PL_k}$ . Para tal recorrer ao Algoritmo Simplex Primal, ou ao Algoritmo Simplex Dual, se estiver a reoptimizar.

Actualizar o limite superior para o valor óptimo da função objectivo do problema PLI.

Se a solução óptima verificar as condições de integralidade das variáveis, actualizar a solução incumbente, bem como o valor da função objectivo a ela associado.

De notar que se  $F^*_{PL_k}$  representar o valor óptimo da função objectivo correspondente ao subproblema  $PL_k$ , então qualquer subproblema criado a partir desse, por ramificação, terá  $F^*_{PL_k}$  como limite superior da função objectivo. Se os coeficientes das variáveis na função objectivo forem inteiros então esse limite superior é igual a  $\lceil F^*_{PL_k} \rceil$  (o maior valor inteiro que não excede  $F^*_{PL_k}$ ).

## 3 - Eliminação

A cada novo subproblema deverão ser aplicados os seguintes quatro ‘Testes de Eliminação’. Terminar-se-á a pesquisa a partir dos subproblemas que verifiquem, pelo menos, um dos testes.

**Teste 1 :** O valor óptimo da função objectivo correspondente é menor (ou igual) ao valor óptimo da função objectivo correspondente à solução incumbente.

**Teste 2 :** A solução óptima é inteira e o correspondente valor da função objectivo é igual ao limite superior do valor óptimo para a função objectivo do problema PLI.

→ Foi encontrada a solução óptima do problema PLI !

**Teste 3 :** O problema é impossível / não tem soluções admissíveis.

**Teste 4 :** A solução óptima verifica as condições de integralidade das variáveis.

→ Actualizar a ‘solução incumbente’ !

## III - CRITÉRIO DE OPTIMALIDADE :

Parar quando não houver subproblemas por pesquisar, ou quando for verificado o ‘Teste de Eliminação nº 2’. A ‘solução incumbente’ é a solução óptima do problema PLI .

**Se não existir qualquer ‘solução incumbente’, tal indicará que o problema PLI original não tem soluções admissíveis.**

Antes de prosseguirmos gostaríamos de deixar duas notas:

1 - Na exposição apresentada considerou-se, para simplificar, que se estava a resolver um problema de PLI, de maximização. O Algoritmo ‘Branch and Bound’ pode ser utilizado directamente para a resolução de problemas de minimização. Nessas circunstâncias dever-se-á fazer as necessárias adaptações, nomeadamente no que diz respeito à ‘Limitação’ - o limite do valor óptimo da função objectivo do problema de PLI passa, agora, a ser um limite inferior...

2 - O Algoritmo ‘Branch and Bound’ pode ser aplicado a problemas de Programação Linear Mista (PLM). Neste caso, a ramificação só é aplicada à(s) variável(eis) inteira(s). Existe ainda uma variante deste Algoritmo para problemas de Programação Linear Binária, normalmente referido como ‘Enumeração Implícita’.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 1 -

$$\text{MAX } F = 3 \cdot X + 2 \cdot Y + 1 \cdot Z$$

sujeito a:

$$1 \cdot X + 1 \cdot Y + 3 \cdot Z \leq 150$$

$$1 \cdot X + 1 \cdot Y - 1 \cdot Z \leq 100$$

$$3 \cdot X - 1 \cdot Y + 1 \cdot Z \leq 100$$

$$X, Y, Z \geq 0 \text{ e inteiros.}$$

À Relaxação Linear deste problema corresponde o seguinte Quadro óptimo do Simplex:

	X	Y	Z	F1	F2	F3	
X	1	0	0	0	1/4	1/4	50
Y	0	1	0	1/4	2/4	-2/4	62,5
Z	0	0	1	2/4	-2/4	0	12,5
F	0	0	0	3/4	6/4	1/4	287,5

- 2 -

$$\text{MAX } F = 5 \cdot X + 6 \cdot Y$$

sujeito a:

$$2 \cdot X + 3 \cdot Y \leq 16$$

$$3 \cdot X + 2 \cdot Y \leq 17$$

$$X, Y \geq 0$$

- a) e X inteiro.
- b) e Y inteiro.



## O PROBLEMA DOS TRANSPORTES

## O ALGORITMO DOS TRANSPORTES

- O Problema dos Transportes

O Problema dos Transportes é um problema *clássico* de Programação Linear:

Tem-se  $m$  'fontes de oferta' de um dado produto, que é preciso abastecer a  $n$  'pontos de procura'.

Conhecem-se os custos unitários de transporte  $c_{ij}$  associados ao transporte de uma unidade da 'fonte'  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) para o 'ponto'  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Conhecem-se as disponibilidades  $a_i$  associadas a cada 'fonte'  $i$  e as necessidades  $b_j$  associadas a cada 'ponto'  $j$ .

Pretende-se determinar o 'plano de transportes' que minimiza o custo total de transportes.

Fontes de oferta		Pontos de Procura		
Disponibilidades			Necessidades	
$a_1$	1		1	$b_1$
$a_2$	2		2	$b_2$
$a_i$	$i$	$c_{ij}$	$j$	$b_j$
$a_m$	$m$			$b_n$
			$n$	
			$\sum_{i=1}^m a_i$	$\sum_{j=1}^n b_j$

É óbvio que é importante saber qual a relação entre

- Se o total das disponibilidades for igual ao total das necessidades, diremos estar perante um 'problema equilibrado' - apresentaremos o 'Algoritmo dos Transportes' que permite resolver Problemas dos Transportes equilibrados.

- Se os totais das disponibilidades e das necessidades diferirem, estaremos perante um 'problema desequilibrado' - a sua resolução será possível, depois de artificialmente equilibrarmos o problema.

Consideremos um Problema dos Transportes equilibrado. A sua formulação é imediata:

Seja  $x_{ij}$  a quantidade a transportar da 'fonte de oferta'  $i$  para o 'ponto de consumo'  $j$ .

O problema pode apresentar-se do modo seguinte:

$$\text{MIN } C = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij}$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad [1]$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad [2]$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad [3]$$

De notar que a função objectivo corresponderá ao Custo Total correspondente ao plano de transporte ' $x_{ij}$ '.

As  $m$  restrições [ 1 ] dizem respeito a cada 'fonte de oferta'. A  $i$ -ésima restrição diz respeito à  $i$ -ésima 'fonte de oferta' e visa assegurar que o total enviado para os  $n$  'pontos de procura' é igual à capacidade dessa 'fonte de oferta'.

As  $n$  restrições [ 2 ] dizem respeito a cada 'ponto de procura'. A  $j$ -ésima restrição diz respeito ao  $j$ -ésima 'ponto de procura' e visa assegurar que o total recebido das  $m$  'fontes de oferta' é igual à necessidade desse 'ponto de procura'.

As  $m \cdot n$  condições [ 3 ] são as habituais **condições de não negatividade das variáveis** (que não serão consideradas 'restrições').



Se o problema for não equilibrado, que alterações terão que ser introduzidas ?

Representemos 'matricialmente' as restrições [ 1 ] e [ 2 ] do Problema dos Transportes:

**Notas:** 1) Os coeficientes não representados são nulos.  
2) A coluna da direita representa os termos independentes das restrições.

Se observarmos com atenção a matriz dos coeficientes das restrições de um Problema dos Transportes constataremos que a estrutura deste problema é muito particular:

- os coeficientes ou são nulos ou unitários - os coeficientes unitários dispõem-se 'em patamares' ou 'em escada' (os 'patamares' correspondem às 'restrições da oferta' e as 'escadas' correspondem às 'restrições da procura').
  - a cada variável só correspondem dois coeficientes unitários - genericamente, à variável  $x_{ij}$  corresponderão coeficientes unitários na i-ésima 'restrição da oferta' e na j-ésima 'restrição da procura' (todos os outros coeficientes, relativos a essa variável, serão nulos).
  - um problema genérico dos transportes com m fontes de oferta e n pontos de procura, corresponderá a  **$m + n$  restrições**. No entanto, dado que se está a considerar que o problema é equilibrado, é possível estabelecer-se uma relação entre essas restrições (a soma dos termos independentes das 'restrições da oferta' deverá ser igual à soma dos termos independentes das 'restrições da procura'), pelo que, teremos apenas  **$m + n - 1$  restrições independentes**.

A resolução de um Problema dos Transportes pode fazer-se por recurso ao Algoritmo Simplex, já que este é um problema de Programação Linear. No entanto, tal seria muito trabalhoso, já que, mesmo para um número baixo de fontes de oferta e pontos de procura, se teria um elevado número de restrições.

Atendendo à particularíssima estrutura do 'Problema dos Transportes' foi possível desenvolver um algoritmo eficiente para a resolução deste problema: **o Algoritmo dos Transportes**.

### • O Algoritmo dos Transportes

Admitamos estar perante um Problema dos Transportes equilibrado com m 'fontes de oferta' e n 'pontos de procura'. Sistematizemos os **6** passos a seguir pelo Algoritmo dos Transportes para a sua resolução:

- 1 • Construir um '**Quadro dos Transportes**' com uma linha para cada 'fonte de oferta' e uma coluna para cada 'ponto de procura', isto é, **com m linhas e n colunas**, como se esquematiza em seguida:

	C1	C2	...	Cj	...	Cn	
F1	c <sub>11</sub>	c <sub>12</sub>	...	c <sub>1j</sub>	...	c <sub>1n</sub>	a <sub>1</sub>
F2	c <sub>21</sub>	c <sub>22</sub>	...	c <sub>2j</sub>	...	c <sub>2n</sub>	a <sub>2</sub>
...	...	...	...	...	...	...	...
F <sub>i</sub>	c <sub>i1</sub>	c <sub>i2</sub>	...	c <sub>ij</sub>	...	c <sub>in</sub>	a <sub>i</sub>
...	...	...	...	...	...	...	...
F <sub>m</sub>	c <sub>m1</sub>	c <sub>m2</sub>	...	c <sub>mj</sub>	...	c <sub>mn</sub>	a <sub>m</sub>
	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	...	b <sub>j</sub>	...	b <sub>n</sub>	

No canto inferior direito de cada 'célula' correspondente ao transporte a efectuar de uma fonte de oferta para um ponto de procura indica-se o correspondente custo unitário de transporte.

À direita de cada linha (correspondente a uma fonte de oferta) indica-se a correspondente disponibilidade.

Em baixo de cada coluna (correspondente a um ponto de procura) indica-se a correspondente necessidade.

• 2 • Arbitrar uma **solução inicial**. Para tal, poderemos recorrer ao **Método do Canto NW**, ou ao **Método do Custo Mínimo**.

• 3 • Verificar se a solução é **degenerada**.

• 4 • Verificar a optimalidade da solução em análise.

• 5 • Se a solução em análise não for óptima, determinar qual a variável não básica que deve entrar para a base e determinar o valor máximo que essa variável pode tomar.

• 6 • Proceder ao incremento da variável que vai entrar para a base e aos correspondentes ajustamentos no 'Quadro dos Transportes'. Voltar ao passo • 3 •.

Apliquemos o Algoritmo dos Transportes para resolver o Problema dos Transportes correspondente ao seguinte 'Quadro dos Transportes':

X	Y	Z	Nota: Custos

A	3	1	3	50	unitários de transporte em u.m. / unidade
B	2	9	3	250	
C	5	7	2	100	
	200	50	150		

- 1 • Construir um 'Quadro dos Transportes' ✓

- 2 • Arbitrar uma solução inicial.

Comecemos por apresentar o **Método do Canto NW**:

- selecionar a 'célula' ainda não preenchida situada no 'Canto NW' (i.e.,  $\nwarrow$ ).
- atribuir a essa célula o maior valor possível, respeitando simultaneamente a disponibilidade da 'fonte de oferta' e a necessidade do 'ponto de procura' correspondentes.

Repetir a) e b) até o 'Quadro dos Transportes' estar completamente preenchido.

	X	Y	Z	50
A	3	1	3	250
B	2	9	3	100
C	5	7	2	
	200	50	150	

Sobreou-se o 'Canto NW'. A 'fonte de oferta' A pode fornecer, no máximo, 50 unidades e o 'ponto de consumo' X necessita de 200 unidades de produto. Assim, o maior valor possível que se pode atribuir a  $x_{AX}$  será igual a  $\min(50; 200)$ , isto é, 50 unidades.

Ruy 2011

	X	Y	Z	50
A	50	0	0	250
B	2	9	3	100
C	5	7	2	
	200	50	150	

De notar que quando se atribui a  $x_{AX}$  o valor 50, 'esgota-se' a capacidade de fornecimento da 'fonte de oferta' A, pelo que é imediata a atribuição do valor 0 a  $x_{AY}$  e  $x_{AZ}$ .

Desde já se chama a atenção para o facto de, normalmente, se 'esgotar' apenas ou a disponibilidade da 'fonte de oferta', ou as necessidades do 'ponto de procura'. Só a título *excepcional* ocorrem simultaneamente essas duas situações. Quando tal ocorrer, originar-se-á uma situação de **degenerescência**.

Assinalemos o novo 'Canto NW' disponível:

	X	Y	Z	
A	50	0	0	50
B				250
C				100
	200	50	150	

A 'fonte de oferta' B pode fornecer, no máximo, 250 unidades e o 'ponto de consumo' X necessita agora de 150 unidades de produto (já que a 'fonte' A fornecerá 50 unidades). Assim, o maior valor possível que se pode atribuir a  $x_{BX}$  será igual a  $\min(250; 150)$ , isto é, 150 unidades.

	X	Y	Z	
A	50	0	0	50
B	150			250
C	0			100
	200	50	150	

De notar que quando se atribui a  $x_{BX}$  o valor 150, 'esgota-se' as necessidades do 'ponto de consumo' X, pelo que é imediata a atribuição do valor 0 a  $x_{CX}$ .

De notar ainda que nesta etapa do preenchimento do 'Quadro dos Transportes' apenas se 'esgotou a coluna X' ...

Assinalemos o novo 'Canto NW' disponível:

	X	Y	Z	
A	50	0	0	50
B	150			250
C	0			100
	200	50	150	

A 'fonte de oferta' B pode agora fornecer, no máximo, 100 unidades (já que já fornece 150 unidades a X) e o 'ponto de consumo' Y necessita de 50 unidades de produto. Assim, o maior valor possível que se pode atribuir a  $x_{BY}$  será igual a  $\min(100; 50)$ , isto é, 50 unidades.

	X	Y	Z	
A	50	0	0	50
B	150	50		250
C	0	0		100
	200	50	150	

De notar que quando se atribui a  $x_{BY}$  o valor 50, 'esgota-se' as necessidades do 'ponto de consumo' Y, pelo que é imediata a atribuição do valor 0 a  $x_{CY}$ .

De notar ainda que nesta etapa do preenchimento do 'Quadro dos Transportes' apenas se 'esgotou a coluna Y' ...

Assinalemos o novo 'Canto NW' disponível:

	X	Y	Z	
A	50	0	0	50
B	150	50		250
C	0	0		100
	200	50	150	

A 'fonte de oferta' B pode agora fornecer, no máximo, 50 unidades (já que já fornece 150 unidades a X e 50 unidades a Y) e o 'ponto de consumo' Z necessita de 150 unidades de produto. Assim, o maior valor possível que se pode atribuir a  $x_{BZ}$  será igual a  $\min(50; 150)$ , isto é, 50 unidades.

Ruy Soárez 2011

	X	Y	Z	
A	50	0	0	50
B	150	50	50	250
C	0	0		100
	200	50	150	

De notar que quando se atribui a  $x_{BZ}$  o valor 50, apenas se 'esgota' a disponibilidade da 'fonte de oferta' B ('esgota-se a linha B').

Resta finalmente a célula CZ, sendo de 100 unidades o correspondente valor, já que o 'ponto de consumo' Z necessita de um total de 150 unidades, recebendo já 50 unidades de B e, por outro lado, a 'fonte de oferta' C pode proporcionar um envio máximo de 100 unidades. Assim, o valor a atribuir a  $x_{CZ}$  será igual a  $\min(100; 100)$ , isto é, 100 unidades.

	X	Y	Z	
A	50	0	0	50
B	150	50	50	250
C	0	0	<b>100</b>	100
	200	50	150	

De notar que, quando se completa o preenchimento do 'Quadro dos Transportes' se esgota **sempre** simultaneamente 'a linha' e 'a coluna' correspondentes à célula que então se preenche. Tal **não** indica qualquer situação de degenerescência ...

Temos, agora, uma **solução inicial** para o nosso Problema de Transportes:

	X	Y	Z	
A	<b>50</b>	0	0	50
B	<b>150</b>	50	50	250
C	0	0	<b>100</b>	100
	200	50	150	

Antes de prosseguirmos podemos 'traduzir' a **solução inicial** representada pelo 'Quadro dos Transportes' anterior:

$$x_{AX} = 50 ; x_{AY} = 0 ; x_{AZ} = 0 ; x_{BX} = 150 ; x_{BY} = 50 ; x_{BZ} = 50 ; x_{CX} = 0 ; x_{CY} = 0 ; x_{CZ} = 100$$

Poderemos determinar facilmente o **custo associado a esta solução**:

$$C_{\text{Tot}} = 50 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 150 \cdot 2 + 50 \cdot 9 + 50 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 7 + 100 \cdot 2 = 1250 \text{ u.m.}$$

Claro que de imediato surge uma pergunta óbvia: '**Será este o valor mínimo possível do Custo Total de Transporte ?**', ou, o que é o mesmo, '**Será esta a solução óptima ?**'.

Para respondermos a esta(s) pergunta(s) deveremos prosseguir a aplicação do Algoritmo dos Transportes:

• 3 • Verificar se a solução é **degenerada**.

Este é um cuidado que deveremos ter para evitar 'dissabores'...

Já se referiu que a um Problema dos Transportes com  $m$  'fontes de oferta' e  $n$  'pontos de procura' estão associadas  $m + n - 1$  restrições independentes. Assim, uma solução deste problema será básica não degenerada se tiver exactamente  $m + n - 1$  variáveis básicas (i.e., positivas). Se o número de variáveis positivas for inferior a  $m + n - 1$ , estaremos perante uma solução básica degenerada (e teremos que ter alguns cuidados antes de prosseguirmos...).

Assim, relativamente ao problema que estamos a resolver, tem-se:

$$\text{nº variáveis básicas} = m + n - 1 = 5 \checkmark$$

Ou seja, a solução inicial arbitrada é básica não degenerada.

• 4 • Verificar a optimalidade da solução em análise.

Quando apresentámos o Algoritmo Simplex para a resolução de problemas de Programação Linear, concluímos que para verificar a optimalidade de uma dada solução era necessário **re-escrever a função objectivo apenas em função das variáveis não básicas**. Neste problema pretendemos re-escrever a função  $C_{\text{Tot}}$  em função de  $x_{AY}$ ,  $x_{AZ}$ ,  $x_{CX}$  e  $x_{CY}$ , isto é,

$$\begin{aligned} C_{\text{Tot}} &= 3 \cdot x_{AX} + 1 \cdot x_{AY} + 3 \cdot x_{AZ} + 2 \cdot x_{BX} + 9 \cdot x_{BY} + 3 \cdot x_{BZ} + 5 \cdot x_{CX} + 7 \cdot x_{CY} + 2 \cdot x_{CZ} \\ &= 0 \cdot x_{AX} + ? \cdot x_{AY} + ? \cdot x_{AZ} + 0 \cdot x_{BX} + 0 \cdot x_{BY} + 0 \cdot x_{BZ} + ? \cdot x_{CX} + ? \cdot x_{CY} + 0 \cdot x_{CZ} + K \end{aligned}$$

em que  $K$  corresponde ao custo da solução em análise.

Pretendemos, assim, passar da representação

$$C_{\text{Tot}} = \sum \sum c_{ij} \cdot x_{ij} \quad \text{para}$$

$$C_{\text{Tot}} = \sum \sum c'_{ij} \cdot x_{ij} + K \quad \text{com} \quad c'_{ij} = 0 \quad \text{para todas as variáveis } x_{ij} \text{ básicas} .$$

Para obtermos os novos valores dos custos unitários,  $c'_{ij}$ , poderemos adoptar o seguinte procedimento:

Definir  $c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$  com  $c'_{ij} = 0$  para todas as variáveis  $x_{ij}$  básicas, isto é, para as  $m + n - 1$  variáveis básicas será válida a igualdade  $c_{ij} = u_i + v_j$ .

Note-se que a cada linha do 'Quadro dos Transportes' se está a afectar um coeficiente  $u_i$  e a cada coluna um coeficiente  $v_j$ . Assim, teremos que determinar  $m$  valores para os  $m$  coeficientes  $u_i$  e  $n$  valores para os coeficientes  $v_j$  a partir das  $m + n - 1$  equações  $c_{ij} = u_i + v_j$  correspondentes às variáveis básicas. Teremos, assim, um **sistema de  $m + n - 1$  equações a  $m + n$  incógnitas**, que (como se sabe) nunca poderá ser possível e determinado.

Arbitrando um valor de uma incógnita (de preferência, atribuir o valor zero a uma incógnita que intervenha em muitas equações), poderemos determinar os valores das restantes incógnitas.

A partir dos valores dos coeficientes  $u_i$  e  $v_j$  determinados pela resolução do sistema referido, poderemos calcular os desejados novos valores dos custos  $c'_{ij}$  correspondentes às variáveis não básicas, o que nos permitirá saber se a solução em análise é, ou não, óptima.

De notar que os novos valores dos custos  $c'_{ij}$  correspondentes às variáveis não básicas não se alteram com uma eventual mudança do valor inicialmente arbitrado (ou da variável) - essa mudança poderá reflectir-se nos valores de  $u_i$  e  $v_j$  (mas não afecta  $c'_{ij}$  ).

Retornemos ao exercício que apresentámos, para aplicar o procedimento descrito.

Escrevamos, **para as 5 variáveis básicas**, a correspondente igualdade  $c_{ij} = u_i + v_j$ :

$$\begin{array}{lll} c_{AX} = u_A + v_X & \Leftrightarrow & u_A + v_X = 3 \\ c_{BX} = u_B + v_X & \Leftrightarrow & u_B + v_X = 2 \\ c_{BY} = u_A + v_X & \Leftrightarrow & u_B + v_Y = 9 \\ c_{BZ} = u_B + v_Z & \Leftrightarrow & u_B + v_Z = 3 \\ c_{CZ} = u_C + v_Z & \Leftrightarrow & u_C + v_Z = 2 \end{array}$$

Dado que a variável  $u_B$  intervém em três das cinco equações, se arbitrarmos  $u_B = 0$ , resolvemos com facilidade o sistema de cinco equações, obtendo  $u_A = 1$ ;  $u_B = 0$ ;  $u_C = -1$ ;  $v_X = 2$ ;  $v_Y = 9$  e  $v_Z = 3$ .

Poderemos, agora, determinar os novos valores de  $c'_{ij}$  correspondentes às **variáveis não básicas**:

$$\begin{array}{lll} c'_{AY} = c_{AY} - u_A - v_Y & \Leftrightarrow & c'_{AY} = 1 - 1 - 9 = -9 \\ c'_{AZ} = c_{AZ} - u_A - v_Z & \Leftrightarrow & c'_{AZ} = 3 - 1 - 3 = -1 \\ c'_{CX} = c_{CX} - u_C - v_X & \Leftrightarrow & c'_{CX} = 5 + 1 - 2 = +4 \\ c'_{CY} = c_{CY} - u_C - v_Y & \Leftrightarrow & c'_{CY} = 7 + 1 - 9 = -1 \end{array}$$

Poderemos, agora, re-escrever  $C_{Tot}$ :

$$\begin{aligned} C_{Tot} &= 3 \cdot x_{AX} + 1 \cdot x_{AY} + 3 \cdot x_{AZ} + 2 \cdot x_{BX} + 9 \cdot x_{BY} + 3 \cdot x_{BZ} + 5 \cdot x_{CX} + 7 \cdot x_{CY} + 2 \cdot x_{CZ} \\ &= 0 \cdot x_{AX} - 9 \cdot x_{AY} - 1 \cdot x_{AZ} + 0 \cdot x_{BX} + 0 \cdot x_{BY} + 0 \cdot x_{BZ} + 4 \cdot x_{CX} - 1 \cdot x_{CY} + 0 \cdot x_{CZ} + 1250 \end{aligned}$$

É fácil concluir que se se incrementar o valor de  $x_{AY}$ ,  $x_{AZ}$  ou  $x_{CY}$  estaremos a diminuir o valor de  $C_{Tot}$ . Ora como pretendemos minimizar o valor de  $C_{Tot}$ , poderemos concluir que **a solução em análise não é óptima**.

Ruy Costa 2011



Façamos uma breve interrupção na resolução do problema apresentado, para fazermos alguns comentários.

Recordemos que os novos valores dos custos  $c'_{ij}$  correspondentes às variáveis não básicas não se alteram com uma eventual mudança do valor inicialmente arbitrado (ou da variável) - essa mudança poderá reflectir-se nos valores de  $u_i$  e  $v_j$  (mas não afecta  $c'_{ij}$  ). Para que não restem dúvidas, sugere-se que trabalhe um pouquinho ...



Arbitre inicialmente  $u_A = 0$  e determine os restantes valores de  $u_i$  e  $v_j$ .

Determine agora os novos valores dos custos  $c'_{ij}$  correspondentes às variáveis não básicas e constate que coincidem com os valores obtidos quando inicialmente se tinha considerado  $u_B = 0$ .

A determinação dos valores de  $u_i$  e  $v_j$  não nos obriga a escrever *formalmente* o sistema de equações e a resolvê-lo. Com efeito, poderemos determinar esses valores directamente a partir do 'Quadro dos Transportes'.

Para tal, começamos por associar ao Quadro uma constante  $u_i$  por cada linha e uma constante  $v_j$  por cada coluna. Arbitramos o valor de uma das constantes (regra geral, atribuímos o valor 0 à constante associada à fila do Quadro com maior número de variáveis básicas). Finalmente, a partir das células correspondentes às **variáveis básicas**, determinamos os valores de  $u_i$  e  $v_j$  por resolução das correspondentes equações  $c_{ij} = u_i + v_j$ .

Comecemos por considerar o 'Quadro dos Transportes' correspondente à solução inicial obtida para o problema que estamos a tratar:

	X	Y	Z	
A	50	0	0	50
B	150	50	50	250
C	0	0	100	100
	200	50	150	
	$v_X =$	$v_Y =$	$v_Z =$	

Começamos por indicar as constantes  $u_i$  e  $v_j$ .  
Inutilizámos' as células correspondentes às variáveis não básicas, que não serão utilizadas para a determinação dos valores de  $u_i$  e  $v_j$ .

	X	Y	Z	
A	50	0	0	50
B	150	50	50	250
C	0	0	100	100
	200	50	150	
	$v_X =$	$v_Y =$	$v_Z =$	

Fila com maior número de variáveis básicas: 2<sup>a</sup> linha → arbitrar  $u_B = 0$ .  
 $c_{BX} = u_B + v_X \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 2 = 0 + v_X \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow v_X = 2$

Analogamente se determina  $v_Y$  e  $v_Z$  a partir de  $c_{BY}$  e  $c_{BZ}$ , respectivamente.

	X	Y	Z	
A	50	0	0	50
B	150	50	50	250
C	0	0	100	100
	200	50	150	
	$v_x = 2$	$v_y = 9$	$v_z = 3$	

$u_A =$   
 $u_B = 0$   
 $u_C =$   
 A partir de  $v_x = 2$  e  
 da var. básica  $x_{AX}$ ,  
 determina-se  $u_A$ .  
 $3 = u_A + 2 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow u_A = 1$

	X	Y	Z	
A	50	0	0	50
B	150	50	50	250
C	0	0	100	100
	200	50	150	
	$v_x = 2$	$v_y = 9$	$v_z = 3$	

$u_A = 1$   
 $u_B = 0$   
 $u_C =$   
 A partir de  $v_z = 3$  e  
 da var. básica  $x_{CZ}$ ,  
 determina-se  $u_C$ .  
 $2 = u_C + 3 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow u_C = -1$

	X	Y	Z	
A	50	0	0	50
B	150	50	50	250
C	0	0	100	100
	200	50	150	
	$v_x = 2$	$v_y = 9$	$v_z = 3$	

E já está !

Sabemos que os valores de  $u_i$  e  $v_j$  foram determinados de modo a que, para todas as variáveis básicas,  $c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j = 0$ . Interess-nos, agora, calcular os valores de  $c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$  relativos às variáveis não básicas, o que poderemos fazer facilmente a partir do último 'Quadro dos Transportes' apresentado. Registaremos no canto inferior esquerdo de cada célula o correspondente valor de  $c'_{ij}$  (obviamente igual a 0, para as variáveis básicas).

	X	Y	Z	
A	50	0	0	
B	150	50	50	
C	0	0	100	
	200	50	150	
	$v_x = 2$	$v_y = 9$	$v_z = 3$	

Começamos por registar os  $c'_{ij} = 0$  relativos às var. básicas.

$$u_A = 1$$

$$u_B = 0$$

$$u_C = -1$$

$$c'_{AY} = c_{AY} - u_A - v_Y$$

$$c'_{AY} = 1 - 1 - 9 = -9$$

$$c'_{AZ} = c_{AZ} - u_A - v_Z$$

$$c'_{AZ} = 3 - 1 - 3 = -1$$

$$c'_{CX} = c_{CX} - u_C - v_X$$

$$c'_{CX} = 5 + 1 - 2 = +4$$

$$c'_{CY} = c_{CY} - u_C - v_Y$$

$$c'_{CY} = 7 + 1 - 9 = -1$$

	X	Y	Z	
A	50	0	0	
B	150	50	50	
C	0	0	100	
	200	50	150	
	$v_x = 2$	$v_y = 9$	$v_z = 3$	

$$u_A = 1$$

$$u_B = 0$$

$$u_C = -1$$

E já está !

Destacamos os  $c'_{ij} < 0$  !

♦ ♦ ♦

Retornemos à resolução do problema apresentado:

Já tínhamos referido que a existência de, pelo menos, um coeficiente  $c'_{ij}$  negativo indica que a solução em análise não é óptima - estamos, obviamente, a considerar que a função objectivo se encontra expressa apenas em função das variáveis não básicas ( pelo que para as variáveis básicas será válida a igualdade  $c'_{ij} = 0$  ). Assim, reafirmamos que a solução em análise não é a solução óptima do problema.

• 5 • À semelhança do procedimento seguido no Algoritmo Simplex Primal, seleccionaremos para entrar na base a variável correspondente ao coeficiente  $c'_{ij}$  mais negativo. De notar que  $c'_{ij}$  indica o acréscimo (decréscimo se for negativo) da função objectivo correspondente a um incremento unitário da correspondente variável.

Assim, seleccionamos  $x_{AY}$  para entrar na base, isto é, para ser incrementada.

E qual o incremento máximo,  $\theta$ , que pode ser dado à variável  $x_{AY}$  ?

Para determinarmos esse valor, incrementaremos, no 'Quadro dos Transportes' a célula correspondente a  $x_{AY}$  de  $\theta$ :

	X	Y			Z	
A	50	$0 + \theta$			0	50 $u_A = 1$
	0	3	-9	1	-1	3
B	150		50		50	250 $u_B = 0$
	0	2	0	9	0	3
C	0		0		100	100 $u_C = -1$
	+4	5	-1	7	0	2
	200		50		150	
		$v_x = 2$	$v_y = 9$		$v_z = 3$	

Para se respeitar as capacidades de oferta das várias fontes de oferta e as necessidades dos vários pontos de procura, deveremos '**re-equilibrar**' o Quadro, somando e subtraindo  $\theta$ , nas células correspondentes às variáveis básicas necessárias ao re-equilíbrio. Só assim se garante que apenas a variável seleccionada entre na base, com a correspondente saída de uma variável que, até aí, se encontrava na base:

	X	Y			Z	
A	$50 - \theta$	$0 + \theta$			0	50 $u_A = 1$
	0	3	-9	1	-1	3
B	$150 + \theta$		$50 - \theta$		50	250 $u_B = 0$
	0	2	0	9	0	3
C	0		0		100	100 $u_C = -1$
	+4	5	-1	7	0	2
	200		50		150	
		$v_x = 2$	$v_y = 9$		$v_z = 3$	

Qualquer valor positivo de  $\theta$  pode ser atribuído, sem qualquer perturbação das variáveis  $x_{AY}$  e  $x_{BY}$ . No entanto, é preciso termos cuidado com as variáveis  $x_{AX}$  e  $x_{BY}$  já que estamos a subtrair  $\theta$  ao seu actual valor e essas variáveis (como todas as demais) não podem ser negativas !

$$\text{Assim, } 50 - \theta \geq 0 \Leftrightarrow \theta \leq 50 \Rightarrow \theta_{\max} = 50.$$

• 6 • Poderemos agora iniciar a 2ª iteração, escrevendo o 'Quadro dos Transportes' correspondente à nova solução em análise:

	X	Y	Z	
A	$50 - \theta$	$0 + \theta$	0	50 $u_A = 1$
0	3	-9	1	3
B	$150 + \theta$	$50 - \theta$	50	250 $u_B = 0$
0	2	0	9	3
C	0	0	7	100 $u_C = -1$
+4	5	-1	0	2
200	50	150		
	$v_x = 2$	$v_y = 9$	$v_z = 3$	

$$\theta = 50 \quad \downarrow$$

	X	Y	Z	
A	<u>0</u>	50	0	50
3		1	3	
B	200	0	50	250
2		9	3	
C	0	0	100	100
5		7	2	
200	50	150		

Antes de prosseguirmos, verifiquemos que a diferença entre os custos da solução anterior e da nova solução é igual a  $\theta$ .  $c'_{AY} = 50 \cdot (-9) = -450$  u.m..

Custo da solução anterior = 1 250 u.m.

Custo da nova solução =  $50 \cdot 1 + 200 \cdot 2 + 50 \cdot 3 + 100 \cdot 2 = 800$  u.m.

$$\Delta C = -450 \text{ u.m. } \checkmark$$

Prossigamos com o passo

- 3 • Verificar se a solução em análise é, ou não, degenerada:

$$m + n - 1 = 5 \neq \text{nº variáveis positivas} = 4 \Rightarrow \text{Base degenerada !}$$

A solução em análise é básica degenerada, já que o número de variáveis estritamente positivas é inferior a  $m + n - 1$ . Na realidade, é dado que o número de variáveis positivas é inferior em 1 unidade relativamente a  $m + n - 1$ , bastaria que uma das variáveis que tem o valor zero tivesse um valor positivo para que a solução deixasse de ser degenerada ....

Rev. 2011

Observando o modo como se obteve o actual 'Quadro dos Transportes', podemos constatar que, quando  $x_{AY}$  entrou na base (tornando o valor 50), alterámos os valores de  $x_{AX}$ ,  $x_{BX}$  e  $x_{BY}$ . O 'problema' ocorreu quando simultaneamente as variáveis  $x_{AX}$  e  $x_{BY}$  deixaram a base (passando a valer zero). Normalmente, apenas uma variável deixa a base, cedendo o seu lugar à nova variável que entra na base.

Quando mais do que uma variável deixa a base, é conveniente assinalar (por exemplo, sublinhando) essas variáveis, para posteriormente se escolher a(s) variável(eis) a 'promover' artificialmente para a base.

Neste caso, sublinhamos os zeros correspondentes às variáveis  $x_{AX}$  e  $x_{BY}$ . Interessa-nos considerar que uma dessas variáveis ainda está na base (embora com um valor infinitesimal, que designaremos por  $0^*$ ).

Como regra geral, e uma vez que se pretende minimizar a função objectivo, escolheremos para integrar artificialmente na base a variável de menor custo, de entre as candidatas (assinaladas / sublinhadas). Neste caso, escolheríamos  $x_{AX}$  para integrar a base, ou seja:

	X	Y	Z	
A	<b>0*</b>	50	0	50
B	200	0	50	250
C	0	0	100	100
	200	50	150	

E agora, poderemos prosseguir, considerando  $x_{AX}$  uma variável básica, para efeitos de determinação dos valores de  $u_i$ ,  $v_j$  e  $c'_{ij}$ . Esclareçamos, então, se a nova solução é, ou não, óptima:

- 4 • Determinar  $u_i$ ,  $v_j$  de modo a que  $c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j = 0$  para as variáveis básicas.

	X	Y	Z	
A	<b>0*</b>	50	0	50 $u_A = 3$ II
B	200	0	50	250 $u_B = 2$ III
C	0	0	100	100 $u_C = 1$ VI
	200	50	150	
	<b><math>v_X = 0</math></b>	<b><math>v_Y = -2</math></b>	<b><math>v_Z = 1</math></b>	
	I	IV	V	

**Nota:** Indicou-se a sequência seguida para a determinação dos valores utilizando a numeração romana.

Poderemos, agora, calcular os novos custos  $c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$  associados às variáveis não básicas:

$$\begin{aligned} c'_{AZ} &= c_{AZ} - u_A - v_Z = 3 - 3 - 1 = -1 \\ c'_{BY} &= c_{BY} - u_B - v_Y = 9 - 2 + 2 = +9 \\ c'_{CX} &= c_{CX} - u_C - v_X = 5 - 1 - 0 = +4 \\ c'_{CY} &= c_{CY} - u_C - v_Y = 7 - 1 + 2 = +8 \end{aligned}$$

	X	Y		Z		
A	0*	3	0	50	0	0
B	200	2	9	0	50	250
C	0	5	8	0	100	100
	200	50	150			
	<b>Vx = 0</b>	<b>Vy = -2</b>	<b>Vz = 1</b>			

Conclusão: A solução em análise ainda não é óptima.

- 5 • Dado que o único valor negativo de  $c'_{ij}$  corresponde a  $x_{AZ}$ , dever-se-á incrementar essa variável.

	X	Y		Z		
A	0* - θ	3	0	50	0+θ	0
B	200+θ	2	9	0	50 - θ	250
C	0	5	8	0	100	100
	200	50	150			
	<b>Vx = 0</b>	<b>Vy = -2</b>	<b>Vz = 1</b>			

Determinemos  $\theta_{\max}$ :  $0^* - \theta \geq 0 \wedge 50 - \theta \geq 0 \Leftrightarrow \theta \leq 0^*$ , ou seja,  $\theta_{\max} = 0^*$ .

Ricardo Costa, 2011

- 6 • Actualizemos o 'Quadro dos Transportes':

	X	Y		Z		
A	0* - θ	3	0	50	0+θ	0
B	200+θ	2	9	0	50 - θ	250
C	0	5	8	0	100	100
	200	50	150			
	<b>Vx = 0</b>	<b>Vy = -2</b>	<b>Vz = 1</b>			

$$\theta = 0^* \downarrow$$

			$\theta = 0^*$	↓			
		X	Y	Z			
A	0	50	<b>0*</b>	50	250	$u_A =$	
	3	1	3				
B	200	0	50	250	$u_B =$		
	2	9	3				
C	0	0	100	100	$u_C =$		
	5	7	2				
	200	50	150	150			
	$v_x =$	$v_y =$	$v_z =$				

- 3 • De notar que a 'nova' solução continua a ser degenerada. (Na realidade, e em termos práticos, ela coincide com a anterior ... Apenas se alterou a variável nula que é promovida a *básica* ...).

Dispomos, no entanto, de cinco *variáveis básicas* a partir das quais determinaremos os valores dos coeficientes  $u_i$  e  $v_j$ .

- 4 • Determinemos os valores dos coeficientes  $u_i$  e  $v_j$ , com vista a apurarmos se a solução em análise é, ou não, óptima.

			X	Y	Z		
A	0	50	<b>0*</b>	50	$u_A = 3$	II	
	3	1	3				
B	200	0	50	250	$u_B = 3$	III	
	2	9	3				
C	0	0	100	100	$u_C = 2$	IV	
	5	7	2				
	200	50	150	150			
	$v_x = -1$	$v_y = -2$	$v_z = 0$				
	VI	V	I				

**Nota:** Indicou-se a sequência seguida para a determinação dos valores utilizando a numeração romana.

Poderemos, agora, calcular os novos custos  $c'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$  associados às variáveis não básicas:

$$c'_{AX} = c_{AX} - u_A - v_X = 3 - 3 + 1 = + 1$$

$$c'_{BY} = c_{BY} - u_B - v_Y = 9 - 3 + 2 = + 8$$

$$c'_{CX} = c_{CX} - u_C - v_X = 5 - 2 + 1 = + 4$$

$$c'_{CY} = c_{CY} - u_C - v_Y = 7 - 2 + 2 = + 7$$

Dado que os novos custos  $c'_{ij}$  associados às variáveis não básicas são positivos, estamos perante a **solução óptima** do problema:

$$\begin{aligned} x^*_{AX} &= 0 & ; \quad x^*_{AY} &= 50 & ; \quad x^*_{AZ} &= 0 ; \\ x^*_{BX} &= 200 & ; \quad x^*_{BY} &= 0 & ; \quad x^*_{BZ} &= 50 ; \\ x^*_{CX} &= 0 & ; \quad x^*_{CY} &= 0 & ; \quad x^*_{CZ} &= 100 . \end{aligned}$$

O custo associado a esta solução não difere do custo da solução anterior, já que as variáveis estritamente positivas são as mesmas e com os mesmos valores nas duas soluções. Assim,  $C^*_{\text{Tot}} = 800$  u.m..

Como já se referiu, as duas últimas soluções, em termos práticos, coincidem. No entanto, sob o ponto de vista formal, as bases correspondentes são diferentes (num dos casos  $x_{AX}$  está na base; no outro é  $x_{AZ}$  que está na base)...

• • • •

Retomemos o início da resolução do exercício apresentado, para utilizarmos, como alternativa ao Método do Canto NW o **Método do Custo Mínimo** para determinação de uma solução inicial.

• 2 • Arbitrar uma solução inicial.

Comecemos por apresentar o **Método do Custo Mínimo**:

- selecionar a 'célula' ainda não preenchida correspondente ao menor valor de custo unitário de transporte;
- atribuir a essa célula o maior valor possível, respeitando simultaneamente a disponibilidade da 'fonte de oferta' e a necessidade do 'ponto de procura' correspondentes.

Repetir a) e b) até o 'Quadro dos Transportes' estar completamente preenchido.

Exemplifiquemos a sua aplicação com o problema apresentado:

	X	Y	Z	
A	3	1	3	50
B	2	9	3	250
C	5	7	2	100
	200	50	150	

Rui Costa, 2011

Sombrou-se a 'célula' correspondente ao menor valor de custo unitário de transporte. A 'fonte de oferta' A pode fornecer, no máximo, 50 unidades e o 'ponto de consumo' Y necessita de 50 unidades de produto. Assim, o maior valor possível que se pode atribuir a  $x_{AY}$  será igual a **mín ( 50 ; 50 )**, isto é, 50 unidades.

	X	Y	Z	
A	<u>0</u>	<u>50</u>	<u>0</u>	50
B	2	9	3	250
C	5	7	2	100
	200	50	150	

De notar que quando se atribui a  $x_{AY}$  o valor 50, 'esgota-se' simultaneamente a 'linha A' e a 'coluna Y', o que irá originar uma situação de degenerescência. Por esse motivo, assinalamos os zeros registados no quadro, sublinhando-os.

Assinalemos a nova 'célula' (ainda não preenchida) correspondente ao menor valor de custo unitário de transporte:

	X	Y	Z	
A	0	50	0	50
B		0		250
C		0		100
	200	50	150	

De notar que poderíamos ter optado pela variável  $x_{CZ}$  a que corresponde o mesmo custo unitário de transporte.

A 'fonte de oferta' B pode fornecer, no máximo, 250 unidades e o 'ponto de consumo' X necessita de 200 unidades de produto. Assim, o maior valor possível que se pode atribuir a  $x_{BX}$  será igual a  $\min(250; 200)$ , isto é, 200 unidades.

	X	Y	Z	
A	0	50	0	50
B	200	0		250
C	0	0		100
	200	50	150	

Esgotou-se a 'coluna X'.

Assinalemos a nova 'célula' (ainda não preenchida) correspondente ao menor valor de custo unitário de transporte:

	X	Y	Z	
A	0	50	0	50
B	200	0		250
C	0	0		100
	200	50	150	

A 'fonte de oferta' C pode fornecer, no máximo, 100 unidades (na realidade, terá que fornecer obrigatoriamente essas 100 unidades a Z, já que não efectuou qualquer fornecimento a X e a Y...) e o 'ponto de consumo' Z necessita de 150 unidades de produto. Assim, o maior valor possível que se pode atribuir a  $x_{CZ}$  será igual a **mín ( 100 ; 150 )**, isto é, 100 unidades.

	X	Y	Z	
A	0 3	50 1	0 3	50
B	200 2	0 9	3	250
C	0 5	0 7	100 2	100
	200	50	150	

Esgotou-se a 'linha C'.

Finalmente, resta-nos preencher a célula relativa à variável  $x_{BZ}$ . É imediata a atribuição de 50 unidades a essa variável, esgotando-se simultaneamente as correspondentes linha e coluna (como sempre acontece com o preenchimento da 'última' célula).

	X	Y	Z	
A	0 3	50 1	0 3	50
B	200 2	0 9	50 3	250
C	0 5	0 7	100 2	100
	200	50	150	

E pronto ! Eis a solução inicial obtida a partir do **Método do Custo Mínimo**.

De notar que o **custo total de transporte** correspondente é igual a 800 u.m. - valor inferior ao do custo da solução inicial obtida a partir do Método do Canto NW ... e, por acaso, até já sabemos que este é o valor mínimo correspondente a este problema ...

**Usualmente, a solução inicial obtida a partir do Método do Custo Mínimo apresenta um custo total de transporte inferior ao valor correspondente da solução inicial obtida a partir do Método do Canto NW.** Assim, em geral, o processo iterativo descrito é mais 'rápido' quando se adopta a solução inicial obtida a partir do **Método do Custo Mínimo**.

Se pretendessemos prosseguir a aplicação do Algoritmo dos Transportes ao problema apresentado a partir da solução inicial obtida com o Método do Custo Mínimo, passaríamos ao passo

- 3 • Verificar se a solução é, ou não, degenerada:

$n^{\circ}$  variáveis positivas = 4  $\neq$  m + n - 1 = 5  $\Rightarrow$  Solução degenerada.

Como se referiu anteriormente, ao esgotarmos simultaneamente a 'linha A' e a 'coluna Y' quando se fez a primeira atribuição de um valor a uma célula originamos a situação de degenerescência.

Para podermos prosseguir a aplicação do Algoritmo dos Transportes, é necessário 'promover' uma das variáveis nulas para a base. Escolheremos, de entre as variáveis com valor 0 resultante do 'esgotamento' simultâneo da 'linha A' e 'coluna Y' (0 no quadro), a variável com custo unitário de transporte mais baixo.

Assim, poderíamos optar por seleccionar  $x_{AX}$  ou  $x_{AZ}$ . Como por acaso, já resolvemos o problema ... até sabemos que se  $x_{AZ}$  pertencer à base (com o valor 0\*) se está perante a solução óptima ...

• • • • •

Recordemos que as **situações de degenerescência** podem ocorrer quando:

- i) ao determinar uma solução inicial e ao atribuir um valor a uma variável se 'esgota' simultaneamente quer a correspondente linha, quer a correspondente coluna.
- ii) se actualiza um 'Quadro dos Transportes' e se verifica que mais de uma variável básica (a que se subtrai  $\theta$ ) deixa a base.

Para podermos prosseguir com a aplicação do Algoritmo dos Transportes, deveremos 'promover' uma (ou, se necessário, mais) variável nula para a base - escolhemos uma variável nula, de entre as que tenham resultado da situação i) ou ii), com o menor custo unitário de transporte e atribuimos-lhe o valor 0\*, considerando-a, então, como variável básica.

• • • • •

Um reparo deve ser feito relativamente ao reequilíbrio dos 'Quadros dos Transportes': à excepção da variável não básica que vai entrar na base, todas as outras variáveis intervenientes nas 'operações de re-equilíbrio' deverão ser variáveis básicas. Por vezes, não conseguimos re-equilibrar um 'Quadro dos Transportes' apenas com quatro variáveis - veja-se o exemplo seguinte:

	X	Y	Z	W	
A	0	0	150	50	200
B	100	50	50	0	200
C	0	$0 + \theta$	0	100	100
	100	50	200	150	

Imagine que se pretendia incrementar a variável  $x_{CY}$ , fazendo-a entrar para a base.

Para re-equilibrar a 'coluna Y' só poderíamos subtrair  $\theta$  a  $x_{BY}$ ; por outro lado, para re-equilibrar a 'linha C' só poderíamos subtrair  $\theta$  a  $x_{CW}$ .

	X	Y	Z	W	
A	0	0	150	50	200
B	100	$50 - \theta$	50	0	200
C	0	$0 + \theta$	0	$100 - \theta$	100
	100	50	200	150	

Torna-se, agora, necessário, re-equilibrar a 'linha B' e a 'coluna W'. Relativamente à 'coluna W' só poderemos somar  $\theta$  a  $x_{AW}$  e, ver-nos-emos obrigados a subtrair  $\theta$  a  $x_{BZ}$ . Assim, o re-equilíbrio da 'linha B' deve ser feito somando  $\theta$  a  $x_{BW}$  o que termina o processo de re-equilíbrio ...

	X	Y	Z	W	
A	0	0	$150 - \theta$	$50 + \theta$	200
B	100	$50 - \theta$	$50 + \theta$	0	200
C	0	$0 + \theta$	0	$100 - \theta$	100
	100	50	200	150	

Já agora ... Aproveitemos para determinar o maior valor possível do incremento  $\theta$  correspondente ao Quadro anterior:

$$150 - \theta \geq 0 \wedge 50 - \theta \geq 0 \wedge 100 - \theta \geq 0 \Leftrightarrow \theta \leq 50 \Leftrightarrow \theta_{\max} = 50$$

• • • • •

### - Problemas dos Transportes Desequilibrados

Recordemos a formulação do 'Problema dos Transportes':

Seja  $x_{ij}$  a quantidade a transportar da 'fonte de oferta'  $i$  para o 'ponto de consumo'  $j$ .

O problema pode apresentar-se do modo seguinte:

$$\text{MIN } C = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij}$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad [1]$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad [2]$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad [3]$$

O somatório  $\sum_{i=1}^m a_i$  designa o **total das disponibilidades** das 'fontes de oferta'.

O somatório  $\sum_{j=1}^n b_j$  designa o **total das necessidades** dos 'pontos de consumo'.

- Se o total das disponibilidades (que designaremos, *abreviadamente*, por  $\sum a_i$ ) for inferior ao total das necessidades (que designaremos, *abreviadamente*, por  $\sum b_j$ ), teremos uma situação de **procura superior à oferta**, pelo que, para podermos recorrer ao Algoritmo dos Transportes, deveremos tornar o problema *equilibrado*, o que se consegue com a **criação de uma 'fonte de oferta' fictícia com capacidade de oferta igual a ( $\sum b_j - \sum a_i$ )**.

No que respeita ao 'Quadro dos Transportes', esta 'fonte de oferta' fictícia, corresponde a uma nova linha. Os valores das variáveis dessa linha corresponderão às **necessidades não satisfeitas**, relativamente aos diversos 'pontos de procura'. Assim, em termos práticos, esses valores representam quantidades desejadas mas não satisfeitas, pelo que não há um transporte efectivo que lhes seja associado. Assim, os correspondentes 'custos unitários de transporte' poderão, por este ponto de vista, ser nulos.

Se existirem multas previstas pelo não fornecimento a algum(ns) 'ponto(s) de procura', fará sentido que os valores unitários de multa possam ser utilizados como 'custos unitários de transporte'.

Se se pretender garantir que o fornecimento de um dado 'ponto de consumo' é feito integralmente, então haverá que garantir que a 'fonte fictícia' abasteça 0 unidades a esse 'ponto de consumo'. Tal pode conseguir-se facilmente considerando um 'valor muito elevado' para o correspondente custo unitário de transporte.

Imagine-se, por exemplo, o problema de fornecimento de oxigénio por parte de duas fábricas ( A e B com capacidade de produção de 350 e 200 un. vol. / mês, respectivamente ) a três consumidores ( Hospital, X e Y com necessidades mensais de, respectivamente, 300, 250 e 150 un. vol.). Sabe-se que o total da procura excede a disponibilidade total e pretende-se garantir o abastecimento integral do Hospital. Admitamos que o problema é representado pelo seguinte 'Quadro dos Transportes' (custos em u.m. / un. vol.) :

		Hospital	X	Y	
					350
					200
A		16	16	8	
	B	14	14	12	
		300	250	150	



		Hospital	X	Y	
					350
					200
A		16	16	8	
	B	14	14	12	
	Fict.	$\infty$	0	0	
		300	250	150	

**Nota:** Em termos práticos, relativamente à célula 'Fict. / Hospital' bastaria considerar um custo unitário de transporte muito mais alto do que os restantes, por exemplo, 1 000 u.m. / un. vol. .



E agora é só resolver o problema ... Aproveite, para testar as suas capacidades ...

- Se o total das disponibilidades ( $\sum a_i$ ) for superior ao total das necessidades ( $\sum b_j$ ), teremos uma situação de **oferta superior à procura**, pelo que, para podermos recorrer ao Algoritmo dos Transportes, deveremos tornar o problema **equilibrado**, o que se consegue com a **criação de um 'ponto de consumo' fictício com necessidade igual a  $(\sum a_i - \sum b_j)$** .

No que respeita ao 'Quadro dos Transportes', este 'ponto de consumo' fictício, corresponde a uma nova coluna. Os valores das variáveis dessa coluna corresponderão às **produções não escoadas**, relativamente às diversas 'fontes de oferta'. Assim, em termos páticos, esses valores representam quantidades produzidas mas não fornecidas, pelo que não há um transporte efectivo que lhes seja associado. Assim, os correspondentes 'custos unitários de transporte' poderão, por este ponto de vista, ser nulos.

Se se pretender garantir que a produção de uma dada 'fonte de oferta' seja integralmente escoada, então haverá que garantir que essa 'fonte de oferta' abasteça 0 unidades ao 'ponto de consumo' fictício. Tal pode conseguir-se facilmente considerando um 'valor muito elevado' para o correspondente custo unitário de transporte.

Imagine-se, por exemplo, que dois silos para armazenamento de cereais (A e B, com capacidade de fornecimento de 350 e 200 toneladas por mês, respectivamente) são utilizados para o abastecimento de dois consumidores ( X e Y com necessidades mensais de, respectivamente, 300 e 150 toneladas). Pretende-se garantir que o abastecimento seja feito de tal modo que o silo B esteja vazio no final do mês para permitir uma 'inspecção técnica'. Admitamos que o problema é representado pelo seguinte 'Quadro dos Transportes' (custos em u.m. / ton.) :

	X	Y	
A	16	8	350
B	14	12	200
	300	150	



	X	Y	Fict.	
A	16	8	0	350
B	14	12	$\infty$	200
	300	150	100	

diferirem, estaremos perante um 'problema desequilibrado' - a sua resolução será possível, depois de *artificialmente* equilibrarmos o problema.



E agora é só resolver o problema ... Aproveite, para testar as suas capacidades ...

• • • • •

## - O Problema da Afectação

Um caso particular do 'Problema dos Transportes' ocorre quando as variáveis só podem tomar o valor 1, ou 0 e quando os termos independentes das restrições são todos iguais a 1.

Este é o conhecido '**Problema da Afectação**': pretende-se determinar qual o melhor plano de afectação, por exemplo, de trabalhadores a máquinas, de modo a minimizar o custo total de formação dos trabalhadores.

A variável  $x_{ij}$  toma o valor 1 quando o trabalhador  $i$  é afectado à máquina  $j$ , ou 0, caso contrário. O custo  $c_{ij}$  pode ser encarado como o custo de formação do trabalhador  $i$  para este poder operar com a máquina  $j$ .

O problema pode apresentar-se do modo seguinte:

$$\text{MIN } C = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij}$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad [1]$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad [2]$$

$$x_{ij} \in \{0; 1\} \quad [3]$$

Quando  $m = n$ , há tantas máquinas, quantos os trabalhadores e o problema é 'equilibrado'. Caso contrário, estaremos perante um 'problema desequilibrado' (que se poderá 'equilibrar' com a introdução de trabalhador(es) fictício(s) ou máquina(s) fictícia(s)).

O 'Problema da Afectação', como caso particular do 'Problema dos Transportes' pode ser resolvido por utilização do Algoritmo dos Transportes. Neste caso, estaremos sempre perante 'soluções degeneradas ! [ Porque será que tal ocorre ? ... ].

A estrutura do 'Problema da Afectação' é ainda mais particular do que a do 'Problema dos Transportes', pelo que existe um algoritmo especialmente concebido para a sua resolução - o **Algoritmo Húngaro** (que não abordaremos).

## C O N C L U S Ã O

A Programação Linear tem um papel fulcral no âmbito da Programação Matemática e, de um modo mais geral, uma grande importância na Investigação Operacional, pelo que justifica que a nossa abordagem a este tema tenha sido relativamente extensa e incluído vários tópicos.

O conjunto de tópicos apresentado constitui uma perspectiva *equilibrada* da Programação Linear. Tentou-se que essa perspectiva apresentasse uma *sequência* que facilitasse a progressão de quem pela primeira vez contacta com a Programação Linear.

Dado que do programa desta disciplina fazem parte outros domínios da Investigação Operacional, a abordagem da Programação Linear levada a cabo, não incluiu tópicos como a Técnica da Base Artificial, o Algoritmo Simplex Dual, a Programação Linear Paramétrica, o Problema da Afectação. Estes tópicos poderão ser abordados pelos leitores mais interessados na Programação Matemática.

## **TEORIA DA DECISÃO**

## INTRODUÇÃO À TEORIA DA DECISÃO

Desde muito cedo que somos confrontados com **problemas de decisão**, ainda que frequentemente os resolvemos sem sequer termos consciência da sua existência enquanto **problemas**. Um **agente de decisão** está perante um problema de decisão quando pode tomar, pelo menos, duas vias de **acção** distintas. Quando um agente de decisão opta por uma determinada via de acção, isto é, quando toma uma **decisão**, tenta obter o melhor **resultado** (que poderá ser um maior lucro, um menor custo, um menor tempo de espera, uma maior tranquilidade ...) possível. É importante notar que, embora o agente de decisão possa escolher o curso de acção a seguir, isto é, qual a **decisão** a tomar, tal, por si só, não determinará um resultado, uma vez que há sempre uma série de **fatores incontroláveis** (pelo agente de decisão) que vão afectar o resultado associado à decisão tomada.

É importante ter-se consciência que um mesmo problema de decisão pode levar a tomadas de decisão distintas por parte de agentes de decisão distintos: enquanto alguns agentes de decisão optam pela decisão que 'maximiza' o resultado (por exemplo, o lucro), outros há que, perante a existência dos factores incontroláveis que afectarão o resultado associado à decisão tomada, resolvem seleccionar a decisão que 'minimiza' o chamado **custo de oportunidade**, isto é, o custo que decorre do não conhecimento exacto de como se comportarão os factores incontroláveis. Estes últimos são agentes de decisão que preferem, eventualmente, não optar pela decisão que maximizaria o lucro pelo receio de, perante a incontrolabilidade do 'futuro', se verem perante um muito mau resultado... [Serão políticos? ... Terão que se acautelar, face a futuras eleições? ...]

Há ainda situações em que é possível associar aos factores incontroláveis (por vezes designados por estados da natureza) uma distribuição de probabilidade (isto é, embora não saibamos qual vai ser o resultado associado à decisão tomada, já que esse resultado depende dos factores incontroláveis, pelo menos, podemos quantificar a probabilidade de ocorrência desses factores) - diremos estar perante uma **situação de risco**. Se, pelo contrário, não for possível associar uma distribuição de probabilidade aos factores incontroláveis, diremos estar perante uma **situação de incerteza**.

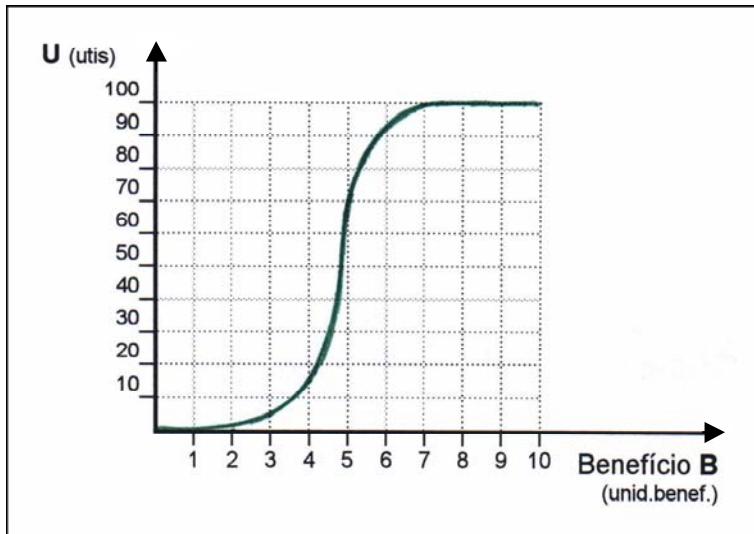
Uma situação com muito interesse na Teoria da Decisão prende-se com a tomada de decisões que estão **encadeadas** umas nas outras, isto é, quando o resultado de uma decisão vai condicionar a decisão seguinte - são as chamadas **decisões sequenciais**.

Finalmente, é importante não nos esquecermos dos problemas em que cada decisão produz resultados que podem ser vistos segundo perspectivas distintas, isto é, segundo diferentes critérios. Assim, uma decisão que seja preferível segundo um critério, poderá não o ser segundo outro... Trata-se da chamada área da **decisão multicritério**.

Uma última referência a um tópico muito importante: o resultado associado a uma decisão pode, para além do seu "*valor facial*" (por exemplo, lucros traduzidos em u.m.), ter um "*valor subjectivo*", que habitualmente se designa, em termos genéricos, por **utilidade**. Há circunstâncias em que um agente de decisão valora o resultado esperado associado a cada decisão possível não pelo seu "*valor facial*", mas pela satisfação pessoal que esse "*valor facial*" lhe dá, isto é, pela **utilidade**. A noção de Utilidade pode, assim, vir a ser utilizada nos diferentes tipos de problemas de decisão, para exprimir a subjectividade do agente de decisão face aos resultados possíveis associados às diferentes decisões que podem ser tomadas... E, claro está, a tomada de decisão baseada no Lucro não tem, necessariamente, que coincidir com a tomada de decisão baseada na Utilidade (atribuída por um dado agente de decisão) associada a esse Lucro.

A representação gráfica que, para um dado agente de decisão num determinado contexto, relaciona uma determinada grandeza (por exemplo, o lucro) com a correspondente Utilidade é habitualmente designada por **Curva de Utilidade**. Não é nosso objectivo discutir a *construção* de uma dada Curva de Utilidade. No entanto, gostaríamos de referir alguns aspectos básicos associados a uma Curva de Utilidade.

A Utilidade é medida em unidades arbitrárias, que designaremos por **utis**. Se nos referirmos a uma Curva de Utilidade,  $U$ , associada a um dado Benefício,  $B$  (por exemplo, o Lucro), poder-se-á observar um comportamento crescente, em sentido lato. A título de exemplo, veja-se a figura seguinte:



Esta Curva de Utilidade corresponde a um agente de decisão que sente muito baixa satisfação por benefícios inferiores a 2 unidades de benefício (u.b.), atribuindo a esses valores de Benefício o valor zero de Utilidade.

A partir das 2 u.b. e, até às 5 u.b. a curva apresenta **concavidade voltada para cima**, representando uma grande **propensão ao risco** por parte do agente de decisão em obter esses valores de Benefício - com efeito, o acréscimo de Utilidade quando se passa de 2 u.b. para 3 u.b. é de aproximadamente 5 utis, enquanto que, quando passamos de 3 u.b. para 4 u.b. o correspondente acréscimo de Utilidade já é de 10 utis; e quando se passa de 4 u.b. para 5 u.b. o acréscimo de Utilidade 'salta' para 60 utis ! É claramente muito importante para este agente de decisão poder atingir as 5 u.b. !

A partir das 5 u.b. a curva apresenta **concavidade voltada para baixo**, representando uma **aversão ao risco** por parte do agente de decisão em obter esses valores de benefício - com efeito, o acréscimo de Utilidade quando se passa de 5 u.b. para 6 u.b. 'cái' para aproximadamente 20 utis e, quando passamos de 6 u.b. para 7 u.b., esse acréscimo de Utilidade já nem chega a 5 utis ! Não há dúvida que o agente de decisão não está muito interessado em obter valores de Benefício acima de 5 u.b. ... e, esse interesse é ainda muito menor, quando considerarmos valores acima de 6 u.b. .

A partir das 7 u.b. a Curva de Utilidade apresenta-se praticamente 'constante', o que indica o total desinteresse por parte do agente de decisão por valores de Benefício acima de 7 u.b. .

O comportamento exibido pela Curva de Utilidade que se apresentou acima, embora corresponda a um dado agente de decisão em determinado contexto, apresenta um 'comportamento típico' das Curvas de Utilidade (associadas a um Benefício):

- uma zona de baixos valores de Benefício associada a um valor muito baixo de Utilidade;
- uma zona de concavidade voltada para cima indicando uma grande propensão para o risco por parte do agente de decisão, que tem muito interesse em situar-se nessa gama de valores de Benefício;
- uma zona de concavidade voltada para baixo indicando alguma aversão ao risco por parte do agente de decisão, que já não está muito interessado em atingir esses valores de Benefício e, finalmente,
- uma zona de valores de Benefício que já não interessam ao agente de decisão, aparecendo a Curva de Utilidade com um 'patamar'.

Claro que uma Curva de Utilidade associada a um 'Prejuízo' terá um comportamento 'inverso' do referido ...

## **TOMADA DE DECISÃO EM SITUAÇÕES DE INCERTEZA E EM SITUAÇÕES DE RISCO**

### **- Tomada de Decisão em Situações de Incerteza**

Os alunos finalistas de um curso superior decidiram angariar fundos para a sua Viagem de Finalistas. Para isso criaram um jogo de sorte (ou será de azar ?), para que os seus colegas da Faculdade pudessem ajudá-los financeiramente enquanto jogavam ...

O jogo consistia no seguinte:

Um jogador deve começar por escolher um "plano de contribuição" (**A** ou **B**). Em seguida, o jogador deve rodar vigorosamente uma esfera de vidro que contém muitas bolinhas brancas, algumas (poucas) bolinhas negras e muito poucas bolinhas vermelhas. Depois de parar o movimento de rotação, é extraída automática e aleatoriamente uma bolinha. Em função do "plano de contribuição" escolhido inicialmente e da cor correspondente à bolinha extraída o jogador terá de pagar a sua contribuição para a viagem de finalistas, podendo, no entanto, receber um prémio.

Se tiver sido seleccionado o "plano de contribuição" **A** e se a cor da bolinha extraída for branca, o jogador deve contribuir com 2.000 u.m. para a viagem de finalistas. Se a cor observada for negra, o jogador deve contribuir com 500 u.m. para a viagem de finalistas. Se a cor observada for vermelha, o jogador receberá um prémio de 10.000 u.m. .

Se tiver sido seleccionado o "plano de contribuição" **B** e se a cor da bolinha extraída for branca, o jogador deve contribuir com 500 u.m. para a viagem de finalistas. Se a cor observada for negra, o jogador recebe um prémio de 500 u.m. . Se a cor observada for vermelha, o jogador receberá um prémio de 5.000 u.m. .

O Luís e a Ana, dois estudantes 'caloiros', discutiam entre si este jogo de sorte:

- "Se queres jogar, joga !", dizia o Luís, "Mas, não demores duas horas a **tomar uma decisão** ! É só A ou B ! ... Olha, eu vou dar o exemplo, vou jogar e quero o plano A !".

O Luís rodou vigorosamente a esfera e ... saiu-lhe uma bolinha branca.

- "Paciência !", disse o Luís, pagando 2.000 u.m. ao colega da Comissão de Finalistas.

- "Viste !", exclamou a Ana, "Eu quero o plano B !"

A Ana rodou energicamente a esfera e ... saiu-lhe uma bolinha negra.

- "Parabéns !", disse-lhe o colega da Comissão de Finalistas, pagando-lhe 500 u.m..

- "Viste !", disse a Ana toda inchada de satisfação, "tomei a melhor decisão !"

- "Ai sim?", perguntou, sorridente, o Luís, que acrescentou, "Pois eu acho que não ! O plano A é a melhor opção ! Não vês que é a decisão que corresponde ao **maior valor de prémio ?**"

- "Não vês que o plano B é o que dá **menor prejuízo ?**", respondeu a Ana, muito rapidamente.

- "Oh Ana ! Só pensas em prejuízos ! És tão **pessimista !**", respondeu -lhe o Luís.

- "E tu, Luís, és um **optimista** inveterado !", disse-lhe a Ana. "Escolheres o plano A porque te dá o maior prémio ... E viste o que te aconteceu...", acrescentou.

- "Desculpem meter-me na vossa conversa !", disse o colega da Comissão de Finalistas, que continuou, "Vocês os dois têm razão ... Escolher A ou B é função do **grau de optimismo** de cada um de vocês ... Ora parece óbvio que o Luís é mais optimista do que a Ana ... Quando estudarem Teoria da Decisão, vão perceber isto ... "

\* \* \* \* \*

Vejamos o que o 'veterano' da Comissão de Finalistas, queria dizer ... Comecemos por representar num Quadro, o **valor do prémio (em u.m.)** associado a cada **Decisão (D)** e a cada **estado da natureza (θ)** não controlável pelo agente de decisão:

$\theta :$	$\theta_1 :$	$\theta_2 :$	$\theta_3 :$
Decisão:	Branco	Negro	Vermelho
A	- 2.000	- 500	+ 10.000
B	- 500	+ 500	+ 5.000

O Jogo descrito corresponde a uma **Situação de Incerteza**, já que, sendo desconhecido o número de bolinhas de cada cor dentro da esfera, não é possível associar uma probabilidade de ocorrência a cada estado da natureza.

Um possível critério de decisão numa Situação de Incerteza é o **Critério Optimista**, personificado pelo Luís no nosso problema: relativamente a cada decisão determinamos o valor máximo de benefício associado e, em seguida, selecciona-se a decisão correspondente ao maior desses valores (daí que este critério também seja conhecido como **Maxi-Maxi**).

$\theta :$	$\theta_1 :$	$\theta_2 :$	$\theta_3 :$	<b>Critério Optimista</b>
Decisão:	Branco	Negro	Vermelho	
A	- 2.000	- 500	<b>+ 10.000</b>	<b>+ 10.000</b>
B	- 500	+ 500	<b>+ 5.000</b>	+ 5.000

Conclusão: **Um agente de decisão optimista optaria pelo plano A, aspirando a ganhar 10.000 u.m. !**

O reverso deste critério de decisão é o **Critério Pessimista**, personificado pela Ana no nosso problema: relativamente a cada decisão determinamos o valor mínimo de

benefício associado e, em seguida, selecciona-se a decisão correspondente ao maior desses valores (daí que este critério também seja conhecido como **Mini-Max**).

$\theta :$ Decisão:	$\theta_1 :$ Branco	$\theta_2 :$ Negro	$\theta_3 :$ Vermelho	<b>Critério Optimista</b>
<b>A</b>	<b>- 2.000</b>	- 500	+ 10.000	- 2.000
<b>B</b>	<b>- 500</b>	+ 500	+ 5.000	<b>- 500</b>

Conclusão: Um agente de decisão pessimista optaria pelo plano B, certo de que não perderia mais do que 500 u.m. !

[ De notar que o agente de decisão pessimista selecciona a decisão com o maior valor de benefício mínimo e não a decisão com o menor valor de benefício mínimo ! Isso não seria pessimismo, mas sim masoquismo ... ]

Desde já se pode fazer uma pergunta: "E o leitor ? Que decisão tomaria ?"

Não há dúvida que um agente de decisão absolutamente optimista deve optar por A e que, por outro lado, um agente de decisão absolutamente pessimista deve optar por B ... Mas, um agente de decisão pode não ser completamente optimista ou completamente pessimista ...

Para abordarmos este problema, introduziremos o **Critério de Savage**, que permite tomar uma decisão, em função do **grau de optimismo**,  $\alpha$ , do agente de decisão.  $\alpha$  tomará valores entre 0 e 1: um agente de decisão absolutamente pessimista terá  $\alpha$  igual a 0 e um agente de decisão absolutamente optimista terá  $\alpha$  igual a 1. Aproveitemos o problema que temos vindo a tratar, para introduzir o Critério de Savage no Quadro que relaciona os **valores do prémio (em u.m.)** associados a cada **Decisão (D)** e a cada **estado da natureza ( $\theta$ )**:

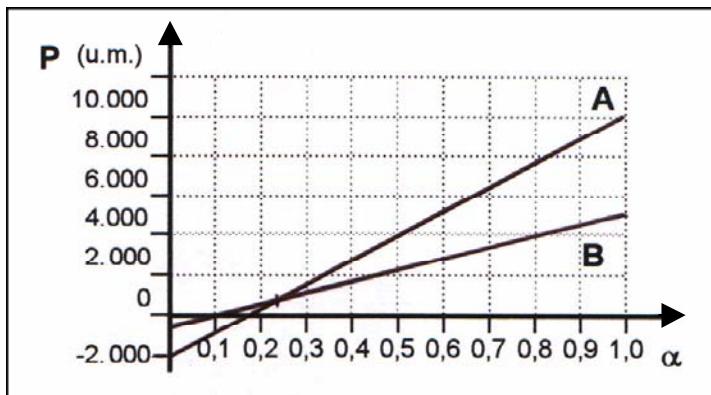
$\theta$ Dec.	$\theta_1 :$ B	$\theta_2 :$ N	$\theta_3 :$ V	Critério		
				Pessim.	Optim.	de Savage
<b>A</b>	- 2.000	- 500	+ 10.000	- 2.000	+ 10.000	$P = \alpha \cdot (+ 10.000) + (1 - \alpha) \cdot (- 2.000)$
<b>B</b>	- 500	+ 500	+ 5.000	- 500	+ 5.000	$P = \alpha \cdot (+ 5.000) + (1 - \alpha) \cdot (- 500)$

Genericamente, de acordo com o Critério de Savage o benefício associado a uma decisão será dado por uma ponderação dos benefícios correspondentes aos Critérios Optimista e Pessimista, sendo os respectivos coeficientes de ponderação  $\alpha$  (o grau de optimismo do agente de decisão) e  $(1 - \alpha)$ .

Relativamente ao problema que temos vindo a apresentar, ter-se-ia:

Decisão	Critério de Savage
<b>A</b>	$P = 12.000 \cdot \alpha - 2.000$
<b>B</b>	$P = 5.500 \cdot \alpha - 500$

Em termos gráficos, ter-se-ia:



Poderemos determinar o grau de optimismo correspondente ao agente de decisão para o qual é **indiferente optar por A ou por B**:

$$12.000 \cdot \alpha_{\text{ind.A/B}} - 2.000 = 5.500 \cdot \alpha_{\text{ind.A/B}} - 500 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{\text{ind.A/B}} = 1.500 / 6.500 \approx 0,23$$

Conclusão: Um agente com um grau de optimismo inferior a  $\alpha_{\text{ind.A/B}}$  (isto é, com grau de optimismo inferior a 0,23... ou seja, só um agente claramente pessimista ! ) deveria optar pelo plano correspondente ao Critério Pessimista (plano B); caso contrário (isto é, para a maioria dos agentes de decisão), recomendar-se-ia a opção pelo plano A.

Acabámos de exemplificar a tomada de decisão em Situação de Incerteza, tendo aplicado os Critérios Pessimista, Optimista e de Savage. A aplicação dos critérios referidos foi feita a partir dos valores de prémio (em u.m.) correspondentes aos "planos de contribuição" A e B. [ De notar que se a aplicação dos critérios fosse feita a partir de valores de Custos (ou, em geral, Prejuízos) o raciocínio a seguir seria idêntico mas 'invertido', isto é, por exemplo, para o Critério Optimista, a cada decisão far-se-ia corresponder o valor mínimo de custo e, em seguida, seleccionar-se-ia a decisão correspondente ao menor desses valores mínimos; para o Critério Pessimista far-se-ia corresponder a cada decisão o maior valor de custo e, em seguida, seleccionar-se-ia a decisão correspondente ao menor desses valores máximos. ]

Poder-se-ia ter aplicado os critérios a partir de valores de **Custos de Oportunidade**, Cop., que traduzem o 'custo' devido ao desconhecimento do estado da natureza que vai ocorrer. **De notar que a decisão recomendável a partir da análise de Custos de Oportunidade não tem de coincidir com a decisão recomendável a partir da análise de valores da grandeza a partir dos quais se calcularam os Custos de Oportunidade !** Relativamente ao exemplo que apresentámos, se soubéssemos de antemão que iria ocorrer o estado  $\theta_1$ , a melhor decisão a tomar seria B, correspondendo ao valor de 'prémio' - 500. Assim, se tivéssemos tomado essa decisão (embora desconhecendo qual o estado da natureza que iria ocorrer) não incorreríamos em qualquer custo de oportunidade; pelo contrário, se tivéssemos tomado a decisão A, estaríamos a incorrer num custo de oportunidade de 1.500 u.m. ( $-500 - (-2.000) = 1.500$  ).

$\theta$	$\theta_1 :$	$\theta_2 :$	$\theta_3 :$
Dec.	B	N	V
A	- 2.000	- 500	+ 10.000
B	- 500	+ 500	+ 5.000

→

$\theta$	$\theta_1 :$	$\theta_2 :$	$\theta_3 :$
Dec.	B	N	V
A	1.500	1.000	0
B	0	0	5.000

Prémio (em u.m.)

Custo de Oportunidade (em u.m.)

De notar que, a forma como se determina a matriz de custos de oportunidade garante-nos que: 1) eles são sempre não negativos; 2) em cada coluna da matriz (cada coluna corresponde a um estado da natureza) haverá, pelo menos, um zero e 3) os custos de oportunidade associados a uma dada decisão (uma linha da matriz) poderão ser todos estritamente positivos (no entanto, pode haver um, ou até mais do que um zero numa linha da matriz de custos de oportunidade).

$\theta$	$\theta_1 :$	$\theta_2 :$	$\theta_3 :$	Critério		
				Pessim.	Optim.	de Savage
Dec.	B	N	V			
A	1.500	1.000	0	1.500	0	$Cop. = \alpha \cdot 0 + (1 - \alpha) \cdot (1.500)$
B	0	0	5.000	5.000	0	$Cop. = \alpha \cdot 0 + (1 - \alpha) \cdot (5.000)$

É interessante recordarmo-nos que o Critério Pessimista aplicado aos valores dos 'prémios' levava-nos a tomar a decisão B ... Agora, quando aplicado aos valores de custos de oportunidade, o mesmo critério levava-nos a tomar a decisão A ! O Critério Optimista aplicado aos valores dos 'prémios' levava-nos a tomar a decisão A ... Agora, o mesmo critério, relativamente aos valores de custos de oportunidade, indica-nos ser indiferente a tomada da decisão A ou B ! De notar que, baseando-nos nos valores de custos de oportunidade, poderemos afirmar que, para o problema que temos vindo a abordar, a generalidade dos agentes de decisão deveria optar por A (exceptuando o 'absolutamente optimista', para quem seria indiferente A ou B). [ Observe-se que o segmento de recta correspondente a  $Cop.A = \alpha \cdot 0 + (1 - \alpha) \cdot (1.500)$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$  está sempre "abaixo" do segmento de recta correspondente a  $Cop.B = \alpha \cdot 0 + (1 - \alpha) \cdot (5.000)$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , apenas coincidindo quando  $\alpha = 1$  ! ]

Um agente de decisão que decide em função do Custo de Oportunidade está, em geral, particularmente preocupado em minimizar hipotéticas perdas devidas ao desconhecimento do estado da natureza que vai ocorrer do que em maximizar lucros ...

## - Tomada de Decisão em Situações de Risco

Imaginemos que, relativamente ao jogo de sorte apresentado, se conhecia o número de bolinhas de cada cor que se encontram dentro da esfera...

**Assuma que se mantém o enunciado anterior, mas que adicionalmente se sabe que no interior da esfera de vidro estão**

**65 bolinhas brancas, 30 bolinhas negras e 5 bolinhas vermelhas.**

Qual a importância da informação sobre o número de bolinhas de cada cor, que passamos a conhecer ?

O jogo, que na sua versão inicial correspondia a uma Situação de Incerteza (já que não era possível associar uma probabilidade de ocorrência a cada estado da natureza), passa agora a corresponder a uma **Situação de Risco**, uma vez que agora é possível associar uma probabilidade de ocorrência a cada estado da natureza.

Numa Situação de Risco, torna-se óbvio o **critério** a seguir para a determinação da decisão a tomar: determina-se o **valor esperado** de benefício (prejuízo) associado a cada decisão e escolhe-se a decisão correspondente ao maior (menor) valor esperado de benefício (prejuízo).

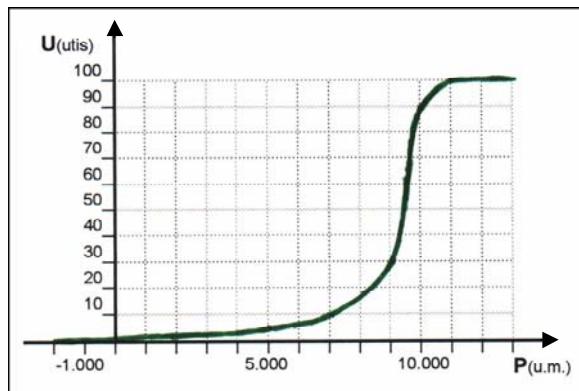
Consideremos o Quadro com os **valores do prémio (em u.m.)** associado a cada **Decisão (D)** e a cada **estado da natureza (θ)** não controlável pelo agente de decisão:

Dec	θ	$P(\theta_1) = 0,65$	$P(\theta_2) = 0,30$	$P(\theta_3) = 0,05$	<b>Valor esperado de Prémio <math>E [ P ]</math> (u.m.)</b>
		$\theta_1$ : Branco	$\theta_2$ : Negro	$\theta_3$ : Vermelho	
A		- 2.000	- 500	+ 10.000	$(-2.000)0,65 + (-500)0,30 + +10.0000,05 = - 950$
B		- 500	+ 500	+ 5.000	$(-500)0,65 + 5000,30 + +5.0000,05 = + 75$

Conclusão: **Recomenda-se o plano B que corresponde ao maior valor esperado de Prémio ( 75 u.m. ).**

Pode perguntar-se se faríamos esta recomendação a qualquer agente de decisão. Se nada mais conhecêssemos do agente de decisão, não deveríamos alterar a recomendação referida. Se, no entanto, dispuséssemos de algum conhecimento sobre o agente de decisão, nomeadamente se conhecêssemos a sua **Curva de Utilidade**, poderíamos **maximizar o valor esperado de utilidade** (em vez do valor esperado de prémio), incorporando assim alguma informação sobre a *subjectividade* do agente de decisão.

Imagine que para o António (um estudante que está a pensar em jogar o jogo de sorte apresentado) é muito, muito importante obter 10.000 u.m.! Observemos a Curva de Utilidade que corresponde à satisfação que o António atribui aos vários resultados possíveis do jogo, que se esboça de seguida:



Como se pode observar é muito baixa a satisfação que o António dá a prémios abaixo de 7.000 u.m. (atribui-lhe menos de 10 utis). Prémios entre 7.000 u.m. e 9.000 u.m. são ainda relativamente pouco atractivos para o António (valores de Utilidade entre 10 utis e 30 utis). Prémios acima de 9.000 u.m. fazem vibrar o António [ Já falta pouco para atingir as ambicionadas 10.000 u.m. ... ]. A um prémio de 10.000 u.m. o António já atribui 90 utis ! [ Objectivo atingido ! ]. De notar que, a partir desse valor, os prémios já não trazem grande acréscimo de satisfação ao António (os valores atribuídos de Utilidade sobem de 90 utis até 100 utis quando o prémio atinge as 11.000 u.m.) [ Pelos vistos o António não se importava de ganhar um pouquinho mais do que as 10.000 u.m. ... ].

Depois de termos analisado a Curva de Utilidade do António, não custa determinar qual o "plano de contribuição" recomendável. Determinemos, então, qual a melhor decisão que o António deve tomar. Comecemos por converter os valores do prémio (em u.m.) nos correspondentes **valores de Utilidade (em utis)** associada a cada **Decisão (D)** e a cada **estado da natureza (θ)** não controlável pelo agente de decisão:

Dec	$P(\theta_1) = 0,65$ $\theta_1$ : Branco	$P(\theta_2) = 0,30$ $\theta_2$ : Negro	$P(\theta_3) = 0,05$ $\theta_3$ : Vermelho	Val.Esp. de Utilidade $E[P]$ (u.m.)
				$0 \cdot 0,65 + 0 \cdot 0,30 + 90 \cdot 0,05 = 4,50$
A	0	0	90	$0 \cdot 0,65 + 0,1 \cdot 0,30 + 5 \cdot 0,05 = 0,28$
B	0	0,1	5	

Conclusão: **Como já parecia óbvio, o António opta pelo plano A que corresponde ao maior valor esperado de Utilidade (4,5 utis).**

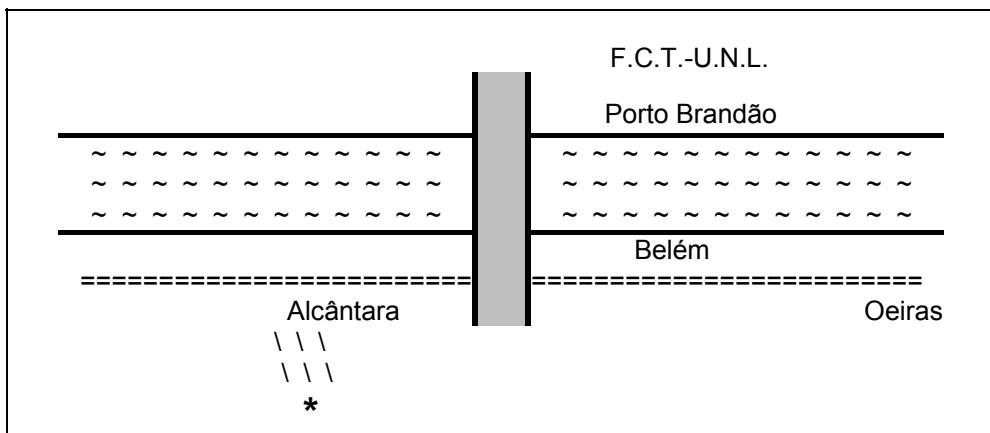
Acabámos de verificar que a tomada de decisão baseada em valores de Prémio não tem necessariamente que coincidir com a tomada de decisão baseada em valores de Utilidade associada ao Prémio. Com efeito, enquanto a tomada de decisão baseada em valores de Prémio tem uma perspectiva "neutra", isto é, independente das peculiaridades de um determinado agente de decisão, quando nos baseamos na Utilidade, estamos a considerar a subjectividade correspondente a um dado agente de decisão.

Poderemos ainda interrogar-nos sobre a decisão a recomendar ao António, se desconhecêssemos o número de bolinhas de cada cor dentro da esfera de vidro, isto é em situação de incerteza. Poderíamos utilizar a Curva de Utilidade para converter valores de Prémio em valores de Utilidade ? A resposta é afirmativa ... mas, nessa situação, a utilização dos Critérios apresentados anteriormente (Pessimista, Optimista e de Savage) não seria 'muito linear' ... Com efeito, quando se utiliza a Curva de Utilidade que reflecte a subjectividade do António, não faz muito sentido que, em seguida, se utilize um critério associado a um agente de decisão *abstracto* ... Poderíamos tentar quantificar o 'grau de optimismo' do António e, em seguida, aplicar o Critério de Savage.

## DECISÕES SEQUENCIAIS

### Problema : A Caminho da F.C.T.-U.N.L.

O Luís, um estudante da F.C.T.-U.N.L. acabou de mudar a sua residência para Oeiras. Dado que a sua nova casa é relativamente perto da estação da CP de Oeiras, o Luís consegue chegar pontualmente à estação às 7:48 horas, para apanhar o comboio a caminho da FCT-UNL no Monte de Caparica - ver o esquema que se apresenta de seguida:



Às 7:50 horas passa o "comboio rápido", que não efectua qualquer paragem até chegar a Alcântara, demorando normalmente 15 minutos nesse trajecto. Às 7:52 horas parte o "comboio que pára em todas as estações" (afetuosamente conhecido por "o páras" pelos 'habitueés'), que normalmente demora 17 minutos até Belém e mais 2 minutos até Alcântara.

Sabe-se que com 80 % de probabilidade os comboios não sofrem qualquer atraso, que com 15 % de probabilidade sofrem um atraso de 10 minutos e que com 5 % de probabilidade sofrem um atraso de 20 minutos.

Em Alcântara o Luís deslocar-se-á na moderna passadeira rolante da estação da CP até à paragem do autocarro ( assinalada com \* no esquema ), demorando 5 minutos nesse trajecto. Nessa paragem poderá apanhar um autocarro às 8:11 , 8:26 ou 8:41 horas com destino ao Monte de Caparica. O trajecto do autocarro até ao Monte de Caparica / F.C.T. normalmente demora 20 minutos, mas poderá sofrer atrasos.

Sabe-se que com 20 % de probabilidade os autocarros não sofrem qualquer atraso, que com 50 % de probabilidade sofrem um atraso de 15 minutos e que com 30 % de probabilidade sofrem um atraso de 30 minutos.

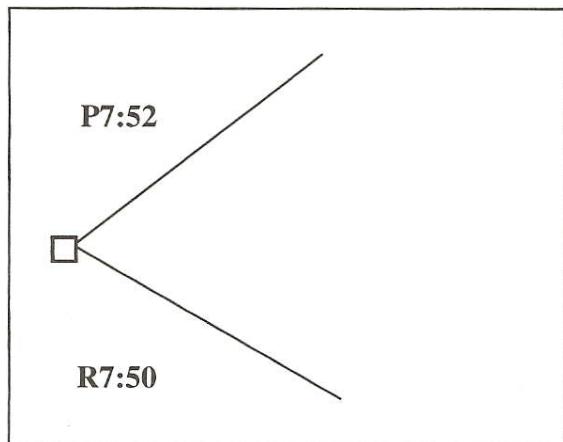
Se o Luís tiver optado pelo "páras" deverá, antes deste chegar a Belém, decidir se desce em Belém ou se prossegue até Alcântara.

Em Belém o Luís desloca-se a pé até à Estação Fluvial (um passeio a pé de 3 minutos), onde poderá apanhar o barco das 8:30 horas que chega a Porto Brandão às 8:40 horas. Daí partirá o autocarro às 8:45 horas, que o deixará na FCT às 8:55 horas. Admite-se que o percurso "Belém → Porto Brandão → FCT" nunca origina atrasos.

O Luís pretende decidir qual o comboio que deve apanhar em Oeiras, se pretender minimizar a duração esperada do percurso "Oeiras → F.C.T.-U.N.L.".

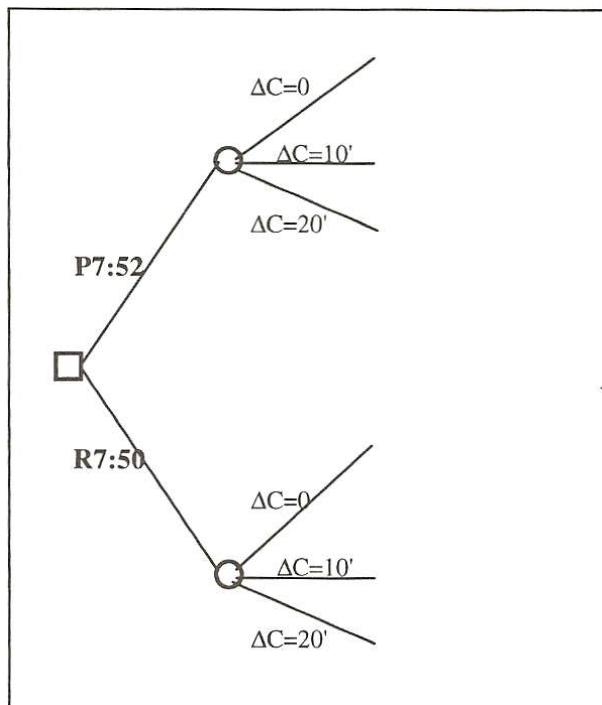
Como facilmente se comprehende o Luís deve tomar algumas decisões para efectuar o seu percurso da estação da CP em Oeiras até à F.C.T.-U.N.L.. Logo de inicio, o Luís deverá decidir se segue viagem no comboio rápido com partida às 7:50, ou, se pelo contrário, espera mais dois minutos e segue no "páras" das 7:52.

Representemos esquematicamente esta situação:



O quadradinho  $\square$  representa um **momento de decisão**. Neste caso, o Luís tem que optar ou pela decisão **P7:52** (isto é, seguir no "páras" das 7:52), ou pela decisão **R7:50** (isto é, seguir no "rápido" das 7:50) - daí os dois **ramos** que divergem do **nó** correspondente ao momento de decisão referido.

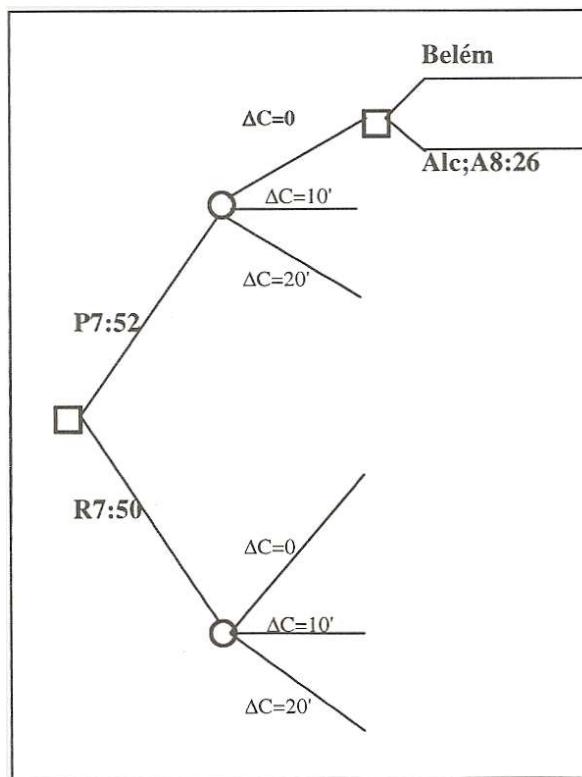
Sabemos que, qualquer que seja a decisão que o Luís venha a tomar, a partir do momento em que ele inicia a viagem, a sua duração é algo que ele não controla ... Assim, o Luís está à mercê do destino, do acaso ... De acordo com o enunciado, a duração da viagem pode, relativamente à duração prevista, não sofrer qualquer atraso ( $\Delta C = 0$ ), sofrer uma atraso de 10 minutos ( $\Delta C = 10'$ ), ou sofrer uma atraso de 20 minutos ( $\Delta C = .0'$ ). [É óbvia a simplificação que o enunciado introduz face à realidade ...]. Introduzamos estas informações na representação esquemática que se apresentou anteriormente:



Agora, para além do **momento de decisão inicial** representado pelo quadrado  $\square$ , representamos, em cada um dos ramos correspondentes às duas decisões possíveis (**P7:52** ou **R7:50**), uma bolinha O que designaremos por **momento de acaso**. Um momento de acaso representa a ocorrência de um factor não controlável pelo agente de decisão.

De um nó correspondente a um momento de acaso divergirão tantos ramos quantos os possíveis cenários correspondentes ao factor não controlado. No nosso problema, de cada um dos dois momentos de acaso que acabamos de representar, divergem três ramos correspondentes a ( $\Delta C = 0$ ;  $\Delta C = 10'$  e  $\Delta C = 20'$ ).

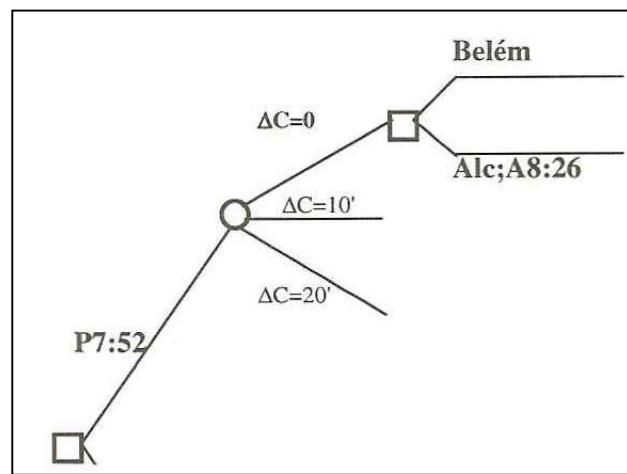
Ponhamo-nos na pele do Luís e admitamos que ele optou pela decisão **P7:52**, isto é, que ele seguiu no "páras" das 7:52 e que os Deuses foram benévolos, permitindo que o percurso até Belém se fizesse exactamente no tempo previsto - 17 minutos (ou seja,  $\Delta C=0$ ). [Sigamos a representação esquemática que representamos anteriormente.] O comboio aproxima-se de Belém. O Luís olha para o relógio e pensa "Hum ... 8:09 ! Hoje tudo correu bem ! E agora, saio aqui, ou sigo até Alcântara ? ..." Actualizemos a nossa representação esquemática deste problema, introduzindo um novo momento de decisão correspondente à situação que o Luís vive:



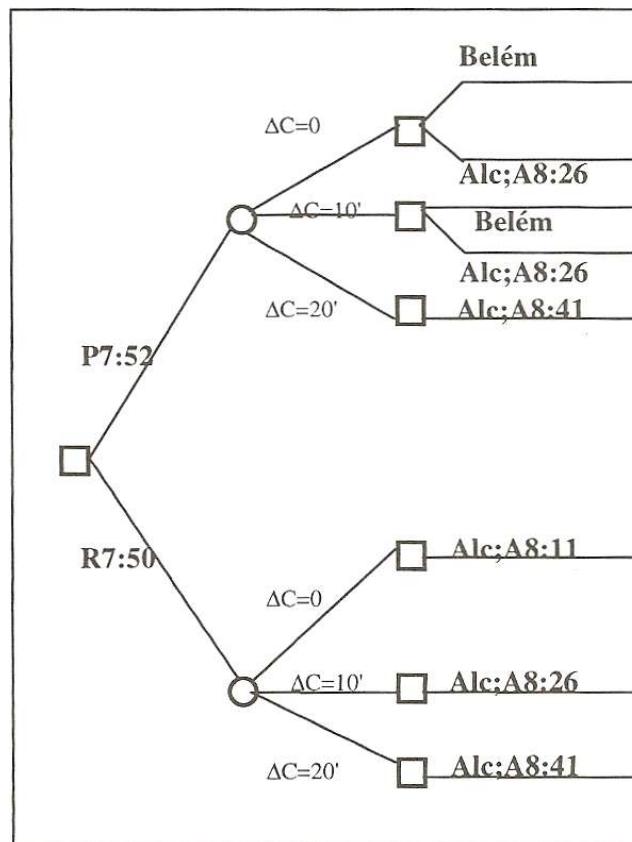
Como se pode observar, o Luís pode optar por sair em Belém e dirigir-se à Estação fluvial - 3 minutos a pé - onde chegará às 8:12 para apanhar o barco das 8:30 [Ainda tem tempo para se maravilhar com o Tejo ... ou comer um pastel de Belém ...] ou, pode optar por seguir para Alcântara (admitamos que, entre Belém e Alcântara o comboio não sofre qualquer percalço), onde chega às 8:11. Dirigir-se-á, então, à paragem dos autocarros, onde chegará às 8:16, pelo que só poderá seguir no autocarro das 8:26. Daí os dois ramos que divergem deste último momento de decisão a que correspondem as decisões "**Belém**" e "**Alc;A8:26**".

É fácil fazer idêntico raciocínio para os dois outros ramos que divergem do momento de acaso "posterior" à decisão **P7:52**: Se  $\Delta C = 10'$ , o Luís chegará a Belém às 8:19, pelo que poderá optar por sair em Belém e apanhar o barco das 8:30 (já que poderá chegar à Estação Fluvial às 8:22), ou, pelo contrário, poderá optar por prosseguir para Alcântara, onde chegará às 8:21, seguindo para a paragem do autocarro, onde chega às 8:26, mesmo a tempo de apanhar o autocarro das 8:26 ! [Uff ! ...] Se  $\Delta C = 20'$ , o Luís chegará a Belém às

8:29, pelo que já não poderá optar por apanhar o barco das 8:30 (pois só chegaria à Estação Fluvial às 8:32), pelo que só lhe restaria prosseguir para Alcântara, onde chegará às 8:31, seguindo para a paragem do autocarro, onde chega às 8:36, pelo que seguiria no autocarro das 8:41. Actualizemos a nossa representação esquemática do nosso problema:

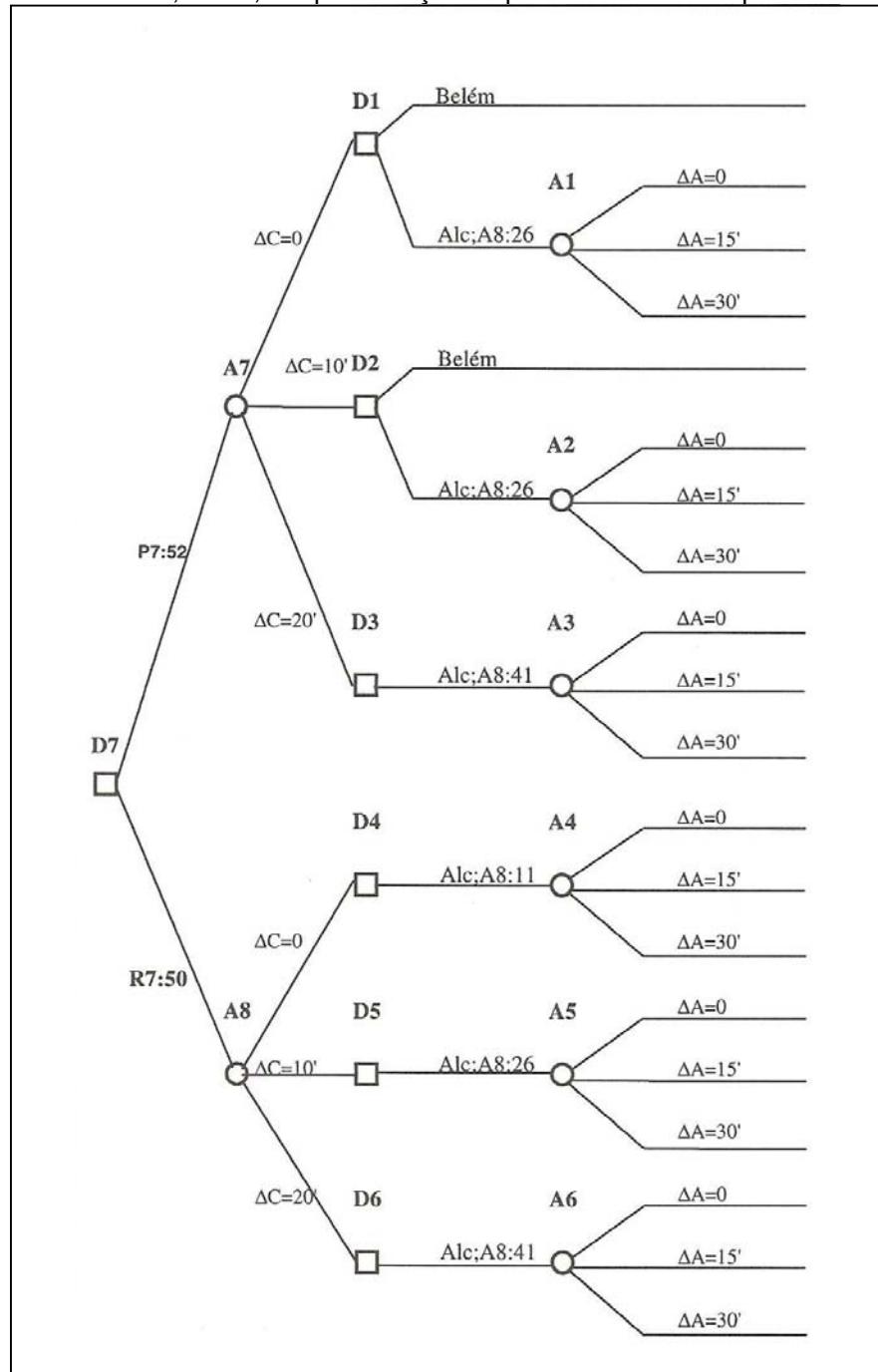


E se, de início, o Luís tivesse optado por **R7:50**, isto é, se ele seguisse no "rápido" das 7:50 ? Bom, se tudo corresse bem,  $\Delta C = 0$ , pelo que o Luís chegaria às 8:05 a Alcântara e às 8:10 à paragem do autocarro, a tempo de seguir no autocarro das 8:11. Se ocorresse um ligeiro atraso  $\Delta C = 10'$ , o Luís chegaria à paragem do autocarro às 8:20, podendo seguir no autocarro das 8:26. Se ocorresse um atraso maior,  $\Delta C = 20'$ , o Luís já só chegaria às 8:30 à paragem, pelo que seguiria no autocarro das 8:41. Actualizemos a nossa representação esquemática deste problema:

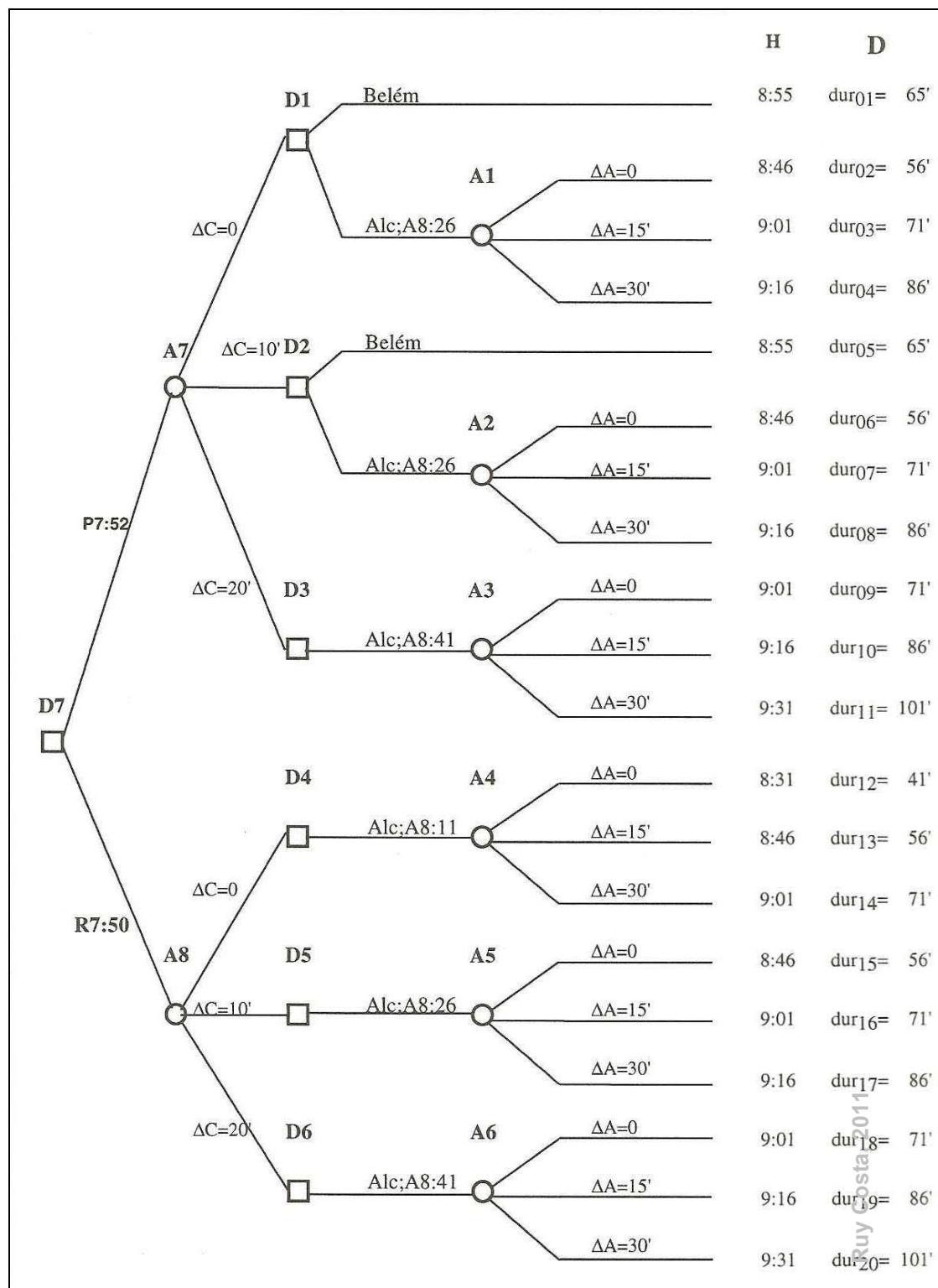


De acordo com o enunciado, sempre que o Luís optar pela decisão "Belém", isto é apanhar o Barco das 8:30 em Belém, ele chegará à F.C.T.-U.N.L. às 8:55 ! [ Mais uma simplificaçāo... ]. No entanto, quando optar por Alcântara, terá que contar com 20 minutos a partir do início da viagem de autocarro até chegar à F.C.T.-U.N.L. ... e isto se os Deuses forem simpáticos (isto é, se não houver qualquer atraso na viagem de autocarro,  $\Delta A = 0$ ). Numa representação esquemática do nosso problema, deveremos representar, após cada decisão que envolva a viagem de autocarro a partir de Alcântara, um momento de acaso (que representará um novo factor incontrolável - os eventuais atrasos da viagem de autocarro). De cada um desses momentos de acaso, deverão divergir três ramos, já que o enunciado refere que ou não há qualquer atraso na viagem de autocarro ( $\Delta A = 0$ ), ou esse atraso poderá ser de 15, ou de 30 minutos ( $\Delta A = 15'$  ou  $\Delta A = 30'$ ). [ Nova simplificaçāo... do enunciado! ]

Completaremos, então, a representação esquemática do nosso problema:



Na representação anterior - a **árvore de decisão** correspondente ao problema que estamos a analisar, identificámos os momentos de acaso e os momentos de decisão para mais fácil referência futura. Acrescentemos, agora, aos **ramos terminais** a hora de chegada à F.C.T.-U.N.L. correspondente a cada **trajectória de alternativas** (isto é, cada sequência de decisões tomadas pelo agente de decisão e intervenções do acaso) e o respectivo valor de duração da viagem (tomando as 7:50 como início, independentemente da decisão inicial):



Ver Notas na pag. Seguinte !

Ruy Costa  
2011

**Notas Relativas à Árvore de Decisão da pg. anterior:**

Decisões	Factores Não Controláveis
R7:50 : Comboio rápido das 7:50	$\Delta C$ : Atraso na viagem de Comboio
P7:52 : Comboio "páras" das 7:52	$\Delta A$ : Atraso na viagem de Autocarro
Belém : Barco às 8:30	
Alc;A8:41 : Alcântara → Autocarro às 8:41	

Com o momento de acaso **A1** representamos o facto de não controlarmos a duração da viagem de autocarro. Com 20 % de probabilidade não ocorrerão atrasos nessa viagem ( $\Delta A = 0$ ) e, consequentemente, o Luís poderá chegar à F.C.T. às 8:46, pelo que a correspondente duração da viagem,  $dur_02$  é igual a 56'; com 50 % de probabilidade tem-se  $\Delta A = 15'$ , obtendo-se  $dur_03 = 71'$  e, finalmente, com 30 % de probabilidade tem-se  $\Delta A = 30'$ , obtendo-se  $dur_04 = 86'$ . Assim, ao momento de acaso **A1** poderemos associar a **duração esperada** de  $0,20 \cdot 56' + 0,50 \cdot 71' + 0,30 \cdot 86' = 72,5'$  ( $E[\text{Dur}]A1$ ).

Analogamente, para cada momento de acaso **A2**, ..., **A6** poderemos calcular já o correspondente valor esperado de duração:

$$E[\text{Dur}]A2 = 0,20 \cdot 56' + 0,50 \cdot 71' + 0,30 \cdot 86' = 72,5'$$

$$E[\text{Dur}]A3 = 0,20 \cdot 71' + 0,50 \cdot 86' + 0,30 \cdot 101' = 87,5'$$

$$E[\text{Dur}]A4 = 0,20 \cdot 41' + 0,50 \cdot 56' + 0,30 \cdot 71' = 57,5'$$

$$E[\text{Dur}]A5 = 0,20 \cdot 56' + 0,50 \cdot 71' + 0,30 \cdot 86' = 72,5'$$

$$E[\text{Dur}]A6 = 0,20 \cdot 71' + 0,50 \cdot 86' + 0,30 \cdot 101' = 87,5'$$

Imaginemo-nos, agora, colocados no momento de decisão **D1**: optámos pelo "páras" das 7:52, a viagem decorreu de acordo com o horário previsto e estamos a chegar a Belém às 8:09. Deveremos descer em Belém e seguir no barco das 8:30 para Porto Brandão, ou, pelo contrário, deveremos prosseguir para Alcântara e seguir posteriormente no autocarro das 8:26? Com as informações de que dispomos neste momento, podemos afirmar que se optarmos por "**Belém**", teremos uma **duração de 65'** ( $dur_01$ ), enquanto que se optarmos por "**Alc;A8:26**" teremos uma **duração esperada de 72,5'** ( $E[\text{Dur}]A1$ ). Assim, não há que ter qualquer dúvida: **no momento de decisão D1 dever-se-ia seleccionar a decisão "Belém" correspondente a uma duração de 65'**.

O raciocínio apresentado para o momento de decisão **D1** pode ser generalizado:  
**Num momento de decisão, deve seleccionar-se a decisão associada ao maior valor (esperado) de 'benefício', ou menor valor(esperado) de 'prejuízo'.**

É interessante observarmos que o momento de decisão **D2** corresponde exactamente à situação associada a **D1** - quer isto dizer que, se se optar pelo "páras" das 7:52, quer a duração da viagem seja a prevista, quer sofra um atraso de 10 minutos, dever-se-á sempre descer em Belém e seguir no barco das 8:30 !!!

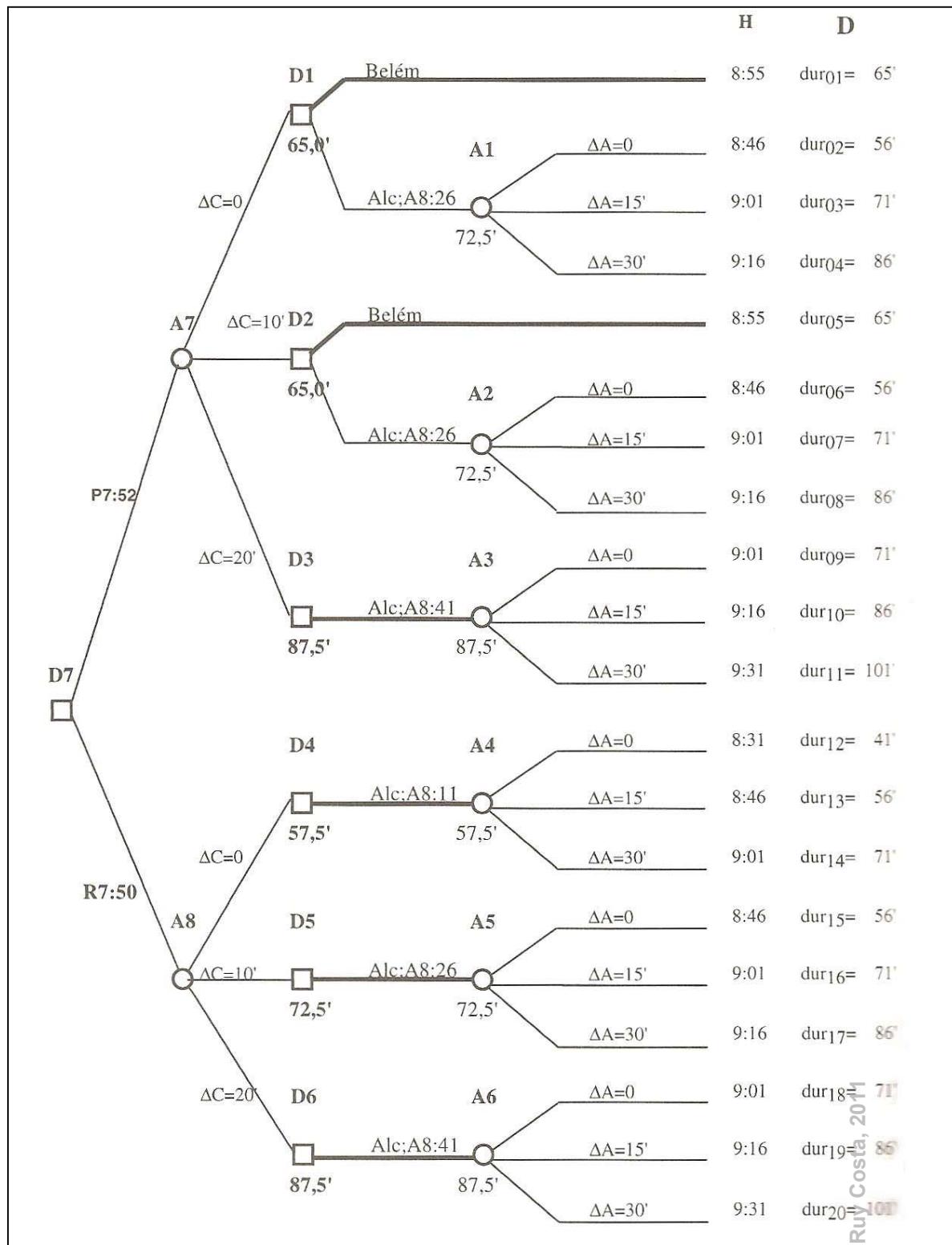
Relativamente a **D3** ("páras"+ $\Delta C=20'$ ) não temos qualquer opção - só nos resta a decisão "**Alc;A8:41**", correspondente a uma duração de 87,5' ( $E[\text{Dur}]A3$ ).

Relativamente a **D4** ("rápido"+ $\Delta C=0$ ) não temos qualquer opção - só nos resta a decisão "**Alc;A8:11**", correspondente a uma duração de 57,5' ( $E[\text{Dur}]A4$ ). De notar que, teoricamente, poderíamos chegar a Alcântara às 8:05 (8:10 à paragem) e não seguir no autocarro das 8:11, optando por um autocarro posterior... No entanto, tal seria absurdo face ao enunciado que refere expressamente que o Luís pretende minimizar a duração da viagem ! [ É claro que se aquela garota jeitosa, que o Luís encontrou uma vez na paragem e que lhe fez subir o ritmo

cardíaco, estivesse novamente na paragem com o seu ar provocante ... o enunciado poderia ser provisoriamente esquecido ... ]

Relativamente a **D5** ("rápido"+ $\Delta C=10'$ ) também não temos qualquer opção - só nos resta a decisão "**Alc;A8:26**", correspondente a uma duração de 72,5' (E[Dur]**A5**) e, finalmente, relativamente a **D6** ("rápido"+ $\Delta C=20'$ ) restar-nos-ia apenas a decisão "**Alc;A8:41**", correspondente a uma duração de 87,5' (E[Dur]**A6**).

Destaquemos as decisões recomendadas na árvore de decisão:



Ver Notas Relativas à árvore de Decisão anterior.

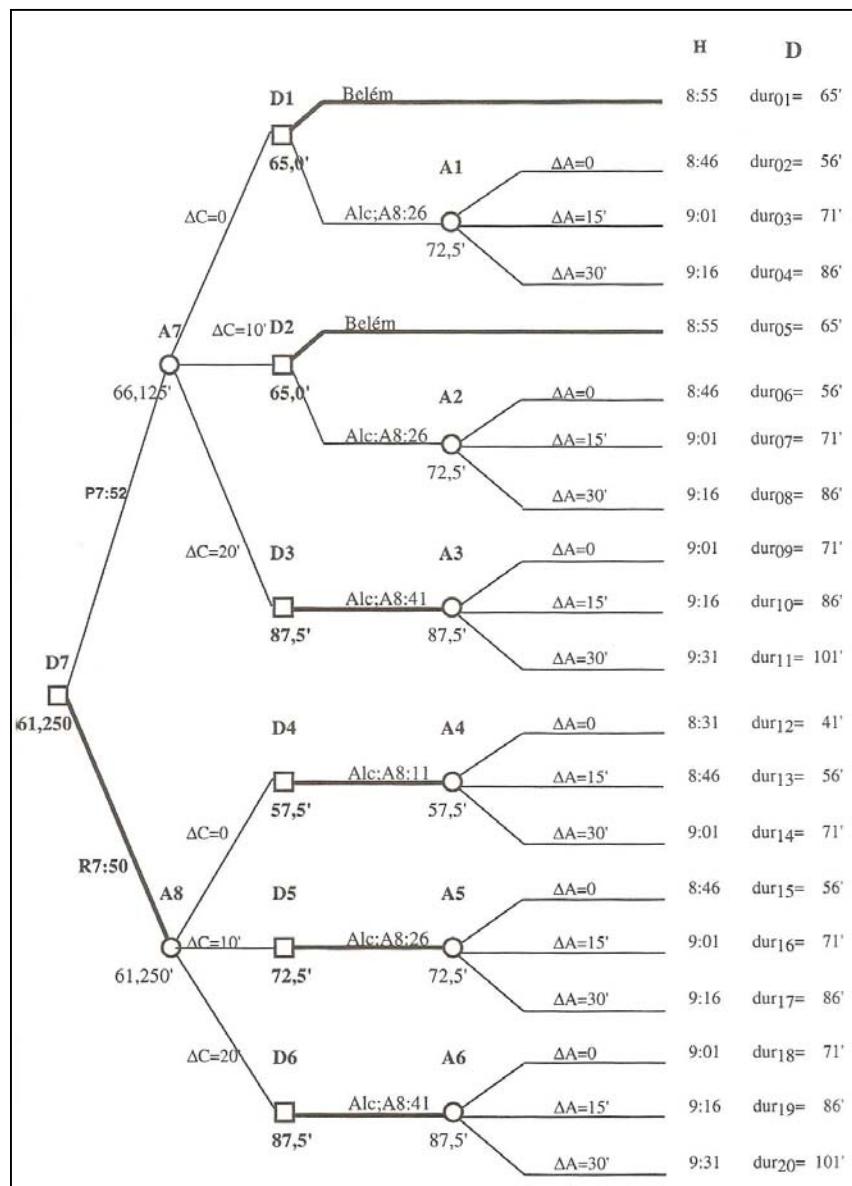
Poderemos, agora, considerar os momentos de acaso **A7** e **A8**, que traduzem os factores imponderáveis associados à duração da viagem de comboio ( $\Delta C = 0$  com 80 % de probabilidade;  $\Delta C = 10'$  com 15 % de probabilidade e  $\Delta C = 20'$  com 5 % de probabilidade):

$$E[\text{Dur}]\mathbf{A7} = 0,80 \cdot 65,0' + 0,15 \cdot 65,0' + 0,05 \cdot 87,5' = 66,125'$$

$$E[\text{Dur}]\mathbf{A8} = 0,80 \cdot 57,5' + 0,15 \cdot 72,5' + 0,05 \cdot 87,5' = 61,250'$$

E agora, para respondermos finalmente à questão posta no enunciado ("páras" ou "rápido" ? ... eis a questão ! ), coloquemo-nos no momento de decisão **D7**: se optarmos por "**P7:52**" (isto é, pelo "páras" das 7:52), a viagem terá uma **duração esperada de 66,125'** ( $E[\text{Dur}]\mathbf{A7}$ ); se, pelo contrário, optarmos por "**R7:50**" (isto é, pelo "rápido" das 7:50), a viagem terá uma **duração esperada de 61,250'** ( $E[\text{Dur}]\mathbf{A8}$ ).

Podemos, assim, indicar a decisão inicial recomendável: **O Luís deve seguir no comboio "rápido" das 7:50, rumo a Alcântara**, como se esquematiza na árvore de decisão correspondente a este problema:

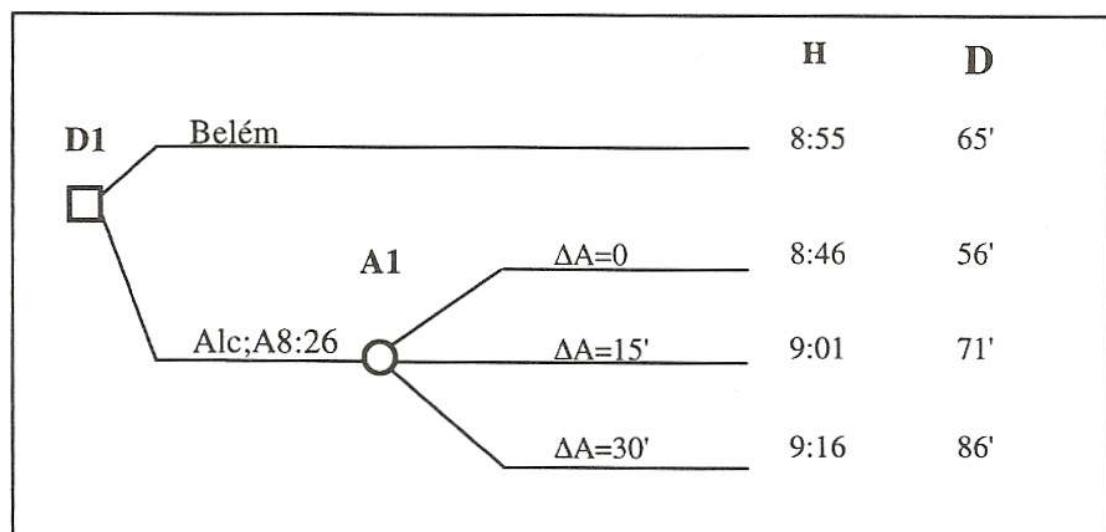


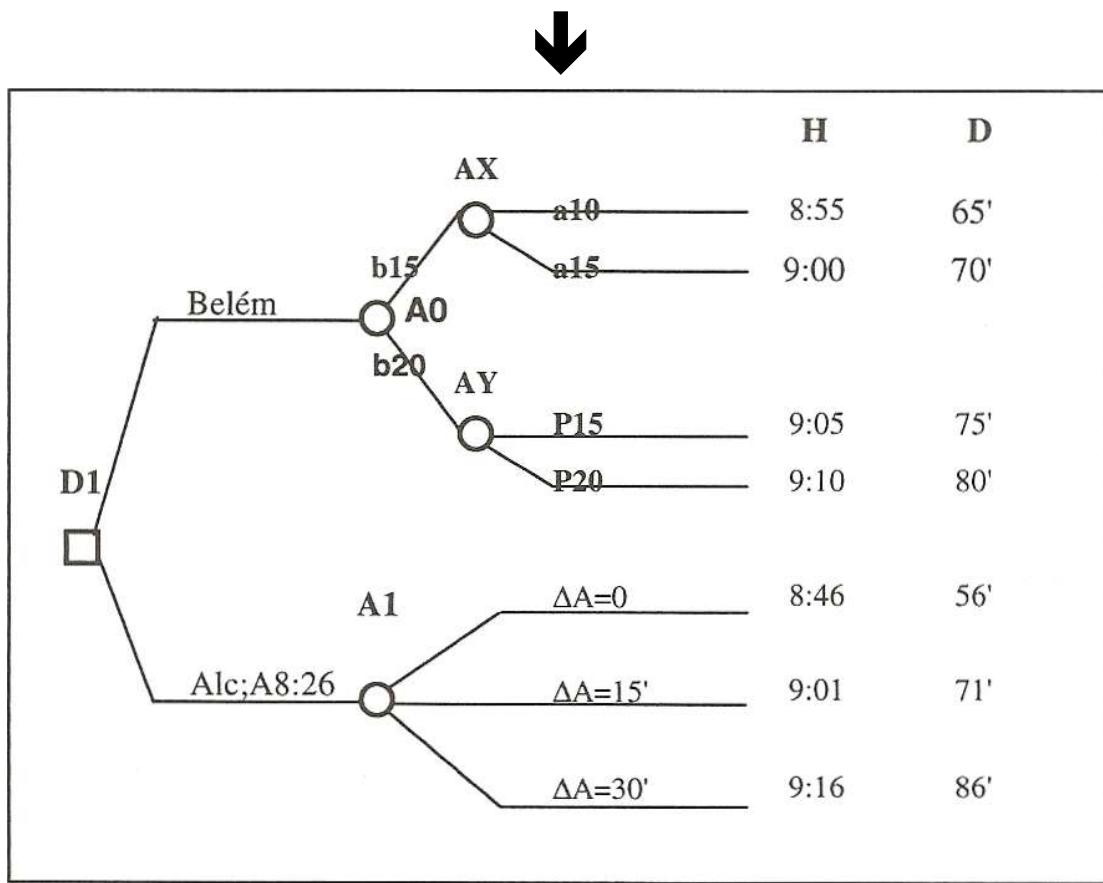
Antes de retomarmos o problema que se acaba de apresentar, gostaríamos de realçar alguns aspectos:

- A 'construção' de uma Árvore de Decisão depende de cada problema de Decisões Sequenciais, não havendo, portanto, 'receitas' a indicar. No entanto, há algumas 'regras' básicas que poderemos referir:

Normalmente, numa dada trajectória de alternativas, **não representamos dois momentos de decisão consecutivos**, sem que entre eles ocorra, pelo menos, um momento de acaso. Com efeito, duas decisões consecutivas podem ser sempre representadas como se de uma única decisão se tratasse (no problema que apresentámos a decisão "Alc;A8:26" corresponde, na prática a duas decisões consecutivas: descer em Alcântara e, em seguida, seguir viagem no autocarro das 8:26).

No entanto, muitas vezes fará todo o sentido representar-se **dois momentos de acaso consecutivos sem qualquer momento de decisão intermédio**. Imagine-se, por exemplo, que no problema que apresentámos, se admitia que a viagem de barco de Belém para Porto Brandão (que se inicia às 8:30) poderia durar 10 minutos com 90% de probabilidade e 15 minutos com 6 % de probabilidade e 20 minutos com 4 % de probabilidade e que, por outro lado, o percurso de autocarro de Porto Brandão para a F.C.T.-U.N.L. (que se inicia às 8:45) poderia durar 10 minutos com 95 % de probabilidade e 15 minutos com 5 % de probabilidade. Admita-se ainda que, se se chegar a Porto Brandão depois do autocarro ter partido, se irá a pé para a F.C.T.-U.N.L. [ A subida para o Cálvário ! ] demorando-se 15 minutos com 80 % de probabilidade e 20 minutos com 20 % de probabilidade. Nestas circunstâncias, a decisão "Belém" (uma das decisões possíveis no momento de decisão D1) que até agora correspondia a um simples ramo 'determinístico' com chegada à Faculdade às 8:55 passaria a ter o seguinte aspecto:





**Notas:** Duração da viagem de barco: não superior a 15' (**b15**) com 96% de probabilidade; igual a 20' (**b20**) com 4% de probabilidade ; Duração da viagem de autocarro: 10' (**a10**) com 95 % de probabilidade e 15' (**a15**) com 5 % de probabilidade; Duração do percurso a pé: 15' (**p15**) com 80% de probabilidade e 20' (**p20**) com 20% de probabilidade.

Aproveitemos para calcular o valor da duração esperada da viagem correspondente ao momento de acaso **A0**. Para tal, deveremos determinar primeiramente os valores correspondentes a **AX** e **AY**:

$$E [ \text{Dur} ]_{\text{AX}} = 0,95 \cdot 65' + 0,05 \cdot 70' = 65,25'; \quad E [ \text{Dur} ]_{\text{AY}} = 0,80 \cdot 75' + 0,20 \cdot 80' = 76,00'$$

$$E [ \text{Dur} ]_{\text{A0}} = 0,96 \cdot 65,25' + 0,04 \cdot 76,00' = 65,68'$$

- É importante salientar que na resolução de um problema de Decisões Sequenciais, começamos por representar a correspondente Árvore de Decisão, calculamos os valores da grandeza em estudo correspondentes aos 'ramos terminais' e, vamos recuando progressivamente até atingirmos o nó correspondente ao momento de decisão inicial.

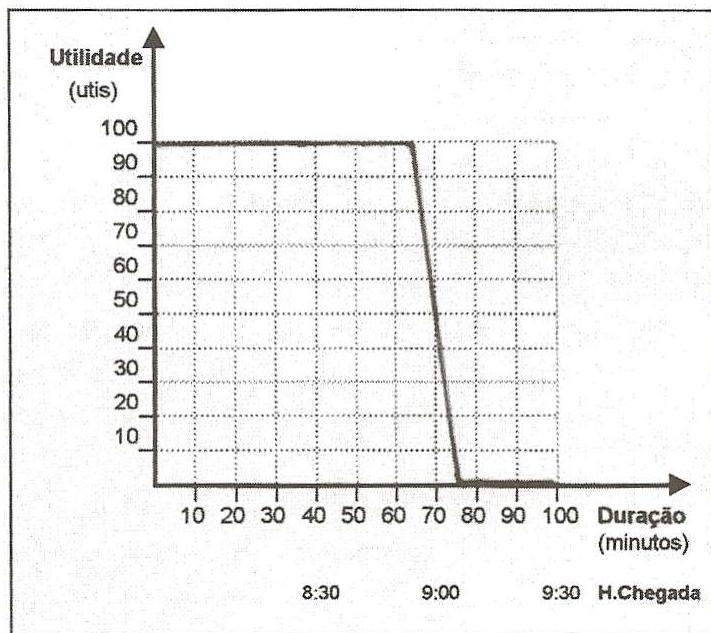
Neste processo, sempre que encontramos um nó correspondente a um **memento de acaso** calculamos o **valor esperado da grandeza em estudo**, a partir dos valores correspondentes aos ramos que divergem desse momento de acaso; quando encontramos um **memento de decisão**, optamos pelo ramo que daí diverge correspondente à **decisão com 'melhor' valor da grandeza em estudo**. De notar que o '**melhor**' valor da duração da viagem do problema que se apresentou corresponde ao **menor** valor. No entanto, se estivermos a resolver um problema em que a grandeza em estudo seja, por exemplo, o lucro ou a satisfação/utilidade, o '**melhor**' valor é o **maior** valor do lucro ou da satisfação/utilidade !

Quando atingimos o nó inicial estamos em condição de recomendar a decisão inicial a ser tomada. Nunca é demais frisar que **só poderemos recomendar a decisão a tomar inicialmente ! Decisões posteriores dependerão sempre dos valores que os factores incontroláveis vierem efectivamente a assumir !** Assim, relativamente ao problema que apresentámos apenas poderemos recomendar que inicialmente o Luís opte por seguir no "rápido" que sai de Oeiras às 7:50 !

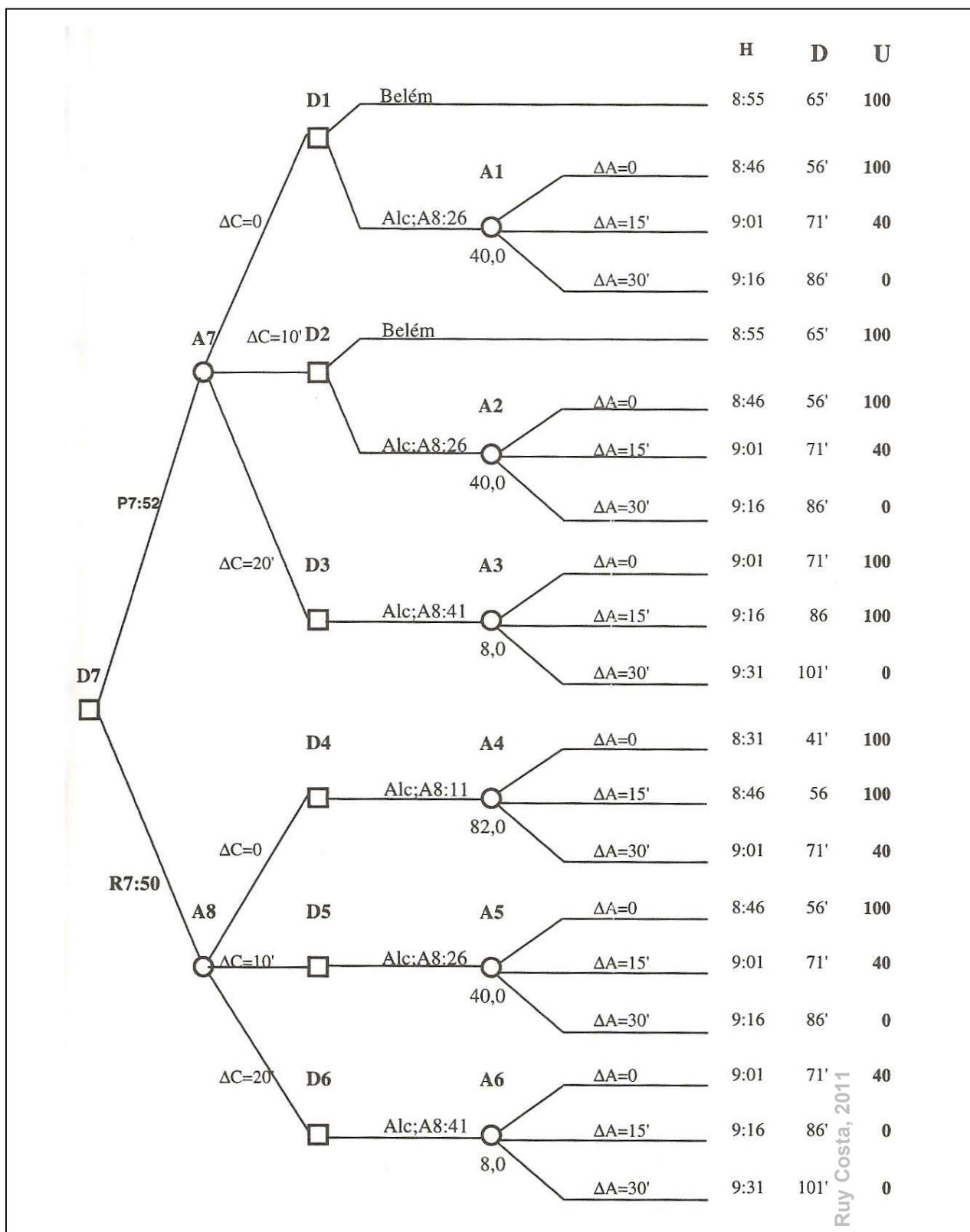
\*\*\*\*\*

Retomemos o problema que nos serviu para introduzir as Decisões Sequenciais. Admitamos agora que o Luís vai ter uma aula de Investigação Operacional às 9 horas com um professor muito peculiar que é tremendamente pontual e pouco tolerante com a falta de pontualidade alheia ... O Luís, que já teve alguns 'atritos' com o 'Prof' não está para arranjar mais confusões, deseja chegar à Faculdade antes das 9 horas ! "Se for possível chegar uns cinco minutitos antes, tanto melhor ! Sempre posso tomar um cafêzinho ...", disse-nos o Luís, que acrescentou, "Chegar depois das 9:05 é que é um 'drama' !".

Depois de conversarmos com o Luís, foi possível esboçar a correspondente Curva de Utilidade (em função da duração da viagem), que se apresenta ao lado:



Comecemos por converter os valores 'terminais' das durações nos correspondentes valores de Utilidade (em utis), de acordo com a Curva de Utilidade apresentada:



**Notas:** H - Hora de Chegada à FCT;  
 D - Duração (em ') da Viagem (a partir das 7:50);  
 U - Utilidade (utis)

Determinemos os valores correspondentes aos momentos de acaso **A1**, ..., **A6**:

$$E[U]_{\mathbf{A1}} = 0,20 \cdot 100 + 0,50 \cdot 40 + 0,30 \cdot 0 = 40,0$$

$$E[U]_{\mathbf{A2}} = 0,20 \cdot 100 + 0,50 \cdot 40 + 0,30 \cdot 0 = 40,0$$

$$E[U]_{\mathbf{A3}} = 0,20 \cdot 40 + 0,50 \cdot 0 + 0,30 \cdot 0 = 8,0$$

$$E[U]_{\mathbf{A4}} = 0,20 \cdot 100 + 0,50 \cdot 100 + 0,30 \cdot 40 = 82,0$$

$$E[U]_{\mathbf{A5}} = 0,20 \cdot 100 + 0,50 \cdot 40 + 0,30 \cdot 0 = 40,0$$

$$E[U]_{\mathbf{A6}} = 0,20 \cdot 40 + 0,50 \cdot 0 + 0,30 \cdot 0 = 8,0$$

Determinemos, agora, as decisões a tomar nos momentos de decisão **D1**, ..., **D6**:

**D1**:  $\max(100,0 ; 40,0) = 100,0 \Rightarrow \mathbf{Belém}$

**D2**:  $\max(100,0 ; 40,0) = 100,0 \Rightarrow \mathbf{Belém}$

**D3**: 8,0  $\Rightarrow \mathbf{Alc;A8:41}$

**D4**: 82,0  $\Rightarrow \mathbf{Alc;A8:11}$

**D5**: 40,0  $\Rightarrow \mathbf{Alc;A8:26}$

**D6**: 8,0  $\Rightarrow \mathbf{Alc;A8:41}$

E, finalmente, poderemos determinar os valores correspondentes aos momentos de acaso **A7** e **A8**:

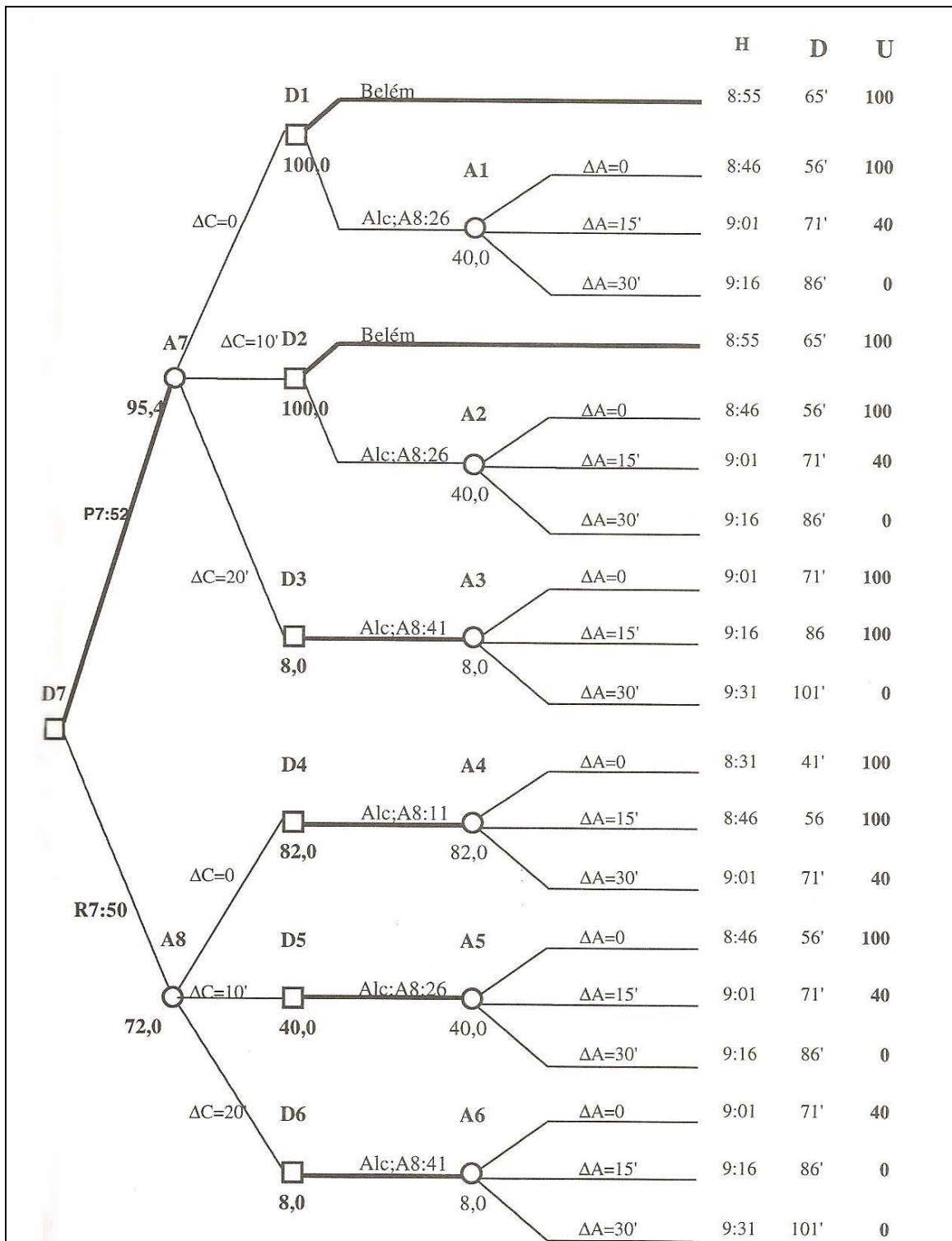
$$E[U]_{\mathbf{A7}} = 0,80 \cdot 100,0 + 0,15 \cdot 100,0 + 0,05 \cdot 8,0 = 95,4$$

$$E[U]_{\mathbf{A8}} = 0,80 \cdot 82,0 + 0,15 \cdot 40,0 + 0,05 \cdot 8,0 = 72,0$$

Poderemos, assim, concluir que a decisão inicial recomendável (correspondente ao momento de decisão **D7**) é a que corresponde ao máximo de ( 95,4 ; 72,0 ), ou seja, é "P7:52", isto é, o Luís deverá seguir no comboio "páras" às 7:52, tendo em conta os condicionalismos subjectivos referidos (descritos pela Curva de Utilidade apresentada).

Ricardo Costa 2011

Em seguida apresenta-se a Árvore de Decisão correspondente à situação que se acaba de analisar:



**Notas:** H - Hora de Chegada à FCT;  
 D - Duração (em ') da Viagem (a partir das 7:50);  
 U - Utilidade (utis)

Como já sabíamos, a tomada de decisão baseada numa determinada grandeza não tem que coincidir com a tomada de decisão baseada na Utilidade associada a essa grandeza. Daí que, no problema que apresentámos, se recomendasse que um Luís "neutro" (isto é, não particularmente preocupado) optasse pelo "rápido" das 7:50, enquanto

que, se recomenda ao 'Luís que não quer confusões com o Prof' que siga viagem no "páras" das 7:52 !

## C O N C L U S Ã O

Nos problemas abordados anteriormente a correspondente resolução passou sempre pela adopção de **um único critério de decisão** (por exemplo, maximizar o valor do Prémio; maximizar o valor da Utilidade associada ao prémio; minimizar a Duração da viagem; maximizar a Utilidade associada à Duração).

No entanto, todos nos confrontamos diariamente com problemas de decisão que não são assim tão 'lineares', uma vez que podem ser vistos segundo diferentes perspectivas, isto é, as 'soluções' podem ser valoradas por diferentes critérios. São os **problemas de decisão multicritério**, onde geralmente, uma decisão que é muito boa segundo um determinado critério, é relativamente fraca segundo outro critério, pelo que a escolha da decisão 'acertada' não é nada óbvia.

Quando vamos **jantar a um restaurante** somos confrontados com o menu que nos permite várias escolhas. Entre os muitos critérios para julgar essas escolhas podemos referir: '**incompatibilidade com o almoço**' (não é muito lógico escolher algo que se havia comido ao almoço....), '**incompatibilidade estrutural**' (há pessoas que odeiam lulas, pelo que se espera que a sua escolha não passe por esses simpáticos bichinhos...) e **preço** ("Hum... O 'Fondue' 'caía que nem ginginhas'... mas a minha carteira está um bocadito 'leve' ... Em termos de preço, só as alheiras me comprehendem...").

Quando vamos ver as novidades numa Discoteca e pretendemos **comprar um disco**, facilmente poderemos ficar 'baralhados': **género musical, qualidade da interpretação, qualidade da gravação e preço** são alguns dos critérios aos quais seremos sensíveis.

Quando pretendemos **escolher um local para passar férias** e pegamos num prospecto de uma Agência de Viagens somos obrigados a analisar as propostas que nos fazem no que diz respeito a **tipo de férias** (praia, campo, cidade, estrangeiro, no país, ...), **duração das férias, acessibilidade/duração da viagem, preço e qualidade do alojamento** entre outros critérios.

A resolução deste tipo de problemas ultrapassa o âmbito destes apontamentos. No entanto, podemos sugerir ao leitor mais interessado que se inscreva em "Modelos de Apoio à Decisão", onde a Decisão Multicritério será amplamente estudada.

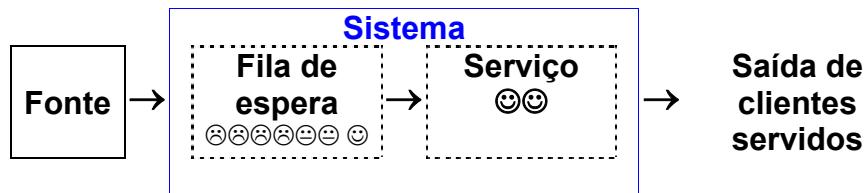
## **FILAS DE ESPERA**

Notas baseadas em  
“Introduction to Operations Research”  
de Hillier e Lieberman.

## ESTRUTURA BÁSICA DOS SISTEMAS DE FILAS DE ESPERA

Quando um determinado **serviço** é procurado por vários **clientes**, poder-se-ão formar **filas de espera**, já que o número de **servidores** e a **duração do serviço** de cada cliente usualmente não permite que cada cliente seja atendido assim que solicita o serviço.

Poderemos representar esquematicamente o processo de formação de filas de espera do modo seguinte:



**Fonte (população)**: dimensão (finita ou infinita); processo de chegadas (distribuição estatística das chegadas, número de clientes por chegada); atitude dos clientes (p.ex., possibilidade de recusa de um cliente aceder ao serviço ao constatar que a fila de espera é muito longa; possibilidade de desistência de um cliente que abandona o sistema sem ter sido servido depois de uma longa espera).

**Sistema**: fila (única; múltipla; comprimento limitado ou ilimitado; disciplina); serviço (nº de servidores; distribuição estatística da duração de um atendimento; dimensão do serviço (o número de clientes que podem ser servidos simultaneamente)) capacidade do sistema (o número máximo de clientes que, num dado instante, podem estar no sistema, incluindo os clientes que aguardam na fila e os que estão a ser servidos).

**Disciplina** (isto é, a ordem pela qual os clientes são atendidos, destacando-se as disciplinas FIFO “first in, first out”, ou seja, atendimento por ordem de chegada; LIFO “last in, first out”, ou seja, a última entrada é processada primeiro; SIRO “service in random order”, ou seja, serviço por ordem aleatória e PRI, correspondente a uma ordenação com prioridades).

A **NOTAÇÃO DE KENDALL v/w/x/y/z** é utilizada para caracterizar uma fila de espera: **v** caracteriza o processo de chegadas, representando a distribuição do intervalo de tempo entre chegadas consecutivas; **w** caracteriza a duração do serviço; **x** denota o número de servidores; **y** representa a capacidade do sistema ou a dimensão da fonte, e **z** especifica a disciplina da fila. Cada uma das especificações **v** e **w** poderá ser igual a **D**, **M**, **E<sub>k</sub>**, ou **G**, correspondendo a Determinístico, com Distribuição Exponencial (processo Markoviano), com distribuição Erlang-*k*, *k* = 1, 2, ... (Gama), ou com qualquer outra distribuição, respectivamente. Muitas vezes não se especifica **y** e **z**, assumido-se que a capacidade do sistema é ilimitada e que a disciplina é FIFO.

Exemplos: **M/M/2/10/FIFO** (terá uma distribuição do intervalo de tempo entre chegadas consecutivas e uma distribuição da duração do serviço exponenciais, dois servidores, um limite máximo de 10 clientes no

interior do sistema e os clientes serão atendidos por ordem de chegada).

**M/D/1** (processo de chegadas com uma distribuição do intervalo de tempo entre chegadas consecutivas exponencial, e uma duração determinística do serviço, um servidor, assumindo-se que o sistema tem uma capacidade ilimitada e que a disciplina será FIFO).

Consideremos dois exemplos de diferentes sistemas de filas de espera e identifiquemos as suas características:

◆ Os visitantes chegam ao átrio de entrada da Torre Panorâmica, onde poderão estar até 100 pessoas, aguardando que o único elevador disponível (com uma lotação de 20 pessoas) chegue para as levar ao miradouro panorâmico.

Assim, temos um sistema com capacidade limitada (100 pessoas), em que os clientes são os visitantes, com um único servidor (o elevador) e com uma dimensão de serviço igual a 20 (a lotação do elevador). Supõe-se que a disciplina da fila será FIFO.

◆ Numa fábrica de têxteis existem 15 teares que, quando se avariam, são reparados por dois técnicos de manutenção. Sabe-se que o intervalo de tempo entre duas avarias consecutivas se pode considerar com distribuição exponencial de média 5 horas e que a reparação de cada tear avariado tem uma duração que se pode considerar com distribuição exponencial de média 1 hora.

Parece aceitável assumir-se que o serviço será feito por ordem de ocorrência das avarias, ou seja, a disciplina da fila será FIFO. Assumindo que todas as máquinas avariadas serão reparadas, não há limitação na capacidade do sistema (no entanto, não será possível ter-se mais do que 15 máquinas avariadas), pelo que teremos um sistema M/M/2/15/FIFO alimentado por uma fonte com dimensão finita (15), já que os teares avariados serão os clientes. Os dois servidores são os técnicos de manutenção.

#### Exercício:

Numa olaria trabalham dois artesãos – um deles na produção das peças propriamente ditas, e o outro na sua decoração. As peças são fabricadas uma a uma, chegando ao artesão encarregado da decoração a um ritmo que se pode considerar constante de uma peça por cada 30 minutos. A duração da decoração de cada peça pode também ser assumida constante e igual a 45 minutos. O artesão decorador começa sempre pela última peça que acaba de receber da produção.

As actividades na olaria são iniciadas às 8:30 horas e a produção é interrompida das 12:30 às 13:30 e a decoração é interrompida das 12:45 às 13:45 para almoço dos artesãos. A produção diária termina às 15:30 horas e o artesão que se dedica à decoração mantém-se a trabalhar para escoar todas as peças produzidas nesse dia, pelo que nos inícios das manhãs não há peças a aguardar a decoração.

Simule manualmente o funcionamento do sector de decoração, determinando o valor médio de peças que aguardam a sua decoração durante a manhã (8:30 - 12:45 horas). Determine ainda a que horas o artesão decorador termina as suas actividades.

Pode-se considerar que o sector de decoração corresponde a um sistema D/D/1 com um tempo entre chegadas consecutivas igual a 30 minutos e uma duração de serviço igual a 45 minutos. As peças a decorar são os clientes e o artesão decorador é o servidor. A disciplina da fila de espera é LIFO, ou seja, atendimento por ordem inversa à da chegada.

No quadro seguinte procede-se à simulação manual do sistema.

T (minutos)	Chegada de cliente	Atendimento de cliente	Fila de espera
8:30	---	---	---
9:00	nº 1	nº 1	---
9:30	nº 2	nº 1	nº 2
9:45	---	nº 2	---
10:00	nº 3	nº 2	nº 3
10:30	nº 4	nº 4	nº 3
11:00	nº 5	nº 4	nº 3, nº 5
11:15	---	nº 5	nº 3
11:30	nº 6	nº 5	nº 3, nº 6
12:00	nº 7	nº 7	nº 3, nº 6
12:30	nº 8	nº 7	nº 3, nº 6, nº 8
12:45	---	---	nº 3, nº 6, nº 8
13:45	---	nº 8	nº 3, nº 6
14:00	nº 9	nº 8	nº 3, nº 6, nº 9
14:30	nº 10	nº 10	nº 3, nº 6, nº 9
15:00	nº 11	nº 10	nº 3, nº 6, nº 9, nº 11
15:15	---	nº 11	nº 3, nº 6, nº 9
15:30	nº 12	nº 11	nº 3, nº 6, nº 9, nº 12
16:00	---	nº 12	nº 3, nº 6, nº 9
16:45	---	nº 9	nº 3, nº 6
17:00	---	nº 6	nº 3
17:45	---	nº 3	---
18:30	---	---	---

Durante a manhã (8:30 – 12:45), há um período de 75 minutos sem peças a aguardar decoração, há 90 minutos com uma peça em espera, 75 minutos com duas peças em espera, e 15 minutos com três peças em espera. Assim, o número médio de peças a aguardar a decoração durante a manhã é igual a  $( 0 \cdot 75 + 1 \cdot 90 + 2 \cdot 75 + 3 \cdot 15 ) / 255 \approx 1,12$  peças.

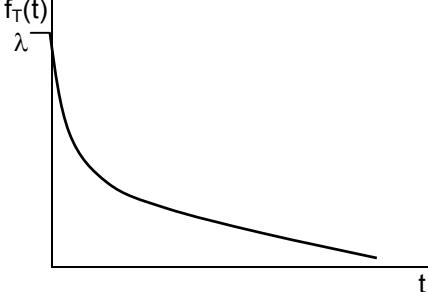
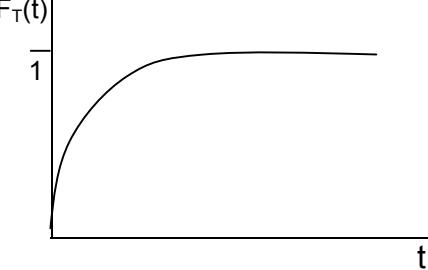
O artesão encarregado da decoração das peças termina a sua actividade às 18:30, ficando prontas 12 peças por dia.

Ruy Gossia

## A DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

A distribuição exponencial é particularmente importante na caracterização dos sistemas de Filas de Espera, nomeadamente para descrever os intervalos de tempo entre chegadas consecutivas e as durações de serviço. Recordemos, então, algumas características desta distribuição:

Seja  $T$  uma variável aleatória com distribuição Exponencial Negativa, com parâmetro  $\lambda$ , isto é,  $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ .

<b>Função densidade de probabilidade:</b> $f_T(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	
<b>Função de distribuição acumulada:</b> $F_T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \end{cases}$	
$\mu = \text{Valor Médio} = 1 / \lambda ; \sigma = \text{Desvio Padrão} = \sqrt{1 / \lambda} ; \gamma_1 = \text{Coef. Assim.} = +2$	

**Propriedade 1:** A função densidade de probabilidade da distribuição Exponencial é estritamente decrescente (para  $t \geq 0$ ).

Como consequência directa desta propriedade, poderemos escrever

$$T \sim \text{Exponencial}, \quad P(0 \leq T \leq \mu) > P(\mu \leq T \leq 2\mu) > P(2\mu \leq T \leq 3\mu).$$

Com efeito,  $P(0 \leq T \leq \mu) = P(T \leq \mu) = F_T(\mu) = 1 - e^{-\lambda\mu} = 1 - e^{-1} \approx 63,2\%$  (Ou seja, grande parte dos valores tomados por uma variável aleatória com distribuição Exponencial Negativa são inferiores ao respectivo valor médio).

$P(\mu \leq T \leq 2\mu) = F_T(2\mu) - F_T(\mu) \approx 23,3\%$  (De notar que, por outro lado, só poucos valores são ‘elevados’: por exemplo, maiores do que o dobro do valor médio  $P(T > 2\mu) = 1 - F_T(2\mu) = 1 - (1 - e^{-2\lambda\mu}) = e^{-2} \approx 13,5\%$ ).

$$P(2\mu \leq T \leq 3\mu) = F_T(3\mu) - F_T(2\mu) \approx 8,6\%$$

Assim, se assumirmos que os intervalos de tempo entre chegadas consecutivas se distribuem exponencialmente, estaremos a assumir que a maior parte desses intervalos de tempo serão curtos, pelo que se irão formando filas de espera; só esporadicamente um intervalo de tempo será 'elevado', permitindo uma eventual regularização do sistema.

Se assumirmos que as durações do serviço (atendimento) se distribuem exponencialmente, estaremos a admitir que a maior parte dos clientes será atendida 'rapidamente' (mais rigorosamente, com durações de serviço inferiores à duração média), e que apenas um baixo número de clientes originarão durações de atendimento elevadas. Esta hipótese parece aceitável para situações em que o atendimento a diferentes clientes pode originar tarefas distintas, mas é menos adequada para situações em que o serviço a ser prestado a todos os clientes seja *idêntico*.

**Propriedade 2: A distribuição Exponencial não tem memória (Propriedade Markoviana).**

$$T \sim \text{Exponencial}, \quad P(T \leq a + b | T > a) = P(T \leq b)$$

Esta propriedade significa, quando  $T$  representa a distribuição dos intervalos de tempo entre chegadas consecutivas, que o intervalo de tempo até à próxima chegada é independente do instante que decorreu desde a última chegada – o que parece aceitável para a generalidade dos processos de chegadas dos clientes. É por este motivo que se diz que a **Distribuição Exponencial não tem memória**.

**Propriedade 3: O mínimo de várias variáveis aleatórias independentes com distribuição Exponencial é uma variável aleatória com distribuição Exponencial.**

Sejam  $T_1, T_2, \dots, T_n$  variáveis aleatórias independentes com distribuição Exponencial, de parâmetros, respectivamente, iguais a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  e

$$U = \text{mínimo} \{ T_1, T_2, \dots, T_n \}$$

Prova-se que  $U \sim \text{Exponencial}(\lambda)$ , com  $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ , ou seja, o mínimo de  $n$  v.a. Exponenciais é ainda Exponencial com parâmetro igual à soma dos parâmetros das  $n$  v.a..

Esta propriedade tem várias implicações:

i) supondo que há diferentes tipos de clientes, cada um dos quais tem um processo de chegadas com distribuição Exponencial com um parâmetro específico, pode concluir-se que o processo de chegadas *agregado*, correspondente aos vários tipos de clientes, ainda é descrito por uma distribuição Exponencial, com parâmetro igual à soma dos parâmetros *individuais*.

ii) se se tiver  $n$  servidores a assegurar o atendimento dos clientes, todos assegurando uma duração de serviço com distribuição Exponencial de parâmetro  $\mu$ , num dado instante, o tempo necessário para o próximo final de serviço, de qualquer dos  $n$  servidores, terá distribuição Exponencial com parâmetro  $(n.\mu)$ . Assim, o sistema comporta-se como se tivesse um único servidor, com duração de serviço com distribuição Exponencial de parâmetro  $(n.\mu)$ .

**Esta propriedade muito útil no estudo dos modelos com múltiplos servidores.**

**Propriedade 4:** A distribuição Exponencial está relacionada com a distribuição de Poisson.

Se o intervalo de tempo entre chegadas consecutivas tiver distribuição Exponencial, com parâmetro  $\lambda$ , então o número de chegadas por unidade de tempo  $t$  tem uma distribuição de Poisson, com parâmetro  $m = \lambda t$ . Refira-se, desde já, que o parâmetro  $m$  será igual ao valor médio da distribuição de Poisson.

$\lambda$  representa a taxa média de ocorrências

Se para um processo de ocorrências, a distribuição do intervalo de tempo entre ocorrências consecutivas for Exponencial, e se os sucessivos intervalos de tempo entre ocorrências consecutivas forem independentes entre si, estaremos perante um **Processo de Poisson**.

A relação entre a distribuição Exponencial e a distribuição de Poisson é particularmente útil para se avaliar o *número de atendimentos efectuados* num dado intervalo de tempo  $t$ , admitindo que a duração do atendimento tem distribuição Exponencial com parâmetro  $\mu$ . Assim, o número de atendimentos efectuados por um servidor no intervalo de tempo  $t$  pode caracterizar-se com uma distribuição de Poisson de média  $m = \mu t$ . No caso de termos um atendimento efectuado por  $n$  servidores, a distribuição de Poisson passará a ter média  $m = n \mu t$ .

**Propriedade 5:** Na distribuição Exponencial de parâmetro  $\lambda$ , para todos os valores positivos de  $t$ , verifica-se que  $P(T \leq t + \Delta t | T > t) \approx \lambda \Delta t$ , para pequenos  $\Delta t$ .

Se continuarmos a interpretar  $T$  como o intervalo de tempo que decorreu desde o último acontecimento (chegada, ou final de serviço), esta propriedade indica-nos que, qualquer que seja o tempo que já decorreu, a probabilidade de ocorrência de um novo acontecimento no próximo pequeno intervalo  $\Delta t$  é proporcional a  $\Delta t$ , sendo a constante de proporcionalidade  $\lambda$  (a taxa de ocorrências). De notar que o número esperado de ocorrências no intervalo  $\Delta t$  é exactamente igual a  $\lambda \cdot \Delta t$ . A probabilidade de ocorrência, no entanto, pode diferir ligeiramente deste valor já que existe uma (baixíssima) probabilidade de que *mais do que um* acontecimento ocorra neste pequeno intervalo de tempo ...

**Propriedade 6:** A distribuição Exponencial não é afectada pela agregação, ou desagregação.

Imaginemos que a um sistema chegam 3 tipos de clientes, segundo processos de Poisson independentes, com taxas de chegada  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Para descrevermos o processo geral de chegadas dos clientes, poderemos *agregar* estes três processos num único processo de Poisson, com taxa de chegada  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ . Inversamente, se tivermos um processo de chegadas Poissoniano, com taxa de chegadas  $\lambda$  e, se existir uma probabilidade fixa de cada cliente pertencer a um determinado tipo (por exemplo, com 40 % de probabilidade ser um cliente de tipo A e com 60 % de probabilidade um cliente de tipo B), poderemos *desagregar* o processo inicial em vários processos autónomos, também de Poisson, associados aos vários tipos de clientes (no nosso exemplo, com taxas de chegada, respectivamente iguais a  $\lambda_A = 0,4 \cdot \lambda$  e  $\lambda_B = 0,6 \cdot \lambda$ ).

### Exercício:

Admita que o processo de chegadas de clientes a uma loja pode ser considerado um Processo de Poisson, com uma taxa de 5 chegadas por minuto. Caracterize a distribuição do intervalo de tempo entre duas chegadas consecutivas e a distribuição do número de chegadas por minuto.

Considerando o segundo como a unidade de tempo, o intervalo de tempo entre duas chegadas consecutivas poderá ser descrito por uma variável Exponencial de média 12 segundos ( $= 60 / 5$ ), isto é com parâmetro  $\lambda = 1/12$ . O número de chegadas por minuto poderá ser descrito por uma distribuição de Poisson com parâmetro  $m = \lambda t = (1/12) 60 = 5$ .

Ruy Costa

Finalmente, recordemos que a soma de  $k$  variáveis aleatórias, independentes e identicamente distribuídas, com distribuição Exponencial ( $\lambda$ ), é uma variável aleatória Erlang- $K$  (Gama). Pelo Teorema do Limite Central, se  $k$  for muito elevado, a distribuição Erlang- $k$  tenderá para a distribuição Normal.

Sejam  $X_i$  v.a. i.i.d,  $X_i \sim \text{Exponencial}(\lambda)$ ,

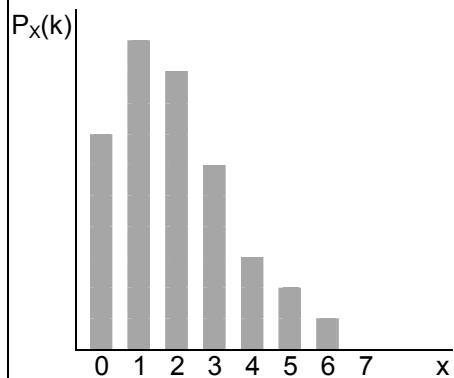
$$T \sim (X_1 + X_2 + \dots + X_k) \sim \text{Erlang-}k(\lambda)$$

Como  $E[X] = 1/\lambda$  e  $\text{Var}[X] = 1/\lambda^2$ , é fácil constatar que  $E[T] = k/\lambda$  e  $\text{Var}[T] = k/\lambda^2$ .

Apresentemos agora, muito sumariamente, algumas características da **Distribuição de Poisson**. Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição de Poisson, com parâmetro  $m$ , isto é,  $X \sim \text{Poisson}(m)$ .

**Função de distribuição de probabilidade:**

$$P_X(k) = P(X = k) = e^{-m} m^k / k!, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$



$$\mu = \text{Valor Médio} = m \quad ; \quad \sigma^2 = \text{Variância} = m$$

A Distribuição de Poisson é uma das (poucas) distribuições estatísticas que goza da **aditividade**, isto é, a soma de variáveis aleatórias independentes com distribuição de Poisson é ainda uma variável aleatória de Poisson (com parâmetro igual à soma dos parâmetros das variáveis que foram somadas).

Por outro lado, dado o Teorema do Limite Central (a soma de  $n$  variáveis independentes e identicamente distribuídas tende para a distribuição Normal, quando  $n$  se torna elevado), podemos aproximar a Distribuição de Poisson ( $m$ ) da Distribuição Normal (com valor médio e variância iguais a  $m$ ), quando  $m$  é elevado (em termos práticos  $m$  maior do que 20). Esta aproximação permite efectuar o cálculo de probabilidades com maior facilidade ... No entanto, há que ter em atenção o facto

de uma variável aleatória com distribuição de Poisson ser discreta, enquanto que a distribuição Normal descreve uma variável aleatória contínua ... e fazer a chamada **correcção de continuidade** ... (Remete-se o leitor mais esquecido para um compêndio de Estatística...).

**Exercício FE01**

**Exercício FE02**

## O PROCESSO DE NASCIMENTO E MORTE

A maior parte dos modelos elementares de filas de espera baseia-se no **processo de nascimento e morte**. No contexto das filas de espera, um *nascimento* corresponde à chegada de um novo cliente e uma *morte* corresponde à partida de um cliente.

O **estado** do sistema no instante  $t$  é o número de clientes no sistema, denotado por  $N(t)$ . Um **processo de nascimento e morte** obedece a três hipóteses-base:

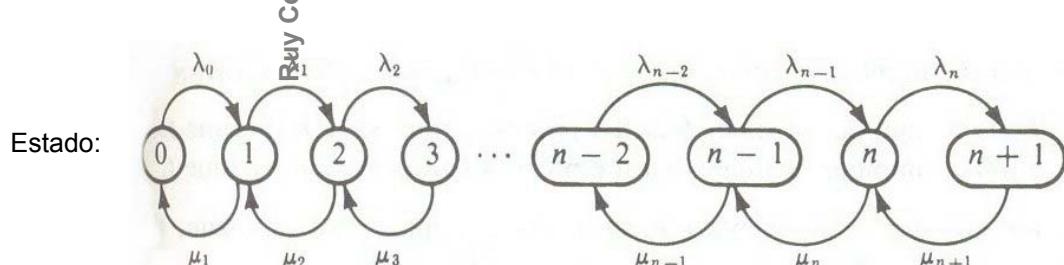
**Hip.1:** Dado  $N(t) = n$ , a distribuição de probabilidade do tempo *restante* até ao próximo **nascimento** (chegada) é *Exponencial* com parâmetro  $\lambda_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

**Hip.2:** Dado  $N(t) = n$ , a distribuição de probabilidade do tempo *restante* até à próxima **morte** (final de atendimento) é *Exponencial* com parâmetro  $\mu_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

**Hip.3:** Em cada instante só pode ocorrer ou um nascimento, ou uma morte.

As hipóteses 1 e 2 tornam o **processo de nascimento e morte** um tipo particular de Cadeias de Markov contínuas, o que facilita o tratamento das Filas de Espera que assim podem ser descritas. A hipótese 3 simplifica adicionalmente a análise.

Na figura seguinte esquematiza-se o **diagrama de transição** correspondente ao processo de nascimento e morte:



$\lambda_n$ : taxa média de chegadas (nº esperado de chegadas por unidade de tempo) de novos clientes quando  $n$  clientes estão no sistema.

$\mu_n$ : taxa média de serviço *global* \* (nº esperado de atendimentos completados por unidade de tempo) quando  $n$  clientes estão no sistema.

[\* *global* ⇔ taxa combinada relativa aos servidores ocupados]

As setas no diagrama representam as únicas transições possíveis no estado do sistema e os valores inscritos por cima, ou por baixo, de cada seta representam a respectiva taxa média para essa transição.

Depois de o sistema ter atingido o **estado de equilíbrio** (se tal for possível), o diagrama de transição facilita a determinação de resultados relevantes.

Há um **princípio fundamental “taxa de entrada = taxa de saída”**, que estipula que, **para qualquer estado do sistema ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )**, a **taxa média de entradas é igual à taxa média de saídas**. Este princípio permitirá escrever, para *todos* os estados, a respectiva **equação de equilíbrio**, em função das incógnitas  $P_n$  (probabilidades). A resolução do sistema de equações permitirá determinar o valor dessas probabilidades.

Ilustremos a utilidade do diagrama de transição para determinarmos as equações relativas aos estados 0 e 1:

Dado que só se pode entrar no estado 0, a partir do estado 1, a taxa média de entrada no estado 0 depende apenas da taxa média de entrada no estado 0 sabendo-se que o sistema está no estado 1,  $\mu_1$ , e da probabilidade de ocorrência do estado 1,  $P_1$ , sendo igual a  $\mu_1 \cdot P_1$ . Por outro lado, a taxa média de saída do estado 0 será igual a  $\lambda_0 \cdot P_0$ . Assim, relativamente ao estado 0, poderemos escrever:

$$\mu_1 \cdot P_1 = \lambda_0 \cdot P_0$$

A entrada no estado 1 pode dar-se a partir do estado 0 (dependendo da taxa  $\lambda_0$  e da probabilidade de ocorrência do estado 0,  $P_0$ ), ou a partir do estado 2 (dependendo da taxa  $\mu_2$  e da probabilidade  $P_2$ ), sendo, assim, a taxa média de entrada no estado 1 igual a  $\lambda_0 \cdot P_0 + \mu_2 \cdot P_2$ . Por outro lado, a saída do estado 1 pode dar-se para o estado 0 (dependendo da taxa  $\mu_1$  e da probabilidade  $P_1$ ), ou para o estado 2 (dependendo da taxa  $\lambda_1$  e da probabilidade  $P_1$ ), sendo, assim, a taxa média de saída do estado 1 igual a  $\mu_1 \cdot P_1 + \lambda_1 \cdot P_1$ . Assim, relativamente ao estado 1, poderemos escrever:

$$\lambda_0 \cdot P_0 + \mu_2 \cdot P_2 = \mu_1 \cdot P_1 + \lambda_1 \cdot P_1$$

Raciocinando analogamente poderemos determinar as equações de equilíbrio para o processo de nascimento e morte:

Estado	Equação de equilíbrio
0	$\mu_1 \cdot P_1 = \lambda_0 \cdot P_0$
1	$\lambda_0 \cdot P_0 + \mu_2 \cdot P_2 = (\lambda_1 + \mu_1) \cdot P_1$
2	$\lambda_1 \cdot P_1 + \mu_3 \cdot P_3 = (\lambda_2 + \mu_2) \cdot P_1$
...	...
n	$\lambda_{n-1} \cdot P_{n-1} + \mu_{n+1} \cdot P_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) \cdot P_n$
...	...

Como se pode observar, temos uma variável “a mais” em relação ao número de equações. Assim, dever-se-á resolver este sistema em função de uma das variáveis (em geral,  $P_0$ ).

Resolvendo sequencialmente, e a partir da primeira equação, obtemos:

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} P_0$$

...

$$P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} P_0$$

Para simplificar a notação, poderemos denotar, para  $n = 1, 2, \dots$ .

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$$

Assim, as probabilidades de equilíbrio são dadas por:

$$P_n = C_n P_0, \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

Como o somatório das probabilidades tem que igualar 1, obtém-se:

$$P_0 = 1 / \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \right)$$

Desde já poderemos avançar alguns resultados gerais aplicáveis a sistemas de filas de espera, baseados no processo de nascimento e morte:

- o número médio de clientes no sistema será:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n$$

Se tivermos um sistema com  $s$  servidores, haverá  $s$  clientes que estarão a ser atendidos, pelo que

- o número médio de clientes a aguardar atendimento na fila (comprimento médio da fila de espera) será:

$$L_q = \sum_{n=s}^{\infty} (n - s) \cdot P_n$$

- o tempo médio no sistema, por cliente (incluindo a duração do atendimento) será:

$$W = L / \bar{\lambda} \quad \text{Fórmula de Little}$$

$\bar{\lambda}$  designa a taxa média de chegadas, a longo prazo,

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cdot P_n$$

- o **tempo médio a aguardar o atendimento, por cliente** (na fila de espera - exclui a duração do atendimento) será:

$$W_q = L_q / \bar{\lambda}$$

Embora algumas das expressões anteriores envolvam somatórios com um número infinito de termos, muitas vezes esses somatórios podem ser *resolvidos* analiticamente; noutros casos, poderão ser aproximados numericamente. De notar ainda que as expressões indicadas assumem que, com os valores assumidos pelos parâmetros  $\lambda_n$  e  $\mu_n$ , se possa atingir o estado de equilíbrio – tal é sempre o caso quando existir um número finito  $n$  ( $n > 0$ ) de estados; tal é sempre o caso quando  $\rho = \lambda / ( s \mu ) < 1$ ; tal não será o caso se  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n = \infty$ .

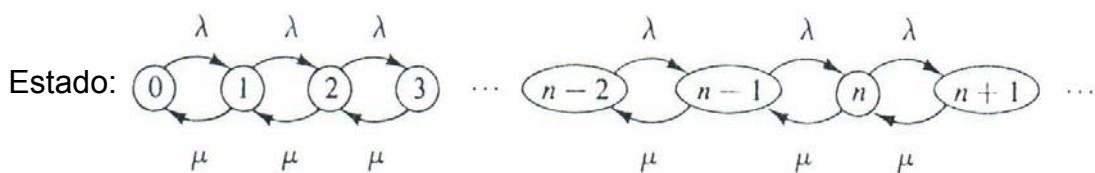
## **MODELOS DE FILAS DE ESPERA BASEADOS NO PROCESSO DE NASCIMENTO E MORTE (modelos com distribuições Exponenciais)**

Os processos de nascimento e morte servem de base para modelar vários sistemas de Filas de Espera. Estes processos assumem um processo de chegadas Poissoniano (distribuição Exponencial para modelar o tempo *restante* até ao próximo nascimento, i.e., chegada) e um tempo de serviço (o tempo *restante* até à próxima morte, i.e., final de atendimento) também Exponencial. Estes modelos diferem essencialmente nas hipóteses assumidas para  $n$ ,  $\lambda_n$  e  $\mu_n$ .

Comecemos por considerar o

- **Modelo M/M/1 com população infinita e fila ilimitada**

Neste modelo assume-se que existe um único servidor, que os intervalos de tempo entre chegadas consecutivas são independentes e identicamente distribuídos, com distribuição Exponencial ( $\lambda$ ), e que as durações dos serviços são independentes e identicamente distribuídas, com distribuição Exponencial ( $\mu$ ). Assim, neste caso, teremos  $\lambda_n = \lambda$  (**taxa média de chegada** dos clientes), para  $n = 0, 1, 2, \dots$  e  $\mu_n = \mu$  (**taxa média de atendimento** dos clientes), para  $n = 1, 2, \dots$ . Assumiremos que a fila tem capacidade ilimitada que é *alimentada* por uma população infinita e que a disciplina praticada será FIFO. O **diagrama de transição** resultante será:



A partir das referidas taxas médias poderemos definir o **fator de utilização**  $\rho$  (por vezes designado por **intensidade de tráfego**):

$$\rho = \lambda / \mu$$

O factor de utilização representa o número esperado de chegadas durante um serviço médio. Assim, se  $\rho > 1$ , o ritmo das chegadas ultrapassa a capacidade de atendimento do servidor, pelo que explodirá, i.e., não se atingirá uma ‘situação de equilíbrio’. **Se  $\rho < 1$  o sistema poderá atingir uma ‘situação de equilíbrio’**, ou seja o ritmo a que decorre o atendimento dos clientes é suficiente para dar vazão aos clientes que vão chegando.

Recordemos que  $\lambda$  representa a taxa de chegadas, e que estamos a assumir que é constante e independente do número de clientes já no sistema. As **Fórmulas de Little** permitem-nos relacionar  $L$  com  $W$  e  $L_a$  com  $W_a$ :

$$L = \lambda W ; \quad L_g = \lambda W_g$$

De notar que se a taxa de chegada depender do estado do sistema, as Fórmulas de Little ainda são válidas desde que substituamos, nas expressões apresentadas,  $\lambda$  por  $\bar{\lambda}$  (isto é, a taxa média de chegadas).

De notar que, para este modelo,  $C_n = (\lambda / \mu)^n = \rho^n$ . Assim, a probabilidade de estarem exactamente  $n$  pessoas no sistema,  $P_n$ , será dada por:

$$P_n = \rho^n \cdot P_0 = \rho^n (1 - \rho)$$

A **taxa de desocupação** do sistema,  $P_0$ , isto é, a probabilidade de não haver clientes no sistema:

$$P_0 = 1 - \rho$$

A probabilidade de estarem mais do que  $K$  pessoas no sistema será dada por:

$$P(n > K) = \rho^{K+1}$$

O tempo médio de permanência de um cliente no sistema ( $W$ ) e o tempo médio de espera na fila ( $W_q$ ) podem ser relacionados facilmente se notarmos que  $1/\mu$  corresponde ao tempo médio gasto no serviço:

$$W = W_q + 1 / \mu$$

Tendo em conta a expressão anterior e as Fórmulas de Little, poderemos escrever a relação entre o número médio de clientes no sistema ( $L$ ), o comprimento médio da fila ( $L_q$ ):

$$L = L_q + \lambda / \mu = L_q + \rho$$

De notar que, num sistema M/M/1,  $L_q$  não é igual a  $L - 1$ , mas sim a  $L - \rho$  !

A partir das expressões apresentadas poderemos deduzir os seguintes resultados:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} P_n = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

(cont.)

(continuação)

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_q = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

Quanto à probabilidade de um cliente estar mais do que t unidades de tempo no sistema, ou na fila em espera ( $P(W > t)$ , ou  $P(W_q > t)$ , respectivamente), poderemos obter:

$$P(W > t) = e^{-\mu(1-\rho)t} \text{ para } t \geq 0$$

$$P(W_q > t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t} \text{ para } t \geq 0$$

Aproveitamos para recordar que a **taxa de desocupação** do sistema,  $P_0$ , representa a probabilidade de não haver clientes no sistema, o que coincide com a probabilidade de um cliente não ter de esperar na fila, pois um cliente só é atendido assim que chega se não houver clientes no sistema. Assim,

$$P_0 = 1 - \rho = P(W_q = 0)$$

Em seguida, sintetizaremos os resultados válidos para um sistema M/M/1, alimentado por uma população infinita e sem limitações quanto ao comprimento máximo da fila de espera:

## Sistema M/M/1, População = $\infty$ ; Fila máxima = $\infty$

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de  $\lambda$  clientes por unidade de tempo.

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa – taxa de atendimento de  $\mu$  clientes por unidade de tempo (pelo **único servidor**).

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **ocupação**  $\rho = \lambda / \mu$  ( $\rho < 1$ )

Taxa de **desocupação** =  $1 - \rho = P_0 = P(W_q = 0)$

$$L = L_q + \lambda / \mu$$

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W = W_q + 1 / \mu$$

$$W = L / \lambda = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_q = L_q / \lambda = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

$$P_0 = 1 - \rho = P(W_q = 0)$$

$$P_n = \rho^n P_0 = \rho^n (1 - \rho)$$

$$P(n > k) = \rho^{k+1}$$

$$P(W > t) = e^{-\mu(1-\rho)t} = e^{-t/W} \quad \text{para } t \geq 0$$

$$P(W_q > t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t} = \rho e^{-t/W} \quad \text{para } t \geq 0$$

Façamos agora um exercício de aplicação:

**Exercício:**

“O Docinho” é uma pequena pastelaria, sem lugares sentados, onde são vendidas especialidades regionais, pela sua única empregada. Pode-se considerar que as chegadas constituem um Processo de Poisson, com uma taxa de 15 chegadas por hora, estimando-se que a duração do atendimento de um cliente se possa considerar exponencialmente distribuído, com valor médio igual a 3 minutos.

1 - Determine:

- a) a probabilidade de estar apenas um cliente na pastelaria;
- b) a probabilidade de estarem, pelo menos, três clientes na pastelaria;
- c) o comprimento médio da fila de espera;
- d) o tempo médio de espera na fila;
- e) a probabilidade de que um cliente esteja mais do que 5 minutos na pastelaria;
- f) a probabilidade de que um cliente esteja mais do que 3 minutos à espera para começar a ser atendido.

2 – O proprietário da “O Docinho” está convencido de que seria possível diminuir o tempo médio de espera na fila para 6 minutos se a sua empregada aumentasse o ritmo de trabalho, diminuindo a duração média do atendimento de um cliente. Comente.

1 -  $\lambda = 15 \text{ h}^{-1} = 15/60 \text{ min}^{-1}$ ;  $\mu = 1/3 \text{ min}^{-1}$ ;  $\rho = \lambda / \mu = 3/4$  ( $\rho < 1 \checkmark$ )

- a)  $P_1 = \rho (1 - \rho) = 3/4 \cdot 1/4 = 3/16 \approx 19\%$
- b)  $P_0 = 1 - \rho = 1/4$ ;  $P_2 = \rho^2 (1 - \rho) = 9/16 \cdot 1/4 = 9/64$ . Assim, a probabilidade pedida é igual a  $1 - P_0 - P_1 - P_2 = 27/64 \approx 42\%$
- c)  $L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = 36/16 = 2,25 \text{ clientes}$
- d)  $W_q = L_q / \lambda = 9 \text{ min}$
- e)  $P(W > 5) = e^{-\mu(1-\rho)5} \approx 66\%$   
(ou,  $W = \frac{1}{\mu - \lambda} = 12 \text{ min} \rightarrow P(W > 5) = e^{-5/W} \approx 66\% \checkmark$ )
- f)  $P(W_q > 3) = \rho e^{-\mu(1-\rho)3} \approx 58\%$  (ou,  $P(W_q > 3) = \rho e^{-3/W} \approx 58\% \checkmark$ )

2 -  $\lambda = 15/60 = 1/4 \text{ min}^{-1}$ ;  $W_q = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 6 \text{ min} \Leftrightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \mu - \frac{1}{24} = 0$

$\Leftrightarrow \mu \approx 0,729 \text{ min}^{-1}$

$\Leftrightarrow$  Duração média do atendimento de 1 cliente =  $1 / \mu \approx 1,37 \text{ min}$ .

**Conclusão:** Atingir este objectivo implica reduzir a duração média do serviço de 3,00 para 1,37 min ! Muito provavelmente, tal será difícil de atingir com uma única empregada!

**Exercício FE03**

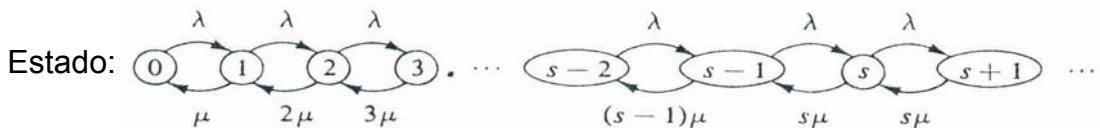
E se, no exercício d' "O Docinho", tivéssemos duas empregadas, em vez de apenas uma ? O que aconteceria ? Para podermos responder a esta questão, apresentaremos em seguida o

- **Modelo M/M/S com população infinita e fila ilimitada**

Agora temos  $S$  servidores, alimentado por uma população infinita e sem limitações quanto ao comprimento máximo da fila de espera. De notar que, se a taxa média de chegadas de clientes ao sistema continua a ser  $\lambda$ , independentemente do estado, a taxa média de serviço (que se assume ser  $\mu$  por cada um dos  $S$  servidores), dependerá do estado do sistema:

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 1, 2, \dots, S \\ S\mu & ; n \geq S + 1 \end{cases}$$

O diagrama de transição resultante será:



Apresentaremos, em seguida, os resultados válidos para um sistema M/M/S, alimentado por uma população infinita e sem limitações quanto ao comprimento máximo da fila de espera:

## Sistema M/M/S, População = $\infty$ ; Fila máxima = $\infty$

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa média de chegadas de  $\lambda$  clientes por unidade de tempo.

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa com taxa média de  $\mu$  clientes por unidade de tempo por cada um dos **S servidores**.

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 1, 2, \dots, S \\ S\mu & ; n \geq S+1 \end{cases}$$

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **ocupação**  $\rho = \lambda / (S\mu)$  ( $\rho < 1$ )

Taxa de **desocupação** =  $1 - \rho$

$$L = L_q + \lambda / \mu$$

$$L_q = \frac{S^S \rho^{S+1} P_0}{S!(1-\rho)^2}$$

$$W = W_q + 1 / \mu = L / \lambda$$

$$W_q = L_q / \lambda$$

$$P_0 = \left[ \frac{S^S \rho^{S+1}}{S!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^S \frac{(S\rho)^n}{n!} \right]^{-1}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{(S\rho)^n}{n!} P_0 & ; n = 1, \dots, S \\ \frac{S^S \rho^n}{S!} P_0 & ; n \geq S+1, \end{cases}$$

$$P(W > t) = e^{-\mu t} \left[ 1 + \frac{(S\rho)^S P_0 (1 - e^{-\mu t(S-1-S\rho)})}{S!(1-\rho)(S-1-S\rho)} \right] \quad \text{para } t \geq 0$$

$$P(W_q > t) = \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)} e^{-S\mu t(1-\rho)} \quad \text{para } t \geq 0$$

$$P(W_q = 0) = 1 - \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)}$$

Façamos agora um exercício de aplicação:

**Exercício:**

Resolva a questão 1 do exercício d”O Docinho”, assumindo que há duas empregadas mantendo-se todas as outras características. Compare os resultados com os correspondentes quando há apenas uma empregada, comentando.

$$\lambda = 15 \text{ h}^{-1} = 15/60 \text{ min}^{-1}; \quad \mu = 1/3 \text{ min}^{-1};$$

$$S = 2; \quad \rho = \lambda / (S \mu) = 3/8 \quad (\rho < 1 \checkmark)$$

- a) a probabilidade de estar apenas um cliente na pastelaria

$$P_0 = \left[ \frac{S^S \rho^{S+1}}{S!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^S \frac{(S\rho)^n}{n!} \right]^{-1} = 0,45(45) \approx 45 \%$$

$$P_1 = \frac{(S\rho)^1}{1!} P_0 \approx 34 \% \quad (\text{Compare-se com o valor obtido no Ex.4: } 19 \%)$$

- b) a probabilidade de estarem, pelo menos, três clientes na pastelaria

$$P_0 \approx 45 \% ; \quad P_2 = \frac{(S\rho)^2}{2!} P_0 \approx 13 \% .$$

$$\text{Assim, } 1 - P_0 - P_1 - P_2 \approx 8 \% \quad (\text{Ex.4: } 42 \%)$$

De notar que se tivesse sido pedida a probabilidade de estarem exactamente três clientes na pastelaria,  $P_3$ , teríamos  $\frac{S^2 \rho^3}{S!} P_0$ , ou seja,  $P_3 \approx 4,8 \%$ .

RuyCossa

- c) o comprimento médio da fila de espera

$$L_q = \frac{S^S \rho^{S+1} P_0}{S!(1-\rho)^2} = 0,12 \text{ clientes} \quad (\text{Ex.4: } 2,25 \text{ clientes})$$

- d) o tempo médio na fila

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 0,48 \text{ min} \quad (\text{Ex.4: } 9,00 \text{ min})$$

- e) a probabilidade de que um cliente esteja mais do que 5 minutos na pastelaria

$$P(W > 5) = e^{-5\mu} \left[ 1 + \frac{(S\rho)^S P_0 (1 - e^{-5\mu(S-1-S\rho)})}{S!(1-\rho)(S-1-S\rho)} \right] \approx 5,3 \% \quad (\text{Ex.4: } 66 \%)$$

- f) a probabilidade de que um cliente esteja mais do que 3 minutos à espera para começar a ser atendido

$$P(W_q > 3) = \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)} e^{-3S\mu(1-\rho)} \approx 5,9 \% \quad (\text{Ex.4: } 58 \%)$$

**Comentário:** As diminuições esperadas do tempo médio de espera dos clientes e do comprimento médio da fila de espera (resultantes da introdução de uma segunda

empregada) são de tal modo significativas que indicam que duas empregadas (a tempo inteiro) talvez sejam de *mais* ...

#### **Exercício FE04**

E o que acontece se houver limitações físicas, que não permitem o desenvolvimento de uma fila de espera ilimitada ?

- **Modelo M/M/1/K com população infinita e fila limitada**

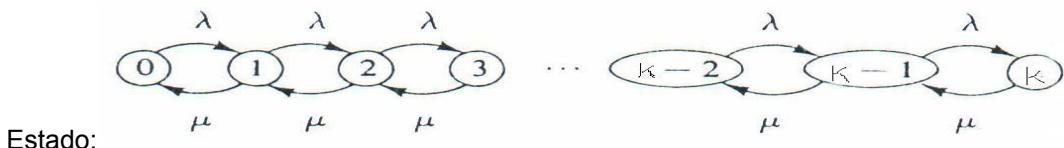
Consideremos que nas instalações onde decorre o serviço, não podem ser acomodados mais do que  $K$  clientes e, quando já estiverem  $K$  clientes no sistema e se verificar a chegada de um novo cliente, ser-lhe-á recusado o acesso ao sistema, i.e., trata-se de uma fila de espera com **capacidade finita**. De notar que os *potenciais* clientes com acesso vedado não poderão aguardar no exterior do sistema, para entrada posterior.

Rui Costa  
Neste caso a taxa média de entrada em cada estado será dependente do estado:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & ; n = 0, 1, \dots, K-1 \\ 0 & ; n \geq K \end{cases}$$

De notar que se se está a admitir que a capacidade do sistema é limitada a um máximo de  $K$  clientes, os estados serão  $0, 1, \dots, K-1, K$ .

O **diagrama de transição** resultante será:



Caracterizaremos, em seguida, o sistema M/M/1/K com capacidade finita, assumindo que a população é ilimitada.

## Sistema M/M/1/K, População = $\infty$ ; Fila máxima = K – 1

### Número máximo de clientes no sistema = K

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de  $\lambda$  clientes por unidade de tempo. A taxa de **entradas** no sistema será dependente do estado  $n$  do sistema (isto é, do número  $n$  de clientes no sistema):

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & ; n = 0, 1, \dots, K-1 \\ 0 & ; n \geq K \end{cases} ; \quad \bar{\lambda} = \lambda (1 - P_K)$$

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa – taxa de atendimento de  $\mu$  clientes por unidade de tempo (pelo **único servidor**).

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de pressão  $\rho = \lambda / \mu$

Taxa de ocupação =  $\bar{\lambda}/\mu$

$$\text{Taxa de desocupação} = 1 - \bar{\lambda}/\mu = P_0 = P(W_q = 0) = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}}$$

$$L = \begin{cases} \frac{\rho}{1 - \rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1 - \rho^{K+1}} & ; \rho \neq 1 \\ \frac{K}{2} & ; \rho = 1 \end{cases}$$

$$L_q = L - \bar{\lambda} / \mu$$

$$W = W_q + 1 / \mu$$

$$W = L / \bar{\lambda}$$

$$W_q = L_q / \bar{\lambda}$$

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}} = P(W_q = 0)$$

$$P_n = \begin{cases} \rho^n P_0 & ; \rho \neq 1 \wedge n \leq K \\ 1/(K+1) & ; \rho = 1 \wedge n \leq K \\ 0 & ; n > K \end{cases}$$

E agora um exercício de aplicação ...

### Exercício FE05

Em seguida, caracterizaremos o sistema M/M/S/K, com capacidade máxima para K clientes, S servidores, continuando-se a assumir que a população é ilimitada.

- **Modelo M/M/S/K com população infinita e fila limitada**

À semelhança do modelo anterior, não podem ser acomodados mais do que K clientes no sistema, i.e., trata-se de uma fila de espera com **capacidade finita** com S servidores.

Tal como no modelo anterior, a taxa média de entrada em cada estado será dependente do estado:

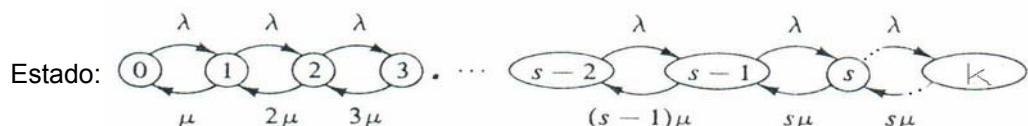
$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & ; n = 0, 1, \dots, K-1 \\ 0 & ; n \geq K \end{cases}$$

A diferença relativamente ao modelo anterior reside na existência de S servidores, o que fará com que a taxa média de saída de cada estado também seja dependente do estado (à semelhança do que aconteceu no modelo M/M/S):

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 1, 2, \dots, S \\ S\mu & ; n \geq S+1 \end{cases}$$

À semelhança do modelo M/M/1/K, os estados serão 0, 1, ..., K-1, K.

O **diagrama de transição** resultante será:



Caracterizemos, então, este modelo:

## Sistema M/M/S/K, População = $\infty$ ; Fila máxima = K – S

$S \leq K$ ; Nº máximo de clientes no sistema = K; Nº de servidores = S

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de  $\lambda$  clientes por unidade de tempo. A taxa de **entradas** de clientes no sistema será dependente do **estado**  $n$  do sistema (isto é, do número  $n$  de clientes no sistema):

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & ; n = 0, 1, \dots, K-1 \\ 0 & ; n \geq K \end{cases}; \quad \bar{\lambda} = \lambda (1 - P_K)$$

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa com taxa média de  $\mu$  clientes por unidade de tempo por cada um dos **S servidores**.

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 1, 2, \dots, S \\ S\mu & ; n \geq S+1 \end{cases}$$

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **pressão**  $\rho = \lambda / (S\mu)$

Taxa de **ocupação** =  $\bar{\lambda} / (S\mu)$        $\bar{\lambda} = \lambda (1 - P_K)$

Taxa de **desocupação** =  $1 - \bar{\lambda} / (S\mu)$

$$P_0 = \begin{cases} \left[ \frac{S^S \rho^{S+1} (1 - \rho^{K-S})}{S!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^S \frac{(S\rho)^n}{n!} \right]^{-1} & ; \rho \neq 1 \\ \left[ \frac{S^S}{S!} (K-S) + \sum_{n=0}^S \frac{S^n}{n!} \right]^{-1} & ; \rho = 1 \end{cases}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{(S\rho)^n}{n!} P_0 & ; n = 1, \dots, S \\ \frac{S^S \rho^n}{S!} P_0 & ; n = S+1, \dots, K \\ 0 & ; n \geq K+1 \end{cases}$$

$$P(W_q = 0) = \sum_{n=0}^{S-1} P_n$$

$$L_q = \frac{S^S \rho^{S+1} P_0}{S!(1-\rho)^2} [1 - \rho^{K-S} - (1-\rho)(K-S)\rho^{K-S}]$$

$$W_q = L_q / \bar{\lambda}$$

$$W = W_q + 1/\mu; \quad L = \bar{\lambda} \quad W = L_q + \bar{\lambda} / \mu$$

E agora um exercício de aplicação ...

### Exercício FE05

- **Modelo M/M/S/N com população finita e fila ilimitada**

Imagine que numa fábrica de têxteis existem 15 teares que, quando se avariam, são reparados por dois técnicos de manutenção. Sabe-se que o intervalo de tempo entre duas avarias consecutivas se pode considerar com distribuição exponencial e que a reparação de cada tear avariado tem uma duração que também se pode considerar com distribuição exponencial.

Trata-se de um sistema M/M/2/15 alimentado por uma **fonte com dimensão finita** (15), ou **população finita**, onde os clientes serão os teares avariados e os dois servidores serão os técnicos de manutenção.

Em algumas aplicações industriais, tal como no exemplo apresentado, é muito importante considerar uma nova extensão dos sistemas M/M/1 e M/M/S: a **população com dimensão finita**, isto é uma fonte que possa gerar, no máximo, N clientes. Trata-se dos sistemas M/M/1/N e M/M/S/N com fonte com dimensão finita.

Neste modelo, a taxa média de entrada em cada estado será dependente do estado:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda(N-n) & ; n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0 & ; n \geq N \end{cases}$$

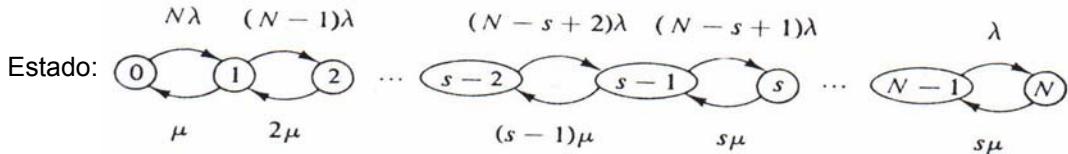
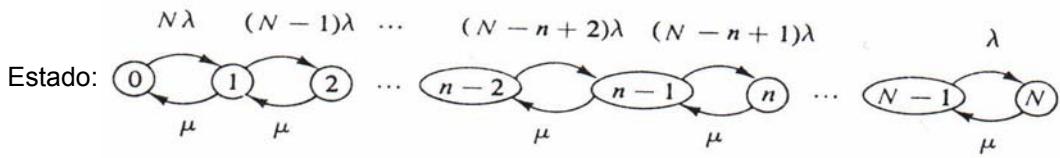
Se se estiver a admitir um único servidor, a taxa média de saída de cada estado será igual a  $\mu$ , para todos os estados; caso o sistema tenha S servidores, a taxa média de saída de cada estado será dependente do estado (como sucedia no modelo M/M/S):

Ruy Costa

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 1, 2, \dots, S \\ S\mu & ; n \geq S+1 \end{cases}$$

De notar que se a população é finita, com dimensão N, os estados serão 0, 1, ..., N-1, N.

Assim, os **diagramas de transição** correspondentes aos modelos M/M/1/N e M/M/S/N serão os seguintes:



Caracterizaremos, em seguida, o sistema M/M/S/N com fonte com dimensão finita, referindo alguma particularização decorrente da existência de um único servidor ( $S = 1$ ).

## Sistema M/M/S/N, População = N (Fila máxima = N - S)

$$S \leq N; \quad \text{Nº máximo de clientes no sistema} = N; \quad \text{Nº de servidores} = S$$

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de  $\lambda$  clientes por unidade de tempo. A taxa de **entradas** de clientes no sistema será dependente do estado  $n$  do sistema (isto é, do número  $n$  de clientes no sistema):

$$\text{Ruy} \quad \lambda_n = \begin{cases} \lambda(N-n) & ; n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0 & ; n \geq N \end{cases}; \quad \bar{\lambda} = \lambda(N-S)$$

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa com taxa média de  $\mu$  clientes por unidade de tempo por cada um dos **S servidores**.

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & ; n = 1, 2, \dots, S \\ S\mu & ; n \geq S+1 \end{cases}$$

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

$$\text{Taxa de ocupação} = \bar{\lambda} / (S\mu)$$

$$\text{Taxa de desocupação} = 1 - \bar{\lambda} / (S\mu)$$

$$P_0 = \left[ \sum_{n=0}^{S-1} \frac{N!}{(N-n)!n!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \sum_{n=S}^N \frac{N!}{(N-n)!S!S^{n-S}} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1}$$

Caso particular **S = 1**:

$$P_0 = \left[ \sum_{n=0}^N \frac{N!}{(N-n)!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right]^{-1} = \text{taxa de desocupação}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!n!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 & ; n = 1, \dots, S \\ \frac{N!}{(N-n)!S!S^{n-S}} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 & ; n = S+1, \dots, N \\ 0 & ; n \geq N+1 \end{cases}$$

Caso particular **S = 1**:

$$P_n = \begin{cases} \frac{N!}{(N-n)!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n P_0 & ; n = 1, \dots, N \\ 0 & ; n > N \end{cases}$$

$$P(W_q = 0) = \sum_{n=0}^{S-1} P_n$$

**continua**

continuação

### Sistema M/M/S/N, População = N (Fila máxima = N – S)

$$L_q = \sum_{n=0}^N (n - S) P_n$$

Caso particular S = 1:

$$L_q = N - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} (1 - P_0)$$

$$W_q = L_q / \bar{\lambda}$$

$$W = W_q + 1 / \mu ; L = \bar{\lambda} W = L_q + \bar{\lambda} / \mu$$

Desde já poderemos observar que, para N elevado, se torna praticamente incomportável determinar  $P_0$  e as restantes medidas de desempenho do sistema por cálculo manual !

Ruy Costa

E agora um exercício de aplicação ...

#### Exercício FE07

- **Modelo com taxa de chegada e/ou taxa de serviço dependente do estado**

Os modelos apresentados têm vindo a assumir uma taxa média de serviço constante, independente do número de clientes no sistema. No entanto, na realidade, quando os clientes são pessoas, muitas vezes o aumento do número de clientes no sistema vai pressionando o(s) servidor(es) que aumenta(m) a sua taxa média de serviço.

Analogamente, a taxa média de chegadas ao sistema pode não ser constante – os potenciais clientes ao verem o sistema com elevado número de clientes em espera, poderão optar por não entrar no sistema, fazendo com que a taxa média de chegadas seja, na realidade, decrescente com o número de clientes no sistema.

Ruy Costa

Descreveremos, em seguida, uma possível formulação destas situações, ainda a partir do processo de nascimento e morte. Por simplicidade, optaremos por fazê-lo **exclusivamente para o caso de um único servidor**, deixando ao leitor interessado na generalização a sugestão de uma consulta à Bibliografia.

Assumamos, então, que S = 1 e que

$$\mu_n = n^c \cdot \mu_1, \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

$n$  representa o número de clientes no sistema;  $\mu_1$  a taxa média de serviço, quando está apenas um cliente no sistema (situação sem pressão);  $\mu_n$  a taxa média de serviço, quando estão  $n$  clientes no sistema (situação de pressão); e  $c$  é uma constante positiva, o *coeficiente de pressão*, que indica o grau de influência que o número de clientes tem sobre a taxa de serviço. De notar que nos modelos anteriormente apresentados se assumiu implicitamente  $c = 0$ .

Se assumirmos, adicionalmente, que o processo de chegadas é Poissoniano com  $\lambda_n = \lambda$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , poderemos obter os coeficientes  $C_n$  correspondentes ao processo de nascimento e morte correspondente:

$$C_n = \frac{(\lambda / \mu_1)^n}{(n!)^c}, \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

Notemos que, desde que  $c > 0$ , se poderão atingir as condições de equilíbrio, pelo que poderão aplicar os resultados obtidos para o processo de nascimento e morte. Ainda que não exaustivamente, recordemos alguns desses resultados:

$$P_n = C_n P_0, \text{ para } n = 1, 2, \dots.$$

$$P_0 = 1 / \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \right)$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n$$

Infelizmente, neste modelo, não é possível obter expressões analíticas para os somatórios, que deverão ser determinados numericamente. Alguns livros apresentam alguns gráficos com a representação de algumas das relações, em função de alguns valores dos parâmetros envolvidos.

### Exercício FE08

No modelo apresentado, modelou-se a pressão sobre a taxa média de serviço. Mas, como se referiu, pode ser importante assumir uma situação de pressão sobre a taxa média de chegadas ao sistema. Tal pode ser modelado do modo seguinte:

$$\lambda_n = (n + 1)^{-b} \cdot \lambda_0, \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots$$

$n$ ,  $\lambda_0$ ,  $\lambda_n$  e  $b$  são definidos de modo análogo ao anteriormente referido. Se se assumir que a taxa média de serviço é constante,  $\mu_n = \mu$ , teremos.

$$C_n = \frac{(\lambda_0 / \mu)^n}{(n!)^b}, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Poderemos utilizar estes coeficientes  $C_n$  nos resultados já referidos para a situação de equilíbrio do processo de nascimento e morte.

### Exercício FE09

Um modelo mais geral permite uma modelação conjunta dos efeitos de pressão sobre as taxas médias de chegada e de serviço. Basta assumir-se conjuntamente:

$$\begin{aligned} \mu_n &= n^a \cdot \mu_1, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots \\ \lambda_n &= (n + 1)^{-b} \cdot \lambda_0, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

sendo  $a$  e  $b$  constantes de pressão definidas de modo análogo ao anteriormente referido. Ter-se-á, então

$$C_n = \frac{(\lambda_0 / \mu_1)^n}{(n!)^{a+b}}, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

De notar que as três formulações se podem reduzir a uma única, sendo então necessário especificar o quociente que é elevado à potência  $n$ , bem como o coeficiente de pressão que é a potência à qual se eleva  $n!$ , o que permite utilizar os resultados gerais apresentados graficamente em alguns livros.

Só uma nota final para recordar a utilização de logaritmos, que pode ser útil, na resolução de problemas com este modelo. Suponha-se que, num dado exercício se assume que  $\mu_1 = 2,5$  clientes por hora e  $\mu_6 = 5,0$  clientes por hora. A determinação da constante de pressão faz-se facilmente:  $5,0 = 6^c \cdot 2,5$ .

$$5,0 = 6^c \cdot 2,5 \Leftrightarrow 6^c = 2 \Leftrightarrow \log_6(6^c) = \log_6(2) \Leftrightarrow c = [\ln(2) / \ln(6)] \Leftrightarrow c = 0,3387$$

### Exercício FE10

Até agora apresentámos modelos de Filas de Espera, baseados no processo de nascimento e morte que, consequentemente, descreviam os intervalos de tempo entre chegadas consecutivas e as durações de atendimento com distribuições exponenciais.

Mas, se as chegadas forem previamente marcadas, ou, de algum modo, reguladas, o processo de chegadas perde o seu carácter Poissoniano. Analogamente, se as necessidades dos vários clientes, em termos de atendimento, forem idênticas, deixa de fazer sentido a utilização da distribuição Exponencial para descrever a duração do atendimento de cada cliente.

Neste casos, dever-se-á considerar modelos que envolvam distribuições não exponenciais.

## ***MODELOS ENVOLVENDO DISTRIBUIÇÕES NÃO EXPONENCIAIS***

### • **Modelo M/G/1 (Cadeias de Markov encaixadas)**

No modelo M/G/1 assume-se um processo Poissoniano de chegadas de clientes, com taxa média fixa  $\lambda$ , que vão ser atendidos por um único servidor, não sendo postas quaisquer restrições à distribuição da duração do atendimento – é apenas necessário conhecer (ou estimar) o valor médio (que consideraremos ser igual a  $1 / \mu$ ) e a variância  $\sigma^2$  dessa distribuição (não especificada).

Neste caso, em geral, não será possível recorrer às equações de equilíbrio, uma vez que a duração dos atendimentos poderá apresentar “memória”. Em alternativa, pode analisar-se o sistema imediatamente após a saída de cada cliente, constituindo uma cadeia de Markov que fica “encaixada” num processo não-Markoviano.

Se  $\rho = \lambda / \mu < 1$  um tal sistema poderá eventualmente atingir o estado de equilíbrio, sendo então válidos os seguintes resultados:

$$P_0 = 1 - \rho$$

$$L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho)}$$

$$L = \rho + L_q$$

$$W_q = L_q / \lambda$$

$$W = W_q + 1 / \mu$$

É interessante notar que apesar deste modelo permitir qualquer distribuição para a duração do atendimento, se conseguem obter resultados analíticos, baseados na **Fórmula de Pollaczek-Khintchine** para a determinação de  $L_q$ :

$$L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1 - \rho)}$$

Infelizmente, não foi possível determinar expressões analíticas para o caso de múltiplos servidores.

Se a duração do atendimento for Exponencial,  $\sigma^2 = 1 / \mu^2$ , obtendo-se os resultados já apresentados para o modelo M/M/1.

Uma última nota para o facto de, para um valor médio da duração do serviço constante,  $W$ ,  $W_q$ ,  $L$  e  $L_q$  aumentarem com o aumento da variância da distribuição da duração do serviço ! Tal mostra que o desempenho do servidor não é apenas relevante no que toca ao seu valor médio ...

## • Modelo M/D/1

Se continuarmos a assumir que o processo de chegadas é Poissoniano, que temos apenas um servidor e se o atendimento aos diferentes clientes consistir numa rotina relativamente idêntica, praticamente não se verificará qualquer variação na duração do serviço, sendo então útil o modelo M/D/1, que pode ser encarado como um caso particular do modelo M/G/1, fazendo  $\sigma^2 = 0$ .

Assim, a **Fórmula de Pollaczek-Khintchine** originará:

$$L_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

É interessante notar que o valor indicado na fórmula acima é metade do correspondente valor para o modelo M/M/1: ou seja, se a distribuição do atendimento for Exponencial com parâmetro  $\mu$ , o comprimento da fila de espera será duplo do que seria se todos os atendimentos fossem executados com duração determinística (igual a  $1/\mu$ ). Fica assim patente a importância da variância da distribuição da duração do atendimento no desempenho do sistema !

Ruy Costa

Num sistema com múltiplos servidores (M/D/S) tudo se torna mais complicado – deixa-se ao leitor mais interessado a sugestão de uma leitura da Bibliografia. (Note-se que, no entanto, alguns livros apresentam alguns gráficos que representam as principais relações, em função dos valores dos parâmetros).

## • Modelo M/E<sub>k</sub>/1 (Método dos Estadios)

Como se referiu anteriormente, nos sistemas M/D/S assume-se que a duração do atendimento de um cliente é determinística ( $\sigma = 0$ ) – uma situação teórica que raramente ocorre *rigorosamente* na prática. Num outro *extremo*, temos os modelos M/M/S, em que se assume uma variação muito grande ( $\sigma = 1 / \mu$  = duração média do atendimento de um cliente). Ora, na realidade, muitas vezes nem temos uma duração determinística, nem temos uma variação tão elevada – é para estes casos que se torna útil recorremos à **distribuição Erlang-k**.

Consideremos um sistema com um processo Poissoniano de chegadas, com taxa  $\lambda$ , e com a duração do atendimento de um cliente,  $T$ , com média  $1/\mu$ . Imaginemos que se sabe que a duração de cada atendimento não segue uma distribuição Exponencial e, que se assume que cada atendimento se pode decompor numa sequência de **k estádios** consecutivos, cada um deles com durações,  $T_i$ , independentes e identicamente distribuídas, com distribuição Exponencial de valor médio  $1/(k\mu)$ .

$T_1, T_2, \dots, T_k$  v.a. i.i.d.

$T_i \sim \text{Exponencial de média igual a } 1/(k\mu)$

$T \sim T_1 + T_2 + \dots + T_k$

$T \sim \text{Erlang-}k \text{ com valor médio igual a } 1/\mu \text{ e variância igual a } 1/(k\mu^2)$

A **distribuição Erlang-k** (mais rigorosamente, distribuição Erlang, com parâmetros  $k$  e  $\mu$ ), tem valor médio igual a  $1/\mu$  e variância igual a  $1/(k\mu^2)$ . Assim, o **coeficiente de variação** da distribuição Erlang-k será  $[1/(\sqrt{k}\mu)] / [1/\mu]$ , ou seja, será igual a  $1/\sqrt{k}$ . De notar que como  $k$  influi directamente na variância da distribuição Erlang-k, costuma designar-se por **parâmetro de forma**.

De notar que o coeficiente de variação da distribuição Erlang-k é sempre menor, ou igual a 1 (a igualdade ocorre quando  $k = 1$ , i.e., quando a distribuição Erlang-k coincide com a distribuição Exponencial).

Assim, para utilizarmos o **método dos estádios**, começaremos por calcular o coeficiente de variação da distribuição da duração do atendimento de um cliente (que terá de ser inferior a 1, para que o método se possa utilizar). Imaginemos que o valor médio era igual a 15,00 minutos e que o desvio padrão era igual a 6,75 minutos – ter-se-ia, assim, o coeficiente de variação igual a 0,45. Fazendo  $1/\sqrt{k} = 0,45$ , vem que  $k = 4,938$ , pelo que parece razoável adoptar-se  $k = 5$ . Adoptar-se-ia, então, a distribuição Erlang-k, com  $k = 5$  e  $\mu = 1/15$  (adoptando o minuto como unidade de tempo).

O **Modelo M/E<sub>k</sub>/1** pode ser caracterizado a partir da análise do correspondente diagrama de transição de estados (baseado no processo de nascimento e morte). De notar o cuidado inicial que se terá de ter na designação dos estados: 0; 1,k; 1,k-1; ...; 1,2; 1,1; 2,k; ...; 2, 1; 3,k; ...; 3, 1; ...

No que diz respeito às chegadas, do estado 0 transita-se para o estado 1,1 com taxa média  $\lambda$ ; ... do estado 1,3 transita-se para o estado 2,3 com taxa média  $\lambda$  ... No que diz respeito às finalizações de atendimento (ou, mais precisamente, de estádios de atendimento), passar-se-á do estado 2,k-1 para o estado 2,k, deste para o estado 1,1, deste para o estado 1,2, ..., para o estado 1,k e, finalmente, para o estado 0, sendo cada taxa média de transição igual a  $k\mu$ .

Esta designação dos estados poderá ser, posteriormente, simplificada para uma designação unidimensional... Em seguida poderemos escrever as equações de equilíbrio para os vários estados e, após várias manipulações, deduzir alguns resultados.

No entanto, como já apresentámos o modelo mais geral M/G/1, poderemos encarar o modelo M/E<sub>k</sub>/1 como um caso particular desse, com  $\sigma^2 = 1 / (k\mu^2)$ . Assim, a fórmula de Pollaczek-Khintchine para a determinação de  $L_q$  será:

$$L_q = \frac{1+k}{2k} \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Os demais parâmetros relevantes podem ser obtidos por aplicação das fórmulas apresentadas no modelo M/G/1, bem como alguns resultados gerais (p.ex.,  $L = \lambda W$ ).

Para os leitores mais interessados deixamos dois tópicos que poderão desenvolver com leituras complementares da Bibliografia:

1 - O método dos estádios também é aplicável aos sistemas  $E_k/M/1$  e  $E_k/E_k/1$ .

2 – Se o coeficiente de variação da distribuição da duração do atendimento de um cliente (/distribuição das chegadas) for maior que 1, poder-se-á aplicar o método dos estádios, mas os estádios deverão desenvolver-se em paralelo (e não em série, como se apresentou).

### Exercício FE11

#### • Modelos sem entradas Poissonianas

Os modelos M/ .../... assumem um processo de chegadas Poissoniano (intervalos de tempo entre chegadas consecutivas independentes e identicamente distribuídos, com distribuição Exponencial). No entanto, em certas situações, tal poderá não ser o mais adequado. Como proceder então?

Se a duração do atendimento de um cliente for Exponencial, com um parâmetro fixo, poderemos obter, de imediato, três modelos por *inversão* das distribuições assumidas para as chegadas e para os atendimentos, nos modelos M/G/1, M/D/1, M/E<sub>k</sub>/1, obtendo então os modelos G/M/1, D/M/1 e E<sub>k</sub>/M/1.

O modelo G/M/1 não impõe qualquer restrição à distribuição associada ao processo de chegadas; o modelo D/M/1 assume chegadas a intervalos regulares; o modelo E<sub>k</sub>/M/1 permite modelar um processo de chegadas que, não sendo Poissoniano, também não é determinístico (intervalos de tempo constantes). Para alguns destes modelos, bem como as suas versões com múltiplos servidores, foi possível representar graficamente algumas relações com interesse.

## **MODELOS DE FILAS DE ESPERA COM DISCIPLINA PRIORITÁRIA**

Em certos sistemas de filas de espera o atendimento não é feito apenas por ordem de chegada, mas existe um sistema de prioridades, pelo que o atendimento de um cliente é feito pela respectiva prioridade.

O tratamento analítico de sistemas com prioridades é, obviamente, mais complicado do que o de sistemas sem prioridades. Como consequência, apenas se dispõe maioritariamente de resultados para o caso de um único servidor. Contudo, há um sistema com múltiplos servidores que apresenta resultados interessantes. Caracterizemo-lo:

- Assume-se que existem **N classes de prioridade** (a classe 1 com prioridade mais elevada e a classe N com mais baixa prioridade). Os clientes são atendidos por ordem das suas classes de prioridade e, dentro da cada classe, por ordem de chegada;
- Assume-se que o **processo de chegadas é Poissoniano**, permitindo-se que a taxa de chegadas de clientes das várias classes possa ser diferente;
- Assume-se que as **durações de atendimento são Exponenciais** para cada classe, assumindo-se, adicionalmente, que a duração média de atendimento é igual para todas as classes.

De notar que, se se ignorar as prioridades, estaremos perante o modelo M/M/S. Assim, quando contabilizarmos o número **total** de clientes no sistema, poderemos considerar as distribuições limite apresentadas para o modelo M/M/S. Consequentemente, para um cliente seleccionado aleatoriamente, são válidas as expressões obtidas para  $L$ ,  $L_q$ ,  $W$  e  $W_q$  nesse modelo. O que muda é a distribuição do tempo de espera: num modelo com prioridades a variância da distribuição do tempo de espera aumenta – teremos clientes de prioridade mais elevada com tempos de espera mais baixos do que ocorreriam com a disciplina FIFO sem prioridades e, como se esperaria, clientes de prioridade mais baixa com tempos de espera mais elevados ... O que não é de estranhar já que se pretende melhorar o desempenho do sistema no que diz respeito aos clientes de mais elevada prioridade, à custa de um pior desempenho para os clientes de mais baixa prioridade.

Assim, é importante calcular o **tempo de espera médio para um cliente de cada classe de prioridade**.

Assumamos que **prioridades “não absolutas”** (*nonpreemptive priorities*), i.e., um cliente que está a ser atendido, não vê o seu atendimento interrompido pela chegada de um cliente com mais elevada prioridade.

Assumindo **prioridades “não absolutas”**,  $W_k$ , o **tempo de espera médio para um cliente da classe de prioridade k** (incluindo a duração do atendimento) será dado por:

$$W_k = \frac{1}{A \cdot B_{k-1} \cdot B_k} + \frac{1}{\mu}, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N$$

Com  $A = S! \left( \frac{S\mu - \lambda}{r^S} \right) \sum_{j=0}^{S-1} \frac{r^j}{j!} + S \cdot \mu,$   
 $B_0 = 1,$

$$B_k = 1 - \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{S\mu}, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N,$$

- e  $S$  = número de servidores,  
 $\mu$  = taxa média de serviço por cada servidor ocupado,  
 $\lambda_i$  = taxa média de chegadas da classe de prioridade  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$

$$\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i \text{ e}$$

$$r = \lambda / \mu$$

Estes resultados assumem que  $\sum_{i=1}^k \lambda_i < S \cdot \mu$ , de modo a que a classe de prioridade  $k$  possa atingir um estado de equilíbrio. Para cada classe de prioridade aplica-se a Fórmula de Little, pelo que o **número esperado de clientes da classe de prioridade  $k$  no sistema (incluindo os que estão a ser atendidos)** será

$$L_k = \lambda_k \cdot W_k, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N.$$

- Notas:
- 1) Para a classe  $k$ , o **tempo médio de espera a aguardar atendimento**, será igual a  $W_k - 1 / \mu$  para  $k = 1, 2, \dots, N$ ;
  - 2) O **comprimento médio da fila de espera** correspondente à classe  $k$  será igual a  $\lambda_k \cdot (W_k - 1 / \mu)$ , para  $k = 1, 2, \dots, N$ .
  - 3) Se  $S = 1$ ,  $A = \mu^2 / \lambda$ .

Assumindo **prioridades “absolutas”** (*preemptive priorities*), i.e., o atendimento de um cliente será interrompido (e re-enviado para a fila de espera) pela chegada de um cliente com mais elevada prioridade, e mantendo as demais hipóteses já referidas,  $W_k$ , o **tempo de espera médio para um cliente da classe de prioridade  $k$  (incluindo a duração do atendimento)** será, para um único servidor, dado por:

$$W_k = \frac{1/\mu}{B_{k-1} \cdot B_k}, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N.$$

$$L_k = \lambda_k \cdot W_k, \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, N.$$

Para o caso de múltiplos servidores, dever-se-á adoptar m processo iterativo (para os leitores mais interessados, recomenda-se a consulta de Hillier e Lieberman).

Os correspondentes resultados para a fila de espera (excluindo os clientes que estão a ser atendidos) obtém-se a partir de  $W_k$  e  $L_k$  com se referiu para as prioridades “não absolutas”.

Refira-se, finalmente, que dado que a distribuição Exponencial não tem memória, as interrupções de atendimento não afectam, em média, o processo de atendimento: a duração média total do atendimento continua a ser igual a  $1 / \mu$ . Quando um cliente com atendimento interrompido voltar a ser atendido, a distribuição da duração do atendimento *restante* continuará a mesma. De notar que tal não ocorre para nenhuma outra distribuição da duração de um atendimento !

### Exercício FE12

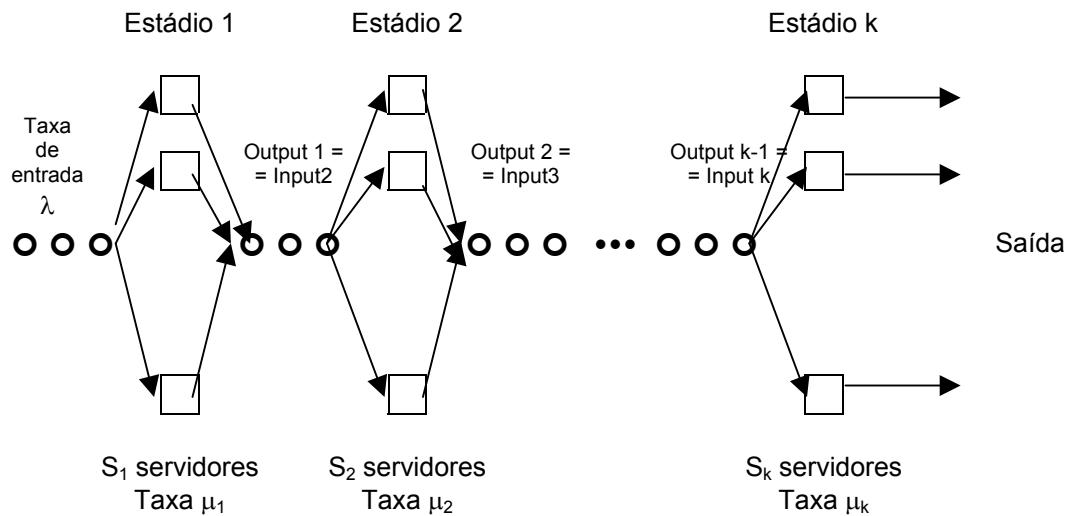
## REDES DE FILAS DE ESPERA

Até agora temos vindo a considerar sistemas de Filas de Espera com um único local de atendimento (ainda que com um ou mais servidores). No entanto, em muitas situações reais, um cliente tem de passar por uma sequência de filas de espera (seguindo, ou não, uma determinada ordem) – o *output* de algumas dessas filas será o *input* de outras. Estaremos, assim, perante um sistema de **redes de filas de espera**. Quando tal ocorre, é importante estudar globalmente a rede para determinar o tempo total de espera, ou o número total de clientes no sistema.

Dada a dificuldade de modelação destes sistemas, a maior parte dos modelos divulgados assume processos Poissonianos de chegada e durações de atendimento exponenciais.

- **Filas ilimitadas em série**

Consideremos um sistema constituído por  $k$  filas (sem limite de capacidade), em série, como se esquematiza em seguida:



O importantíssimo **Teorema de Jackson**, garante-nos que:

Se

- (1) o processo de chegadas dos clientes a um sistema de espera for Poissoniano com taxa  $\lambda$ ,
- (2) as durações dos atendimentos dos servidores em cada estádio forem exponenciais, com parâmetro  $\mu_i$ , e
- (3) cada estádio permitir a formação de uma fila ilimitada (modelo M/M/S), com  $S_i \cdot \mu_i > \lambda$ ,

então o processo de saídas dos clientes de cada estádio do sistema de espera é Poissoniano, com taxa  $\lambda$ .

Façamos alguns comentários breves ao Teorema de Jackson:

- i) De notar que **não é feita qualquer restrição à disciplina** das filas !
- ii) Se o processo de saídas dos clientes de cada estádio do sistema de espera é Poissoniano, com taxa  $\lambda$ , então o processo de chegadas a cada estádio é Poissoniano, com taxa  $\lambda$ .
- iii) Em condições de equilíbrio, **cada estádio k poderá ser analisado independentemente dos outros**: será *alimentado* por um processo Poissoniano de chegadas, terá  $S_k$  servidores, com duração de atendimento exponencial, com taxa  $\mu_k$ ; assim, poderá ser tratado com um modelo M/M/S<sub>k</sub> (com, ou sem prioridades).
- iv) Infelizmente, na realidade, nem sempre é possível garantir a formação de filas ilimitadas em todos os estádios, pelo que o Teorema de Jackson nem sempre poderá ser invocado.

Realcemos, pela sua extraordinária importância, o terceiro comentário acima apresentado. A possibilidade de se utilizar um modelo M/M/S para cada estádio, independentemente dos outros, é uma enorme simplificação. Por exemplo, a probabilidade conjunta de se ter  $n_1$  clientes no estádio 1,  $n_2$  clientes no estádio 2, ...,  $n_k$  clientes no estádio  $k$  poderá, assim, obter-se simplesmente como o produto das probabilidades individuais:

$$P(N_1 = n_1 \wedge N_2 = n_2 \wedge \dots \wedge N_k = n_k) = P_{n1} \cdot P_{n2} \cdot \dots \cdot P_{nk}$$

Esta forma da solução designa-se por **forma de produto** (*product form*). Os sistemas com filas com capacidade limitada não apresentam soluções na forma de produto !

### Exercício FE13

#### • Redes de Jackson

A utilização dos modelos M/M/S independentemente para cada estádio ocorre também noutras contextos, para além das filas ilimitadas em série. As **Redes de Jackson** também permitem essa abordagem. Nas filas ilimitadas em série os clientes têm de percorrer obrigatoriamente todos os estádios, em sequência (estádio1, estádio2, ..., estádio  $k$ ); nas redes de Jackson os clientes podem nem visitar todos os estádios, poderão visitá-los por qualquer ordem e, para cada estádio, os clientes poderão ser provenientes quer de outros estádios, quer do exterior (segundo um processo Poissoniano). Resumamos, então, as características deste tipo de sistema:

Uma **Rede de Jackson** é um sistema de  $k$  estádios, onde o estádio  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) tem:

- 1) uma fila ilimitada;
- 2) os clientes chegam do exterior do sistema de acordo com um processo Poissoniano com parâmetro  $a_i$  e
- 3)  $S_i$  servidores, que asseguram uma distribuição de atendimento exponencial, com parâmetro  $\mu_i$ .

Um cliente que deixe o estádio  $i$  segue para outro estádio  $j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$  e  $j \neq i$ ) com probabilidade  $p_{ij}$ , ou partirá do sistema com probabilidade  $q_i = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k p_{ij}$ .

Em situação de equilíbrio, **cada estádio  $j$  de uma rede de Jackson ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) comporta-se como se fosse um sistema M/M/S independente**, com taxa de chegadas  $\lambda_j$ :

$$\lambda_j = a_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \lambda_i \cdot p_{ij}, \quad \text{com } S_j \cdot \mu_i > \lambda_j$$

Intuitivamente poderemos compreender este resultado, recordando-nos que o carácter Poissoniano de um processo de Poisson não é afectado pela desagregação do processo, ou pela sua agregação a outros processos Poissonianos. Ora se sabemos que o processo de saídas de cada estado é Poissoniano, se sabemos que o processo de chegadas do exterior é Poissonano (que se desagregará, em contribuições para entradas em cada estádio directamente do exterior), pode concluir-se que o processo de entrada em cada estádio é uma agregação de contribuições Poissonianas e, assim, é um processo Poissoniano.

#### Exercício (Hillier e Lieberman):

Considere uma Rede de Jackson, com os dados seguintes:

Estádio $j$	$S_j$	$\mu_j$	$a_j$	$P_{ij}$		
				$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$j = 1$	1	10	1	—	0,1	0,4
$j = 2$	2	10	4	0,6	—	0,4
$j = 3$	1	10	3	0,3	0,3	—

- a) Determine as taxas de entrada nos diferentes estádios.
- b) Determine o número total de clientes no sistema.
- c) Determine o tempo total esperado de permanência no sistema por cliente.

a) Escrevamos as equações  $\lambda_j = a_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \lambda_i \cdot p_{ij}$ :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 & + 0,1 \lambda_2 + 0,4 \lambda_3 \\ \lambda_2 = 4 + 0,6 \lambda_1 & + 0,4 \lambda_3 \\ \lambda_3 = 3 + 0,3 \lambda_1 & + 0,3 \lambda_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se  $\lambda_1 = 5$ ,  $\lambda_2 = 10$ ,  $\lambda_3 = 7,5$ .

Assim, podemos considerar que, para cada estádio  $i$ , se tem um sistema M/M/S com taxa de entradas  $\lambda_i$ , taxa de serviço  $\mu_i$  e  $S_i$  servidores.

b)

**Estado 1:** fila M/M/1, com  $\lambda_1 = 5$  e  $\mu_1 = 10$ .

$$\rho = 5/10 = 0,5; P_n = \rho^n \cdot P_0 \quad \text{e} \quad P_0 = 1 - \rho, \text{ ou seja, } P_{n1} = 0,5^{n+1}$$

$$L = \lambda/(\mu - \lambda), \text{ ou seja } L_1 = 1.$$

**Estado 2:** fila M/M/2, com  $\lambda_1 = 10$  e  $\mu_1 = 10$ .

$$\rho = 10/(10 \cdot 2) = 0,5; P_0 = 1/3, \text{ ou seja, } P_{n2} = \begin{cases} 1/3, & \text{para } n_2 = 0 \\ 1/3, & \text{para } n_2 = 1 \\ (1/3) \cdot (1/2)^{n_2+1} & \text{para } n_2 \geq 2 \end{cases}$$

$$L = L_q + \lambda/\mu = P_0 \cdot (\lambda/\mu)^S \cdot \rho / (S! \cdot (1-\rho)^2) + \lambda/\mu, \text{ ou seja } L_2 = 4/3.$$

**Estado 3:** fila M/M/1, com  $\lambda_1 = 7,5$  e  $\mu_1 = 10$ .

$$\rho = 7,5/10 = 0,75; P_n = \rho^n \cdot P_0 \quad \text{e} \quad P_0 = 1 - \rho, \text{ ou seja, } P_{n3} = 0,75^n \cdot 0,25$$

$$L = \lambda/(\mu - \lambda), \text{ ou seja } L_3 = 3.$$

Assim, a função de probabilidade conjunta (não pedida), pode escrever-se na forma produto:

$$P(N_1 = n_1 \wedge N_2 = n_2 \wedge N_3 = n_3) = P_{n1} \cdot P_{n2} \cdot P_{n3}$$

Quanto ao número de clientes no sistema, teremos  $L = L_1 + L_2 + L_3 = 5,33(3)$ .

c) A determinação do tempo total esperado de permanência no sistema por cliente não pode ser feita tão imediatamente. Com efeito, como nem todos os clientes são obrigados a ir a todos os estádios, não poderemos somar os tempos correspondentes a cada estádio. No entanto poderemos ainda utilizar a Fórmula de Little, considerando que a taxa global de chegadas de clientes vindos do exterior é  $\lambda = a_1 + a_2 + a_3 = 8$ . Assim,  $W = L / \lambda = 2/3$  (unidades de tempo).

### Exercício FE14

Naturalmente, as Redes de Filas de Espera não se esgotam nos dois modelos apresentados. As **filas de espera com bloqueio** (devido à limitação da capacidade das filas em série, quando uma fila a jusante atinge o seu limite de capacidade, produz-se um bloqueio nas filas a montante, impedindo aí o processamento de clientes), as **redes fechadas de Jackson** (que consideram uma população limitada a  $N$  clientes, que continuamente *re-alimentam* o sistema) e as **filas cíclicas** (rede fechada em que o output da 1ª fila é o input da 2ª fila, o output da 2ª fila é o input da 3ª fila, ..., o output da  $k$ -ésima fila é o input da 1ª fila) são algumas extensões das Redes de Filas de Espera. O leitor interessado nalgum destes tópicos é remetido para a Bibliografia (em particular, Gross, D. and C. Harris, "Fundamentals of Queueing Theory", J. Wiley, New York (1985)).

## CONCLUSÃO

A **importância das Filas de Espera** é evidente no dia-a-dia e em variados contextos. Assim, é evidente que a gestão adequada de um sistema de filas de espera tem repercussões na qualidade de vida e na produtividade.

Na modelação matemática de sistemas de filas de espera a **distribuição Exponencial** tem um papel fulcral, ainda que em determinadas situações possa ser útil considerar outras distribuições, nomeadamente a **Erlang-k**.

De referir ainda a necessidade de, em certos sistemas, se tornar necessário separar os clientes em diferentes classes, cada uma das quais com um nível de **prioridade** distinto.

Quando um cliente precisa de recorrer a vários serviços, num mesmo sistema, torna-se útil modelá-lo como uma **rede de filas de espera**.

Refira-se, finalmente, que quando há particularidades especiais, não contempladas em qualquer modelo conhecido, poderemos recorrer à **simulação de filas de espera**.

Ruy Costa

## BIBLIOGRAFIA ESPECÍFICA

- Gross, D. and C. Harris, "Fundamentals of Queueing Theory", J. Wiley, New York (1985).
- Hillier, F. and G. Lieberman, "Introduction to Operations Research", McGraw-Hill Int. Editions (5 ed., 1990);
- Winston, W, "Operations Research – Applications and Algorithms", Duxbury Press (1994)

## **SIMULAÇÃO**

## INTRODUÇÃO À SIMULAÇÃO

Uma rápida consulta ao "Dicionário da Língua Portuguesa" da Porto Editora (7<sup>a</sup> ed.) indica-nos: "**simulação** - acto ou efeito de simular; fingimento; disfarce; (...) ; **representação de um sistema ou de um processo por um modelo estatístico com que se trabalha, como se tratasse desse sistema ou processo, para investigar os seus efeitos.**" Como se vê, é muito útil ter um dicionário por perto...

O vocábulo "simulação" não é, obviamente, desconhecido da generalidade das pessoas.

Quem não ouviu falar dos **simuladores de voo** ? Para nossa tranquilidade (e porque os aviões são 'bichos muito caros'), os pilotos de aeronaves, para além de outro tipo de formação, recebem muito treino em simuladores de voo, onde se vêem confrontados com um grande número de 'ocorrências', que, se Deus quiser, nunca terão que viver na realidade.

Quem não se impressionou ao passar perto de uma **barragem** ? Uma estrutura (geralmente) de betão a reter um verdadeiro 'mar', permitindo a produção de energia eléctrica e a regularização de situações de cheia e de falta de água. Uma visita ao Laboratório Nacional de Engenharia Civil permite-nos ver uma série de modelos reduzidos de barragens com vista à **simulação de condições 'especiais'**, como por exemplo **sismos**. Uma série de pequenos sensores permite estudar as deformações e deslocamentos sofridos pelo modelo quando submetido a uma 'solicitação especial', permitindo antever o comportamento da estrutura real ... As **grandes pontes** são também objecto de estudos de simulação de comportamento a partir de **modelos reduzidos**.

A concepção de **aeronaves** passa sempre pela **simulação da sua resistência aerodinâmica** com modelos reduzidos em 'túneis de vento'.

A **gestão do tráfego rodoviário** numa grande cidade passa actualmente por sistemas que controlam automaticamente os semáforos, de modo a aumentar a fluidez do trânsito. Em Lisboa, o sistema Gertrudes, gera os semáforos das zonas mais movimentadas. Mas como foi 'programado / calibrado' esse sistema ? Certamente que não se fizeram experiências no '**sistema real**', isto é, ninguém se atreveu a experimentar diferentes políticas de tempos de verde e vermelho em directo na Praça Marquês de Pombal... É que essa experiência poderia ser fatal ... para o experimentador ... Para evitar dramas 'reais', concebe-se um **modelo** que descreve 'o melhor possível' o **sistema**, implementa-se esse modelo em termos informáticos e, finalmente, testa-se diferentes '**políticas**' sobre o modelo na segurança de um gabinete ... **A resposta do modelo, que simula a realidade submetida às políticas testadas, permite antecipar as respostas que ocorreriam na realidade** ( ... e sem pôr em risco a vida do experimentador ). Em função dos resultados das simulações, pode-se adoptar uma 'política' de gestão que se considere adequada.

Poderemos agora olhar novamente para a definição que o Dicionário apresentava de **Simulação: representação de um sistema ou de um processo por um modelo estatístico com que se trabalha, como se tratasse desse sistema ou processo, para investigar os seus efeitos.**

Podemos considerar que um **sistema** é, *grosso modo*, um conjunto de **entidades** que interagem entre si, com vista a um determinado fim comum - no exemplo acabado de referir (gestão do tráfego rodoviário), o sistema seria constituído por diferentes entidades (veículos (e seus condutores), peões, vias de comunicação e semáforos) que interagem

entre si (peões e condutores pretendem atingir os seus destinos, devendo conformar-se com as vias de comunicação existentes e com as indicações dadas pelos semáforos).

Se estivéssemos interessados em determinar a temperatura, a pressão e a concentração química dos intervenientes numa determinada reacção química, poderíamos **simular o correspondente processo** químico.

Já referimos a existência de **modelos físicos** de um sistema, a uma escala normalmente reduzida (o exemplo das barragens) e **modelos matemáticos** (a representação do funcionamento dos semáforos numa dada zona pode ser feita com um modelo físico, pouco útil para testar diferentes políticas de gestão, ou com um modelo matemático, que pode ser implementado computacionalmente, permitindo testar diferentes políticas de gestão). Nos modelos matemáticos teremos sempre uma base constituída por **relações de lógica** (do tipo "se está o semáforo 'está verde', então passam os automóveis e param os peões"), sendo usual ter-se uma importante **componente de ordem probabilística**, dado que muitos dos intervenientes no funcionamento de um dado sistema não são determinísticos (por exemplo, os instantes de chegada de automóveis a um semáforo são obviamente aleatórios...).

A **Simulação** que apresentaremos terá por base modelos matemáticos (envolvendo as relações de lógica e as componentes probabilísticas) para descrição de sistemas ou processos.

Comecemos por considerar o seguinte **problema**:

A **Barragem de Pós-Boa** é relativamente pequena, com uma capacidade máxima de retenção, **V<sub>MAX</sub>**, de 100 u.vol. de água.

A equação simplificada de "balanço hidrológico mensal" é

$$V_f = V_0 + P - T - N - DS,$$

sendo

- V<sub>f</sub>** — Volume no final do mês (u.vol.)
- V<sub>0</sub>** — Volume no início do mês (u.vol.)
- P** — Volume de precipitação mensal (u.vol.)
- T** — Volume turbinado durante o mês (u.vol.)
- N** — Volume para satisfação de necessidades de abastecimento mensal (u.vol.)
- DS** — Volume de descarga de superfície durante o mês (u.vol.)

Por razões de equilíbrio ecológico e ambiental nunca se pode permitir que o nível da barragem desça abaixo de dez por cento da capacidade máxima de retenção.

As necessidades de água a jusante, **Nec** (u.vol.), têm-se mantido relativamente inalteradas nos últimos dez anos, sendo dadas na tabela seguinte:

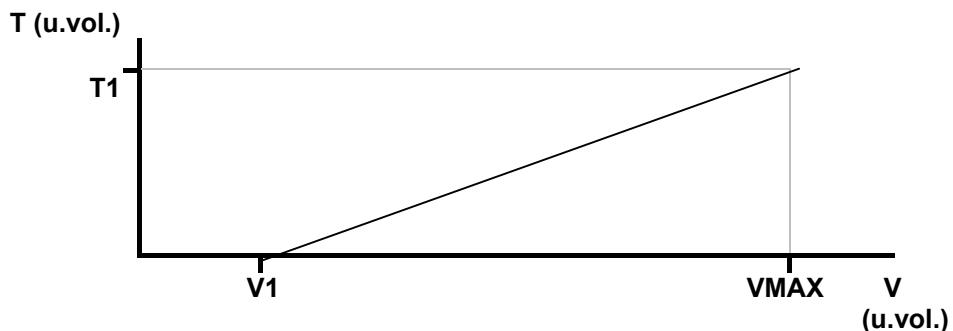
Mês	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
<b>Nec (u.vol.)</b>	8	8	8	9	10	13	15	15	15	13	9	8

No início do mês, o gestor da barragem decide qual o volume de água que vai destinar à satisfação das necessidades previstas para esse mês, com base no volume de água então disponível na barragem. Sempre que possível (isto é, sempre que não seja (continua))

(continuação)

violada a condição de equilíbrio ambiental) o volume de água destinado à satisfação das necessidades será igual ao valor previsto (indicado na tabela anterior).

Em função do volume,  $V$ , de água na barragem no início do mês após a afectação do volume de água destinado à satisfação das necessidades o gestor da barragem determina o volume de água a turbinar durante esse mês, de acordo com o gráfico seguinte:



O gestor da barragem pretende definir o valor dos parâmetros  $V_1$  e  $T_1$  da política de gestão de águas a turbinar.

Por razões de segurança exige-se que  $V_1$  não seja inferior a vinte por cento da capacidade máxima de retenção.

O lucro mensal  $L$  (u.m.) associado ao volume turbinado  $T$  (u.vol.) é dado pela função  $L = T^2$ .

Sabe-se que uma descarga total ( $T + DS$ ) superior ou igual a 30 u.vol. origina situações de cheia a jusante.

Para decidir quais os valores a adoptar para os parâmetros  $V_1$  e  $T_1$  o gestor consultou os seus registos, podendo observar o valor das precipitações (em u.vol.) relativos a 1992, 1993 e 1994 indicados no quadro seguinte:

Precipitação Mensal (u.vol.)			
Mês	1992	1993	1994
J	30	43	25
F	40	48	23
M	40	39	18
A	30	28	10
M	25	29	5
J	20	22	0
J	12	15	0
A	0	0	0
S	12	13	1
O	18	20	5
N	29	28	13
D	30	29	18

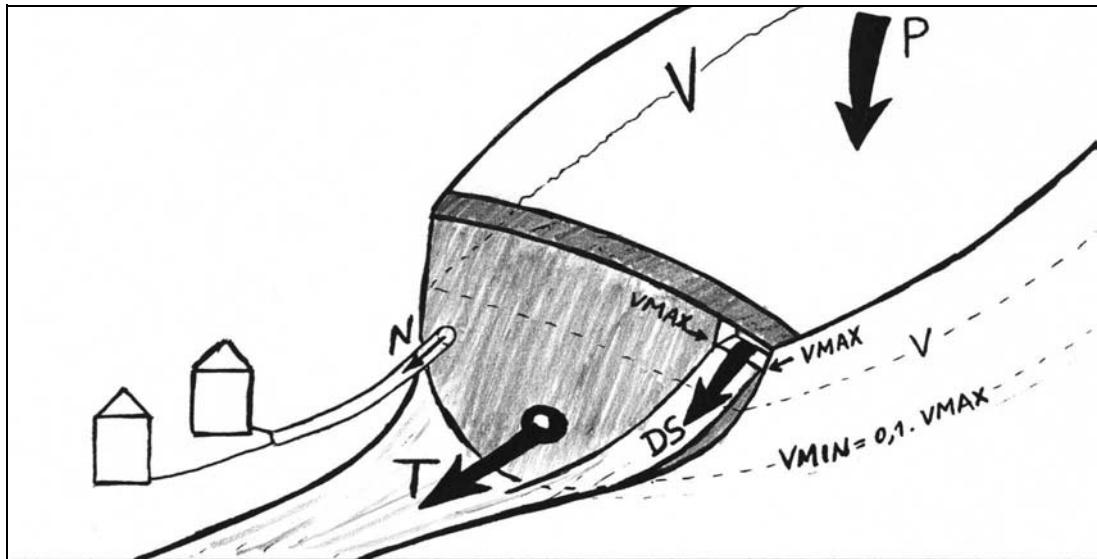
Que conselho poderemos dar ao gestor da barragem relativamente aos valores a adoptar para os parâmetros  $V_1$  e  $T_1$  da política de gestão de águas referida ?

Eis-nos perante um problema de **gestão de recursos hídricos** (ainda que em versão obviamente simplificada).

O **sistema** descrito no problema é constituído pela barragem, pelas precipitações (retidas pela barragem) e pelas necessidades de água a jusante. Quer as precipitações, quer as necessidades são **fatores não controláveis** pelo gestor da barragem, mas que afectarão claramente a política de gestão a utilizar (o único **elemento controlável** pelo gestor).

De referir ainda que os factores não controláveis são, neste problema, **determinísticos**. É óbvio que, na realidade, tal não sucederá ! As precipitações e as necessidades de água a jusante serão certamente **aleatórias**.

Façamos uma primeira representação esquemática do sistema, para melhor compreendermos o seu funcionamento:



Fixada uma política de gestão de águas, isto é, fixados os valores dos parâmetros  $V_1$  ( $V_1 \geq 20$ ) e  $T_1$ , no início de um mês genérico, o gestor turbinará um volume de água destinado à satisfação das necessidades de água a jusante. Estas necessidades serão, sempre que possível, totalmente satisfeitas - é necessário respeitar-se sempre a manutenção de um volume mínimo de água de 10 u.vol.. Assim, o volume de água a destinar à satisfação das necessidades,  $N$  (u.vol.) será função do volume de água na albufeira nessa altura ( $V_0$ ) e das necessidades desse mês (Nec):

$$N = \begin{cases} Nec & ; V_0 - Nec \geq 10 \\ V_0 - 10 & ; V_0 - Nec < 10 \end{cases}$$

O volume de água na albufeira,  $V$ , passará a ser  $V = V_0 - N$ .

De seguida, o gestor turbinará o volume  $T$  (u.vol.), que será função do nível de água na albufeira nesse momento,  $V$  (u.vol.), de acordo com a seguinte relação:

$$T = \begin{cases} 0 & ; V < V_1 \\ \frac{T_1 \cdot (V - V_1)}{100 - V_1} & ; V \in [V_1 ; 100] \end{cases}$$

De notar que, dado que  $V_1$  não é inferior a 20 u.vol., nunca será violada a restrição ambiental pelo facto de se turbinar o volume  $T$ .

O volume na albufeira passa, então, para  $V = V_0 - N - T$ .

De notar que o lucro mensal, L (em u.m.) é função de T (em u.vol.):  $L = T^2$ .

Em seguida 'processaremos' as precipitações desse mês, P. Se o volume das precipitações adicionado ao volume de água existente na albufeira ultrapassar VMAX (100 u.vol.), ter-se-á que proceder a uma descarga de superfície DS (u.vol.), dada por:

$$DS = \begin{cases} 0 & ; V_0 - N - T + P \leq 100 \\ V_0 - N - T + P - 100 & ; V_0 - N - T + P > 100 \end{cases}$$

O volume da albufeira passa, então, para  $V = V_0 - N - T + P - DS$ .

De notar que se  $T + DS$  exceder 30 u.vol. se originará uma situação de cheia a jusante.

Interessará estar atento à ocorrência quer de situações de abastecimento de água insuficiente face às necessidades, quer de situações de cheias.

Acabámos de reduzir o enunciado aos seus aspectos mais importantes.

E agora? Como propor V1 e T1?

Se arbitrarmos uma **política de gestão** (isto é, valores para V1 e T1), poderemos aproveitar os dados relativos às precipitações mensais dos anos de 1992, 1993 e 1994 para **avaliar o desempenho do sistema**, isto é, avaliar o correspondente valor do Lucro (por exemplo, avaliando o valor do "Lucro Mensal Médio"), avaliar a ocorrência de situações de abastecimento de água insuficiente face às necessidades (por exemplo, avaliando o número de meses com 'restrições' e o valor da 'restrição média') e avaliar a ocorrência de situações de cheias (por exemplo, avaliando o número de meses com cheias e o valor da 'cheia média'). Poderemos designar o valor do "Lucro Mensal Médio", o número de meses com 'restrições', o valor da 'restrição média', o número de meses com cheias e o valor da 'cheia média' como **medidas de desempenho do sistema** (ou, **medidas de 'performance'**).

Assim, a cada política de gestão corresponderá um 'retrato' que se traduz nos **valores das medidas de desempenho definidas**. Caberá ao **decisor** (neste caso ao gestor da barragem) optar pela política de gestão que considera mais *útil* (o que habitualmente se traduz num problema de 'Decisão Multicritério'...).

Para começarmos a **simular o funcionamento deste sistema** precisaremos de definir uma **condição inicial**: "Qual o volume de água da albufeira no início de Janeiro de 1992?". Só a partir desse valor inicial poderemos prosseguir a simulação. Claro que se adoptarmos um valor muito baixo corremos o risco de obter um 'retrato muito negro', no que diz respeito às necessidades de água a jusante ... Se, pelo contrário, formos muito 'generosos' na indicação desse valor inicial, certamente teremos um quadro 'muito interessante' no que diz respeito às cheias ... Ora cá está uma **questão técnica** interessante que abordaremos posteriormente com mais detalhe: **a influência das condições iniciais na simulação**.

Relativamente ao nosso problema poderemos admitir que o volume da albufeira no início de Janeiro de 1992 era igual a 50 u.vol. (albufeira meia cheia).

Sistematizemos, em seguida, a simulação do nosso sistema:

**1 - Inicializar as variáveis associadas às medidas de desempenho:**

**SL** = somatório dos lucros mensais ;

**NMCC** = nº meses com cheias ; **SC** =  $\Sigma$  dos volumes de cheia

**NMCR** = nº meses com restrições ; **SR** =  $\Sigma$  dos vol.s corresp.s às restrições

**Igualar a zero as variáveis indicadas.**

**2 - Indicar uma política de gestão.**

Indicar o valor a atribuir à condição inicial ( $V_0 = 50$  u.vol.).

**3 - Iniciar a simulação:**

Repetir para os anos de 1992 a 1994:

Repetir para os meses de Janeiro a Dezembro:

$$N = \begin{cases} Nec & ; V_0 - Nec \geq 10 \\ V_0 - 10 & ; V_0 - Nec < 10 \end{cases}$$

$$V = V_0 - N$$

$$V_0 - Nec < 10 \Rightarrow \begin{cases} NMCR = NMCR + 1 & [v. Nota 1] \\ SR = SR + (Nec - V_0 + 10) \end{cases}$$

$$T = \begin{cases} 0 & ; V < V1 \\ \frac{T1 \cdot (V - V1)}{100 - V1} & ; V \in [V1; 100] \end{cases}$$

$$V = V_0 - N - T$$

$$L = T^2 ; SL = SL + L$$

$$DS = \begin{cases} 0 & ; V_0 - N - T + P \leq 100 \\ V_0 - N - T + P - 100 & ; V_0 - N - T + P > 100 \end{cases}$$

$$VF = V_0 - N - T + P - DS$$

$$T + DS > 30 \Rightarrow \begin{cases} NMCC = NMCC + 1 \\ SC = SC + (T + DS - 30) \end{cases}$$

$$V_0 = VF [v. Nota 2]$$

**4 - Apurar os valores das Medidas de Desempenho:**

$$\text{Lucro Médio Mensal} = SL / 36$$

$$\text{Nº Meses Com Cheias} = NMCC ; \text{Cheia Média} = SC / NMCC$$

$$\text{Nº Meses Com Restrições} = NMCR ; \text{Restrição Média} = SR / NMCR$$

**Notas:** 1 - "  $X = X + \Delta X$  " corresponde à instrução " Incrementa-se a variável X de  $\Delta X$  " ;

2 -  $V_0 = VF \Rightarrow V_0$  passa a ter o valor de VF (vol. no final do mês), que será o volume inicial do próximo mês e estará na base do cálculo de N.

Se se pretender fazer uma Simulação "manual", poderemos começar por representar um Quadro como o seguinte, onde destacamos os dados do problema (apresentados nas duas primeiras colunas):

Mês	P	Nec	V0	N	T	DS	VF	L	R	C
J 92	30	8	50							
F 92	40	8								
M 92	40	8								
A 92	30	9								
M 92	25	10								
J 92	20	13								
J 92	12	15								
A 92	0	15								
S 92	12	15								
O 92	18	13								
N 92	29	9								
D 92	30	8								
J 93	43	8								
F 93	48	8								
M 93	39	8								
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

**Notas:** V0 - volume no início do mês; N - volume destinado à satisfação de necessidades de água a jusante; T - volume turbinado; DS - volume correspondente a Descargas de Superfície; VF - Volume no final do mês; L - lucro; R - restrição ao consumo (volume em falta); C - cheia (volume em excesso além do "Limite de Cheia" 30 u.vol. para T + DS)

Indicou-se no Quadro o valor inicial V0 = 50 para Janeiro de 1992. Em função de uma dada política de gestão, isto é de valores para V1 e T1, poderíamos preencher o Quadro e obter os valores correspondentes das Medidas de Desempenho do Sistema.

Como é evidente, o preenchimento de um Quadro correspondente a uma dada Política de Gestão é uma tarefa muito pouco interessante e consideravelmente morosa para ser feita manualmente. A utilização de uma "Folha de Cálculo" (tipo EXCEL) revela-se uma opção particularmente adequada a este problema. Depois de programada a folha de cálculo, basta alterar os valores correspondentes à política de gestão, V1 e T1, para a folha ser 'recalculada' para essa nova política de gestão, com a indicação dos valores correspondentes às Medidas de Desempenho do Sistema.

Já sabemos que V1 é superior ou igual a 20 u.vol. e inferior a 100 u.vol.. Por outro lado, T1 representa o volume a turbinar quando o volume de água na albufeira é máximo (igual a 100 u.vol.), pelo que, poderemos concluir que T1 é limitado superiormente por 90 u.vol. (para não se violar a 'restrição ambiental'). Assim, numa primeira análise, poderíamos experimentar para V1 os valores 20, 30, 40, ..., 90 u.vol. e para T1 os valores 10, 20, 30, ..., 90 u.vol. .

Para cada par de valores ( V1 , T1 ) poderemos obter os valores de lucro médio mensal, número de meses com cheia, volume médio de cheia, número de meses com restrições no abastecimento e volume médio de restrição no abastecimento.

O gestor deseja maximizar o lucro e, simultaneamente, minimizar as situações de cheias e de restrições no abastecimento, o que são objectivos obviamente 'contraditórios'. Com efeito, alguns dos valores mais elevados de lucro neste problema estão associados a situações de cheias e/ou restrições com razoável amplitude.

Apresentaremos de seguida a Folha de Cálculo correspondente à simulação do funcionamento da barragem com a política de gestão traduzida por V1 = 20,00 u.vol. e T1 = 30,00 u.vol. :

<b>V1 =20,00</b> <b>T1=30,00</b> <b>VMAX</b> 100,00 <b>LCheia=30,00</b> <b>=</b>											
	P	Nec	V0	N	T	DS	VF	L	Rtr.Cons.	Cheia	
J92	30	8	<b>50,00</b>	8,00	8,25	0,00	63,75	68,06	0,00	0,00	
F92	40	8	63,75	8,00	13,41	0,00	82,34	179,73	0,00	0,00	
M92	40	8	82,34	8,00	20,38	0,00	93,96	415,30	0,00	0,00	
A92	30	9	93,96	9,00	24,36	0,00	90,60	593,50	0,00	0,00	
M92	25	10	90,60	10,00	22,73	0,00	82,88	516,48	0,00	0,00	
J92	20	13	82,88	13,00	18,70	0,00	71,17	349,83	0,00	0,00	
J92	12	15	71,17	15,00	13,56	0,00	54,61	184,01	0,00	0,00	
A92	0	15	54,61	15,00	7,35	0,00	32,26	54,07	0,00	0,00	
S92	12	15	32,26	15,00	0,00	0,00	29,26	0,00	0,00	0,00	
O92	18	13	29,26	13,00	0,00	0,00	34,26	0,00	0,00	0,00	
N92	29	9	34,26	9,00	1,97	0,00	52,28	3,88	0,00	0,00	
D92	30	8	52,28	8,00	9,11	0,00	65,18	82,93	0,00	0,00	
J93	43	8	65,18	8,00	13,94	0,00	86,24	194,37	0,00	0,00	
F93	48	8	86,24	8,00	21,84	4,40	100,00	476,92	0,00	0,00	
M93	39	8	100,00	8,00	27,00	4,00	100,00	729,00	0,00	1,00	
A93	28	9	100,00	9,00	26,63	0,00	92,38	708,89	0,00	0,00	
M93	29	10	92,38	10,00	23,39	0,00	87,98	547,12	0,00	0,00	
J93	22	13	87,98	13,00	20,62	0,00	76,37	425,15	0,00	0,00	
J93	15	15	76,37	15,00	15,51	0,00	60,85	240,62	0,00	0,00	
A93	0	15	60,85	15,00	9,69	0,00	36,16	93,99	0,00	0,00	
S93	13	15	36,16	15,00	0,43	0,00	33,72	0,19	0,00	0,00	
O93	20	13	33,72	13,00	0,27	0,00	40,45	0,07	0,00	0,00	
N93	28	9	40,45	9,00	4,29	0,00	55,16	18,44	0,00	0,00	
D93	29	8	55,16	8,00	10,18	0,00	65,97	103,72	0,00	0,00	
J94	25	8	65,97	8,00	14,24	0,00	68,73	202,78	0,00	0,00	
F94	23	8	68,73	8,00	15,28	0,00	68,46	233,33	0,00	0,00	
M94	18	8	68,46	8,00	15,17	0,00	63,29	230,19	0,00	0,00	
A94	10	9	63,29	9,00	12,86	0,00	51,43	165,31	0,00	0,00	
M94	5	10	51,43	10,00	8,04	0,00	38,39	64,58	0,00	0,00	
J94	0	13	38,39	13,00	2,02	0,00	23,37	4,09	0,00	0,00	
J94	0	15	23,37	13,37	0,00	0,00	10,00	0,00	1,63	0,00	
A94	0	15	10,00	0,00	0,00	0,00	10,00	0,00	15,00	0,00	
S94	1	15	10,00	0,00	0,00	0,00	11,00	0,00	15,00	0,00	
O94	5	13	11,00	1,00	0,00	0,00	15,00	0,00	12,00	0,00	
N94	13	9	15,00	5,00	0,00	0,00	23,00	0,00	4,00	0,00	
D94	18	8	23,00	8,00	0,00	0,00	33,00	0,00	0,00	0,00	
											6886,55
											47,63
											1,00
<b>Lucro Médio Mensal = 191,29</b>											
<b>Nº Meses Com Cheias = 1</b>						<b>Nº Meses Com Restrições = 5</b>					
<b>Cheia Média = 1,00</b>						<b>Restr.Média = 9,53</b>					

Pode-se observar um Lucro Médio Mensal de 191,29 u.m., associado à ocorrência de um único mês com cheias (de baixo valor: 1,00 u.vol. acima do "limite de cheia" 30,0 u.vol.) e à ocorrência de 5 meses (de entre os 36 meses simulados) com restrições no abastecimento de água, sendo o volume médio em falta relativamente elevado: 9,53 u.vol. Assim, embora no respeitante às cheias a situação seja francamente aceitável, as restrições no abastecimento de água parecem-nos claramente indesejáveis, pelo que a política testada (V1 = 20,00 ; T1 = 30,00 ) não nos parece muito recomendável.

No Quadro seguinte apresentamos os resultados obtidos nas simulações correspondentes às políticas traduzidas por  $V1 = 20, 30, \dots, 90$  /  $T1 = 10, 20, \dots, 90$ :

$V1 \rightarrow$	20	30	40	50	60	70	80	90
$T1 \downarrow$	44,53	41,67	—	—	—	—	—	—
10	C2   R2 5,50   7,28	C3   R2 3,95   5,90	C4   R2	C4   R2	C4   R1	C4   R1	C4   R0	C4   R0
20	—	119,50	114,78	108,62	—	—	—	—
30	C2   R4 5,50   10,2	C2   R3 5,50   8,33	C2   R3 3,80   6,31	C2   R3 5,50   8,62	C3   R3 4,33   6,04	C4   R2	C4   R0	C4   R0
40	—	—	—	174,22	164,06	—	—	—
50	C1   R5 C2   R8	C2   R4 C4   R5	C2   R4 C4   R4	C2   R3 C4   R3	C3   R3 4,33   6,04	C4   R2	C4   R1	C4   R0
60	—	—	—	—	255,90	241,22	—	—
70	C4   R8 C5   R5	C5   R5 C4   R4	C4   R4 C4   R3	C3   R3 11,63   7,01	C3   R2 7,78   5,65	C4   R2	C4   R0	C4   R0
80	—	—	—	—	268,23	269,78	—	—
90	C4   R8 C4   R5	C4   R5 C5   R4	C4   R4 C3   R4	C4   R3 C7   R3	C5   R3 C6   R3	C7   R2 C5   R1	C4   R0 C4   R0	C4   R0

Legenda:

**$V1 = 20$**   

44,53	← Lucro Médio Mensal (u.m.)
C2   R2	← R2: 2 meses com 'restrições'
5,50   7,28	← vol. médio de 'restrição' nesses 2 meses = 7,28 u.vol.

  
 **$T1 = 10$**   

—	—	—	—	—	—	—	—
---	---	---	---	---	---	---	---

  
 ↗ C2: 2 meses com cheias ;  
 vol. médio de cheia nesses 2 meses = 5,50 u.vol.

**Nota:** Sempre que tenham ocorrido mais do que 3 meses com restrições, ou mais do que 3 meses com cheias, considerou-se a correspondente política como 'desadequada', pelo que não se indicou os correspondentes valores médios mensais de lucro, volume de 'restrição' ou volume de cheia.

O Quadro anterior sugere-nos alguns comentários imediatos:

- É importante saber **delinear as experiências** a levar a cabo ! Normalmente (embora, neste problema, não tenha sido o caso) a simulação correspondente a 'uma experiência' é relativamente morosa, pelo que é importante não fazer (pelo menos, de início) uma análise 'muito fina' (neste problema, por exemplo com incrementos unitários de  $V1$  e  $T1$ ...) que pouco acrescentaria, em termos de análise de resultados e que certamente se traduziria num grande acréscimo de tempo de simulação/computação. Neste problema,

após uma primeira análise, poder-se-ia restringir o domínio de variação de V1 e T1 para levar a cabo uma análise 'mais fina'...

- É importante saber **escolher criteriosamente as medidas de desempenho do sistema** ! Por um lado, pretendemos ter uma 'fotografia' tão rica quanto possível mas, por outro lado, pretendemos ter uma 'fotografia' que seja facilmente analisável ! Assim, um número muito elevado de medidas de desempenho pode traduzir-se numa maior dificuldade de análise, acabando por não contribuir para uma melhor análise do funcionamento do sistema ... É, ainda, importante **saber apresentar os resultados 'inteligentemente'** ... A escolha de apresentações tabulares ou gráficas pode ser importante por permitir, com maior facilidade, a comparação do funcionamento do sistema quando submetido a diferentes 'políticas'.

- **A análise de resultados associados a uma série de 'experiências' levadas a cabo com um modelo de simulação, não é, em geral, uma tarefa linear** ... Se tomarmos como exemplo o problema que apresentamos (um problema de simulação muito, muito simples !), constataremos que não é óbvia a escolha da 'melhor' política (de entre as 72 que foram simuladas). Com efeito, o que é melhor para o empresário, não é certamente interessante para o consumidor (que mora a jusante da barragem) ... E o autarca que tivesse que seleccionar uma política de gestão de águas desta albufeira teria uma tarefa bem ingrata: para defender os interesses dos consumidores [ Atenção às eleições autárquicas ! ], o autarca deveria estar disposto a renunciar a grande parte dos lucros que poderia obter !

Na nossa situação privilegiada de 'observadores independentes', poderíamos tentar fazer uma breve análise dos resultados obtidos:

Comecemos por recordar que o 'Limite de Cheia' é igual a 30 u.vol., pelo que não nos parece muito recomendável que se ultrapasse esse limite em mais de 20 %, isto é, em mais de 6 u.vol.. Por outro lado, as necessidades mensais a jusante variam, com o mês, de 8 u.vol. a 15 u.vol., apresentando um valor médio aproximadamente igual a 10 u.vol. - assim, nos meses com restrições (provavelmente, no Verão quando as necessidades atingem as 15 u.vol.) será importante tentar que o volume em falta seja minimizado (por exemplo, poderemos considerar desejável que esse volume não ultrapasse as 6 u.vol.).

Relativamente aos resultados obtidos, pode-se referir em primeiro lugar que dos 72 cenários estudados, 59 são de imediato classificados de 'desadequados' ! Dos 13 cenários 'sobreviventes' parece-nos que os cenários correspondentes a T1 superior a 40 u.vol. podem ser rejeitados, já que os volumes médios de restrição ou de cheia são inaceitavelmente elevados ! ... E já só restam 7 ! Olhando com atenção para esses sete cenários, parece-nos ser justo destacar dois:

$$\begin{aligned} \mathbf{V1 = 30 \text{ u.vol.}; T1 = 10 \text{ u.vol.} \Rightarrow L = 41,67 \text{ u.m.}; C3 (3,95 \text{ u.vol.}); R2 (5,90 \text{ u.vol.})} \\ \mathbf{V1 = 60 \text{ u.vol.}; T1 = 30 \text{ u.vol.} \Rightarrow L = 164,06 \text{ u.m.}; C3 (4,33 \text{ u.vol.}); R3 (6,04 \text{ u.vol.})} \end{aligned}$$

O primeiro dos dois cenários destacados é o preferível na óptica do consumidor: os dois cenários apresentam 3 meses com cheias (de entre os 36 meses simulados), embora o volume médio de cheia seja ligeiramente inferior no primeiro cenário; o volume médio correspondente às restrições é idêntico nos dois cenários mas, é importante realçar que o primeiro cenário apenas apresenta 2 meses com restrições, enquanto que o segundo cenário corresponde a 3 meses com restrições (nos 36 meses simulados).

Numa perspectiva de lucro, o primeiro cenário é 'quatro vezes pior' do que o segundo !

Assim, tal como Pilatos, lavamos as mãos e deixamos ao 'decisor político' responsabilidade pela escolha final !

O problema apresentado merece-nos ainda um comentário adicional sobre os dados fornecidos no enunciado.

Relativamente às **necessidades de água a jusante**, o enunciado indica **valores determinísticos** (ainda que variáveis com o mês) independentes do ano. Tal corresponde, obviamente, a uma simplificação da realidade. Num ano mais quente e seco é natural que as necessidades de água sejam maiores ... Assim, as necessidades de água a jusante deveriam ser, numa representação mais *real*, traduzidos por dados de **natureza aleatória** com determinadas distribuições cujos parâmetros variariam não só com o mês, mas também com o facto de se estar perante um ano mais (ou menos) seco.

Relativamente à **precipitação**, o enunciado fornece-nos dados correspondentes aos anos de 1992, 1993 e 1994. Assim, a **simulação com esses 'dados históricos'**, corresponderá sempre a uma avaliação do tipo "O que teria acontecido em 1992, 1993 ou 1994, se a barragem tivesse sido gerida com esta política ?". Ora, se essa abordagem pode ser importante, especialmente para avaliar o desempenho do sistema numa dada situação gravosa do passado, resta sempre a dúvida sobre o futuro e a sua imprevisibilidade/aleatoriedade. Assim, para o estabelecimento de uma 'política de gestão com uma razoável 'confiança estatística', seria mais útil proceder não a uma **simulação com dados históricos correspondentes a 3 anos**, mas a uma **simulação com 'dados aleatórios' (com comportamento estatístico aceitável...)** **correspondentes a um período muito mais longo** (por exemplo, 100 ou 200 anos).

Tudo questões muito interessantes ...

## ALGUNS 'ASPECTOS TÉCNICOS' DA SIMULAÇÃO

Nesta secção faremos uma abordagem de alguns *aspectos técnicos* mais importantes a ter em conta na abordagem de um problema de Simulação. Começaremos por apresentar inicialmente algumas noções básicas sobre fluxogramas, apresentaremos em seguida conceitos básicos de Estatística fundamentais em Simulação, discutiremos com brevidade a influência das condições iniciais num modelo de simulação e, finalmente, discutiremos a influência da duração da simulação na precisão dos resultados.

### • Noções Básicas sobre Fluxogramas

Recordemo-nos do problema apresentado na secção anterior ( "A Barragem de Pós-Boa" ) e das instruções que correspondiam ao 'núcleo' do modelo de simulação:

**1 - Inicializar as variáveis associadas às medidas de desempenho, igualando-as a zero:**

**SL** = somatório dos lucros mensais; **NMCC** = nº meses com cheia ; **SC** =  $\Sigma$  dos volumes de cheia;  
**NMCR** = nº meses com restrições ; **SR** =  $\Sigma$  dos vol.s corresp.s às restrições

**2 - Indicar uma política de gestão ( V1 ; T1 ). Indicar o valor a atribuir à condição inicial ( V0 ).**

**3 - Iniciar a simulação:**

Repetir para os anos de 1992 a 1994:

Repetir para os meses de Janeiro a Dezembro:

$$\begin{aligned}
 N &= \begin{cases} Nec & ; V0 - Nec \geq 10 \\ V0 - 10 & ; V0 - Nec < 10 \end{cases} \\
 V &= V0 - N \\
 V0 - Nec < 10 &\Rightarrow \begin{cases} NMCR = NMCR + 1 & [ v. Nota 1 ] \\ SR = SR + ( Nec - V0 + 10 ) & \\ & ; V < V1 \end{cases} \\
 T &= \begin{cases} 0 & \\ \frac{T1 \cdot (V - V1)}{100 - V1} & ; V \in [ V1 ; 100 ] \end{cases} \\
 V &= V0 - N - T \\
 L &= T^2 ; \quad SL = SL + L \\
 DS &= \begin{cases} 0 & ; V0 - N - T + P \leq 100 \\ V0 - N - T + P - 100 & ; V0 - N - T + P > 100 \end{cases} \\
 VF &= V0 - N - T + P - DS \\
 T + DS > 30 &\Rightarrow \begin{cases} NMCC = NMCC + 1 \\ SC = SC + ( T + DS - 30 ) \end{cases} \\
 V0 &= VF \quad [ v. Nota 2 ]
 \end{aligned}$$

**4 - Apurar os valores das Medidas de Desempenho:**

$$\begin{aligned}
 \text{Lucro Médio Mensal} &= SL / 36 \\
 \text{Nº Meses Com Cheias} &= NMCC && ; \text{Cheia Média} = SC / NMCC \\
 \text{Nº Meses Com Restrições} &= NMCR && ; \text{Restrição Média} = SR / NMCR
 \end{aligned}$$

Será esta a melhor forma de apresentarmos o 'núcleo' do nosso modelo de simulação ? Cremos que não. Especialmente quando pretendemos proceder a uma posterior implementação informática do modelo, o **fluxograma** corresponde a uma apresentação 'mais natural'.

Um fluxograma é uma **representação gráfica** de uma **sequência de instruções**. A leitura de um fluxograma torna-se muito mais rápida, do que a leitura da correspondente série de instruções 'escritas por extenso'. É particularmente útil podermos dispor de um fluxograma, já que tal, para a generalidade das linguagens de programação, facilita a 'transcrição' das instruções no correspondente programa. Um fluxograma permite ainda uma fácil identificação de 'blocos de instruções' que se repitam num dado programa. Cada um desses 'blocos' pode ser programado como uma 'rotina', que será invocada repetidamente pelo 'programa principal' (ou, eventualmente, por outras 'rotinas').

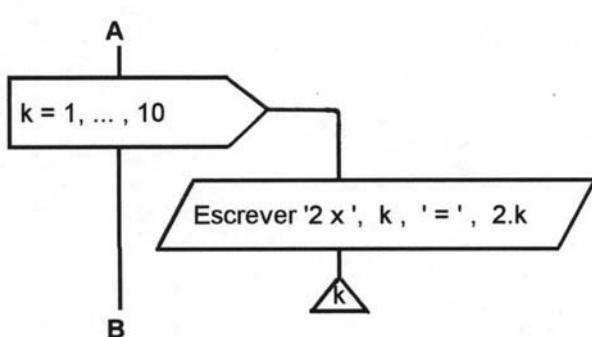
Os tipos de instruções mais importantes são:

- **instruções de atribuição** (por exemplo, "atribua-se a X o valor 2", isto é, " $X = 2$ "), **instruções de cálculo** (por exemplo, "some-se 2 ao valor atribuído à variável X e atribua-se o resultado a Y", isto é, " $Y = X + 2$ ", ou ainda, "adicone-se 2 unidades à variável X", ou seja, "some-se 2 ao valor atribuído à variável X e atribua-se o resultado à variável X", isto é, " $X = X + 2$ "). Num fluxograma, as instruções de atribuição e de cálculo são representadas dentro de **rectângulos**.

- **instruções de entrada ou saída** (em terminologia anglo-saxónica, "input" e "output"), ou seja, instruções de leitura ou de escrita que permitem a interacção do computador com o utilizador (por exemplo, "Pedir ao utilizador o valor de X", ou seja, " $X = ?$ ", ou ainda, "Imprimir o valor de X", isto é, "Imprimir ' $X =$ ' seguido do valor atribuído à variável X", ou seja, "Imprimir ' $X =$ ',  $X$ "). Num fluxograma, as instruções de entrada ou saída são representadas dentro de **paralelogramos**.

- **instruções de teste** (por exemplo, "O valor atribuído à variável X é igual a 3 ?", isto é, " $X = 3 ?$ ", ou ainda, "O valor atribuído à variável X é igual ao valor atribuído à variável Y ?", isto é, " $X = Y ?$ "). Num fluxograma, as instruções de entrada ou saída são representadas dentro de **losangos**.

- **instruções de repetição**, ou de ciclo (por exemplo, "repetir para k de 1 até 10: 'escrever '2 x ', k, '=' , 2.k'", isto é, escrever a tabuada dos 2). Representa-se, em seguida, o troço de fluxograma que contém a instrução que se apresentou como exemplo:

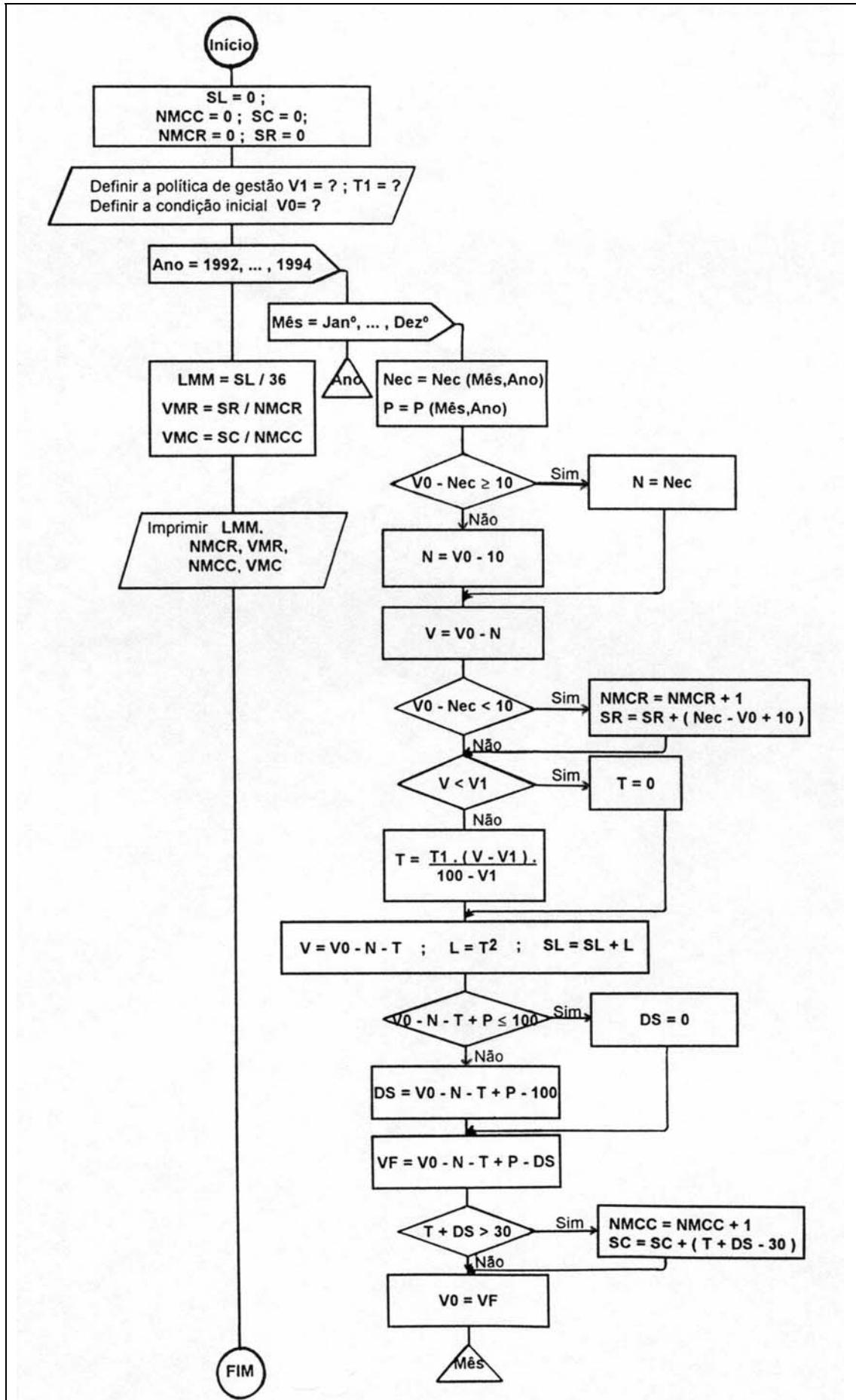


Depois de executadas a instrução **A**, inicia-se o ciclo controlado pela variável  $k$ , que é inicializada ( $k = 1$ ).

Inicialmente ( $k=1$ ), escreve-se ' $2 \times 1 = 2$ ' e  $k$  é incrementada de 1 unidade, passando a  $k=2$ . Como  $k \leq 10$ , volta a executar-se a instrução

de escrita, escrevendo-se, então, ' $2 \times 2 = 4$ '. A variável  $k$  volta a ser incrementada de 1 unidade, passando a  $k=3$ . Como  $k \leq 10$ , volta a executar-se a instrução de escrita, escrevendo-se, então, ' $2 \times 3 = 6$ '. A variável  $k$  volta a ser incrementada ( $\dots$ ), passando a  $k=10$ . Como  $k \leq 10$ , volta a executar-se a instrução de escrita, escrevendo-se, então, ' $2 \times 10 = 20$ '. A variável  $k$  volta a ser incrementada passando a  $k=11$ . Como  $k > 10$ , encerra-se o ciclo, passando-se à execução da instrução **B**.

Executemos agora o fluxograma correspondente ao 'núcleo do modelo desenvolvido para o problema da Barragem de Pós-Boa':



Relativamente ao fluxograma apresentado, poderemos referir que, tal como seria de esperar, a sequência 'gráfica' de instruções segue de modo evidente a sequência 'por extenso' apresentada anteriormente. É importante referir-se que, logo após o início do ciclo 'Mês', se afecta às variáveis **Nec** e **P**, respectivamente, os valores correspondentes das necessidades de água a jusante para aquele mês e ano (**Nec (Mês,Ano)**) e da precipitação também para esse mês e ano (**P (Mês,Ano)**). Esses valores poderiam estar 'guardados' em dois vectores, para onde previamente se deveria 'transferir' essa informação, ou, alternativamente, poder-se-ia fazer a leitura desses valores a partir de dois 'ficheiros'. Num cenário de simulação 'a sério', isto é, para uma simulação sem ser com dados históricos, esse rectângulo do fluxograma poderia corresponder a "**Gerar P e Nec, de acordo com as distribuições previamente indicadas**". Retomaremos posteriormente esta questão.

De referir ainda que, a maior parte das instruções pertencem ao ciclo 'Mês', isto é, são executadas 'todos os meses'. Com a instrução  $V0 = VF$ , isto é, atribuição do valor de  $VF$  a  $V0$ , termina-se o ciclo 'Mês'.

O ciclo 'Ano' apenas contém 'uma instrução': o ciclo 'Mês'. Terminado o ciclo 'Ano', são calculados os valores das **medidas de desempenho do sistema**: LMM (lucro médio mensal), VMR (volume médio de 'restrições') e VMC (volume médio de cheias). Após a impressão dos valores das referidas medidas de desempenho, bem como de NMCR (número de meses com 'restrições') e NMCC (número de meses com cheias) termina-se a execução.



Se sabe programar computadores, esta é uma boa altura para converter o fluxograma apresentado num programa muito simples, que lhe permitirá testar diferentes políticas de gestão de águas da Barragem de Pós-Boa !

Se não sabe programar, não sabe o que está a perder ! ...

## • Conceitos Básicos de Estatística Fundamentais em Simulação

Há alguns conceitos básicos de Estatística que são particularmente importantes para se elaborar um modelo de simulação com 'qualidade'.

No exemplo que apresentamos anteriormente ('A Barragem de Pós-Boa'), efectuamos uma simulação com dados históricos, correspondente aos anos de 1992, 1993 e 1994. Como se viu, para cada política de gestão de águas interessava-nos obter algumas Medidas de Desempenho do Sistema, para podermos ajuizar da adequabilidade dessa política de gestão. Embora tivéssemos simulado apenas três anos, não tem grande interesse saber o que aconteceu 'mês a mês'. Preferimos obter uma 'visão global' com menor volume de informação - daí que o **Valor Médio** seja uma noção que, obviamente, esteja sempre subjacente ao apuramento da generalidade das Medidas de Desempenho de um Sistema.

Claro que todos sabemos estimar o valor médio de uma amostra. Basta recorrer ao **estimador 'Média Amostral'**  $\bar{X}$  e, obter uma **estimativa pontual**  $\bar{x}$ , a partir de uma amostra ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ):

$$\bar{X} = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n X_i) \quad \rightarrow \quad \bar{x} = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n x_i)$$

Ao utilizarmos o estimador Média Amostral reduzimos consideravelmente a informação: fazemos corresponder à amostra ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) apenas um valor - a estimativa pontual do valor médio,  $\bar{x}$ . Esta estimativa é muito importante, já que, grosso modo, representa o 'centro de gravidade' da distribuição de  $X$ .

Poderemos discutir a *qualidade* dessa estimativa pontual, acabando por introduzir a noção de **estimativa por intervalo de confiança** que também será muito útil nos modelos de Simulação.

Antes, porém, parece-nos mais importante referir que, em muitas aplicações, não só é importante, para uma dada variável, ter noção da **localização** do 'centro de gravidade' da sua distribuição, como também é relevante ter-se noção da **dispersão** dessa mesma distribuição. A **Variância** é uma importante medida da dispersão de uma variável aleatória, podendo-se, a partir do estimador 'Variância Amostral'  $S^2$  e de uma amostra  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  obter uma estimativa pontual  $s^2$ :

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \left[ \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 \right) / n - \bar{X}^2 \right]$$

$$\downarrow$$

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \left[ \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) / n - \bar{x}^2 \right]$$

O **Desvio Padrão** (igual à raiz quadrada da Variância), é expresso nas mesmas unidades que o Valor Médio.

O conhecimento do valor médio e do desvio padrão de uma variável permite-nos, de imediato, ter uma noção muito razoável da sua 'distribuição'. Com efeito, a **Desigualdade de Tchebycheff** indica que, para uma dada variável aleatória  $X$  (contínua ou discreta e independentemente da sua distribuição) com valor médio  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$  e para qualquer número positivo  $k$ , se tem:

$$P(|X - \mu| < k \cdot \sigma) \geq 1 - 1/k^2$$

Ou seja, para  $k = 2$ , tem-se  $P(\mu - 2 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 2 \cdot \sigma) \geq 0,750$  e, para  $k = 3$ , tem-se  $P(\mu - 3 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 3 \cdot \sigma) \geq 0,889$ .

O conhecimento do valor médio e do desvio padrão (ou da variância) da distribuição de uma variável são, como se referiu, muito importantes. No entanto, há situações em que é necessário conhecer algo mais, com vista à elaboração de propostas de ajustamento de distribuição. O que se passa com a **simetria da distribuição**? E com o seu 'pico'? Para tal, poderemos determinar estimativas do **coeficiente de assimetria** e do **coeficiente de kurtosis**.

Sabe-se que uma distribuição simétrica tem coeficiente de assimetria nulo (mas, o inverso nem sempre é verdade...). Sabe-se que um coeficiente de assimetria positivo corresponde a uma distribuição assimétrica com 'cauda à direita', isto é, com maior probabilidade de ocorrência de valores extremos elevados (*máximos*), do que de valores extremos baixos (*mínimos*). A distribuição Exponencial tem coeficiente de assimetria igual a 2 (independentemente do valor médio da distribuição).

Por outro lado, a distribuição Normal tem um coeficiente de kurtosis igual a 3 (independentemente dos valores dos parâmetros) e um coeficiente superior a 3 indica um 'pico' mais acentuado que o da distribuição Normal.

Assim, antes de se pensar em ajustar uma distribuição Normal a um conjunto de observações é bom verificar-se se as estimativas do coeficiente de assimetria e do coeficiente de kurtosis se aproximam, respectivamente, de 0 e de 3.

Definamos, em seguida, o Coeficiente de Assimetria e o Coeficiente de Kurtosis de uma distribuição (para tal, designemos por  $\mu$  o valor médio, por  $\sigma$  o desvio padrão e por  $\mu_i$  o i-ésimo momento central da distribuição):

Coeficiente de Assimetria	Coeficiente de Kurtosis
$\gamma_1 = \mu_3 / \sigma^3$ $(\mu_3 = E[(X - \mu)^3])$	$\gamma_2 = \mu_4 / \sigma^4$ $(\mu_4 = E[(X - \mu)^4])$

Designando por  $s'$  a estimativa do desvio padrão e por  $S_1$  o somatório das  $n$  observações  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,  $S_2$  o somatório dos quadrados das  $n$  observações e  $S_3$  o somatório dos cubos das  $n$  observações, pode-se determinar, do modo seguinte, uma **estimativa do valor do Coeficiente de Assimetria**:

$$g_1 = [ S_3 / n - 3 \cdot S_1 \cdot S_2 / n^2 + 2 \cdot S_1^3 / n^3 ] / s'^3$$

Designando, adicionalmente, por  $S_4$  o somatório das quartas potências das  $n$  observações  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , pode-se determinar, do modo seguinte, uma **estimativa do valor do Coeficiente de Kurtosis**:

$$g_2 = [ S_4 / n - 4 \cdot S_1 \cdot S_3 / n^2 + 6 \cdot S_1^2 \cdot S_2 / n^3 - 3 \cdot S_1^4 / n^4 ] / s'^4$$

Já tivemos a oportunidade de referir a grande importância da estimação pontual do valor médio da distribuição de uma variável aleatória. Desde logo se referiu que uma alternativa 'mais rica' à estimação pontual do valor médio é a **estimação por intervalos de confiança do valor médio**. Nesta estimação, envolvemos de algum modo a variabilidade da amostra, o que poderá ser muito útil em determinados modelos de simulação (posteriormente, aquando da abordagem da questão 'duração da simulação versus precisão dos resultados', aplicaremos este conceito).

Se  $X$  for proveniente de uma população Normal com média desconhecida  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$  conhecido, poderemos indicar o **Intervalo de Confiança a 95 % para o Valor Médio  $\mu$** :

$$[ \bar{X} - 1,96 \cdot \sigma / \sqrt{n} ; \bar{X} + 1,96 \cdot \sigma / \sqrt{n} ]$$

Para  $n$  elevado, o que acontece quando se está a simular 'a sério', poderemos, sem grande perda de rigor, concretizar uma **estimativa do Intervalo de Confiança a 95 % para o Valor Médio  $\mu$  a partir de uma amostra ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ )**:

$$[ \bar{x} - 1,96 \cdot s' / \sqrt{n} ; \bar{x} + 1,96 \cdot s' / \sqrt{n} ]$$

( $\bar{x}$  e  $s'$  designam respectivamente as estimativas pontuais do valor médio e do desvio padrão obtidas a partir da amostra referida).

É importante notar que, para um dado nível de confiança, a **amplitude do intervalo de confiança para o Valor Médio**

- é independente da estimativa do valor médio
- aumenta com  $s'$ , isto é, com a variabilidade da amostra
- diminui com o tamanho da amostra (embora não linearmente, mas com a raiz quadrada de  $n$ !).

A amplitude do intervalo de confiança para o valor médio aumenta com o nível de confiança... No entanto, tal não nos interessará particularmente, já que, nos modelos de simulação, só consideraremos o nível de confiança 95 %.

Um último conceito básico de Estatística que se revela muito útil em algumas análises de resultados de experiências com modelos de simulação diz respeito ao estudo da eventual **relação linear existente entre duas variáveis**.

Sejam  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$  pares de observações correspondentes às variáveis X e Y. Se se admitir a existência de uma relação linear entre as variáveis X e Y dada por  $Y = A + B \cdot X$ , poderemos determinar, pelo Método dos Mínimos Quadrados as estimativas **a** e **b** seguintes, respectivamente, dos coeficientes **A** e **B**:

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sum x_i \cdot y_i - (\sum x_i \cdot \sum y_i) / n}{\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 / n} \quad \text{Nota: Todos os somatórios correspondem a } i = 1, \dots, n. \\ a &= \frac{\sum y_i / n - b \cdot (\sum x_i / n)}{} \end{aligned}$$

Para avaliar a adequabilidade do ajustamento linear, poderemos estimar  $\rho_{X,Y}$  com

$$r_{X,Y} = \frac{\sum x_i \cdot y_i - (\sum x_i \cdot \sum y_i) / n}{\sqrt{[\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 / n] \cdot [\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2 / n]}}$$

**Nota:** Todos os somatórios correspondem a  $i = 1, \dots, n$ .

Como se sabe,  $\rho_{X,Y}$  toma valores no intervalo  $[-1 ; 1]$ . Valores muito próximos de  $+1$  ou de  $-1$  indicam um muito bom ajustamento linear correspondente a uma recta com declive, respectivamente, positivo ou negativo. Valores entre  $-0,5$  e  $0,5$  indicam um fraco ajustamento linear. Sabe-se que se X e Y são variáveis aleatórias independentes, então  $\rho_{X,Y} = 0$ . Contudo não é legítimo afirmar que se  $\rho_{X,Y} = 0$ , então X e Y são independentes ...

## • Influência das Condições Iniciais num Modelo de Simulação

Recordemo-nos do problema "A Barragem de Pós-Boa". O modelo desenvolvido necessita de um **valor inicial** de volume de água na albufeira ( $V_0$ ) para se dar início à simulação. Nas simulações levadas a cabo e cujos resultados foram apresentados anteriormente adoptou-se  $V_0 = 50$  (isto é, a albufeira estava "meia cheia").

É evidente a influência de  $V_0$  nos resultados da simulação do funcionamento da Barragem de Pós-Boa relativa aos anos de 1992, 1993 e 1994. Quanto maior for o volume inicial, menor será a probabilidade de ocorrência de situações de seca e maior será a probabilidade de ocorrência de situações de cheia.

Nas simulações levadas a cabo com  $V_0 = 50$  u.vol. destacaram-se duas políticas de gestão de água: **V1 = 30 u.vol.; T1 = 10 u.vol.** e **V1 = 60 u.vol.; T1 = 30 u.vol.**. No Quadro seguinte observaremos a variação de desempenho dessas duas políticas em função de  $V_0$  ( $V_0 = 10, 20, \dots, 100$ ):

$V_0 \rightarrow$ $(V_1; T_1)$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
(30;10)	39,55	39,70	40,19	40,85	41,67	—	—	—	—	—
	C3   R3 3,95   5,90	C3   R2 3,95   5,90	C3   R2 3,95   5,90	C3   R2 3,95   5,90	C3   R2 3,95   5,90	C4   R2	C4   R2	C4   R2	C5   R2	C5   R2
(60;30)	—	148,38	151,81	158,38	164,06	166,88	171,79	175,83	183,19	193,88
	C2   R4 5,50   6,04	C2   R3 5,50   6,04	C2   R3 5,50   6,04	C2   R3 5,50   6,04	C3   R3 4,33   6,04					

**Legenda:**  $V_0 = 10$

$(V_1; T_1) =$ 

39,55	← Lucro Médio Mensal (u.m.)
C3   R3	← R3: 3 meses com 'restrições'
3,95   5,90	← vol. med. 'restrição' nesses 2 meses = 5,90 u.vol.

↖ C3: 3 meses com cheias;  
vol. médio de cheia nesses 3 meses = 3,95 u.vol.

**Nota:**

Sempre que tenham ocorrido mais de 3 meses com restrições, ou mais de que 3 meses com cheias, considere

rou-se a correspondente política como 'desadequada'.

Como se pode observar, o valor inicial  $V_0$  correspondente ao volume de água inicialmente na albufeira exerce uma razoável influência na simulação levada a cabo. Para cada uma das duas políticas testadas, podemos observar um aumento de lucro com  $V_0$  (o que é natural pois, havendo mais água na albufeira, mais água se pode turbinar e maior será o lucro). Observa-se, ainda, que um aumento de  $V_0$  está geralmente associado a uma aumento de situações de cheia e (claro está !) a uma diminuição das situações de 'restrições'. É importante recordarmo-nos que, quer o lucro, quer os volumes de cheia e de 'restrições' são variáveis médias mensais ... E, ainda assim, foi possível detectar a influência de  $V_0$ .

Se tivéssemos simulado o funcionamento da barragem durante 10 anos, certamente que a influência de  $V_0$  se teria atenuado ligeiramente. E, é claro que se estivéssemos a simular um número de anos muito elevado (por exemplo, 100), não seria muito credível que essas **medidas de desempenho médio** permitissem observar uma grande influência de  $V_0$ . Com efeito, **em geral, quanto maior for a 'duração' da simulação, menor será a influência das condições iniciais.**

Assim, quando se recerar que as condições iniciais possam influenciar os resultados da simulação, poderemos **reservar um período inicial da duração da simulação para atenuar a influência das condições iniciais.** Nesse período, é feita a simulação do sistema, mas não se 'actualiza' as variáveis que se destinam a apurar as medidas de desempenho do sistema. Por exemplo, no problema "A Barragem de Pós-Boa", não se actualizaria as variáveis SL, NMCC, SC, NMCR e SR durante esse "período inicial"; nesse período apenas se registaria a evolução do volume de água na albufeira. Na secção IV destes apontamentos retomaremos este problema e teremos oportunidade para aprofundar a 'questão da influência das condições iniciais'.

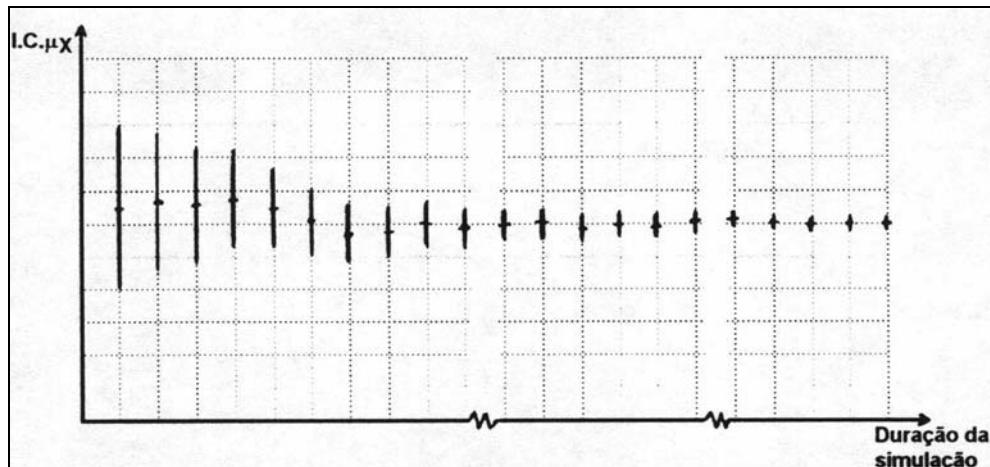
Um alerta deve ser feito relativamente à influência das condições iniciais: há sistemas que são muito sensíveis aos valores atribuídos às variáveis que traduzem as condições iniciais. Nesses casos, é preciso ter-se muito cuidado na atribuição desses valores, já que uma escolha irreflectida de valores para as variáveis que traduzem as condições iniciais pode 'desequilibrar' irremediavelmente o sistema, não permitindo uma análise adequada .... Imaginemos que se está a simular o funcionamento de uma instituição bancária. A escolha de uma 'situação inicial muito má' pode, em determinados cenários, acarretar a falência (simulada) da instituição; pelo contrário, a escolha de uma 'situação inicial muito confortável' pode originar uma elevada rentabilidade (simulada) da instituição completamente desajustada da realidade.

### • Duração da Simulação versus Precisão dos Resultados

Empiricamente podemos esperar que a um **aumento da 'duração' de uma simulação** esteja associado um **aumento da precisão dos resultados**. Com efeito, e tomando o problema "A Barragem de Pós-Boa" como exemplo, quando se aumenta a 'duração' da simulação (isto é, quando se aumenta o número de anos simulados), as **medidas de desempenho médio do sistema** passam a ser estimadas a partir de amostras maiores e, consequentemente, diminui a amplitude dos correspondentes intervalos de confiança para os valores médios dessas medidas de desempenho. Simular o funcionamento da Barragem de Pós-Boa durante 3 anos significa estimar um lucro médio mensal a partir de 36 observações. Aumentar o período simulado para 100 anos, corresponde a estimar o lucro médio mensal a partir de uma amostra com 1200 observações !

É importante recordarmo-nos que a amplitude de um intervalo de confiança para o valor médio de uma dada variável diminui com o aumento do tamanho da amostra, que serve de base ao cálculo desse intervalo. Contudo, essa **diminuição da amplitude** não é **proporcional** ao tamanho da amostra mas, à **raiz quadrada do tamanho da amostra**.

Daqui decorre uma importante constatação: à medida que se aumenta a duração da simulação, a diminuição da amplitude dos intervalos de confiança para os valores médios das medidas de desempenho do sistema é cada vez menor (embora continue a ocorrer), isto é, verifica-se um acréscimo de precisão dos resultados cada vez menor. Na figura seguinte esboça-se a variação da amplitude de um intervalo de confiança para o valor médio de uma medida de desempenho,  $X$ , de um sistema que está a ser simulado com a duração da simulação:



Como se pode observar, a partir de certa altura só com um grande acréscimo na duração da simulação / tempo de computação se consegue um pequeno acréscimo de precisão (isto é, uma diminuição ligeira da amplitude do intervalo de confiança).

Assim, fixar a duração de uma simulação é uma decisão muito importante, já que terá reflexos na precisão dos resultados.

Como, em geral, se desconhece a variabilidade das variáveis que são utilizadas para avaliar as medidas de desempenho do sistema, não é habitual indicar, *a priori*, a duração da simulação, tendo em vista a obtenção de determinado nível de precisão dos resultados. Alternativamente, pode-se **impor um determinado nível de precisão dos resultados** (explicitando as amplitudes máximas dos intervalos de confiança respectivos) e **indicar uma duração máxima para a simulação** (não vá dar-se o caso de se ter exigido uma precisão inatingível num tempo de simulação/computação aceitável). O próprio modelo de simulação poderá, **periodicamente, verificar se os níveis de precisão impostos para as diferentes variáveis são cumpridos** e, em caso afirmativo, terminar a simulação; caso contrário a simulação prossegue até nova avaliação, respeitando-se adicionalmente a duração máxima imposta inicialmente - trata-se de um '**mecanismo auto-stop**'. Também é habitual exigir-se uma **duração mínima da simulação**, independentemente da precisão exigida aos resultados, visando, assim, garantir-se uma **solidez estatística** mínima dos resultados. Esquematicamente, pode-se representar as diferentes *fases* de uma simulação, do modo seguinte:

Fase inicial	Simulação efectiva	Duração da Simulação
Atenuação da Influência das condições iniciais	<p>A diagram illustrating the duration of simulation. It shows a horizontal timeline starting with 'Atenuação da Influência das condições iniciais'. An arrow points upwards from this point to a series of eight upward-pointing arrows above the timeline. The space between the first and second upward arrows is labeled 'Duração Mínima da Simulação'. The space between the eighth and ninth upward arrows is labeled 'Duração Máxima da Simulação'. The text 'Avaliações periódicas da precisão dos resultados' is positioned above the eighth upward arrow.</p>	

## MÉTODOS DE GERAÇÃO DE NÚMEROS PSEUDO-ALEATÓRIOS

### • Introdução

Começámos por abordar o problema "A Barragem de Pós-Boa" e desenvolvemos um modelo de simulação simplificado que nos permitiu testar diferentes políticas de gestão da barragem. Ao efectuarmos uma **simulação com 'dados históricos'** relativos aos anos de 1992, 1993 e 1994 estivemos a avaliar o que teria acontecido nesses anos se a barragem tivesse sido gerida com uma determinada política. Referimos, então, que essa abordagem pode ser importante, especialmente para avaliar o desempenho do sistema numa dada situação gravosa do passado, mas que não nos deixa muito tranquilos relativamente ao futuro e à sua imprevisibilidade/aleatoriedade.

Para uma avaliação mais cuidadosa da adequabilidade de uma dada política de gestão da barragem gostaríamos de dispor de uma amostra maior (e não apenas relativa a três anos). Mas, ainda que dispuséssemos de uma amostra maior, uma simulação com 'dados históricos' só permitiria avaliar o que teria acontecido nos anos relativos à amostra ... Assim, seria certamente desejável que, em vez de uma amostra de dados relativos à precipitação e outra relativa às necessidades de água a jusante, pudessemos dispor das correspondentes distribuições estatísticas.

A partir das distribuições estatísticas que descrevem o comportamento das variáveis referidas, poderíamos levar a cabo uma **simulação com 'dados aleatórios'** (*com comportamento estatístico aceitável face às distribuições...*) **correspondentes a um período muito mais longo** (por exemplo, 100 ou 200 anos). Para tal, no entanto, precisaríamos de saber gerar os referidos '**dados aleatórios**'.

Esta secção dos apontamentos visa exactamente abordar os **métodos de geração de números pseudo-aleatórios** (NPA). "Números **pseudo-aleatórios** ?" - esta é a primeira dúvida que o leitor levantará. Na realidade, vamos aprender a conceber **algoritmos perfeitamente determinísticos no seu funcionamento, que a partir de um primeiro número (a semente), geram uma sequência de números que globalmente apresentam o comportamento estatístico desejável**. A cada semente estará associada uma sequência de NPA. Assim, temos que reconhecer que *rigorosamente* não estaremos a falar de números aleatórios ... mas de números **pseudo-aleatórios** ...

Uma questão clássica surge agora: "Se dispusesse de dois métodos de geração - um que lhe permitisse gerar **números realmente aleatórios** e outro que originasse **números pseudo-aleatórios** (com a mesma qualidade estatística) - qual o método que preferiria adoptar ?"

Claro que a resposta óbvia é "O método que origina números realmente aleatórios !..." Só que nem sempre a resposta óbvia é a resposta mais adequada ... Com efeito, se utilizarmos números realmente aleatórios na simulação d' "A Barragem de Pós-Boa" para compararmos duas políticas de gestão distintas, as ocorrências geradas na simulação associada à primeira política serão distintas das ocorrências geradas na simulação associada à segunda política ... o que não sendo propriamente um *problema*, ainda assim não nos permite comparar *exactamente* as duas políticas sujeitas à *mesma* aleatoriedade ...

É evidente que este problema desaparece com os números pseudo-aleatórios... Basta usar a mesma *semente* nos processos de geração para estarmos a gerir exactamente a mesma realidade (em termos de precipitação e necessidades de água) sujeita, num caso,

à primeira política de gestão e, no outro caso, à segunda política de gestão ... Assim, nestas circunstâncias, as diferenças de resultados observados nas simulações correspondentes a essas duas políticas dever-se-iam exclusivamente às políticas e não à aleatoriedade da simulação.

Começaremos por aprender a gerar NPA com distribuição Uniforme [ 0 ; 1 ], e, em seguida, veremos métodos de transformação noutras distribuições.

### • Geração de NPA com Distribuição Uniforme [ 0 ; 1 ]

Para gerarmos NPA com distribuição Uniforme [ 0 ; 1 ] utilizaremos o chamado **Método Congruencial Misto**, que consiste na utilização de uma relação recursiva do tipo:

$$x_{i+1} = ( a \cdot x_i + c ) \bmod m$$

com  $a, c, m$  inteiros positivos e  $a, c < m$

A operação 'y mod w' traduz-se por '**resto da divisão inteira de y por w**'. [Por exemplo,  $2 \bmod 3 = 2$ ;  $3 \bmod 2 = 1$ ;  $8 \bmod 3 = 2$ .]

De notar que a sequência de números obtidos dependerá da escolha das constantes **a, c e m**, bem como do número **semente**,  $x_0$ , que inicia o processo.

Ilustremos a utilização do **Método Congruencial Misto** para  $a = 4$ ,  $c = 3$  e  $m = 5$ , a partir da **semente**  $x_0 = 3$ :

i	$x_i$	$4 \cdot x_i + 3$	$x_{i+1} = ( 4 \cdot x_i + 3 ) \bmod 5$
0	$x_0 = 3$	15	$0 = x_1$
1	$x_1 = 0$	3	$3 = x_2$
2	$x_2 = 3$	15	$0 = x_3$
3	$x_3 = 0$	3	$3 = x_4$
4	$x_4 = 3$	15	$0 = x_5$
5	$x_5 = 0$	3	$3 = x_6$

Como se pode ver, a sequência obtida foi 3, 0, 3, 0, 3, 0, 3, ... Ou seja, de aleatório não tem nada ... e tem muito pouca variação ... Moral da história: os valores de **a, c, m e  $x_0$**  adoptados deram origem a uma sequência totalmente inútil, para efeitos de geração de número pseudo-aleatórios ...

Tentemos uma nova sequência, agora a partir de **a = 6, c = 4, m = 10 e  $x_0 = 7$** :

i	$x_i$	$6 \cdot x_i + 4$	$x_{i+1} = ( 6 \cdot x_i + 4 ) \bmod 10$
0	$x_0 = 7$	46	$6 = x_1$
1	$x_1 = 6$	40	$0 = x_2$
2	$x_2 = 0$	4	$4 = x_3$
3	$x_3 = 4$	28	$8 = x_4$
4	$x_4 = 8$	52	$2 = x_5$
5	$x_5 = 2$	16	$6 = x_6$
6	$x_6 = 6$	40	$0 = x_7$
7	$x_7 = 0$	4	$4 = x_8$
8	$x_8 = 4$	28	$8 = x_9$
9	$x_9 = 8$	52	$2 = x_{10}$

Como se vê a sequência obtida já foi um pouco mais interessante: 7, 6, 0, 4, 8, 2, 6, 0, 4, 8, 2, ... Obtivemos uma sequência de cinco números, que se repete indefinidamente ...

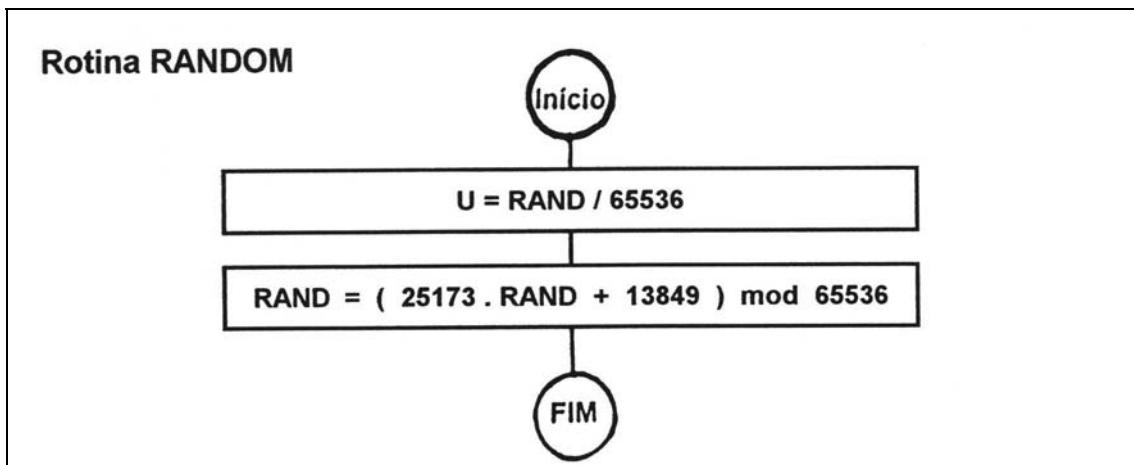
Gostaríamos de descobrir valores para as constantes **a**, **c** e **m** que, a cada *semente*, fizesse corresponder um *ciclo* tão grande quanto possível (isto é, gostaríamos de ter gerado muitos valores antes de se iniciar a repetição).

A utilização do Método Congruencial Misto, com **a** = **25173**, **c** = **13849** e **m** = **65536**, permite-nos obter sequências de 65536 valores inteiros (entre 0 e 65535) para cada semente. Adicionalmente, verifica-se que as sequências são uniformemente distribuídas (entre 0 e 65535) e que se pode admitir a independência entre valores gerados consecutivos.

$$x_{i+1} = (25173 \cdot x_i + 13849) \bmod 65536$$

**Se dividirmos cada valor gerado por 65536, obteremos** um valor pertencente a  $[0; 1[$ . Para cada *semente*, poder-se-á, assim, obter uma **grande sequência** de valores (65536) que tem **comportamento Uniforme**  $[0; 1]$  e que exibe **independência**, sob ponto de vista estatístico, **entre valores gerados consecutivos**. O gerador assim constituído é **muito simples** e de **fácil implementação informática**, cobrindo com **grande densidade**, o intervalo  $[0; 1]$  (o que possibilita a sua utilização em aplicações de maior rigor).

Apresentaremos, em seguida, o fluxograma da **rotina 'RANDOM'** (correspondente ao gerador apresentado), que afecta à variável U o NPA  $U[0;1]$  gerado :



Antes da primeira **invocação da 'RANDOM'** a variável RAND deverá ser inicializada com o valor da *semente*. Após a primeira invocação da rotina 'RANDOM' é calculado o primeiro NPA  $U[0;1]$ , que será igual ao quociente da *semente* por 65536. Em seguida, a variável RAND é 'actualizada', de acordo com a relação recursiva correspondente ao Método Congruencial Misto. Após 65536 invocações da rotina 'RANDOM', a partir de uma dada *semente*, RAND volta a ficar igual à *semente*, pelo que, a partir daí, se repetirá a sequência de NPA gerados.

Assumamos a *semente*  $RAND = 10000$  e determinemos os primeiros valores gerados:

RAND <sub>inicial</sub>	U	RAND <sub>final</sub>
10000	0,1526	20073
20073	0,3063	28918
28918	0,4413	58311

Utilizando a *semente 10000* e o gerador descrito na rotina 'RANDOM' podemos obter a seguinte **TABELA DE NÚMEROS PSEUDO-ALEATÓRIOS COM DISTRIBUIÇÃO UNIFORME [ 0 , 1 ]:**

0,1526 0,3063 0,4413 0,8898 0,0202 0,7723 0,1453 0,7020 0,4005 0,3174
0,0730 0,0229 0,5279 0,8635 0,5836 0,3996 0,8867 0,5824 0,2867 0,6288
0,2114 0,8961 0,0415 0,7574 0,4862 0,4763 0,9575 0,0823 0,9456 0,2451
0,3940 0,1503 0,0740 0,3742 0,9603 0,7584 0,6057 0,2855 0,5159 0,9534
0,5250 0,6509 0,1701 0,0322 0,0665 0,3923 0,2824 0,5417 0,7144 0,6815
0,4620 0,2787 0,2031 0,9405 0,5684 0,2901 0,5170 0,8411 0,7109 0,8728
0,8904 0,3051 0,2489 0,5737 0,8079 0,5045 0,7918 0,1896 0,0036 0,8612
0,1990 0,7674 0,4620 0,0469 0,5798 0,6040 0,4175 0,9836 0,2936 0,2463
0,3545 0,8432 0,9498 0,4911 0,0073 0,0474 0,4077 0,3853 0,3602 0,2683
0,7768 0,2258 0,6478 0,4277 0,4164 0,5595 0,3542 0,6974 0,9359 0,1832
0,2141 0,4993 0,1946 0,1438 0,2115 0,5054 0,3020 0,7383 0,5811 0,6374
0,6173 0,5134 0,8071 0,0673 0,7501 0,2660 0,6240 0,2169 0,5596 0,0430
0,0160 0,7581 0,1552 0,1413 0,2176 0,6127 0,8964 0,1078 0,7131 0,9528
0,3924 0,7394 0,2370 0,2000 0,5027 0,0828 0,7736 0,0264 0,3366 0,4350
0,5572 0,3537 0,2536 0,3429 0,0723 0,3539 0,8629 0,6034 0,0532 0,4488
0,0240 0,2632 0,4843 0,3103 0,8462 0,6194 0,5999 0,8603 0,6889 0,2187
0,8845 0,2706 0,1615 0,8580 0,0724 0,9632 0,1233 0,5843 0,1481 0,6099
0,6838 0,6943 0,3458 0,1325 0,2023 0,7350 0,1499 0,7030 0,2882 0,5033
0,2949 0,7432 0,8008 0,0459 0,7650 0,9251 0,8496 0,6599 0,7947 0,1704
0,7939 0,8920 0,8684 0,6510 0,2430 0,5392 0,7204 0,7889 0,0564 0,6482
0,3351 0,2559 0,3435 0,5161 0,9468 0,9738 0,4635 0,6896 0,0400 0,1146
0,0260 0,9657 0,3491 0,1002 0,8902 0,3912 0,8583 0,6023 0,1655 0,2629
0,8021 0,5429 0,2113 0,1279 0,6648 0,0939 0,6371 0,7828 0,1808 0,6771
0,3020 0,2747 0,3346 0,9644 0,3156 0,9004 0,3604 0,8776 0,0373 0,2067
0,7427 0,5888 0,0763 0,9906 0,2158 0,5196 0,2920 0,2989 0,7640 0,3421
0,7939 0,4285 0,6219 0,9780 0,9413 0,9262 0,2737 0,5993 0,3436 0,5890
0,4538 0,6278 0,8601 0,4637 0,1466 0,7354 0,6003 0,8472 0,5865 0,8439
0,9235 0,2863 0,2578 0,1254 0,4391 0,5780 0,8950 0,0015 0,0064 0,7691
0,4823 0,1443 0,7348 0,1565 0,2542 0,4755 0,9838 0,2870 0,6951 0,1671
0,3626 0,9576 0,5392 0,6409 0,7307 0,2151 0,7711 0,5689 0,1975 0,3564
0,6251 0,8728 0,1222 0,9284 0,5854 0,7245 0,1143 0,7279 0,3867 0,5460
0,0332 0,8018 0,0131 0,0090 0,9883 0,4470 0,6990 0,0356 0,3388 0,2104
0,9290 0,7975 0,6942 0,8888 0,4372 0,7166 0,9138 0,5291 0,2081 0,4649
0,1071 0,4282 0,4761 0,9641 0,6335 0,1330 0,7256 0,3861 0,1021 0,4403
0,6909 0,1529 0,3726 0,3970 0,3563 0,9363 0,5542 0,3000 0,9564 0,6582
0,0063 0,6962 0,9753 0,4904 0,3382 0,3824 0,1476 0,8548 0,4095 0,4056
0,4576 0,4234 0,3293 0,0625 0,1397 0,1179 0,4572 0,9001 0,6782 0,1102
0,4024 0,7152 0,8076 0,8223 0,0244 0,5547 0,5121 0,9260 0,4326 0,7156
0,0262 0,3432 0,9862 0,7446 0,8342 0,2457 0,2948 0,4386 0,6706 0,0555
0,2176 0,8445 0,5197 0,4444 0,8640 0,2593 0,6158 0,3342 0,5934 0,2297
0,4434 0,8969 0,0152 0,5526 0,7368 0,5543 0,9888 0,2749 0,4803 0,9783
0,6235 0,6936 0,9085 0,0908 0,2787 0,3554 0,5056 0,0636 0,5638 0,0572
0,0060 0,3187 0,3382 0,8460 0,3942 0,5278 0,7112 0,0185 0,9044 0,6130
0,0421 0,1217 0,0210 0,7460 0,9405 0,9525 0,4785 0,3487 0,2657 0,5577
0,2611 0,0930 0,1269 0,2341 0,6033 0,9008 0,8837 0,5287 0,9895 0,9440
0,1454 0,2384 0,1540 0,6444 0,7713 0,4100 0,0812 0,6738 0,8708 0,3403
0,0054 0,9543 0,8034 0,5763 0,4111 0,6576 0,1783 0,9149 0,0327 0,2056
0,8550 0,4029 0,8544 0,2703 0,9428 0,3371 0,1107 0,7734 0,8012 0,2646
0,2859 0,8869 0,0394 0,9820 0,1144 0,0325 0,5169 0,5364 0,5807 0,8823
0,3430 0,2246 0,9190 0,3581 0,8771 0,5934 0,6138 0,6317 0,7286 0,4398

De notar que os três primeiros NPA (indicados na primeira linha da Tabela) são os valores que tínhamos determinado 'manualmente' (ver o quadro anterior).

É importante que não nos esqueçamos que, para além das qualidades já referidas da rotina 'RANDOM' apresentada, há uma importante 'limitação': ao fim de 65536 invocações consecutivas desta rotina 'fecha-se o ciclo' e retorna-se ao primeiro NPA gerado! Assim, em aplicações em que seja previsível a necessidade de gerar mais do que 65536 NPA U[0;1], dever-se-á acrescentar um '**mecanismo de mudança de semente**' ao fim de 65536 invocações da rotina. A falta de tal 'mecanismo' levará a uma repetição da sequência de NPA gerados, que poderá perturbar a qualidade da simulação levada a cabo.

Antes de passarmos aos métodos de 'transformação' dos NPA U[0;1] em NPA com outras distribuições, é importante deixar um reparo à eventual **influência da(s) semente(s) nos resultados de uma simulação**. Em alguns casos, os resultados poderão ser influenciados pela *semente* usada para iniciar o processo de geração de NPA. Para averiguar desta eventual influência, é aconselhável efectuar várias simulações de uma mesma 'política/solução' com diferentes *sementes* - um resultado 'global' pode ser obtido a partir dos resultados 'obtidos com as diferentes *sementes*', podendo então avaliar-se da real influência das *sementes* nos resultados da simulação. Refira-se ainda que, em simulações que pela sua duração obriguem à utilização de várias *sementes*, é natural que esta influência seja atenuada ...

E agora abordemos os métodos de 'transformação' dos NPA U[0;1] em NPA com outras distribuições.

### • O Método da Inversão

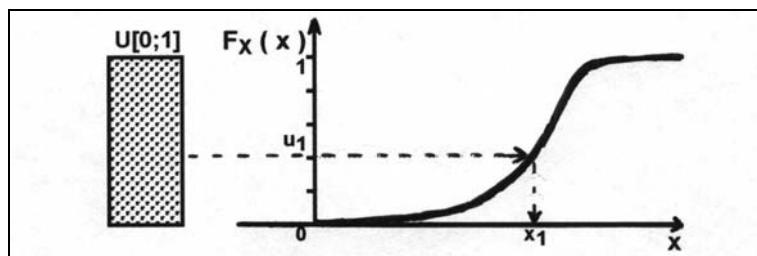
O Método da Inversão é o mais eficiente dos vários métodos que estudaremos. No entanto, como se verá de seguida, este método nem sempre é utilizável ...

Recordemos algumas características da função de distribuição acumulada  $F_X(x)$  relativa à variável aleatória  $X$ : trata-se de uma função monótona crescente, contínua à direita e que toma valores no intervalo [0 ; 1].

Se a função  $F_X(x)$  for representada por uma expressão analítica [ o que nem sempre acontece ... basta lembrarmo-nos da distribuição Normal ! ] **e** se essa função for invertível [ o que, obviamente, está longe de ser 'automático' ... ], então poderemos igualar  $u$ , um NPA U[0;1] a  $F_X(x)$  e, recorrendo à função inversa, determinar  $x$  - o correspondente NPA da 'família'  $X$ :

$$u = F_X(x) \Leftrightarrow x = F_X^{-1}(u)$$

Na figura seguinte esquematiza-se a aplicação do Método da Inversão:



Ao primeiro NPA U[0;1],  $u_1$ , corresponderá o primeiro NPA X,  $x_1$ .

Uma repetição do processo esquematizado na figura anterior vai originar uma 'coleção' de valores  $x_i$ , que, no seu conjunto, apresentarão a distribuição  $X$ .

- Exemplifiquemos a aplicação do Método da Inversão, com a distribuição  $X \sim \text{Uniforme } [a, b]$  (com  $a < b$ ):

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x \notin [a, b] \\ 1/(b-a) & ; x \in [a, b] \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < a \\ \frac{(x-a)}{(b-a)} & ; x \in [a, b] \\ 1 & ; x > b \end{cases}$$

$$u = \frac{(x-a)}{(b-a)} \Leftrightarrow x = (b-a) \cdot u + a$$

Assim, por cada NPA  $U[0;1]$  gerado,  $u$ , obter-se-á um correspondente NPA  $U[a;b]$ ,  $x = (b-a) \cdot u + a$ .

- Exemplifiquemos a aplicação do Método da Inversão, com a distribuição  $X \sim \text{Exponencial } (\lambda)$  (com  $\lambda > 0$ ;  $\mu_X = 1/\lambda$ ):

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda \cdot x} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$u = 1 - e^{-\lambda \cdot x} \Leftrightarrow x = -(1/\lambda) \cdot \ln(1-u)$$

Como  $U \sim \text{Uniforme } [0; 1]$ ,  $U \sim (1 - U)$  [Porque será?], pelo que a expressão anterior pode ser substituída pela seguinte:

$$x = -(1/\lambda) \cdot \ln(u)$$

Assim, por cada NPA  $U[0;1]$  gerado,  $u$ , obter-se-á um correspondente NPA  $\text{Exp } (\lambda)$ ,  $x = -(1/\lambda) \cdot \ln(u)$ . [Alternativamente poder-se-ia utilizar  $x = -(1/\lambda) \cdot \ln(1-u)$ ]

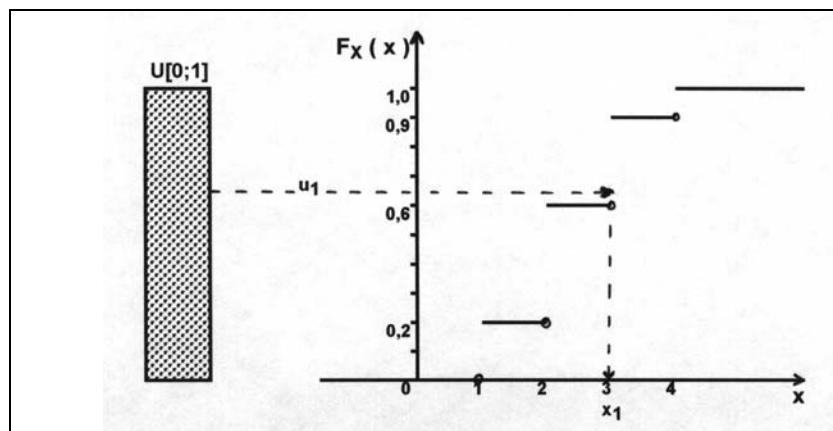
A filosofia subjacente ao Método da Inversão pode ser utilizada para gerar NPA correspondentes a **distribuições discretas**.

- Consideremos a variável aleatória discreta  $X$  com função de probabilidade dada pelo quadro seguinte:

$x$	1	2	3	4
$P(X = x)$	0,2	0,4	0,3	0,1

A função de distribuição acumulada  $F_X(x)$  pode representar-se no quadro seguinte:

$x$	$< 1$	$\in [1; 2[$	$\in [2; 3[$	$\in [3; 4[$	$\geq 4$
$F_X(x)$	0	0,2	0,6	0,9	1,0



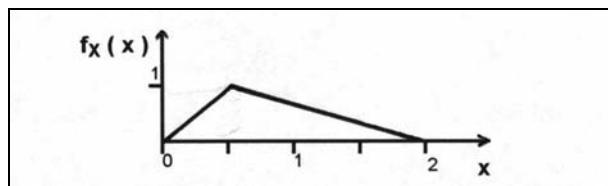
Assim, seguindo o processo esquematizado na figura anterior, começa-se por gerar um NPA  $U[0;1]$ ,  $u$  e determina-se o correspondente NPA  $X$ ,  $x$ , do modo seguinte:

$$\begin{aligned} u \leq 0,2 &\Rightarrow x = 1 \\ 0,2 < u \leq 0,6 &\Rightarrow x = 2 \\ 0,6 < u \leq 0,9 &\Rightarrow x = 3 \\ u > 0,9 &\Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

Como se vê, é muito simples gerar NPA provenientes de distribuições discretas.

Apresentemos um último exemplo de aplicação do Método da Inversão:

- Seja  $X$  a variável aleatória contínua, com função de densidade de probabilidade,  $f_X(x)$ , que se esboça na figura seguinte:



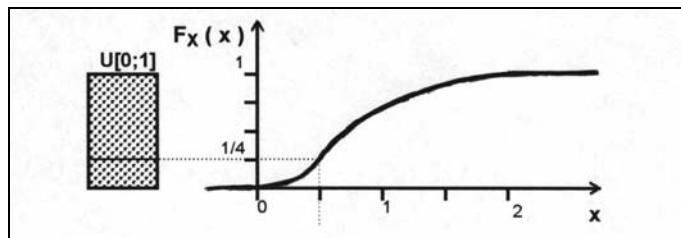
É fácil de obter a expressão analítica da correspondente função de distribuição acumulada,  $F_X(x)$  [Será que para si é mesmo fácil? ... Se não é, devia ser...]. Comecemos por escrever a função de densidade de probabilidade  $f_X(x)$ :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x \notin [0; 2] \\ 2 \cdot x & ; x \in [0; 0,5] \\ (4 - 2 \cdot x) / 3 & ; x \in [0,5; 2] \end{cases}$$

Poderemos agora obter a função de distribuição acumulada,  $F_X(x)$ :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ x^2 & ; x \in [0; 0,5] \\ (4x - x^2 - 1) / 3 & ; x \in [0,5; 2] \\ 1 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

Na figura seguinte esquematiza-se a aplicação do Método da Inversão, para a geração de NPA X:



**Nota importante:** Quando se utiliza o Método da Inversão e a função de distribuição acumulada,  $F_X(x)$  é definida por mais do que uma expressão analítica (como acontece no exemplo que se está a considerar), é preciso ter o cuidado de 'inverter' as correspondentes expressões cuidadosamente nos correspondentes domínios de valores de  $u$ .

Assim, em relação ao exemplo, basta olhar para o esboço da função de densidade de probabilidade para determinar a área do triângulo 'de base  $[0; 0,5]$ ' (área igual a  $1/4$ ). Este valor é obviamente igual a  $F_X(0,5)$ . Assim, só se 'inverterá' a  $u = x^2$  se  $u \leq 1/4$ . Se  $u > 1/4$ , dever-se-á 'inverter'  $u = (4x - x^2 - 1) / 3$ .

A inversão de  $u = x^2$  não parece ser 'perturbadora'.  $x = \pm \sqrt{u}$  parece ser a solução ... Mas, é preciso ter-se o cuidado de reconhecer que, neste caso, a inversão da expressão  $u = x^2$  deverá originar valores de  $x$  pertencentes ao intervalo  $[0; 0,5]$ ! Assim, a expressão da 'inversa' desejada é  $x = +\sqrt{u}$ . [ Aproveitemos para verificar que, com a expressão anterior, se conclui que se  $u = 0$ , então  $x = 0$  e que se  $u = 1/4$ , então  $x = 0,5$ , como desejávamos. ☺ É sempre bom verificar-se os resultados ... ]

A inversão de  $u = (4x - x^2 - 1) / 3$  já parece 'dar alguma luta'.  $x = 2 \pm \sqrt{3 - 3 \cdot u}$  é a solução 'matemática'... Mas como esta inversão deve originar valores de  $x$  pertencentes ao intervalo  $[0,5; 2]$ , facilmente concluímos que a expressão da 'inversa' desejada é  $x = 2 - \sqrt{3 - 3 \cdot u}$ . [ Verifiquemos que, com a expressão anterior, se conclui que se  $u = 1/4$  então  $x = 0,5$  e que se  $u = 1$ , então  $x = 2$ , o que nos deixa todos satisfeitos! ☺ ]

Poderemos, finalmente, esquematizar a rotina de geração de NPA X, baseada no Método da Inversão:

- gerar NPA U[0;1],  $u$ .
- se  $u \leq 1/4$ , então o NPA X será igual a  $x = +\sqrt{u}$ ;
- se  $u > 1/4$ , então o NPA X será igual a  $x = 2 - \sqrt{3 - 3 \cdot u}$ .

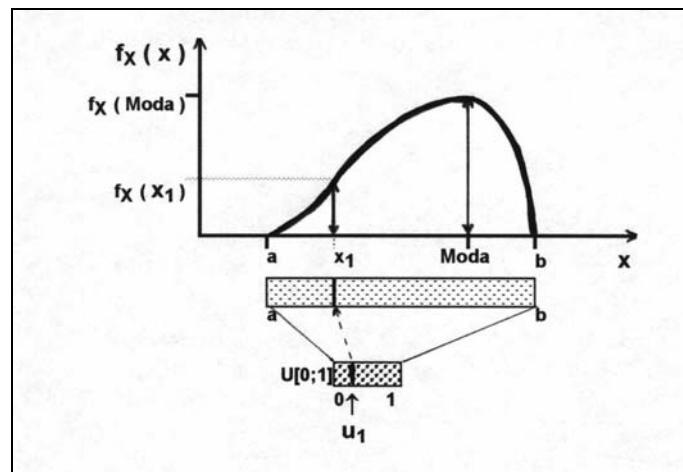
Antes de iniciarmos a apresentação de outro método de geração de NPA, é útil recordarmo-nos que o **Método da Inversão só pode ser utilizado quando existe uma expressão analítica invertível para a função de distribuição acumulada correspondente**. Nessas situações a utilização deste **método de geração é muito eficiente: por cada NPA U[0;1] gerado obtém-se um NPA da distribuição desejada !**

### • O Método da Rejeição

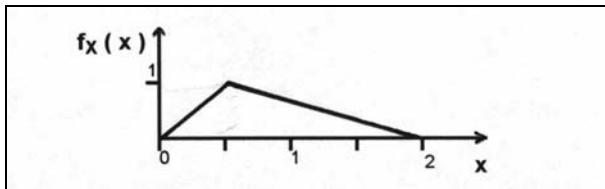
Se não existir uma expressão analítica invertível para a função de distribuição acumulada correspondente à distribuição que se pretende gerar não poderemos utilizar o Método da Inversão. No entanto, bastará que se disponha da **expressão analítica da função de densidade de probabilidade** correspondente à distribuição (de domínio limitado) que se pretende gerar para podermos utilizar o **Método da Rejeição**.

Seja X uma distribuição contínua com domínio limitado ao intervalo  $[a, b]$ . A utilização do Método da Rejeição para geração de NPA X pode sistematizar-se do modo seguinte:

- 1 - geração de um NPA U[0;1],  $u_1$ ,
- 2 -  $x_1 = a + (b - a) \cdot u_1$ , (  $a$  e  $b$  representam, respectivamente, os limites inferior e superior do domínio de variação de X )
- 3 -  $P_a = f_X(x_1) / f_X(\text{moda})$
- 4 - geração de um NPA U[0;1],  $u_2$ ,
- 5 - se  $P_a < u_2$ , rejeita-se  $x_1$  e retorna-se a 1;  
caso contrário, assume-se  $x_1$  como um NPA X



- Exemplifiquemos a aplicação do Método da Rejeição, com a distribuição  $X$  cuja função de densidade de probabilidade,  $f_X(x)$ , se esboça na figura seguinte:



$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x \notin [0; 2] \\ 2 \cdot x & ; x \in [0; 0,5] \\ (4 - 2 \cdot x) / 3 & ; x \in [0,5; 2] \end{cases}$$

Relativamente a esta distribuição, podemos indicar que:  $a = 0$ ;  $b = 2$ ; Moda = 0,5 e  $f_X(\text{Moda}) = 1$ , pelo que a aplicação do Método da Rejeição se traduz nos seguintes passos:

- 1 - geração de um NPA U[0;1],  $u_1$ ,
- 2 -  $x_1 = 2 \cdot u_1$ ,
- 3 -  $P_a = \begin{cases} 2 \cdot x_1 & ; x_1 \in [0; 0,5] \\ (4 - 2 \cdot x_1) / 3 & ; x_1 \in [0,5; 2] \end{cases}$
- 4 - geração de um NPA U[0;1],  $u_2$ ,
- 5 - se  $P_a < u_2$ , rejeita-se  $x_1$  e retorna-se a 1;  
caso contrário, assume-se  $x_1$  como um NPA X

Utilizemos os vinte primeiros NPA U[0;1] da Tabela apresentada anteriormente e vejamos quantos NPA X obtemos:

$u_1$	$x_1$	$P_a$	$u_2$	NPA X
0,1526	0,3052	0,6104	0,3063	<b>0,3052</b>
0,4413	0,8826	0,7449	0,8898	—
0,0202	0,0404	0,0808	0,7723	—
0,1453	0,2906	0,5812	0,7020	—
0,4005	0,8010	0,7993	0,3174	<b>0,8010</b>
0,0730	0,1460	0,2920	0,0229	<b>0,1460</b>
0,5279	1,0558	0,6295	0,8635	—
0,5836	1,1672	0,5552	0,3996	<b>1,1672</b>
0,8867	1,7734	0,1511	0,5824	—
0,2867	0,5734	0,9511	0,6288	<b>0,5734</b>

Como se pode observar, o Método da Rejeição é, na melhor das situações, '50 % menos eficiente' do que o Método da Inversão, já que necessita de, pelo menos, dois NPA U[0;1] para gerar um NPA X. Em relação ao exemplo que acabamos de apresentar, **utilizamos vinte NPA U[0;1] para obter apenas cinco NPA X !!!** Assim, sempre que tal for possível, optaremos pelo Método da Inversão, em detrimento do Método da Rejeição !

- Utilizemos o Método da Rejeição para gerar NPA com a distribuição '**Normal**':

A função de densidade de probabilidade de uma variável aleatória  $X \sim \text{Normal}(\mu; \sigma)$  é dada por:

$$f_X(x) = 1 / (\sqrt{2\pi} \cdot \sigma) \cdot e^{-(1/2) \cdot [(x - \mu) / \sigma]^2}; \quad x \in \mathbb{R}.$$

A moda de uma variável aleatória  $X \sim \text{Normal}(\mu; \sigma)$  coincide com o valor médio  $\mu$ , correspondendo-lhe  $f_X(\mu) = 1 / (\sqrt{2\pi} \cdot \sigma)$ .

Dado que a distribuição Normal tem domínio ilimitado, não poderemos utilizar o Método da Rejeição para gerar *rigorosamente* a distribuição Normal. No entanto, poderemos truncar as 'caudas' da distribuição em zonas de muito baixa probabilidade de ocorrência (por exemplo,  $\mu_X - 3 \cdot \sigma_X$  e  $\mu_X + 3 \cdot \sigma_X$ ) e gerar a distribuição truncada (o que, para muitas aplicações, não será *problemático* ...).

Tomemos, por exemplo a distribuição  $X \sim \text{Normal}(\mu = 10; \sigma = 2)$ , cuja função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f_X(x) = 1 / (\sqrt{2\pi} \cdot 2) \cdot e^{-(1/2) \cdot [(x-10)/2]^2}; \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se considerarmos as truncaturas em  $\mu \pm 3 \cdot \sigma$ , ter-se-á:  $a = 4$ ;  $b = 16$ ; Moda = 10 e  $f_X(\text{Moda}) = 1 / (\sqrt{2\pi} \cdot 2)$ , pelo que a aplicação do Método da Rejeição se traduz nos seguintes passos:

- 1 - geração de um NPA U[0;1],  $u_1$ ,
- 2 -  $x_1 = 4 + 12 \cdot u_1$ ,
- 3 -  $P_a = e^{-(1/2) \cdot [(x-10)/2]^2}$
- 4 - geração de um NPA U[0;1],  $u_2$ ,
- 5 - se  $P_a < u_2$ , rejeita-se  $x_1$  e retorna-se a 1;  
caso contrário, assume-se  $x_1$  como um NPA X

Utilizemos os vinte primeiros NPA U[0;1] da Tabela apresentada anteriormente e vejamos quantos NPA X obtemos:

<b>u<sub>1</sub></b>	<b>x<sub>1</sub></b>	<b>P<sub>a</sub></b>	<b>u<sub>2</sub></b>	<b>NPA X</b>
<b>0,1526</b>	5,8312	0,1139	<b>0,3063</b>	—
<b>0,4413</b>	9,2956	0,9399	<b>0,8898</b>	<b>9,2956</b>
<b>0,0202</b>	4,2424	0,0159	<b>0,7723</b>	—
<b>0,1453</b>	5,7436	0,1039	<b>0,7020</b>	—
<b>0,4005</b>	8,8060	0,8368	<b>0,3174</b>	<b>8,8060</b>
<b>0,0730</b>	4,8760	0,0376	<b>0,0229</b>	<b>4,8760</b>
<b>0,5279</b>	10,3348	0,9861	<b>0,8635</b>	<b>10,3348</b>
<b>0,5836</b>	11,0032	0,8818	<b>0,3996</b>	<b>11,0032</b>
<b>0,8867</b>	14,6404	0,0678	<b>0,5824</b>	—
<b>0,2867</b>	7,4404	0,4409	<b>0,6288</b>	—

Em relação ao exemplo que acabamos de apresentar, **utilizamos vinte NPA U[0;1] para obter apenas cinco NPA X ~ Normal ( $\mu = 10; \sigma = 2$ ) !!**

☞ Imagine que, para determinada aplicação é muito importante o comportamento das 'caudas' da distribuição Normal. Poderíamos 'ampliar' as truncaturas efectuadas para, por exemplo,  $\mu \pm 4 \cdot \sigma$ .

Qual a influência de tal 'ampliação', na eficiência do método de geração ?

👉 Considere a variável aleatória  $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$ .

Sabe-se que

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

Para poder utilizar o Método da Rejeição para gerar NPA  $X \sim \text{'Exponencial'}(\lambda)$  é necessário truncar o domínio de variação de  $X$ . Se se adoptar como limite superior do domínio de variação de  $X$  o valor  $\mu_X + 3 \cdot \sigma_X$ , que é igual a  $(4/\lambda)$  [ Concorda ? ], está a ignorar-se uma pequena parte da 'cauda' da distribuição. Qual a probabilidade correspondente ?

Se pretender diminuir essa probabilidade, poderá 'ampliar' esse limite superior para  $\mu_X + 4 \cdot \sigma_X$ , isto é, para  $(5/\lambda)$  - qual a probabilidade correspondente à parte da 'cauda' da distribuição que é truncada ? E qual a influência de tal 'ampliação', na eficiência do método de geração ?

Utilize o Método da Rejeição para gerar cinco NPA  $X \sim \text{'Exponencial'}(\lambda = 1)$ .

### • O Teorema do Limite Central - Geração de NPA com Distribuição Normal

Como se referiu, não é possível gerar NPA com distribuição Normal recorrendo ao Método da Inversão. Por outro lado, o recurso ao Método da Rejeição não nos permite gerar *rigorosamente* a distribuição Normal, mas apenas *parte* dela, já que há sempre necessidade de definir limites (inferior e superior) para os valores a gerar, que se traduzem na truncatura das 'caudas' da distribuição ( e tudo isto a par de uma *baixa* eficiência do método ... ).

Recordemo-nos do **Teorema do Limite Central**, que pode ser enunciado de modo muito simples: "A soma de um número elevado de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas tende para a distribuição Normal", ou seja:

Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$  v.a. i.i.d. com  $E[X_i] = \mu$  e  $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$ ,

$S_n \sim X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \text{Normal}(n \cdot \mu; n \cdot \sigma^2)$

Aproveitemos para referir que, independentemente da distribuição 'base' das variáveis aleatórias  $X_i$ ,  $S_n$  tende sempre para a distribuição Normal, desde que o número de 'parcelas' seja *suficientemente elevado* ! Claro que se a distribuição 'base' for simétrica, o número de 'parcelas' necessário para se 'atingir' a distribuição Normal tenderá a ser menor do que o número correspondente se a distribuição 'base' for assimétrica ... (Por exemplo, distribuição Uniforme *versus* distribuição Exponencial.)

Dado que conseguimos gerar com facilidade NPA com distribuição Uniforme  $[0; 1]$ , é natural que invoquemos o Teorema do Limite Central utilizando essa distribuição como distribuição 'base':

Sejam  $U_1, U_2, \dots, U_n$  v.a. independentes com distribuição Uniforme  $[0; 1]$ , isto é,  $E[U_i] = 1/2$  e  $\text{Var}[U_i] = 1/12$ ,

$S_n \sim U_1 + U_2 + \dots + U_n \sim \text{Normal}(n/2; n/12)$

Para  $n$  igual a 12, já obtemos uma aproximação muito boa à distribuição Normal e, além disso, esse valor de  $n$  proporcionar-nos-á valores 'simpáticos' dos parâmetros:

Sejam  $U_1, U_2, \dots, U_n$  v.a. independentes com distribuição Uniforme  $[0; 1]$ .

$$S_{12} \sim U_1 + U_2 + \dots + U_{12} \sim \text{Normal}(\mu = 6; \sigma = 1)$$

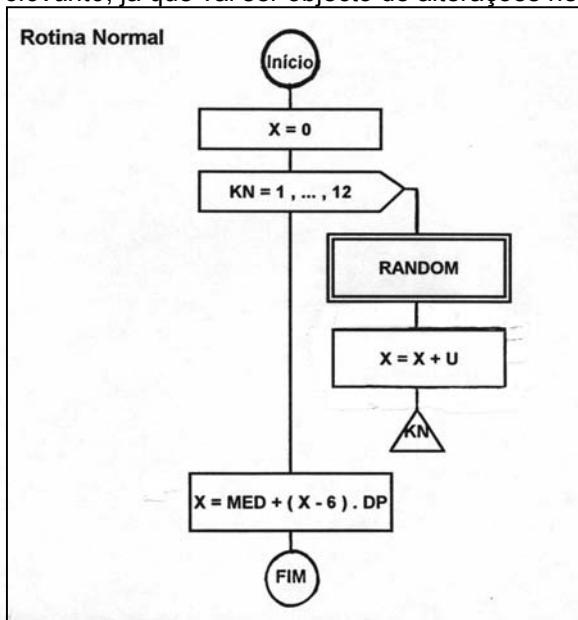
Assim, acabamos de apresentar um método de geração de NPA Normal ( $\mu = 6; \sigma = 1$ ): geramos doze NPA  $U[0; 1]$  e somamos esses valores, obtendo um valor que pode ser considerado um NPA Normal ( $\mu = 6; \sigma = 1$ )!

Claro que se nos interessar gerar NPA com distribuição  $X \sim \text{Normal}(\mu_X; \sigma_X^2)$ , bastará lembrarmo-nos que:

$$(S_{12} - 6) / 1 \sim (X - \mu_X) / \sigma_X \Leftrightarrow X \sim \mu_X + (S_{12} - 6) \cdot \sigma_X$$

Assim, para gerar um NPA Normal ( $\mu_X; \sigma_X^2$ ) começamos por gerar doze NPA  $U[0; 1]$ , somamos esses valores, multiplicamos o valor obtido por  $\sigma_X$  e, finalmente, adicionamos  $\mu_X$  a esse valor.

Elaboremos, em seguida a **rotina 'Normal'**, que procederá à geração de um NPA Normal ( $\mu_X = \text{MED}; \sigma_X = \text{DP}$ ), afectando o valor gerado à variável **X**. Estamos a assumir que quando esta rotina for invocada, já terão sido previamente afectados às variáveis MED e DP os correspondentes valor médio e desvio padrão da distribuição Normal. Recorde-se que quando se invoca a **rotina 'RANDOM'** é gerado um NPA  $U[0; 1]$  que é afectado à variável **U**. Para efectuar a soma dos doze NPA  $U[0; 1]$  utilizaremos um ciclo controlado pela variável **KN**. Para evitar *contratempos* num programa de simulação (que invoque esta rotina) deverá reservar-se a variável KN apenas para utilização *local* nesta rotina. Quando esta rotina for invocada, a variável X não deverá estar a servir para qualquer outro fim *relevante*, já que vai ser objecto de alterações nesta rotina.



E assim temos a **rotina 'Normal'**, que poderemos invocar para proceder à geração de um **NPA Normal** ( $\mu = \text{MED}; \sigma = \text{DP}$ ).

E pronto! Agora que já sabemos gerar NPA de várias distribuições, vamos às aplicações da Simulação!

## ALGUMAS APLICAÇÕES DA SIMULAÇÃO

Nesta secção apresentaremos algumas aplicações da Simulação. Começaremos por abordar a "Simulação Aplicada à Gestão de Recursos Hídricos" (retomando o problema "A Barragem de Pós-Boa" numa versão mais geral), ilustraremos o Método de Monte Carlo com a "Estimação de uma Distribuição de Mínimos", apresentaremos um exercício de "Simulação Aplicada à Gestão de Projectos" e um outro de "Simulação Aplicada à Gestão de Stocks", introduziremos a "Simulação de Processos de Poisson" e terminaremos com uma "Introdução à Simulação de Filas de Espera".

### • Simulação Aplicada à Gestão de Recursos Hídricos

Comecemos por considerar o problema "A Barragem de Pós-Boa ( II )":

A Barragem de Pós-Boa é relativamente pequena, com uma capacidade máxima de retenção, **VMAX**, de 100 u.vol. de água.

A equação simplificada de "balanço hidrológico mensal" é

$$V_f = V_0 + P - T - N - DS,$$

sendo

- V<sub>f</sub>** — Volume no final do mês (u.vol.)
- V<sub>0</sub>** — Volume no início do mês (u.vol.)
- P** — Volume de precipitação mensal (u.vol.)
- T** — Volume turbinado durante o mês (u.vol.)
- N** — Volume para satisfação de necessidades de abastecimento mensal (u.vol.)
- DS** — Volume de descarga de superfície durante o mês (u.vol.)

Por razões de equilíbrio ecológico e ambiental nunca se pode permitir que o nível da barragem desça abaixo de dez por cento da capacidade máxima de retenção.

As necessidades mensais de água a jusante, **Nec** (u.vol.), têm distribuição Normal, com valor médio e desvio padrão variáveis com o mês, de acordo com a tabela seguinte:

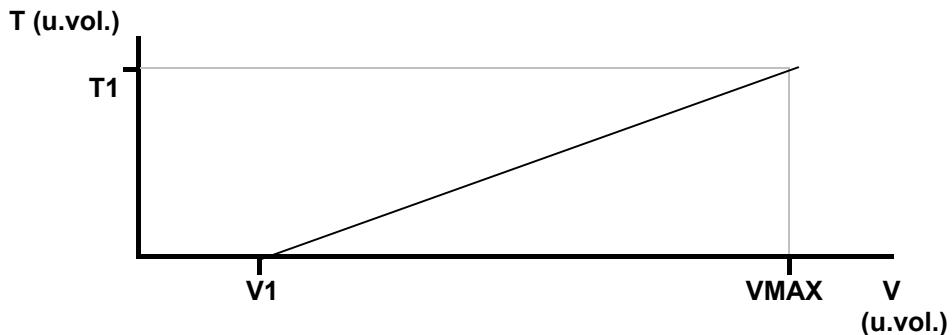
Mês	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
$\mu_{Nec}$ (u.vol.)	8	8	8	9	10	13	15	15	15	13	9	8
$\sigma_{Nec}$ (u.vol.)	1,0	0,8	0,7	0,8	0,9	1,1	1,2	1,3	1,1	0,7	0,8	0,9

No início do mês, o gestor da barragem decide qual o volume de água que vai destinar à satisfação das necessidades previstas para esse mês, com base no volume de água então disponível na barragem. Sempre que possível (isto é, sempre que não seja violada a condição de equilíbrio ambiental) o volume de água destinado à satisfação das necessidades será igual ao valor previsto (indicado na tabela anterior).

Em função do volume, **V**, de água na barragem no início do mês após a afectação do volume de água destinado à satisfação das necessidades o gestor da barragem determina o volume de água a turbinar durante esse mês, de acordo com o gráfico seguinte:

( continua )

( continuaçāo )



O gestor da barragem pretende definir o valor dos parâmetros **V1** e **T1** da política de gestão de água a turbinar.

Por razões de segurança exige-se que **V1** não seja inferior a vinte por cento da capacidade máxima de retenção.

O lucro mensal **L** (u.m.) associado ao volume turbinado **T** (u.vol.) é dado pela função  **$L = T^2$** .

Sabe-se que uma descarga total (**T + DS**) superior ou igual a 30 u.vol. origina situações de cheia a jusante.

Para decidir quais os valores a adoptar para os parâmetros **V1** e **T1** o gestor consultou os seus registos com os valores das precipitações dos últimos 50 anos, a partir dos quais determinou as seguintes distribuições mensais (em u.vol.):

Mês	Distribuição da Precipitação Mensal (u.vol.)
J	Normal ( $\mu = 30 ; \sigma = 2,5$ )
F	Normal ( $\mu = 40 ; \sigma = 3,0$ )
M	Normal ( $\mu = 40 ; \sigma = 3,5$ )
A	Normal ( $\mu = 30 ; \sigma = 2,0$ )
M	Uniforme [ 20 ; 30 ]
J	Uniforme [ 5 ; 15 ]
J	Uniforme [ 0 ; 10 ]
A	Uniforme [ 0 ; 5 ]
S	Uniforme [ 6 ; 18 ]
O	Normal ( $\mu = 30 ; \sigma = 2,5$ )
N	Normal ( $\mu = 30 ; \sigma = 2,5$ )
D	Normal ( $\mu = 30 ; \sigma = 2,5$ )

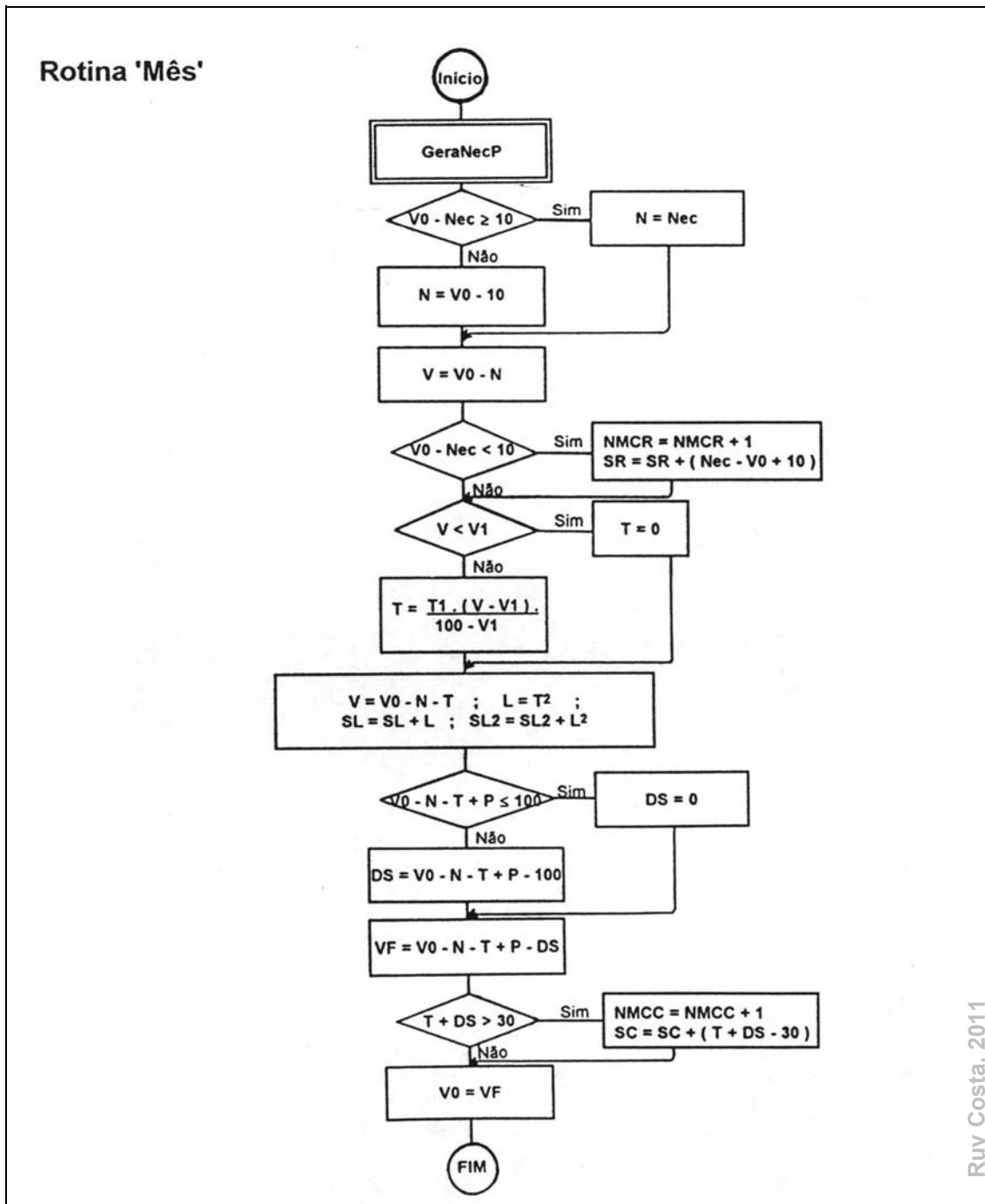
Elabore um modelo de simulação que lhe permita aconselhar o gestor da barragem, relativamente aos valores a adoptar para os parâmetros **V1** e **T1** da política de gestão de águas referida.

Como se pode observar, esta segunda versão do problema "A Barragem de Pôs-Boa" pouco difere da primeira. Acrescentou-se algum 'realismo', relativamente à primeira versão, admitindo que quer as necessidades de água a jusante, quer a precipitação são variáveis aleatórias, com distribuições variáveis com o mês do ano. Assim, deixamos de estar num cenário de **simulação com dados históricos** (como acontecerá na primeira versão), para passarmos a estar perante uma **verdadeira simulação** em que os dados estão modelados com distribuições estatísticas. Poderemos, assim, simular um horizonte

temporal tão grande quanto desejarmos, bastando para tal, proceder à correspondente geração de valores pseudo-aleatórios para as necessidades e para a precipitação.

Se nos recordarmos do fluxograma apresentado na secção II destes apontamentos e dos comentários então feitos, bastará substituir a primeira instrução após o início do ciclo 'Mês' "Nec = Nec (Mês,Ano) ; P = P(Mês,Ano)" por "**Gerar P e Nec, de acordo com as correspondentes distribuições estatísticas**". É ainda conveniente acumularmos o quadrado dos valores mensais de lucro (em SL2, previamente inicializada a zero) para uma posterior avaliação da variabilidade desta medida de desempenho. É claro que será necessário alterar o ciclo 'Ano' (que deixará de decorrer entre 1998 e 1994) e, correspondentemente, o apuramento dos valores médios associados às medidas de desempenho.[Recorda-se que havia divisões por 36, já que eram 36 os meses então simulados].

Comecemos, então, por apresentar o fluxograma da rotina '**Mês**', o 'coração' do nosso modelo:



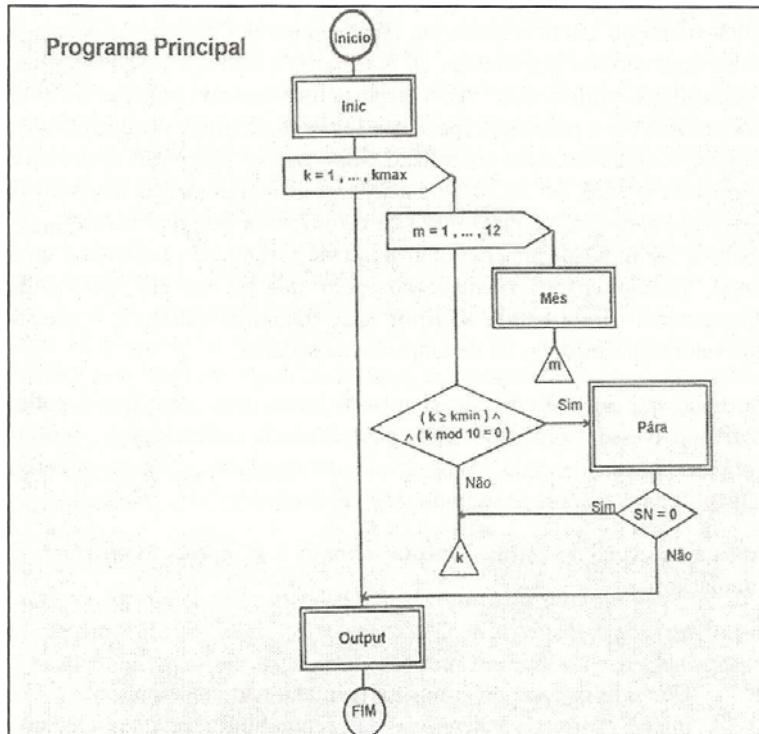
Uma **rotina** é um conjunto de instruções que se 'destaca' num dado **programa** (designação dada ao total das instruções). Figurativamente, se compararmos um programa ao corpo humano, poderemos imaginar as rotinas como importantes órgãos desse corpo, que são comandadas pelo '**programa principal**' (o cérebro). De notar que uma rotina pode ser invocada por outra rotina ! Assim, um dado programa é constituído por um '**programa principal**' e por várias '**rotinas**' (que desempenham algumas tarefas específicas). O '**programa principal**' é um conjunto de instruções, sendo algumas delas invocações (ou chamadas) das '**rotinas**'. **Um modelo bem concebido está, geralmente, associado a um '**programa principal**' relativamente curto**, de fácil leitura e compreensão.

No nosso modelo, a **rotina 'Mês'** constitui o conjunto de instruções que deve ser executado todos os meses. Assim, podemos considerar esta rotina como o verdadeiro 'coração' do nosso modelo. De realçar que a **rotina 'Mês'** começa por invocar a **rotina 'GeraNecP'**, que procederá à geração de números pseudo-aleatórios que são afectados às variáveis **Nec** e **P**, correspondendo, respectivamente, aos valores gerados das necessidades de água a jusante e da precipitação para esse mês. (Cá está um exemplo de uma rotina que invoca uma outra rotina !). Deixaremos para breve a representação do fluxograma desta rotina.

E, por falar em rotinas, que outras rotinas poderemos conceber para simplificar ao máximo o '**programa principal**' ?

Poderemos conceber a **rotina 'Inic'** destinada a proceder às inicializações das variáveis. Por outro lado, poderemos criar a **rotina 'Output'** destinada a proceder ao cálculo dos valores correspondentes às Medidas de Desempenho do Sistema e sua posterior impressão. Poderemos ainda criar a **rotina 'Pára'** que, quando invocada, verifica se estão cumpridas as condições para se terminar a simulação.

Esbocemos, agora, o fluxograma do nosso **programa principal** :



Comecemos por realçar a extrema **simplicidade** do **programa principal** apresentado, cuja leitura se faz com grande facilidade:

Começa-se por invocar a **rotina 'Inic'**, que assegurará a inicialização das variáveis. Em seguida, dá-se inicio ao **ciclo 'Ano'**, controlado pela variável **k**, que toma valores inteiros de 1 a **kmax** ( Atenção: Não nos poderemos esquecer de inicializar **kmax** ! ). Cada ano corresponde a 12 meses - o ciclo 'Mês' é controlado pela variável **m** ( **m = 1, 2, ..., 12** ) e limita-se a invocar a **rotina 'Mês'** (o 'coração' do nosso modelo).

Terminada a simulação de um ano (genericamente, do **k**-ésimo ano), investiga-se se se deve (ou não) avaliar a precisão dos resultados com vista à paragem da simulação: pergunta-se se já se atingiu ou ultrapassou a duração mínima da simulação ( **kmin** - mais uma variável a ser inicializada ! ) e se, simultaneamente, **k** é múltiplo de 10 (far-se-ão avaliações da precisão de 10 em 10 anos). [ Perguntar "**k mod 10 = 0 ?**" é equivalente a perguntar "O resto da divisão inteira de **k** por 10 é 0 ?", ou seja, "**k** é múltiplo de 10 ?" ]. Se a resposta for afirmativa, invoca-se a **rotina 'Pára'** que vai investigar se a amplitude do intervalo de confiança para o valor médio do Lucro é menor ou igual a um valor pré-fixado **Amp<sub>max</sub>** (mais uma variável a inicializar !). A resposta ( **Sim = 1** ; **Não = 0** ) será codificada na variável **SN**. Se a resposta for negativa (isto é, se **SN = 0**), a simulação deve prosseguir, pelo que se muda de 'Ano', incrementando a variável **k** (final do ciclo controlado pela variável **k**); se a resposta for afirmativa (isto é, se **SN = 1**, ou seja, se a amplitude do intervalo de confiança para o valor médio do Lucro for menor ou igual a **Amp<sub>max</sub>**, tendo-se já simulado um múltiplo de 10 anos igual ou superior a **kmin** anos), pode-se parar a simulação, pelo que se sai do ciclo 'Ano' directamente para a **rotina 'Output'**, que tratará do cálculo e impressão dos valores das medidas de desempenho do sistema.

De notar que se tiverem sido simulados **kmax** anos (sem que a **rotina 'Pára'** tivesse ordenado a paragem da simulação) termina obrigatoriamente o ciclo 'Ano', sendo de imediato invocada a **rotina 'Output'** para apuramento e impressão de resultados.

Após a execução da **rotina 'Output'** termina a execução do programa de simulação.



De notar que, no programa apresentado não contemplamos a 'fase inicial' destinada à atenuação da eventual influência das condições iniciais. A consideração desse 'período inicial, obrigaria à definição (inicialização) de uma variável **k0** e, na rotina 'Mês', antes de se acumular valores em **SL**, **SL2**, **SR**, **SC**, **NMCC** e **NMCR** dever-se-ia investigar se **k** (o ano a ser simulado) era superior a **k0**. Só em caso afirmativo se procederia à acumulação respectiva. Seria também necessário garantir um cálculo correcto (nas rotinas 'Pára' e 'Output') das grandezas estatísticas relativas ao Lucro, já que o número de anos efectivos simulados seria igual ao número de anos simulados diminuído de **k0** !



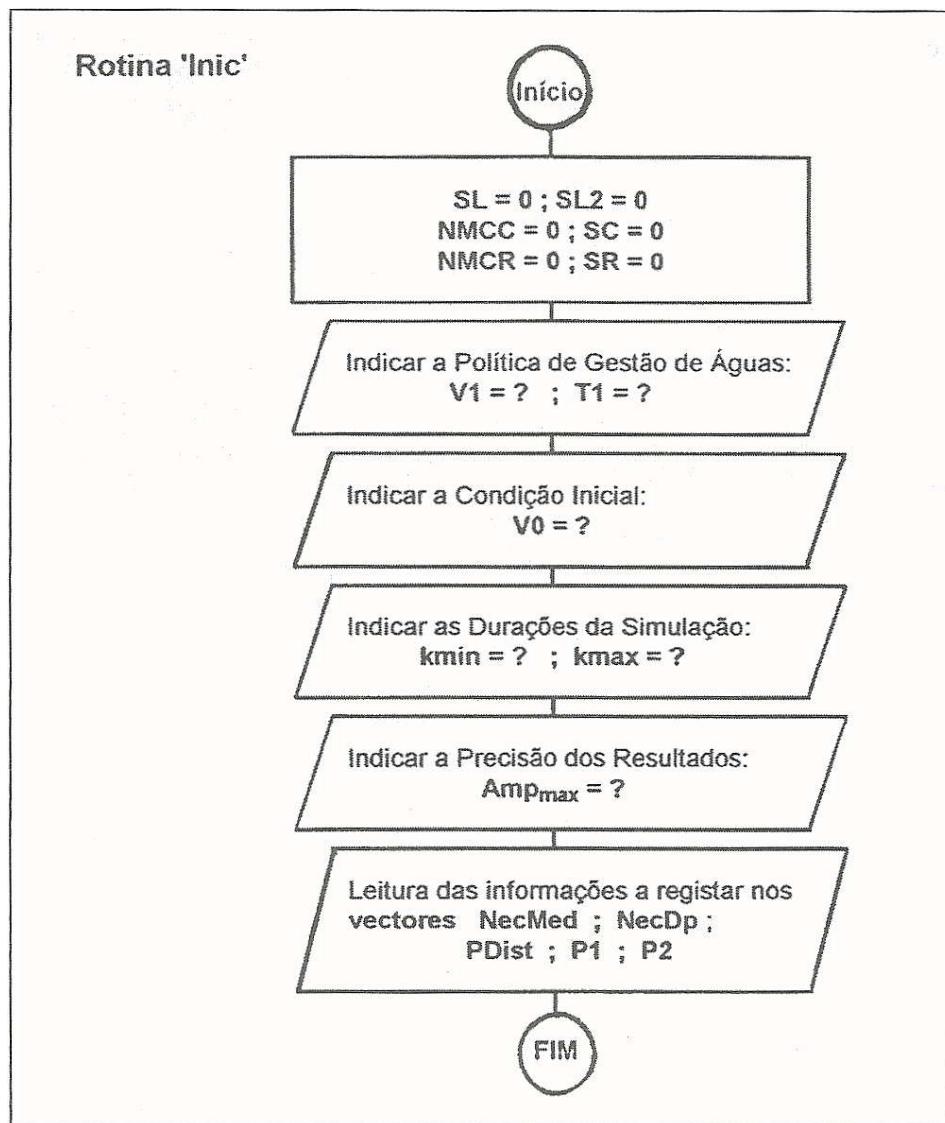
E que tal proceder às alterações referidas nos fluxogramas ?

Para terminarmos o nosso modelo de simulação d' "A Barragem de Pós-Boa" só nos falta explicitarmos as **rotinas 'Inic'**, **'Pára'**, **'Output'** e **'GeraNecP'**.

Recordemos as variáveis que devem ser inicializadas na **rotina 'Inic'**. **SL**, **SL2**, **NMCC**, **SC**, **NMCR** e **SR** são variáveis às quais deve ser atribuído inicialmente o valor 0. Deve pedir-se ao utilizador para indicar os valores relativos à política de gestão de águas a testar ( **V1** e **T1** ), o valor relativo ao volume inicial de água na albufeira ( **V0** ), as durações mínima e máxima da simulação ( **kmin** e **kmax** ) e, finalmente, a amplitude máxima permitida para o intervalo de confiança a 95 % para o valor médio do Lucro ( **Amp<sub>max</sub>** ). Para facilitar a geração dos valores pseudo-aleatórios correspondentes às necessidades de água mensais a jusante e às precipitações mensais é conveniente criar alguns **vectores** (cada um deles **com 12 posições: 1 = Janº ; ... ; 12 = Dezº** ): os vectores **NecMed** e **NecDp** permitem um registo mais fácil, respectivamente, do valor médio e do desvio padrão das necessidades mensais (que, recorda-se, seguem distribuições Normais); no vector **PDist** registaremos 1

quando a distribuição correspondente à precipitação de dado mês for Normal e 2 quando essa distribuição for Uniforme; nos vectores **P1** e **P2** registar-se-ão os valores dos dois parâmetros intervenientes nessas distribuições - se se tratar da distribuição **Normal** ( $\mu$  ;  $\sigma$ ), registaremos, para um dado mês, o valor médio  $\mu$  correspondente no vector P1 e o desvio padrão  $\sigma$  correspondente no vector P2; se se tratar da distribuição **Uniforme** [  $a$  ;  $b$  ], registaremos, para um dado mês, o limite mínimo  $a$  correspondente no vector P1 e o limite máximo  $b$  correspondente no vector P2.

Esbocemos, então, o correspondente fluxograma:

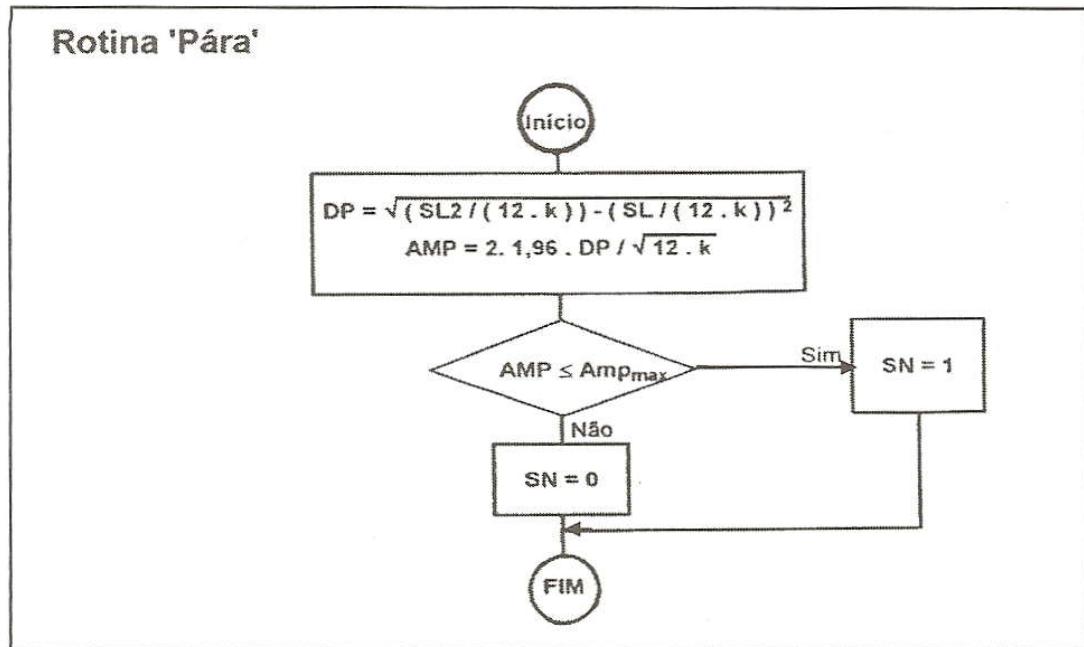


Para que não fique qualquer dúvida, indica-se, em seguida, os valores a registar nos 5 vectores referidos:

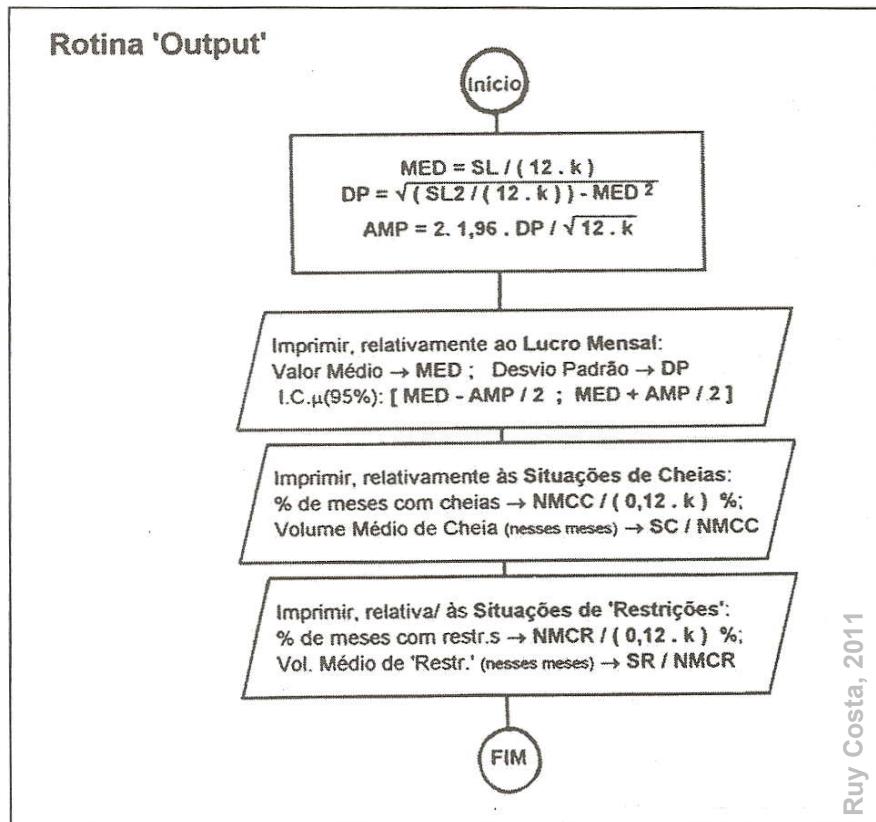
Mês	J (1)	F (2)	M (3)	A (4)	M (5)	J (6)	J (7)	A (8)	S (9)	O (10)	N (11)	D (12)
<b>NecMed</b>	8	8	8	9	10	13	15	15	15	13	9	8
<b>NecDp</b>	1,0	0,8	0,7	0,8	0,9	1,1	1,2	1,3	1,1	0,7	0,8	0,9
<b>PDist</b>	1	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1
<b>P1</b>	30	40	40	30	20	5	0	0	6	18	29	30
<b>P2</b>	2,5	3,0	3,5	2,0	30	15	10	5	18	2,0	2,5	3,0

Para elaborarmos a rotina 'Pára' devemos recordar que a amplitude do intervalo de confiança a 95 % para o valor médio do Lucro é igual a  $2 \cdot 1,96 \cdot s' / \sqrt{n}$ , sendo  $s'$  uma

estimativa pontual do desvio padrão do Lucro mensal (que se obtém facilmente a partir de SL e SL2). Assim, o fluxograma desta rotina resume-se a:



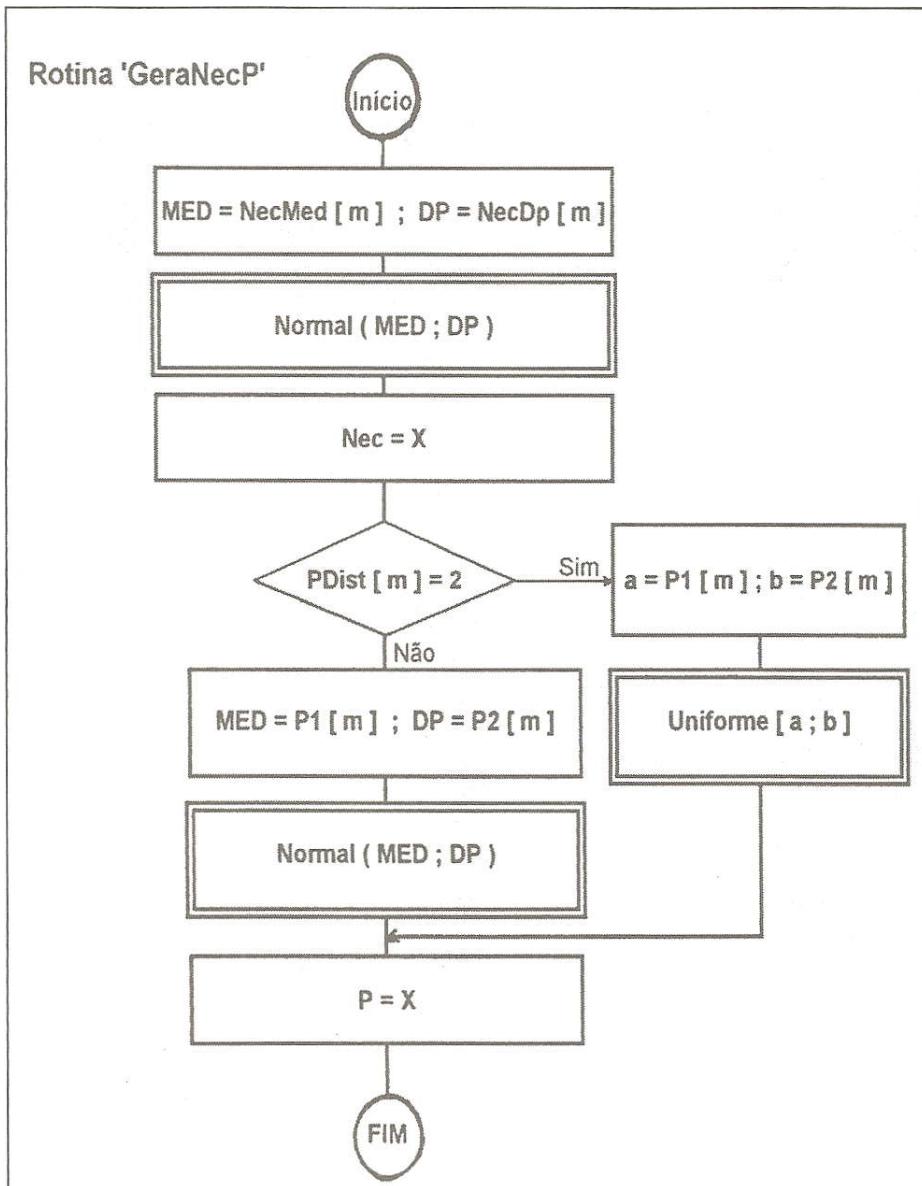
Antes de avançarmos para o fluxograma da **rotina 'Output'**, chama-se a atenção para o facto de, quando a rotina "Pára" (ou a rotina "Output") é invocada, o número de anos simulados é igual a k, sendo o número de 'observações' de lucro mensal correspondentes igual a 12 . k .



Ruy Costa, 2011

Refira-se que os resultados apurados na rotina 'Output' relativos a lucros são expressos em u.m. e que os volumes são expressos em u.vol. .

Finalizaremos a concepção do modelo de simulação d' "A Barragem de Pós-Boa" com a apresentação do fluxograma da rotina '**GeraNecP**'. Esta rotina invoca as rotinas '**Normal (  $\mu ; \sigma$  )**' e rotina '**Uniforme [ a ; b ]**' tal como foram definidas na secção anterior destes apontamentos.



Recordemos que quer a rotina 'Normal', quer a rotina 'Uniforme' (tal como foram definidas na secção anterior) agora invocadas pela rotina 'GeraNecP' afectam o número pseudo-aleatório gerado à variável X. Assim, teve-se o cuidado de afectar as variáveis **Nec** e **P** os correspondentes valores pseudo-aleatórios de Necessidades e Precipitação mensal gerados e correspondentes ao mês genérico **m** (de recordar que o ciclo 'Mês' é controlado pela variável **m**!).

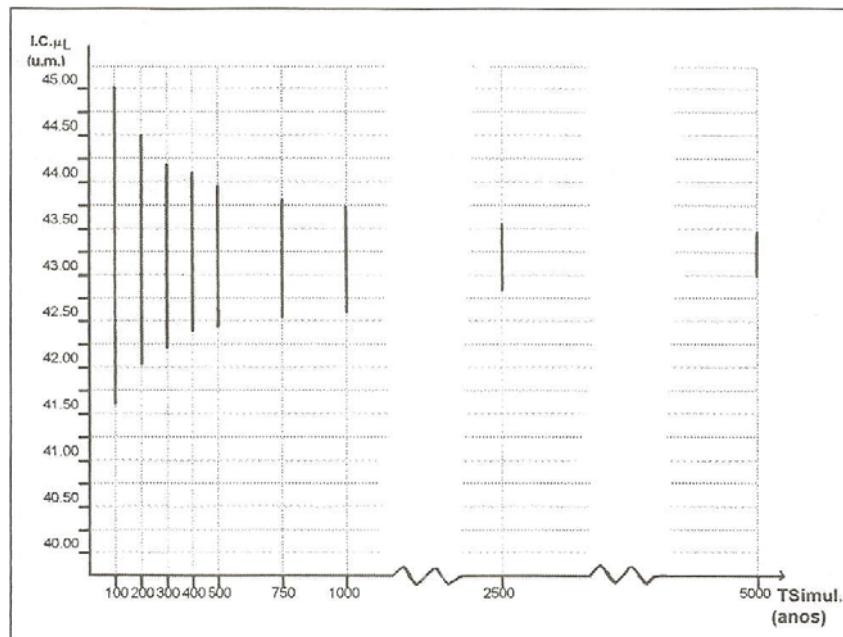
E assim fica completamente especificado o nosso **modelo de simulação d' "A Barragem de Pós-Boa"**, que, para além do programa principal, inclui as rotinas '**Inic**', '**GeraNecP**', '**Mês**', '**Pára**' e '**Output**'.

☞ E se sabe programar computadores, meta maos a' obra e converta Os fluxogramas apresentados num programa e... divirta-se !

Antes de prosseguirmos, gostaríamos de chamar a atenção para um **aspecto muito importante**: na implementação informática da rotina "INIC" do modelo apresentado não nos deveríamos esquecer de inicializar o processo de geração de números pseudo-aleatórios, indicando um valor para 'semente' desse processo ! No entanto, a nível de fluxograma, entendemos não ser imperativa a indicação expressa desta inicialização.

Aproveitaremos Os resultados da simulação com o modelo desenVolvido para "A Barragem de Pós-Boa" ( II ) para comentarmos algumas questões referidas anteriormente.

No segundo tópico deste capítulo, já havíamos referido um aspecto muito importante a considerar na simulação: à medida que se aumenta a duração da simulação, a diminuição da amplitude dos intervalos de confiança para os valores médios das medidas de desempenho do sistema é cada vez menor (embora continue a ocorrer), isto é, verifica-se um acréscimo de precisão dos resultados cada vez menor. Na figura seguinte esboça-se a variação da amplitude do intervalo de confiança para o valor médio do Lucro Médio Mensal, L, com a duração da simulação, para a política  $V_1 = 30$  ;  $T_1 = 10$  (com  $V_0 = 50$ ):



Como se pode observar, a amplitude do intervalo para  $T = 100$  anos é aproximadamente dupla da correspondente a  $T = 500$  anos ! Com efeito, simular 100 anos corresponde a obter um intervalo com 3,44 u.m. de amplitude, que passa a 1,54 para 500 anos. Se duplicarmos a 'duração' da simulação para 1000 anos, a amplitude do intervalo baixará para 1,09 u.m. . Provavelmente, para a maior parte das aplicações, já não se justificaria este esforço de simulação/computação adicional ! Assim, seria natural fixar a 'duração' desta simulação nos 500 anos, já que a correspondente precisão dos resultados parece aceitável para a maior parte das aplicações.

É interessante notar que para reduzir em aproximadamente 50 % a amplitude do intervalo correspondente a  $T = 100$  anos, tivemos que aumentar a duração da simulação em mais 400 anos ( $3,44 \rightarrow 1,54$ ; 55,2 %); uma nova redução em aproximadamente 50 % implica um acréscimo da duração da simulação de aproximadamente 2000 anos ( $1,54 \rightarrow 0,69$ ; 55,2 %) e, se aumentarmos a duração da simulação em mais 2500 anos, a redução da amplitude do intervalo já nem atingirá Os 30 % ( $0,69 \sim 0,49$ ; 29,0 %) !

Também no segundo tópico deste capítulo, já havíamos referido que é importante avaliar a **influência das condições iniciais nos resultados obtidos** com um modelo de simulação. No modelo desenhado, apenas se tem que fixar o valor de V<sub>0</sub> (Volume de água inicial na albufeira).

No Quadro seguinte apresentamos os resultados obtidos nas simulações das duas políticas que destacamos na secção I (simulação com dados históricos): (V<sub>1</sub> = 30 ; T<sub>1</sub> = 10) e (V<sub>1</sub> = 60 ; T<sub>1</sub> = 30). Consideraremos três valores para a condição inicial V<sub>0</sub> = 25, 50 e 75 (u.Vol.) e nove valores de duração da simulação T = 100, 200, 300, 400, 500, 750, 1000, 2500 e 5000.

T Simul	V <sub>0</sub>	V <sub>1</sub> = 30 ; T <sub>1</sub> = 10			V <sub>1</sub> = 60 ; T <sub>1</sub> = 30		
		I.C.95% (μL)	%Cheia	V <sub>Cheia</sub>	I.C.95% (μL)	%Cheia	V <sub>Cheia</sub>
100	25	[41,53; 44,97]	12,3 %	3,3	[197,02; 222,90]	8,5 %	3,3
	50	[41,58; 45,02]	12,3 %	3,3	[197,41; 223,30]	8,6 %	3,2
	75	[41,65; 45,08]	12,3 %	3,3	[197,77; 223,66]	8,6 %	3,2
200	25	[42,03; 44,47]	11,6 %	3,4	[201,83; 220,14]	8,0 %	3,5
	50	[42,06; 44,49]	11,6 %	3,4	[202,03; 220,34]	8,1 %	3,4
	75	[42,09; 44,52]	11,6 %	3,4	[202,21; 220,52]	8,1 %	3,4
300	25	[42,19; 44,18]	11,5 %	3,4	[203,46; 220,14]	8,0 %	3,3
	50	[42,21; 44,20]	11,5 %	3,4	[203,59; 220,34]	8,0 %	3,3
	75	[42,23; 44,22]	11,5 %	3,4	[203,71; 218,69]	8,0 %	3,3
400	25	[42,36; 44,09]	11,3 %	3,4	[204,90; 217,89]	7,9 %	3,3
	50	[42,38; 44,10]	11,3 %	3,4	[205,00; 217,99]	7,9 %	3,3
	75	[42,39; 44,11]	11,3 %	3,4	[205,09; 218,08]	7,9 %	3,3
500	25	[42,39; 43,93]	11,3 %	3,4	[205,15; 216,74]	7,9 %	3,4
	50	[42,40; 43,94]	11,3 %	3,4	[205,23; 216,82]	7,9 %	3,4
	75	[42,41; 43,95]	11,3 %	3,4	[205,30; 216,90]	7,9 %	3,4
750	25	[42,53; 43,79]	11,3 %	3,4	[206,28; 215,75]	8,0 %	3,3
	50	[42,54; 43,80]	11,3 %	3,4	[206,33; 215,80]	8,0 %	3,3
	75	[42,54; 43,80]	11,4 %	3,4	[206,38; 215,85]	8,0 %	3,3
1000	25	[42,65; 43,74]	11,5 %	3,4	[206,82; 215,02]	8,0 %	3,3
	50	[42,65; 43,74]	11,5 %	3,4	[206,86; 215,06]	8,0 %	3,3
	75	[42,66; 43,75]	11,5 %	3,4	[206,90; 215,10]	8,0 %	3,3
2500	25	[42,84; 43,53]	11,6 %	3,5	[208,25; 213,44]	8,2 %	3,3
	50	[42,84; 43,53]	11,6 %	3,5	[208,27; 213,45]	8,2 %	3,3
	75	[42,85; 43,54]	11,6 %	3,5	[208,28; 213,47]	8,2 %	3,3
5000	25	[42,96; 43,45]	11,6 %	3,5	[208,97; 212,64]	8,2 %	3,4
	50	[42,96; 43,45]	11,6 %	3,5	[208,98; 212,65]	8,2 %	3,4
	75	[42,96; 43,45]	11,6 %	3,5	[208,99; 212,65]	8,2 %	3,4

Notas: 1) Para estas duas políticas, nunca foram observadas situações de 'restrições'.  
 2) T Simul (anos) ; V<sub>0</sub> (u.Vol.) ; I.C.95% (μL) (u.m.) ; V<sub>Cheia</sub> (Volume médio de cheia nos meses com cheias; em u.Vol.).

De notar que, como se esperava, com o aumento da duração da simulação, diminui a influência da condição inicial. Com efeito, para uma simulação de 100 anos observa-se uma 'clara' influência de V<sub>0</sub>, no tocante ao Lucro – à medida que V<sub>0</sub> aumenta, também aumenta o Lucro Médio Mensal. Refira-se que, no entanto, as diferenças observadas são mínimas, não atingindo 1 u.m.! Quando se simulam 1000 anos essa influência praticamente desapareceu ... De notar ainda que para as medidas de desempenho '%Cheias' e Vol.Med.Cheia' praticamente não se detectou qualquer influência de V<sub>0</sub>.

O Quadro anterior permite ainda observar o aumento de precisão que está associado ao aumento da duração da simulação (que já se referiu). Aparentemente, esse aumento parece ser maior quando se estuda a política "V<sub>1</sub> = 30 ; T<sub>1</sub> = 10" do que quando se considera "V<sub>1</sub> = 60 ; T<sub>1</sub> = 30". Tal, no entanto, é apenas aparentemente... Com efeito, as diferenças observadas entre as duas séries de resultados devem-se ao facto de, no primeiro

caso, os valores do lucro médio mensal se situarem cerca das 40 u.m., enquanto que, no segundo caso, rondam as 200 u.m. ... Assim, a amplitude observada de 0,49 u.m. para a primeira política (e  $T = 5000$  anos) corresponde a aproximadamente 1,1 % do valor médio do intervalo; para a segunda política (e mesma duração da simulação) observamos uma amplitude de 3,67 u.m. que corresponde a 1,7 % do valor médio do intervalo. Como se vê, não há uma grande diferença...

Finalmente, é legitimo pretender-se obter uma perspectiva dos resultados da simulação com este modelo para as diferentes políticas que se pode adoptar. No Quadro seguinte apresentamos Os resultados obtidos nas simulações correspondentes às políticas traduzidas por  $V1 = 20, 30, \dots, 90$  /  $T1 = 10, 20, \dots, 90$  ( $T = 500$  anos /  $V0 = 50$  u.vol.):

<b><math>V1 \rightarrow</math></b>	<b>20</b>	<b>30</b>	<b>40</b>	<b>50</b>	<b>60</b>	<b>70</b>	<b>80</b>	<b>90</b>
<b><math>T1 \downarrow</math></b>	(45,87)	(43,17)	(40,29)	(36,82)	(32,22)	(25,72)	(15,73)	(1,50)
<b>10</b>	10,5 % 3,4	11,3 % 3,4	11,8 % 3,4	11,8 % 3,4	11,8 % 3,4	11,8 % 3,4	11,8 % 3,4	11,8 % 3,4
<b>20</b>	142,76 4,8% 3,6	138,24 5,9% 3,6	132,68 7,3% 3,4	(125,83) 10,0 % 3,3	(114,95) 11,6 % 3,4	(96,54) 11,8 % 3,4	(60,86) 11,8 % 3,4	(6,00) 11,8 % 3,4
<b>30</b>	224,72 0,1% 1,6	226,17 5,5% 2,6	225,40 1,1% 2,2	219,86 0,8% 1,7	211,03 5,8% 2,9	(192,12) 7,9% 0,3	(130,90) 10,9 % 3,3	(13,51) 11,8 % 3,4
<b>40</b>	(262,52) 1,5% 0,9	260,36 12,8 % 5,2	267,76 3,0% 1,3	276,89 6,8% 3,1	(277,77) 5,4% 1,7	261,80 9,4% 2,0	203,61 0,0% 0,5	(24,01) 11,8 % 3,4
<b>50</b>	(288,05) 4,8% 1,5	(281,01) 15,7 % 6,7	283,77 6,9% 4,1	(291,39) 10,4 % 2,3	(303,18) 11,0 % 3,2	(307,29) 12,8 % 4,3	(251,00) 15,6 % 5,0	(37,50) 12,3 % 2,9
<b>60</b>	(305,95) 8,0% 2,0	(295,80) 17,8 % 7,3	(295,57) 10,0 % 2,4	(301,50) 12,3 % 5,2	(320,62) 11,0 % 3,2	(353,49) 12,4 % 4,1	(301,71) 13,9 % 6,4	(53,48) 18,3 % 9,9
<b>70</b>	(319,08) 10,2 % 2,5	(306,57) 19,3 % 7,7	(306,01) 11,0 % 3,2	(313,42) 13,9 % 5,8	(356,00) 12,2 % 4,0	(430,86) 13,7 % 5,3	(361,73) 14,5 % 10,0	(71,47) 20,6 % 13,3
<b>80</b>	(329,43) 11,0 % 3,2	(315,24) 20,6 % 7,9	(317,59) 11,9 % 3,9	(332,28) 14,6 % 6,3	(426,93) 13,7 % 4,9	(506,53) 17,8 % 7,7	(433,04) 19,8 % 13,1	(90,01) 20,9 % 17,6
<b>90</b>	11,7 % 3,8	21,9 % 7,9	12,4 % 4,7	15,2 % 6,5	14,8 % 6,6	8,4% 10,9	1,6% 16,2	1,6% 21,1

☞ Ver a Legenda e a Nota relativas a este Quadro apresentadas na página seguinte !

Ruy Costa 2013

#### Legenda do Quadro anterior

**$V1 = 30$**

← Lucro Médio Mensal (u.m.)

**$T1 = 40$**  ← % de tempo com 'restrições'

← vol. médio de 'restrição' no tempo com 'restrições'(u.vol.)

↖ % de tempo com 'cheias'

vol. médio de cheia no tempo com 'cheias'

**Nota relativa ao Quadro anterior:** Sempre que tenha ocorrido uma percentagem de 'tempo com restrições', ou de 'tempo com cheias', superior a 10 % do tempo total simulado, considerou-se a correspondente política é 'desaconselhável', pelo que o correspondente valor médios mensais de lucro foi indicado entre parêntesis.

Relativamente aos resultados obtidos, pode-se referir em primeiro lugar que dos 72 cenários estudados, 58 são de imediato classificados como 'desaconselháveis' ! Se considerarmos que é desejável que a percentagem de ocorrência de situações de cheia (ou de situações de 'restrições') não exceda, por exemplo, 5 %, dos 14 cenários restantes somos reduzidos a três:

$$V1 = 20 \text{ u.vol.}; T1 = 20 \text{ u.vol.} \Rightarrow L = 142,76 \text{ u.m.}; C:(4,8\%; 3,4 \text{ u.vol.}); R:(0\%; -)$$

$$V1 = 30 \text{ u.vol.}; T1 = 30 \text{ u.vol.} \Rightarrow L = 226,17 \text{ u.m.}; C:(1,1\%; 2,2 \text{ u.vol.}); R:(0,8\%; 1,7 \text{ u.vol.})$$

$$V1 = 40 \text{ u.vol.}; T1 = 30 \text{ u.vol.} \Rightarrow L = 225,40 \text{ u.m.}; C:(3,9\%; 2,9 \text{ u.vol.}); R (0,0\%; 0,3 \text{ u.vol.})$$

O primeiro dos três cenários destacados não apresenta situações de 'restrições', mas, infelizmente, é o que apresenta a maior percentagem de situações de cheia (4,8 %) e o maior volume médio de cheia (3,4 u.vol.), apresentando ainda, o menor valor de lucro médio mensal (142,76 u.m.).

O terceiro cenário praticamente não apresenta situações de 'restrições', apresenta 3,9 % de situações de cheia (com uma média de 2,9 u.vol.) e um lucro médio mensal de 225,40 u.m., pelo que não temos dúvida em considerá-lo melhor do que o primeiro cenário.

Globalmente, no entanto, parece-nos ser de **destacar a segunda política** (**V1 = 30 ; T1 = 30**), já que as situações de 'restrições' são ainda negligenciáveis e a ocorrência de situações de cheia já é também muito minorada (apenas 1,1 % com 2,2 u.vol.), correspondendo esta política ao valor mais elevado de lucro médio mensal (226,17 u.m.)

[ Atenção: Não se comparem os resultados agora apresentados com os obtidos aquando da simulação com dados históricos (secção I destes apontamentos)! Qualquer semelhança é pura coincidência, já que os 'dados históricos' utilizados não estão directamente relacionados com as distribuições estatísticas apresentadas nesta secção ! ]

Uma última referência a um outro tópico que ainda não tínhamos abordado: a **influência da 'semente' utilizada no processo de geração de números pseudo-aleatórios nos resultados**. Nesta aplicação para simular, por exemplo, 1000 anos, precisamos de gerar mais de 233 000 (!) valores pseudo-aleatórios U[0;1], pelo que temos que utilizar 4 sementes distintas (ver secção III), o que reduzira, à partida, qualquer eventual influência deste factor !

Em aplicações que justifiquem esse cuidado e em que não esteja envolvida a geração de um número tão elevado de números pseudo-aleatórios, poderíamos obter resultados com sementes distintas e 'combinar' os resultados (ou, pelo menos, avaliar a sua variabilidade...).

E já chega de comentários a propósito dos resultados obtidos com o modelo d' **"A Barragem de Pós-Boa ( II )"** ! No entanto, esta barragem ainda nos pode ser útil...

Não a abandonemos já ! Consideremos, agora, o problema **"A Barragem de Pós-Boa ( III )"** :



Admitamos que o enunciado apresentado anteriormente se mantém, mas que se pretende considerar que as necessidades e as precipitações dependem do grau de secura / humidade do ano.

Recordemos os valores indicados anteriormente para as Precipitações Mensais e para as Necessidades Mensais de Água a Jusante:

Mês	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
Nec $\mu$	8	8	8	9	10	13	15	15	15	13	9	8
Nec $\sigma$	1,0	0,8	0,7	0,8	0,9	1,1	1,2	1,3	1,1	0,7	0,8	0,9
Distr. P	N	N	N	N	U	U	U	U	U	N	N	N
$\mu$ ou $a$	30	40	40	30	20	5	0	0	6	18	29	30
$\sigma$ ou $b$	2,5	3,0	3,5	2,0	30	15	10	5	18	2,0	2,5	3,0

**Nota:** Se a distribuição de P for **Normal** ( $\mu ; \sigma$ ), a penúltima linha do Quadro anterior diz respeito a  $\mu$  e a última linha a  $\sigma$ ; se a distribuição for **Uniforme** [ $a ; b$ ], a penúltima linha do Quadro anterior diz respeito a  $a$  e a última a  $b$ .

Admita que, por simplicidade, os valores médios anteriormente indicados das distribuições referidas devem ser encarados como 'valores médios de referência'. Um 'valor médio real' obtém-se por multiplicação do correspondente 'valor médio de referência' pelo respectivo **'factor de humidade do ano'** ( $\theta$  (para a precipitação) e  $\delta$  (para as necessidades)). Os factores de humidade referidos têm as distribuições indicadas no Quadro seguinte:

	$\theta$	$\delta$
Ano seco	Uniforme [ 0,5 ; 0,7 ]	Normal ( $\mu = 1,2 ; \sigma = 0,10$ )
Ano normal	Normal ( $\mu = 1,0 ; \sigma = 0,10$ )	Normal ( $\mu = 1,0 ; \sigma = 0,05$ )
Ano húmido	Uniforme [ 1,3 ; 1,5 ]	Normal ( $\mu = 0,9 ; \sigma = 0,10$ )

Admita que se mantém inalterada a variância das distribuições, independentemente do grau de humidade do ano e que a geração de valores pseudo-aleatórios se faz a partir das distribuições indicadas com os valores médios 'reais' e as variâncias indicadas.

Admita ainda que a 'probabilidade de transição' do grau de secura / humidade de um ano para o seguinte é dada por:

ano <sub>i</sub> ↓	ano <sub>i+1</sub> →	seco	normal	húmido
<b>seco</b>		0,50	0,30	0,20
<b>normal</b>		0,10	0,75	0,15
<b>húmido</b>		0,05	0,45	0,50

Que alterações deveriam ser introduzidas no modelo anteriormente concebido para aconselhar o gestor da barragem relativamente à política de gestão de águas a adoptar, tendo em conta que se pretende considerar que as necessidades e as precipitações dependem do grau de secura / humidade do ano ?

As alterações introduzidas nada têm de especial ... Poderemos começar por, na rotina 'Inic', solicitar ao utilizador a indicação da nova condição inicial G0 (grau de humidade do ano anterior ao ano inicial). Pode-se codificar G0 adoptando, por exemplo, G0 = 1 ( seco ) ; 2 ( normal ) e 3 ( húmido ).



Deixamos ao leitor a tarefa de proceder à adaptação sugerida. Mão à obra !

## • Simulação de Processos de Poisson

Um processo de ocorrências diz-se um Processo de Poisson se os intervalos de tempo entre ocorrências consecutivas forem exponencialmente distribuídos e independentes entre si. Os Processos de Poisson são particularmente importantes na modelação - dos processos de chegada a filas de espera até aos processos de ocorrências sísmicas principais, muitas são as aplicações dos Processos de Poisson.

Consideremos o problema seguinte:

Considere um processo de ocorrências Poissoniano de média 3 por semana.

Admita que a cada ocorrência corresponde uma intensidade  $I \sim N(\mu = 10; \sigma = 2)$ , e que o valor da intensidade de uma ocorrência é independente dos valores de intensidade das outras ocorrências.

Elabore um modelo de simulação que lhe permita estudar a distribuição do máximo anual da intensidade das ocorrências.

Se o processo de Poisson referido tem uma taxa de 3 ocorrências por semana, então o intervalo de tempo médio entre duas ocorrências consecutivas é de  $7 \cdot 24 / 3 = 56$  horas. Assim, tratando-se de um processo de Poisson, os intervalos de tempo entre duas ocorrências consecutivas deverão ser independentes entre si e exponencialmente distribuídos, ou seja:

**Processo de Poisson ( 3 ocorr./semana )  $\Rightarrow DT \sim Exp(\lambda = 1 / 56)$  [ DT em horas ]**

[ Recorde-se que se  $DT \sim Exp(\lambda)$ , então  $\mu_{DT} = 1 / \lambda$  ].

A geração de valores pseudo-aleatórios correspondentes à distribuição  $DT \sim \sim Exp(\lambda = 1 / 56)$  faz-se facilmente, recorrendo-se ao Método da Inversão. Se à variável U for afectado um valor pseudo-aleatório  $U[0;1]$ , ter-se-ia  $DT = -56 \cdot \ln(U)$  (com DT em horas).

Assim, relativamente ao problema que nos é posto, poderíamos conceber a rotina 'Ano', para gerar o máximo de intensidade anual (Max):

```
T = 0 ; Max = 0 ;
Repetir
    gerar DT ;
    T = T + DT ;
    se T ≤ 365 . 24, então gerar I ~ N(μ = 10 ; σ = 2) ;
        se o valor gerado de I for maior que Max, então actualizar o valor de Max: Max = I.
até que T ≥ 365 . 24.
```

Após a invocação da rotina 'Ano' são geradas as ocorrências correspondentes ao ano que se está a simular, sendo afectado à variável Max o valor máximo das intensidades geradas para essas ocorrências.

- 👉 Elabore o fluxograma correspondente à **rotina 'Ano'**.
- 👉 Elabore os fluxogramas correspondentes ao **programa principal** e a **outras rotinas** que considere necessárias para resolver o problema apresentado.
- 👉 Indique as alterações que teria que introduzir no modelo desenvolvido para poder resolver o **problema seguinte**:

Considere um processo de ocorrências Poissoniano de média 3 por semana.

**Admita que a cada ocorrência corresponde uma intensidade  $I_k$  que é função do valor precedente observado  $i_{k-1}$ .**

Se  $i_{k-1}$  for inferior a 9, então  $I_k \sim N(\mu = 8,5; \sigma = 2,7)$ ;  
 se  $i_{k-1}$  pertencer a  $[9, 11]$ , então  $I_k \sim N(\mu = 10,0; \sigma = 2,0)$ ;  
 se  $i_{k-1}$  for superior a 11, então  $I_k \sim N(\mu = 11,5; \sigma = 2,7)$ .

Elabore um modelo de simulação que lhe permita estudar a distribuição do máximo anual da intensidade das ocorrências.

- 👉 Programe os modelos desenvolvidos, leve a cabo as simulações adequadas e compare os resultados obtidos.

E, para terminarmos a apresentação de algumas aplicações da Simulação, apresentaremos em seguida uma introdução à simulação de filas de espera. De notar que o processo de chegadas a uma fila de espera pode, geralmente, ser modelado como um processo de Poisson.

## • Introdução à Simulação de Filas de Espera

Embora possamos dispor de uma série de *resultados clássicos* da Teoria das Filas de Espera, muitas vezes é necessário introduzir pequenas alterações no sistema que não são contempladas pelos modelos 'standard' da Teoria das Filas de Espera. Poderemos, então, recorrer à simulação.

Não é nosso objectivo desenvolver exaustivamente um modelo de simulação de filas de espera, já que tal tarefa, não sendo obviamente intransponível, ultrapassa o grau de complexidade que consideramos adequado a esta disciplina.

Comecemos por considerar o seguinte problema:

Considere um processo de chegadas de clientes a uma fila de espera descrito pelo quadro seguinte:

Cliente nº	Instante de chegada	Duração do atendimento	Cliente nº	Instante de chegada	Duração do atendimento
1	2	13	21	202	10
2	9	6	22	212	8
3	9	8	23	223	5
4	15	15	24	231	23
5	22	10	25	232	15
6	25	5	26	252	10
7	49	9	27	259	12
8	59	11	28	263	5
9	62	12	29	266	6
10	68	18	30	268	9
11	75	9	31	271	8
12	79	13	32	272	35
13	83	19	33	283	28
14	100	2	34	295	15
15	116	3	35	306	17
16	128	6	36	312	12
17	149	15	37	315	5
18	155	18	38	325	5
19	179	5	39	329	9
20	201	10	40	350	1

Simule "manualmente" o funcionamento da fila de espera, admitindo que é válida a *disciplina FIFO* (atendimento por ordem de chegada), admitindo inicialmente a existência de apenas um atendedor (e, posteriormente, dois atendedores). Para tal, preencha um quadro como o seguinte:

T	Acontecimento	N	Tespera	Tfim	Tlivre

**Notas:**

T - relógio  
Acontecimento - chegada de cliente; partida de cliente; início de atendimento; final de atendimento  
N - tamanho da fila de espera

T espero - tempo de espera de um cliente antes do início do seu atendimento.

Tfim - instante previsto para o final do atendimento de um cliente

Tlivre - tempo livre do(s) atendedor(es)

Comecemos por observar que os vários acontecimentos devem ser hierarquizados. Para além do 'Início de funcionamento do sistema' e do 'Final de funcionamento do sistema' (que, usualmente omitimos, por serem acontecimentos tão 'óbvios' ...), os acontecimentos 'Início de actividade do Atendedor nº ...' e 'Final de actividade do Atendedor nº ...' são claramente prioritários. Se se verificarem simultaneamente, uma chegada de um novo cliente, um final de atendimento de um cliente e um início de atendimento, poderemos considerar que o 'Final de atendimento e Partida do Cliente nº ...' é processada antes do 'Início do atendimento do Cliente nº ...' e, por sua vez, este 'início' é processado antes da 'Chegada do Cliente nº ...'.

Após a chegada de um novo cliente o número de pessoas na fila de espera aumenta de uma unidade. Convencionaremos que, quando se dá início ao atendimento de um cliente, não se altera o número de clientes na fila de espera; apenas quando se dá por terminado o atendimento e o cliente deixa o sistema reduzimos uma unidade ao número de clientes na fila de espera. [Obviamente poderíamos ter optado pela estratégia 'inversa' ...].

Quando a fila de espera se encontra vazia ( $N = 0$ ), e se dá a chegada de um cliente, seguir-se-á, de imediato o correspondente início de atendimento. No entanto, antes de processarmos esse início de atendimento, registaremos na coluna Tlivre o tempo livre do atendedor (basta subtrair o instante de tempo actual pelo correspondente ao instante do último final de atendimento processado).

É preciso ter-se atenção à *natureza discreta* que adoptaremos para o 'Tempo'. Por exemplo, o primeiro cliente chega ao sistema no instante 2, dando-se então início ao seu atendimento. Ora a duração desse atendimento é, segundo o enunciado, igual a 13 u.t., pelo que marcaremos 'Tfim = 15', embora, na realidade, o final do atendimento ocorra *no final* da 14<sup>a</sup> u.t., podendo o atendedor iniciar novo atendimento, *no início* da 15<sup>a</sup> u.t. .

Quando processarmos um início de atendimento de um cliente, determinaremos o correspondente tempo de espera, Tesp (basta subtrair o instante de tempo actual pelo correspondente o instante de chegada do cliente ao sistema) emarcaremos o correspondente instante de 'final de atendimento', Tfim.

Com base nos registo que faremos no "**Quadro de Simulação 'Manual' da Fila de Espera**", poderemos calcular algumas **medidas de desempenho do sistema**, que nos permitam ajuizar da adequabilidade da política de atendimento simulada (número de atendedores e seu horário de trabalho).

Uma medida de desempenho óvia prende-se com o **número de pessoas em fila de espera**. Como se percebe facilmente, há sistemas em que existem limitações físicas, que não permitem uma fila que exceda um dado limite máximo, pelo que é importante registar o número **máximo observado** de pessoas em fila de espera. É ainda importante registar os correspondentes **valor mínimo** e **valor médio**.

Uma outra medida de desempenho muito importante diz respeito ao **tempo de espera por pessoa atendida**, sendo importante apurar o valor médio e o desvio padrão da correspondente distribuição de valores observados. Em alguns sistemas reais poderíamos acrescentar uma 'regra de desistência do cliente' que após esperar um dado limite máximo de tempo desistia do atendimento (com o correspondente 'custo de má imagem' para o sistema) ... e nada nos impediria de imaginar uma regra *flexível* com valores dos limites máximos gerados para cada cliente ... (Interessaria, nestes casos, contabilizar o número de clientes que haviam desistido de ser atendidos ...)

Finalmente, numa perspectiva do gestor do sistema, interessaria avaliar o **tempo total livre dos atendedores** (em valor absoluto e como percentagem do tempo total de trabalho). Uma muito baixa percentagem de tempo livre pode vir a ser prejudicial, mas uma percentagem elevada de tempo livre é claramente indesejável ...

Comecemos então a nossa 'simulação manual', preenchendo o "**Quadro de Simulação 'Manual' da Fila de Espera**", admitindo a seguinte política de atendimento:

**Atendedor nº 1 : Início de Actividade → 0 u.t. ; Final de Actividade → 200 u.t.**

T	Acontecimento	N	Tesp	Tfim	Tlivre (Atend. nº)
0	Início de actividade do Atendedor nº 1	0			
2	Chegada do Cliente nº 1	1			
					2 (nº 1)
2	Início de atendimento do Cliente nº 1 (Atend.nº1)	1	0	15	
9	Chegada do Cliente nº 2	2			
9	Chegada do Cliente nº 3	3			
15	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 1	2			
15	Início de atendimento do Cliente nº 2 (Atend.nº1)	2	6	21	
15	Chegada do Cliente nº 4	3			
21	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 2	2			
21	Início de atendimento do Cliente nº 3 (Atend.nº1)	2	12	29	
22	Chegada do Cliente nº 5	3			
25	Chegada do Cliente nº 6	4			
29	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 3	3			
29	Início de atendimento do Cliente nº 4 (Atend.nº1)	3	14	44	
44	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 4	2			
44	Início de atendimento do Cliente nº 5 (Atend.nº1)	2	22	54	
49	Chegada do Cliente nº 7	3			
54	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 5	2			
54	Início de atendimento do Cliente nº 6 (Atend.nº1)	2	29	59	
59	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 6	1			
59	Início de atendimento do Cliente nº 7 (Atend.nº1)	1	10	68	
59	Chegada do Cliente nº 8	2			
62	Chegada do Cliente nº 9	3			
68	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 7	2			
68	Início de atendimento do Cliente nº 8 (Atend.nº1)	2	9	79	
68	Chegada do Cliente nº 10	3			
75	Chegada do Cliente nº 11	4			
79	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 8	3			
79	Início de atendimento do Cliente nº 9 (Atend.nº1)	3	17	91	
79	Chegada do Cliente nº 12	4			
83	Chegada do Cliente nº 13	5			
91	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 9	4			
91	Início de atendimento do Cliente nº 10 (Atend.nº1)	4	23	109	
100	Chegada do Cliente nº 14	5			
109	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 10	4			
109	Início de atendimento do Cliente nº 11 (Atend.nº1)	4	34	118	
116	Chegada do Cliente nº 15	5			
118	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 11	4			
118	Início de atendimento do Cliente nº 12 (Atend.nº1)	4	39	131	
128	Chegada do Cliente nº 16	5			
131	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 12	4			
131	Início de atendimento do Cliente nº 13 (Atend.nº1)	4	48	150	
149	Chegada do Cliente nº 17	5			
150	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 13	4			
150	Início de atendimento do Cliente nº 14 (Atend.nº1)	4	50	152	
152	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 14	3			
152	Início de atendimento do Cliente nº 15 (Atend.nº1)	3	36	155	
155	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 15	2			
155	Início de atendimento do Cliente nº 16 (Atend.nº1)	2	27	161	
155	Chegada do Cliente nº 18	3			
161	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 16	2			
161	Início de atendimento do Cliente nº 17 (Atend.nº1)	2	12	176	
176	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 17	1			
176	Início de atendimento do Cliente nº 18 (Atend.nº1)	1	21	194	
179	Chegada do Cliente nº 19	2			
194	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 18	1			
194	Início de atendimento do Cliente nº 19 (Atend.nº1)	1	15	199	
199	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 19	0			
					1 (nº 1)
200	Final de actividade do Atendedor nº 1	0			

A partir do "**Quadro de Simulação 'Manual' da Fila de Espera**" anterior poderemos concluir que a política de atendimento simulada permite atender os primeiros dezanove clientes, de acordo com o Quadro seguinte:

Cliente Nº	Instante de Chegada	Início de Atendimento	Atendedor Nº	Final de Atendimento
1	2	2	1	14 (*)
2	9	15	1	20
3	9	21	1	28
4	15	29	1	43
5	22	44	1	53
6	25	54	1	58
7	49	59	1	67
8	59	68	1	78
9	62	79	1	90
10	68	91	1	108
11	75	109	1	117
12	79	118	1	130
13	83	131	1	149
14	100	150	1	151
15	116	152	1	154
16	128	155	1	160
17	149	161	1	175
18	155	176	1	193
19	179	194	1	198

**Nota (\*):** O final do atendimento do 1º cliente ocorre no *final da 14ª u.t.*, permitindo o atendimento de um novo cliente no *início da 15ª u.t.*

O Quadro anterior vai ser particularmente útil para a elaboração de um 'cronograma' correspondente ao funcionamento da fila de espera - ver página seguinte.

Poderemos, para a política adoptada, apresentar os seguintes valores das medidas de desempenho:

**Atendedor nº 1 :** Início de Actividade → **0 u.t.** ; Final de Actividade → **200 u.t.**

- Nº de pessoas em fila de espera:**

Máx. = 5  
Mín. = 0  
Médio = 3,09

- Tempo de espera por pessoa atendida :**

Valor médio = 22,32 u.t.  
Desvio padrão = 14,05 u.t.

- Tempo total livre dos atendedores:**

Atendedor nº 1 = 3 u.t. → 1,50 %  
Total = 3 u.t. → 1,50 %

Na página seguinte apresentaremos um 'cronograma' correspondente ao funcionamento da fila de espera - assinala-se com X os períodos de espera dos clientes antes do início do atendimento; assinala-se com o número do atendedor os períodos de atendimento dos clientes (neste caso, e dado que só tínhamos o atendedor nº 1 em serviço, assinala-se com 1 esses períodos de atendimento)

	Nº Cliente										1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
0																				
1																				
2																				
3																				
4																				
5																				
6																				
7																				
8																				
9											X	X								
10											X	X								
11											X	X								
12											X	X								
13											X	X								
14											X	X								
15											X	X								
16											X	X								
17											X	X								
18											X	X								
19											X	X								
20																				
21																				
22																				
23																				
24																				
25																				
26																				
27																				
28																				
29																				
30																				
31																				
32																				
33																				
34																				
35																				
36																				
37																				
38																				
39																				
40																				
41																				
42																				
43																				
44																				
45																				
46																				
47																				
48																				
49																				
50																				
51																				
52																				
53																				
54																				
55																				
56																				
57																				
58																				
59																				
60																				
61																				
62																				
63																				
64																				
65																				
66																				
67																				
68																				
69																				
70																				
71																				
72																				
73																				
74																				
75																				
76																				
77																				
78																				
79																				
80																				
81																				
82																				
83																				
84																				
85																				
86																				
87																				
88																				
89																				
90																				
91																				
92																				
93																				
94																				
95																				
96																				
97																				
98																				
99																				

Ruy Costa, 2011



O 'cronograma' apresentado complementa de modo interessante os valores obtidos das medidas de desempenho do sistema. É fácil concluir-se que ter um só atendedor, no período 0 - 200 u.t. é muito pouco. 1,50 % de tempo livre deva qualquer atendedor a um ataque de nervos ! Por outro lado, 22,3 u.t de tempo de espera *médio* requer dos clientes verdadeiras paciências 'de santo' !

Tentemos melhorar o desempenho do nosso sistema, testando a 'nova' política de atendimento seguinte:

**Atendedor nº 1 :** Início de Actividade → **0** u.t. ; Final de Actividade → **150** u.t.  
**Atendedor nº 2 :** Início de Actividade → **50** u.t. ; Final de Actividade → **200** u.t.

T	Acontecimento	N	Tesp	Tfim	Tlivre (Atend. nº)
0	Início de actividade do Atendedor nº 1	0			
2	Chegada do Cliente nº 1	1			
					2 ( nº 1 )
2	Início de atendimento do Cliente nº 1 (Atend.nº1)	1	0	15	
9	Chegada do Cliente nº 2	2			
9	Chegada do Cliente nº 3	3			
15	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 1	2			
15	Início de atendimento do Cliente nº 2 (Atend.nº1)	2	6	21	
15	Chegada do Cliente nº 4	3			
21	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 2	2			
21	Início de atendimento do Cliente nº 3 (Atend.nº1)	2	12	29	
22	Chegada do Cliente nº 5	3			
25	Chegada do Cliente nº 6	4			
29	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 3	3			
29	Início de atendimento do Cliente nº 4 (Atend.nº1)	3	14	44	
44	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 4	2			
44	Início de atendimento do Cliente nº 5 (Atend.nº1)	2	22	54	
49	Chegada do Cliente nº 7	3			
50	Início de actividade do Atendedor nº 2	3			
50	Início de atendimento do Cliente nº 6 (Atend.nº2)	3	25	55	
54	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 5	2			
54	Início de atendimento do Cliente nº 7 (Atend.nº1)	2	5	63	
55	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 6	1			
59	Chegada do Cliente nº 8	2			
					4 ( nº 2 )
59	Início de atendimento do Cliente nº 8 (Atend.nº2)	2	0	70	
62	Chegada do Cliente nº 9	3			
63	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 7	2			
63	Início de atendimento do Cliente nº 9 (Atend.nº1)	2	1	75	
68	Chegada do Cliente nº 10	3			
70	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 8	2			
70	Início de atendimento do Cliente nº 10 (Atend.nº2)	2	2	88	
75	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 9	1			
75	Chegada do Cliente nº 11	2			
					0 ( nº 1 )
75	Início de atendimento do Cliente nº 11 (Atend.nº1)	2	0	84	
79	Chegada do Cliente nº 12	3			
83	Chegada do Cliente nº 13	4			
84	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 11	3			
84	Início de atendimento do Cliente nº 12 (Atend.nº1)	3	5	97	
88	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 10	2			
88	Início de atendimento do Cliente nº 13 (Atend.nº2)	2	5	107	
97	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 12	1			
100	Chegada do Cliente nº 14	2			
100	Início de atendimento do Cliente nº 14 (Atend.nº1)	2	0	102	3 ( nº 1 )
102	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 14	1			
107	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 13	0			
116	Chegada do Cliente nº 15	1			
					14 ( nº 1 )
116	Início de atendimento do Cliente nº 15 (Atend.nº1)	1	0	119	
119	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 15	0			
128	Chegada do Cliente nº 16	1			
					9 ( nº 1 )
128	Início de atendimento do Cliente nº 16 (Atend.nº1)	1	0	134	
134	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 16	0			
149	Chegada do Cliente nº 16	1			
					15 ( nº 1 )
149	Início de atendimento do Cliente nº 16 (Atend.nº1)	1	0	164	
150	Final de actividade do Atendedor nº 1	1			

continua

continuação

155	Chegada do Cliente nº 17	2			48 ( nº 2 )
155	Início de atendimento do Cliente nº 17 (Atend.nº2)	2	0	173	
164	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 16	1			
173	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 17	0			
179	Chegada do Cliente nº 18	1			6 ( nº 2 )
179	Início de atendimento do Cliente nº 18 (Atend.nº2)	1	0	184	
184	Final de atendimento e Partida do Cliente nº 18	0			
200	Final de actividade do Atendedor nº 2	0			16 ( nº 2 )

A partir do "Quadro de Simulação 'Manual' da Fila de Espera" anterior poderemos concluir que a política de atendimento simulada permite atender os primeiros dezanove clientes, de acordo com o Quadro seguinte:

Cliente Nº	Instante de Chegada	Ínicio de Atendimento	Atendedor Nº	Final de Atendimento
1	2	2	1	14 (*)
2	9	15	1	20
3	9	21	1	28
4	15	29	1	43
5	22	44	1	53
6	25	50	2	54
7	49	54	1	62
8	59	59	2	69
9	62	63	1	74
10	68	70	2	87
11	75	75	1	83
12	79	84	1	96
13	83	88	2	106
14	100	100	1	101
15	116	116	1	118
16	128	128	1	133
17	149	149	1	163
18	155	155	2	172
19	179	179	2	183

**Nota (\*):** O final do atendimento do 1º cliente ocorre no *final da 14ª u.t.*, permitindo o atendimento de um novo cliente no *início da 15ª u.t.*

Poderemos, para a política adoptada, apresentar os seguintes valores das medidas de desempenho:

**Atendedor nº 1 :** Início de Actividade → 0 u.t. ; Final de Actividade → 150 u.t.  
**Atendedor nº 2 :** Início de Actividade → 50 u.t. ; Final de Actividade → 200 u.t.

- Nº\* de pessoas em fila de espera:**

Máx. = 4  
Mín. = 0  
Médio = 1,47

- Tempo de espera por pessoa atendida :**

Valor médio = 5,11 u.t.  
Desvio padrão = 7,71 u.t.

continua

Ruy Costa, 2011

continuação

- **Tempo total livre dos atendedores:**

Atendedor n° 1 = 43 u.t. → 26,22 %

Atendedor n° 2 = 74 u.t. → 49,33 %

Total = 117 u.t. → 37,26 %

Comparemos o desempenho obtido com esta segunda política testada (face à primeira):

Relativamente ao número de pessoas em fila de espera, observa-se uma diminuição ligeira do valor máximo (de 5 para 4) e uma clara diminuição do valor médio (de 3,09 para 1,47).

Relativamente ao tempo de espera por pessoa atendida observou-se uma clara diminuição, quer em termos de valor médio (de 22,32 u.t. para 5,11 u.t.), quer em termos de desvio padrão (de 14,05 u.t. para 7,71).

Relativamente ao tempo total livre dos atendedores, pode referir-se que a percentagem de tempo livre total sobe de 1,50 % para 37,26 %.

Assim e tal como se esperava, a segunda política testada traduz-se num aumento da 'qualidade de atendimento'. A percentagem de tempo livre dos atendedores aumentou consideravelmente, pelo que poderia ser recomendável testar-se uma política 'intermédia' ...

À semelhança do que se fez para a primeira política testada, apresenta-se na página seguinte um 'cronograma' correspondente ao funcionamento da fila de espera - assinala-se com X os períodos de espera dos clientes antes do início do atendimento; assinala-se com o número do atendedor os períodos de atendimento dos clientes.

Ruxo Costa, 2011

T	Nº Cliente																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
0																				
1																				
2																				
3																				
4																				
5																				
6																				
7																				
8																				
9																				
10																				
11																				
12																				
13																				
14																				
15																				
16																				
17																				
18																				
19																				
20																				
21																				
22																				
23																				
24																				
25																				
26																				
27																				
28																				
29																				
30																				
31																				
32																				
33																				
34																				
35																				
36																				
37																				
38																				
39																				
40																				
41																				
42																				
43																				
44																				
45																				
46																				
47																				
48																				
49																				
50																				
51																				
52																				
53																				
54																				
55																				
56																				
57																				
58																				
59																				
60																				
61																				
62																				
63																				
64																				
65																				
66																				
67																				
68																				
69																				
70																				
71																				
72																				
73																				
74																				
75																				
76																				
77																				
78																				
79																				
80																				
81																				
82																				
83																				
84																				
85																				
86																				
87																				
88																				
89																				
90																				
91																				
92																				
93																				
94																				
95																				
96																				
97																				
98																				

Ruy Costa, 2011

	Nº Clientes																		
T	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100																			
101																			
102																			
103																			
104																			
105																			
106																			
107																			
108																			
109																			
110																			
111																			
112																			
113																			
114																			
115																			
116																			
117																			
118																			
119																			
120																			
121																			
122																			
123																			
124																			
125																			
126																			
127																			
128																			
129																			
130																			
131																			
132																			
133																			
134																			
135																			
136																			
137																			
138																			
139																			
140																			
141																			
142																			
143																			
144																			
145																			
146																			
147																			
148																			
149																			
150																			
151																			
152																			
153																			
154																			
155																			
156																			
157																			
158																			
159																			
160																			
161																			
162																			
163																			
164																			
165																			
166																			
167																			
168																			
169																			
170																			
171																			
172																			
173																			
174																			
175																			
176																			
177																			
178																			
179																			
180																			
181																			
182																			
183																			
184																			
185																			
186																			
187																			
188																			
189																			

Ruy Costa 2011

As 'simulações manuais' apresentadas são do tipo 'simulação com dados históricos', já que não se gerou informação. Numa simulação 'a sério', o processo de chegadas à fila de espera estaria caracterizado em estatisticamente (por exemplo, um processo de Poisson com determinada taxa média de chegadas por hora), pelo que se poderia gerar aleatoriamente esse processo. Também as durações dos atendimentos poderia estar caracterizada em termos estatísticos, pelo que, aquando do processamento de um 'início de atendimento', poderíamos gerar a correspondente duração.

Numa simulação 'a sério' teríamos que estipular uma 'duração da simulação' suficientemente longa para garantir a *precisão* desejável dos resultados (como se referiu anteriormente).

- ☞ E agora pode tentar criar um modelo de simulação de uma fila de espera com um só atendedor. Utilize os dados do problema apresentado, para verificar se o seu modelo conduz aos resultados apresentados (para a primeira política testada).
- ☞ A generalização do número de atendedores complica claramente o modelo. Pense nas alterações que deveria introduzir no modelo inicialmente desenvolvido ...

## C O N C L U S Ã O

Na secção anterior deste capítulo apresentamos alguns exemplos de aplicação da Simulação que evidenciaram a diversidade de áreas onde a utilização desta técnica pode revelar-se muito importante. Claro que os exemplos apresentados foram todos relativamente simples, mas isso não terá certamente impedido o leitor de imaginar aplicações bem mais complexas onde a Simulação poderia ser aplicada.

Estamos certos de que o leitor terá também constatado que, a par das suas **grandes potencialidades**, esta técnica apresenta **grandes exigências** (a nível técnico) - a capacidade de **modelação de sistemas e/ou processos** (com a caracterização de um modelo *adequado* para descrever o sistema / processo, envolvendo a caracterização cuidadosa das variáveis *endógenas* e *exógenas*, das variáveis *controladas* e *não controladas* e com a definição de adequadas *medidas de desempenho*) deve estar associada a um domínio adequado da área das **Probabilidades e Estatística** e à capacidade de **implementação informática**.

Assim, não é de espantar que as primeiras tentativas para utilizar esta técnica estejam associadas a algumas dificuldades ...

Nestes apontamentos, pela sua natureza *introdutória*, não discutimos questões tão importantes como a **verificação de modelos**, a **validação de modelos**, o **planeamento de experiências** e a **análise de resultados**. Também seria importante abordar questões como a **implementação de soluções** (obtidas a partir de um modelo de simulação) **no sistema real** e a **monitorização** do funcionamento do sistema, com vista à formulação de **alterações no modelo**. Todos estes tópicos 'dariam pano para mangas' ... mas ultrapassariam claramente os nossos objectivos.