

Analyse complexe pour l'ingénieur

Introduction à la transformé de Laplace et à la transformé en Z

Paul FRAUX

Version du 18 février 2025

Avant-Propos

Ce polycopié présente les fondamentaux des outils de l'analyse complexe, utile dans tout cursus ingénieurs. Il approfondi le cours, et parfois va plus loin (parties marquées d'un H.P.) .

Ce cours vise à faire développer les outils d'analyse et de calculs numériques, et à donner les outils nécessaire à la manipulation des transformé de Laplace (utile en Théorie des circuits et en automatisme) et en Z (utile lors de manipulation de systèmes échantillonnés, des filtrage numérique, et donc pour le traitement numérique du signal). Pour cela, les objectifs de ce cours sont :

- savoir appliquer les règles de calculs du corps des complexes,
- savoir trouver les zero des fonctions complexes usuelles et montrer qu'une application est holomorphe,
- savoir mettre en oeuvre le théorème de Cauchy, les lemmes de Jordan et le théorème des résidus,
- savoir manipuler la transformée de Laplace. En particulier, savoir trouver une abscisse de convergence, calculer (directement ou via les formulaires) une transformée, et mettre en oeuvre la strategie d'inversion,
- savoir manipuler la transformée en Z . En particulier, savoir trouver le domaine de convergence, calculer (directement ou via les formulaires) la transformée et mettre en oeuvre la strategie d'inversion,
- Connaitre les cas d'utilisations courants de ces deux transformés.

Même si les notions sont rappellées autant que possible, ce polycopié nécessite une connaissance préalable

- de l'algèbre usuelle des nombres complexes (propriétés, géométrie associée la représentation vectorielle),
- des fonctions différentiables de deux variables réelles,
- des intégrales de la variable réelles.

On commencera par rappeler les propriétés du corps des nombres complexes et des fonctions usuelles, avant de faire une introduction à la dérivation complexe. Puis on verra le théorème de Cauchy, ainsi que le lemme de Jordan, deux résultat portant sur les intégrales curvilignes. On traitera ensuite des fonction méromorphes et du théorème des résidus. Muni de ces outils, on verra alors la transformé de Laplace avant de conclure avec la transformé en Z . Ce polycopié est nouveau, et contient presque sûrement des erreurs, incohérence et fautes d'orthographe. De plus, certaines notations sont encore implicites et mériterai d'être rappellé en début de polycopié. Merci de nous les signaler pour contribuer à son amélioration.

Un texte en bleu dans ce polycopié est une correction ou un exemple rédigé.

Notations

- $A := B$ signifie que l'objet A est défini par l'expression B .

Ensembles classiques :

- Pour n un entier naturel, on note $\llbracket 1, n \rrbracket := \{1, \dots, n\}$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n .
- \mathbb{N} est l'ensemble des entiers naturels et \mathbb{N}^* l'ensemble des entiers supérieurs à 1.
- \mathbb{R} est l'ensemble des nombres réels.
- $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble contenant tous les sous-ensembles d'un ensemble E .
- E^n est l'ensemble des n tuples d'un ensemble E et $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans E .
- E^F est l'ensemble des fonctions de E dans F .

Opérations sur des suites $((a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de réels) :

- $\limsup_n a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} a_n \in [-\infty, +\infty]$ est la limite supérieure de la suite.
- $\sum a_n$ est la série de terme général (a_n) , et $\sum_{i=1}^{+\infty} a_n$ est la limite des sommes partielles si elle existe.

Espaces de fonctions :

- $C(E, F)$ est l'ensemble des fonctions continues, entre deux ensembles topologiques, de E vers F . En particulier $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions réelles continues.
- $\mathcal{H}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions holomorphes (*ie* dérivable au sens complexe) sur l'ouvert Ω .
- $\mathcal{M}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions méromorphes (*ie* fraction de fonctions holomorphes) sur l'ouvert Ω .
- Pour f une fonction, $\|f\|_{\infty}$ est la norme infinie de cette fonction ($\|f\|_{\infty} := \sup_z |f(z)|$).

Opérateurs fonctionnels :

- $TL(f)$, ou encore F , est la transformée de Laplace d'une fonction f .
- x_c est l'abscisse de convergence simple d'une fonction f . x_{ca} est l'abscisse de convergence absolue.
- $TZ(u)$ ou encore U est la transformée en Z d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Table des matières

1	Corps des complexes, fonctions usuelles et holomorphie	6
1.1	Analyse dans le plan complexe - Rappel	6
1.1.1	Introduction et construction du corps des nombres complexes	6
1.1.2	Topologie dans le plan complexe et notion de convergence	9
1.2	Fonctions complexes usuelles	14
1.2.1	Applications algébriques	14
1.2.2	Séries entières	14
1.2.3	Exponentielle complexe et fonction trigonométrique	17
1.2.4	Détermination de l'argument, fonctions associé et fonctions multiformes	19
1.3	Fonctions holomorphes	22
1.3.1	Différentiabilité dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{C} -dérivabilité	22
1.3.2	Espace des fonctions holomorphes	24
1.4	Exercices	26
2	Intégration dans le corps des complexes	27
2.1	Intégrale curviligne	27
2.1.1	Définition et généralités	27
2.1.2	Lemmes de Jordan	30
2.2	Intégration sur un lacet de fonctions holomorphes et conséquences	32
2.2.1	Théorème de Cauchy	32
2.2.2	Développement en série entière des fonctions holomorphes (H.P.)	34
2.2.3	Singularités et Théorème des résidus	36
2.2.4	Exemples d'applications du théorème des résidus	39
2.2.5	Les fonctions harmoniques (H.P.)	42
2.3	Exercices	43
3	Transformée de Laplace	45
3.1	Définition et domaine de validité	45
3.1.1	Fonctions transformables	45
3.1.2	Théorème fondamental	47
3.2	Manipuler la transformée de Laplace	48
3.2.1	Propriétés et résultat usuels	48
3.2.2	Formule d'inversion	52
3.2.3	Exemple d'application : équations différentielles	54
3.2.4	Exemple d'application : équations aux dérivées partielles	55
3.3	Exercices	56

4 Transformée en Z	58
4.1 Définition et propriétés	58
4.2 Exemples d'applications	61
4.3 Lien avec la transformée de Laplace	62
4.4 Exercices	63
A Dérivation sous le signe intégral de fonctions holomorphes	82
B Surjectivité de l'exponentielle complexe	84

Chapitre 1

Corps des complexes, fonctions usuelles et holomorphie

1.1 Analyse dans le plan complexe - Rappel

Dans cette section, nous allons faire des rappels sur le corps des complexes.

1.1.1 Introduction et construction du corps des nombres complexes

Définition 1 :

On appelle ensemble des nombres complexes l'ensemble $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ muni des deux opérations

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

La première est appelée l'addition et la deuxième la multiplication.

Nous souhaitons manipuler ces nombres complexes comme des nombres, et pour cela, nous aurons besoin de la propriété suivante, dont la fastidieuse démonstration sera ici omise :

Proposition 2 :

L'ensemble \mathbb{C} muni des deux opérations décrites ci-dessus est un corps. Plus précisément, pour tous $(z, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^4$, on a que

- Les deux opérations sont associatives : $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ et $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$
- Les deux opérations sont commutatives : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ et $z_1z_2 = z_2z_1$
- La multiplication est distributive sur l'addition : $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.
- L'addition admet un élément neutre $(0, 0)$ et tout nombre complexe $z = (x, y)$ admet un opposé $-z = (-x, -y)$.
- La multiplication admet un élément neutre $(1, 0)$ et tout nombre complexe non nul $z = (x, y)$ admet un inverse $z^{-1} = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$.

Notation : Nous avons une injection canonique $x \in \mathbb{R} \mapsto (x, 0) \in \mathbb{C}$ qui permet d'identifier \mathbb{R} comme un sous corps de \mathbb{C} . En particulier, on note $0 := (0, 0) \in \mathbb{C}$ et $1 := (1, 0) \in \mathbb{C}$.

Pour faciliter l'écriture, on pose $i := (0, 1)$ et alors $i^2 = -1$. Nous pourrions alors vérifier que tout nombre complexe z s'écrit de manière unique comme $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Nous noterons dans cette écriture $x =: \operatorname{Re}(z)$ la *partie réelle* et $y =: \operatorname{Im}(z)$ la *partie imaginaire*.

Deux autres constructions équivalentes possibles (H.P.) : Pour construire le corps des complexes, il est aussi possible de considérer $\operatorname{Vect}_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ munie des opérations matricielles, ou encore de considérer $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ munie des opérations induites sur l'espace quotients. Ces deux constructions sont équivalentes à celle présentée.

A propos du plan complexe : La construction que nous avons choisie permet d'insister sur le caractère géométrique des nombres complexes. Si l'on considère un plan, muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, il est possible d'associer à chaque point du plan un nombre complexe *via* ses coordonnées $M(x, y) \mapsto x + iy$. Comme on le voit sur la figure 1.1 cela rendra naturelle l'introduction d'une deuxième représentation, correspondant à représenter un point par ses coordonnées polaires.

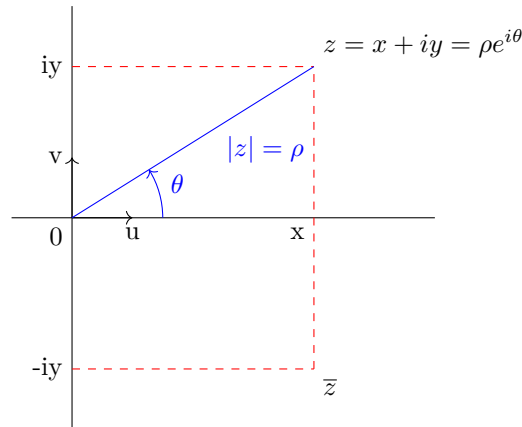


FIGURE 1.1 – Représentation graphique des nombres complexes

Deux notions importantes pour les nombres complexes sont le conjugué et le module. Géométriquement (vu dans le plan complexe), le conjugué est le symétrique par rapport à la droite des réels et le module représente la distance au point de coordonnées $(0, 0)$.

Définition 3 :

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ un nombre complexe, où l'on a écrit $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$.

- Nous appellerons *conjugué* de z le nombre complexe $\bar{z} := x - iy$.
- Nous appellerons *module* de z le nombre réel positif ou nul $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = (z\bar{z})^{1/2}$.

Proposition 4 :

Considérons $(z, w, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^5$. Alors

- $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2}$.
- Si $z \neq 0$, alors $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
- $|wz| = |w| \cdot |z|$.
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (première inégalité triangulaire).
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ (deuxième inégalité triangulaire).
- $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$.

Démonstration. Les vérifications sont laissées au lecteur. Pour la première inégalité triangulaire, l'on pourra commencer par montrer que

$$(|z_1| + |z_2|)^2 - |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1\bar{z}_2| - Re(z_1\bar{z}_2))$$

□

Coordonnées polaires : En nous appuyant sur l'interprétation graphique des nombres complexes de la figure 1.1, on peut écrire $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ où θ est l'angle entre le demi-axe des réels positifs et la demi-droite partant de 0 et passant par z . On vérifie facilement qu'alors $r = |z|$. On dira alors que θ est **un argument** de z , et on le note abusivement $\theta = arg(z)$ (abusivement, car θ n'est déterminé par z qu'à un multiple entier de 2π près).

Les formules trigonométriques d'addition nous donnent, si $z_k = r_k(\cos(\theta_k) + i\sin(\theta_k))$, que

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Cette relation est en fait l'expression d'une formulation exponentielle. Nous verrons dans la section suivante l'existence d'une fonction exponentielle complexe $z \mapsto e^z$, ayant les mêmes propriétés que l'exponentielle réelle. Par exemple, pour tous $(z, w) \in \mathbb{C}^2$, l'on obtiendra que $e^{z+w} = e^z e^w$. De plus, pour $y \in \mathbb{R}$, l'on aura que

$$e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y).$$

On pourra alors se servir de cette intuition pour résoudre des équations impliquant des puissances d'un nombre complexe de la forme $z^n = w$ pour $w \in \mathbb{C}$.

Lien entre les deux systèmes de coordonnées : Si les fonctions cosinus et sinus permettent de passer de manière univoque de l'argument et du module aux parties réelles et imaginaire d'un nombre complexe, le passage inverse est plus ardu, du fait de la multiplicité d'arguments potentiels. Une solution possible (aux dépens de la propriété de continuité que nous définirons prochainement) est de choisir un représentant particulier. Nous avons ainsi la fonction Argument principal définit pour $z \in \mathbb{C}$ par

$$Arg(z) = \begin{cases} \pi & \text{si } z \in \mathbb{R}_-^* \\ 2 \arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)+|z|^2}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Représentation des fonctions complexes : La représentation des nombres complexes comme partie réelle et partie imaginaire invite pour chaque fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \\ z = x + iy & \mapsto f(z) = P(x, y) + iQ(x, y) \end{cases}$$

à définir par isomorphisme une nouvelle fonction

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \\ (x, y) & \mapsto (P(x, y), Q(x, y)). \end{cases}$$

Il faudra cependant manipuler ce changement de perspective, car la notion de dérivation sur les complexes contient des informations supplémentaires par rapport à la transcription rapide qu'apporte ce changement.

1.1.2 Topologie dans le plan complexe et notion de convergence

La proposition 4 (grâce aux points 3 et 4) permet de dire que $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel normé. En particulier, \mathbb{C} hérite naturellement d'une topologie métrique. Pour rappel

Définition 5 :

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $z_\infty \in \mathbb{C}$, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et $l \in \mathbb{C}$.

On dit que (z_n) converge vers z_∞ , noté $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_\infty$ ou encore $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_\infty$, si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0, \forall n > N_0, |z_n - z_\infty| < \epsilon.$$

On dit que f admet une limite en z_0 si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq \eta \Rightarrow |f(z) - l| \leq \epsilon.$$

On le note alors $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$ ou encore $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} l$.

Enfin, on dira que f est continue en z_0 si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Les opérations sur les limites fonctionnent alors comme dans les réels :

Proposition 6 :

La limite (d'une suite ou d'une fonction), si elle existe, est unique.

L'opération "prendre la limite" est stable par somme, produit et composition (lorsque cela est possible).

Si $z_0 = (x_0, y_0)$, alors f continue en z_0 est équivalent à ce que $(x, y) \mapsto P(x, y)$ et $(x, y) \mapsto Q(x, y)$ soient continues en (x_0, y_0) .

Comme la topologie est métrique, pour montrer que $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$, il suffit de montrer que pour toute suite $z_n \rightarrow z_0$ l'on a que $f(z_n) \rightarrow l$.

ATTENTION : Pour une fonction de deux variables P , la continuité par rapport à chaque variable en un point ne suffit pas pour obtenir la continuité vu comme une fonction de deux variables :

$$\begin{cases} x \mapsto P(x, y_0) & \text{continue en } x_0 \\ y \mapsto P(x_0, y) & \text{continue en } y_0 \end{cases} \not\Rightarrow (x, y) \mapsto P(x, y) \text{ continue en } (x_0, y_0)$$

Petit pas de côté sur la notion d'infini : Comme dans le cas réel, il est avantageux d'introduire la notion d'infini complexe. Nous ajoutons donc arbitrairement au corps des complexes un élément, noté ∞ et modifions les opérations $+$ et \cdot de manière que pour tout $a \in \mathbb{C}^*$,

$$\infty \cdot \infty = \infty \quad |\infty| = \infty \quad 0 \cdot \infty = 0$$

$$\infty \cdot a = \infty \quad \frac{a}{\infty} = 0 \quad \frac{\infty}{a} = \infty$$

Ceci est particulièrement utilisé pour étendre les notions de limites au voisinage de l'infini.

(H.P.) Visuellement, cette extension revient à déformer le plan en une sphère privé d'un point, avant de rajouter ce point. Cette intuition est justifiée par la construction de la sphère de Poincaré.



On rappelle que pour les suites de nombres réels $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, les nombres

$$\limsup_n a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_n,$$

$$\liminf_n a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_n$$

existent toujours, et valent la limite des a_n lorsqu'elle existe.

Notations topologiques usuelles : Nous allons introduire des ensembles essentiels à l'analyse dans les complexes.

Définition 7 :

Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $(r, R) \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle

1. disque ouvert de centre z_0 et de rayon r l'ensemble $B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$.
2. disque fermé de centre z_0 et de rayon r l'ensemble $\overline{B}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| \leq r\}$.
3. disque pointé de centre z_0 et de rayon r l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, 0 < |z - z_0| < r\}$.
4. anneau de centre z_0 , de rayon intérieur r et de rayon extérieur R l'ensemble défini par $A(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C}, r < |z - z_0| < R\}$.

Enfin, on rappelle que pour un espace métrique, on appelle ouvert tout ensemble qui peut s'écrire comme une union quelconque de disque ouvert.

Définition 8 :

On dira qu'un ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ est connexe si les seuls ensembles ouvert et fermé dans Ω sont \emptyset et Ω .

On dira qu'un ensemble Ω est simplement connexe s'il est possible de le "déformer" continument (au sens de l'homotopie, H.P.) en un seul point.

On appelle domaine tout ouvert Ω connexe.

Intuitivement, un ensemble connexe est un ensemble en un seul morceau, et un ensemble simplement connexe est un ensemble en un seul morceau sans trou ou saut infinitésimal.



FIGURE 1.2 – Ensembles connexes qui ne sont pas simplement connexe (respectivement : - le graphe de $x \in \mathbb{R}_+ \rightarrow \sin(\frac{1}{x})$ réuni avec $\{0\} \times [0, 1]$ - un anneau)

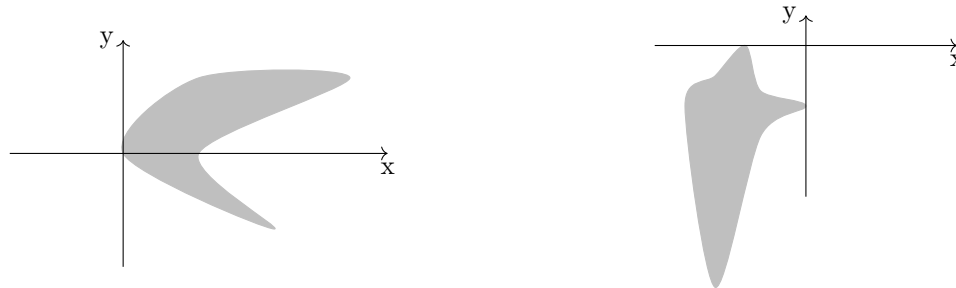


FIGURE 1.3 – Ensembles connexes qui sont simplement connexe

Remarque : La définition d'un domaine est là pour assurer qu'il y ait toujours, pour deux points de l'ensemble, une suite de segment reliant les deux points, ou encore pour assurer qu'il soit possible de découper l'ensemble en petits triangles tous reliés. Ceci permettra ensuite de construire des primitives (opération non triviale pour des fonctions à valeur complexes), et de montrer des propriétés intégrales sur les fonctions dérivables (théorème de Cauchy).

Convergence fonctionnelle : Munie de la notion de convergence de nombre complexe, nous allons définir diverses manières d'assurer qu'une fonction converge

Définition 9 :

Soit $X \subset \mathbb{C}$ un ensemble, $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ et $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ des fonctions.

On dit que (f_n) converge simplement vers f si $\forall z \in X, f_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(z)$.

On dit que (f_n) converge uniformément vers f si $\sup_{z \in X} |f_n(z) - f(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

On remarquera que la convergence uniforme implique la convergence simple, mais que l'inverse n'est pas vrai en général.

Nous utiliserons souvent les résultats suivants sur les limites de fonctions

Proposition 10 :

1. Si X est un espace topologique, et que (f_n) est une suite de fonction continue qui converge **uniformément** vers une fonction f , alors f est continue.
2. (convergence dominée) Si $f_n : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sont des fonctions mesurables (par exemple continue) converge simplement et qu'il existe h intégrable tel que presque partout, $|f_n(z)| \leq h(z)$, alors

$$\int_X f_n(x) dx \rightarrow \int_X f(x) dx.$$

Les hypothèses sont vérifiées en particulier si les f_n sont continues, convergent uniformément et que $X = [a, b]$ est un segment de \mathbb{R} .

3. Si Ω est un ouvert de \mathbb{C} et que $f_n, f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sont des fonctions définies sur Ω . Alors nous avons l'équivalence suivante

f_n converge uniformément sur tout compact K de Ω

\Longleftrightarrow

f_n converge uniformément sur toute boule fermée $\overline{B}(a, r) \subset \Omega$

- Démonstration.*
1. La continuité de f est un résultat classique, qui se résout bien avec un raisonnement de type epsilon-delta.
 2. Il s'agit d'un résultat vu dans le cours d'intégration. Pour le cas particulier, on pourra montrer que les fonctions sont uniformément bornées.
 3. Il s'agit d'un résultat classique de manipulation de compact. Un sens est évident puisque les boules fermées sont compactes. La réciproque s'obtient en recouvrant le compact K par une union finie de boules fermées incluse dans Ω .

□

Séries fonctionnelles : On rappelle qu'on dit qu'une série $\sum a_n$ de terme général (a_n) converge si la suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^n a_k)$ converge (et on appelle la limite "limite de la série", noté $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$). On dit que la série $\sum a_n$ converge absolument si la série $\sum |a_n|$ de terme général $(|a_n|)$ converge (et on peut montrer que ceci implique la convergence de la série $\sum a_n$). Pour les fonctions, nous auront quatre notions de convergences :

Définition 11 :

Soit $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ une suite de fonction.

On dit que $\sum f_n$ converge (simplement) si pour tout $z \in X$, $\sum f_n(z)$ converge.

On dit que $\sum f_n$ converge absolument si pour tout $z \in X$, $\sum |f_n(z)|$ converge absolument.

On dit que $\sum f_n$ converge uniformément si la suite des sommes partielles converge uniformément.

On dit que $\sum f_n$ converge normalement si la série des normes $\sum \|f_n\|_{\infty}$ converge.

La convergence normale est le type de convergence le plus fort, et si $\sum f_n$ converge normalement, alors elle converge uniformément.

Rappelons quelques critères de convergence absolue de séries de nombres, qui nous permettront d'obtenir des convergences de séries de fonctions.

Proposition 12 :

On considère (u_n) et (v_n) deux suites de nombres complexes.

- (Théorème de comparaison) Si $|u_n| = O(|v_n|)$ et que $\sum |v_n|$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.
Si $|u_n| = O(|v_n|)$ et que $\sum |u_n|$ diverge, alors $\sum |v_n|$ diverge.
Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum |v_n|$ et $\sum |u_n|$ sont de même nature.
- (Critère de D'Alembert) Si u_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang et que $\limsup_n \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L < 1$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.
- (Critère de Cauchy - **Fondamental pour les séries entières**)
Si $\limsup_n |u_n|^{\frac{1}{n}} < 1$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.

Démonstration. • Ce résultat est une transcription du principe que pour une suite croissante, la convergence est équivalente à une majoration.

- Supposons que u_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang et que $\limsup_n \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L < 1$. Prenons alors $L < \lambda < 1$, alors pour un certain rang N , $\sup_{k \geq N} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \leq \lambda$. Ainsi, pour tout $k \geq N$, $\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \leq \lambda$ et donc $\forall k \geq N, |u_k| \leq \lambda^{k-N} u_N$. Par comparaison (le point précédent) avec la série géométrique, $\sum u_n$ converge absolument.
- Il s'agit de faire un raisonnement très similaire au précédent pour obtenir une majoration par une série géométrique.

□

Exemple : Avec ces critères, nous allons montrer la convergence normale sur tous compacts de la boule $\Omega = B(0, 1)$ des séries $\sum z^n$ et $\sum n^a z^n$.

Prenons $r < 1$, et considérons le compact $K = \overline{B}(0, r)$ (tout compact de Ω est inclus dans une telle boule). Alors, pour $f_n(z) = z^n$, on a que $\|f_n(z)\|_\infty = r^n$. Comme la série $\sum r^n$ converge, la série $\sum f_n$ converge normalement. Pour $f_n(z) = n^a z^n$, nous allons utiliser le critère de D'Alembert. Encore une fois, sur $K = \overline{B}(0, r)$, on a que $\|f_n\|_\infty = n^a r^n =: u_n$. Comme

$$\lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \left(\frac{n+1}{n} \right)^a r = r < 1,$$

la série $\sum f_n$ converge normalement.

1.2 Fonctions complexes usuelles

1.2.1 Applications algébriques

Que ce soit grâce à la nature géométrique du plan complexe ou au fait que ce soit un corps, il est possible de définir de nombreuses applications élémentaires, correspondantes aux opérations élémentaires. Sans nous attarder dessus, rappelons la définition des plus courantes :

Application	Ensemble de définition	Nom transformation géométrique associé	Paramètre
$z \mapsto z + a$	\mathbb{C}	Translation	$a \in \mathbb{C}$
$z \mapsto e^{i\theta} z$	\mathbb{C}	Rotation	$\theta \in \mathbb{R}$
$z \mapsto rz$	\mathbb{C}	Dilatation	$r \in \mathbb{R}$
$z \mapsto az + b$	\mathbb{C}	Similitude	$(a, b) \in \mathbb{C}^2$
$z \mapsto \frac{1}{z}$	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$	Inversion	
$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$	$\mathbb{C} \setminus \{-\frac{c}{d}\}$	Homographie	$(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$

FIGURE 1.4 – Applications géométriques

Application	Ensemble de définition	Nom de l'application	Paramètre
$z \mapsto a$	\mathbb{C}	Constante	$a \in \mathbb{C}$
$z \mapsto az + b$	\mathbb{C}	Affine	$(a, b) \in \mathbb{C}^2$
$z \mapsto az^2 + bz + c$	\mathbb{C}	Quadratique	$(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$
$z \mapsto \sum_{k=0}^n a_k z^k$	\mathbb{C}	Polynomiale, noté $\mathbb{C}[X]$	$a_k \in \mathbb{C}^n$
$z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$	$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} Q(z) = 0\}$	Fraction rationnelle	$(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$

FIGURE 1.5 – Applications algébriques

Ces applications sont continues en tous points de l'ensemble de définition, et même dérivable (ce que le lecteur pourra vérifier une fois que nous aurons vu ce que cela signifie). L'ensemble des polynômes est un ensemble de fonctions pour lesquelles tous les calculs sont faciles, et contient déjà de nombreuses fonctions. Nous allons chercher à les généraliser autant que possible. C'est ce que nous allons faire avec les limites de polynômes que sont les séries entières.

1.2.2 Séries entières

Les séries entières sont la généralisation des développements limités, et sont particulièrement utiles en analyse complexe.

Définition 13 :

On appelle série entière (au point $a \in \mathbb{C}$) toute fonction f de la forme :

$$f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

en tout point en lequel f est bien posée, pour une certaine suite $a_n \in \mathbb{C}$.

Si cette relation n'est vraie que sur un ouvert $\Omega \ni a$, on dira que f est développable en série entière sur Ω .

Lorsque cela est le cas, la suite des a_n est unique.

Remarque : Ceci revient à dire que le développement de Taylor converge en tout point (série entière), ou au moins sur un voisinage (développable en série entière).

Exemple : • Les polynômes sont des séries entières, pour lesquelles a_n est nul à partir d'un certain rang.

- Peut-être plus intéressant, la fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ est développable en série entière sur $B(0, 1)$ en 0. Rappelons que pour $z \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Prenons un z tel que $|z| < 1$ et notons qu'alors

$$\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - z}$$

(Pour $|z| \geq 1$, la série diverge, puisque le terme général ne tend pas vers 0).

Définition 14 :

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

On appelle rayon de convergence de la série associé le nombre R défini par

$$R := \sup \left\{ r \geq 0, \sum a_n r^n \text{ converge} \right\}$$

On appelle disque de convergence de la série entière en a le disque $B(a, R)$.

Théorème 15 :

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

On pose

$$\frac{1}{R_0} = \limsup_n |a_n|^{1/n}.$$

Alors le rayon de convergence de la série associé à (a_n) est R_0 .

Plus précisément, pour tout a , la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n$:

1. converge absolument pour $z \in B(a, R_0)$,
2. diverge pour $|z - a| > R_0$,
3. converge normalement sur tous compacts de $B(a, R_0)$.

Démonstration. Pour montrer que R_0 est bien le rayon de convergence, il suffit de montrer les trois points du théorème.

Quitte à traduire en posant $w = z - a$, on peut supposer pour la démonstration que $a = 0$. Considérons $r < R_0$ et $r < R < R_0$. Alors comme $\frac{1}{R} > \frac{1}{R_0}$, alors par définition de la limite supérieure, $|a_n|^{1/n} < \frac{1}{R}$ à partir d'un certain rang, et donc que $a_n < \frac{1}{R^n}$ à partir d'un certain rang. Soit alors $z \in B(0, r)$, on vérifie que $|a_n z^n| = O(\frac{r^n}{R^n})$. Par théorème de comparaison, la série entière converge absolument, et même normalement

sur $\overline{B}(0, r)$, ce qui prouve les points 1 et 3.

Maintenant, soit z tel que $|z| > R_0$ et considérons. Comme précédemment, $|a_n| > \frac{1}{|z|^n}$ à partir d'un certain rang, et donc $|a_n z^n| > 1$ à partir d'un certain rang. Ainsi, la série entière diverge grossièrement, ce qui prouve le point 2. \square

Exemple d'application : Considérons la série $\sum (\frac{n+1}{n})^{n^2} z^n$, et cherchons son rayon de convergence.

Comme $|a_n|^{1/n} = (\frac{n+1}{n})^n = (1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$, le théorème nous assure que le rayon de convergence de la série entière est égale à e^{-1} .

Remarque : Et pour $|z| = R$? On ne peut rien dire en général. Ainsi, malgré le fait que les trois séries suivantes aient un rayon de convergence égal à 1, on a que :

- $\sum z^n$ diverge quand $|z| = 1$,
- $\sum \frac{z^n}{n}$ diverge pour $z = 1$ et converge pour $z = -1$ (par critère des séries alternées),
- $\sum \frac{z^n}{n^2}$ converge absolument en $|z| = 1$.

Critère pratique : Dans le cadre des séries entières, on peut reformuler le critère de convergence des séries de D'Alembert de la manière qui suit. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = L$ existe, alors le rayon de convergence de la série est $R = \frac{1}{L}$.

Nous allons vouloir manipuler les séries entières, et la proposition suivante nous assure de pouvoir le faire sans difficulté pour les opérations élémentaires

Proposition 16 :

Considérons deux fonctions développables en série entières $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n$ de rayon de convergence respectif R_1 et R_2 strictement positif. Alors

1. Si $a = b = z_0$, alors $f + g$ est développable en série entière avec $(f + g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) (z - z_0)^n$ et un rayon de convergence $R \geq \min(R_1, R_2)$.
2. Si $a = b = z_0$, alors $f \times g$ est développable en série entière avec $(f \times g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}) (z - z_0)^n$ et un rayon de convergence $R \geq \min(R_1, R_2)$.
3. Si $a = g(b)$, alors $f \circ g$ est développable en série entière avec un rayon de convergence strictement positif.

Démonstration. (H.P.) Pour le premier point, il s'agit de la convergence de la somme de série. Pour le deuxième, il s'agit du produit de Cauchy de deux séries, les séries entières convergeant absolument sur le disque ouvert de convergence.

Supposons que $R_1, R_2 > 0$ pour le dernier point. Comme $g(b) = a$, on peut sans perte de généralité supposer

que $a = b = 0$ et $g(0) = 0$. En travaillant dans $[0, +\infty]$, on a avec le théorème de Tonelli que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \left(\sum_{i=0}^{\infty} |b_i| \times |z|^i \right)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}} \prod_{k=1}^n |b_{i_k} z^{i_k}| \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{n, i_1, \dots, i_n \\ i_1 + \dots + i_n = p}} |a_n| \prod_k |b_{i_k}| \right) |z|^p \end{aligned}$$

(comme $b_0 = 0$, la somme intérieure est en fait une somme finie)

Or, $R_2 > 0$ implique que la série $\sum_{i=1}^{\infty} b_i z^i$ est normalement convergente dans le disque $B(0, \frac{R_2}{2})$ et donc que la fonction $z \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} |b_i| |z|^i$ soit continue comme limite uniforme de fonctions continues (car polynomiale).

En particulier, il existe $r < R_2$ tel que $(\sum_{i=0}^{\infty} |b_i| \times r^i = \sum_{i=1}^{\infty} |b_i| r^i < R_1$. Pour un tel r , les quantités considérées ci-dessus sont toutes finies. Le théorème de Fubini permet alors de conclure (en refaisant le même calcul) que $f \circ g$ est développable en série entières, avec

$$f \circ g(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{n, i_1, \dots, i_n \\ i_1 + \dots + i_n = p}} a_n \prod_k b_{i_k} \right) z^p.$$

□

Exemple : Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes, et soit z_0 tel que $Q(z_0) = a \neq 0$. Alors la fonction rationnelle $z \mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$ est développable en série entière.

En effet, par produit, il suffit de montrer que $z \mapsto \frac{1}{Q(z)} = \frac{1}{a + (Q(z) - a)} = \frac{1}{a} \frac{1}{1 - \frac{Q(z) - a}{a}}$ est développable en série entière. Ceci est vrai par composition de la fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ avec un polynôme s'annulant en z_0 .

1.2.3 Exponentielle complexe et fonction trigonométrique

Nous allons dans cette section à un exemple de série entière, l'exponentielle complexe, et quelques fonctions qui en découlent.

Définition 17 :

La série entière

$$f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

a un rayon de convergence infini. On l'appelle exponentielle complexe. On note $\exp(z)$ ou e^z son image.

On définit également le cosinus, sinus, cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique par :

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, & \sin(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \\ \cosh(z) &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, & \sinh(z) &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \end{aligned}$$

Attention, les fonctions trigonométriques et hyperboliques sont définis sur tout le plan complexes. Il est donc possible de trouver des points d'annulations du cosinus hyperbolique et des complexes ayant des sinus de norme plus grande que 1 (on peut en fait en trouver une infinité, voir les exercices page 26)

Un simple retour à la définition permet de trouver les formules suivantes, que nous appellerons *formule de passage* :

$$\begin{cases} \cos(iz) = \cosh(z) \\ \sin(iz) = i \sinh(z) \\ \tan(iz) = i \tanh(z) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \cosh(iz) = \cos(z) \\ \sinh(iz) = i \sin(z) \\ \tanh(iz) = i \tan(z) \end{cases}$$

Proposition 18 :

- Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction exponentielle définie par sa série entière coïncide avec la fonction exponentielle réelle. En particulier, $f(0) = 1$.
- Pour $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, l'application exponentielle vérifie $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.
- Pour $z \in \mathbb{C}$, $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.
- Pour $y \in \mathbb{R}$, $e^{iy} \in \mathbb{U}$, et en particulier $e^{x+iy} = \cos(y)e^x + i \sin(y)e^x$ est une décomposition polaire.

Démonstration.

- Les résultats de dérivation sous le signe \sum que nous reverrons en 1.3.1 et rappelé en A montrent que $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} n z^{n-1} = f(z)$. Comme de plus $f(0) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$, l'application associée à la série entière vérifie les mêmes conditions en 0 et la même équation différentielle que l'exponentielle réelle. D'après le théorème de Cauchy sur les équations différentielles ordinaires, ces deux fonctions coïncident donc.
- Ce deuxième résultat découle directement du produit de Cauchy de deux séries :

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{z_1^i}{i!} \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{z_2^j}{j!} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n+m=k} \frac{z_1^n}{n!} \frac{z_2^m}{m!}, \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n+m=k} \frac{1}{k!} \frac{k!}{n!m!} z_1^n z_2^m, \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} z_1^n z_2^{k-n}, \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z_1 + z_2)^k}{k!}. \end{aligned}$$

- On déduit directement les derniers points du précédent à l'aide du fait que $f(0) = 1$:

$$e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1.$$

Comme pour $y \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{e^{iy}} = e^{-iy} = \overline{e^{iy}}$, on a bien que $|e^{iy}|^2 = e^{iy} \overline{e^{iy}} = 1$.

□

Proposition 19 :

Le noyau du morphisme de groupe défini par la fonction exponentielle vérifie :

$$\{z \in \mathbb{C} | e^z = 1\} = \{2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Démonstration. L'inclusion réciproque est évidente. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z = 1$.

En passant par la partie réelle et la partie imaginaire, et en utilisant que $|e^z| = 1$, on trouve avec la propriété précédente que $Re(z) = 0$, puis que $\cos(Im(z)) = 1$ et $\sin(Im(z)) = 0$, ce qui montre que $Im(z) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Tout ceci permet de conclure que $z \in \{2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, ce qu'il fallait démontrer. \square

1.2.4 Détermination de l'argument, fonctions associé et fonctions multiformes

Les applications usuelles sont souvent introduites comme la donnée de leur graphe, c'est-à-dire comme la donnée d'un triplet "ensemble de départ", "ensemble d'arrivée" et "ensemble des paires antécédent-image", où l'on demande pour chaque point x de l'ensemble de départ l'existence d'un point y (et d'un seul) de l'ensemble d'arrivée tel que (x, y) soit dans l'ensemble des paires. y est alors appelé image de x par l'application.

Une fonction multiforme est la relaxation de la définition précédente, où l'on ne demande plus nécessairement que l'image d'un point soit unique. Prenons par exemple un ressort situé au-dessus de sa projection (qui est donc un cercle, voir 1.6). Une fonction multiforme prendrait par exemple un point du cercle et le mettrait en relation avec un point du ressort situé au-dessus. Évidemment, il n'y a pas unicité d'un tel point, à moins de préciser la spire du ressort que l'on considère. Les seules fonctions multiformes que nous considérerons auront un comportement similaire : il n'y aura pas d'unicité de l'image, mais il restera possible d'ajouter une information pour obtenir une détermination. Nous allons commencer par un exemple fondamental : l'argument

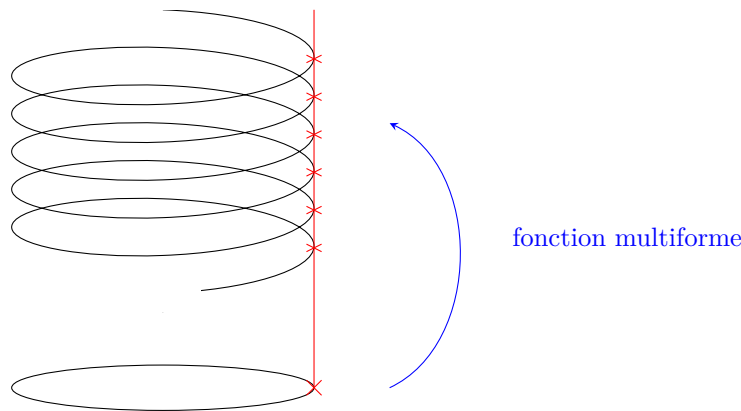


FIGURE 1.6 – Les fonction multiformes : où les utiliser ?

Définition 20 :

La fonction "argument d'un nombre complexe", noté \arg , est une fonction multiforme de \mathbb{C}^* dans \mathbb{R} telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, z = |z|e^{i\arg(z)}.$$

où l'on a notée abusivement $e^{i\arg(z)}$ pour l'image par l'application $w \mapsto e^{iw}$ de n'importe quel élément en relation dans le graphe de la fonction \arg avec z .

Remarquons si cette notion de fonction multiforme est pratique pour énoncer des résultats généraux, ce n'est pas toujours facile de les manipuler. Intuitivement, nous allons vouloir choisir un découpage du ressort et une spire correspondante pour décrire l'argument.

Définition 21 :

On appelle *détermination de rang k de droite de coupure \mathbb{R}_+* l'application $\arg_k : z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \mapsto \theta \in]2k\pi, 2(k+1)\pi[$ qui à un nombre complexe z qui n'est pas dans la demi-droite des réels positifs l'unique valeur $\theta \in]2k\pi, 2(k+1)\pi[$ telle que $z = e^{i\theta}$.

Plus généralement, pour tout angle α , on appelle *détermination de rang k d'angle de coupure α* la détermination de l'angle à valeur dans $]\alpha + 2k\pi, \alpha + 2(k+1)\pi[$, noté $\arg_{k\alpha}$. Sa droite de coupure est alors D_α la demi-droite passant par l'origine et faisant un angle α avec \mathbb{R}_+ .

Remarque : cette définition utilise de manière implicite que l'exponentielle complexe est surjective de \mathbb{C} dans \mathbb{C}^* . Une preuve de cette propriété est donnée en B

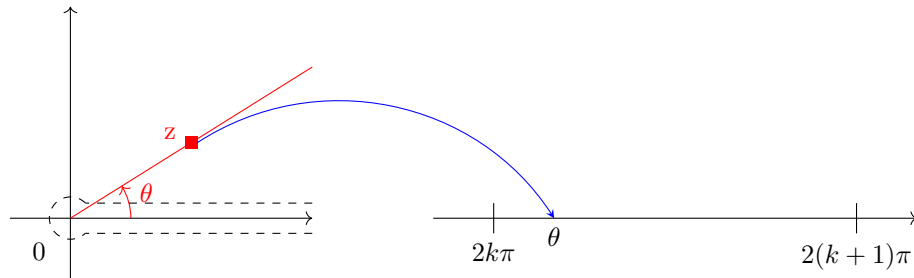


FIGURE 1.7 – Représentation graphique de la détermination de rang k de droite de coupure \mathbb{R}_+

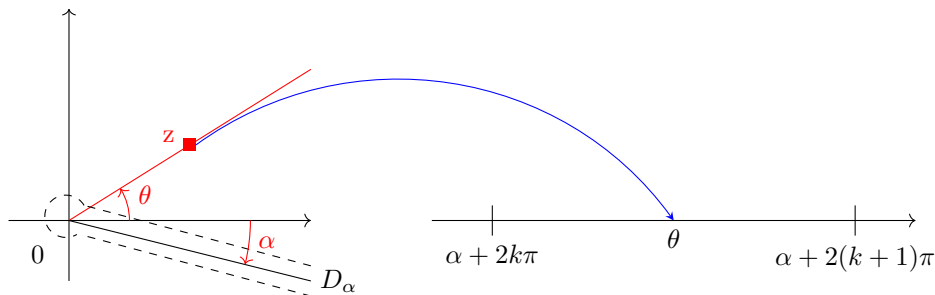


FIGURE 1.8 – Représentation graphique de la détermination de rang k de droite de coupure D_α

Remarques et notation :

- On appelle droite de coupure la droite D_α .
- Il est possible à partir d'une détermination de donner une unique valeur de l'argument sur \mathbb{C}^* . Une telle fonction ne sera alors plus continue (pour s'en convaincre, approcher l'angle de coupure par le "bord inférieur" et par "bord supérieur").
- Le point O origine de la coupure est appelée point de branchement ou point de ramification. Il est vain de chercher à lui attribuer un argument, puisqu'il n'appartient pas à l'image de l'exponentielle complexe.
- La représentation de la coupure en pointillé dans les figures 1.7 et 1.8 propose une stratégie de contournement de la droite de coupure lorsque l'on construira des contours d'intégration dans 2.2.1.
- Lorsque l'on manipulera des chemins fermés entourant le point de branchement, cela reviendra à un changement de détermination (changement de spire du ressort).
- On appelle $arg_{k,-\pi}$ la détermination principale de l'argument et on le note Arg . Si $x = Re(z)$ et $y = Im(z)$, alors pour $z \notin \mathbb{R}_-$, on a $Arg(z) = 2 \arctan \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \in]-\pi, \pi[$.

À partir de détermination de l'argument, nous pouvons définir des déterminations de nouvelles fonctions (fonctions puissances rationnelles, logarithme complexe, fonction puissance complexe) :

Définition 22 :

- On appelle détermination de rang k de la puissance $\frac{1}{n}$ l'application $z \in C \setminus D_\alpha \mapsto |z|^{1/n} e^{\frac{i}{n} arg_{k,\alpha}(z)}$. Par composition, cela permet de définir des fonctions puissances rationnelles, puis par continuité de l'exponentielle de définir des fonctions puissances réelles.
- On appelle détermination de rang k du logarithme l'application $\log_{k,\alpha} z \in C \setminus D_\alpha \mapsto \ln(|z|) + i arg_{k,\alpha}(z)$.
- On appelle détermination de rang k de la fonction puissance complexe l'application $z \in C \setminus D_\alpha \mapsto e^{\beta arg_{k,\alpha}(z)}$ pour $\beta \in \mathbb{C}$.

1.3 Fonctions holomorphes

Dans cette section, nous allons voir comment généraliser à des fonctions de la variable complexe la notion de dérivation, et les premières conséquences de cette généralisation.

1.3.1 Différentiabilité dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{C} -dérivabilité

Pour les fonctions à variables complexes, nous pouvons penser à deux possibilités pour généraliser la dérivation des fonctions réelles, qui dépendent de la manière de les décrire : comme des fonctions partant d'un \mathbb{R} espace vectoriel qui admet déjà une notion de différentiabilité, ou comme des fonctions sur un corps normé qui permet une généralisation de la définition de la dérivée réelle. Commençons par définir plus formellement ces deux notions.

Définition 23 :

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $P : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une application.

On dit que P est différentiable en (x_0, y_0) s'il existe $\Omega_1 \subset \Omega - (x_0, y_0)$ un ouvert contenant $(0, 0)$, $A(x_0, y_0)$ et $B(x_0, y_0)$ deux complexes et $\epsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction vérifiant $\lim_{\|(h,k)\| \rightarrow 0} \epsilon(h,k) = 0$ tels que

$$\forall (h, k) \in \Omega_1, P(x_0 + h, y_0 + k) = P(x_0, y_0) + A(x_0, y_0)h + B(x_0, y_0)k + \|(h, k)\|\epsilon(h, k)$$

On dira abusivement qu'une fonction de la variable complexe : $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est différentiable en (x_0, y_0) si la fonction induite sur \mathbb{R}^2 (en transformant un couple de réels en un complexe via la partie réelle et imaginaire) est différentiable.

Définition 24 :

Soit f une fonction de la variable complexe définie sur un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$. On dira que f est dérivable au sens complexe en z_0 si le quotient $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ admet une limite au sens complexe dans \mathbb{C} en z_0 . On notera alors cette limite $f'(z_0)$.

Remarque : Pour ces deux notions, nous avons la notion globale que différentiabilité et de dérivabilité lorsque l'on a la propriété en tous points.

Ces deux notions impliquent également la continuité de la fonction au niveau du point considéré (la démonstration de cette affirmation est laissée en exercice au lecteur pointilleux).

Proposition 25 :

Si f est dérivable en z_0 , alors elle est différentiable en z_0 .

Démonstration. Avec les notations de la définition, on vérifie que $A(z_0) = f'(z_0)$ et $B(z_0) = if'(z_0)$ et $\epsilon(h, k)(h + ik) = f(z_0 + h + ik) - f(z_0) - f'(z_0)(h + ik)$ convient en utilisant directement la définition de la dérivabilité. \square

On pourrait alors se demander si la réciproque tient, c'est-à-dire si la différentiabilité implique la dérivabilité. Nous allons voir que ceci est plus compliqué que cela.

Exemples :

- $f : z \mapsto z$ est dérivable. En effet, comme $\frac{z-z_0}{z-z_0} = 1 \rightarrow 1$, f est dérivable en tout point z_0 .
- $f : z \mapsto z^2$ est dérivable. En effet, comme $\frac{z^2-z_0^2}{z-z_0} = z+z_0 \rightarrow 2z_0$, f est dérivable en tout point z_0 .
- $g : z \mapsto \bar{z}$ est différentiable mais n'est pas dérivable. La différentiabilité est immédiate, puisque pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\overline{z+x-iy} = \bar{z}+x-iy$. Maintenant, pour montrer que g n'est pas dérivable, on peut remarquer que

$$\frac{\overline{z_0+x-iy}-\bar{z}_0}{x+iy} = \frac{x-iy}{x+iy}$$

et que ce quotient vaut 1 si $y = 0$ et -1 si $x = 0$. Le quotient ne peut donc pas converger au vu de sa dépendance en la pente du chemin d'approche.

Nous avons en fait un résultat qui dit que ce défaut de dérivabilité dans le dernier exemple est le seul possible. Plus précisément :

Théoreme 26 : *Condition de Cauchy-Riemann*

Soit f une fonction de la variable complexe, et on note $P = \operatorname{Re}(f)$ et $Q = \operatorname{Im}(f)$.

Alors :

$$f \text{ est dérivable en } z_0 = x_0 + iy_0 \iff \begin{aligned} &P \text{ et } Q \text{ sont différentiables en } (x_0, y_0) \\ &\text{et} \\ &\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration. Pour montrer qu'il s'agit bien d'une condition nécessaire, nous pouvons nous appuyer sur la preuve de la proposition 25. En effet, avec les notations de la définition, $f'(z_0) = A = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $if'(z_0) = B = \frac{\partial f}{\partial y}$. En décomposant en partie réelle et partie imaginaire, on obtient la condition de Cauchy.

Montrons à présent qu'il s'agit bien d'une condition suffisante. On écrit à l'aide de la différentiabilité pour $w = h + ik$ que

$$\begin{aligned} f(z_0 + w) &= P(z_0 + w) + iQ(z_0 + w) \\ &= P(z_0) + \frac{\partial P}{\partial x}(z_0)h + \frac{\partial P}{\partial y}(z_0)k + i(Q(z_0) + \frac{\partial Q}{\partial x}(z_0)h + \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0)k) + \|(h, k)\|(\epsilon_P(h, k) + i\epsilon_Q(h, k)) \\ &= f(z_0) + \left(\frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y}\right)(h + ik) + \|h + ik\|\epsilon(h + ik) \quad \text{grâce aux conditions de Cauchy} \\ &= f(z_0) + \left(\frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y}\right)w + w\epsilon(w) \end{aligned}$$

Ainsi, en passant au quotient définissant la dérivée, f est bien dérivable et de dérivé complexe $\frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial P}{\partial y}$. \square

Remarque : En suivant le même schéma de preuve, on peut montrer également que

$$f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$f'(z_0) = \frac{\partial Q}{\partial y} - i \frac{\partial P}{\partial y}.$$

On notera également que la condition de dérivabilité complexe est très forte, puisqu'elle impose un lien entre la partie réelle et la partie imaginaire !

1.3.2 Espace des fonctions holomorphes

Toute l'analyse complexe repose sur l'étude des fonctions dérivables au sens complexes et de leurs propriétés.

Définition 27 :

On appelle fonction holomorphe sur un ouvert Ω de \mathbb{C} une fonction qui est dérivable (au sens complexe) en tout point de Ω .

On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω .

On retrouve toutes les propriétés analogues à celle des fonctions dérivables dans \mathbb{R} . Les démonstrations étant une simple réécriture, elles seront ici omises.

Proposition 28 :

Soient $(f, g) \in \mathcal{H}(\Omega)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Alors

- $\lambda f + \mu g \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.
- $fg \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $(fg)' = f'g + fg'$.
- Si $\forall z \in \Omega, g(z) \neq 0$, alors $\frac{1}{g} \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $(\frac{1}{g})' = -\frac{g'}{g^2}$.

Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $g \in \mathcal{H}(f(\Omega))$, alors $g \circ f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

Si f est bijective de Ω sur $f(\Omega)$, alors $f^{-1} \in \mathcal{H}(f(\Omega))$ et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Exemple des fonctions algébriques : On dérive formellement par rapport à z comme pour les fonctions de la variable réelle par rapport à x .

$$(az)' = a,$$

$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$

L'intérêt principal des séries entières en analyse complexe réside dans leurs bonnes propriétés vis-à-vis de la dérivation

Proposition 29 :

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

f est une fonction holomorphe sur le disque ouvert $B(0, R)$, et sa dérivée est alors la série

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Démonstration. Il s'agit simplement d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral (voir le cours d'intégration) pour la mesure de comptage, sur tout disque fermé $\overline{B(0, r)}$ où $r < R$.

En effet, les fonctions $f_n : z \mapsto a_n z^n$ sont continues donc mesurables, leurs dérivées existent et sont uniformément bornées par $z \mapsto n|a_n|r^n$ (qui est sommable car $r < R$). \square

Application : A l'aide de cette propriété, on prouve que

$$\exp'(z) = \exp(z),$$

$$\cos'(z) = -\sin(z),$$

$$\cosh'(z) = \sinh'(z) \dots$$

Encore une fois, on dérive par rapport à z comme on dérive dans \mathbb{R} par rapport à x . Ceci est dû au fait que les séries entières sont entièrement déterminées par leurs dérivées en un point (qui elle-même ne dépendent que des valeurs sur un ensemble ayant un point d'accumulation, comme \mathbb{R}).

Calculs de deux dérivées :

- On souhaite calculer la dérivée d'une détermination du logarithme complexe. Considérons par exemple la détermination de rang k et de droite de coupure \mathbb{R}_+ . Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Alors par définition, sur un voisinage de z_0 , on a que $\exp(\log_k(z)) = z$. On utilise alors la formule de la dérivée d'une fonction réciproque pour avoir que

$$\log'_k(z) = (f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))} = \frac{1}{\exp(\log_k(z))} = \frac{1}{z}.$$

On remarquera que la constante additive dans le logarithme, dû à la détermination, a disparue.

- On souhaite calculer la dérivée d'une détermination d'une fonction puissance complexe. On se donne $\alpha \in \mathbb{C}$ et on considère

$$f : z \mapsto \exp(\alpha \log_k(z)).$$

On obtient par dérivée des fonctions composées que

$$f'(z) = \frac{\alpha}{z} f(z) = \alpha z^{\alpha-1}.$$

1.4 Exercices

Une petite série d'exercices, dont on retrouvera la correction page 64.

Exercice 1 :

Écrire les nombres suivants sous forme $z = re^{i\theta}$:

$$2 + 2\sqrt{3}i \quad ; \quad -5 + 5i \quad ; \quad -\sqrt{6} - \sqrt{2}i \quad ; \quad -3i.$$

Exercice 2 :

Démontrer que l'équation de tout cercle et de toutes droites dans \mathbb{C} est de la forme

$$\alpha|z|^2 + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$$

Pour des nombres $(\alpha, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ et $\beta \in \mathbb{C}$ propre à la droite/cercle.

Exercice 3 :

Représenter graphiquement l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $|\frac{z-3}{z+3}| = 2$, puis l'ensemble des z tels que $|\frac{z-3}{z+3}| < 2$

Exercice 4 :

Donner une expression simplifiée de $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

Exercice 5 :

Le but de cet exercice est de démontrer qu'il n'existe aucune partition non triviale de \mathbb{N} formée de suites arithmétiques de raison différentes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de partition (union disjointe) de la forme

$$\mathbb{N} = S_1 \sqcup S_2 \sqcup \cdots \sqcup S_m,$$

avec $m \geq 2$, $S_j := \{a_j + kd_j, k \geq 0\}$ où $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}$ et $1 < d_1 < d_2 < \cdots < d_m$ entiers.

1. Par l'absurde, supposons qu'une telle partition existe. En déduire que pour tout $|z| < 1$, on aurait

$$\frac{1}{1-z} = \frac{z^{a_1}}{1-z^{d_1}} + \frac{z^{a_2}}{1-z^{d_2}} + \cdots + \frac{z^{a_m}}{1-z^{d_m}}$$

2. Conclure à une absurdité à l'aide d'une suite $(z_n) \subset D(0, 1)$ telle que $z_n \rightarrow e^{\frac{2i\pi}{d_m}}$.

Exercice 6 :

Résoudre dans \mathbb{C} , sans utiliser les formules de passages, les équations

$$(1) : \cos(z) = 2 \quad (2) : \cosh(z) = 0$$

Comparer les résultats aux mêmes équations dans \mathbb{R} .

Exercice 7 :

L'application $g : x + iy \mapsto \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ est-elle holomorphe (avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) ?

Chapitre 2

Intégration dans le corps des complexes

Nous allons dans ce chapitre définir et utiliser des intégrales sur des chemins dans \mathbb{C} . Aucun résultat de la théorie de l'intégration ne sera nécessaire autrement que comme une boîte noire fournissant des résultats sur des interversions de limite et d'intégrales.

2.1 Intégrale curviligne

2.1.1 Définition et généralités

L'intégrale curviligne répond à ce besoin profond de chaque étudiant de savoir intégrer le long d'un parcours différent de l'axe réel. Commençons par préciser ce que nous entendons par parcours.

Définition 30 :

On appelle chemin de \mathbb{C} l'image d'une application continue $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $[a, b]$ étant un intervalle de \mathbb{R} , muni d'un sens de parcours.

On appelle lacet un chemin tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

On dit qu'une application $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est C^1 par morceaux s'il existe $a = t_1 < t_2 \dots < t_n = b$ tel que γ soit de classe C^1 sur les intervalles de la forme $[t_i, t_{i+1}]$.

Si pour un chemin, on peut trouver γ qui soit C^1 par morceaux, on dira que le chemin est C^1 par morceaux.

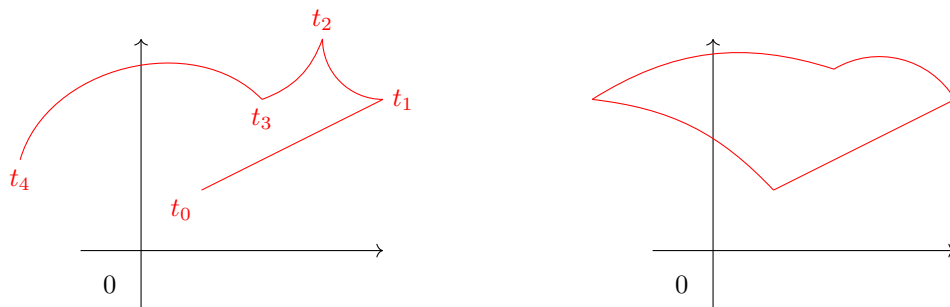


FIGURE 2.1 – Un chemin C^1 par morceaux et un lacet

Exemple de chemin et leur paramétrisation :

- Segment de droite parallèle à l'axe des abscisses,

$$x \in [x_1, x_2] \mapsto z = x + iy_0.$$

- Segment de droite parallèle à l'axe des ordonnées,

$$y \in [y_1, y_2] \mapsto z = x_0 + iy.$$

- Segment de droite passant par l'origine,

$$\rho \in [\rho_1, \rho_2] \mapsto z = \rho e^{i\theta}.$$

- Arc de cercle de rayon R_0 et de centre a ,

$$\theta \in [\theta_1, \theta_2] \mapsto z = a + R_0 e^{i\theta}.$$

On souhaite donc à présent déterminer une notion d'intégrale d'une fonction complexe le long d'un chemin. La première idée que l'on pourrait avoir (une idée fructueuse comme nous allons voir) est de voir la nouvelle intégrale comme un changement de variable d'une intégrale sur un segment. Pour cela, nous allons demander du chemin qu'il soit au moins C^1 par morceaux.

Définition 31 :

Soit $\gamma([a, b])$ un chemin C^1 par morceaux paramétré par γ , et $a = t_1 < \dots < t_n = b$ la décomposition associée. Soit f une fonction de la variable complexe continue, on appelle intégrale curviligne de f le long de γ la valeur

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

également noté

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma([a, b])} f(z) dz$$

Exemple : Notons $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ et calculons $\int_{\mathbb{U}} \frac{1}{z} dz$.

Remarquons d'abord que $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto e^{i\theta}$ est une paramétrisation C^1 de \mathbb{U} . Donc

$$\int_{\mathbb{U}} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} (ie^{i\theta}) d\theta = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2i\pi.$$

Comme souvent en mathématiques, il y a de nombreuses manières de définir un objet. Nous aurions pu choisir la propriété suivante (dont nous admettrons la démonstration, qui repose essentiellement sur de la convergence dominée, mais nécessite des mesures complexes qui n'ont pas été vus dans le cours d'intégration) :

Proposition 32 : Intégrale de Stieltjes

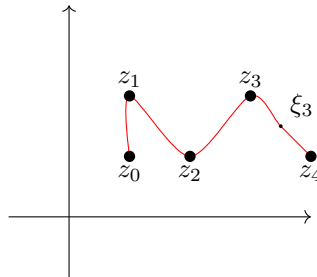
Soit $\gamma([a, b])$ un chemin C^1 par morceaux paramétré par γ et f une fonction continue. Alors l'intégrale curviligne de f sur le chemin défini par γ peut s'écrire comme limite

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\sup |t_k - t_{k+1}| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n f(\gamma(t_k)) (\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)).$$

On peut alors reconnaître dans cette propriété la définition de l'intégrale de Riemann vu aux cours des années précédentes. On prend la limite lorsque le pas de la subdivision tend vers 0 des valeurs de f multiplié par l'écart entre le pas (contrairement aux sommes de Riemann, l'écart est ici dicté par γ). Cette deuxième propriété permettrait de proposer une définition plus générale d'intégrale curviligne, qui sort du propos de ce cours.

Cette propriété permet la reformulation qui suit.

On se donne une subdivision du chemin $\gamma([a, b]) = \cup_{k=1}^n z_{k-1} z_k$ et un point dans chaque morceau $\xi_k \in z_{k-1} z_k$, comme dans le graphique qui suit.



Avec les notations suivantes

$$z_k = x_k + iy_k,$$

$$z_k - z_{k-1} = \Delta x_k + i \Delta y_k,$$

$$\xi_k = a_k + ib_k,$$

$$f(\xi_k) = P(a_k, b_k) + iQ(a_k, b_k),$$

on peut réécrire

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum P(a_k, b_k) \Delta x_k - Q(a_k, b_k) \Delta y_k \\ &\quad + i \lim_{n \rightarrow \infty} \sum P(a_k, b_k) \Delta y_k + Q(a_k, b_k) \Delta x_k \\ &= \int_{\gamma} P dx - Q dy + i \int_{\gamma} Q dx + P dy \end{aligned}$$

Proposition 33 :

L'intégrale curviligne vérifie les propriétés suivantes :

- (*Linéarité*) Soient γ un chemin, f, g deux fonctions continues et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ deux scalaires. Alors

$$\int_{\gamma} (\lambda f(z) + \mu g(z)) dz = \lambda \int_{\gamma} f(z) dz + \mu \int_{\gamma} g(z) dz.$$

- (*Intégrale d'une constante*) Si γ est une paramétrisation d'un chemin et K est une constante, alors

$$\int_{\gamma} K dz = K (\gamma(b) - \gamma(a))$$

- (*Sens de parcours*) Si γ_+ est un chemin parcouru dans un sens et γ_- le même chemin parcouru dans l'autre sens, alors pour f une fonction continue,

$$\int_{\gamma_+} f(z) dz = - \int_{\gamma_-} f(z) dz$$

- (*Juxtaposition de deux chemins*) Soient $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$ deux chemins tels que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, et on note $\gamma_1 \cup \gamma_2$ le chemin obtenue en juxtaposant ces deux chemins. On a alors que

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

Démonstration. Il s'agit à chaque fois de revenir à la définition.

La première propriété repose sur la linéarité du produit, la deuxième sur le théorème fondamental de l'analyse (aussi connue sous l'intégrale d'une dérivée), la troisième sur le fait qu'inverser un sens de parcours inverse la dérivée de la paramétrisation et enfin la quatrième sur la relation de Chasles. \square

2.1.2 Lemmes de Jordan

Nous allons à présent voir deux résultats (appelée lemme de Jordan), que nous utiliserons à mainte reprise dans nos applications de l'analyse complexe (particulièrement pour l'inversion de la transformée de Laplace). Il est important de connaître les résultats, mais aussi de connaître la preuve afin d'être en capacité de reproduire les raisonnements.

Lemme : 1^{er} lemme de Jordan

Soient $a \in \mathbb{C}$ un point, $r > 0$ un rayon et f une fonction continue.

Alors si l'on considère comme chemin $C_r(a)$ un arc du cercle centré en a et de rayon r , et si

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sup_{C_r(a)} |(z - a)f(z)| = 0, \text{ alors}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r(a)} f(z) dz = 0$$

Démonstration. Paramétrisons l'arc de cercle par $\gamma : \theta \in [\alpha, \beta] \mapsto a + re^{i\theta}$. Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r(a)} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(a + re^{i\theta}) rie^{i\theta} d\theta \right|, \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} |rf(a + re^{i\theta})| d\theta, \\ &\leq (\beta - \alpha) \sup_{C_r(a)} |(z - a)f(z)|. \end{aligned}$$

Ce qui montre par encadrement la limite énoncé. \square

Maintenant, ce premier lemme est parfois insuffisant. C'est là où le deuxième lemme rentre en jeu. En échange d'une condition plus stricte sur le domaine et la forme de la fonction f (qui ressemble beaucoup à une transformée de Laplace inverse que nous verrons en 3.2.2), nous pouvons assouplir la condition de décroissance de f . Les quatre courbes qui apparaissent dans le lemme de Jordan (ici représenté pour $a = 0$) sont les suivants :

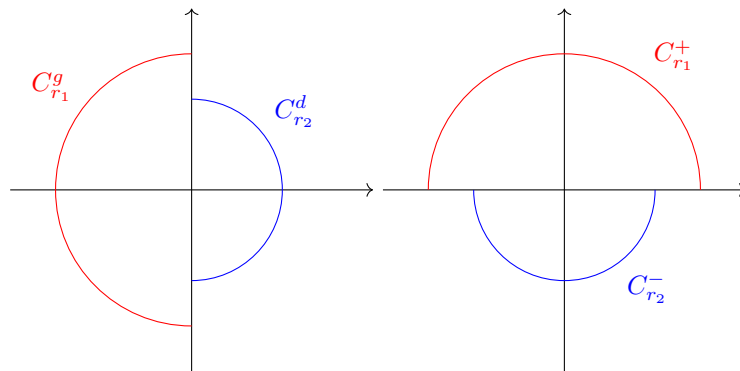


FIGURE 2.2 – Représentation des 4 domaines considérés dans le 2^{ème} lemme de Jordan

Lemme : 2^{ème} lemme de Jordan

Soient $a \in \mathbb{C}$ un point, $r > 0$ un rayon et f une fonction continue.

Supposons $\lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{C_r(a)} |f(z)| = 0$, alors

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{C_r(a)} e^{imz} f(z) dz = 0 \quad \text{pour } m > 0 \text{ et } C_r \subset C_r^+,$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{C_r(a)} e^{imz} f(z) dz = 0 \quad \text{pour } m < 0 \text{ et } C_r \subset C_r^-,$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{C_r(a)} e^{mz} f(z) dz = 0 \quad \text{pour } m < 0 \text{ et } C_r \subset C_r^d,$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{C_r(a)} e^{mz} f(z) dz = 0 \quad \text{pour } m > 0 \text{ et } C_r \subset C_r^g,$$

Démonstration. Quitte à effectuer une translation de l'espace, on peut supposer sans perte de généralité que $a = 0$.

Calculons, pour $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$ (cas $C_r \subset C_r^+$) et $m > 0$:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{C_r(a)} e^{imz} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} e^{imre^{i\theta}} f(re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta \right|, \\
 &\leq \sup_{C_r} |f(z)| \int_{\alpha}^{\beta} re^{-mr \sin(\theta)} d\theta \quad (\text{car } |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}), \\
 &\leq \sup_{C_r} |f(z)| \int_0^{\pi} re^{-mr \sin(\theta)} d\theta, \\
 &\leq 2 \sup_{C_r} |f(z)| \int_0^{\frac{\pi}{2}} re^{-mr \sin(\theta)} d\theta, \\
 &\leq 2 \sup_{C_r} |f(z)| \int_0^{\frac{\pi}{2}} re^{-mr \frac{2\theta}{\pi}} d\theta \quad (\text{car } \sin(\theta) \geq \frac{2\theta}{\pi} \text{ sur } [0, \frac{\pi}{2}]), \\
 &\leq \sup_{C_r} |f(z)| \left[\frac{-\pi}{2m} e^{-mr \frac{2\theta}{\pi}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}, \\
 &\leq \sup_{C_r} |f(z)| \frac{\pi}{m} (1 - e^{-mr}) \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Pour les trois autres cas, on peut soit refaire tout les calculs, soit se ramener à chaque fois par un changement de variable à la troisième ligne de ce calcul (les détails sont laissés au lecteur). \square

2.2 Intégration sur un lacet de fonctions holomorphes et conséquences

La dérivation complexe est plus complexe à obtenir : c'est une notion très rigide. Nous allons voir dans cette partie quelques résultats allant dans ce sens parmi les nombreux existant.

2.2.1 Théorème de Cauchy

Un des résultats les plus connus (et sans aucun doute méritant un titre de théorème fondamentale de l'analyse complexe, même si celui-ci n'est pas son nom), est le théorème suivant :

Théorème 34 : Théorème de Cauchy

Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de \mathbb{C} non vide et $D \subset \Omega$ un domaine simplement connexe^a de contour C . Alors

$$\int_C f(z) dz = 0$$

La propriété reste vraie si f est holomorphe sur $D \setminus \{z_0\}$ et continu en z_0 .

^a. pour nous il s'agira d'un ouvert "sans trou" intérieur

Démonstration. La preuve élémentaire est relativement longue et utilise un découpage du domaine en triangle (on pourra par exemple aller voir [Rud95] pour les détails). Nous utiliserons le résultat plus avancé qu'est le théorème de Green Riemann, mais il n'est pas nécessaire à la preuve. Rappelons que ce théorème énonce que

si C^+ est le parcours de C dans le sens direct, alors

$$\int_{C^+} A dx + b dy = \iint_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy.$$

Or maintenant, nous avons vu que l'on pouvait réécrire

$$\int_{C^+} f(z) dz = \int_{C^+} P dx - Q dy + i \int_{C^+} Q dx + P dy$$

Finalement, la caractérisation des fonction \mathbb{C} -dérivable (conditions de Cauchy) énoncés dans le théorème 26 nous donne que

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

En combinant ces trois résultats, nous avons bien démontré le théorème. \square

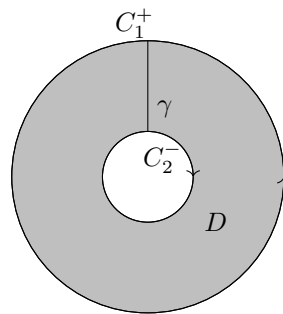
A propos du sens de parcours : Pour trouver le sens de parcours direct, on commence par prendre le vecteur normal \vec{n} pointant vers l'intérieur du domaine. Puis on trouve un vecteur tangent $\vec{\tau}$ à la courbe C qui vérifie $\langle \vec{\tau}, \vec{n} \rangle = +\frac{\pi}{2}$, et l'on parcourt la courbe en suivant l'orientation indiqué par ce vecteur.

Mentionnons simplement qu'il est possible de généraliser le théorème de Cauchy à des ensembles n -connexes (c'est-à-dire avec $n - 1$ trous).

Corollaire 2.2.1. Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de \mathbb{C} non vide et $D \subset \Omega$ un domaine n -connexe de contour extérieur C_1^+ et de contours intérieurs C_i^- . Alors

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1^+} f(z) dz + \int_{C_2^-} f(z) dz + \cdots + \int_{C_n^-} f(z) dz = 0.$$

Sans rentrer dans les détails techniques, l'idée de la preuve consiste à suivre un contour parcourant C_1 , puis une "orbite de transfert" γ jusqu'à C_2 , parcourir C_2 dans le sens indirect, avant de parcourir γ dans le sens inverse (puis prendre autant "d'orbite de transfert" que de trous). Nous aurons alors un contour d'un ensemble simplement connexe puisque nous aurons relié les trous à l'extérieur, sur lequel nous pourrions appliquer le théorème de Cauchy, avant de remarquer que les contribution des transferts se compensent. Visuellement, on suit un parcours de la forme suivante :



Une conséquence du théorème de Cauchy est qu'une fonction holomorphe admet une primitive au sens complexe. Nous verrons dans la section 2.2.2 de manière surprenante qu'il s'agit en fait d'une équivalence.

Proposition 35 :

Soit f holomorphe sur un domaine simplement connexe D .

Alors il existe F une fonction holomorphe sur D qui est une primitive de f , c'est-à-dire vérifiant

$$\forall z \in D, F'(z) = f(z).$$

Démonstration. Soient deux points a et b de D . Sous les hypothèses, nous allons pouvoir définir $\int_a^b f(z)dz$. En effet, soient γ_1, γ_2 deux chemins inclus dans D d'origine a et d'extrémité b . Alors si l'on parcourt γ_1 suivi du parcours dans le sens inverse de γ_2 , nous aurons un lacet (donc le parcours d'un contour). D'après le théorème de Cauchy, l'intégrale sera alors nulle. Avec la propriété 33, nous obtenons donc que

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Nous définissons donc $\int_a^b f(z)dz$ comme la valeur commune des intégrales de f le long d'un chemin reliant a à b .

Fixons $u_0 \in D$ et posons

$$F : w \in D \mapsto \int_{u_0}^w f(z)dz$$

Montrons que F convient. Donnons nous $w \in D$, et γ un chemin quelconque de u_0 à w (qui existe bien puisqu'un ouvert connexe est connexe par arc). Comme D est ouvert, il existe un rayon $r > 0$ tel que $B(w, r) \subset D$. Notons pour $h \in B(w, r)$ le chemin $\gamma_h : t \in [0, 1] \mapsto w + th$. Toujours avec la propriété 33, pour montrer que $F'(w) = f(w)$ il nous suffit de montrer que $\frac{1}{h} \int_{\gamma_h} f(z)dz \rightarrow f(w)$.

Or, $\int_{\gamma_h} f(z)dz = \int_0^1 f(w + th)h dt$ et $\int_0^1 f(w + th)dt \rightarrow f(w)$ (par convergence dominée par exemple).

Ainsi, en regroupant les arguments, nous avons bien que $F'(w) = f(w)$. \square

2.2.2 Développement en série entière des fonctions holomorphes (H.P.)

Cette section n'est pas au programme, mais est quand même intéressante puisqu'elle permet de comprendre l'origine des séries de Laurents que nous verrons dans la prochaine section.

Un résultat étonnant pour les fonctions holomorphe sur un disque fermé est qu'elles sont entièrement déterminé par leur valeur sur le bord du disque. Plus précisément

Proposition 36 : Formule intégrale de Cauchy

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f \in \mathcal{H}(U)$ une fonction holomorphe. Soit $\overline{B(a, r)} \subset U$ un disque fermé inclu dans U de bord C .

Alors

$$\forall z \in B(a, r), f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(w)}{z - w} dw.$$

Démonstration. On se fixe dans toute la preuve $z \in B(a, r)$.

On pose $g : w \mapsto \frac{f(z)-f(w)}{z-w}$. Il est immédiat que g est holomorphe sur $U \setminus \{z\}$ et continu en z . D'après le théorème de Cauchy,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_C g(w)dw, \\ &= \int_C \frac{f(z)}{z-w}dw - \int_C \frac{f(w)}{z-w}dw, \\ &= f(z) \int_C \frac{1}{z-w}dw - \int_C \frac{f(w)}{z-w}dw \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{z-w}dw &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{z-a-re^{i\theta}} re^{i\theta} d\theta, \\ &= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{1-\frac{z-a}{re^{i\theta}}} d\theta, \\ &= \int_0^{2\pi} -\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z-a}{re^{i\theta}}\right)^k d\theta, \\ &= -\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} -\left(\frac{z-a}{r}\right)^k e^{-ik\theta} d\theta, \\ &= -\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z-a}{r}\right)^k \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} d\theta, \\ &= 2i\pi + \sum_{k=1}^{+\infty} 0 \end{aligned}$$

Remarque : l'interversion dans les calculs est justifié par le théorème de Fubini, car $[0, 2\pi]$ est borné, et puisque $|z-a| < r$, on aura que $\sum \left|\frac{z-a}{r}\right|^k < +\infty$.

Donc finalement,

$$2i\pi f(z) = \int_C \frac{f(w)}{z-w}dw$$

□

Corollaire 2.2.2. Soit f une fonction holomorphe, alors f est développable en série entière au voisinage de tout point intérieur.

Démonstration. Il s'agit comme dans la preuve de développer en série entière $\frac{1}{z-w}$ dans $\int_C \frac{f(w)}{z-w}dw$, puis de justifier l'interversion avec le théorème de Fubini-Tonelli (en majorant localement f par une constante par exemple). □

Remarque : Ceci prouve que toute fonction holomorphe est analytique (donc infiniment dérivable). En particulier, l'équivalence énoncée dans la section précédente en découle, puisque si f a une primitive F , alors F est holomorphe, et donc admet une dérivée seconde.

En fait, on peut même avoir mieux :

Proposition 37 :

Soit f holomorphe sur un anneau $A(z_0, r, R)$, alors il existe (a_n, b_n) tels que

$$\forall z \in A(z_0, r, R), f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

et ces coefficients sont uniques, déterminés (pour n'importe quel cercle inscrit dans la couronne) par $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$ et $b_n = \frac{1}{2i\pi} \int_C f(z)(z-a)^{n-1} dz$.

Démonstration. On pose encore $g : w \mapsto \frac{f(z)-f(w)}{z-w}$.

En notant C_r et C_R les cercles entourant l'anneau, on a d'après la généralisation du théorème de Cauchy que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{C_R^+} g(z) dz + \int_{C_r^-} g(z) dz \\ &= 2i\pi f(z) - \int_{C_R^+} \frac{f(w)}{z-w} dw + 0 - \int_{C_r^-} \frac{f(w)}{z-w} dw \quad \text{car } w \mapsto \frac{1}{z-w} \text{ est holomorphe sur } B(z_0, r) \\ &= 2i\pi f(z) - \sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{a}_n (z - z_0)^n - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\tilde{b}_n}{(z - z_0)^n}. \end{aligned}$$

Pour montrer la caractérisation, il s'agit d'effectuer une inversion série-intégrale, par convergence dominée par exemple. En effet, pour C un cercle centré en l'origine,

$$\int_C z^n dz = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} i e^{i\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2i\pi & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

□

2.2.3 Singularités et Théorème des résidus

L'ensemble des fonctions holomorphes étant rigide, nous allons voir une relaxation potentielle, qui sera très utile pour nos calculs.

Définition 38 :

Soit f une fonction complexe, et $z_0 \in \mathbb{C}$.

On dit que z_0 est un point de singularité isolé (p.s.i.) de f si il existe $R > 0$ tel que f est holomorphe sur le disque pointé $B(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

Lorsque z_0 est un p.s.i., on appelle résidu de f en z_0 la quantité

$$\text{Res}(f, z_0) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{C_r} f(z) dz.$$

Nous pouvons enfin énoncer le résultat d'analyse complexe qu'utilisent le plus les ingénieurs :

Théoreme 39 : Théorème des résidus

Soit f holomorphe sur $\Omega \setminus \cup_j \{z_j\}$, où Ω est un ouvert non vide de \mathbb{C} et $\{z_j\}$ est un ensemble de points isolés (en particulier, z_j sont des p.s.i. de f).

Enfin, soit $D \subset \Omega$ un domaine simplement connexe de contour ∂D inclus dans Ω . Alors

$$\int_{\partial D^+} f(z) dz = 2i\pi \sum_{z_j \in D} \text{Res}(f, z_j).$$

Ce théorème réduit donc le calcul d'une intégrale sur un grand domaine à des intégrales aux voisinages des p.s.i., pour lesquelles nous allons encore simplifier l'expression. Tout d'abord, remarquons une conséquence immédiate d'un résultat de la partie précédente :

Proposition 40 : Développement de Laurent

Si z_0 est un p.s.i. de f , alors il existe (a_n, b_n) tels que

$$\forall z \in B(z_0, R) \setminus \{z_0\}, f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Et l'on peut alors vérifier que $\text{Res}(f, z_0) = b_1$.

Ceci nous donne une méthode générale pour calculer un résidu : effectuer un développement de Laurent (qui revient souvent à effectuer un développement en série entière). Mais cela peut être très lourd en calcul, et nous aimerions avoir une méthode plus simple dans les cas les plus courants. Nous voulons une méthode simple dans le cas où l'on a affaire uniquement à un pôle (généralisation des pôles des fractions rationnelles).

Définition 41 :

On dit qu'un p.s.i. z_0 de f est un pôle d'ordre p si la fonction $\varphi : z \mapsto (z - z_0)^p f(z)$ s'étend en une fonction holomorphe sur un voisinage de z_0 , et que de plus $\varphi(z_0) \neq 0$.

Considérons donc z_0 un pôle d'ordre p de f . Sur un voisinage de z_0 , on écrit un développement de Taylor de φ :

$$\varphi(z) = \varphi(z_0) + \dots + \frac{(z - z_0)^{p-1}}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}(z_0) + O((z - z_0)^p).$$

Ce qui nous donne le développement asymptotique de f au voisinage de z_0 suivant :

$$f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{(z - z_0)^p} + \dots + \frac{\varphi^{(p-1)}(z_0)}{(p-1)!(z - z_0)} + O(1).$$

Par unicité du développement de Laurent, nous trouvons donc que

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{\varphi^{(p-1)}(z_0)}{(p-1)!} = \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} [(z - z_0)^p f(z)]|_{z=z_0}$$

Méthode pratique :

- Pour $p > 2$, il est souvent plus rapide de calculer un développement limité (voir toute la série de Laurent) que d'utiliser le point développé ci-dessus.
- Pour $p = 2$, nous aurons donc $Res(f, z_0) = \frac{d}{dz}[(z - z_0)^2 f(z)]|_{z=z_0}$
- Pour $p = 1$, nous pourrions utiliser $Res(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$. En fait, si l'on écrit $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ avec $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ et $h'(z_0) \neq 0$, alors un simple développement limité de h montre qu'en fait,

$$Res(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Exemple d'application de la méthode :

On veut trouver les points de singularité isolé et les résidus de la fonction $f : z \mapsto \frac{1}{\sin(z)}$.

Tout d'abord, d'après les propriétés usuelles, f est holomorphe là où $\sin(z) \neq 0$. Or, pour $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \sin(z) = 0 &\iff \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \\ &\iff e^{iz} = e^{-iz} \\ &\iff e^{2iz} = 1 \\ &\iff 2iz \in 2i\pi\mathbb{Z} \\ &\iff z \in \pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Donc l'ensemble des points de singularité isolé de f sont compris dans $\pi\mathbb{Z}$. Comme cet ensemble est clairement constitué de singularités et qu'il est discret (sans point d'accumulation), il s'agit bien de l'ensemble des points de singularité isolé.

Maintenant, pour $k \in \mathbb{Z}$, on a que $\sin(k\pi) = 0$ et $\cos(k\pi) = (-1)^k$. Donc avec la caractérisation précédente pour $g = 1$ et $h = \sin$, nous obtenons que

$$Res(f, k\pi) = \frac{1}{(-1)^k} = (-1)^k.$$

2.2.4 Exemples d'applications du théorème des résidus

Premier exemple : Calcul d'une intégrale de la forme $I = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$

Lorsqu'on peut trouver f une fonction holomorphe égale à g sur \mathbb{R} , le premier réflexe est de regarder si l'on peut prendre le contour constitué d'une partie rectiligne (souvent de la forme $[-R, R]$), qui donne I à la limite, et de parties circulaires qui ferment le contour (où l'on espère pouvoir appliquer un des lemmes de Jordan).

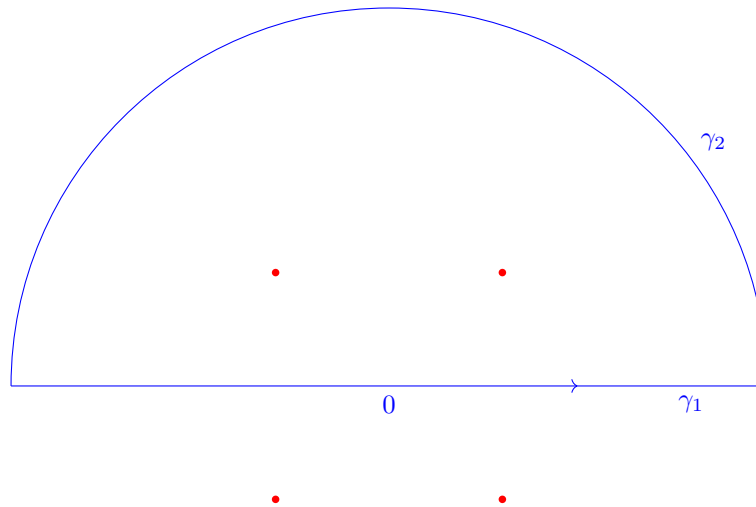
On cherche par exemple à calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$$

Commençons par remarquer que $f : z \mapsto \frac{z^2+1}{z^4+1}$ convient. Les points de singularités isolés de f sont

$$\{e^{i\frac{\pi}{4}}, ie^{i\frac{\pi}{4}}, -e^{i\frac{\pi}{4}}, -ie^{i\frac{\pi}{4}}\}.$$

On choisit de prendre le contour $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ suivant :



Les singularités dans le domaine sont alors $\{e^{i\frac{\pi}{4}}, ie^{i\frac{\pi}{4}}\}$. Calculons les résidus associés. Vu qu'il s'agit de pôles simples d'une fraction rationnelle, en posant $P : z \mapsto z^2 + 1$ et $Q : z \mapsto z^4 + 1$, nous aurons

$$\text{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{4}}) = \frac{P(e^{i\frac{\pi}{4}})}{Q'(e^{i\frac{\pi}{4}})} = \frac{i + 1}{3e^{3i\frac{\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{3ie^{i\frac{\pi}{4}}} = -i\frac{\sqrt{2}}{3}$$

et

$$\text{Res}(f, ie^{i\frac{\pi}{4}}) = \frac{-i + 1}{-3ie^{3i\frac{\pi}{4}}} = \frac{-\sqrt{2}e^{3i\frac{\pi}{4}}}{-3ie^{3i\frac{\pi}{4}}} = -i\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Le théorème des résidus nous donne alors que

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)dz = 2i\pi (\text{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{4}}) + \text{Res}(f, ie^{i\frac{\pi}{4}})) = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}.$$

Comme f est intégrable sur \mathbb{R} , la convergence dominée nous montre que $\int_{\gamma_1} f(z)dz$ converge vers I .

Pour calculer la limite de $\int_{\gamma_2} f(z)dz$, nous allons chercher à utiliser le premier lemme de Jordan. Remarquons que grâce aux inégalités triangulaires, pour $|z| = R$, nous aurons

$$|z^2 + 1| \leq R^2 + 1,$$

$$|z^4 + 1| \geq R^4 - 1$$

Ainsi, $\sup_{\gamma_2} |zf(z)| \leq \frac{R(R^2+1)}{R^4-1} \rightarrow 0$. Donc d'après le premier lemme de Jordan, $\int_{\gamma_2} f(z)dz \rightarrow 0$.

Finalement,

$$I = \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}.$$

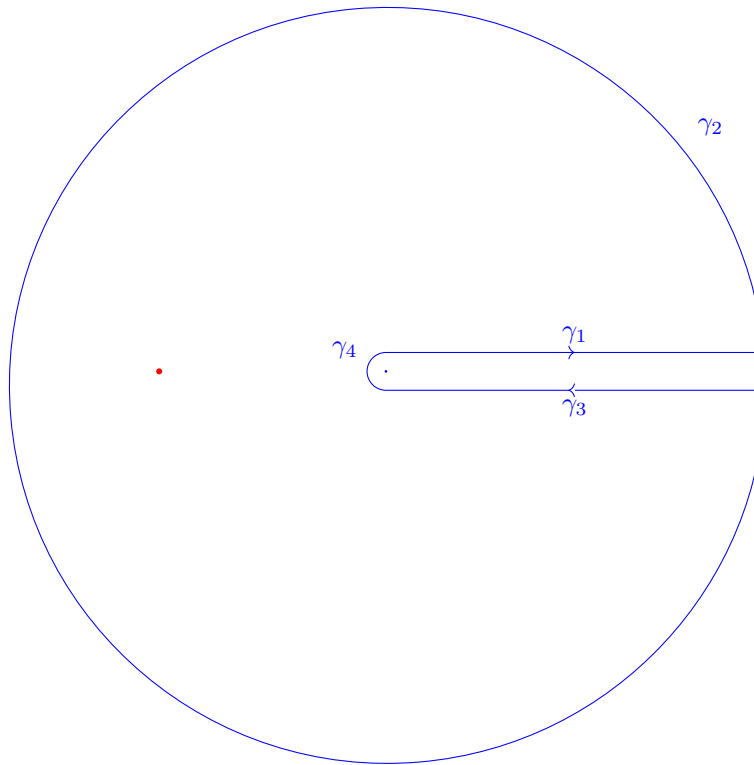
Deuxième exemple : Calcul d'une intégrale de la forme $I = \int_A g(x)dx$, où g comprend une fonction multiforme.

On cherche alors une détermination qui permet d'atteindre tout A , ainsi qu'un domaine adapté.

On cherche par exemple à calculer pour $a \in]0, 1[$ l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx.$$

On choisit de travailler avec la détermination de rang 0 et de droite de coupure \mathbb{R}_+ (le seul point de singularité de f est alors -1). De plus, on choisit de travailler avec le domaine $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ suivant :



où l'on note R le rayon du cercle extérieur et ϵ le rayon du cercle intérieur. Le résidu de f en -1 vaut

$$\text{Res}(f, -1) = \frac{e^{(0+i\pi)(a-1)}}{1} = -e^{i\pi a}$$

Le théorème des résidus nous affirme que

$$2i\pi \text{Res}(f, -1) = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_4} f(z)dz.$$

Grace au théorème de convergence dominé (avec comme fonction dominante $z \mapsto \frac{|z|^{a-1}}{0.5+|z|}$), nous avons que

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_1} f(z)dz &= \lim_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^R \frac{(x+i\epsilon)^{a-1}}{1+x+i\epsilon} dx = J, \\ \lim_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_3} f(z)dz &= \lim_{R \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \int_0^R \frac{(x-i\epsilon)^{a-1}}{1+x-i\epsilon} (-dx) = -J e^{2i\pi(a-1)}. \end{aligned}$$

où le terme $e^{2i\pi(a-1)}$ vient du choix de la détermination complexe.

Traisons maintenant le cas de γ_2 et de γ_4 . Remarquons d'abord que $|z^{a-1}| = |z|^{a-1}$, puis grâce aux inégalités triangulaires que

$$\begin{aligned}\forall z \in \hat{\gamma}_4, |zf(z)| &\leq \epsilon \frac{\epsilon^{a-1}}{1-\epsilon}, \\ \forall z \in \hat{\gamma}_2, |zf(z)| &\leq R \frac{R^{a-1}}{R-1}.\end{aligned}$$

La limite nulle de ces deux majorations avec le premier lemme de Jordan que

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_4} f(z) dz &= 0, \\ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_2} f(z) dz &= 0.\end{aligned}$$

Nous avons donc obtenu que

$$J - e^{2i\pi a} J = -2i\pi e^{i\pi a}$$

Finalement,

$$J = \frac{-2i\pi}{e^{-i\pi a} - e^{i\pi a}} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

Troisième exemple : Calcul d'une intégrale trigonométrique, de la forme $I = \int_0^{2\pi} F(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta$, où F est une fraction rationnelle.

On se ramène alors au calcul d'une intégrale sur le cercle unité, à l'aide des formules d'Euler exprimant cosinus et sinus comme des combinaisons d'exponentielles complexes.

On cherche à calculer $J = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\sin(\theta)}$.

On pose $z = e^{i\theta}$, et l'on a alors que

$$\frac{e^{-i\theta}}{5+3\sin(\theta)} = \frac{1/z}{5 + \frac{3}{2i}(z - \frac{1}{z})} = \frac{1}{5z - \frac{3}{2}i(z^2 - 1)}.$$

Donc (en faisant attention à ne pas oublier la dérivée de la paramétrisation),

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\sin(\theta)} = \frac{1}{i} \int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{5z - \frac{3}{2}i(z^2 - 1)}$$

Les points de singularité isolée de $f : z \mapsto \frac{1}{5z - \frac{3}{2}i(z^2 - 1)}$ sont les zéros du polynôme de degré 2 au dénominateur. On les détermine :

$$\begin{aligned}\Delta &= 25 - 9 = 16 \\ z_{\pm} &= \frac{-5 \pm 4}{3i}\end{aligned}$$

Le seul point isolé situé dans le disque unité est alors $z_+ = \frac{i}{3}$.

$$\text{Res}(f, z_+) = \frac{1}{5 - 3iz_+} = \frac{1}{4}$$

Finalement, d'après le théorème des résidus,

$$\int_{\mathbb{U}} \frac{dz}{5z - \frac{3}{2}i(z^2 - 1)} = 2i\pi \frac{1}{4} = \frac{i\pi}{2},$$

ce qui permet de conclure que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\sin(\theta)} = \frac{\pi}{2}.$$

2.2.5 Les fonctions harmoniques (H.P.)

Les zéros du Laplacien bi-dimensionnel, c'est-à-dire les solutions de l'équation

$$\Delta\psi := \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0,$$

sont omniprésentes dans les modélisations physiques. Le potentiel électrostatique dans le vide est solution de cette équation, tout comme le potentiel magnétique scalaire. Pour des modèles idéaux, certains problèmes de flux en hydrodynamiques correspondent à cette équation. On retrouve encore ces solutions lorsqu'on cherche le déplacement d'une membrane lorsqu'on déforme le bord depuis une boucle plate. Au vu de leur prédominance, il est naturel de chercher à mieux les comprendre.

Définition 42 :

On dit qu'une fonction ϕ est harmonique sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ si elle est de classe C^2 et qu'en tout point de D elle vérifie

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0.$$

Même si cela n'est pas évident au premier abord, les fonctions harmoniques sont intimement liées aux fonctions holomorphes.

Proposition 43 :

Soit Ω un ouvert et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors $Re(f)$ et $Im(f)$ sont harmoniques.

Réciproquement, si u est une fonction harmonique sur un ouvert simplement connexe, elle est la partie réelle d'une fonction holomorphe.

Démonstration. Il s'agit d'une application des formules de Cauchy-Riemann avec l'existence d'une primitive complexe pour les fonctions holomorphes.

Plus précisément, si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, alors f est infiniment dérivable, avec $f' = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$. En dérivant deux fois, on obtient bien que f est holomorphe. En particulier, il en est de même pour ses parties réelles et imaginaires.

Réciproquement, soit u est une fonction harmonique sur un ouvert simplement connexe. posons alors $g = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$.

Par définition des fonctions harmoniques, g est différentiable, avec

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - i \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = i \frac{\partial}{\partial x} \left(-i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = i \frac{\partial g}{\partial x}$$

Donc g vérifie les équations de Cauchy-Riemann, et est donc holomorphe. Comme on est sur un ouvert simplement connexe, il existe donc une primitive de g , que l'on notera f .

On pose $P = Re(f)$ et $Q = Im(f)$. Comme $\frac{\partial P}{\partial x} - i \frac{\partial P}{\partial y} = f' = g = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$.

Donc $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$, ce qui implique par connexité du domaine que $P = u + Cste$. Donc finalement, $u = Re(f - Cste)$.

□

Cette propriété a deux conséquences étonnantes :

Proposition 44 :

- Si u est harmonique, alors elle est de classe C^∞
- Si u est harmonique, alors elle vérifie la propriété de la moyenne

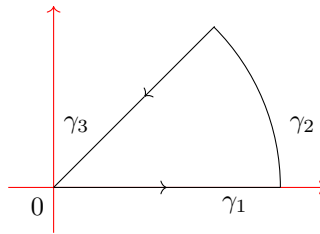
$$\forall a \in \Omega, \forall 0 \leq r < d(a, \Omega^c), \quad u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta$$

2.3 Exercices

Une petite série d'exercices, dont on retrouvera la correction page 67.

Exercice 8 :

A l'aide du contour suivant, calculer $I = \int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx$. En déduire la valeur de l'intégrale impropre $J = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$.

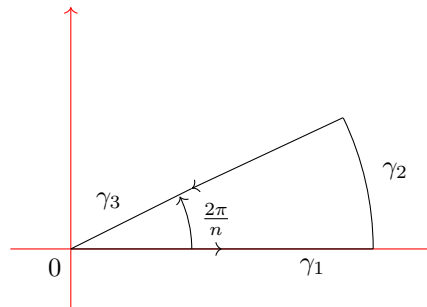


Exercice 9 :

Soit $a > 0$. À l'aide du rectangle de sommets $\{\pm R, \pm R + i\frac{a}{2}\}$, calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(ax) dx$

Exercice 10 :

À l'aide du contour suivant et du théorème des résidus, calculer pour $n \geq 2$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$.



Exercice 11 :

Déterminer avec le théorème des résidus la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_1^+} \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} dz.$$

Exercice 12 :

Pour $f : x \mapsto \frac{1}{\cosh(\pi x)}$, calculer la transformée de Fourier $\hat{f} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi t\xi} dt$ en utilisant le contour délimité par le rectangle de sommets $\pm R, \pm R + 2i$.

Exercice 13 : (Examen 2024) Calcul de l'intégrale du sinus cardinal.

On souhaite calculer l'intégrale définie par $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

1. Soit $f(\cdot)$ qui possède un pôle en 0 et qui admet le développement de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{z^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

Pour tout $z \in d(0, r) \setminus \{0\}$ où $d(0, r)$ désigne le disque de centre 0 et de rayon $r > 0$.

- (a) Lorsque $z = 0$ est un pôle simple (i.e., d'ordre 1), rappeler les valeurs des b_n ($n \geq 1$) en fonction du résidu $\text{res}f(0)$ de la fonction f en 0.
- (b) En déduire que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = i\pi \text{Res}(f, 0)$$

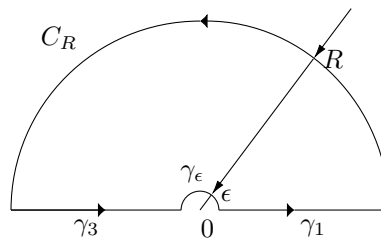
où γ_ϵ est le demi-cercle situé dans le demi-plan supérieur de centre 0 et de rayon ϵ .

2. Soit $g(\cdot)$ la fonction définie par $g(z) = \frac{e^{iz}}{z}$. Montrer que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} g(z) dz = 0$$

où C_R est le demi-cercle situé dans le demi-plan supérieur de centre 0 et de rayon R .

3. Appliquer le Théorème de Cauchy à la fonction $g(\cdot)$ le long du contour représenté ci dessous. A l'aide des résultats des Questions 1 et 2, en déduire la valeur de l'intégrale I .



Chapitre 3

Transformée de Laplace

La transformée de Laplace est un des outils majeur de l'ingénieur pour la résolution d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles linéaires. En particulier, tout traitement de système asservi s'effectue dans le "domaine de Laplace", c'est-à-dire après transformation. Cette transformation est particulièrement intéressante, puisqu'elle transforme des fonctions ayant uniquement une légère décroissance à l'infini en des fonctions holomorphes sur un "grand" ouvert de \mathbb{C} . Ayant comme intérêt d'utiliser cette théorie pour des phénomènes respectant la causalité, nous nous contenterons d'évoquer dans cette introduction l'existence d'une transformée de Laplace bilatérale.

3.1 Définition et domaine de validité

3.1.1 Fonctions transformables

S'il est possible de définir la transformée de Laplace sur un ensemble de fonctions plus important, nous nous restreindrons à des fonctions de la variable réelle à valeur complexe.

Définition 45 :

On dit qu'une fonction f est transformable si elle est localement intégrable et s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que l'intégrale généralisée de $g : t \mapsto e^{-x_0 t} f(t)$ converge.

Pour f une fonction transformable et pour $p \in \mathbb{C}$ tel que cela est un sens (i.e. il y ait convergence), on appelle transformé de Laplace de f en p la valeur

$$F(p) = TL(f)[p] := \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Lorsque cela a du sens, on dira que $TL(f)[p]$ existe.

Une première question naturelle à se poser si l'on souhaite faire de l'analyse à partir de la transformée de Laplace est la forme de l'ensemble des points sur lesquels celle-ci a un sens pour une fonction f donné. Après tout, elle ne sera pas très intéressante si elle n'existe que sur un seul point. Heureusement, ce n'est pas le cas.

Proposition 46 :

Soient f une fonction transformable et $p_0 \in \mathbb{C}$.

Si $TL(f)[p_0]$ existe, alors pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $Re(p) > Re(p_0)$, $TL(f)[p]$ existe.

Démonstration. Comme $TL(f)[p_0]$ existe, on peut poser $G : x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-p_0 t} f(t) dt$.

Maintenant, à l'aide de la généralisation de l'intégration par partie, $\int e^{-pt} f(t)$ converge si $[e^{(p_0-p)t} G(t)]$ et $\int e^{(p_0-p)t} G(t)$ convergent.

Or G est une fonction bornée, donc pour $Re(p) > Re(p_0)$, ces deux termes convergent. \square

Conséquence : $\{x \in \mathbb{R}, F(p) \text{ existe}\}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. On l'appelle *abscisse de convergence simple* de F (ou de $TL(f)$). On la note x_c .

Nous avons également un critère de convergence plus simple pour toutes les manipulations (car permettant l'usage de l'artillerie lourde de l'intégrale de Lebesgue), la convergence absolue.

Proposition 47 :

On dit que $TL(f)$ converge absolument en p_0 si $\int_0^{+\infty} |e^{-p_0 t} f(t)| dt < +\infty$. Lorsque cela est le cas, $TL(f)[p_0]$ existe.

Si $TL(f)$ converge absolument en p_0 , alors pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $Re(p) > Re(p_0)$, $TL(f)[p]$ converge absolument.

Démonstration. L'existence de la transformée est une conséquence de la construction de l'intégrale de Lebesgue.

Le résultat est alors immédiat puisque pour $Re(p) > Re(p_0)$, on a que $|e^{(p_0-p)t}| \leq 1$. \square

Conséquence : Encore une fois $\{x \in \mathbb{R}, F(p) \text{ converge absolument}\}$ admet une borne inférieure. On l'appelle *abscisse de convergence absolue* de F (ou de $TL(f)$). On la note x_{ca} .

Exemple : Considérons la fonction $Heav : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$. On cherche à donner les abscisses de convergence et la valeur de la transformée lorsque celle-ci existe.

Remarquons d'abord que puisque $Heav$ est à valeur positive, l'abscisse de convergence simple et l'abscisse de convergence absolues sont identiques.

Pour $x < 0$, il est immédiat que $Heav(t)e^{-x_0 t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

En particulier, l'intégrale généralisée diverge grossièrement. De plus, comme pour $x_0 > 0$, $t \mapsto e^{-x_0 t}$ est d'intégrale généralisée convergente. Donc l'abscisse de convergence (simple et absolu) de la fonction $Heav$ est 0.

Maintenant, prenons $p \in \mathbb{C}$ tel que $Re(p) > 0$. Alors

$$TL(Heav)[p] = \int_0^{+\infty} Heav(t)e^{-pt} dt = \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^{+\infty} = -0 + \frac{1}{p}.$$

Exemple : Soit $k > 0$, et considérons la fonction $f : t \mapsto e^{kt} e^{ie^{kt}}$. On cherche à donner les abscisses de convergence simple et absolue.

Comme $|f(t)| = e^{kt}$, il est immédiat que $x_{ca} = k$ (car $e^{(k-k_0)t}$ est intégrable si et seulement si $k_0 > k$).

Maintenant, considérons que

$$\int_0^R e^{-pt} e^{kt} e^{ie^{kt}} dt = \left[e^{-pt} e^{ie^{kt}} \right]_0^R + p \int_0^R e^{-pt} e^{ie^{kt}} dt.$$

Alors comme le crochet converge et l'intégrande à droite est intégrable dès que $\operatorname{Re}(p) > 0$, nous aurons que $x_c = 0$.

Remarque : L'exemple précédent donne une idée de ce qui suffit pour avoir $x_c \neq x_{ca}$: une fonction très fortement oscillante.

3.1.2 Théorème fondamental

Un des points d'intérêt majeur de la transformée de Laplace est le gain en régularité, et la formule de dérivation associée.

Théorème 48 :

Soit f une fonction continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ et absolument transformable.

Alors $TL(f) : p \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$ est holomorphe sur $]x_{ca}, +\infty[$ (et donc indéfiniment dérivable sur $]x_{ca}, +\infty[$) avec

$$\frac{d^n}{dp^n} TL(f)[p] = \int_0^{+\infty} (-t)^n e^{-pt} f(t) dt.$$

Démonstration. L'holomorphie découle du théorème d'holomorphie sous le signe \int (voir page 82). La valeur des dérivées successives découle du même théorème, qui annonce que

$$\frac{d^n}{dp^n} TL(f)[p] = \int_0^{+\infty} \frac{d^n}{dp^n} [e^{-pt} f(t)] dt.$$

□

Un autre résultat important est qu'il est même possible de retrouver l'abscisse de convergence à partir de la transformée uniquement :

Proposition 49 : *Admise, voir [Wid29]*

Soit F une fonction de la variable complexe p holomorphe sur un ouvert maximal, qui est la transformée de Laplace d'une fonction $f \geq 0$.

Alors F a une singularité en le réel x_c .

En pratique : Si F n'a que des p.s.i. (notés s_k) et des points de ramification de (extrémité des demi-droites de coupures notées r_j) et est la transformée d'une fonction réelle positive, alors l'abscisse de convergence vérifie :

$$x_c(F) = \sup \operatorname{Re}(s_k, r_j).$$

Exemple d'utilisation : En admettant qu'il s'agisse bien de transformée de Laplace d'une fonction $f \geq 0$, on a pour $F(p) = \frac{1}{p(p-2)}$ que $x_c = 2$ et pour $F(p) = \frac{1}{p+1}$ que $x_c = -1$.

3.2 Manipuler la transformée de Laplace

3.2.1 Propriétés et résultat usuels

La transformée de Laplace a de très bonnes propriétés, très utiles pour une manipulation formelle ou pratique.

Proposition 50 :

La transformée de Laplace est linéaire (lorsque prise en un point où tout est défini). De plus, pour $TL(f)$ d'abscisse de convergence x_{c_f} et $TL(g)$ d'abscisse de convergence x_{c_g} , on sait que $TL(\lambda f + \mu g)$ est d'abscisse de convergence $x_c \leq \sup(x_{c_f}, x_{c_g})$, avec égalité si $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$ et $x_{c_f} \neq x_{c_g}$.

Démonstration. Il s'agit d'écrire calmement les définitions. On se donne p tel que $TL(f)[p]$ et $TL(g)[p]$ existent. Alors

$$\lambda TL(f)[p] + \mu TL(g)[p] = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt + \mu \int_0^{+\infty} e^{-pt} g(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = TL(\lambda f + \mu g)[p].$$

(et en particulier le membre de droite existe bien).

Le cas d'égalité en découle, puisque $x_c, x_{c_g} < x_f$ est alors incompatible avec la possibilité d'écrire f comme combinaison linéaire de $\lambda f + \mu g$ et g (et de même en inversant les rôles de f et g). \square

Remarque : Dans la plupart des cas pratiques, nous aurons l'égalité des abscisses de convergence, $x_c = \sup(x_{c_f}, x_{c_g})$.

Proposition 51 : Dérivation

On se donne f une fonction absolument transformable et p tel que $\operatorname{Re}(p) > x_{ca}$.

- (Dérivation causale) On suppose que f continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$, alors

$$TL(f')[p] = p TL(f)[p] - f(0^+)$$

(Dérivation en fréquence) On a que

$$\frac{d^n}{dp^n} TL(f)[p] = TL(t \mapsto (-1)^n t^n f(t)) [p]$$

Démonstration. Pour le premier point, il s'agit de faire une intégration par partie, laissé en exercice au lecteur. Le deuxième point est exactement le théorème fondamental. \square

Corollaire 3.2.1. On suppose que f est de classe C^{n-1} sur $[0, +\infty[$ et n fois dérivable sur $]0, +\infty[$, alors

$$TL(f^{(n)})[p] = p^n TL(f)[p] - p^{n-1} f(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+).$$

Démonstration. On peut le démontrer avec une récurrence immédiate. \square

Ce corollaire permettra, une fois que l'on aura montré que l'on peut inverser la transformée de Laplace, de résoudre toute équation différentielle linéaire à coefficients constants (voir 3.2.3).

Premiers calculs de transformées : On cherche à calculer la transformée de Laplace de $t \mapsto t$.

$$TL(t)[p] = -TL((-t)Heav(t))[p] = -\frac{d}{dp}TL(Heav)[p] = \frac{1}{p^2}.$$

De la même façon, on aura que

$$TL(t^n)[p] = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Proposition 52 : *Intégration*

On se donne f une fonction absolument transformable et p tel que $Re(p) > x_{ca}$.

- (Transformée d'une primitive) On a que

$$TL\left(t \mapsto \int_0^t f(u)du\right)[p] = \frac{TL(f)[p]}{p}$$

Avec comme abscisse de convergence $\sup(0, x_{cf})$.

- (Primitive d'une transformée) On a que pour $p \in \mathbb{R}$,

$$TL\left(t \mapsto \frac{f(t)}{t}\right)[p] = \int_p^{+\infty} TL(f)[u]du$$

Démonstration. Appliquer directement la propriété précédente sur le lien avec la dérivation. Par exemple,

$$TL(f)[p] = pTL\left(t \mapsto \int_0^t f(u)du\right)[p] - \int_0^0 f(u)du$$

donne le premier point. □

Nouveaux calculs de transformées :

On cherche à calculer la transformée de Laplace de $t \mapsto t^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned} \frac{TL(t^\alpha)[p]}{p} &= TL\left(t \mapsto \int_0^t u^\alpha du\right)[p] \\ &= TL\left(\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)[p] \\ &= -\frac{1}{\alpha+1} \frac{d}{dp} TL(t^\alpha)[p] \end{aligned}$$

Ainsi, $TL(t^\alpha)$ est solution sur $]x_c, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$y'(p) = -\frac{1}{(\alpha+1)p} y(p).$$

Donc il existe une constante c telle que

$$TL(t^\alpha)[p] = \frac{C}{p^{\alpha+1}}$$

En regardant en $p = 1$, on trouve que $C = TL(t^\alpha)[p] = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^\alpha dt =: \Gamma(\alpha + 1)$. Ainsi,

$$TL(t^\alpha)[p] = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^{\alpha+1}}.$$

(On peut en fait montrer que cette formule se généralise à $\alpha \in \mathbb{R}$).

Remarque : La méthode présentée dans l'exemple précédent est essentielle. Il est donc parfois judicieux de se rappeler cette idée de se ramener à une solution d'équation différentielle pour trouver une transformée de Laplace.

Proposition 53 : Transformation de l'espace ou des phases

Avec les notations précédentes,

- (*Translation de l'espace*) On a que

$$TL(f(t-a)Heav(t-a))[p] = e^{-ap} TL(f)[p]$$

- (*Translation des phases*) On a que

$$TL(e^{at} f(t))[p] = TL(f)[p-a]$$

et l'abscisse de convergence est modifiée en $x_c + Re(a)$.

- (*Similitude*) On a que pour $k > 0$,

$$TL\left(f\left(\frac{t}{k}\right)\right)[p] = k TL(f)[kp]$$

et l'abscisse de convergence est modifiée en $\frac{x_c}{k}$.

Idée de preuve. Revenir aux définitions et effectuer les changements de variables nécessaires. □

Encore des calculs de transformées : On cherche à calculer la transformée de Laplace de $t \mapsto e^{ta}$, mais également des fonctions trigonométriques. Pour cela, on écrit :

$$\begin{aligned} TL(e^{ta})[p] &= TL(e^{ta} Heav(t))[p] \\ &= TL(Heav)[p-a] \\ &= \frac{1}{p-a} \end{aligned}$$

Ainsi, $TL(e^{iwt})[p] = \frac{1}{p-iw}$, et par linéarité, $2TL(\cosh(wt))[p] = TL(e^{wt} + e^{-wt})[p] = \frac{1}{p-w} + \frac{1}{p+w} = \frac{2p}{p^2-w^2}$. De la même manière, on montre que :

$$\begin{aligned} TL(\cosh(wt))[p] &= \frac{p}{p^2-w^2}; & TL(\sinh(wt))[p] &= \frac{w}{p^2-w^2}; \\ TL(\cos(wt))[p] &= \frac{p}{p^2+w^2}; & TL(\sin(wt))[p] &= \frac{w}{p^2+w^2}. \end{aligned}$$

Enfin, des résultats qu'il est important de connaître l'existence lorsqu'on manipule la transformée de Laplace sont les suivants :

Proposition 54 :

Avec les notations précédentes,

- (Convolution) On a que

$$TL\left(t \mapsto \int_0^t f(u)g(t-u)du\right) = TL(f)TL(g)$$

- (Théorème des valeurs initiales et finales) On a que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

- (Série entière et transformée) Soit $\sum a_n \frac{t^n}{n!}$ une série entière de rayon de convergence infini. Alors

$$TL\left(t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\right)[p] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{p^n}$$

Remarque : Dans le produit de convolution, l'intégrale s'arrête à t . Ceci est dû au fait que nous travaillons uniquement avec des données causales (et donc $g(\mathbb{R}_-) = \{0\} = f(\mathbb{R}_-)$).

Exemple d'application : On cherche à calculer la transformée de Laplace de $t \mapsto \frac{\sin(tw)}{t}$ de deux manières. Tout d'abord, à l'aide d'une série entière.

En effet, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} TL\left(\frac{\sin(wt)}{t}\right)[p] &= TL\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n w^{2n+1} t^{2n}}{(2n+1)!}\right)[p], \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n w^{2n+1}}{p^{2n+1} (2n+1)}, \\ &= \operatorname{Arctan}\left(\frac{w}{p}\right). \end{aligned}$$

Une deuxième méthode consiste à remarquer que

$$TL(\sin(wt))[p] = \frac{w}{p^2 + w^2},$$

puis à utiliser les propriétés de la transformée de Laplace pour obtenir

$$TL\left(\frac{\sin(wt)}{t}\right)[p] = \int_p^{+\infty} \frac{w}{q^2 + w^2} dq = [\operatorname{Arctan}\left(\frac{q}{w}\right)]_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{p}{w}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{w}{p}\right).$$

Fonction	Transformée de Laplace	Abscisse de convergence
Heav	$\frac{1}{p}$	$x_c = 0$
$e^{at}, a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{p-a}$	$x_c = \operatorname{Re}(a)$
$e^{iwt}, w \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{p-iw}$	$x_c = 0$
$\cosh(at), a \in \mathbb{C}$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$x_c = \sup(\operatorname{Re}(-a), \operatorname{Re}(a))$
$\sinh(at), a \in \mathbb{C}$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	$x_c = \sup(\operatorname{Re}(-a), \operatorname{Re}(a))$
$\cos(wt), w \in \mathbb{R}$	$\frac{p}{p^2+w^2}$	$x_c = 0$
$\sin(wt), w \in \mathbb{R}$	$\frac{w}{p^2+w^2}$	$x_c = 0$
t	$\frac{1}{p^2}$	$x_c = 0$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$x_c = 0$
$t^a, a \in \mathbb{R}$	$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$	$x_c = 0$

FIGURE 3.1 – Récapitulatifs des transformées de Laplace

3.2.2 Formule d'inversion

Toutes ces propriétés de la transformée de Laplace, mais seraient inutilisables en pratique s'il était impossible de revenir du domaine de Laplace. Heureusement, cela est possible.

Proposition 55 :

Soit f absolument transformable et F sa transformée de Laplace.

Alors pour tout $x_0 > x_{ca}$, si l'on note $D^\uparrow(x)$ la droite verticale au-dessus de x , nous aurons (sous réserve d'intégrabilité) que

$$f(t)\operatorname{Heav}(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{D^\uparrow(x_0)} F(z)e^{zt} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x_0 + iy) \frac{e^{(x_0+iy)t}}{2\pi} dy.$$

(On parle de contour de Bromwich pour désigner une telle droite d'intégration)

Démonstration. Rappelons pour la preuve le résultat fondamental de la théorie de Fourier.

Si $x : t \mapsto x(t)$ est une fonction intégrable de transformée de Fourier $X(\nu) = TF(x)(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i\nu t} dt$ également intégrable, alors

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu) \frac{e^{i\nu t}}{2\pi} d\nu.$$

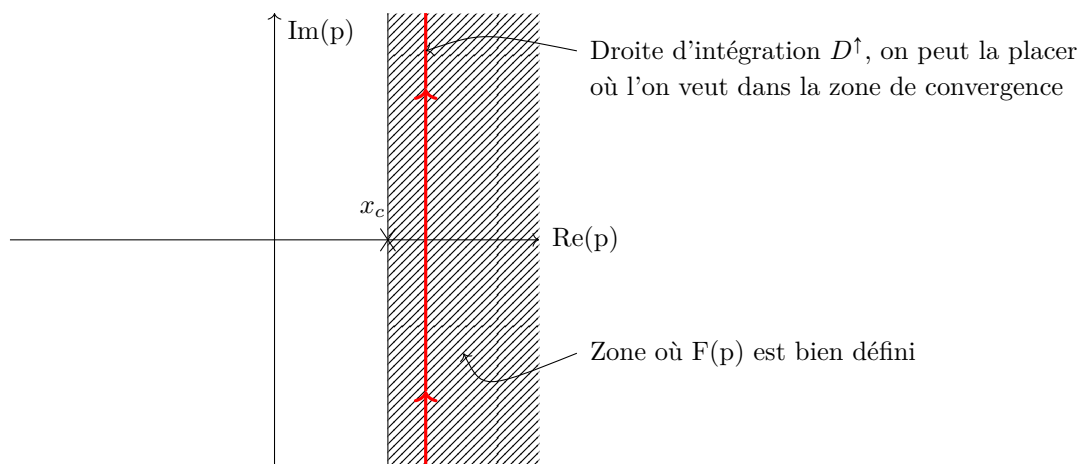
On remarque que

$$F(x_0 + iy) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-x_0 t} e^{-iyt} dt = TF(x(t)\operatorname{Heav}(t)e^{x_0 t})[y].$$

On applique alors la théorie de Fourier continue pour obtenir que

$$f(t)\operatorname{Heav}(t)e^{-x_0 t} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x_0 + iy) \frac{e^{iyt}}{2\pi} dy.$$

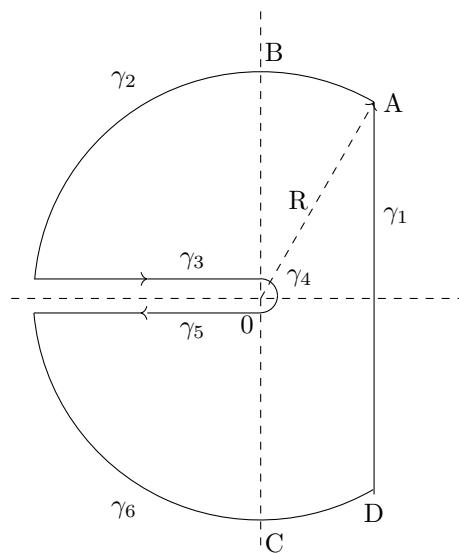
Nous avons retrouvé le terme de droite de la proposition (en multipliant par $e^{x_0 t}$), et celui du milieu découle directement d'une paramétrisation de la droite $D^\uparrow(x_0)$. \square



Remarque : Il peut sembler étonnant que la formule d'inversion ne dépend pas de la droite considérée du moment qu'elle se situe à droite de l'abscisse de convergence absolue. Mais il s'agit d'une conséquence facile du théorème de Cauchy sur des rectangles de plus en plus allongé verticalement appliqué à la transformée.

En pratique : Deux cas présentent dans la plupart des cas. Soit on reconnaît directement la transformée de Laplace d'une fonction présente dans une table, et dans ce cas il n'y a pas de travail supplémentaire puisque si $TL(f) = g$, alors $TL^{-1}(g) = f$, soit ce n'est pas le cas. Dans le second cas, on commence par déterminer l'abscisse de convergence, puis on choisit une suite de contour dont un morceau converge vers le contour de Bromwich, les autres étant soit facile à calculer, soit ayant une convergence vers 0 facile à démontrer (par exemple avec les lemmes de Jordan).

Exemple d'exercice : Chercher l'inverse de la transformée de Laplace de la fonction $p \mapsto \frac{1}{\sqrt{p}}$ (avec la détermination principale de droite de coupure \mathbb{R}_-). On utilisera le contour ci-dessous et l'on admettra que l'intégrale sur les morceaux $A - B$ et $C - D$ converge vers 0.



On souhaite calculer $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_1} \frac{e^{pt}}{\sqrt{p}} dp$ pour $t > 0$. Pour cela, nous allons utiliser le théorème des résidus (ou celui de Cauchy vu qu'il n'y a pas de résidus).

Remarquons d'abord que pour p dans l'image de γ_2 ou de γ_6 , $|\frac{1}{\sqrt{p}}| = \frac{1}{\sqrt{R}}$. Comme cette majoration est uniforme

et tend vers 0, que $t > 0$ et que nous intégrons sur des parties de C_R^g , nous avons d'après le deuxième lemme de Jordan que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_2} \frac{e^{pt}}{\sqrt{p}} dp + \int_{\gamma_6} \frac{e^{pt}}{\sqrt{p}} dp = 0.$$

De plus, pour p dans l'image de γ_4 , nous avons $|p \frac{e^{pt}}{\sqrt{p}}| \leq \sqrt{\epsilon} e^{\epsilon t}$. Comme cette majoration est uniforme et tend vers 0, nous avons d'après le premier lemme de Jordan que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_4} \frac{e^{pt}}{\sqrt{p}} dp = 0.$$

Enfin, calculons directement :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} \frac{e^{pt}}{\sqrt{p}} dp &= \int_{-\sqrt{R^2-\epsilon^2}}^0 \frac{e^{(u+i\epsilon)t}}{i\sqrt{u+i\epsilon}} du \\ &\xrightarrow{\mathbb{R} \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} -i \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tw}}{\sqrt{w}} dw \\ &= -i \frac{2}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \frac{-i\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} \end{aligned}$$

De la même manière, on montre que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_5} \frac{e^{pt}}{\sqrt{p}} dp &= \int_0^{-\sqrt{R^2-\epsilon^2}} \frac{e^{(u-i\epsilon)t}}{-i\sqrt{u-i\epsilon}} du \\ &\xrightarrow{\mathbb{R} \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \frac{-i\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} \end{aligned}$$

Le théorème des résidus nous affirme que

$$\int_{\gamma_1 \cup A-B \cup \gamma_2 \cup \dots \cup C-D} \frac{e^{pt}}{\sqrt{p}} dp = 2i\pi \sum_{z_j \in \text{Dom}} \text{Res}\left(\frac{e^{pt}}{\sqrt{p}}, z_j\right) = 0.$$

Donc en passant à la limite en R et en ϵ , on trouve finalement que $\int_{\gamma_1} \frac{e^{pt}}{\sqrt{p}} dp \rightarrow \frac{2i\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}$.

Finalement,

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_D \frac{e^{pt}}{\sqrt{p}} dp = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}.$$

3.2.3 Exemple d'application : équations différentielles

La transformée de Laplace permet de simplifier la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Considérons ainsi l'équation

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = f(t) \\ y(0) = b_0 \\ y'(0) = b_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) = b_{n-1} \end{cases}$$

Le raisonnement pour résoudre ce type de problème est toujours le même (il s'agit d'effectuer une analyse-synthèse en supposant que la solution est bien transformable, puis en le vérifiant à posteriori). En effet, si y solution et est transformable, on sait que

$$TL(y)[p] = Y[p],$$

$$TL(y^{(k)})[p] = p^k Y[p] - p^{k-1} y(0^+) - \dots - y^{(k-1)}(0^+).$$

Donc

$$\begin{aligned} TL\left(\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}\right)[p] &= \sum_{k=0}^n a_k \left(p^k Y[p] - \sum_{i=0}^{k-1} p^{k-1-i} y^{(i)}(0^+) \right) \quad \text{où } a_n = 1 \\ &= \left(\sum_{k=0}^n a_k p^k \right) Y[p] - \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^{k-1} a_k b_i p^{k-1-i} \quad \text{comme } y \text{ est solution, } y^{(i)}(0^+) = b_i \\ &= H(p)Y[p] + P[p] \end{aligned}$$

Avec H et P deux fonctions polynomiales. Comme y est solution, $TL(\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}) = TL(f)$. Nous obtenons donc un problème algébrique beaucoup plus simple en Y :

$$H(p)Y(p) = P(p) + TL(f).$$

Nous obtenons alors

$$Y(p) = \frac{P}{H}[p] + \frac{1}{H(p)} \times TL(f)[p]$$

Nous avons alors deux termes à inverser. Commençons par la fraction rationnelle. En trouvant les racines complexes de H avec leur multiplicité, nous savons que

$$\frac{P}{H}[X] = \frac{P(X)}{\prod_{i=1}^r (X - p_i)^{k_i}}$$

où les p_i sont les racines (distinctes) d'ordre k_i . Une fois trouvé les racines, nous pouvons effectuer une décomposition en élément simple. Il existe alors $(A_{i,k})$ tels que

$$\frac{P}{H}[X] = \sum_{i=1}^r \left[\frac{A_{i,1}}{p - p_i} + \frac{A_{i,2}}{(p - p_i)^2} + \dots + \frac{A_{i,k_i}}{(p - p_i)^{k_i}} \right]$$

En utilisant alors les tables, nous avons directement que

$$TL^{-1}\left(\frac{P}{H}\right)(t) = \sum_{i=1}^r e^{p_i t} [A_{i,1} + A_{i,2}t + \dots + A_{i,k_i}t^{k_i}]$$

Pour inverser le deuxième terme, nous appliquons la méthode ci-dessus pour trouver $h = TL^{-1}(\frac{1}{H})$. Nous aurons alors que

$$TL^{-1}\left(\frac{1}{H} \times F\right)[t] = \int_0^t f(u)h(t-u)du.$$

La solution finale du problème est donc

$$y(t) = \sum_{i=1}^r e^{p_i t} [A_{i,1} + A_{i,2}t + \dots + A_{i,k_i}t^{k_i}] + \int_0^t f(u)h(t-u)du.$$

3.2.4 Exemple d'application : équations aux dérivées partielles

La transformée de Laplace permet de réduire le nombre de variables dont les dérivées interviennent dans l'équation. Pour illustrer ce propos, prenons le problème de la corde vibrante. Il s'agit d'un problème bidimensionnel à 2 dimensions (une d'espace et une de temps). Le problème peut s'écrire comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - c \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \\ \text{Conditions initiales :} \\ f(x, 0) = \varphi(x) \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \\ \text{Conditions aux limites :} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, t) = 0 \\ f(0, t) = g(t) \end{array} \right.$$

La transformée de Laplace en temps par exemple :

$$F(x, p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(x, t) dt$$

Alors les propriétés de la transformée permettront d'écrire

$$TL\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} f\right)[p] = p^2 F(x, p) - pf(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = p^2 F(x, p) - p\varphi(x) - \psi(x).$$

De plus, en supposant que les interventions sont légales, on trouve que

$$\begin{aligned} TL\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f\right)[p] &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) dt, \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(x, t) dt, \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, p). \end{aligned}$$

Ce qui nous donne alors le problème équivalent

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, p) - \frac{p^2}{c^2} F(x, p) = p\varphi(x) + \psi(x)$$

avec comme condition au limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, p) = 0,$$

$$F(0, p) = TL(g).$$

Nous nous sommes bien ramené à une équation différentielle à une seule variable, paramétré par p .

3.3 Exercices

Une petite série d'exercices, dont on retrouvera la correction page 73.

Exercice 14 :

Donner la transformée de Laplace de

$$f : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 1 < t < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 15 :

Donner la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes à l'aide des tables :

$$\begin{aligned} a)p &\mapsto \frac{1}{(p+1)(p-2)}; & b)p &\mapsto -\frac{1}{(p-2)^2} \\ c)p &\mapsto \frac{5p+10}{p^2+3p-4}; & d)p &\mapsto \frac{p-7}{p^2-14p+50} \\ e)p &\mapsto \frac{p}{p^2-6p+13}; & f)p &\mapsto \frac{e^{-2p}}{p+3} \end{aligned}$$

Exercice 16 :

Résoudre l'équation différentielle

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 2e^{3t}$$

avec comme condition initiale $y(0) = 2$ et $y'(0) = -1$.

Exercice 17 :

Déterminer la transformée de Laplace inverse de la fonction

$$p \mapsto \frac{1}{(p^2+1)^2}$$

à l'aide du contour de Bromwich.

Exercice 18 :

On considère la fonction "dent de scie" défini par

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = f(t+1),$$

$$\forall t \in [0, 1], f(t) = \frac{1}{2} - t.$$

Montrer que sa transformée de Laplace est

$$TL(f)[p] = -\frac{1}{p^2} + \frac{1}{2p} \frac{1+e^{-p}}{1-e^{-p}}.$$

Inversement, retrouver par la formule d'inversion qu'il s'agit bien de l'originale en partant de cette transformée (la majoration pour le lemme de Jordan étant assez lourde, elle pourra être admise lors du premier essai).

Chapitre 4

Transformée en Z

Pourquoi chercher à définir encore une transformée ? Tout simplement parce que dans la vie réelle, il est rare d'avoir accès à une fonction dans son intégralité. Bien souvent, nous n'aurons accès qu'à une version discrétisée de celle-ci. Le but de la transformée en Z est de proposer un traitement et des propriétés similaires à la transformée de Laplace, mais adapté à des mesures de suites de valeurs

4.1 Définition et propriétés

Définition 56 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexe. On définit la transformée en Z de u , évalué en z comme la série de Laurent

$$U(z) = TZ(u)[z] := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n z^{-n}$$

On appelle région de convergence l'ensemble des nombres complexes z tels que la série $TZ(u)[z]$ converge.

Vocabulaire : La transformée que nous venons de définir est également appelée transformée en Z *bilatère*. Lorsqu'on impose en plus que u soit causale (*i.e.* que $u_n = 0$ si $n < 0$), on parle de transformée en Z *unilatère*.

Proposition 57 :

Pour $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite, il existe R_u^- et R_u^+ tel que la région de convergence absolue soit contenue dans l'anneau $A(R_u^-, R_u^+)$

$$A(R_u^-, R_u^+) := \{z \mid 0 \leq R_u^- < |z| < R_u^+ \leq +\infty\}$$

Démonstration. Il s'agit d'une application directe du critère de Cauchy, qui dit que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|z|}$, alors $\sum u_n$ converge absolument. \square

Exemple : Si l'on considère $u_n = 1_{n \geq 0}$, alors $TZ(u)[z] = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n}$ converge pour $|z| > 1$.

Maintenant, remarquons que la transformée en Z vérifie des propriétés similaires à celles de la transformée de Laplace

Proposition 58 :

Soit x, y deux suites numériques.

- (*Linéarité*) Avec un domaine de convergence contenant l'anneau $A(\max(R_x^-, R_y^-), \min(R_x^+, R_y^+))$,

$$TZ(ax(n) + by(n))[z] = aX(z) + bY(z)$$

- (*Translation*) Avec le même domaine de convergence que x ,

$$TZ(x(n - n_0))[z] = z^{-n_0}X(z)$$

- (*Changement d'échelle*) Avec un domaine de convergence contenant $|a|R_x^- < |z| < |a|R_x^+$,

$$TZ(a^n x(n))[z] = TZ(x)\left[\frac{z}{a}\right]$$

- (*Dérivation*) Avec le même domaine de convergence que x ,

$$TZ(nx(n))[z] = -z \frac{d}{dz} TZ(x)[z]$$

- (*Produit et convolution*) Avec un domaine de convergence contenant l'intersection des deux domaines de convergence,

$$TZ\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k)\right)[z] = X(z)Y(z)$$

Démonstration. Il s'agit soit de manipuler la définition, en utilisant pour les deux dernière la convergence normale sur les compacts de l'anneau de convergence.

A chaque fois, le domaine proposé nous assure que les calculs qui suivent sont corrects. On se donne z dans ce domaine à chaque fois.

•

$$TZ(ax(n) + by(n))[z] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (ax(n) + by(n))z^{-n} = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} + b \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)z^{-n} = aX(z) + bY(z).$$

•

$$TZ(x(n - n_0))[z] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n - n_0)z^{-(n-n_0)-n_0} = z^{-n_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{-k} = z^{-n_0}X(z).$$

•

$$TZ(a^n x(n))[z] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n x(n)z^{-n} = X\left(\frac{z}{a}\right).$$

- En dérivant termes à termes,

$$-z \frac{d}{dz} TZ(x)[z] = -z \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)(-nz^{-n-1}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx(n)z^{-n-1} = TZ(nx(n))[z]$$

- En faisant le produit de Cauchy des deux séries, on trouve

$$\begin{aligned} X(z)Y(z) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} x(p)z^{-p} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} y(q)z^{-q} = \sum_{p,q \in \mathbb{Z}^2} x(p)y(q)z^{-p-q} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p+q=n} x(p)y(q)z^{-n} = TZ \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k) \right) [z] \end{aligned}$$

□

Comme pour la transformée de Laplace, la transformée en Z est inversible :

Théoreme 59 :

La transformée en Z est inversible, et pour u une suite, son inverse est défini par :

$$u(n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} U(z)z^{n-1}dz$$

où C^+ est un contour fermé, inclus dans l'anneau de convergence absolue et faisant un seul "tour" (typiquement un cercle), parcouru dans le sens direct.

Démonstration. Le théorème des résidus nous donne directement que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} z^{n-k-1}dz = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le fait de se placer dans l'anneau de convergence permet de justifier l'interversion dans le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} U(z)z^{n-1}dz &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k)z^{n-1-k}dz \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} u(k)z^{n-1-k}dz \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k) \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} z^{n-1-k}dz \\ &= u(n) \end{aligned}$$

□

Remarque : Comme pour la transformée de Laplace, il peut être pertinent de vérifier que l'on ne retrouve pas la transformée en Z à inverser dans les tables avant de se lancer dans les calculs.

4.2 Exemples d'applications

Équations récurrentes

De la même manière que la transformée de Laplace est bien adaptée à la résolution d'équation différentielle linéaire, la transformée en Z est particulièrement utile dans la résolution d'équation récurrente linéaire. La méthode est toujours la même, nous allons la voir sur un exemple.

Considérons pour $|a| < 1$ l'équation de récurrence

$$y(n) - ay(n-1) = x(n),$$

avec comme entrée du système

$$x(n) = b^n 1_{n \geq 0}, \quad \text{avec } |b| < 1$$

On cherche alors à déterminer la transformée en Z de l'entrée du système.

On peut utiliser les propriétés de la transformée en Z pour écrire

$$TZ(b^n 1_{n \geq 0})[z] = TZ(1_{n \geq 0})\left[\frac{z}{b}\right] = \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{z}{b}}} = \frac{1}{1 - \frac{b}{z}}$$

avec comme domaine de convergence $|z| > |a|$.

On recherche ensuite la réponse impulsionnelle du système, c'est-à-dire la suite $(h(n))$ telle que pour toute entrée de système e , l'on ait $y(n) = e(n) * h(n)$.

Après transformée en Z , cela revient à trouver H tel que $TZ(y)[z] = TZ(e)[z]H[z]$. Prenons la transformée en Z de l'équation de récurrence avec comme entrée e et utilisons la linéarité et le fait que $TZ(y(n-1))[z] = z^{-1}TZ(y)[z]$, on trouve que

$$TZ(y) - az^{-1}TZ(y) = TZ(e).$$

Ceci se réécrit

$$TZ(y) = TZ(e) \frac{1}{1 - \frac{a}{z}}.$$

On trouve alors y soit en calculant le produit de convolution (solution numérique), soit en inversant la transformée en Z de y (solution théorique).

Ici, en supposant $a \neq b$, nous aurons

$$TZ(y) = \frac{1}{(1 - \frac{a}{z})(1 - \frac{b}{z})} = \frac{1}{(1 - \frac{b}{a})(1 - \frac{a}{z})} + \frac{1}{(1 - \frac{a}{b})(1 - \frac{b}{z})}$$

Et donc

$$y(n) = \left(\frac{a^n}{(1 - \frac{b}{a})} + \frac{b^n}{(1 - \frac{a}{b})} \right) 1_{n \geq 0}$$

est une solution de l'équation récurrente linéaire.

Traitement numérique du signal

Ce point de vue sera creusé plus particulièrement dans le cours éponyme. Justifions ici pourquoi la transformée en Z est particulièrement intéressante lorsque l'on cherche à se placer dans l'espace de Laplace à partir de données récoltées de manière uniforme en temps (soit qu'il s'agisse d'un signal radar, soit qu'il s'agisse d'un signal numérisé). On s'intéresse donc à une fonction f^* qui est issue d'une suite d'impulsion espacée uniformément (d'espacement temporel T), mais d'amplitude variable.

En notant δ une impulsion d'amplitude ayant une intégrale 1 et de durée négligeable¹, on s'intéresse en fait à une fonction

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\delta(t - nT) = f(t)Imp(t).$$

Si les calculs sont légaux, nous aurons alors

$$\begin{aligned} TL(f^*)(p) &= \int_0^{+\infty} f(t)Imp(t)e^{-pt}dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(nT)\delta(t - nT)e^{-pt}dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)e^{-pnT} \quad \text{car } \delta \text{ est de durée négligeable.} \\ &= TZ(f(nT))[e^{pT}] \end{aligned}$$

On voit donc naturellement apparaître la transformée en Z évaluée en $z = e^{pT}$.

4.3 Lien avec la transformée de Laplace

Nous venons de voir dans la section précédente que la transformée de Laplace d'un système numérisé s'écrit comme une transformée en Z . On peut également se demander s'il est possible de retrouver la transformée en Z d'un signal numérisé à partir de la transformée de Laplace signal avant numérisation. C'est le propos du résultat suivant :

Proposition 60 :

Soit $x(t)$ un signal causal, et $X(z)$ la transformée en Z du signal échantillonné avec une période T :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT)z^{-n}.$$

Alors, sous réserve de décroissance suffisante de x , on a l'expression suivante :

$$X(z) = \sum Res \left(\frac{TL(x)[p]}{1 - e^{pT}z^{-1}} \right)$$

Démonstration. L'expression de la transformée de Laplace inverse de x nous dit que

$$x(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{D^+} TL(x)[p]e^{pt}dp$$

1. mathématiquement la limite au sens des distributions de $\delta_W : t \mapsto \frac{1}{W}$ si $0 \leq t \leq W$ et 0 sinon

Donc en revenant à la définition, et pour $|z| > e^{Re(p_0)T}$ ($p_0 \in D^\dagger$ quelconque),

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} x(nT)z^{-n}, \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{2i\pi} \int_{D^\dagger} TL(x)[p] e^{npT} dp \right] z^{-n} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{D^\dagger} TL(x)[p] \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{pT} z^{-1})^n dp \end{aligned}$$

Comme $|z^{-1}e^{pT}| < 1$, on trouve donc

$$X(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{D^\dagger} \frac{TL(x)[p]}{1 - e^{pT}z^{-1}} dp = \sum Res \left(\frac{TL(x)[p]}{1 - e^{pT}z^{-1}} \right)$$

□

4.4 Exercices

Une petite série d'exercices, dont on retrouvera la correction page 79.

Exercice 19 :

On considère un compte en banque. On note $a(n)$ la balance du compte au début de chaque mois. Supposons que le compte contienne P euros au début du premier mois, puis que l'on fasse un dépôt de t euros chaque mois dans ce compte, auquel s'ajouteront des intérêts composés de $r \cdot 100\%$ par mois.

1. Traduire l'énoncé en une équation sur la suite a .
2. Donner la transformée en Z , notée A , de a ainsi que sa décomposition en éléments simple.
3. En déduire une expression explicite de a .

Exercice 20 : (Examen 2024)

1. Calculer la transformée en Z de la suite $x(n)$ définie par

$$x(n) = e^{in\theta} u(n) \quad \text{avec} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

où $u(n)$ est l'échelon de Heaviside défini par $u(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Préciser la région de convergence de $X(z)$. En déduire la transformée en Z de $\cos(n\theta)u(n)$ en fonction de $\cos \theta$.

2. Par utilisation de la transformée en Z , résoudre l'équation de récurrence

$$x(n+1) - 2x(n) = r(n)$$

avec $x(0) = 1$ où $r(n)$ est la rampe définie par $r(n) := \begin{cases} n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Correction des exercices

Généralité et fonctions complexes

La correction des exercices de la page 26

1) Écrire les nombres suivant sous forme $z = re^{i\theta}$:

$$2 + 2\sqrt{3}i \quad ; \quad -5 + 5i \quad ; \quad -\sqrt{6} - \sqrt{2}i \quad ; \quad -3i.$$

On commence par calculer le module à chaque fois, puis l'argument. On trouve alors

$$2 + 2\sqrt{3}i = 4e^{i\frac{\pi}{3}}; \quad -5 + 5i = 5\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}; \quad -\sqrt{6} - \sqrt{2}i = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}; \quad -3i = 3e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

2) Démontrer que l'équation de tout cercle et de toutes droites dans \mathbb{C} est de la forme

$$\alpha|z|^2 + \beta z + \bar{\beta}\bar{z} + \gamma = 0$$

Pour des nombres $(\alpha, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ et $\beta \in \mathbb{C}$ propre à la droite/cercle. Un cercle admet une équation de la forme $|z - z_0| = R$ pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R \in \mathbb{R}$. Celle-ci se réécrit

$$\begin{aligned} |z - z_0| = R &\iff |z - z_0|^2 = R^2 \iff (z - z_0)(\overline{z - z_0}) = R^2, \\ &\iff z\bar{z} - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z} + |z_0|^2 - R^2 = 0, \end{aligned}$$

qui est bien de la forme demandée.

Une droite admet une équation de la forme $a\operatorname{Re}(z) + b\operatorname{Im}(z) + c = 0$ pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$. Celle-ci se réécrit, en posant $x := \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$, comme

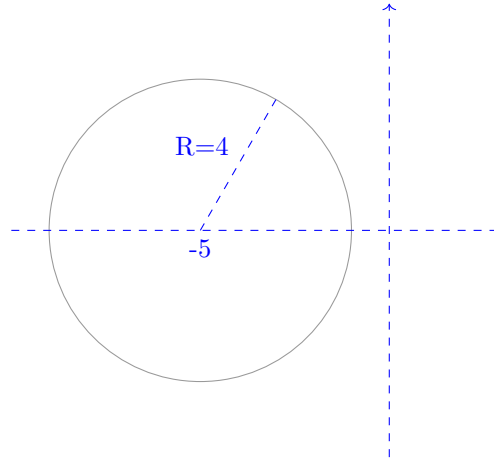
$$\begin{aligned} a\operatorname{Re}(z) + b\operatorname{Im}(z) + c = 0 &\iff ax + by + c = 0 \iff \operatorname{Re}(ax + by) + c = 0, \\ &\iff \operatorname{Re}(ax + by + (ay - bx)i) + c = 0 \\ &\iff \frac{a - ib}{2}z + \frac{a + ib}{2}\bar{z} + c = 0, \end{aligned}$$

qui est bien de la forme demandée.

3) Représenter graphiquement l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $|\frac{z-3}{z+3}| = 2$, puis l'ensemble des z tels que $|\frac{z-3}{z+3}| < 2$. Soit $z \in \mathbb{C}$, on raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} \left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2 &\iff |z-3|^2 - 4|z+3|^2 = 0 \\ &\iff (z-3)(\bar{z}-3) - 4(z+3)(\bar{z}+3) = 0 \\ &\iff -3|z|^2 - 15z - 15\bar{z} - 27 = 0 \\ &\iff |z|^2 + 5z + 5\bar{z} + 9 = 0 \\ &\iff |z+5|^2 = 25 - 9 \iff |z+5| = 4 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les calculs de l'exercice précédents pour la dernière ligne.



Pour la deuxième moitié de la question, l'on reprend les calculs avec une inégalité (en prêtant une attention particulière dans le passage de la 3^e à la 4^e ligne. On aboutit alors à

$$\left| \frac{z-3}{z+3} \right| < 2 \iff |z+5| > 4.$$

Il s'agit alors de griser l'**extérieur** du cercle.

4) Donner une expression simplifiée de $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

On écrit $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, ce qui nous permet directement d'obtenir que :

$$\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = \sqrt{2}^{9-7} e^{i\frac{\pi}{4}(9-(-7))} = 2e^{4i\pi} = 2.$$

5) Le but de cet exercice est de démontrer qu'il n'existe aucune partition non triviale de \mathbb{N} formée de suites arithmétiques de raison différentes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de partition (union disjointe) de la forme

$$\mathbb{N} = S_1 \sqcup S_2 \sqcup \dots \sqcup S_m,$$

avec $m \geq 2$, $S_j := \{a_j + kd_j, k \geq 0\}$ où $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}$ et $1 < d_1 < d_2 < \dots < d_m$ entiers.

1. Par l'absurde, supposons qu'une telle partition existe. En déduire que pour tout $|z| < 1$, on aurait

$$\frac{1}{1-z} = \frac{z^{a_1}}{1-z^{d_1}} + \frac{z^{a_2}}{1-z^{d_2}} + \dots + \frac{z^{a_m}}{1-z^{d_m}}$$

Si une telle partition existait, l'on aurait

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= \sum_{i=0}^{+\infty} z^i \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{i \in S_j} z^i \quad (\text{car la série converge absolument, et donc l'ordre de sommation n'importe pas}) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{+\infty} z^{a_j + (z^{d_j})^k}. \end{aligned}$$

2. Conclure à une absurdité à l'aide d'une suite $(z_n) \subset D(0, 1)$ telle que $z_n \rightarrow e^{\frac{2i\pi}{d_m}}$.

Comme suggéré dans l'énoncé, on prend une telle suite (par exemple $z_n = (1 - \frac{1}{n}) e^{\frac{2i\pi}{d_m}}$). Alors, $\frac{1}{1-z_n} \rightarrow \frac{1}{1-e^{\frac{2i\pi}{d_m}}}$, et également

$$\forall j \neq m, \frac{z_n^{a_k}}{1 - z_n^{d_k}} \rightarrow \frac{e^{\frac{2i\pi a_k}{d_m}}}{1 - e^{\frac{2i\pi d_k}{d_m}}}.$$

En revanche, $|\frac{z_n^{a_m}}{1 - z_n^{d_m}}| \rightarrow +\infty$. Ce qui est donc une absurdité au vu des règles sur les limites.

6) Résoudre dans \mathbb{C} les équations

$$(1) : \cos(z) = 2 \quad (2) : \cosh(z) = 0$$

Comparer les résultats aux mêmes équations dans \mathbb{R} .

On revient à la définition du cosinus complexe :

$$\begin{aligned} \cos(z) = 2 &\iff \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2, \\ &\iff e^{iz} + e^{-iz} - 4 = 0, \\ &\iff e^{2iz} + 1 - 4e^{iz} = 0, \\ &\iff Y^2 - 4Y + 1 = 0 \quad \text{où } Y = e^{iz}. \end{aligned}$$

Or les solutions de cette équation quadratique sont : $Y_{\pm} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$.

Donc

$$\begin{aligned} \cos(z) = 2 &\iff e^{iz} = 2 + \sqrt{3} \text{ ou } e^{iz} = 2 - \sqrt{3}, \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, iz = \ln(2 + \sqrt{3}) + 2ik\pi \text{ ou } iz = \ln(2 - \sqrt{3}) + 2ik\pi, \\ &\iff z \in \{2k\pi + i \ln(2 \pm \sqrt{3}), k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Pour la deuxième équation, on écrit pour $z \in \mathbb{C}$ que

$$\begin{aligned} \cosh(z) = 0 &\iff \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0, \\ &\iff e^z = -e^{-z}, \\ &\iff e^{2z} = -1 = e^{i\pi}, \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = i \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right). \end{aligned}$$

On remarque que, contrairement à \mathbb{R} , ces deux équations ont des solutions complexes.

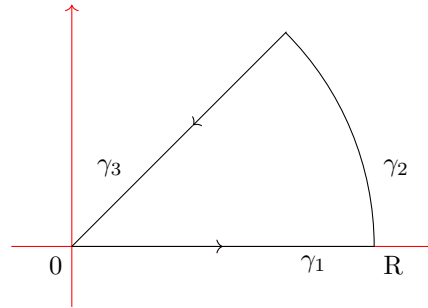
7) L'application $g : x + iy \mapsto \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$ est-elle holomorphe (avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$) ?

On remarque que $g(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}}$, qui est holomorphe, par propriété usuelles, sur \mathbb{C}^* .

Intégration dans le corps des complexes

La correction des exercices de la page 43

8) A l'aide du contour suivant, calculer $I = \int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx$. En déduire la valeur de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$.



Comme $z \mapsto e^{iz^2}$ est holomorphe comme composition de fonction holomorphe, et que le contour proposé entoure un domaine simplement connexe, nous pouvons appliquer le théorème de Cauchy :

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3} e^{iz^2} dz = 0$$

Par définition de l'intégrale impropre, et en prenant comme paramétrisation $\gamma_1 : t \in [0, R] \mapsto t$, nous avons immédiatement que

$$\int_{\gamma_1} e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{it^2} dt \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt.$$

Le traitement du chemin γ_2 est plus complexe, puisque les lemmes de Jordan ne suffisent pas. Nous aurons besoin du fait suivant :

Fait : $\forall u \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin(u) \geq \frac{2u}{\pi}$.

Ce fait est immédiat en remarquant que la fonction sinus est concave sur l'intervalle considéré, et donc au-dessus de ses cordes.

Maintenant, calculons avec la paramétrisation $\gamma_2 : \theta \in [0, \frac{\pi}{4}] \mapsto Re^{i\theta}$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} e^{iz^2} dz \right| &= \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2 e^{2i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right|, \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| e^{iR^2 \cos(2\theta) - R^2 \sin(2\theta)} \right| R d\theta, \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} R e^{-R^2 \sin(2\theta)} d\theta, \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} R e^{-R^2 \frac{4\theta}{\pi}} d\theta \quad \text{d'après le fait précédent,} \\ &= \left[-\frac{\pi}{4R} e^{-\frac{4R^2}{\pi}\theta} \right]_0^{\frac{\pi}{4}}, \\ &\leq \frac{\pi}{4R} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Enfin, pour $\gamma_3 : t \in [0, R] \mapsto (R-t)e^{i\frac{\pi}{4}}$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} e^{iz^2} dz &= - \int_0^R e^{-(1-t)^2} e^{i\frac{\pi}{4}} dt = -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-t^2} dt, \\ &\rightarrow -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Donc finalement

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Pour l'intégrale impropre, il suffit alors de prendre la partie imaginaire :

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

9) Soit $a > 0$. À l'aide du rectangle de sommets $\{\pm R, \pm R + i\frac{a}{2}\}$, calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(ax) dx$.

On pose $g : z \mapsto e^{-z^2 + iaz}$. Le théorème de Cauchy nous annonce que

$$0 = \int_{-R}^R e^{-x^2 + iax} dx + \int_0^{\frac{a}{2}} e^{-(R+it)^2 + iaR - at} i dt + \int_R^{-R} e^{-(x+i\frac{a}{2})^2 + iax - \frac{a^2}{2}} dx + \int_{\frac{a}{2}}^0 e^{-(-R+it)^2 - iaR - at} i dt$$

Par convergence dominée (dominé par $t \mapsto e^{t^2}$ continue), il est immédiat que

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{a}{2}} e^{-(R+it)^2 + iaR - at} i dt &\rightarrow 0, \\ \int_{\frac{a}{2}}^0 e^{-(-R+it)^2 - iaR - at} i dt &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

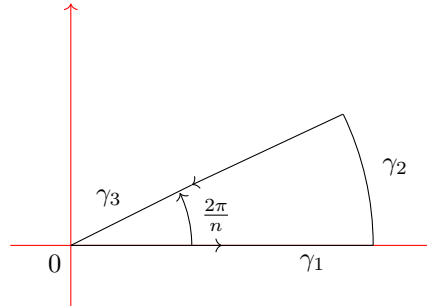
Maintenant,

$$\int_{-R}^R e^{-(x+i\frac{a}{2})^2 + iax - \frac{a^2}{2}} dx = - \int_{-R}^R e^{-x^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2}} dx = -e^{-\frac{3a^2}{4}} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx \rightarrow -\sqrt{\pi} e^{-\frac{3a^2}{4}}$$

Donc finalement,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(ax) dx = \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx \right) = \operatorname{Re}(\sqrt{\pi} e^{-\frac{3a^2}{4}}) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{3a^2}{4}}$$

10) A l'aide du contour suivant et du théorème des résidus, calculer pour $n \geq 2$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$.



On pose $f : z \mapsto \frac{1}{1+z^n}$.

Si $|z| = R$, alors $|zf(z)| \leq \frac{R}{R^n - 1}$. Comme cette majoration est uniforme, le premier lemme de Jordan nous donne que

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{1+z^n} dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

Nous avons directement que

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{1+z^n} dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$$

Enfin,

$$\int_{\gamma_3} \frac{1}{1+z^n} dz = \int_R^0 \frac{1}{1+t^n e^{i2\pi}} e^{i\frac{2\pi}{n}} dt \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} -e^{i\frac{2\pi}{n}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx$$

Maintenant, la seule singularité de f dans le domaine considéré est $e^{i\frac{\pi}{n}}$. Comme il s'agit d'un pôle simple,

$$\text{Res}(f, e^{i\frac{\pi}{n}}) = \frac{1}{ne^{i\frac{(n-1)\pi}{n}}} = -\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}.$$

Le théorème des résidus permet alors de conclure que

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3} \frac{1}{1+z^n} dz = 2i\pi \left(-\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n} \right).$$

En passant alors à la limite quand R tend vers l'infini, on trouve

$$(1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{-2i\pi e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}.$$

soit encore

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{2i\pi e^{i\frac{\pi}{n}}}{n(e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1)} = \frac{\pi}{n \sin(\frac{\pi}{n})}$$

11) Déterminer avec le théorème des résidus la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_1^+} \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} dz.$$

On reconnaît l'intégrale sur un contour fermé autour d'un point de singularité. Nous allons donc utiliser le théorème des résidus. A priori, la singularité est un pôle d'ordre 4, nous allons donc effectuer le développement de Laurent.

On sait que

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

On en déduit donc que

$$\frac{e^z - e^{-z}}{z^4} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} 2 \frac{z^{n-4}}{n!} = 2z^{-3} + 2z^{-1} + \sum_{k=0, \text{ impair}}^{+\infty} 2 \frac{z^k}{(k+4)!}$$

En particulier,

$$\text{Res} \left(\frac{e^z - e^{-z}}{z^4}, 0 \right) = 2.$$

Finalement,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_1^+} \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} dz = 2.$$

12) Pour $f : x \mapsto \frac{1}{\cosh(\pi x)}$, calculer la transformée de Fourier $\hat{f} : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi t \xi} dt$ en utilisant le contour délimité par le rectangle de sommets $\pm R, \pm R + 2i$.

Dans tout l'exercice, on se fixe ξ . On pose $g : z \mapsto \frac{e^{-2i\pi z \xi}}{\cosh(\pi z)}$.

On commence par chercher les points de singularités isolés. Ils sont nécessairement situés en les points d'annulation du dénominateur. Or, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \cosh(\pi z) = 0 &\iff e^{\pi z} = -e^{-\pi z} \\ &\iff e^{2\pi z} = -1 \\ &\iff z \in \frac{i}{2} + i\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Maintenant, comme le numérateur ne s'annule pas en ces points, il s'agit bien de singularité. Au vu du contour choisi, le théorème des résidus affirme que

$$\int_{\text{Rectangle}} g(z)dz = 2i\pi \left(\text{Res}\left(g, \frac{i}{2}\right) + \text{Res}\left(g, \frac{3i}{2}\right) \right).$$

Pour calculer ces résidus, nous remarquons qu'il s'agit de résidu sur des pôles simples, donc

$$\begin{aligned} \text{Res}\left(g, \frac{i}{2}\right) &= \frac{e^{+\pi\xi}}{\pi \sinh(i\frac{\pi}{2})} = \frac{e^{\pi\xi}}{\pi i \sin(\frac{\pi}{2})} = \frac{e^{\pi\xi}}{i\pi}, \\ \text{Res}\left(g, \frac{3i}{2}\right) &= \frac{e^{+3\pi\xi}}{\pi \sinh(i\frac{3\pi}{2})} = \frac{e^{3\pi\xi}}{\pi i \sin(\frac{3\pi}{2})} = -\frac{e^{3\pi\xi}}{i\pi}, \end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{e^{4\pi\xi - 2i\pi R\xi}}{\cosh(\pi R + i\pi t)} i dt &\rightarrow 0, \\ \int_2^0 \frac{e^{4\pi\xi + 2i\pi R\xi}}{\cosh(-\pi R + i\pi t)} i dt &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

Et par périodicité de l'exponentielle complexe (et donc du cosinus hyperbolique),

$$\int_R^{-R} \frac{e^{2i\pi t\xi + 4\pi\xi}}{\cosh(\pi t + 2i\pi)} dt = -e^{4\pi\xi} \int_{-R}^R \frac{e^{2i\pi t\xi}}{\cosh(\pi t)} dt$$

Finalement, en passant à la limite, on obtient du théorème des résidus que

$$\hat{f}(1 - e^{4\pi\xi}) = 2i\pi \left(\frac{e^{\pi\xi}}{i\pi} - \frac{e^{3\pi\xi}}{i\pi} \right).$$

Donc

$$\hat{f}(\xi) = 2 \frac{e^{\pi\xi} - e^{3\pi\xi}}{1 - e^{4\pi\xi}} = 2 \frac{e^{-\pi\xi} - e^{\pi\xi}}{e^{-2\pi\xi} - e^{2\pi\xi}} = \frac{1}{\cosh(\xi)}$$

13) (Examen 2024) Calcul de l'intégrale du sinus cardinal.

On souhaite calculer l'intégrale définie par $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

1. Soit $f(\cdot)$ qui possède un pôle en 0 et qui admet le développement de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{z^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

Pour tout $z \in d(0, r) \setminus \{0\}$ où $d(0, r)$ désigne le disque de centre 0 et de rayon $r > 0$.

- (a) Lorsque $z = 0$ est un pôle simple (i.e., d'ordre 1), rappeler les valeurs des b_n ($n \geq 1$) en fonction du résidu $\text{res}f(0)$ de la fonction f en 0.

Avoir un pôle simple revient à ce que pour $n \geq 2$, on ait $b_n = 0$. De plus, par définition du résidu, $b_1 = \text{res}f(0)$

- (b) En déduire que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = i\pi \text{Res}(f, 0)$$

où γ_ϵ est le demi-cercle situé dans le demi-plan supérieur de centre 0 et de rayon ϵ .

Revenons à la définition d'une intégrale curviligne parcouru dans le sens trigonométrique, puis écrivons

le développement de Laurent de notre fonction ayant un pôle simple :

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz &= \int_0^\pi f(\epsilon e^{i\theta}) \epsilon i e^{i\theta} d\theta, \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{b_1}{\epsilon e^{i\theta}} \epsilon i e^{i\theta} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\epsilon e^{i\theta})^n \epsilon i e^{i\theta} \right) d\theta \\ &= i\pi b_1 + \epsilon \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\epsilon e^{i\theta})^n i e^{i\theta} d\theta\end{aligned}$$

Enfin, comme la série de Laurent admet un rayon de convergence supérieur à r , on a que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\epsilon e^{i\theta})^n i e^{i\theta}$ est uniformément bornée en θ pour ϵ au voisinage de 0 (par exemple par $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| (\frac{r}{2})^n$).
Donc à la limite :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = i\pi b_1 = i\pi \operatorname{res} f(0)$$

2. Soit $g(\cdot)$ la fonction définie par $g(z) = \frac{e^{iz}}{z}$. Montrer que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} g(z) dz = 0$$

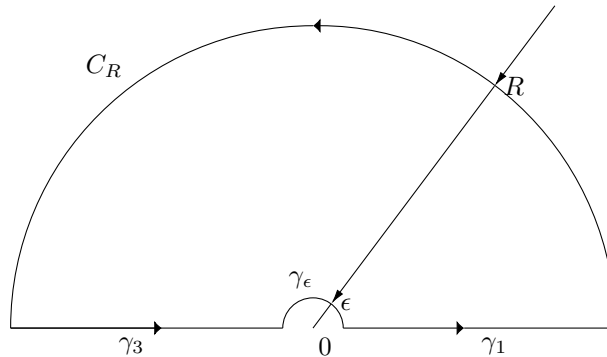
où C_R est le demi-cercle situé dans le demi-plan supérieur de centre 0 et de rayon R .

On va chercher à appliquer le deuxième lemme de Jordan. On cherche à intégrer $z \mapsto f(z)e^{i \times 1 \times z}$ où f est l'inversion complexe, sur le demi-cercle situé dans le demi-plan supérieur de centre 0 et de rayon R . D'abord, l'on a bien $1 > 0$. Ensuite,

$$\sup_{z \in C_R} |f(z)| = \sup_{z \in C_R} \frac{1}{|z|} = \frac{1}{R} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

Donc nous avons toutes les hypothèses du lemme de Jordan, on peut en conclure la limite demandée.

3. Appliquer le Théorème de Cauchy à la fonction $g(\cdot)$ le long du contour représenté ci dessous. A l'aide des résultats des Questions 1 et 2, en déduire la valeur de l'intégrale I .



La fonction g est holomorphe dans le contour considéré, donc d'après le théorème de Cauchy,

$$\int_{\gamma_1 \cup C_R \cup \gamma_3 \cup \gamma_\epsilon} g(z) dz = 0.$$

Nous avons vu dans la question 2 que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} g(z) dz = 0$, et dans la question 1 que (attention à l'orientation du chemin curviligne)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} g(z) dz = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\gamma_\epsilon} g(z) dz = -i\pi \operatorname{res}(g, 0).$$

Et un rapide calcul donne que ce résidu vaut 1.

Enfin,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} g(z)dz + \int_{\gamma_3} g(z)dz &= \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx, \\ &= \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx, \\ &= 2i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin(x)}{x} dx.\end{aligned}$$

En passant à la limite en R et en ϵ , on en déduit donc que

$$I = \frac{\pi}{2}$$

Transformée de Laplace

La correction des exercices de la page 56

14) Donner la transformée de Laplace de

$$f : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } 1 < t < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut directement calculer l'intégrale. Soit $p \in \mathbb{C}$, avec $p \neq 0$

$$\begin{aligned} TL(f)[p] &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \\ &= \int_1^2 e^{-pt} dt \\ &= \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_1^2 \\ &= \frac{e^{-p} - e^{-2p}}{p} \end{aligned}$$

15) Donner la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} a) p &\mapsto \frac{1}{(p+1)(p-2)}; & b) p &\mapsto -\frac{1}{(p-2)^2} \\ c) p &\mapsto \frac{5p+10}{p^2+3p-4}; & d) p &\mapsto \frac{p-7}{p^2-14p+50} \\ e) p &\mapsto \frac{p}{p^2-6p+13}; & f) p &\mapsto \frac{e^{-2p}}{p+3} \end{aligned}$$

a) On décompose la fraction en éléments simples, *ie* on cherche α et β tels que

$$\frac{1}{(p+1)(p-2)} = \frac{\alpha}{p+1} + \frac{\beta}{p-2}.$$

On trouve par la méthode de notre choix (système linéaire ou calcul de $\lim_{p \rightarrow p_0} (p - p_0)F(p)$) que $\alpha = -\frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{1}{3}$.

Donc l'inverse est

$$f : t \mapsto -\frac{1}{3}e^{-t}Heav(t) + \frac{1}{3}e^{2t}Heav(t).$$

b) Posons $G(p) = \frac{-1}{(p-2)^2}$ et $F(p) = \frac{1}{p-2}$. Alors $F' = G$.

Or,

$$TL^{-1}(F)[t] = e^{-2t}Heav(t).$$

Donc par les propriétés de la transformée de Laplace, on en déduit que

$$TL^{-1}(G)[t] = (-t)e^{2t}Heav(t).$$

c) Le dénominateur se factorise en $(p+4)(p-1)$. On décompose la fraction en éléments simples en l'écrivant sous la forme

$$\frac{\alpha}{p+4} + \frac{\beta}{p-1}$$

On trouve alors $\alpha = 2$ et $\beta = 3$. Donc l'inverse est

$$f : t \mapsto 2e^{-4t}Heav(t) + 3e^tHeav(t).$$

- d) Le discriminant du trinôme du second degré au dénominateur est négatif, donc il n'admet pas de racines. On le met sous forme canonique $p^2 - 14p + 50 = (p - 7)^2 + 1$. Donc

$$TL^{-1} \left(\frac{p-7}{(p-7)^2+1} \right) [t] = e^{7t} TL^{-1} \left(\frac{p}{p^2+1} \right) [t] = e^{7t} \cos(t) Heav(t).$$

- e) Le discriminant du trinôme du second degré au dénominateur est négatif, donc il n'admet pas de racines. On le met sous forme canonique en écrivant $p^2 - 6p + 13 = (p - 3)^2 + 4$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{p}{p^2-6p+13} &= \frac{p}{(p-3)^2+4} \\ &= \frac{p-3}{(p-3)^2+2^2} + \frac{3}{2} \frac{2}{(p-3)^2+2^2} \end{aligned}$$

On trouve que l'original recherché est la fonction

$$t \mapsto e^{3t} \cos(2t) Heav(t) + \frac{3}{2} e^{3t} \sin(2t) Heav(t)$$

- f) A l'aide du théorème du retard, on trouve que

$$TL^{-1} \left(\frac{e^{-2p}}{p+3} \right) [t] = TL^{-1} \left(\frac{1}{p+3} \right) [t-2] = e^{3(t-2)} Heav(t-2)$$

16) Résoudre l'équation différentielle

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 2e^{3t}$$

avec comme condition initiale $y(0) = 2$ et $y'(0) = -1$.

On passe dans le domaine de Laplace, où l'on a

$$TL(y) = Y, \quad TL(y') = pY - 2 \quad TL(y'') = p^2Y - 2p + 1.$$

Donc l'équation devient

$$(p^2Y - 2p + 1) + (pY - 2) - 2Y = \frac{2}{p-3}$$

ou encore

$$Y = \left(\left(\frac{2}{(p-3)} + 2p + 1 \right) \right) \frac{1}{p^2 + p - 2}$$

On effectue alors une décomposition en élément simple du membre de droite $\frac{2+2p^2-6p+p-3}{(p-3)(p^2+p-2)} = \frac{2p^2-5p-1}{(p-3)(p^2+p-2)}$. On trouve

$$\frac{2p^2-5p-1}{(p-3)(p^2+p-2)} = \frac{1}{5} \frac{1}{p-3} + \frac{2}{3} \frac{1}{p-1} + \frac{17}{15} \frac{1}{p+2}.$$

Ceci nous donne donc la solution, la fonction

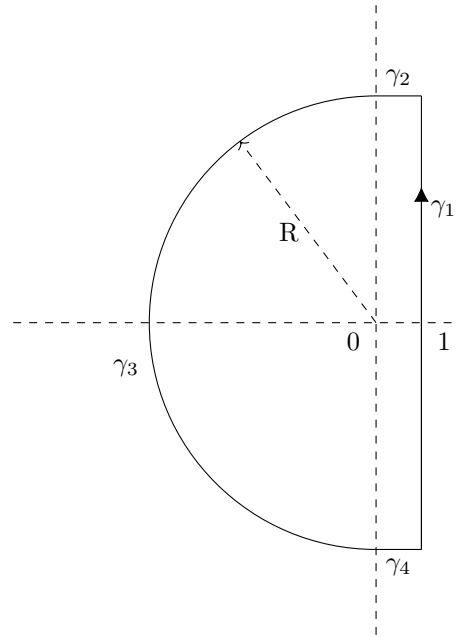
$$y(t) = \left(\frac{1}{5} e^{3t} + \frac{2}{3} e^t + \frac{17}{15} e^{-2t} \right) Heav(t)$$

17) Déterminer la transformée de Laplace inverse de la fonction

$$F : p \mapsto \frac{1}{(p^2 + 1)^2}$$

à l'aide du contour de Bromwich.

La fonction F a pour singularités isolées les points $\pm i$. En particulier, son abscisse de convergence est 0. On considère alors le contour suivant :



Remarquons d'abord que pour $|z| = R$, $|F(z)| \leq \frac{1}{(R^2-1)^2}$. Comme cette majoration est uniforme et tend vers 0, nous avons par le second lemme de Jordan (on intègre sur C_R^g et $t > 0$) que

$$\int_{\gamma_3} F(p) e^{tp} dp \rightarrow 0.$$

Maintenant, il est immédiat que

$$\int_{\gamma_2} F(p) e^{tp} dp = \int_1^0 \frac{e^{itR+tu}}{((R+iu)^2+1)^2} du \rightarrow 0$$

et

$$\int_{\gamma_4} F(p) e^{tp} dp = \int_0^1 \frac{e^{itR+tu}}{((R+iu)^2+1)^2} du \rightarrow 0$$

Calculons les résidus de F . Comme il s'agit de pôles d'ordre 2,

$$\text{Res}(F(p)e^{tp}, i) = \frac{d}{dp} [(p-i)^2 F(p)e^{tp}]_{p=i} = \frac{d}{dp} \left[\frac{e^{tp}}{(p+i)^2} \right]_{p=i} = \frac{(2i)^2 t e^{it} - 2(2i) e^{it}}{(2i)^3} = \frac{1-it}{2} e^{it}$$

$$\text{Res}(F(p)e^{tp}, -i) = \frac{d}{dp} \left[\frac{e^{tp}}{(p-i)^2} \right]_{p=-i} = \frac{(-2i)^2 t e^{-it} - 2(-2i) e^{-it}}{(-2i)^3} = \frac{1+it}{2} e^{-it}$$

Le théorème des résidus nous donne alors que

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4} F(p) e^{tp} dp = 2i\pi \left(\text{Res}(F(p)e^{tp}, i) + \text{Res}(F(p)e^{tp}, -i) \right) = 2i\pi \left(\cos(t) + t \sin(t) \right).$$

Finalement, en passant à la limite en $R \rightarrow +\infty$, on trouve que

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{D^\dagger} F(p)e^{pt} = \cos(t) + t \sin(t)$$

18) On considère la fonction " dent de scie" défini par

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = f(t+1),$$

$$\forall t \in [0, 1], f(t) = \frac{1}{2} - t.$$

Montrer que sa transformée de Laplace est

$$TL(f)[p] = -\frac{1}{p^2} + \frac{1}{2p} \frac{1+e^{-p}}{1-e^{-p}}.$$

Inversement, calculer par la formule d'inversion une autre expression de f .

Directement par le calcul, pour $Re(p) > 0$

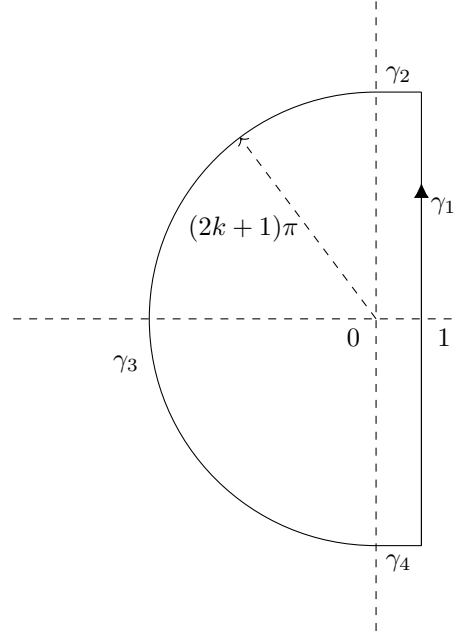
$$\begin{aligned} TL(f)[p] &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt, \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(t)e^{-pt} dt && \text{On découpe sur des intervalles de la taille de la période de } f, \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f(t+n)e^{-p(t+n)} dt && \text{On translate pour utiliser la périodicité et l'expression de } f, \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-pn} \int_0^1 f(t)e^{-pt} dt, \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-pn} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - t\right) e^{-pt} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-pn} \left[\frac{e^{-pt}}{-2p} + \left(\frac{te^{-pt}}{p} + \frac{e^{-pt}}{p^2}\right) \right]_0^1, \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-pn} \left(\frac{e^{-p}}{-2p} + \left(\frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-p}}{p^2}\right) + \frac{1}{2p} - \frac{1}{p^2} \right), \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-pn} \left(\frac{e^{-p}+1}{2p} + \frac{e^{-p}-1}{p^2} \right), \\ &= \frac{e^{-p}+1}{2p(1-e^{-p})} - \frac{1}{p^2} && \text{La première somme étant géométrique, et la deuxième télescopique.} \end{aligned}$$

On pose

$$F : p \mapsto -\frac{1}{p^2} + \frac{1}{2p} \frac{1+e^{-p}}{1-e^{-p}}$$

Remarquons tout d'abord que les singularités sont $\{0\} \cup 2i\pi\mathbb{Z}$ (puisque les zéros de $1-e^{-p}$ sont exactement $2i\pi\mathbb{Z}$. En particulier, son abscisse de convergence est $0 = \sup(Re(p.s.i.))$. On se donne alors D^\dagger la droite verticale d'abscisse 1 (par exemple) et $t > 0$, et l'on cherche à calculer

$$\int_{D^\dagger} F(p)e^{pt}.$$



On utilise alors le contour suivant (attention, on ne peut pas prendre R quelconque, puisqu'on ne veut pas de singularité dans le contour, nous prendrons donc par la suite $R = (2k+1)i\pi$). Remarquons que sur γ_3 , $|F(p)| = \left| -\frac{1}{p^2} + \frac{1+e^p}{p(1-e^p)} \right| \leq \frac{1}{R^2} + \frac{2}{R|1-e^p|}$. Il nous faut alors pour appliquer le lemme de Jordan minorer uniformément $|1-e^{-p}|$. Une inégalité triangulaire ne suffit clairement pas, car minorant par 0 sur l'axe imaginaire.

Écrivons alors $p = (2k+1)\pi e^{i\theta}$, et soyons plus précis dans les calculs

$$\begin{aligned} |1-e^p|^2 &= |1-e^{(2k+1)\pi \cos(\theta)+i \sin(\theta)}|^2 \\ &= |1-e^{(2k+1)\pi \cos(\theta)} \cos((2k+1)\pi \sin(\theta)) + ie^{(2k+1)\pi \cos(\theta)} \sin(-(2k+1)\pi \sin(\theta))|^2 \\ &= \left(1-e^{(2k+1)\pi \cos(\theta)} \cos((2k+1)\pi \sin(\theta))\right)^2 + \left(e^{(2k+1)\pi \cos(\theta)} \sin((2k+1)\pi \sin(\theta))\right)^2 \\ &\geq \left(1-e^{(2k+1)\pi \cos(\theta)} \cos((2k+1)\pi \sin(\theta))\right)^2 \end{aligned}$$

On se rend alors compte que dans l'expression exacte, nous avons deux termes en compétition : l'exponentielle qui peut devenir très proche de 1, et le terme en $\cos((2k+1)\pi \sin(\theta))$ qui peut devenir négatif. L'idée est de faire une disjonction de cas suivant l'importance de $\cos(\theta)$.

On se donne δ_k que l'on se fixera plus tard, et l'on fait deux cas en utilisant que dans le domaine considéré les angles ont des cosinus négatifs.

Cas 1 : $\cos(\theta) \leq -\delta_k$.

Ce cas est le plus simple, car il suffit de retomber sur l'inégalité triangulaire :

$$|1-e^p| \geq 1-|e^p| = 1-e^{(2k+1)\pi \cos(\theta)} \geq 1-e^{-(2k+1)\delta_k}$$

Ceci nous donne une première condition sur δ_k . Il faudra le choisir de telle manière que $(2k+1)\delta_k > c > 0$.

Cas 2 : $\cos(\theta)^2 \leq \delta_k^2$.

On veut alors donner une condition sur δ_k qui assure que $\cos((2k+1)\pi \sin(\theta))$ soit négatif.

Nous avons pour cela que $1 \geq \sin(\theta)^2 \geq 1-\delta_k^2$, et donc que

$$(2k+1)\pi \geq (2k+1)\pi |\sin(\theta)| \geq (2k+1)\pi \sqrt{1-\delta_k^2}$$

On choisit alors δ_k de telle manière que $(2k+1)\pi\sqrt{1-\delta^2} \geq (2k+\frac{1}{2})\pi$, par exemple $\delta_k^2 = 1 - (\frac{4k+1}{4k+2})^2$, qui vérifie également que $((2k+1)\delta_k)^2 = (2k+1)^2 - (2k+\frac{1}{2})^2 = 2k+\frac{3}{4}$.

Dans ce cas, par décroissance de \cos sur $[(2k+\frac{1}{2})\pi; (2k+1)\pi]$, on trouve bien que

$$\cos((2k+1)\pi \sin(\theta)) \leq \cos((2k+\frac{1}{2})\pi) = 0.$$

Ceci nous assure finalement que

$$|1 - e^p|^2 \geq \left(1 - e^{(2k+1)\pi \cos(\theta)} \cos((2k+1)\pi \sin(\theta))\right)^2 \geq 1$$

Comme dans les deux cas, $|1 - e^p|$ est minoré, nous avons bien que $\sup_{\gamma_3} |F(p)| \rightarrow 0$.

Munie de cette majoration, nous pouvons utiliser le deuxième lemme de Jordan pour conclure que

$$\int_{\gamma_3} F(p)e^{pt} dp \rightarrow 0.$$

En fait, un raisonnement similaire permet de conclure que

$$\int_{\gamma_2} F(p)e^{pt} dp \rightarrow 0,$$

$$\int_{\gamma_4} F(p)e^{pt} dp \rightarrow 0.$$

Calculons à présent les résidus. Seul le deuxième terme de la somme est pertinent, $p \mapsto \frac{1}{p^2}$ n'ayant aucun résidu. Remarquons pour le calcul que les singularités en $2i\pi\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sont des pôles simples pour obtenir

$$\text{Res}(F(p)e^{pt}, 2i\pi k) = \frac{1 + e^{-2i\pi k}}{2(2i\pi k)(-e^{-2i\pi k})} e^{2i\pi kt} = -\frac{e^{2i\pi kt}}{2i\pi k}.$$

Pour le résidu en 0, on fait un développement asymptotique :

$$\frac{1}{2p} \frac{1 + e^{-p}}{1 - e^{-p}} = \frac{1}{2p} (2 - p + o(p)) \frac{1}{p - \frac{p^2}{2} + o(p^2)} = \frac{1}{2p^2} (2 - p + o(p)) (1 - \frac{p}{2} + o(p)) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right).$$

On en déduit donc que

$$\text{Res}(F(p)e^{pt}, 0) = 1.$$

Finalement, grâce au théorème des résidus, on sait que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{D^\dagger} F(p)e^{pt} dp = \lim_{k \rightarrow +\infty} 1 + \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n \text{Res}(F(p)e^{pt}, 2i\pi k).$$

Ce qui nous donne l'expression

$$f(t) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi k} \frac{e^{2i\pi kt} - e^{-2i\pi kt}}{2i} = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi kt)}{\pi k}.$$

Remarque : On reconnaît là une série de Fourier.

Transformée en Z

La correction des exercices de la page 63

19) On considère un compte en banque. On note $a(n)$ la balance du compte au début de chaque mois. Supposons que le compte contienne P euros au début du premier mois, puis que l'on fasse un dépôt de t euros chaque mois dans ce compte, auquel s'ajouteront des intérêts composés de $r \cdot 100\%$ par mois.

- Traduire l'énoncé en une équation sur la suite a .

En écrivant chaque hypothèse, la présence de P euros au début du premier mois revient à un dépôt ponctuel lors du mois 0. Des intérêts composés reviennent à multiplier chaque mois le contenu précédent du compte par $1 + r$. Finalement, on obtient :

$$a(n+1) = (1+r)a(n) + P\delta_{-1}(n) + t1_{n \geq 0}.$$

- Donner la transformée en Z A de a , ainsi que sa décomposition en éléments simple.

Supposons que a admette une transformée en Z, nous aurons alors pour $|z|$ assez grand que

$$zA(z) = (1+r)A(z) + Pz + \frac{t}{1 - \frac{1}{z}}.$$

Ceci nous donne alors

$$A(z) = \frac{Pz(z-1) + tz}{(z-1)(z-(1+r))}.$$

On écrit alors la décomposition en éléments simple pour obtenir

$$A(z) = z \left(\frac{P - \frac{t}{r}}{z - (1+r)} - \frac{t/r}{z - 1} \right)$$

- En déduire une expression explicite de a .

On trouve alors, soit à l'aide des tables, soit en écrivant le développement de Laurent de A que

$$a(n) = (P + \frac{t}{r})(1+r)^n - \frac{t}{r} \text{ si } n \geq 0, \text{ 0 sinon.}$$

20) (Examen 2024)

- Calculer la transformée en Z de la suite $x(n)$ définie par

$$x(n) = e^{in\theta} u(n) \quad \text{avec} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

où $u(n)$ est l'échelon de Heaviside défini par $u(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Préciser la région de convergence de $X(z)$. En déduire la transformée en Z de $\cos(n\theta)u(n)$ en fonction de $\cos \theta$.

Avec la définition, pour $z \in D$, on a que

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\theta} z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{i\theta}}{z} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{e^{i\theta}}{z}} \end{aligned}$$

Et comme la série converge pour $|\frac{e^{i\theta}}{z}| < 1$, on obtient au passage que la région de convergence est $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| > 1\}$.

Attention, comme à priori $z \in \mathbb{C}$, l'on ne pourra pas dire que $TZ[Re(v(n))](z) = Re(TZ[v(n)](z))$ sans argument supplémentaire d'holomorphe et d'unicité de continuation (notions hors programme). Il vaut donc mieux passer par les formules d'Euler. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} 2TZ[\cos(n\theta)u(n)](z) &= TZ[e^{in\theta}u(n)](z) + TZ[e^{-in\theta}u(n)](z) = \frac{1}{1 - \frac{e^{i\theta}}{z}} + \frac{1}{1 - \frac{e^{-i\theta}}{z}} \\ &= \frac{z}{z - e^{i\theta}} + \frac{z}{z - e^{-i\theta}} \\ &= \frac{z(z - e^{-i\theta})}{z^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})z + 1} + \frac{z(z - e^{i\theta})}{z^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})z + 1} \\ &= \frac{z(2z - e^{-i\theta} - e^{i\theta})}{z^2 - (e^{i\theta} + e^{-i\theta})z + 1} \\ &= \frac{2z(z - \cos(\theta))}{z^2 - 2\cos(\theta)z + 1} \end{aligned}$$

Donc on obtient $TZ[\cos(n\theta)u(n)](z) = \frac{z(z - \cos(\theta))}{z^2 - 2\cos(\theta)z + 1}$ avec comme domaine de convergence $|z| > 1$.

Attention à bien simplifier jusqu'au bout afin d'exprimer l'expression en fonction de $\cos(\theta)$.

2. Par utilisation de la transformée en Z, résoudre l'équation de récurrence

$$x(n+1) - 2x(n) = r(n)$$

avec $x(0) = 1$ où $r(n)$ est la rampe définie par $r(n) := \begin{cases} n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On peut tout de suite remarquer que $r(n) = nu(n)$, donc avec le formulaire, $TZ(r)(z) = -z \frac{dTZ(u)}{dz}$, et donc

$$TZ(r)(z) = -z \frac{-1}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Prenons alors l'équation équivalente dans le domaine Z :

$$zX(z) - 2X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Ceci revient alors à

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)(z-1)^2}.$$

Avec une décomposition en éléments simples, on trouve :

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{2}{z-2} - \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{2}{1-z} \\ &= \frac{z}{z-2} - \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{1-z}. \end{aligned}$$

Alors, avec le formulaire, et en notant u l'échelon de Heaviside,

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{\frac{z}{2}}{\frac{z}{2} - 1} - \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} \\ &= TZ[u(n)](\frac{z}{2}) - TZ[r(n)](z) - TZ[u(n)](z) \\ &= TZ[2^n u(n)](z) - TZ[r(n)](z) - TZ[u(n)](z) \end{aligned}$$

Finalement l'on obtient qu'une solution particulière de l'équation de récurrence est :

$$x(n) = (2^n - n - 1) u(n)$$

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $(c2^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ avec c un scalaire.

Nous pouvons alors conclure que l'unique solution de l'équation vérifiant $x(0) = 1$ est la suite (v_n) où

$$v_n := (2^n - n - 1) u(n) + 2^n.$$

Annexe A

Dérivation sous le signe intégral de fonctions holomorphes

Rappelons tout d'abord le théorème général de dérivation sous l'intégrale de Lebesgue pour les fonctions complexes :

Théoreme 61 : Admis, cf cours d'intégration

Soit $f : (z, x) \in \Omega \times X \mapsto f(z, x)\mathbb{C}$ où Ω est un ouvert de \mathbb{C} et (X, \mathcal{T}, μ) est un espace mesuré^a. On suppose

1. (*mesurabilité et intégrabilité*) Pour tous $z \in \Omega$, la fonction $x \in X \mapsto f(z, x)$ est mesurable et intégrable.
2. (*dérivabilité*) Pour presque tous $x \in X$, la fonction $z \mapsto f(z, x)$ est dérivable sur Ω .
3. (*domination*) Pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe une boule ouverte $B(z_0, \rho)$ et une fonction $h \in L^1(X, \mu)$ intégrable telle que pour presque tout $x \in X$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} f(z, x) \right| \leq h(x).$$

Alors $F : z \mapsto \int_X f(z, x) d\mu(x)$ existe, est dérivable de dérivée

$$F'(z) = \int_X \frac{\partial}{\partial z} f(z, x) d\mu(x).$$

^a. Par exemple la mesure de Lebesgue, qui donnera un résultat sur l'intégrale de Riemann, ou encore la mesure de comptage qui donnera un résultat pour les séries fonctionnelles.

En fait, une fois que nous avons la formule intégrale de Cauchy 2.2.2, nous avons un bien meilleur résultat. Nous n'avons plus besoin de dominer la dérivée, mais uniquement la fonction ! (penser à des fonctions fortement oscillantes convergeant vers une fonction pour voir à quel point ceci peut sembler contre-intuitif).

Théoreme 62 :

Soit $f : (z, x) \in \Omega \times X \mapsto f(z, x) \in \mathbb{C}$ où Ω est un ouvert de \mathbb{C} et (X, \mathcal{T}, μ) est un espace mesuré. On suppose

1. (*mesurabilité*) Pour tout $z \in \Omega$, la fonction $x \in X \mapsto f(z, x)$ est mesurable.
2. (*dérivabilité*) Pour tout $x \in X$, la fonction $z \mapsto f(z, x)$ est holomorphe sur Ω .
3. (*domination*) Pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe une boule ouverte $B(z_0, \rho)$ et une fonction $h \in L^1(X, \mu)$ intégrable telle que pour presque tout $x \in X$, et tous $z \in \overline{B(z_0, \rho)}$,

$$|f(z, x)| \leq h(x).$$

Alors $F : z \mapsto \int_X f(z, x) d\mu(x)$ existe, est dérivable de dérivées successives

$$F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n}{\partial z^n} f(z, x) d\mu(x).$$

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$, et ρ et h associé par la troisième hypothèse. Du fait de l'intégrabilité de h , F est bien défini.

Soit $x \in X$ tel que $f(\cdot, x)$ soit holomorphe, et soient z un élément de $B(z_0, \frac{\rho}{2})$. D'après la formule de Cauchy, nous aurons alors que

$$f(z, x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \overline{B}(z_0, \rho)} \frac{f(w, x)}{w - z} dw.$$

Ainsi, pour $z \neq z'$ dans cette boule,

$$f(z, x) - f(z', x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \overline{B}(z_0, \rho)} \frac{f(w, x)(z - z')}{(w - z)(w - z')} dw,$$

$$\frac{f(z, x) - f(z', x)}{z - z'} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \overline{B}(z_0, \rho)} \frac{f(w, x)}{(w - z)(w - z')} dw.$$

Or, comme $(z, z') \in B(z_0, \frac{\rho}{2})$, ils ne sont pas trop proches du bord, et donc $|\frac{f(w, x)}{(z - w)(z' - w)}| \leq \frac{4}{\rho^2}$

$$\left| \frac{f(z, x) - f(z', x)}{z - z'} \right| \leq \frac{4}{\rho} h(x)$$

Finalement par le théorème précédent, F' existe et vaut

$$F'(z) = \int_X \frac{\partial}{\partial z} f(z, x) d\mu(x).$$

Pour les ordres supérieurs, il s'agit de faire une récurrence en remarquant pour l'hérédité que l'on a montré que $|\frac{\partial}{\partial z} f(z, x)| \leq \frac{4}{\rho} h(x)$ sur $B(z_0, \frac{\rho}{2})$, ce qui permet de réutiliser le résultat que nous venons de montrer. \square

Annexe B

Surjectivité de l'exponentielle complexe

Le but de cette annexe est de démontrer le fait suivant :

Proposition 63 :

L'exponentielle complexe $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ est une application surjective.

Démonstration. Cette démonstration repose principalement sur le lemme suivant :

Lemme : Soit $g : t \in [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^*$ une application réelle de classe C^1 avec $a < b$, alors il existe une application $h : t \in [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $g = e^h$.

Démonstration. Donnons-nous une telle application g , et supposons sans perte de généralité que $g(a) = 1$. Posons alors l'application $f : t \mapsto \frac{g'(t)}{g(t)}$ et $h : t \mapsto \int_a^t f(x)dx$. Nous voulons montrer que h convient. D'abord, comme f est une application continue, h est bien défini et dérivable. Considérons maintenant $k : t \mapsto g(t)e^{-h(t)}$, qui est dérivable comme produit et composition de fonctions dérivables. Sa dérivée vérifie pour $t \in [a, b]$

$$k'(t) = g'(t)e^{-h(t)} - h'(t)g(t)e^{-h(t)} = g'(t)e^{-h(t)} - g'(t)e^{-h(t)} = 0.$$

Ainsi, comme la dérivée de k s'annule sur l'intervalle $[a, b]$, k est constant égal à $g(a)e^0 = 1$. D'où l'égalité $g = e^h$. \square

Pour conclure la preuve de la propriété, il ne nous reste plus qu'à remarquer que \mathbb{C}^* est connexe par arc C^1 , et donc pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ tel que $g(0) = 1$ et $g(1) = z$. Alors, l'application h fournit par le lemme vérifie que $e^{h(1)} = g(1) = z$, ce qui montre bien que l'exponentielle est surjective. \square

Remarque : Le lemme dans la preuve semble contredire le fait qu'il n'existe pas de logarithme complexe continu et défini en tout point de \mathbb{C}^* . Mais il n'en est rien, puisque nous avons uniquement trouvé un "logarithme" le long d'un chemin.

Bibliographie

- [Die80] Jean DIEUDONNÉ : *Calcul infinitésimal*. Hermann, 1980.
- [Jol16] P. JOLISSAINT : *Fonctions d'une variable complexe : théorie de Cauchy élémentaire et applications*. Références sciences. Ellipses, 2016.
- [Lan93] Serge LANG : *Complex analysis*. Graduate texts in mathematics 103. Springer, 3e édition édition, 1993.
- [MH06] John H. MATHEWS et Russell W. HOWELL : *Complex Analysis for Mathematics and Engineering*. Jones and Bartlett Publishers, Inc., USA, 2006.
- [Pag61] W.R.L. PAGE : *Complex Variables and the Laplace Transform for Engineers*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1961.
- [Pet83] R. PETIT : *L'outil mathématique : distributions, convolution, transformations de Fourier et de Laplace, fonctions d'une variable complexe*. Collection licence et maîtrise de physique. Masson, 1983.
- [Phi20] E.G. PHILLIPS : *Functions of a Complex Variable*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2020.
- [Rud95] W. RUDIN : *Analyse réelle et complexe*. Masson, 1995.
- [SS93] E.B. SAFF et A.D. SNIDER : *Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics, Science, and Engineering*. Prentice Hall, 1993.
- [Whi96] 1873-1956 WHITTAKER, Edmund Taylor : *A course of modern analysis*. Cambridge mathematical library, 4th edition édition, 1996.
- [Wid29] D. V. WIDDER : A generalization of dirichlet's series and of laplace's integrals by means of a stieltjes integral. *Transactions of the American Mathematical Society*, 31(4) :694–743, 1929.