Variables complexes

Transformée de Laplace – Transformée en Z

Nicolas Dobigeon

Université de Toulouse, IRIT/INP-ENSEEIHT
Institut Universitaire de France (IUF)
Artificial and Natural Intelligence Toulouse Institute (ANITI)

http://www.enseeiht.fr/~dobigeon
nicolas.dobigeon@enseeiht.fr

Le cadre

Volume horaire

- 5 séances de cours de 1h45,
- 3 séances de TD de 1h45,
- 1 examen écrit de 1h

La bibliographie

- Ces slides
- Livres
  - S. D. Chatterji, Cours d'analyse (vol. 2), Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1997
  - Spiegel, Variables complexes (cours et problèmes), Série Schaum, McGraw Hill., 1973

La motivation

Applications

- Analyse et calcul numérique,
- Transformée de Laplace
  Théorie des circuits,
- Transformée en Z
  Systèmes échantillonnés,
  Filtrage numérique,
  Traitement numérique du signal,

Les pré-requis

- Algèbre usuelle des nombres complexes : propriétés, géométrie associée la représentation vectorielle,
- Fonctions différentiables de deux variables réelles,
- Intégrales curvilignes

L'aspect original de l'application de ces éléments de base nécessite une étude minutieuse et détaillée.

Plan du cours

Plan du cours

Plan du cours

Le plan complexe

Le plan complexe est le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; u, v)$. La correspondance

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \mapsto & z = x + iy \end{array} \right.$$

est une bijection.
On confond le point $M(x, y)$ et son affixe $z = x + iy$.
Si $z \neq 0$, la représentation du nombre complexe z sous la forme module/argument s'écrit

$$z = \rho e^{i\theta}$$

où $\rho = |z| = OM$ est le module de z et $\theta = \arg z$ est une mesure en radians de l'angle $\left(u, \overrightarrow{OM}\right)$ définie modulo 2π c'est-à-dire à $2k\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$.

Fonction complexe de la variable z

A toute fonction f de la variable complexe :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z = x + iy & \mapsto & f(z) = P(x,y) + iQ(x,y) \end{cases}$$

on associe une fonction F :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) \end{cases}$$

Plan du cours

Limites - continuité

$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|z\| = |z|$.
Soient f une fonction de la variable complexe et $z_0 = x_0 + iy_0$ et l deux nombres complexes.

Définition : limite

$$\lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = l \text{ ou } \ f(z) \underset{z \longrightarrow z_0}{\longrightarrow} l$$

signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad |z - z_0| < \eta \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$$

Définition : continuité

$$\begin{aligned} f \text{ continue en } z_0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \lim_{z \longrightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \\ &\Longleftrightarrow \quad P(x, y) \text{ et } Q(x, y) \text{ continues en } (x_0, y_0) \end{aligned}$$

Limites - continuité

On admettra sans démonstration que les opérations sur les limites ou les fonctions continues sont identiques à celles obtenues pour des fonctions de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Attention !

Si $P(x,y)$ continue au point (x_0,y_0), alors

$$\begin{cases} x \mapsto P(x,y_0) & \text{est continue en} \quad x = x_0 \\ y \mapsto P(x_0,y) & \text{est continue en} \quad y = y_0 \end{cases}$$

Mais la réciproque est fausse !

Infini complexe

L'infini complexe noté ∞ est l'unique nombre complexe satisfaisant les propriétés suivantes avec $a \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \infty \times \infty &= \infty, |\infty| = \infty \\ \infty / a &= \infty, a/\infty = 0, a \times \infty = \infty \end{aligned}$$

- Représentation sur la sphère de Poincaré,
- Extensions des notions de limites au voisinage de l'infini.

Plan du cours

Plan du cours

Fonctions algébriques

Fonctions	**Définition**	**Continuité**	T_{G} **associée**
$z \longmapsto z + a$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	Translation
$z \longmapsto a\ z$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$	Similitude
$z \longmapsto \frac{1}{z}$	$\mathbb{C}^*$	$\mathbb{C}^*$	Inversion puis symétrie Ox
$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$	$\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$	$\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$	...

Plan du cours

Fonction exponentielle

Définition

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Propriétés

$$\begin{aligned} e^z\big|_{z=x} &= e^x \\ e^{z_1+z_2} &= e^{z_1} e^{z_2} \\ e^{x+iy} &= e^x (\cos y + i \sin y) \\ e^{-z} &= \frac{1}{e^z} \end{aligned}$$

On retrouve les mêmes relations fonctionnelles que dans $\mathbb{R}$.

Fonctions hyperboliques et trigonométriques

Fonctions hyperboliques

$$ch\ z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad sh\ z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad thz = \frac{shz}{chz}$$

Exemple : résolution de $ch\ z = 0$.

Fonctions trigonométriques

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

Exemple : résolution de $sin\ z = 2$.

Fonctions hyperboliques et trigonométriques

Propriétés

Fonctions	Ensemble de définition	Ensemble de Continuité
exp	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
ch	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
sh	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
th	$\mathbb{C}\setminus\left\{i\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right), k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{C}\setminus\left\{i\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right), k\in\mathbb{Z}\right\}$
cos	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
sin	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}$
tan	$\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

Formules de passage

$$\left\{\begin{array}{c} \cos iz = ch\ z \\ \sin iz = i\ sh\ z \\ \tan\ iz = i\ th\ z \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{c} ch\ iz = \cos z \\ sh\ iz = i \sin z \\ th\ iz = i\ \tan\ z \end{array}\right.$$

Plan du cours

Fonctions multiformes

A tout z de $\mathbb{C}$ correspond une seule valeur de e^z. Par contre à tout z de $\mathbb{C}^*$, correspond une infinité de valeurs de $\arg z$. Pour distinguer ces deux situations, on définit des fonctions dites **uniformes** ou **multiformes**

Définitions

- Une fonction f est appelée **uniforme** si à chaque valeur de z ne correspond qu'une seule valeur de $f(z)$.
- Une fonction f est appelée **multiforme** si à chaque valeur de z correspondent plusieurs valeurs de $f(z)$.

Fonctions multiformes

A tout z de $\mathbb{C}$ correspond une seule valeur de e^z. Par contre à tout z de $\mathbb{C}^*$, correspond une infinité de valeurs de $\arg z$. Pour distinguer ces deux situations, on définit des fonctions dites **uniformes** ou **multiformes**

Définitions

- Une fonction f est appelée **uniforme** si à chaque valeur de z ne correspond qu'une seule valeur de $f(z)$.
- Une fonction f est appelée **multiforme** si à chaque valeur de z correspondent plusieurs valeurs de $f(z)$.

Fonctions multiformes

Exemples

- La fonction "argument d'un nombre complexe" :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \arg z \end{array}$$

  est une fonction multiforme.
- Les fonctions vues précédemment sont uniformes.

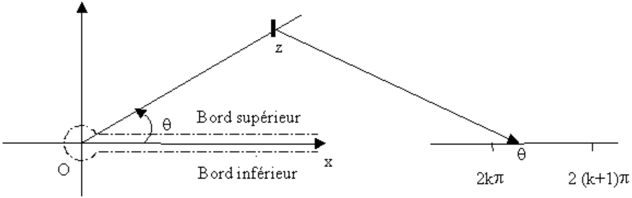
Etude des fonctions multiformes

Pour étudier les fonctions multiformes, on les "rendra uniformes" par la définition de leurs *déterminations de rang k*.

Fonction argument

La détermination de **rang k** de l'argument est

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash Ox^+ & \longrightarrow &]2k\pi, 2(k+1)\pi[\\ z & \longmapsto & \theta = \arg_k z \end{array}$$



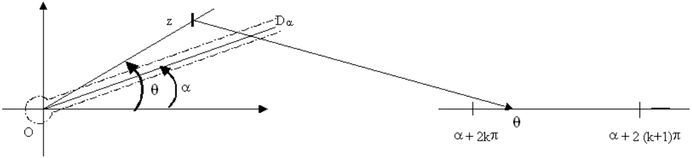
Remarques

- Le demi-axe Ox^+ est appelé l'axe de coupure.
- Quand $k = 0$, on parle de "détermination principale".

Fonction argument : autre définition

La détermination de **rang k** de l'argument est

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}\backslash D_\alpha & \longrightarrow &]\alpha+2k\pi, \alpha+2(k+1)\pi[\\ z & \longmapsto & \theta = \arg_{k.\alpha} z \end{array}$$



Remarques

- Avec cette définition, la demi-droite D_α d'origine O et d'angle α est la **coupure**.

Fonctions multiformes

Définitions

- Valeurs de continuité : Valeurs sur les bords supérieur et inférieur de la coupure.
- Le point O origine de la coupure est appelé **point de branchement** ou **point de ramification**.

Remarques

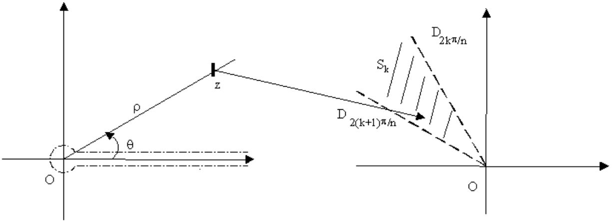
- Représentation de la coupure,
- Chemins fermés entourant le point de branchement $\rightarrow$ changement de détermination
- Chemins fermés n'entourant pas le point de branchement $\rightarrow$ pas de changement de détermination

Fonctions puissance

La détermination de **rang k** de $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$ est

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{C} \setminus Ox^+ & \to & S_k \\ z & \mapsto & z_{(k)}^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \; e^{i\frac{1}{n}\arg_k(z)} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}} \end{array}\right. \qquad \theta \in]0, 2\pi[$$

Cette correspondance est une bijection de $\mathbb{C} \setminus Ox^+$ dans le secteur ouvert S_k délimité par les deux droites $D_{\frac{2k\pi}{n}}$ et $D_{\frac{2(k+1)\pi}{n}}$ issues de O et faisant respectivement avec Ox^+ les angles $\frac{2k\pi}{n}$ et $\frac{2(k+1)\pi}{n}$.



Fonctions puissance

Extensions

- Fonction $z \mapsto (z-a)^{\frac{1}{n}}$.
- Fonction $z \mapsto (z-a)^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

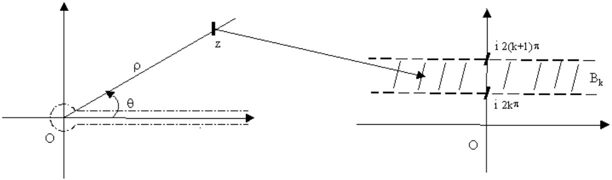
Exemple

Détermination de $z \mapsto (z+1)^{\frac{1}{2}}$.

Fonction logarithme

La détermination de **rang k** de $z \mapsto \log(z)$ est

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \mathbb{C} \setminus Ox^+ & \to & B_k & \\ z = |z|e^{i\theta + i2k\pi} & \mapsto & \log_k(z) & = \ln|z| + \arg_k(z) \\ & & & = \ln\rho + i\theta + i2k\pi \end{array} \right.$$



Extension

- Fonction $z \mapsto z^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$ définie par $z_k^\alpha = e^{\alpha \log_k(z)}$.

Plan du cours

Plan du cours

Fonctions différentiable à 2 variables

Une fonction $P(x, y)$ est différentiable au point (x_0, y_0) lorsqu'elle est définie dans un ouvert contenant ce point et que :

$$\Delta P = A(x_0, y_0)\, h + B(x_0, y_0)\, k + \|(h, k)\|\, \varepsilon(h, k)$$

avec

$$\Delta P = P(x_0 + h, y_0 + k) - P(x_0, y_0)$$

et

$$\lim_{\|(h,k)\| \to 0} \varepsilon(h, k) = 0$$

Plan du cours

Définition de la dérivabilité

Définition

$f(z)$ dérivable en z_0 si et seulement si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. On note :

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Exemple 1

$f(z) = z$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1, \text{ donc } f \text{ est dérivable en } z_0.$$

Exemple 2

$f(z) = z^2$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0, \text{ donc } f \text{ est dérivable en } z_0.$$

Définition de la dérivabilité

Définition

$f(z)$ dérivable en z_0 si et seulement si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. On note :

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Exemple 1

$f(z) = z$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1, \text{ donc } f \text{ est dérivable en } z_0.$$

Exemple 2

$f(z) = z^2$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0, \text{ donc } f \text{ est dérivable en } z_0.$$

Définition de la dérivabilité

Définition

$f(z)$ dérivable en z_0 si et seulement si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. On note :

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Exemple 1

$f(z) = z$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1, \text{ donc } f \text{ est dérivable en } z_0.$$

Exemple 2

$f(z) = z^2$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0, \text{ donc } f \text{ est dérivable en } z_0.$$

Définition de la dérivabilité

Contre-exemple

$g(z) = \overline{z}$

$$\begin{aligned}\frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0} &= \frac{(x-x_0)-i\,(y-y_0)}{(x-x_0)+i\,(y-y_0)}\\ &= \frac{1-i\,\frac{y-y_0}{x-x_0}}{1+i\,\frac{y-y_0}{x-x_0}} = \frac{1-im}{1+im}\end{aligned}$$

qui dépend de la pente m du chemin donc :

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0} \text{ n'existe pas}$$

$\Rightarrow f$ n'est pas dérivable en z_0.

Définition de la dérivabilité

Contre-exemple

$g(z) = \overline{z}$

$$\begin{aligned}\frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0} &= \frac{(x-x_0)-i\,(y-y_0)}{(x-x_0)+i\,(y-y_0)}\\ &= \frac{1-i\,\frac{y-y_0}{x-x_0}}{1+i\,\frac{y-y_0}{x-x_0}} = \frac{1-im}{1+im}\end{aligned}$$

qui dépend de la pente m du chemin donc :

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0} \text{ n'existe pas}$$

$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable en z_0.

Définition de la dérivabilité

Contre-exemple

$g(z) = \overline{z}$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} &= \frac{(x - x_0) - i\,(y - y_0)}{(x - x_0) + i\,(y - y_0)} \\ &= \frac{1 - i\,\frac{y - y_0}{x - x_0}}{1 + i\,\frac{y - y_0}{x - x_0}} = \frac{1 - im}{1 + im} \end{aligned}$$

qui dépend de la pente m du chemin donc :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} \text{ n'existe pas}$$

$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable en z_0.

C.N.S. de dérivabilité

Propriété

Une fonction de la variable complexe f est dérivable au point $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si :

- $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont différentiables au point (x_0, y_0) et
- les conditions de Cauchy sont vérifiées :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & = & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) & = & -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

Remarque

La démonstration de la C.N.S. de dérivabilité permet d'obtenir

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \\ f'(z_0) &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

C.N.S. de dérivabilité

Propriété

Une fonction de la variable complexe f est dérivable au point $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si :

- $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont différentiables au point (x_0, y_0) et
- les conditions de Cauchy sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) & = & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) & = & -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \end{array} \right.$$

Remarque

La démonstration de la C.N.S. de dérivabilité permet d'obtenir

$$\begin{array}{rcl} f'(z_0) & = & \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) \\ f'(z_0) & = & \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) - i\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \end{array}$$

Plan du cours

Fonctions holomorphes

Définition

On appelle fonction holomorphe sur un ouvert A de $\mathbb{C}$ une fonction qui est dérivable en tout point de A. Notation : $f \in \mathcal{H}/A$.

Propriétés

Les propriétés sont identiques à celles des fonctions dérivables dans $\mathbb{R}$. Soient f et $g \in \mathcal{H}/A$.

- $\lambda f + \mu g \in \mathcal{H}/A$ et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$
- $fg \in \mathcal{H}/A$ et $(fg)' = f'g + fg'$
- Si $\forall z \in A, g(z) \neq 0$, alors :

$$\frac{1}{g} \in \mathcal{H}/A \text{ et } \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

- Si $f \in \mathcal{H}/A$, $g \in \mathcal{H}/f(A)$, alors :
  $(g \circ f) \in \mathcal{H}/A$ et $(g \circ f)' = (g' \circ f) f'$
- Si f est bijective de A sur $f(A)$, alors :

$$f^{-1} \in \mathcal{H}/f(A) \text{ et } \left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Fonctions holomorphes

Définition

On appelle fonction holomorphe sur un ouvert A de $\mathbb{C}$ une fonction qui est dérivable en tout point de A. Notation : $f \in \mathcal{H}/A$.

Propriétés

Les propriétés sont identiques à celles des fonctions dérivables dans $\mathbb{R}$. Soient f et $g \in \mathcal{H}/A$.

- $\lambda f + \mu g \in \mathcal{H}/A$ et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f\,' + \mu g'$
- $fg \in \mathcal{H}/A$ et $(fg)' = f\,'g + fg'$
- Si $\forall z \in A, g(z) \neq 0$, alors :

$$\frac{1}{g} \in \mathcal{H}/A \text{ et } \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

- Si $f \in \mathcal{H}/A$, $g \in \mathcal{H}/f(A)$, alors :
  $(g \circ f) \in \mathcal{H}/A$ et $(g \circ f)' = (g' \circ f)\, f\,'$
- Si f est bijective de A sur $f(A)$, alors :

$$f^{-1} \in \mathcal{H}/f(A) \text{ et } \left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f\,' \circ f^{-1}}$$

Dérivation des fonctions usuelles

Fonctions algébriques

On dérive formellement par rapport à z comme pour les fonctions de la variable réelle par rapport à x :

$$\begin{aligned}(az)' &= a \\ (z^m)' &= mz^{m-1}, \quad m \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Fonctions définies par des séries

Théorème de dérivation des séries entières :

La fonction $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$ de rayon de convergence R est holomorphe sur le disque ouvert $d(O, R)$. Sa dérivée est la somme de la série dérivée terme à terme. Ainsi

$$\begin{aligned}(e^z)' &= e^z \\ (chz)' &= shz \\ (\cos z)' &= -\sin z \\ &\text{etc } \ldots\end{aligned}$$

On dérive par rapport à z comme on dérive dans R par rapport à x.

Dérivation des fonctions usuelles

Fonctions algébriques

On dérive formellement par rapport à z comme pour les fonctions de la variable réelle par rapport à x :

$$\begin{aligned} (az)' &= a \\ (z^m)' &= mz^{m-1}, \quad m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Fonctions définies par des séries

Théorème de dérivation des séries entières :

La fonction $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$ de rayon de convergence R est holomorphe sur le disque ouvert $d(O, R)$. Sa dérivée est la somme de la série dérivée terme à terme. Ainsi

$$\begin{aligned} (e^z)' &= e^z \\ (chz)' &= shz \\ (\cos z)' &= -\sin z \\ &\ \text{etc} \ldots \end{aligned}$$

On dérive par rapport à z comme on dérive dans R par rapport à x.

Dérivation des fonctions multiformes

- **Dérivée de** $\log_k z$

$$Z = \log_k (z) = \ln \rho + i\theta + 2ik\pi$$

définie de $\mathbb{C} \setminus Ox^+$ dans B_k.
On rappelle que $\exp(\log_k(z)) = z$. La dérivation par la formule de la fonction réciproque donne :

$$\begin{aligned} z &= f(Z) \Longrightarrow z' = f'(Z) \\ Z &= f^{-1}(z) \Longrightarrow Z' = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} z &= \exp(Z) \Longrightarrow z' = \exp(Z) \\ Z &= \log_k(z) \Longrightarrow Z' = \frac{1}{\exp(\log_k(z))} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

La constante additive disparaît. Ainsi :

$$\boxed{\log_k z \text{ holomorphe sur } \mathbb{C} \setminus Ox^+ \text{ et } (\log_k)'(z) = \tfrac{1}{z}}$$

Dérivation des fonctions multiformes

- **Dérivée de** $z_{(k)}^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{C}$

$$z_{(k)}^{\alpha} = \exp\left(\alpha \log_k(z)\right)$$

On obtient par dérivée des fonctions composées :

$$\left[z_{(k)}^{\alpha}\right]' = \left[\alpha \left[\log_k(z)\right]\right]' \exp\left[\alpha \log_k(z)\right]$$

Donc :

$$\left[z_{(k)}^{\alpha}\right]' = \frac{\alpha}{z} z_{(k)}^{\alpha}$$

La dérivée possède la même constante multiplicative (on retrouve la même uniformité). Ainsi

$$\boxed{z_{(k)}^{\alpha} \text{ holomorphe sur } \mathbb{C} \setminus Ox^+ \text{ et } \left[z_{(k)}^{\alpha}\right]' = \frac{\alpha}{z} z_{(k)}^{\alpha}}$$

Plan du cours

Complément : fonctions harmoniques

Si on avait le temps...

Plan du cours

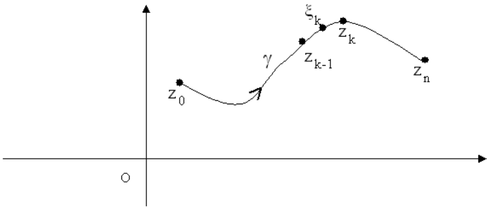
Plan du cours

Chemin

- Un **chemin** de $\mathbb{C}$ est une application continue $\gamma\ : [a, b] \to \mathbb{C}$, $[a, b]$ étant un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, γ s'appelle un **lacet**.
- γ est C^1 par morceaux si $\gamma'(t)$ existe et est continue sur les intervalles de $\mathbb{R}$ de la forme $[t_{j-1}, t_j]$ avec $t_0 = a < t_1 < ... < t_n = b$.

Intégrale curviligne complexe

Soit $f(z)$ définie sur un chemin C^1 par morceaux γ



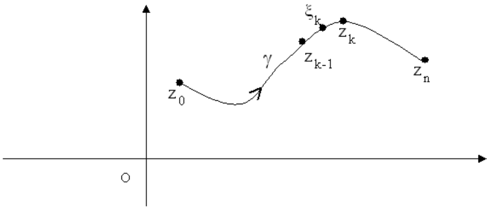
Soit la subdivision $\bigcup_{k=1}^{n} \widehat{z_{k-1}z_k}$ de ce chemin avec $\xi_k \in \widehat{z_{k-1}z_k}$,
$z_k = \gamma(t_k)$, $z_0 = \gamma(a)$ et $z_n = \gamma(b)$.

Définition :

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$$
$$\text{avec } \max_k |z_k - z_{k-1}| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Intégrale curviligne complexe

Soit $f(z)$ définie sur un chemin C^1 par morceaux γ



Soit la subdivision $\bigcup_{k=1}^{n} \widehat{z_{k-1}z_k}$ de ce chemin avec $\xi_k \in \widehat{z_{k-1}z_k}$,
$z_k = \gamma(t_k)$, $z_0 = \gamma(a)$ et $z_n = \gamma(b)$.

Définition :

$$\boxed{\begin{array}{c} \int_\gamma f(z)dz = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) \\ \text{avec } \max\limits_k |z_k - z_{k-1}| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \end{array}}$$

Intégrale curviligne complexe

Avec les notations suivantes

$$\begin{aligned} z_k &= x_k + iy_k \\ z_k - z_{k-1} &= \Delta x_k + i\Delta y_k \\ \xi_k &= a_k + ib_k \\ f(\xi_k) &= P(a_k, b_k) + iQ(a_k, b_k) \end{aligned}$$

on obtient

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(a_k, b_k)\Delta x_k - Q(a_k, b_k)\Delta y_k$$
$$+i \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} Q(a_k, b_k)\Delta x_k + P(a_k, b_k)\Delta y_k$$

avec $\max_k |\Delta x_k| \to 0$ et $\max_k |\Delta y_k| \to 0$. D'où

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (Pdx - Qdy) + i \int_\gamma (Qdx + Pdy)$$

Intégrale curviligne complexe

Conditions suffisantes d'existence

$$\boxed{\begin{array}{c} P \text{ et } Q \text{ continues sur } \gamma \\ \text{ou } f \text{ continue sur } \gamma \end{array}}$$

Calcul pratique : γ paramétré

$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt}$$

Chemins usuels

- Segment de droite parallèle à l'axe des abscisses,
  $z = x + iy_0$, $x \in [x_1, x_2]$
- Segment de droite parallèle à l'axe des ordonnées,
  $z = x_0 + iy$, $y \in [y_1, y_2]$
- Arc de cercle de rayon R_0
  $z = R_0 e^{i\theta}$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$
- Segment de droite passant par l'origine
  $z = \rho e^{i\theta_0}$, $\rho \in [\rho_1, \rho_2]$

Intégrale curviligne complexe

Conditions suffisantes d'existence

$$\boxed{\begin{array}{c} P \text{ et } Q \text{ continues sur } \gamma \\ \text{ou } f \text{ continue sur } \gamma \end{array}}$$

Calcul pratique : γ paramétré

$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt}$$

Chemins usuels

- Segment de droite parallèle à l'axe des abscisses,
  $z = x + iy_0,\ x \in [x_1, x_2]$
- Segment de droite parallèle à l'axe des ordonnées,
  $z = x_0 + iy,\ y \in [y_1, y_2]$
- Arc de cercle de rayon R_0
  $z = R_0 e^{i\theta},\ \theta \in [\theta_1, \theta_2]$
- Segment de droite passant par l'origine
  $z = \rho e^{i\theta_0},\ \rho \in [\rho_1, \rho_2]$

Intégrale curviligne complexe

Propriétés élémentaires de l'intégrale

a) Linéarité

$$\int_\gamma (\lambda f(z) + \mu g(z))dz = \lambda \int_\gamma f(z)dz + \mu \int_\gamma g(z)dz$$

b) Sens de parcours du chemin γ

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_{\gamma^+} f(z)dz$$

$\gamma^- = \gamma^+$ parcouru en sens inverse.

c) Intégrale d'une constante $f(z) = K$

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k - z_{k-1}) = K(z_n - z_0) = K(\gamma(b) - \gamma(a))$$

Intégrale curviligne complexe

Propriétés élémentaires de l'intégrale

a) Linéarité

$$\int_\gamma (\lambda f(z) + \mu g(z))dz = \lambda \int_\gamma f(z)dz + \mu \int_\gamma g(z)dz$$

b) Sens de parcours du chemin γ

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_{\gamma^+} f(z)dz$$

$\gamma^- = \gamma^+$ parcouru en sens inverse.

c) Intégrale d'une constante $f(z) = K$

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k - z_{k-1}) = K(z_n - z_0) = K(\gamma(b) - \gamma(a))$$

Intégrale curviligne complexe

Propriétés élémentaires de l'intégrale

a) Linéarité

$$\int_\gamma (\lambda f(z) + \mu g(z)) dz = \lambda \int_\gamma f(z) dz + \mu \int_\gamma g(z) dz$$

b) Sens de parcours du chemin γ

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = -\int_{\gamma^+} f(z) dz$$

$\gamma^- = \gamma^+$ parcouru en sens inverse.

c) Intégrale d'une constante $f(z) = K$

$$\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k - z_{k-1}) = K(z_n - z_0) = K(\gamma(b) - \gamma(a))$$

Plan du cours

Lemmes de Jordan

1er lemme de Jordan

Hypothèses

$C_r(a,r)$ arc de cercle de centre a et de rayon r

$\lim_{r\to 0(\text{ resp. } \infty)} \sup_{C_r} \; |(z-a)\, f(z)| = 0$

Conclusion

$$\boxed{\lim_{r\to 0(\text{ resp. } \infty)} \int_{C_r} f(z)dz = 0}$$

Preuve

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_r} f(z)dz\right| &= \left|\int_{\alpha}^{\beta} f(a+re^{i\theta}) rie^{i\theta} d\theta\right| \\
&\leqslant \int_{\alpha}^{\beta} \left|rf(a+re^{i\theta})\right| d\theta \\
&\leqslant (\beta-\alpha) \sup_{C_r} \; |(z-a)\, f(z)|
\end{aligned}$$

Lemmes de Jordan

2ième lemmes de Jordan

Hypothèse

$\lim_\infty \sup_{C_r} |f(z)| = 0$

Conclusions

$$\boxed{\begin{array}{lll} \lim_\infty & \int_{C_r} e^{imz} f(z)dz = 0 & \text{pour } m > 0 \text{ et } C_r = C_r^+ \\ \lim_\infty & \int_{C_r} e^{imz} f(z)dz = 0 & \text{pour } m < 0 \text{ et } C_r = C_r^- \\ \lim_\infty & \int_{C_r} e^{mz} f(z)dz = 0 & \text{pour } m < 0 \text{ et } C_r = C_r^d \\ \lim_\infty & \int_{C_r} e^{mz} f(z)dz = 0 & \text{pour } m > 0 \text{ et } C_r = C_r^g \end{array}}$$

Preuve :

$$\begin{aligned} |I_r| &= \left| \int_{C_r} e^{imz} f(z)dz \right| = \left| \int_0^\pi e^{imre^{i\theta}} f(re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq 2r \sup_{C_r} |f(z)| \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mr\sin\theta} d\theta \\ &\leq \sup_{C_r} |f(z)| \frac{\pi}{m}(1 - e^{-mr}) \text{ (car } \sin\theta \geqslant \frac{2\theta}{\pi}) \end{aligned}$$

Plan du cours

Théorème de Cauchy
Domaine 1 connexe (ou simplement connexe)

Hypothèses

f holomorphe sur Ω ouvert non vide de $\mathbb{C}$

Soit $D \subset \Omega$ un domaine simplement connexe de contour C

Conclusion

$$\boxed{\int_C f(z)dz = 0}$$

Preuve : utiliser la formule de Green Riemann

$$\int_{C^+} Adx + Bdy = \int\int_D \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dxdy$$

Théorème de Cauchy

Domaine n connexe - Généralisation

Exemple d'un domaine 2 connexe

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1^+} f(z)dz + \int_{C_2^-} f(z)dz = 0$$

Frontière orientée
$\overrightarrow{\tau}$ vecteur tangent
$\overrightarrow{n}$ normale intérieure orientée

$$(\overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{n}) = +\frac{\pi}{2}$$

Pour $\delta D = C_1^+ \cup C_2^-$, on a

$$\int_{\delta D} f(z)dz = 0$$

Théorème de Cauchy
Application

Soit f holomorphe sur un domaine simplement connexe D.

a) Définition de $\int_a^b f(z)dz$

Soient deux points a et b de D

Soient γ_1, γ_2 deux chemins inclus dans D d'origine a et d'extrémité b. Alors

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_a^b f(z)dz$$

b) Définition de $F_{z_0}(u) = \int_{z_0}^u f(z)dz,\ u \in \mathbb{C}$

$F_{z_0}(u)$ est indépendante du chemin joignant z_0 et u inclu dans D

$F_{z_0}(u)$ est une primitive de $f(z)$ telle que $F'_{z_0}(u) = f(u)$

Théorème de Cauchy
Application

Soit f holomorphe sur un domaine simplement connexe D.

a) Définition de $\int_a^b f(z)dz$

Soient deux points a et b de D

Soient γ_1, γ_2 deux chemins inclus dans D d'origine a et d'extrémité b. Alors

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_a^b f(z)dz$$

b) Définition de $F_{z_0}(u) = \int_{z_0}^u f(z)dz,\ u \in \mathbb{C}$

$F_{z_0}(u)$ est indépendante du chemin joignant z_0 et u inclu dans D

$F_{z_0}(u)$ est une primitive de $f(z)$ telle que $F'_{z_0}(u) = f(u)$

Plan du cours

Plan du cours

Théorème des résidus

Hypothèses

f holomorphe sur $\Omega \setminus \bigcup_j z_j$, Ω ouvert non vide de $\mathbb{C}$

z_j points singuliers isolés de f

$D \subset \Omega$ domaine simplement connexe de contour ∂D inclus dans Ω

Conclusion

$$\boxed{\int_{\partial D^+} f(z)dz = 2i\pi \sum_{z_j \in D} \mathrm{res} f(z_j)}$$

avec (définition de $\mathrm{res} f(z_j)$) :

$$\boxed{\mathrm{res} f(z_j) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+(z_j,r)} f(z)dz}$$

Remarques et définition

- **Point singulier isolé (psi)**
  z_j est un psi de $f(z)$ si et seulement si $\exists r > 0$ tel que f est holomorphe sur $d(z_j, r) \setminus \{z_j\}$, $d(z_j, r)$ désignant le disque de centre z_i et de rayon r_i.
- **Calcul du résidu à l'aide du développement de Laurent**
  Si z_j est un psi, on admet que f possède un développement dit développement de Laurent dans $d(z_j, r) \setminus \{z_j\}$:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_j)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_j)^n$$

On en déduit alors :

$$\int_{C^+(z_j, r)} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{C^+} \frac{b_n}{(z - z_j)^n} dz + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C^+} a_n (z - z_j)^n dz$$

Remarques et définition

- **Point singulier isolé (psi)**
  z_j est un psi de $f(z)$ si et seulement si $\exists r > 0$ tel que f est holomorphe sur $d(z_j, r) \backslash \{z_j\}$, $d(z_j, r)$ désignant le disque de centre z_i et de rayon r_i.
- **Calcul du résidu à l'aide du développement de Laurent**
  Si z_j est un psi, on admet que f possède un développement dit développement de Laurent dans $d(z_j, r) \backslash \{z_j\}$:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_j)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_j)^n$$

On en déduit alors :

$$\int_{C^+(z_j,r)} f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{C^+} \frac{b_n}{(z - z_j)^n} dz + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C^+} a_n (z - z_j)^n dz$$

Remarques et définition

On pose $z - z_j = re^{i\theta}$ et on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{b_n i d\theta}{r^{n-1} e^{i(n-1)\theta}} + i \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} a_n r^{n+1} e^{i(n+1)\theta} d\theta$$

Toutes les intégrales sont nulles (vérification facile) sauf :

$$\int_0^{2\pi} \frac{b_n i d\theta}{r^{n-1} e^{i(n-1)\theta}} \quad \text{avec} \quad n = 1$$

Donc :

$$\int_{C^+(z_j, r)} f(z) dz = \int_0^{2\pi} b_1 i d\theta = 2i\pi b_1$$

Conclusion : res$f(z_j)$ est le coefficient du terme en $\frac{1}{z - z_j}$ de la partie principale du dévt de Laurent de f .

Remarques et définition

- **Calcul des résidus pour un pôle d'ordre p**
  On effectue le développement de Taylor de $\varphi(z) = (z - z_j)^p f(z)$ qui est holomorphe sur $V(z_j)$

$$\varphi(z) = \varphi(z_j) + \ldots + \frac{(z - z_j)^{p-1}}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}_{(z_j)} + \ldots$$

d'où le développement de Laurent de f :

$$f(z) = \frac{\varphi(z_j)}{(z - z_j)^p} + \ldots + \frac{\varphi^{(p-1)}_{(z_j)}}{(p-1)!(z - z_j)} + \ldots$$

donc

$$\boxed{\operatorname{res} f(z_j) = \frac{1}{(p-1)!} \varphi^{(p-1)}_{(z_j)} = \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left[(z - z_j)^p f(z)\right]\Big|_{z=z_j}}$$

En pratique :

- pour $p > 2$, on effectue le développement de Laurent,
- pour $p = 2$, on peut utiliser $\operatorname{res} f(z_j) = \frac{d}{dz}(z - z_j)^2 f(z)\Big|_{z=z_j}$,
- pour $p = 1$, on a $\operatorname{res} f(z_j) = \lim_{z \to z_j} (z - z_j) f(z)$

Remarques et définition

- **Calcul des résidus pour un pôle d'ordre p**
  On effectue le développement de Taylor de $\varphi(z) = (z - z_j)^p f(z)$ qui est holomorphe sur $V(z_j)$

$$\varphi(z) = \varphi(z_j) + \ldots + \frac{(z - z_j)^{p-1}}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}_{(z_j)} + \ldots$$

  d'où le développement de Laurent de f :

$$f(z) = \frac{\varphi(z_j)}{(z - z_j)^p} + \ldots + \frac{\varphi^{(p-1)}_{(z_j)}}{(p-1)!(z - z_j)} + \ldots$$

  donc

$$\boxed{\operatorname{res} f(z_j) = \frac{1}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}_{(z_j)} = \frac{1}{(p-1)!}\,\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\left[(z - z_j)^p f(z)\right]\Big|_{z=z_j}}$$

En pratique :

- pour $p > 2$, on effectue le développement de Laurent,
- pour $p = 2$, on peut utiliser $\operatorname{res} f(z_j) = \frac{d}{dz}(z - z_j)^2 f(z)\Big|_{z=z_j}$,
- pour $p = 1$, on a $\operatorname{res} f(z_j) = \lim_{z \to z_j}(z - z_j) f(z)$

Remarques et définition

Cas particulier intéressant : z_j pôle d'ordre 1, $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z_j) \neq 0$
On développe $Q(z)$:

$$Q(z) = 0 + (z - z_j)Q'(z_j) + \frac{(z - z_j)^2}{2!}Q''(z_j) + \ldots$$

donc

$$\boxed{\lim_{z \to z_j} (z - z_j)f(z) = \frac{P(z_j)}{Q'(z_j)}}$$

Cette formule est intéressante pour certains calculs de résidus comme celui de $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ en $z = 0$. En effet :

$$\text{res} f\ (0) = \frac{P(0)}{Q'(0)} = \frac{1}{\cos 0} = 1$$

Plan du cours

Intégrales du type I : $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

Le plus souvent, on prend $f(z)$ et le contour est constitué d'une partie rectiligne qui donne I et de parties circulaires qui ferment le contour.
Exemple **:** Calculer

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$$

Intégrales contenant une fonction multiforme

Exemple : montrer que pour $a \in]0,1[$

$$J = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

Intégrales trigonométriques

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$$

où R est une fraction rationnelle. On pose $z = e^{i\theta}$ et on exprime $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de z.
On se ramène alors au calcul d'une intégrale sur le cercle unité.
Exemple **:** montrer que

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3\sin\theta} = \frac{\pi}{2}$$

Plan du cours

Application à la sommation de séries

Voir TD.

Plan du cours

Plan du cours

Définition

Ensemble des fonctions transformables

E est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}^+$ telles que

- f est localement intégrable i.e. $\int_0^A f(t)dt < \infty, \forall A$
- Il existe x_0 tel que $\int_0^\infty e^{-x_0 t} f(t)dt < \infty$

Transformée de Laplace

Pour $f \in E$, on définit sa transformée de laplace

$$\boxed{F(p) \triangleq \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt \qquad p \in \mathbb{C}}$$

Notation : $F(p) = TL(f(t))$

Définition

Ensemble des fonctions transformables

E est l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}^+$ telles que

- f est localement intégrable i.e. $\int_0^A f(t)dt < \infty, \forall A$
- Il existe x_0 tel que $\int_0^\infty e^{-x_0 t} f(t)dt < \infty$

Transformée de Laplace

Pour $f \in E$, on définit sa transformée de laplace

$$\boxed{F(p) \triangleq \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt \qquad p \in \mathbb{C}}$$

Notation : $F(p) = TL(f(t))$

Définition
Convergences

Convergence simple

Théorème 1
Si $F(p)$ existe pour $p = p_0 = x_0 + iy_0$ alors $F(p)$ existe $\forall p$ tel que$\mathrm{Re}p > \mathrm{Re}p_0 = x_0$

Conséquence : $\{x \in \mathbb{R}, F(p) < \infty\}$ admet une borne inférieure notée x_c appelée abscisse de convergence simple de F.

Convergence absolue

Théorème 2
Si $\int_0^\infty \left\|e^{-pt}f(t)\right\| dt$ existe pour $p = p_0 = x_0 + iy_0$ alors $\int_0^\infty \left\|e^{-pt}f(t)\right\| dt$ existe $\forall p$ tel que$\mathrm{Re}p > \mathrm{Re}p_0 = x_0$

Conséquence : $\left\{x \in \mathbb{R}, \int_0^\infty \left|e^{-pt}f(t)\right| dt < \infty\right\}$ admet une borne inférieure notée x_{ca} appelée abscisse de convergence absolue de F (on a bien sur $x_c \leq x_{ca}$)

Exemple : $f(t) = e^{kt}\sin\left[e^{kt}\right], k > 0$, $x_c = 0$ et $x_{ca} = k$.
Remarque : en pratique, on a le plus souvent $x_c = x_{ca}$

Définition
Convergences

Convergence simple

Théorème 1
Si $F(p)$ existe pour $p = p_0 = x_0 + iy_0$ alors
$F(p)$ existe $\forall p$ tel que$\mathrm{Re} p > \mathrm{Re} p_0 = x_0$

Conséquence : $\{x \in \mathbb{R}, F(p) < \infty\}$ admet une borne inférieure notée x_c appelée abscisse de convergence simple de F.

Convergence absolue

Théorème 2
Si $\int_0^\infty \left|e^{-pt} f(t)\right| \, dt$ existe pour $p = p_0 = x_0 + iy_0$ alors
$\int_0^\infty \left|e^{-pt} f(t)\right| \, dt$ existe $\forall p$ tel que$\mathrm{Re} p > \mathrm{Re} p_0 = x_0$

Conséquence : $\left\{x \in \mathbb{R}, \int_0^\infty \left|e^{-pt} f(t)\right| \, dt < \infty\right\}$ admet une borne inférieure notée x_{ca} appelée abscisse de convergence absolue de F (on a bien sur $x_c \leq x_{ca}$)

Exemple : $f(t) = e^{kt} \sin\left[e^{kt}\right]$, $k > 0$, $x_c = 0$ et $x_{ca} = k$.
Remarque : en pratique, on a le plus souvent $x_c = x_{ca}$

Définition

Théorème fondamental
Si $f(t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$,
alors $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$ est holomorphe sur $]x_c, +\infty[$ et donc indéfiniment dérivable sur $]x_c, +\infty[$ avec
$$\frac{d^n F(p)}{dp^n} = \int_0^\infty \frac{d^n}{dp^n} \left[e^{-pt} f(t)\right] dt$$

Conséquence : obtention de x_c à partir de $F(p)$

Si $F(p)$ fonction de la variable complexe p est la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ qui admet dans $\mathbb{C}$ des psi s_k et des points de ramification r_j, alors $x_c = \sup \mathrm{Re}(s_k, r_j)$

Exemples : $F(p) = \frac{1}{p(p-2)}$ $\quad x_c = 2$
$F(p) = \frac{1}{p+1}$ $\quad x_c = -1$

Plan du cours

Propriétés usuelles

a) Linéarité

$$TL\left(\lambda f + \mu g\right) = \lambda F(p) + \mu G(p)$$

En général, $x_c = \sup(x_{c_f}, x_{c_g})$.

b) Dérivation

*** par rapport à p**

$$TL\left\{(-1)^n t^n f(t)\right\} = \frac{d^n}{dp^n} F(p)$$

*** par rapport à t** (f continue sur $[0, +\infty[$)

$$TL\left[f'(t)\right] = pF(p) - f(0^+)$$

Généralisation

$$TL\left[f^{(n)}(t)\right] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - ... - f^{(n-1)}(0^+)$$

Application : résolution d'équations différentielles linéaires

Propriétés usuelles

a) Linéarité

$$TL(\lambda f + \mu g) = \lambda F(p) + \mu G(p)$$

En général, $x_c = \sup(x_{c_f}, x_{c_g})$.

b) Dérivation

*** par rapport à p**

$$TL\{(-1)^n t^n f(t)\} = \frac{d^n}{dp^n} F(p)$$

*** par rapport à t** (f continue sur $[0, +\infty[$)

$$TL[f'(t)] = pF(p) - f(0^+)$$

Généralisation

$$TL\left[f^{(n)}(t)\right] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+)$$

Application : résolution d'équations différentielles linéaires

Propriétés usuelles

c) Intégration
*** TL d'une primitive**

$$TL\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(p)}{p}$$

Abscisse de convergence : $\sup(x_c, 0)$
*** Primitive d'une TL**

$$TL\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^\infty F(s)ds$$

Propriétés usuelles

d) Translation

*** par rapport à p**

$$TL\left[e^{at}f(t)\right] = F(p-a)$$

Abscisse de convergence : $x_c + \mathrm{Re}(a)$.

*** par rapport à t**

$$TL\left[f(t-a)U(t-a)\right] = e^{-ap}F(p)$$

Abscisse de convergence : x_c

Remarque : Application aux fonctions périodiques.

e) Similitude

$$TL\left[f\left(\frac{t}{k}\right)\right] = kF(kp) \qquad k > 0$$

Abscisse de convergence : $\frac{x_c}{k}$

Propriétés usuelles

f) Convolution

$$TL\left[\int_0^t f(u)g(t-u)du\right] = F(p)G(p)$$

g) Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p)$$

$$\lim_{t\to \infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p)$$

h) Transformée des séries

Séries de terme général $a_n \frac{t^n}{n!}$
de rayon de convergence $R_c = \infty$

$$TL\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}}$$

Exemple : Montrer que $TL\left[\frac{\sin \omega t}{t}\right] = Arctg\,\frac{\omega}{p}$

Utiliser deux méthodes : Dévt en série et $TL\left[\frac{x(t)}{t}\right]$

Quelques transformées de Laplace

Fonction	TL	Convergence
$U(t)$	$\frac{1}{p}$	$x_c = 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	$x_c = \mathrm{Re}\alpha$
$e^{i\omega t}$	$\frac{1}{p-i\omega}$	$x_c = 0$
$ch\,(\alpha t)$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	$x_c = \sup \mathrm{Re}(\alpha, -\alpha)$
$sh\,(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$x_c = \sup \mathrm{Re}(\alpha, -\alpha)$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$x_c = 0$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$x_c = 0$
t	$\frac{1}{p^2}$	$x_c = 0$
$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$x_c = 0$
$t^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$	

avec $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ et $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$

Plan du cours

Formule d'inversion

$$X(p) = \int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty x(t)e^{-at}e^{-j2\pi ft}dt$$

avec $p = a + j2\pi f$.

Analogie avec la transformée de Fourier

$$X(f) = TF(x(t)) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-j2\pi ft}$$
$$x(t) = TF^{-1}(X(f)) = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{+j2\pi ft}df$$

Donc :

$$X(p) = TF\left[x(t)e^{-at}U(t)\right]$$

d'où la formule d'inversion :

$$\boxed{x(t)U(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{D\uparrow} X(p)e^{pt}dp}$$

On applique alors le théorème des résidus à $X(p)e^{pt}$

Exemple : $X(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$

Formule d'inversion

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt}dt = \int_0^{\infty} x(t)e^{-at}e^{-j2\pi ft}dt$$

avec $p = a + j2\pi f$.

Analogie avec la transformée de Fourier

$$X(f) = TF(x(t)) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-j2\pi ft}$$
$$x(t) = TF^{-1}(X(f)) = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{+j2\pi ft}df$$

Donc :

$$X(p) = TF\left[x(t)e^{-at}U(t)\right]$$

d'où la formule d'inversion :

$$\boxed{x(t)U(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{D\uparrow} X(p)e^{pt}dp}$$

On applique alors le théorème des résidus à $X(p)e^{pt}$

Exemple : $X(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$

Plan du cours

Equations différentielles à coefficients constants

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y(t) = f(t)$$

Conditions initiales

$$y(0) = b_0, y'(0) = b_1, ..., y^{(n-1)}(0) = b_{n-1}$$

Transformation par Laplace

$$\begin{gathered} TL\left[a_n y(t)\right] = a_n Y(p) \\ TL\left[y^{(n)}(t)\right] = p^n Y(p) - p^{n-1} y(0^+) - ... - y^{(n-1)}(0^+) \\ TL\left[\Omega_n(y)\right] = \Omega_n(p) Y(p) - Q_{n-1}(p) \\ TL\left[f(t)\right] = F(p) \end{gathered}$$

Problème algébrique

$$\Omega_n(p) Y(p) = Q_{n-1}(p) + F(p)$$

$$Y(p) = \frac{Q_{n-1}(p)}{\Omega_n(p)} + \frac{F(p)}{\Omega_n(p)} = Y_1(p) + Y_2(p)$$

Equations différentielles à coefficients constants

a) $Y_1(p)$ **fraction rationnelle**

$$Y_1(p) = \frac{Q_{n-1}(p)}{\prod_{i=1}^{r}(p-p_i)^{k_i}}$$

où p_i est une racine d'ordre k_i avec $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$
Décomposition en éléments simples :

$$Y_1(p) = \sum_{i=1}^{r} \left\{ \frac{A_{i1}}{p-p_i} + \frac{A_{i2}}{(p-p_i)^2} + \ldots + \frac{A_{ik_i}}{(p-p_i)^{k_i}} \right\}$$

d'où

$$y_1(t) = \sum_{i=1}^{r} e^{p_i t} \left[A_{i1} + A_{i2} t + \ldots + A_{ik_i} t^{k_i - 1} \right]$$

b) $Y_2(p) = \frac{F(p)}{\Omega_n(p)} = F(p) \times \frac{1}{\Omega_n(p)}$
donc :

$$y_2(t) = \int_0^t f(u) R_n(t-u) du$$

La solution du problème est alors $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$

EDP à plusieurs variables

La TL permet de **réduire l'équation d'une dimension.**
Exemple :
Problème à 2 dimensions spatio-temporel corde vibrante $f(x,t)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

Conditions initiales

$$f(x,0) = \varphi(x)$$
$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$$

Conditions aux limites

$$f(\infty,t) = 0$$
$$f(0,t) = g(t)$$

EDP à plusieurs variables

Solution à l'aide de la TL (par exemple, p est un considéré comme un paramètre)

$$F(x,p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(x,t) dt$$

$$\begin{aligned} TL\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right] &= pF(x,p) - f(x,0) \\ &= pF(x,p) - \varphi(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TL\left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)\right] &= p^2 F(x,p) - pf(x,0) - \frac{\partial f}{\partial t}(x,0) \\ &= p^2 F(x,p) - p\varphi(x) - \psi(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TL\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right] &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} dt \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(x,t) dt = \frac{d^2 F(x,p)}{dx^2} \end{aligned}$$

EDP à plusieurs variables

On obtient alors :

$$\frac{d^2F(x,p)}{dx^2} - p^2F(x,p) = p\varphi(x) + \psi(x)$$

avec

$$\begin{aligned} F(\infty, p) &= TL\left[f(\infty, t)\right] = 0 \\ G(p) &= TL\left[g(t)\right] = TL[f(0,t)] = F(0,p) \end{aligned}$$

Problème à une dimension (équation différentielle + conditions limites).

Plan du cours

Plan du cours

Définition

Définition

On définit la transformée en Z d'une suite $x(n), n \in \mathbb{Z}$ par :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} \qquad z \in \mathbb{C}$$

Notation :

$$X(z) = TZ(x(n))$$

Vocabulaire : TZ bilatérale et TZ unilatérale

Définition

Domaine de convergence

La région de convergence est l'ensemble des nombres complexes z tels que la série $X(z)$ converge.

Rappel : critère de Cauchy

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ converge}$$

On a une condition suffisante de convergence. A l'aide de ce critère, on montre que la série $X(z)$ converge dès que :

$$0 \leq R_x^- < |z| < R_x^+ \leq +\infty$$

Exemple : $X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n}$ converge pour $|z| > 1$

Plan du cours

Propriétés usuelles

Linéarité

$$TZ(ax(n) + by(n)) = aX(z) + bY(z)$$

Convergence : si $R^+ = \min(R_x^+, R_y^+)$ et $R^- = \max(R_x^-, R_y^-)$, alors le domaine de convergence contient $]R^-, R^+[$.

Décalage

$$TZ(x(n - n_0)) = z^{-n_0} X(z)$$

Même domaine de convergence que pour $X(z)$

Changement d'échelle

$$TZ(a^n x(n)) = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Domaine de convergence : $|a|\, R_x^- < |z| < |a|\, R_x^+$

Propriétés usuelles

Linéarité

$$TZ(ax(n) + by(n)) = aX(z) + bY(z)$$

Convergence : si $R^+ = \min(R_x^+, R_y^+)$ et $R^- = \max(R_x^-, R_y^-)$, alors le domaine de convergence contient $]R^-, R^+[$.

Décalage

$$TZ(x(n - n_0)) = z^{-n_0}X(z)$$

Même domaine de convergence que pour $X(z)$

Changement d'échelle

$$TZ(a^n x(n)) = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Domaine de convergence : $|a|\, R_x^- < |z| < |a|\, R_x^+$

Propriétés usuelles

Linéarité

$$TZ(ax(n) + by(n)) = aX(z) + bY(z)$$

Convergence : si $R^+ = \min(R_x^+, R_y^+)$ et $R^- = \max(R_x^-, R_y^-)$, alors le domaine de convergence contient $]R^-, R^+[$.

Décalage

$$TZ(x(n - n_0)) = z^{-n_0} X(z)$$

Même domaine de convergence que pour $X(z)$

Changement d'échelle

$$TZ(a^n x(n)) = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Domaine de convergence : $|a|\, R_x^- < |z| < |a|\, R_x^+$

Propriétés usuelles

Dérivabilité
La transformée en Z définit une série de Laurent qui est indéfiniment dérivable terme à terme dans son domaine de convergence.
On en déduit :

$$TZ(nx(n)) = -z\frac{dX(z)}{dz}$$

Même domaine de convergence que pour $X(z)$

Produit de convolution
Le produit de convolution entre les suites $x(n)$ et $y(n)$ est défini par :

$$u(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k)$$

On a alors

$$TZ(x(n) * y(n)) = X(z)Y(z)$$

La région de convergence de $U(z)$ peut être plus large que l'intersection des régions de convergence de $X(z)$ et de $Y(z)$.

Propriétés usuelles

Dérivabilité

La transformée en Z définit une série de Laurent qui est indéfiniment dérivable terme à terme dans son domaine de convergence.

On en déduit :

$$TZ(nx(n)) = -z\frac{dX(z)}{dz}$$

Même domaine de convergence que pour $X(z)$

Produit de convolution

Le produit de convolution entre les suites $x(n)$ et $y(n)$ est défini par :

$$u(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k)$$

On a alors

$$TZ(x(n) * y(n)) = X(z)Y(z)$$

La région de convergence de $U(z)$ peut être plus large que l'intersection des régions de convergence de $X(z)$ et de $Y(z)$.

Plan du cours

TZ inverse

La transformée en Z inverse est définie par :

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi} \int_{C^+} X(z) z^{n-1} dz$$

où C est un contour fermé inclu dans l'anneau de convergence

TZ inverse

Preuve

L'expression de la transformée en Z inverse découle directement du calcul de l'intégrale

$$J(n,k) = \int_{C^+} z^{n-k-1} dz$$

A l'aide du théorème des résidus, on montre :

$$J(n,k) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq k \\ j2\pi \text{ si } n = k \end{cases}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{j2\pi}\int_{C^+} X(z) z^{n-1} dz &= \frac{1}{j2\pi}\int_{C^+} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} \right) z^{n-1} dz \\ &= \frac{1}{j2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) J(n,k) \\ &= x(n) \end{aligned}$$

Remarque : existence de tables

TZ inverse

Preuve

L'expression de la transformée en Z inverse découle directement du calcul de l'intégrale

$$J(n,k) = \int_{C^+} z^{n-k-1} dz$$

A l'aide du théorème des résidus, on montre :

$$J(n,k) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq k \\ j2\pi \text{ si } n = k \end{cases}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{j2\pi} \int_{C^+} X(z) z^{n-1} dz &= \frac{1}{j2\pi} \int_{C^+} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} \right) z^{n-1} dz \\ &= \frac{1}{j2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) J(n,k) \\ &= x(n) \end{aligned}$$

Remarque : existence de tables

Plan du cours

Filtrage des signaux à temps discrets

Voir cours de traitement numérique du signal.

Application aux équations récurrentes

Etude d'un exemple : système linéaire du premier ordre

$$y(n) - ay(n-1) = x(n) \qquad |a| < 1$$

L'entrée de ce système est définie par :

$$x(n) = b^n U(n) \text{ avec } |b| < 1$$

où $U(n)$ est l'échelon de Heaviside.

- Déterminer $y(n)$ pour $n \geq 0$ sachant que $y(n) = 0$ pour $n < 0$.
- Déterminer la réponse impulsionnelle du système $h(n)$ telle que $y(n) = x(n) * h(n)$.

Plan du cours

Transformées en Z et de Laplace

Soit $x(t)$ un signal causal dont la transformée de Laplace est :

$$X(p) = \int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt$$

On échantillonne ce signal à la période T et on note $X(z)$ sa transformée en Z :

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}$$

Alors

$$\boxed{X(z) = \sum res \frac{X(p)}{1-e^{pT}z^{-1}}}$$

Transformées en Z et de Laplace

La formule inverse de la transformée de Laplace donne

$$x(t)U(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{D\uparrow} X(p)e^{pt}dp$$

d'où

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2i\pi}\int_{D\uparrow} X(p)e^{pnT}dp\right]z^{-n} \\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{D\uparrow} X(p)\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^{-1}e^{pT}\right)^n dp \end{aligned}$$

Dans la mesure où $\left|z^{-1}e^{pT}\right| < 1$, on a

$$X(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{D\uparrow} X(p)\frac{1}{1-z^{-1}e^{pT}}dp = \sum res\frac{X(p)}{1-e^{pT}z^{-1}}$$

Variables complexes

Transformée de Laplace – Transformée en Z

Nicolas Dobigeon

Université de Toulouse, IRIT/INP-ENSEEIHT
Institut Universitaire de France (IUF)
Artificial and Natural Intelligence Toulouse Institute (ANITI)

http://www.enseeiht.fr/~dobigeon
nicolas.dobigeon@enseeiht.fr