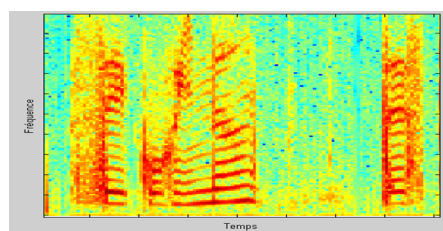
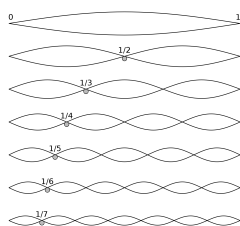


# Intégration et analyse de Fourier

Thomas Oberlin  
Henrique Goulart



Département EEEA  
Année 2024–2025



## Avant-propos

---

Ce polycopié présente les fondamentaux de l'intégration et de l'analyse de Fourier utiles dans tout cursus ingénieur. Il suit le plan du cours, en approfondissant parfois certains points. Les objectifs de ce cours sont doubles : d'une part, maîtriser les séries et la transformée de Fourier en tant qu'outil au service de la physique (ce qui inclut la maîtrise des propriétés et la capacité à calculer et manipuler ces transformations). D'autre part, aller un peu plus loin mathématiquement sur l'étude de ces notions, en commençant par la notion fondamentale qu'est l'intégration. Les volumes d'enseignements étant extrêmement réduits on ne pourra pas construire toute la théorie, mais on s'attachera à démontrer quelques résultats importants.

On commencera par rappeler quelques outils importants, de topologie notamment, afin de préciser les notions de convergence et de continuité sur des espaces vectoriels normés quelconques. On présentera ensuite rapidement l'intégrale de Lebesgue et les grands théorèmes d'intégration, ce qui nous permettra d'introduire la transformée de Fourier et de démontrer ses principales propriétés, et son rapport avec le produit de convolution. La fin du cours tentera enfin de donner une définition mathématiquement correcte des distributions, que nous appliquerons au fameux  $\delta$  de Dirac.

Malgré tous nos efforts de relecture, ce polycopié pourrait toujours contenir plusieurs erreurs, incohérences, fautes d'orthographe, etc. Merci de nous les signaler pour contribuer à son amélioration !

---

**Remerciements** : Un grand merci aux collègues de l'ENSEEIHRT qui ont contribué de près ou de loin à ce polycopié, notamment Martial Coulon, Michel Doisy, Bernard Garel et Paul Fraux.



---

## Table des matières

---

<b>Notations</b>	<b>1</b>
<b>1 Quelques rappels</b>	<b>3</b>
1.1 Espaces vectoriels normés . . . . .	3
1.2 Un peu de topologie . . . . .	6
1.3 Applications linéaires . . . . .	9
<b>2 Intégrale de Lebesgue</b>	<b>13</b>
2.1 Motivation et principe . . . . .	14
2.1.1 Intégrale de Riemann . . . . .	14
2.1.2 Intégrale de Lebesgue . . . . .	16
2.2 Quelques notions de mesure . . . . .	16
2.3 Intégrale de Lebesgue . . . . .	20
2.4 Calcul intégral . . . . .	26
<b>3 Séries de Fourier</b>	<b>35</b>
3.1 Motivation et bref historique . . . . .	35
3.2 Polynômes trigonométriques . . . . .	35
3.3 Convergence de la série de Fourier . . . . .	37
<b>4 Transformée de Fourier</b>	<b>39</b>
4.1 Introduction . . . . .	39
4.2 Transformée de Fourier dans $L^1$ . . . . .	40
4.3 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .	42
4.4 Produit de convolution . . . . .	44
4.5 Formulaires . . . . .	47
<b>5 Distributions</b>	<b>51</b>
5.1 Fonctions tests et distributions . . . . .	51
5.2 Dérivées des distributions . . . . .	53
5.3 Transformée de Fourier des distributions . . . . .	54

5.4	Théorème d'échantillonnage . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Exercices supplémentaires (énoncés)</b>	<b>61</b>
6.1	Calcul intégral . . . . .	61
6.2	Transformée de Fourier . . . . .	64
6.3	Distributions . . . . .	65
<b>7</b>	<b>Exercices supplémentaires (corrigés)</b>	<b>67</b>
7.1	Calcul intégral . . . . .	67
7.2	Transformée de Fourier . . . . .	68
7.3	Distributions . . . . .	71

---

## Notations

---

$\mathbb{N}, \mathbb{N}^*$	ensemble des entiers naturels, avec et sans zéro respectivement
$\mathbb{Z}$	ensemble des nombres entiers relatifs
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}_+$	ensemble des nombres réels non-négatifs
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$]a, b[, [a, b]$	intervalles ouvert et fermé, respectivement, de $a$ à $b$
$]a, b], [a, b[$	intervalles semi-ouverts à gauche et à droite, respectivement
$(a, b)$	intervalle de $a$ à $b$ (soit $]a, b[$ ou $[a, b]$ ou $]a, b]$ , ou $[a, b[$ )
$\in$	<i>appartient à</i> , par exemple $x \in \mathbb{R}$
$\subset$	<i>est inclus dans</i> , par exemple $[a, b] \subset \mathbb{R}$
$\forall$	<i>quel que soit</i> , par exemple $\forall x \in \mathbb{R}$
$i$	unité imaginaire $i^2 = -1$
$\bar{z}$	conjugué de $z \in \mathbb{C}$ (si $z = a + bi$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ , alors $\bar{z} = a - bi$ )
$\Re[z]$ et $\Im[z]$	parties réelle et imaginaire de $z \in \mathbb{C}$ , respectivement
$\mathcal{P}(E)$	ensemble des parties de $E$
$\#E$	cardinalité de l'ensemble $E$
$\ \cdot\ $	norme
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produit scalaire
$\infty$	symbole signifiant <i>infini</i>
$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$	<i>tendre vers</i> , au sens de la limite d'une suite ou d'une fonction. Par exemple, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u$ signifie la même chose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u$





# CHAPITRE 1

---

## Quelques rappels

---

Ce chapitre présente quelques rappels de mathématiques qui seront nécessaires dans ce cours et les suivants. Les notions importantes sont la norme, la convergence d'une suite, la continuité d'une application. Les définitions sont données dans le cadre des espaces vectoriels, qui est suffisamment général pour notre cours. Notons bien que la dimension de ces espaces n'est pas nécessairement finie, ça sera le cas par exemple des espaces fonctionnels que l'on étudiera dans la suite du cours.

### 1.1 Espaces vectoriels normés

Rappelons qu'un espace vectoriel  $E$  défini sur un corps est un ensemble d'éléments non vide, muni d'une structure de groupe commutatif et d'une multiplication externe. Dans ce cours et dans la plupart des cas, le corps de référence sera soit  $\mathbb{R}$  soit  $\mathbb{C}$ . On commence par rappeler quelques notions fondamentales concernant les bases d'espaces vectoriels de dimension finie.

**Définition 1.1** (Base d'un espace vectoriel).

- Une famille  $(u_1, \dots, u_k)$  d'éléments de  $E$  est dite **liée** ou **linéairement dépendante** s'il existe des scalaires  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i u_i = 0.$$

- Une famille non liée est dite **libre**.
- Une famille  $(u_1, \dots, u_k)$  de  $E$  est dite **génératrice** si tout élément de  $E$  s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de cette famille :  $\forall x \in E$ , il existe des scalaires  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  tels que

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i.$$

- Une **base** est une famille libre et génératrice.

- La dimension d'un espace vectoriel est le nombre d'éléments d'une de ces bases, qui ne dépend pas du choix de celle-ci.

Exemples :

- $\mathbb{R}^n$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .
- L'ensemble  $\mathbb{R}_n[X]$  des polynômes de degré au plus  $n$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n + 1$ .
- L'ensemble  $\mathcal{C}[0, 1]$  des fonctions continues sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  est un espace vectoriel de dimension infinie.

Exemples :

- La base canonique de  $\mathbb{R}^n$  : le  $k$ -ième vecteur est formé de zéros et d'un 1 au coefficient  $k$ .
- La base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$  :  $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ .

**Remarque :** Cette définition des bases concerne les espaces vectoriels de dimension finie. Vous verrez l'an prochain qu'on peut étendre ce principe en dimension infinie pourvu que l'espace soit complet (on l'appelle alors espace de Hilbert).

**Définition 1.2** (Norme). Une norme est une application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfaisant les propriétés suivantes :

- (i)  $N(x) = 0 \implies x = 0$  ; (définie-positivité)
- (ii)  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, x \in E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$  ; (homogénéité)
- (iii)  $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ . (inégalité triangulaire)

On note en général  $N(x) = \|x\|$ .

Exemples :

- Dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , le module ou la valeur absolue,  $|\cdot|$ , sont des normes.
- Dans  $\mathbb{R}^n$ , pour tout entier  $p > 0$  on peut définir la norme  $p$  :

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.1)$$

- Dans  $\mathcal{C}[0, 1]$ , l'ensemble des fonctions continues sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on définit également la famille de normes  $p$  suivantes pour  $p \in \mathbb{N}^*$  :

$$\|f\|_p = \left( \int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.2)$$

Cette définition est étendue à  $p = \infty$  de la façon suivante :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$

**Définition 1.3** (Produit scalaire). Soit  $E$  un espace vectoriel défini sur  $\mathbb{R}$ . Un produit scalaire est une application bilinéaire symétrique définie positive  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , c'est-à-dire qu'elle vérifie  $\forall x, y, z \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$  :

- (i)  $\varphi(x, x) \geq 0$ , avec  $\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$  ; (définie-positivité)

$$(ii) \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x); \quad (\text{symétrie})$$

$$(iii) \quad \varphi(\lambda x + y, z) = \lambda \varphi(x, z) + \varphi(y, z). \quad (\text{linéarité à gauche})$$

On le note en général  $\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$ .

Exemples :

- Dans  $\mathbb{R}^n$  :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (1.3)$$

- Dans  $\mathcal{C}[0, 1]$  :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt. \quad (1.4)$$

**Remarque :** (Normes dérivant d'un produit scalaire) On voit facilement que tout produit scalaire définit une norme :  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . Ainsi, les normes 2 (c'est-à-dire, les normes  $p$  pour  $p = 2$ ) dérivent d'un produit scalaire, et l'espace correspondant est appelé espace euclidien. La réciproque est bien entendu fausse : la plupart des normes ne dérivent pas d'un produit scalaire.

**Remarque :** (Produit scalaire hermitien) On étend facilement la notion de produit scalaire lorsque le corps de référence est  $\mathbb{C}$  : on parle alors d'espace hermitien. Dans ce cas, le produit scalaire n'est plus une forme bilinéaire, mais une forme *sesquilinéaire* à gauche : linéaire par rapport à la première variable, et semi-linéaire par rapport à l'autre. Dans ce cas la Définition 1.3 devient :

- $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$
- $\varphi(\lambda x + y, z) = \lambda \varphi(x, z) + \varphi(y, z)$

Cela implique notamment que  $\varphi(x, \lambda y) = \bar{\lambda} \varphi(x, y)$

**Théorème 1.1** (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *On considère un espace vectoriel muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de la norme  $\|\cdot\|$  correspondante. On a alors  $\forall x, y \in E$  :*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

*L'égalité a lieu si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires ( $x = \lambda y$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).*

**Théorème 1.2** (Pythagore). *Deux vecteurs  $x$  et  $y$  sont orthogonaux (i.e.,  $\langle x, y \rangle = 0$ ) si et seulement si*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

**Définition 1.4** (Base orthogonale).

- Une base  $(e_1, \dots, e_k)$  de  $E$  est dite **orthogonale** si les  $e_i$  sont orthogonaux deux à deux :  $\forall i \neq j, \langle e_i, e_j \rangle = 0$ .
- Elle est dite **orthonormale** si de plus  $\forall i, \|e_i\| = 1$ .

Rappelons que tout espace euclidien admet une base orthonormale, et que toute base peut être "orthogonalisée" au moyen du procédé de Gram-Schmidt.

**Proposition 1.1** (Projection orthogonale). *Soit  $E$  un espace euclidien et  $F$  un sous-espace vectoriel. Alors :*

- Il existe une unique application  $P_F : E \rightarrow F$  telle que  $P_F(x) \in F$  et  $x - P_F(x)$  est orthogonal à  $F$ .
- De manière équivalente,  $P_F(x)$  est l'unique élément de  $F$  qui minimise la distance au point  $x$  :

$$P_F(x) = \arg \min_{z \in F} \|x - z\|.$$

- Une troisième caractérisation consiste à dire que  $P_F$  définit un opérateur idempotent et autoadjoint :

$$P_F \circ P_F = P_F, \quad \forall x, y \in E, \langle P_F(x), y \rangle = \langle x, P_F(y) \rangle.$$

- Si  $(e_1, \dots, e_k)$  est une base orthogonale de  $F$ , cette application s'écrit

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^k \frac{\langle x, e_i \rangle}{\|e_i\|^2} e_i.$$

**Remarque :** Ici encore, ce résultat se généralise en dimension infinie lorsque  $E$  est un espace de Hilbert et  $F$  un sous-espace fermé.

## 1.2 Un peu de topologie

La topologie est la branche des mathématiques qui s'intéresse à la notion de limite et à la convergence. Elle définit pour cela la notion de voisinage, d'ensembles ouverts et fermés, d'intérieur, d'adhérence, etc. Nous ne reviendrons pas sur ces notions, et nous contenterons de définir la continuité d'une application en utilisant la caractérisation séquentielle. Mais ce qu'il faut bien retenir ici, c'est que la notion de convergence dépend de la topologie et donc de la norme considérée.<sup>1</sup> En dimension finie, toutes les normes étant équivalentes, cela ne se voit pas. Mais ce n'est plus le cas en dimension infinie : **une même suite analysée avec deux normes différentes n'aura pas la même limite !**

Dans toute cette section, nous considérons une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$ .

**Définition 1.5** (Convergence d'une suite). *La suite  $(x_n)$  converge vers l'élément  $\ell \in E$  si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \|\ell - x_n\| \leq \varepsilon.$$

**Remarque :** on retrouve les différents types de convergence que vous connaissez pour les **suites de fonctions**. Soit  $f_n$  une telle suite, alors :

- La **convergence simple** de  $f_n$  vers  $f$  signifie que  $\forall x$ , la suite réelle  $f_n(x)$  tend vers  $f(x)$ . On l'appelle aussi convergence ponctuelle.
- La **convergence uniforme** de  $f_n$  vers  $f$  signifie que  $f_n$  tend vers  $f$  au sens de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  c'est-à-dire  $\|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0$ .
- Une autre convergence couramment utilisée est celle induite par la norme 2, et appelée **convergence en moyenne quadratique**.

<sup>1</sup>En effet, toute norme induit une topologie

*Exemple :* La suite définie par  $f_n(t) = t^n$  converge-t-elle dans l'espace  $(\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$  ? Pour avoir convergence vers une fonction  $f \in (\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ , on doit montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 1]} |t^n - f(t)| = 0.$$

Comme  $t^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  pour tout  $t \in [0, 1[$ , il est clair que  $f$  doit satisfaire  $f(t) = 0$  pour  $t \in [0, 1[$ . Or,

$$f_n(1 - 1/n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \log(1 - \frac{1}{n})} = e^{n(-\frac{1}{n} + o(1/n))} = e^{-1 + o(1)},$$

où nous avons utilisé le développement<sup>2</sup>  $\log(1 + x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ , valable pour tout  $x$  tel que  $|x| < 1$ . Ainsi,  $f_n(1 - 1/n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e^{-1}$ , et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, 1]} |t^n - f(t)| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} |(1 - 1/n)^n - f(1 - 1/n)| = e^{-1},$$

ce qui implique que  $\|f_n - f\|_\infty \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . Autrement dit, cette suite ne converge pas dans l'espace en question. □

**Définition 1.6** (Ouverts, fermés). *Soit  $X \subset E$  un sous-ensemble de  $E$ .*

- $X$  est dit *fermé* si et seulement si toute suite de  $X$  qui converge dans  $E$  a sa limite dans  $X$ .
- $X$  est dit *ouvert* si son complémentaire dans  $E$  est fermé.
- On note  $\bar{X}$  l'adhérence de  $X$ , c'est-à-dire  $X$  augmenté de toutes les limites des suites de  $X$  qui convergent dans  $E$ .

**Remarque :**

- $X$  peut être ni ouvert ni fermé. Par exemple,  $[0, 1[$ .
- Si  $X$  est fermé, alors  $\bar{X} = X$ .

**Définition 1.7** (Convergence d'une application). *Soit l'application  $g : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ , et un point  $x_0 \in \bar{E}$ . On dit que  $g$  converge vers  $\ell \in F$  en  $x_0$  si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in E, \|x - x_0\|_E \leq \alpha \implies \|g(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On écrit alors  $g(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} \ell$  ou  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ .

**Remarque :** En posant  $x_0$  dans l'adhérence de  $E$ , nous rendons la Définition 1.7 moins restrictive : on peut étudier la convergence de  $g$  en  $x_0$  même si celui-ci n'est pas dans  $E$ .

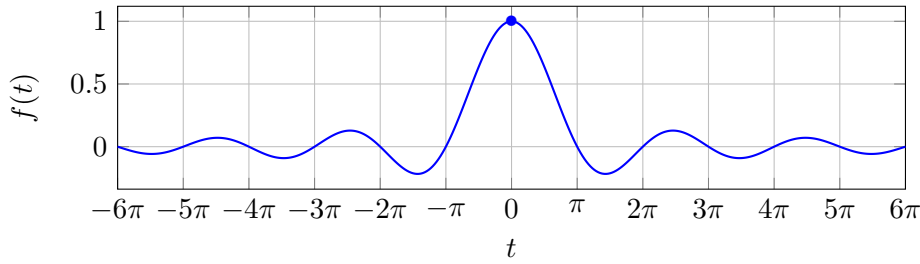
**Définition 1.8** (Continuité d'une application). *Soit l'application  $g : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ .*

- $g$  est continue en  $x_0 \in E$  si et seulement si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$  tel que

$$\forall x \in E, \|x - x_0\|_E \leq \alpha \implies \|g(x) - g(x_0)\|_F \leq \varepsilon.$$

---

<sup>2</sup>La notation  $f(n) = o(g(n))$  signifie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ . On dit que  $f$  est alors dominée par  $g$ .



**Figure 1.1** Continuité de la fonction sinus cardinal :  $f(t) = \frac{\sin t}{t}$  pour  $t \neq 0$  et  $f(0) = 1$ .

- $g$  est continue sur  $X \subset E$  si elle est continue en tout point de  $X$ .

**Proposition 1.2** (Caractérisation séquentielle de la continuité). *L'application  $g : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$  est continue en  $x \in E$  si et seulement si pour toute suite  $(x_n)_n$  tendant vers  $x$  dans  $E$ , la suite  $g(x_n)$  tend vers  $g(x)$  dans  $F$ .*

*Exemples :*

- La fonction

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0, \end{cases}$$

tracée dans la Figure 1.1, est continue dans  $\mathbb{R}$ , car  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \cos t = 1 = f(0)$ .

- La fonction “dérivée”  $D : (\mathcal{C}^\infty[0, 1], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathcal{C}^\infty[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ , définie par  $D(g) = g'$  est-elle continue? Montrons que la réponse est non en construisant un contre-exemple. Posons  $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$ . Il est clair que

$$\forall x, \forall \epsilon > 0, n > \frac{1}{\epsilon} \implies |f_n(x)| \leq \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Il en découle que  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \eta$  au sens de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , où  $\eta(x) = 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . Or,  $D(\eta) = \eta$ , tandis que  $D(f_n)(x) = f'_n(x) = \cos nx \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \eta(x)$  (en particulier,  $f'_n(0) = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ).

Dans certains cas, exiger qu'une fonction donnée soit continue ne suffit pas. On introduit par la suite une notion plus forte que la continuité.

**Définition 1.9** (Application lipschitzienne). *L'application  $g : X \subset (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow Y \subset (F, \|\cdot\|_F)$  est  $L$ -lipschitzienne sur  $X$  si et seulement si  $\forall x_1, x_2 \in X$  on a*

$$\|g(x_1) - g(x_2)\|_F \leq L \|x_1 - x_2\|_E.$$

**Remarques :**

- Toute application lipschitzienne est continue (immédiat).
- Une norme est 1-lipschitzienne (de par l'inégalité triangulaire “renversée” :  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ ).
- Toute application  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continûment dérivable est  $L$ -lipschitzienne dans l'intervalle  $(a, b)$  (avec  $b > a$ ), avec  $L = \sup_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$ , c'est-à-dire :

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq \left( \sup_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \right) |x_1 - x_2|.$$

En effet,  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ , si on définit l'application  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  comme  $\phi(t) = f(x_1 + t(x_2 - x_1))$ , alors on a

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| &= |\phi(1) - \phi(0)| = \left| \int_0^1 \phi'(t) dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 f'(x_1 + t(x_2 - x_1)) (x_2 - x_1) dx \right| \\ &\leq \int_0^1 |f'(x_1 + t(x_2 - x_1))| |x_2 - x_1| dx \\ &\leq L |x_2 - x_1|, \end{aligned}$$

où la deuxième inégalité vient du fait que  $x_1 + t(x_2 - x_1) \in [a, b]$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . On dit alors que la fonction est localement lipschitzienne.

### 1.3 Applications linéaires

On étudie ici  $L(E, F)$ , l'espace des applications **linéaires et continues** de  $E$  dans  $F$ . Vous savez déjà qu'en dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues. Ce n'est plus le cas en dimension infinie, nous verrons quelques contre-exemples. On commence par quelques définitions puis la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires, avant de rappeler le principe des normes subordonnées.

**Définition 1.10.** *L'application  $T : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$  est linéaire si et seulement si  $\forall x_1, x_2 \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,*

$$T(\lambda x_1 + x_2) = \lambda T(x_1) + T(x_2).$$

*On note alors souvent  $Tx$  plutôt que  $T(x)$ .*

**Proposition 1.3.** *Si  $T$  est linéaire de  $E$  dans  $F$ , alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  *$T$  est continue sur  $E$ .*
- (ii)  *$T$  est continue en 0.*
- (iii)  *$T$  est bornée sur la boule ou la sphère unité.*
- (iv) *Il existe  $L > 0$  tel que  $\forall x \in E, \|Tx\|_F \leq L \|x\|_E$ .*

*Démonstration.*

- (i)  $\implies$  (ii) : Immédiat.
- (ii)  $\implies$  (i) :  $T$  étant continue en 0, alors par définition

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in E, \|x\|_E \leq \delta \implies \|Tx - T0\|_F = \|Tx\|_F \leq \epsilon.$$

Par conséquent, pour tout  $x_0 \in E$ , on a

$$\forall x \in E, \|x - x_0\|_E \leq \delta \implies \|T(x - x_0)\|_F = \|Tx - Tx_0\|_F \leq \epsilon.$$

- (ii)  $\implies$  (iii) : Soit  $B_E = \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$ . Fixons  $\epsilon > 0$ . Alors, il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\forall x \in E, \|x\|_E \leq \delta \implies \|Tx\|_F \leq \epsilon.$$

Donc, comme  $\forall x \in B_E, \|\delta x\|_E = \delta \|x\|_E \leq \delta$ , on a  $\|T(\delta x)\|_F \leq \epsilon$ . Ainsi, par linéarité de  $T$ ,

$$\|T(\delta x)\|_F = \delta \|Tx\|_F \leq \epsilon \implies \|Tx\|_F \leq \frac{\epsilon}{\delta} < \infty.$$

Le résultat s'ensuit car  $\epsilon$  et  $\delta$  ne dépendent pas de  $x$ .

- (iii)  $\implies$  (ii) : Par hypothèse,

$$0 \leq \sup_{x \in B_E} \|Tx\|_F = K < \infty. \quad (1.5)$$

Soit  $\epsilon > 0$ . En choisissant  $\delta = \epsilon/K$ , on obtient :

$$\forall x \in E, \|x\|_E \leq \delta = \frac{\epsilon}{K} \implies \left\| \frac{K}{\epsilon} x \right\|_E \leq 1.$$

Ainsi,  $y := \frac{K}{\epsilon} x \in B_E$  par définition, et donc de (1.5) et par linéarité de  $T$  on a

$$\|Ty\|_F = \frac{K}{\epsilon} \|Tx\|_F \leq K \implies \|Tx\|_F \leq \epsilon,$$

ce qui montre que  $T$  est continue en 0.

- (iv)  $\implies$  (iii) : Imédiat.
- (iii)  $\implies$  (iv) : Par linéarité de  $T$ , pour tout  $x \in E \setminus \{0\}$  on a

$$\frac{1}{\|x\|_E} \|Tx\|_F = \left\| T \left( \frac{1}{\|x\|_E} x \right) \right\|_F \leq K,$$

où l'inégalité vient de (1.5) combinée au fait que  $\frac{1}{\|x\|_E} x \in B_E$ . Ainsi,  $\|Tx\|_F \leq K \|x\|_E$  (ce qui est évidemment aussi vrai pour  $x = 0$ ).

□

*Exemples :*

- La fonction “dérivée”  $D : E \rightarrow F$  avec  $E = F = (\mathcal{C}^\infty[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$  que l'on a étudiée dans la section précédente est bel et bien linéaire :

$$\forall f, g \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad D(\lambda f + g) = (\lambda f + g)' = \lambda f' + g' = \lambda Df + Dg.$$

Pour autant, nous avons vu qu'elle n'est pas continue. Par la proposition précédente, il s'ensuit que  $D$  ne peut pas être bornée sur la boule unité  $B_E = \{f \in E : \|f\|_\infty \leq 1\}$ . En effet, pour tout  $K \in \mathbb{R}_+$  si  $f_K(x) = \sin(Kx)$  alors on a évidemment  $f_K \in B_E$  car  $\|f_K\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |\sin(Kx)| \leq 1$ , mais

$$\|Df_K\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} K |\cos(Kx)| = K.$$

Donc, il ne peut pas exister une borne  $M$  telle que  $\|Df\|_\infty \leq M$  pour tout  $f \in B_E$ .



- Soit  $E = (\ell^1(\mathbb{N}^*), \|\cdot\|_1)$  l'espace des suites  $a = (a_1, a_2, \dots)$  à valeurs réelles telles que  $\|a\|_1 = \sum_n |a_n| < \infty$ , et soit  $F$  le sous-espace des suites de  $E$  ayant un nombre fini de composantes non-nulles :

$$F = \{a \in E : \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \geq N, a_n = 0\}.$$

On définit l'application  $T : F \rightarrow \mathbb{R}$  de la façon suivante :

$$T(a) = \sum_n n a_n.$$

Il est facile de vérifier que  $T$  est linéaire. Or,  $T$  n'est pas bornée sur la boule unité  $B_F = \{a \in F : \|a\|_1 \leq 1\}$ . En effet, posant la suite  $u^{(k)}$  dont les  $k$  premières composantes sont égales à  $1/k$  et toutes les autres sont nulles, on a  $u^{(k)} \in B_F$  et

$$T u^{(k)} = \sum_n n u_n^{(k)} = \sum_{n=1}^k \frac{n}{k} = \frac{k+1}{2}.$$

Par conséquent,  $T$  n'est pas bornée sur  $B_F$ , et par la Proposition 1.3 elle n'est pas continue.

**Proposition 1.4** (Norme subordonnée). *Soit  $T \in L(E, F)$ . On a l'égalité suivante :*

$$\sup_{x \in E, x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E, \|x\|_E=1} \|Tx\|_F = \inf\{L \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in E, \|Tx\|_F \leq L \|x\|_E\}.$$

Cette quantité est notée  $\|T\|$  ou bien  $\|T\|_{E \rightarrow F}$  : c'est la norme de l'application  $T$  subordonnée aux normes de  $E$  et  $F$ .

**Proposition 1.5.**  $L(E, F)$  muni de  $\|\cdot\|_{E \rightarrow F}$  est un espace vectoriel normé.

*Exemple/Exercice :* Dans  $L(\mathbb{R}^n)$ , à quoi correspondent les normes  $\|\cdot\|_{2 \rightarrow 2}$ ,  $\|\cdot\|_{\infty \rightarrow \infty}$  et  $\|\cdot\|_{1 \rightarrow 1}$  ?



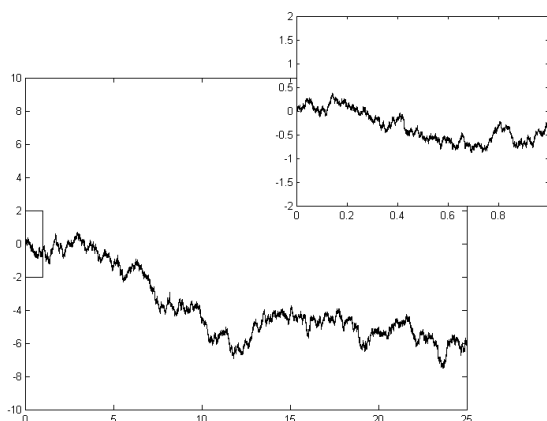
## CHAPITRE 2

---

### Intégrale de Lebesgue

---

L'intégration est un outil fondamental en analyse, mais pour plusieurs raisons la théorie de l'intégrale de Riemann vue au lycée et en premier cycle universitaire n'est pas totalement satisfaisante. Sa principale limitation est que l'identité naturelle  $\lim_n \int f_n = \int \lim_n f_n$  n'est vérifiée que sous des hypothèses assez contraignantes. En outre, la classe de fonctions intégrables au sens de Riemann est très réduite : il s'agit des fonctions continues (éventuellement par morceaux). Pourtant, de nombreuses fonctions fondamentales sont très irrégulières, parfois même discontinues en tout point...



**Figure 2.1** Réalisation d'un processus aléatoire, dit de Wiener. C'est un exemple de fonction très irrégulière, que l'on aimerait pourtant pouvoir intégrer. (Source : Wikipedia)

Ce chapitre introduit de manière très succincte la théorie moderne de l'intégration, que l'on doit à Henri Lebesgue. Toute cette théorie repose sur la théorie de la mesure, dont les bases – assez simples – sont exposées ici. N'ayez pas peur de cette nouvelle théorie, car en pratique le calcul intégral se fait de manière similaire, en utilisant les deux outils à notre disposition : l'intégration par parties et le changement de

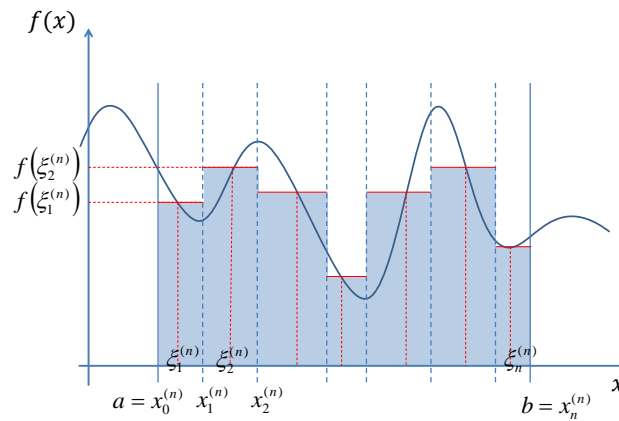
variable.

## 2.1 Motivation et principe

### 2.1.1 Intégrale de Riemann

#### Définition

Soit  $f$  une fonction continue positive sur un intervalle borné  $[a, b]$ . L'**intégrale** de  $f$  sur  $[a, b]$  est définie comme l'**aire sous la courbe** entre les points  $a$  et  $b$ .



**Figure 2.2** Illustration : l'intégrale de Riemann

La définition de l'intégrale de Riemann consiste à :

- discrétiser l'**axe des abscisses** entre  $a$  et  $b$  (voir Figure 2.2) :

$$\Delta_n = \{a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} = b\}.$$

- sommer les aires des rectangles :

$$I(\Delta_n) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i^{(n)})(x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)})$$

avec  $\xi_i^{(n)} \in ]x_{i-1}^{(n)}; x_i^{(n)}[$ .

- passer à la limite quand la longueur des intervalles tend vers 0 :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_n I(\Delta_n) \text{ lorsque } \sup_i |x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- $f$  est Riemann-intégrable sur  $[a, b]$  si et seulement si  $\lim_n I(\Delta_n)$  existe et est unique.
- On étend ensuite cette définition au cas de fonctions continues par morceaux et d'intervalles non bornés.

L'un des plus importants résultats liés à l'intégrale de Riemann est le Théorème Fondamental de l'Analyse, qui permet de calculer l'intégrale de Riemann d'une fonction continue  $f$  lorsque la primitive de  $f$ , notée  $F$ , peut être déterminée. Ce résultat est rappelé dans la suite.

**Définition 2.1.** La fonction  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  est appelée la primitive d'une autre fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sur un intervalle  $I = (a, b)$  lorsque  $F'(x) = f(x)$  pour tout  $x \in I$ .

**Théorème 2.1** (Second Théorème Fondamental de l'Analyse). Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est intégrable au sens de Riemann dans l'intervalle fermé et borné  $I = [a, b]$ , et si  $f$  admet une primitive  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  dans  $I$ , alors :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

### Extensions et limitations

Le formalisme de Riemann peut être étendu afin de permettre l'intégration de certaines fonctions auxquelles la construction montrée ne s'applique pas. Par exemple, si  $f$  est continue sur  $[a, b]$  sauf en  $c \in ]a, b[$ , alors on peut découper le calcul en deux parties, à savoir

$$\int_a^{c-\alpha} f(x) dx, \quad \int_{c+\beta}^b f(x) dx,$$

et puis calculer la limite de ces intégrales lorsque  $\alpha, \beta \rightarrow 0$ . Une deuxième extension très utile sert à calculer l'intégrale d'une fonction sur un intervalle non-borné, comme par exemple dans

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Malgré l'utilité de ces définitions, l'intégrale de Riemann n'est pas un outil satisfaisant pour beaucoup d'applications en physique et en génie électronique, l'une des principales raisons étant que ses propriétés de convergence ne sont pas assez puissantes. Concrètement, l'identité naturelle

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx, \quad (2.1)$$

que l'on peut voir comme une propriété de continuité de l'intégrale, exige des hypothèses assez contraignantes. Une deuxième raison est le fait que l'espace de fonctions intégrables au sens de Riemann n'est pas complet : il contient des suites de Cauchy<sup>1</sup> de fonctions qui ne convergent pas vers une fonction intégrable au sens de Riemann.

**Remarque :** Avant de continuer, il est important de souligner que le but du cours n'est pas de "jeter à la poubelle" les notions et techniques d'intégration que vous connaissez déjà. En pratique, ces techniques vont continuer à nous servir, comme vous le verrez. Notre objectif est plutôt d'élargir votre boîte à outils mathématiques, de façon à ce que vous puissiez calculer certaines intégrales et faire de l'analyse plus facilement.

---

<sup>1</sup>Rappelons que, dans un espace normé, une suite de Cauchy est une suite  $f_n$  telle que  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\|f_n - f_m\| < \epsilon$  pour tout  $m, n \geq N$ .

### 2.1.2 Intégrale de Lebesgue

L'intégrale de Lebesgue tente toujours de mesurer l'aire "sous la courbe", mais en discrétisant cette fois l'axe des ordonnées. Le principe est le suivant, illustré sur la Figure 2.3 :

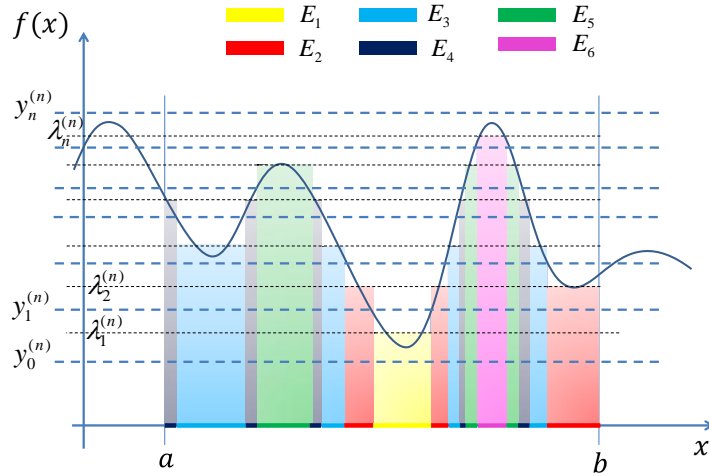


Figure 2.3 Illustration : l'intégrale de Lebesgue

- Discrétisation de l'axe des ordonnées :

$$\Omega_n = \{y_0^{(n)} < y_1^{(n)} < \dots < y_n^{(n)}\}$$

- Soit  $E_i^{(n)} = \{x \in [a; b] \text{ tels que } f(x) \in [y_{i-1}^{(n)}; y_i^{(n)}]\}$ . On définit une mesure de chaque ensemble  $E_i^{(n)}$ , notée  $m_i^{(n)}$
- Soit  $\lambda_i^{(n)} \in ]y_{i-1}^{(n)}; y_i^{(n)}]$ , on peut calculer :

$$J(\Omega_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(n)} m_i^{(n)}$$

- Passage à la limite quand la longueur des intervalles tend vers 0 :

$$\int_{[a;b]} f = \lim_n J(\Omega_n) \text{ lorsque } \sup_i |y_i^{(n)} - y_{i-1}^{(n)}| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- $f$  intégrable sur  $[a; b]$  ssi  $\lim_n J(\Omega_n)$  existe et est unique.

Nous allons par la suite procéder à une construction formelle de l'intégrale de Lebesgue.

## 2.2 Quelques notions de mesure

Comme on le voit sur la Figure 2.3, la définition de l'intégrale suppose de pouvoir mesurer des ensembles compliqués, composés de réunions de nombreux (et parfois

infinis) intervalles. C'est ce que permet la mesure de Lebesgue, qui est introduite ici. Mais avant de parler de mesure, il faut d'abord définir quels types d'ensembles peuvent être mesurés. La raison de cette restriction sera expliquée plus loin.

**Définition 2.2** (Ensemble mesurable). Une **tribu**  $\mathcal{T}$  définie sur  $\mathbb{R}$  est une famille non vide de parties de  $\mathbb{R}$  stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable :

- $\emptyset \in \mathcal{T}$  et  $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$  ;
- si  $E \in \mathcal{T}$ , alors  $\overline{E} \in \mathcal{T}$  ;
- si  $(E_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  famille d'éléments de  $\mathcal{T}$ , alors  $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} E_n \in \mathcal{T}$ .

Les éléments de la tribu  $\mathcal{T}$  s'appellent les **ensembles mesurables**. Un exemple important est la tribu des boréliens, notée  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , définie comme la plus petite tribu engendrée par tous les intervalles ouverts  $]a, b[$ . Autrement dit,  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  est donnée par l'intersection de toutes les tribus incluant tous les ouverts  $]a, b[ \subset \mathbb{R}$ .

**Remarque :** Avec la Définition 2.2, il est facile de montrer que toute tribu  $\mathcal{T}$  est aussi stable par intersection dénombrable et par différence :

$$E_n \in \mathcal{T} \implies \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} E_n = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \overline{E_n}} \in \mathcal{T}$$

et

$$E_1, E_2 \in \mathcal{T} \implies E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap \overline{E_2} \in \mathcal{T}.$$

**Définition 2.3** (Mesure). Soit  $\mathcal{T}$  une tribu sur  $\mathbb{R}$ . Une mesure  $\mu$  est une application de  $\mathcal{T}$  dans<sup>2</sup>  $\overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  telle que :

- $\mu(\emptyset) = 0$  ;
- pour toute  $(E_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  famille d'éléments **disjoints** de  $\mathcal{T}$ ,

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} E_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu(E_n).$$

$(\mathbb{R}, \mathcal{T}, \mu)$  est appelé **espace mesuré**.

Les propriétés suivantes, dont la démonstration est proposée comme un exercice, découlent directement de la définition précédente.

**Propriétés 2.1.** Soit  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré. Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles de  $\mathcal{T}$ . On a :

- (i) Si  $\mu(E \cap F)$  est finie, alors  $\mu(E \setminus F) = \mu(E) - \mu(E \cap F)$ .
- (ii) Si  $\mu(E \cap F)$  est finie, alors  $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F) - \mu(E \cap F)$ .
- (iii)  $\mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$ .
- (iv) Si  $E \subset F$ , alors  $\mu(E) \leq \mu(F)$ .

---

<sup>2</sup>Attention : ne pas confondre cette notation pour l'adhérence avec le complémentaire d'un ensemble.

(v) Soit  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une famille dans  $\mathcal{T}$  telle que  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ , alors

$$\mu \left( \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} E_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

(vi) Soit  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une famille dans  $\mathcal{T}$  telle que  $E_1 \supset E_2 \supset \dots$  et  $\mu(E_1) < \infty$ , alors

$$\mu \left( \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} E_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

**Remarque :** pourquoi restreindre les ensembles mesurables et ne pas utiliser tous les ensembles de  $\mathbb{R}$ ? Intuitivement, une mesure  $\mu$  associe à un ensemble donné  $E$  un nombre non-négatif (ou infini)  $\mu(E)$  qui quantifie la “taille” ou le “volume” de cet ensemble. Idéalement, nous souhaiterions qu’une telle application satisfasse les propriétés naturelles suivantes :

- (i)  $\mu(E)$  est définie pour tout sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}$ ;
- (ii)  $\mu([a, b]) = b - a$  pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ ;
- (iii) pour toute famille d’ensembles disjoints  $(E_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , on a  $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} E_n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu(E_n)$ ;
- (iv)  $\forall a \in \mathbb{R}, \mu(E) = \mu(E + a)$ , où  $E + a = \{b = a + e : e \in E\}$ .

Les propriétés (iii) et (iv) sont appelées additivité dénombrable et invariance par translation, respectivement. Cependant, on peut démontrer qu’il n’existe pas d’application  $\mu$  vérifiant toutes ces propriétés. Nous nous voyons donc obligés à renoncer à la propriété (i), les autres étant indispensables pour aboutir à une définition bien fondée de l’intégrale. C’est pourquoi une mesure est restreinte aux ensembles appartenant à une tribu, et donc tout ensemble n’est pas mesurable en général.

*Exemples :*

- Un exemple de mesure est la distribution spatiale de masse à un moment donné. Dans la modélisation d’un problème physique, on considère parfois que toute la masse  $M$  d’un objet étudié se concentre sur un point unique  $p$  de l’espace (ici modélisé par l’axe réel  $\mathbb{R}$ ) ; on parle alors de mesure ponctuelle. Cette hypothèse correspond à une mesure  $\mu$  (définie sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , par exemple) donnée par

$$\forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \mu(E) = \begin{cases} M, & \text{si } p \in E, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Un deuxième exemple est la mesure de dénombrement définie sur l’ensemble des parties  $\mathcal{P}(E)$ , qui satisfait :

$$\mu(E) = \#E.$$

Ainsi,  $\mu(\emptyset) = 0$ ,  $\mu(\{1, 2\}) = 2$  et  $\mu([a, b]) = \infty$  pour tout  $a > b$ .



- La théorie moderne des probabilités repose sur la notion de mesure. En effet, étant donnée une tribu  $\mathcal{A}$  sur l'univers d'une expérience aléatoire  $\Omega$  (c'est-à-dire, l'ensemble de tous les possibles résultats de cette expérience aléatoire), on définit la probabilité d'un événement  $E \in \mathcal{A}$  comme  $\mu(E)$ , sous la contrainte que  $\mu(\Omega) = 1$ . Par exemple, pour un jet de dé non biaisé on a  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$  et :
  - $\mu(\emptyset) = 0$  (car l'expérience doit bien produire un résultant dans  $\Omega$ ) ;
  - $\mu(\Omega) = 1$  (car on est sûr que, quoi qu'il arrive, le résultat appartiendra à  $\Omega$ ) ;
  - $\mu(\{\omega\}) = 1/6$  pour tout  $\omega \in \Omega$  (car le dé est non biaisé) ;
  - $\mu(\{1, 3, 5\}) = \mu(\{1\}) + \mu(\{3\}) + \mu(\{5\}) = 1/2$  (de par les propriétés d'une mesure) ;
et ainsi de suite.

**Définition 2.4** (Mesure de Borel). *La **mesure de Borel**, définie sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  et notée  $\nu$ , est l'unique mesure telle que  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ ,*

$$\nu(]a, b[) = b - a. \quad (2.2)$$

**Définition 2.5** (Ensembles négligeables). *Soit  $(\mathcal{E}, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré. On dit qu'un ensemble  $E \in \mathcal{T}$  est **négligeable** lorsque  $\mu(E) = 0$ . Une propriété vraie sauf sur un ensemble négligeable est dite **vraie presque partout**.*

**Remarques :**

- “ $E$  négligeable pour  $\mu$ ” n'implique pas  $E = \emptyset$  ! Par exemple, si  $\mu$  est une mesure ponctuelle de masse  $M$  concentrée sur le point  $p \in \mathbb{R}$ , alors tout ensemble  $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  tel que  $p \notin E$  est négligeable.
- Pour tout  $a \in \mathbb{R}$  on a  $\{a\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} ]a - 1/n, a + 1/n[ \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  (car intersection dénombrable de boréliens) et donc la mesure de Borel satisfait

$$\nu(\{a\}) = \nu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} ]a - 1/n, a + 1/n[\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(]a - 1/n, a + 1/n[) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0,$$

où la deuxième égalité vient de la Proposition 2.1, item (vi). Donc,  $\{a\}$  est négligeable. Il en découle que :

- (i)  $\nu([a, b]) = \nu(\{a\}) + \nu(]a, b]) = \nu(]a, b])$ , et de même pour  $\nu(]a, b])$  et  $\nu([a, b])$ .
- (ii) Tout ensemble dénombrable  $E = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  est négligeable pour la mesure de Borel, car

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{a_n\} \implies \nu(E) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(\{a_n\}) = 0.$$

Mais attention : la réciproque est fausse ! Le célèbre ensemble de Cantor est un exemple d'un ensemble négligeable et non-dénombrable.

- L'union dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable.

*Exemples :*

- L'ensemble  $\mathbb{Q}$  des rationnels est négligeable par rapport à la mesure de Borel (idem pour  $\mathbb{N}$  et  $\mathbb{Z}$ ).
- Si  $\mu$  est une mesure ponctuelle de masse  $M$  concentrée sur le point  $p \in \mathbb{R}$ , alors tout ensemble  $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  tel que  $p \notin E$  est négligeable.
- La fonction caractéristique des rationnels, valant 1 sur  $\mathbb{Q}$  et 0 sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , est nulle presque partout au sens de la mesure de Borel.
- La fonction tangente est continue presque partout au sens de la mesure de Borel.

**Définition 2.6** (Mesure complète). *Soit  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré. On dit que cet espace est **complet**, ou que  $\mu$  est complète ou que  $\mathcal{T}$  est complète pour  $\mu$  si :*

$$(T \in \mathcal{T}, \mu(T) = 0, A \subset T) \Rightarrow A \in \mathcal{T}.$$

Autrement dit, une mesure est complète lorsque tout ensemble négligeable pour cette mesure appartient à la tribu sur laquelle elle est définie. Ceci n'est malheureusement pas le cas pour la mesure de Borel, ce qui peut conduire à des situations indésirables ou contre-intuitives.<sup>3</sup> C'est la raison pour laquelle la mesure de Lebesgue est généralement vue comme préférable à celle de Borel.

**Définition 2.7** (Mesure de Lebesgue). *La **mesure de Lebesgue** de  $\mathbb{R}$ , notée  $\mu$ , est obtenue par extension de la mesure de Borel  $\nu$ , étant définie sur la plus petite tribu  $\mathcal{T}(\mathbb{R})$  qui contient  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  de sorte que (i)  $\mu$  est complète et que (ii)  $\mu(E) = \nu(E)$  pour tout ensemble Borélien  $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .*

On se placera dans la suite du cours dans  $\mathbb{R}$ , muni de la tribu et de la mesure de Lebesgue, notées  $\mathcal{T}$  et  $\mu$  respectivement.

**Remarque :** La tribu de Lebesgue contient la plupart des ensembles mais pas tous : il est possible de construire des ensembles non mesurables, c'est-à-dire qui ne sont pas dans  $\mathcal{T}$ . Plus précisément on a les inclusions strictes

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Remarquons quand même que trouver des ensembles non mesurables (et même non boréliens) est une tâche assez ardue : la totalité des ensembles considérés dans le cours sont mesurables, de telle sorte qu'on ne se posera plus ici la question de la mesurabilité.

## 2.3 Intégrale de Lebesgue

Avant de définir l'intégrale, il faut s'assurer que l'on peut mesurer les sous-ensembles de niveaux de la fonction considérée. C'est le rôle de la définition suivante, où nous noterons  $f^{-1}(A)$  l'image réciproque d'une partie  $E$  par une fonction  $f$ , c'est-à-dire,  $f^{-1}(E) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in E\}$ .

<sup>3</sup>Par exemple, puisque on peut trouver un ensemble  $E$  de mesure nulle au sens de Borel contenant un autre ensemble  $F$  non-mesurable au sens de Borel, une propriété étant vraie uniquement sur  $E$  est fausse presque partout, alors qu'on ne peut en principe pas dire la même chose d'une propriété étant vraie uniquement sur  $F$  (même si  $F \subset E$ ), celui-ci n'étant pas mesurable.

**Définition 2.8** (Fonction mesurable). *La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite Lebesgue-mesurable, ou tout simplement mesurable, si et seulement si  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,*

$$f^{-1}(] \alpha, \infty[) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{T}.$$

**Remarque :** De façon similaire, la condition que

$$f^{-1}(] \alpha, \infty[) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  caractérise les fonctions Borel-mesurables. Or, par convention l'affirmation “ $f$  est mesurable” (sans préciser la tribu) est toujours prise au sens de Lebesgue.

**Remarque :** La somme et le produit de deux fonctions mesurables sont mesurables. Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est mesurable et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est Borel-mesurable, alors  $g \circ f$  est mesurable.

En pratique, toutes les fonctions rencontrées dans le cours seront mesurables, ce qui fait qu'on omettra souvent de mentionner et vérifier cette propriété. Pour construire l'intégrale de Lebesgue, on procède à présent en 3 étapes, en définissant successivement :

1. l'intégrale d'une fonction étagée positive,
2. l'intégrale d'une fonction positive,
3. l'intégrale d'une fonction quelconque.

**Définition 2.9** (Fonction indicatrice ou caractéristique). *La fonction indicatrice (parfois appelée aussi fonction caractéristique) d'un ensemble  $E \in \mathcal{T}(\mathbb{R})$ , notée  $\mathbb{1}_E : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ , est définie par*

$$\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Exemple :* La fonction indicatrice des rationnels  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$  satisfait  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = 0$  presque partout.

**Définition 2.10.** *Une fonction  $f$  est dite **étagée** sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}, \mu)$  si elle s'exprime sous la forme*

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{E_i}, \quad (2.3)$$

où  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et les  $E_i$  sont des éléments de  $\mathcal{T}$ .

**Remarques :**

1. L'expression de  $f$  n'est pas unique.
2. Une fonction en **escalier** (constante sur des intervalles) ayant un nombre fini de niveaux est étagée, mais la réciproque est fausse (contre-exemple :  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ ).

**Définition 2.11** (Intégrale d'une fonction étagée positive). *Soit  $f$  une fonction étagée positive (c-à-d  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\forall i$ ). L'intégrale de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par rapport à la mesure  $\mu$  est définie par :*

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i).$$

**Remarques :**

1. La valeur de  $\int_{\mathbb{R}} f d\mu$  ne dépend pas de l'expression de  $f$  sous la forme de l'équation (2.3).
2. Soit  $F \subset \mathbb{R}$ . Alors on définit :

$$\int_F f d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_F d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i \cap F).$$

*Exemples :* Les intégrales de Lebesgue de

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], \\ 0, & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

et de

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2[ \cup ]1/2, 1], \\ 10, & x = 1/2, \\ 0, & \text{partout ailleurs.} \end{cases}$$

sont identiques :

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]} d\mu = \mu([0, 1]) = 1$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g d\mu &= \int_{\mathbb{R}} (\mathbb{1}_{[0,1/2[ \cup ]1/2,1]} + 10 \mathbb{1}_{\{1/2\}}) d\mu = \mu([0, 1/2[ \cup ]1/2, 1]) + 10 \mu(\{1/2\}) \\ &= \mu([0, 1/2[) + \mu(]1/2, 1]) = 1, \end{aligned}$$

car  $\mu(\{1/2\}) = 0$ . C'est attendu : ces fonctions sont égales presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue.

Dans la définition suivante, on notera  $f \leq g$  lorsque les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur un même domaine  $D$  vérifient  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \in D$ . De même, pour tout  $c \in \mathbb{R}$  on écrit  $f \geq c$  ou  $f \leq c$  lorsque  $\forall x \in D$ ,  $f(x) \geq c$  ou  $f(x) \leq c$ , respectivement.

**Définition 2.12** (Intégrale d'une fonction positive). *Soit  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$  une fonction mesurable. L'intégrale de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  est définie par*

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} e d\mu : e \text{ étagée positive telle que } 0 \leq e \leq f \right\}.$$

Afin d'étendre cette définition à des fonctions mesurables quelconques, on les décompose en "parties" positives et négatives. Cette extension reposera sur la notion cruciale d'intégrabilité.

**Définition 2.13** (Fonction intégrable). *Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  (ou  $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ) est intégrable si et seulement si*

$$\int_{\mathbb{R}} |f| d\mu < +\infty.$$

**Définition 2.14** (Intégrale d'une fonction à valeurs réelles). Soit  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonction mesurable. On écrit :  $f = f^+ - f^-$ , où  $f^+ = \max(f, 0)$  et  $f^- = \max(-f, 0)$  sont des fonctions **positives**. Alors  $f$  est **intégrable si et seulement si**  $f^+$  et  $f^-$  **sont intégrables**, et l'intégrale de  $f$  est **définie** par :

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \int_{\mathbb{R}} f^+ d\mu - \int_{\mathbb{R}} f^- d\mu$$

On opère de même pour une fonction  $f$  à valeurs complexes, en intégrant séparément les parties réelle  $\Re[f]$  et imaginaire  $\Im[f]$ .

**Définition 2.15** (Intégrale d'une fonction à valeurs complexes). Soit  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$  une fonction mesurable, et soient  $p(x) = \Re[f(x)]$  et  $q(x) = \Im[f(x)]$ . Alors  $f$  est **intégrable si et seulement si**  $p$  et  $q$  **sont intégrables**, et l'intégrale de  $f$  est **définie** par :

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \int_{\mathbb{R}} p d\mu + i \int_{\mathbb{R}} q d\mu.$$

**Remarque :** Dans les définitions précédentes, la fonction à intégrer est supposée mesurable. Pour illustrer l'importance de cette condition, voyons ce qui peut se passer si la condition n'est pas imposée. Posons la tribu  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$  sur  $\mathbb{R}$ , sur laquelle on va définir une mesure  $\mu$  très simple, vérifiant  $\mu(\emptyset) = 0$  et  $\mu(\mathbb{R}) = 1$ . La fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}$$

n'est pas  $\mu$ -mesurable, car  $f^{-1}(]0, \infty]) = [0, 1] \notin \mathcal{T}$ . Par un raisonnement similaire, la fonction  $g(x) = 1 - f(x)$  n'est pas  $\mu$ -mesurable non plus. Si on essaie d'appliquer tout de même la définition de l'intégrale de Lebesgue pour ces fonctions positives, alors on conclut que leurs intégrales sont nulles, car la seule fonction étagée<sup>4</sup> qui est majorée par  $f$  et par  $g$  dans  $\mathbb{R}$  est donnée par  $e(x) = 0 \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}} = 0$ , vu que  $\mathcal{T}$  ne contient que  $\mathbb{R}$  et  $\emptyset$ . Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} e d\mu : e \text{ est étagée positive et } 0 \leq e \leq f \right\} = 0$$

et il en va de même pour  $g$ . Or, la fonction étagée positive  $h := f + g = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$  satisfait

$$\int_{\mathbb{R}} h d\mu = \int_{\mathbb{R}} d\mu = 1 \neq \int_{\mathbb{R}} f d\mu + \int_{\mathbb{R}} g d\mu = 0,$$

et donc cette intégrale n'est pas linéaire ! Le problème vient du fait que les fonctions  $f$  et  $g$  ne sont pas  $\mu$ -mesurables.

Comme vu dans la Définition 2.13, contrairement à ce qui se passait avec l'intégrale de Riemann, la question n'est pas de savoir si on sait l'intégrer ou pas : on peut (en principe) calculer  $\int_{\mathbb{R}} |f| d\mu$  quelle que soit la fonction mesurable  $f$ , y compris si elle est discontinue partout ( $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$  par exemple). Il s'agit juste de déterminer si le résultat est fini ou non.

---

<sup>4</sup>Souvenons-nous qu'une fonction étagée est donnée par  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{E_i}$ , où chaque  $E_i$  doit être mesurable, c'est-à-dire, doit appartenir à  $\mathcal{T}$ .

**Définition 2.16** (Espace  $L^1$ ). On note  $L^1(\mathbb{R})$  l'espace des fonctions intégrables quotienté par la relation d'équivalence "égal presque partout".

Ce quotient permet de donner une structure d'espace vectoriel normé à  $L^1(\mathbb{R})$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_1$  habituelle (mais calculée avec l'intégrale de Lebesgue). Ainsi deux fonctions  $f$  et  $g$  égales presque partout (ponctuellement) sont égales dans  $L^1$ , puisque  $\|f - g\|_1 = 0$ .

*Exemples :*

1.  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \in L^1$ , car  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = 0$  presque partout.
2. La fonction sinus cardinal  $f(t) = \frac{\sin t}{t}$  n'est pas intégrable dans  $\mathbb{R}$ . Pour le démontrer, on commence par noter que  $f$  est paire, c'est-à-dire,  $f(-x) = f(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Il suffit alors d'étudier l'intégrabilité sur  $\mathbb{R}_+$ . On a

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f| d\mu &= \int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty \underbrace{\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx}_{:=a_n \geq 0}. \end{aligned}$$

Pour tout  $n \geq 1$ ,  $a_n$  vérifie

$$a_n \geq \frac{1}{n\pi} \underbrace{\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\sin x| dx}_{:=b_n}.$$

Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -(-1 - 1) = 2,$$

et donc

$$\int_0^\infty |f| d\mu = \sum_{n=1}^\infty a_n \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty.$$

**Définition 2.17** (Fonction localement intégrable). On dit qu'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est localement intégrable si et seulement si

$$\int_K |f| d\mu \text{ est finie}$$

pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}$ . On note alors  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ .

On rappelle que les compacts de  $\mathbb{R}$  sont les ensembles fermés et bornés de  $\mathbb{R}$ . En particulier, tout compact de  $\mathbb{R}$  est inclus dans un segment  $[a, b]$  avec  $a < b$  deux réels finis.

*Exemple :* La fonction constante  $f(x) = c$  avec  $|c| < \infty$  n'est pas dans  $L^1(\mathbb{R})$ , mais est dans  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$  car pour tout compact  $K$  il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $K \subset [a, b]$  et ainsi

$$\int_K |f| d\mu = |c| \mu(K) \leq |c|(b - a) < \infty.$$

**Propriétés 2.2** (Propriétés de l'intégrale de Lebesgue). *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions mesurables de  $\mathbb{R}$ , et  $E, F \subset \mathbb{R}$  des ensembles mesurables.*

- (i) *Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions intégrables sur  $E \subset \mathbb{R}$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , alors  $\alpha f + \beta g$  est aussi intégrable sur  $E$  et*

$$\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu.$$

- (ii) *Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions intégrables sur  $E \subset \mathbb{R}$ , et si  $f \leq g$  presque partout sur  $E$ , alors*

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

- (iii) *Si  $f$  est intégrable sur  $E \subset \mathbb{R}$ , alors*

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu.$$

- (iv) *S'il existe  $g$  intégrable sur  $E \subset \mathbb{R}$  telle que  $|f| \leq g$  presque partout sur  $E$ , alors  $f$  est intégrable sur  $E$ , et*

$$\int_E |f| d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

- (v) *Si  $f$  est intégrable sur  $E$  et si  $F \subset E$ , alors  $f$  est intégrable sur  $F$  également. De plus, si  $f$  est **positive**, alors*

$$\int_F f d\mu \leq \int_E f d\mu.$$

- (vi) *Soit  $f$  intégrable sur deux ensembles  $E$  et  $F$  **disjoints** ( $E \cap F = \emptyset$ ). Alors :*

$$\int_{E \cup F} f d\mu = \int_E f d\mu + \int_F f d\mu.$$

- (vii) *Soit  $f$  et  $g$  égales presque partout sur  $E$ . Alors, si  $f$  est intégrable sur  $E$ ,  $g$  l'est également, et*

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu.$$

*On a notamment*

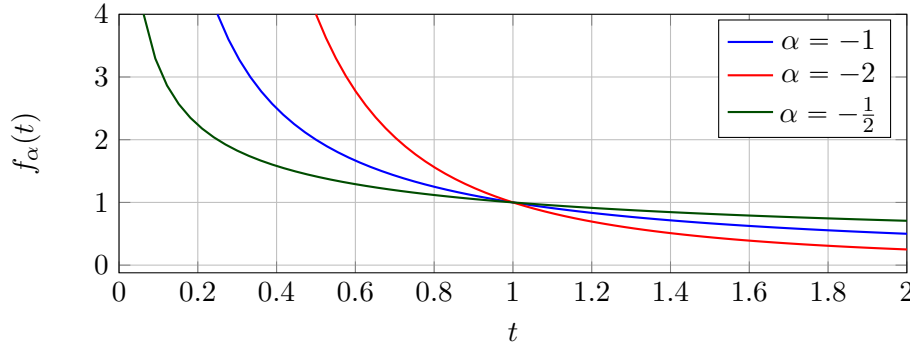
$$\int_E f d\mu = 0 \text{ si } f = 0 \text{ presque partout.}$$

- (viii) *Soit  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonction **bornée** p.p., et  $E \subset \mathcal{T}$  de **mesure finie**. Alors  $f$  est intégrable sur  $E$ .*

**Proposition 2.1.** *Soit une fonction  $f$  dont le module est Riemann intégrable. Alors elle est Lebesgue-intégrable, et les deux intégrales coïncident.*

Dans toute la suite, on emploiera la notation habituelle  $\int_E f(x) dx$  pour désigner l'intégrale de Lebesgue de  $f$  sur  $E$ , sachant qu'elle coïncide avec l'intégrale de Riemann lorsque celle-ci est définie.

*Exemple :* La fonction  $f_\alpha(t) = t^\alpha$  n'est jamais intégrable sur  $\mathbb{R}$  pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ . En revanche, comme avec l'intégrale de Riemann,  $f_\alpha \in L^1(0, 1)$  si et seulement si  $\alpha > -1$  ; et  $f_\alpha \in L^1(1, +\infty)$  si et seulement si  $\alpha < -1$  (voir illustration dans la Figure 2.4).



**Figure 2.4** Comportement de la fonction  $f_\alpha(t) = t^\alpha$  pour  $\alpha \in \{-2, -1, -1/2\}$ . Seule  $f_{-1/2}$  est intégrable dans un voisinage de zéro, grâce à sa croissance suffisamment faible lorsque  $t \rightarrow 0$ . Inversement, seule  $f_{-2}$  est intégrable dans un “voisinage de l’infini,” en vertu de sa décroissance assez rapide lorsque  $t \rightarrow \infty$ . L’intégrale de  $f_{-1}$  diverge dans les deux cas.

## 2.4 Calcul intégral

On donne ici les grands théorèmes d’intégration, qui permettent d’échanger limite et intégrale, dérivation et intégrale, le sens d’intégration lorsqu’on est en dimension supérieure, ou bien de faire des intégrations par parties ou des changements de variables.

### Échange de limite et intégrale

**Théorème 2.2** (Beppo-Levi ou convergence monotone, TCM). *Soit  $(f_n)_n$  une suite croissante de fonctions positives, c’est-à-dire :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}.$$

Alors :

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx. \quad (2.4)$$

**Remarque :** Ce théorème ne donne pas l’intégrabilité de la fonction limite : le résultat peut valoir  $+\infty$  !

**Théorème 2.3** (Théorème de la convergence dominée de Lebesgue, TCD). *Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que :*

1. *La suite  $(f_n)$  converge simplement presque partout vers  $f$  ;*
2. *il existe une fonction positive  $g$  intégrable sur  $\mathbb{R}$  telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq g(x) \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}.$$

Alors :

1.  *$f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  ;*
2. *on peut échanger limite et intégrale, l’équation (2.4) est donc vérifiée.*

**Exemples :** Calculons  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx$  lorsque :

1.  $f_n(x) = \frac{2^n}{1+x^2}$ . On a

$$\forall x, 0 \leq |f_n(x)| \leq \frac{2}{1+x^2} = g(x),$$



où la majorante  $g(x)$  est intégrable :

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx = 2[\arctan x]_{-\infty}^{+\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\pi.$$

On utilise alors le Théorème 2.3 pour déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

2.  $f_n(x) = e^{-x^2} e^{-n \sin^2 x}$ . Posons  $a_n = e^{-n \sin^2 x}$ . Puisque  $a_n \leq 1$  pour tout  $n$ , on a

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leq e^{-x^2} =: g(x),$$

fonction intégrable avec  $\int_{\mathbb{R}} g d\mu = \sqrt{\pi}$  (comme nous le verrons). Vérifions alors si la suite  $f_n(x)$  converge pour tout  $x$ . On a deux cas :

(a) Lorsque  $x \notin \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ , on a  $\sin^2 x > 0$  et donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n \sin^2 x} = 0.$$

(b) Lorsque  $\sin^2 x = 0$ , alors  $f_n(x) = e^{-x^2}$  pour tout  $n$ .

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} e^{-x^2}, & x = k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, par le Théorème 2.3 on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0,$$

car  $f = 0$  presque partout.

### Intégrale dépendant d'un paramètre

Soit  $(a, b)$  un intervalle (borné ou non) de  $\mathbb{R}$ , et  $f$  une fonction de  $(a, b) \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On suppose que  $\forall t \in (a, b)$ , la fonction  $x \mapsto f(t, x)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . On pose alors :

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t, x) dx.$$

Que peut-on dire sur la régularité de  $I$  en fonction de celle de  $t \mapsto f(t, x)$  ?

**Corollaire 2.1** (Continuité). *Si pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto f(t, x)$  est continue au voisinage de  $t^*$ , et s'il existe une fonction positive  $g$  intégrable sur  $\mathbb{R}$  et un voisinage  $V$  de  $t^*$  tels que :*

$$\forall t \in V, |f(t, x)| \leq g(x) \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R},$$

alors :

$$I \text{ est continue en } t^*.$$

*Démonstration.* Posons  $f_n(x) := f(t_n, x)$ , où  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite qui converge vers  $t^*$ , avec  $t_n \in V$ . De par la continuité de  $t \mapsto f(t, x)$  dans un voisinage de  $t^*$  pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n, x) = f(t^*, x)$$

pour presque tout  $x$ . Comme par ailleurs pour tout  $t_n \in V$  et pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $|f_n(x)| = |f(t_n, x)| \leq g(x)$  positive intégrable (par hypothèse), les conditions du Théorème 2.3 sont vérifiées. Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} I(t_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(t_n, x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(t^*, x) dx = I(t^*) = I\left(\lim_{n \rightarrow \infty} t_n\right). \end{aligned}$$

□

**Corollaire 2.2** (Dérivabilité). *S'il existe un voisinage  $V$  de  $t^*$  tel que :*

1. *pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ , la fonction  $t \mapsto f(t, x)$  est continûment dérivable ( $C^1$ ) sur  $V$  ;*
2.  *$\exists g$  positive intégrable sur  $\mathbb{R}$  telle que*

$$\forall t \in V, \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq g(x) \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R},$$

*alors  $I$  est  $C^1$  en  $t^*$ , et*

$$I'(t^*) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(t^*, x) d\mu(x)$$

*Démonstration.* Puisque  $V$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$  contenant  $t^*$ , il existe un sous-ensemble  $K \subset V$  compact tel que  $t^* \in K$ . Posons

$$f_n(x) = \frac{f(t^*, x) - f(t_n, x)}{t^* - t_n},$$

où  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset K$  est une suite qui converge vers  $t^*$ . Alors, pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$  il vient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(t^*, x) - f(t_n, x)}{t^* - t_n} = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x).$$

De plus, comme l'application  $t \mapsto f(t, x)$  est  $C^1$  sur  $K \subset V$  pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ , alors elle est lipschitzienne<sup>5</sup> sur  $K$  (voir Section 1.2), vérifiant

$$|f(t^*, x) - f(t_n, x)| \leq \left( \sup_{t \in K} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \right) |t^* - t_n|,$$

d'où

$$|f_n(x)| = \left| \frac{f(t^*, x) - f(t_n, x)}{t^* - t_n} \right| \leq \sup_{t \in K} \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq g(x)$$

<sup>5</sup>Ici nous avons un exemple où le caractère lipschitzien de  $t \mapsto f(t, x)$  nous sert à trouver une majorante pour la suite  $|f_n|$ . Notez que la continuité de cette application ne suffit pas.

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , où la dernière inégalité vient de l'hypothèse 2 de l'énoncé, avec  $g$  intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Par conséquent les conditions du théorème de convergence dominée (Théorème 2.3) sont satisfaites et l'on a

$$\begin{aligned} I'(t^*) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I(t^*) - I(t_n)}{t^* - t_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t^*, x) - f(t_n, x)}{t^* - t_n} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(t^*, x) dx. \end{aligned}$$

Et enfin, comme  $\frac{\partial f}{\partial t}(t^*, x)$  est  $C^1$  sur un voisinage de  $t^*$ , alors on peut appliquer le Corollaire 2.1 pour conclure que  $I'(t^*)$  est  $C^1$  en  $t^*$ .  $\square$

**Remarque :** Si l'on veut démontrer directement la continuité ou la dérivabilité sur l'intervalle ouvert  $]a, b[$ , il suffit de vérifier l'hypothèse de domination sur tout compact inclus dans  $]a, b[$ .

*Exemple :* Soit  $h \in L^1(\mathbb{R})$ . On pose

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t, x) dx, \quad \text{avec } f(t, x) = h(x) e^{-i2\pi tx}.$$

$I$  est appelée **transformée de Fourier** de la fonction  $h$ , et sera étudiée plus en détail au Chapitre 4. Ici, nous allons vérifier que  $I$  est continue. D'abord, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto f(t, x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , car  $t \mapsto e^{-i2\pi tx}$  l'est. En plus, comme  $h(x) \in L^1(\mathbb{R})$  et  $|f(t, x)| = |h(x)|$ , alors les hypothèses du Corollaire 2.1 sont satisfaites, et on conclut que  $I(t)$  est continue.

### Intégration par parties

L'intégration par parties est un outil très utilisé pour calculer des intégrales. Les hypothèses dans le cas de l'intégrale de Lebesgue sont légèrement plus générales, et font appel à la notion d'absolue continuité.

**Définition 2.18.** Une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est **absolument continue** sur  $[a, b]$  si et seulement si :

- (i)  $f$  est dérivable p.p. sur  $[a, b]$  ;
- (ii)  $f'$  est intégrable sur  $[a, b]$  ;
- (iii)  $\forall t \in [a, b], f(t) = f(a) + \int_a^t f'(x) dx$ .

*Exemples :*

- Une fonction absolument continue est continue. La réciproque est fausse : par exemple, sur un intervalle  $[a, b]$  tel que  $a \leq 0 < b$ , la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

est continue mais n'est pas absolument continue, car  $f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$  n'est pas intégrable sur l'intervalle en question, comme nous allons le montrer par la suite. Pour tout  $0 < u < t$ , on a

$$\int_u^t |f'(x)| dx \geq \left| \int_u^t f'(x) dx \right| = |f(t) - f(u)|, \quad (2.5)$$

par le Théorème Fondamental de l'Analyse, car  $f'$  est continue sur  $[u, t]$ . Choisissons maintenant un nombre  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $b \geq \frac{1}{n\pi}$ . Comme pour tout  $N \geq n$  on a  $\bigcup_{k=n}^N [\frac{1}{(k+1/2)\pi}, \frac{1}{k\pi}] \subset ]0, b]$ , et les ensembles dans cette réunion sont disjoints, alors

$$\begin{aligned} \int_0^b |f'(x)| dx &\geq \sum_{k=n}^N \int_{\frac{1}{(k+1/2)\pi}}^{\frac{1}{k\pi}} |f'(x)| dx \geq \sum_{k=n}^N \left| f\left(\frac{1}{k\pi}\right) - f\left(\frac{1}{(k+1/2)\pi}\right) \right| \\ &= \sum_{k=n}^N \frac{1}{(k + \frac{1}{2})\pi}, \end{aligned}$$

où la deuxième inégalité vient de (2.5). Cette inégalité étant vraie pour tout  $N \geq n$ , on peut écrire

$$\int_0^b |f'(x)| dx \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^N \frac{1}{(k + \frac{1}{2})\pi} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k + \frac{1}{2})\pi} = \infty.$$

Vu que  $]0, b] \subset [a, b]$ , l'intégrale sur  $[a, b]$  de la fonction positive  $|f'(x)|$  doit être supérieure ou égale à celle de l'intégrale sur  $]0, b]$ , d'où

$$\int_a^b |f'(x)| dx = \infty.$$

- Une fonction  $C^1$  est absolument continue. La réciproque est fautive : par exemple,  $f(x) = |x|$  est absolument continue sur tout intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  mais n'est pas  $C^1$ , sa dérivée étant discontinue en 0.

**Remarque :** Ainsi que la propriété de continuité, l'absolue continuité est stable par somme et produit : si  $f$  et  $g$  sont absolument continues sur  $[a, b]$ , alors il en va de même pour  $f + g$  et  $fg$ .

**Proposition 2.2.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable. Alors l'application  $F : t \mapsto \int_{[a,t]} f d\mu$  est absolument continue sur  $[a, b]$ , et donc :

- $F$  est dérivable p.p. sur  $[a, b]$  ;
- $F'$  est intégrable sur  $[a, b]$ , et  $F'(t) = f(t)$  p.p. sur  $[a, b]$  ;
- $\forall t, s \in [a, b]$  avec  $s \leq t$ , on a  $F(t) = F(s) + \int_s^t F'(x) d\mu(x)$ .

On dit alors que  $F$  est une **primitive** de  $f$  sur  $[a, b]$ .

**Proposition 2.3** (Intégration par parties, I.P.P.). Soient  $u, v$  deux fonctions absolument continues sur l'intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Alors

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

*Démonstration.* La fonction  $uv$  étant absolument continue sur  $[a, b]$  (car produit de fonctions absolument continues sur cet intervalle), elle y est différentiable presque partout, avec

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \quad \text{presque partout sur } [a, b].$$

De plus,  $(uv)' \in L^1([a, b])$  car  $uv$  est absolument continue. On intègre alors les deux membres de l'équation ci-dessus sur  $[a, b]$  pour avoir le résultat.  $\square$

**Remarque :** Afin de pouvoir appliquer la formule d'I.P.P. sur un intervalle non-borné (tel que  $[a, \infty[$  ou  $\mathbb{R}$ ), il suffit que la condition d'absolue continuité de  $u$  et  $v$  soit vérifiée dans tout compact inclus dans l'intervalle en question.

*Exemple :* Calculons l'intégrale

$$I = \int_0^\pi x \cos(x) dx.$$

On souhaite utiliser l'intégration par parties avec  $u(x) = x$  et  $v'(x) = \cos x \implies v(x) = \sin x$ . Les fonctions  $u$  et  $v$  sont absolument continues sur  $[0, \pi]$ , car elles satisfont les conditions de la Définition 2.18 :

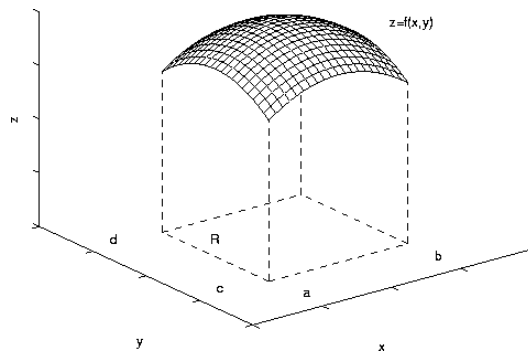
- $u'(x) = 1$  est intégrable sur  $[0, \pi]$  et  $t = 0 + \int_0^t dx$  pour tout  $t \in [0, \pi]$  ;
- $v'(x) = \cos x$  est intégrable sur  $[0, \pi]$  et  $v(t) = v(0) + \int_0^t \cos x dx$  pour tout  $t \in [0, \pi]$ .

Les conditions requises par la Proposition 2.3 sont alors vérifiées, nous autorisant alors à écrire

$$\int_0^\pi x \cos x dx = \pi \sin \pi - 0 \sin 0 - \int_0^\pi \sin x dx = [\cos x]_0^\pi = -2.$$

## Intégrales multiples

Nous avons pour l'instant considéré uniquement des fonctions d'une variable réelle, mais la théorie se généralise à des fonctions de plusieurs variables  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  : il suffit pour cela de définir la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ . Dans le cas  $n = 2$ , l'intégrale d'une fonction positive s'interprète comme le volume sous la surface  $z = f(x, y)$ , comme illustré sur la Figure 2.5.



**Figure 2.5** Illustration de l'intégrale d'une fonction de 2 variables

On se place dans  $L^1(\mathbb{R}^2)$  muni de la tribu et de la mesure de Lebesgue, telle que pour tout pavé (ouvert ou fermé) de  $\mathbb{R}^2$  de la forme  $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$  :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)}(x) dx = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2),$$

et plus généralement, pour tout domaine  $\mathcal{A}$  de  $\mathbb{R}^2$  :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x) dx = \text{aire de } \mathcal{A}.$$

Toutes les propriétés de la section précédente se généralisent au cas de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{R}^n$ . Mais pour calculer en pratique ces intégrales, on aimerait se ramener au cas 1D et utiliser les règles de calcul habituelles basées sur les primitives. C'est ce que permettent les théorèmes suivants.

**Théorème 2.4** (Théorème de Tonelli). *Soit  $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$  et  $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$  des ouverts et soit  $f$  une fonction mesurable et **positive** sur  $\Omega_1 \times \Omega_2$ . Alors :*

$$\int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\Omega_2} \left( \int_{\Omega_1} f(x, y) dx \right) dy.$$

*Si de plus le résultat est fini, alors  $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ .*

**Théorème 2.5** (Théorème de Fubini). *Soit  $f \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ .*

*Alors pour presque tout  $x \in \Omega_1$ ,  $y \mapsto f(x, y) \in L^1(\Omega_2)$ , et*

$$x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x, y) dy \in L^1(\Omega_1)$$

*De même pour presque tout  $y \in \Omega_2$ ,  $x \mapsto f(x, y) \in L^1(\Omega_1)$ , et*

$$y \mapsto \int_{\Omega_1} f(x, y) dx \in L^1(\Omega_2).$$

*De plus, on a :*

$$\int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\Omega_2} \left( \int_{\Omega_1} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) dx dy$$

**Remarques :**

- On utilise en général ces deux théorèmes de manière combinée : pour une fonction quelconque  $f$ , on commence par appliquer le théorème de Tonelli à  $|f|$ . Si le résultat est fini, on peut appliquer le théorème de Fubini à  $f$  pour calculer l'intégrale.
- Dans certains cas on peut éviter l'application de Tonelli car on déduit directement l'intégrabilité de la fonction (par exemple, une fonction bornée sur un ensemble borné est intégrable).
- Dans les Théorèmes de Tonelli et de Fubini, le fait que l'on utilise la notation  $\Omega_1 \times \Omega_2$  ne veut pas dire que nous nous limitons à calculer des intégrales sur des produits cartésiens. En effet, on peut avoir un domaine assez général ayant la forme

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} : x \in E_x \text{ et } y \in E_y(x)\}$$

et définir  $\bar{f}(x, y) = f(x, y)\mathbb{1}_\Omega(x, y)$  de sorte que  $\bar{f}$  est positive sur  $\Omega$  si  $f$  l'est et  $f \in L^1(\Omega) \implies \bar{f} \in L^1(\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2})$  (la réciproque est aussi vraie), et donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}} \bar{f}(x, y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}} f(x, y)\mathbb{1}_\Omega(x, y) dx dy \\ &\stackrel{(i)}{=} \int_{\mathbb{R}^{N_1}} \left( \int_{\mathbb{R}^{N_2}} f(x, y)\mathbb{1}_\Omega(x, y) dy \right) dx \\ &\stackrel{(ii)}{=} \int_{E_x} \left( \int_{E_y(x)} f(x, y) dy \right) dx, \end{aligned}$$

où (i) découle de Tonelli/Fubini et (ii) vient de la définition de  $\mathbb{1}_\Omega(x, y)$ . Le même raisonnement s'applique bien sûr si on a  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} : x \in E_x(y) \text{ et } y \in E_y\}$ .

*Exemple :* Posons  $E = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x < y\} \subset \mathbb{R}^2$  et calculons l'intégrale

$$I = \int_E xy dx dy.$$

La fonction  $(x, y) \mapsto xy$  étant positive sur  $E$ , on peut appliquer Tonelli pour obtenir :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left( \int_0^y x dx \right) y dy = \int_0^1 \left( \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^y \right) y dy \\ &= \int_0^1 \frac{y^3}{2} dy = \left[ \frac{y^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

On aurait pu également justifier ce calcul en faisant appel au Théorème : l'ensemble  $E$  est borné (car  $\|(x, y)\|^2 = x^2 + y^2 \leq 2$  pour tout  $(x, y) \in E$ ), et la fonction  $(x, y) \mapsto xy$  est bornée sur  $E$ , donc intégrable sur  $E$ . Vérifions maintenant que le même résultat est obtenu si on intègre par rapport à  $y$  d'abord :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left( \int_x^1 y dy \right) x dx = \int_0^1 \left( \left[ \frac{y^2}{2} \right]_x^1 \right) x dx \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \right) x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x dx - \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{4} \right]_0^1 - \left[ \frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

### Changement de variable

On étudie ici les changements de variable dans  $\mathbb{R}^n$ . Soient  $\Omega$  et  $\Delta$  deux domaines de  $\mathbb{R}^n$ , et  $\phi$  une bijection de  $\Omega$  dans  $\Delta$  telle que  $\phi$  (resp.  $\phi^{-1}$ ) soit  $C^1$  sur  $\Omega$  (resp. sur  $\Delta$ ) (on dit que  $\phi$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\Omega$  dans  $\Delta$ ).

#### Définition 2.19.

- La **matrice jacobienne** de  $\phi$  en un point  $x \in \Omega$  est le gradient de  $f$  en ce point, défini par

$$\text{Jac}_\phi(x) := \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}.$$

- Le **jacobien** de  $\phi$  en  $x$  est défini par

$$J_\phi(x) := \det(\text{Jac}_\phi(x)).$$

**Théorème 2.6** (Changement de variable). *Soit  $f$  une fonction de  $\Delta$  dans  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ). Alors :*

1.  *$f$  est intégrable sur  $\Delta$  si et seulement si le produit  $(f \circ \phi) J_\phi$  est intégrable sur  $\Omega$  ;*
2. *si  $f$  est intégrable sur  $\Delta$ , alors*

$$\int_\Delta f(y) dy = \int_\Omega f(\phi(x)) |J_\phi(x)| dx.$$

*Exemples :*

- Calculons le jacobien associé au changement de variable polaire :  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . On précisera bien les bornes des variables  $r$  et  $\theta$ . Posons  $\Delta = \mathbb{R}^2$  et  $\Omega = \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[$ . L'application  $\phi$  est définie par

$$\begin{aligned} \phi : \Omega &\rightarrow \Delta \\ (r, \theta) &\mapsto (\phi_1(r, \theta), \phi_2(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta). \end{aligned}$$

La matrice jacobienne associée à  $\phi$  est

$$\text{Jac}_\phi(r, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta}(r, \theta) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial r}(r, \theta) & \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta}(r, \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix},$$

et donc  $J_\phi(r, \theta) = \det(\text{Jac}_\phi(r, \theta)) = r \cos^2 \theta - (-r \sin^2 \theta) = r$ .

- Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Vérifions si  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ . Avec les définitions de l'exemple précédent, on écrit

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(\phi(r, \theta)) \cdot J_\phi(r, \theta)| dr d\theta &= \int_\Omega \left| \frac{\sin r^2}{r^3} \right| |r| dr d\theta = 2\pi \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\sin r^2|}{r^2} dr \\ &= 2\pi \left( \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{\sin r^2}{r^2} dr + \int_{\sqrt{\pi/2}}^\infty \frac{|\sin r^2|}{r^2} dr \right) \\ &\leq 2\pi \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \int_{\sqrt{\pi/2}}^\infty \frac{1}{r^2} dr \right) < \infty, \end{aligned}$$

où la première inégalité vient du fait que  $0 < \frac{\sin x^2}{x^2} \leq 1$  dans  $]0, \sqrt{\pi/2}[$  (de par l'inégalité de Jordan) et la deuxième est une conséquence de l'intégrabilité de  $1/r^2$  sur tout ensemble  $[\delta, \infty[$  avec  $\delta > 0$ . Ainsi,  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$  et donc

$$\int_\Delta f(x, y) dx dy = \int_\Omega f(\phi(r, \theta)) |J_\phi(r, \theta)| dr d\theta.$$

**Remarque :** attention à bien vérifier la bijectivité de l'application  $\phi$  : il arrive souvent qu'elle ne soit que bijective par morceaux (par exemple avec  $x = t^2$ ). Il faut alors séparer l'intégrale en plusieurs morceaux.



## CHAPITRE 3

---

### Séries de Fourier

---

#### 3.1 Motivation et bref historique

Les séries de Fourier ont été introduites par Joseph Fourier en 1822 dans sa *Théorie analytique de la chaleur*, pour résoudre l'équation de la chaleur, qui est une équation aux dérivées partielles. Ces travaux et la théorie qui en a découlée (appelée généralement **analyse harmonique**) ont eu un impact majeur dans de nombreux domaines des mathématiques et de la physique au sens large.

Les séries de Fourier représentent n'importe quelle fonction périodique comme une somme de sinusoides de fréquences multiples de la fondamentale. La représentation qui en découle (les coefficients de chacune de ces harmoniques) est particulièrement intéressante pour l'analyse et la transformation de nombreux signaux. En audio par exemple, un son joué à une certaine fréquence (la fondamentale) est un signal périodique, dont les harmoniques définissent le timbre de la voix ou de l'instrument.

Mathématiquement, la théorie est assez simple si l'on fait appel à la notion de **base hilbertienne**. Comme cet outil sera vu l'année prochaine, nous ne démontrons pas les résultats. Mais il est important de ne pas seulement savoir calculer les séries de Fourier, mais aussi de déterminer le type de convergence de la série vers sa fonction.

#### 3.2 Polynômes trigonométriques

Soient  $N \in \mathbb{N}$  et  $T > 0$  fixés. Nous nous intéressons ici aux polynômes trigonométriques de période  $T$  et de degré au plus  $N$ . Nous verrons qu'ils forment un espace vectoriel normé, et que toute fonction  $T$ -périodique d'énergie finie peut être projetée simplement sur cet espace. La section suivante s'intéressera au cas  $N \rightarrow +\infty$ .

**Définition 3.1.** On appelle *polynôme trigonométrique de degré au plus  $N$*  toute

fonction  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  de la forme

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i2\pi n \frac{t}{T}} = a_0 + \sum_{n=1}^N \left( a_n \cos \left( 2\pi n \frac{t}{T} \right) + b_n \sin \left( 2\pi n \frac{t}{T} \right) \right).$$

On note  $\mathcal{F}_N$  l'ensemble des tels polynômes.

En pratique on emploie aussi bien les coefficients complexes  $c_n$  que les coefficients réels  $a_n$  et  $b_n$ . D'abord, on a bien sûr  $a_0 = c_0$ . De plus, puisque  $\cos x$  est paire et  $e^{i2\pi n \frac{t}{T}} = \cos \left( 2\pi n \frac{t}{T} \right) + i \sin \left( 2\pi n \frac{t}{T} \right)$ , on a

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = c_n + c_{-n}.$$

De même, du fait que  $\sin x$  est impaire on en déduit

$$\forall n \geq 1, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Enfin, en inversant ces relations on a,  $\forall n \geq 1$ ,

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

### Propriétés 3.1.

- $\mathcal{F}_N$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $2N+1$ .
- On peut le munir du produit scalaire hermitien suivant :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt,$$

et de la norme associée :  $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ .

**Proposition 3.1.** La famille de fonctions

$$\left\{ e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i2\pi n \frac{t}{T}} \right\}_{-N \leq n \leq N}$$

est une **base orthonormée** de  $\mathcal{F}_N$ .

Soit  $f \in \mathcal{F}_N$ . On peut alors écrire :

$$f = \sum_{n=-N}^N \langle f, e_n \rangle e_n, \quad (3.1)$$

ou de manière équivalente,  $\forall t \in \mathbb{R}$  :

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{i2\pi n \frac{t}{T}} \quad \text{avec} \quad c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i2\pi n \frac{t}{T}} dt.$$

Ce qui nous intéresse à présent, c'est la généralisation de ce résultat lorsque  $f$  est une fonction "quelconque". On définit pour cela l'espace  $L_T^2$  :

### Définition 3.2.

$$L_T^2 = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ } T\text{-périodique et telle que } \int_0^T |f(t)|^2 dt < +\infty \right\}.$$

La généralisation du résultat précédent se fait facilement avec l'étude des **espaces de Hilbert** et la notion de base hilbertienne (en dimension infinie). Ces notions seront abordées l'année prochaine, mais nous donnons déjà dans la section suivante deux résultats importants concernant les séries de Fourier.

### 3.3 Convergence de la série de Fourier

Soit  $f \in L_T^2$ . On peut définir comme avant les coefficients  $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$  :

$$c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i2\pi n \frac{t}{T}} dt,$$

ou bien de manière équivalente les coefficients réels  $a_0(f) = c_0(f)$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) dt, \\ b_n(f) &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) dt. \end{aligned}$$

**Définition 3.3.** La série de Fourier tronquée à l'ordre  $N$  est définie par :

$$f_N(t) = P_{\mathcal{F}_N} f(t) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{i2\pi n \frac{t}{T}}.$$

On a bien sûr de manière équivalente :

$$f_N(t) = a_0(f) + \sum_{n=1}^N a_n(f) \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) + b_n(f) \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right).$$

On va maintenant préciser les conditions pour que  $f_N$  converge vers la fonction  $f$ . Mais plus important, on va devoir préciser le **type de convergence** : comme on l'a vu dans le premier chapitre, dans un espace de dimension infinie (ici un espace de fonctions) la convergence dépend de la topologie, et donc de la norme considérée.

**Théorème 3.1** (Convergence en moyenne quadratique). *La suite  $f_N$  converge vers  $f$  dans  $L_T^2$ . Cela signifie que  $\|f - f_N\|_2 \rightarrow 0$ , c'est-à-dire*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \int_0^T |f(t) - f_N(t)|^2 dt \right) = 0.$$

**Théorème 3.2** (Égalité de Parseval). *L'énergie de  $f$  est égale à celle de sa série de Fourier :*

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2.$$

**Remarque :** Ces deux résultats sont fondamentaux, mais attention : ils ne signifient pas que l'on a une convergence en tout point. Nous présentons dans la suite deux résultats qui donnent des convergences plus fortes, mais qui nécessitent des hypothèses supplémentaires sur la fonction  $f$ .

**Théorème 3.3** (Convergence uniforme). *Si  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et telle que les coefficients vérifient  $\sum_n |c_n(f)| < +\infty$ , alors  $f_N$  converge uniformément vers  $f$  :*

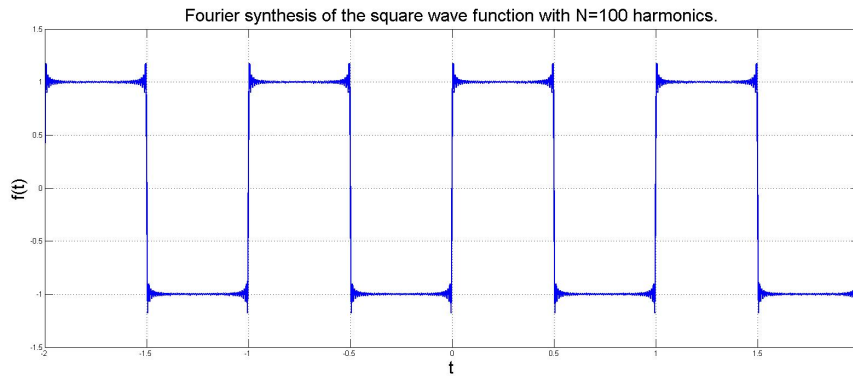
$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f_N - f\|_\infty = 0.$$

**Théorème 3.4** (Dirichlet). *Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $[0, T]$ , alors  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} f_N(t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}.$$

*Exemple : effet de Gibbs*

Considérons la fonction porte 1 – *périodique*, valant  $-1$  sur  $] -\frac{1}{2}, 0]$  et  $1$  sur  $]0, \frac{1}{2}]$ . Calculer sa série de Fourier. A-t-on convergence ponctuelle ? uniforme ? On observe en pratique des oscillations autour des discontinuités : on appelle ça le phénomène (ou effet) de Gibbs, illustré en Figure 3.1.



**Figure 3.1** Série de Fourier tronquée de la fonction porte, mettant en évidence l'effet de Gibbs.

Une des raisons pour laquelle l'analyse de Fourier est tellement utilisée est le comportement très particulier des séries (ou de la transformée) de Fourier par rapport à la dérivation : les coefficients d'une fonction et de sa dérivée sont liés par une relation très simple. Par ailleurs, la régularité de la fonction est reliée à la décroissance de ses coefficients de Fourier, comme l'établit la proposition suivante.

**Proposition 3.2** (Régularité de  $f$ ).

- Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et  $\mathcal{C}^{k+1}$  par morceaux, on a

$$c_n(f^{(k+1)}) = \left( \frac{i2\pi n}{T} \right)^{k+1} c_n(f).$$

- Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , alors  $|c_n(f)| = o(\frac{1}{n^k})$ .
- Si  $|c_n(f)| = o(\frac{1}{n^{k+2}})$ , alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ .

### 4.1 Introduction

La transformée de Fourier généralise la théorie des séries de Fourier à des fonctions non périodiques. Rappelons que toute fonction périodique d'énergie finie peut être représentée par un "spectre de raies" discret, les coefficients  $c_n$ . Ces coefficients donnent l'énergie des harmoniques aux fréquences  $\frac{n}{T}$ . Lorsque  $T$  augmente, ces raies se rapprochent (voir Figure 4.1). On peut donc s'attendre à représenter une fonction non périodique dans l'espace des fréquence avec un spectre continu. Bien sûr, la théorie diffère un peu puisqu'on n'est plus dans le cadre des bases hilbertiennes, mais la plupart des propriétés sont conservées.

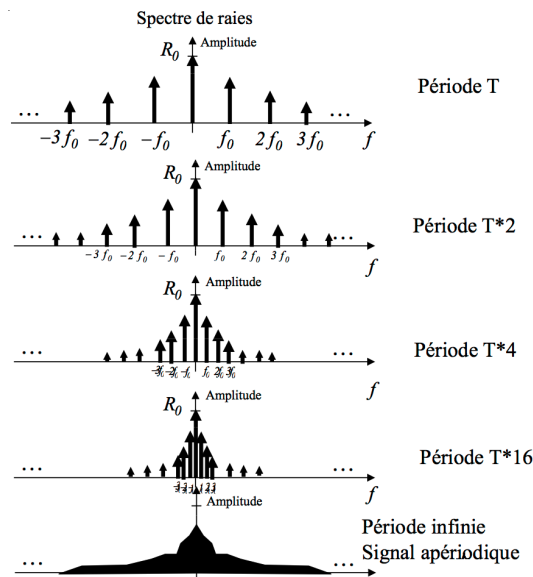


Figure 4.1 Spectre discret et continu

## 4.2 Transformée de Fourier dans $L^1$

**Définition 4.1.** Soit une fonction  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . La **transformée de Fourier** de  $f$  est définie par

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

On note aussi parfois la transformée  $F(\nu)$  ou  $\mathcal{F}[f](\nu)$ .

*Exemple :* Le calcul de la transformée de Fourier de  $\mathbb{1}_{[a,b]}$  est laissé comme exercice. Qu'obtient-on dans le cas où  $a = -b < 0 < b$  (porte paire de largeur  $2b$ ) ?

**Proposition 4.1.** Soit une fonction  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors :

1.  $\hat{f}$  est une fonction continue et bornée sur  $\mathbb{R} \rightarrow \hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$  ;
2. l'application TF :  $f \mapsto \hat{f}$  est **linéaire continue** de  $L^1(\mathbb{R})$  dans  $L^\infty(\mathbb{R})$  ;
3. le théorème de Riemann-Lebesgue est vérifié :

$$\lim_{|\nu| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\nu) = 0.$$

*Démonstration.*

1. On utilise le Corollaire 2.1, grâce à la majoration évidente  $|f(t) e^{-i2\pi\nu t}| \leq |f(t)|$ , et l'hypothèse  $|f| \in L^1(\mathbb{R})$ .
2. La linéarité est évidente. Pour la continuité, s'agissant d'une application linéaire, il suffit de montrer qu'elle est continue en 0 (voir Proposition 1.3). On écrit pour cela  $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_\infty &= \sup_\nu \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt \right| \\ &\leq \sup_\nu \int_{\mathbb{R}} |f(t) e^{-i2\pi\nu t}| dt \\ &\leq \|f\|_1. \end{aligned}$$

3. Ce théorème est plus complexe à démontrer, on doit utiliser une approximation par des fonctions étagées.

□

**Théorème 4.1** (Transfert). Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $L^1(\mathbb{R})$ . Alors

- $f\hat{g}$  et  $\hat{f}g$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$  ;
- on a l'identité

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \hat{g}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) g(t) dt.$$

*Démonstration.* C'est un cas typique d'utilisation des théorèmes de Fubini-Tonelli. Soit  $\phi(t, x) = f(t)g(x)e^{-i2\pi xt}$ . Par le théorème de Tonelli,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\phi(t, x)| d\mu = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty.$$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(t)\hat{g}(t) dt &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \left( \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-i2\pi xt} dx \right) dt = \int_{\mathbb{R}^2} \phi(t, x) d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x) \left( \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i2\pi xt} dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\hat{f}(x) dx.\end{aligned}$$

□

**Propriétés 4.1** (Parité et conjugaison). *Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ .*

1. *Si  $f$  est paire,  $\hat{f}$  est paire.*
2. *Si  $f$  est impaire,  $\hat{f}$  est impaire.*
3. *Si  $f$  est réelle paire,  $\hat{f}$  est réelle paire.*
4. *Si  $f$  est réelle impaire,  $\hat{f}$  est imaginaire pure impaire.*

**Propriétés 4.2** (Translations et dilatations).

- *Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , et  $t_0, \nu_0 \in \mathbb{R}$ . On a :*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t - t_0)](\nu) &= e^{-i2\pi\nu t_0} \hat{f}(\nu), \\ \mathcal{F}[e^{i2\pi\nu_0 t} f(t)](\nu) &= \hat{f}(\nu - \nu_0).\end{aligned}$$

- *Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $a > 0$ , on pose  $g(t) = f(at)$ . Alors  $\hat{g}(\nu) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right)$ .*

*Démonstration.* On démontre facilement ces résultats par changement de variable.

□

**Théorème 4.2** (Transformée de Fourier et dérivation).

1. *si la fonction  $t \mapsto t^k f(t)$  est dans  $L^1(\mathbb{R})$  pour  $k = 0, \dots, n$ , alors  $\hat{f}$  est  $n$  fois dérivable, et*

$$\forall k = 1, \dots, n, \quad \widehat{f^{(k)}}(\nu) = \mathcal{F}[(-i2\pi t)^k f(t)](\nu).$$

2. *si  $f \in C^n(\mathbb{R})$  et si  $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$  pour  $k = 0, \dots, n$ , alors :*

$$\forall k = 1, \dots, n, \quad \widehat{f^{(k)}}(\nu) = (i2\pi\nu)^k \hat{f}(\nu).$$

3. *si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et si  $f$  est à support compact, alors  $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ .*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer une intégration par parties. Attention toutefois aux hypothèses !

□

**Remarque :** On retrouve la même propriété qu'avec les séries de Fourier : une fonction régulière (plusieurs fois dérivable) aura une transformée de Fourier qui décroît fortement, et vice-versa.

**Définition 4.2** (Transformée de Fourier inverse). *Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Sa transformée de Fourier inverse est définie par*

$$\check{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\nu) e^{+i2\pi\nu t} d\nu.$$

**Remarque :** La transformée inverse est très similaire à la transformée directe, et possède donc les mêmes propriétés (parfois à un signe ou une conjugaison près).

**Théorème 4.3** (Inversion). *Si  $f$  et  $\hat{f}$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$ , alors*

$$f(t) = \check{\hat{f}}(t) \text{ p.p. sur } \mathbb{R}$$

et  $f(t) = \check{\hat{f}}(t)$  en tout point  $t$  où  $f$  est continue.

Dans certains cas la transformée de Fourier de  $f$  n'est pas intégrable :  $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$ . Mais il est possible de donner un sens à la limite

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{[-a; +a]} \hat{f}(\nu) e^{+i2\pi\nu t} d\nu.$$

On appelle cette quantité la valeur principale. Elle permet des résultats d'inversion ponctuelle similaires au théorème de Dirichlet pour le séries de Fourier, comme le résultat suivant.

**Théorème 4.4** (Inversion ponctuelle). *Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $C^1$  par morceaux telle que  $f' \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors :*

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^{+a} \hat{f}(\nu) e^{+i2\pi\nu t} d\nu = \frac{1}{2} (f(t+) + f(t-)).$$

*Exemple :* Appliquer ce résultat à la fonction porte  $f(t) = \pi \mathbb{1}_{[-1/2\pi, 1/2\pi]}(t)$ .

### 4.3 Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

On aimerait pouvoir définir la transformée de Fourier sur  $L^2(\mathbb{R})$ , l'espace des fonctions à énergie finie<sup>1</sup> défini comme

$$L^2(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } \int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\mu < \infty \right\},$$

mais<sup>2</sup>  $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$  et cela ne semble pas facile. On va utiliser ici un argument de densité : on commence par étudier la transformée de Fourier sur un sous-espace bien choisi, puis on l'étendra sur  $L^2$  par densité.

D'abord, on munira l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  d'un produit scalaire naturel, donné par

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

pour toutes fonctions  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , induisant la norme usuelle

$$\|f\|_{L^2} := \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2}} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est alors naturellement vérifiée :

$$|\langle f, g \rangle_{L^2}| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

<sup>1</sup>Pour des applications au traitement du signal, mais aussi parce que cela nous assurera que la transformée de Fourier d'un système physique soit encore transformable

<sup>2</sup>Par exemple,  $f(x) = x^{-1} \mathbb{1}_{[1, \infty[}(x)$  est dans  $L^2(\mathbb{R})$  mais pas dans  $L^1(\mathbb{R})$ .



**Définition 4.3.** Soit  $(E, \|\cdot\|_E)$  un espace normé. L'ensemble  $S \subset E$  est dit **dense** dans  $E$  si et seulement si  $\forall x \in E$ , il existe une suite  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|s_n - x\|_E = 0.$$

**Proposition 4.2.**  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  est dense dans  $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2})$ .

*Démonstration.* Nous allons construire une suite qui converge vers une fonction arbitraire  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . On pose  $f_n(x) = f(x)\mathbb{1}_{[-n,n]}(x)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Il vient :

$$(i) \quad \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)\mathbb{1}_{[-n,n]}(x)| dx \leq \|f\|_{L^2} \|\mathbb{1}_{[-n,n]}\|_{L^2} = \sqrt{2n} \|f\|_{L^2} < \infty.$$

$$(ii) \quad \int_{\mathbb{R}} \|f_n(x)\|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}} \|f(x)\|^2 dx < \infty,$$

d'où  $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . D'autre part, on a la convergence simple

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - f_n(x)|^2 = 0.$$

De plus,

$$|f(x) - f_n(x)|^2 \leq 2(|f(x)|^2 + |f_n(x)|^2) \leq 4|f(x)|^2 \in L^1(\mathbb{R}).$$

Ainsi, il en découle par le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x) - f_n(x)\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - f_n(x)|^2 dx = 0.$$

□

**Proposition 4.3.** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Alors,  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ . De plus,

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

**Proposition 4.4.**  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  est un espace vectoriel.

**Proposition 4.5.** Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , et soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  une suite telle que  $f_n \rightarrow f$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Alors, il existe  $g \in L^2(\mathbb{R})$  telle que la suite  $(\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{R})$  converge dans  $L^2$  vers  $g$ . De plus, cette limite est unique, au sens où : pour toute suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  vérifiant  $h_n \rightarrow f$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ , la suite  $(\hat{h}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{R})$  converge également vers la même fonction  $g$ .

*Démonstration.* La suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant convergente, elle est une suite de Cauchy :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \text{ tel que } \forall m, n \geq N \|f_n - f_m\|_{L^2} < \epsilon.$$

De plus, par la Proposition 4.4,  $f_n - f_m \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  est un espace vectoriel, et donc  $\widehat{(f_n - f_m)} \in L^2(\mathbb{R})$  par la Proposition 4.3. Or,  $\widehat{(f_n - f_m)} = \hat{f}_n - \hat{f}_m$  par linéarité de la transformée de Fourier, vérifiant encore  $\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_{L^2} = \|f_n - f_m\|_{L^2}$  par la même Proposition 4.3. Il en découle que la suite  $(\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy et converge par complétude dans l'espace  $L^2(\mathbb{R})$ .

L'unicité de la limite se démontre en supposant que  $\hat{h}_n \rightarrow \tilde{g} \in L^2(\mathbb{R})$ , et en contrôlant l'erreur :

$$\begin{aligned} \|g - \tilde{g}\|_{L^2} &= \|g - \hat{f}_n + \hat{f}_n - \hat{h}_n + \hat{h}_n - \tilde{g}\|_{L^2} \\ &\leq \|g - \hat{f}_n\|_{L^2} + \|f_n - h_n\|_{L^2} + \|\hat{h}_n - \tilde{g}\|_{L^2}. \end{aligned}$$

En effet, le passage à la limite des deux membres ci-dessous donne  $\|g - \tilde{g}\|_{L^2} = 0$ . □

Le résultat ci-dessus nous conduit enfin à définir la transformée de Fourier dans  $L^2$  comme il suit.

**Définition 4.4.** Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$  On définit sa transformée de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R})$ , notée  $\mathcal{F}[f]$ , par

$$\mathcal{F}[f] = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\mathcal{F}[f \mathbf{1}_{[-n,n]}]}_{=\hat{f}_n}.$$

On a alors

$$\mathcal{F}[f](\nu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^n f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt,$$

qui de plus est unique par le résultat précédent.

Enfin, le prochain résultat, qui est le plus utilisé de cette section dans les cas pratiques, nous dit que la TF se comporte comme une isométrie dans  $L^2$ .

**Proposition 4.6.** Les affirmations suivantes sont vraies :

1. Si  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , les transformées de Fourier sur  $L^1(\mathbb{R})$  et sur  $L^2(\mathbb{R})$  coïncident, c-à-d  $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$  p.p.
2. L'application  $f \mapsto \mathcal{F}(f)$  est bijective de  $L^2(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ , et on a :

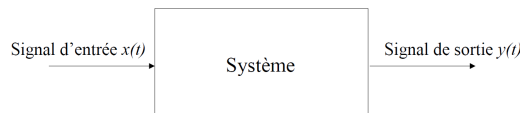
$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)) = f \text{ p.p.}$$

3. (Relation de Parseval-Plancherel)  $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(\nu) \overline{\mathcal{F}(g)(\nu)} d\nu &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt, \\ \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(\nu)|^2 d\nu &= \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

## 4.4 Produit de convolution

La **convolution** est une notion fondamentale dans de nombreux domaines scientifiques et technologiques : c'est par exemple ce qui permet de caractériser la sortie d'un circuit électrique, la réponse d'un système optique... Plus généralement, on montre que tout système linéaire invariant dans le temps est caractérisé par sa réponse impulsionnelle. L'objectif de cette section est de définir proprement le produit de convolution, et de montrer qu'il interagit avec la transformée de Fourier de manière intéressante.



**Figure 4.2** La sortie d'un système linéaire est reliée à l'entrée par un **produit de convolution**.

### Définition de la convolution

**Définition 4.5.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions. Le **produit de convolution** entre  $f$  et  $g$  en un point  $t \in \mathbb{R}$  est défini par (si l'intégrale existe)

$$f * g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(t-u)du$$

### Propriétés 4.3.

- *linéarité* :  $f * (ag_1 + bg_2) = af * g_1 + bf * g_2$
- *commutativité* :  $f * g = g * f$
- *associativité* :  $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$
- *support* : soient  $f$  et  $g$  deux fonctions telles que  $f * g(t)$  existe pour tout  $t$ . Alors :

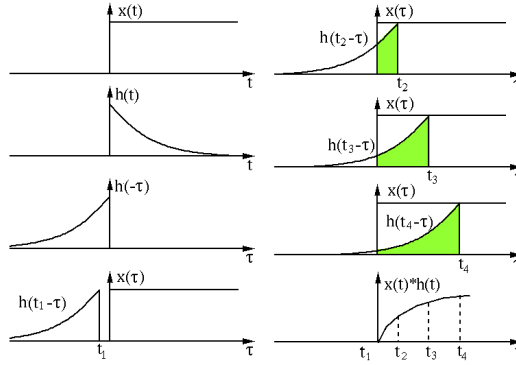
$$\text{Supp}(f * g) \subseteq \overline{\text{Supp}(f) + \text{Supp}(g)}$$

avec  $A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$ .

*Exemples :*

- système intégrateur :  $g(t) = \int_{-\infty}^t f(u)du$
- $f(t) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]}(t)$ . Calculer  $f * f$ .

**Remarque :** Lorsque l'une des deux fonctions est positive et bien localisée (par exemple,  $f(t) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]}(t)$ ), la convolution a pour effet de **moyenner** l'autre fonction localement. Le phénomène est illustré dans la figure suivante.



**Figure 4.3** La convolution avec un noyau positif localisé fait une **moyenne locale**.

**Proposition 4.7** (Convolution dans  $L^1(\mathbb{R})$ ). Soient  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors :

1.  $f * g$  est défini p.p., et  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$  ;
2. la convolution est une application bilinéaire continue de  $L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R})$  dans  $L^1(\mathbb{R})$ , telle que

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

**Proposition 4.8** (Convolution dans  $L^1(\mathbb{R})/L^2(\mathbb{R})$ ). Soient  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $g \in L^2(\mathbb{R})$ . Alors :

1.  $f * g$  est défini p.p., et  $f * g \in L^2(\mathbb{R})$  ;

2. la convolution est une application bilinéaire continue de  $L^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ , telle que

$$\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \|g\|_2$$

**Proposition 4.9** (Convolution dans  $L^p(\mathbb{R})/L^q(\mathbb{R})$ ). Soient  $f \in L^p(\mathbb{R})$  et  $g \in L^q(\mathbb{R})$  avec

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Alors :

1.  $f * g$  est défini **partout**, et est une fonction **continue** et **bornée** sur  $\mathbb{R}$  ;
2. la convolution est une application bilinéaire continue de  $L^p(\mathbb{R}) \times L^q(\mathbb{R})$  dans  $L^\infty(\mathbb{R})$ , telle que

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Cas particuliers :

- $p = 1, q = +\infty$  ;
- $p = q = 2$ .

### Liens entre convolution et transformée de Fourier

**Théorème 4.5** (convolution et transformée de Fourier dans  $L^1(\mathbb{R})$ ). Soient  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ . Alors :

1. Pour tout  $\nu \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\nu) &= \widehat{f}(\nu) \widehat{g}(\nu) \\ \widetilde{f * g}(\nu) &= \widetilde{f}(\nu) \widetilde{g}(\nu) \end{aligned}$$

2. Si  $\widehat{f}, \widehat{g}$  et  $f g$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$ , alors pour tout  $\nu \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \widehat{f g}(\nu) &= \widehat{f} * \widehat{g}(\nu) \\ \widetilde{f g}(\nu) &= \widetilde{f} * \widetilde{g}(\nu) \end{aligned}$$

**Remarque :** Tout système physique linéaire invariant par translation se formule comme la convolution avec une certaine fonction  $h$  : pour tout  $t$ ,  $y(t) = x * h(t)$ , ou de manière équivalente pour tout  $\nu$  on a  $\widehat{y}(\nu) = \widehat{x}(\nu) \widehat{h}(\nu)$ .  $h$  est appelée **réponse impulsionnelle** et  $\widehat{h}$  **fonction de transfert**.

*Exemple :* Tension en créneau aux bornes d'une cellule RC. La réponse impulsionnelle est

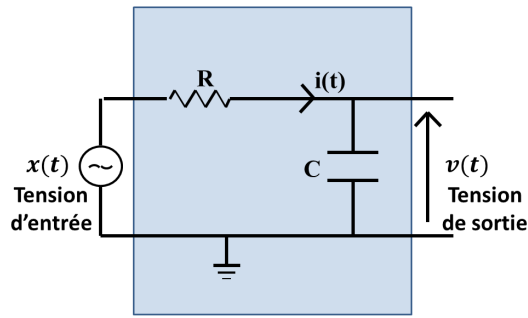
$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$$

et la fonction de transfert :

$$H(f) = \frac{1}{1 + 2i\pi \frac{f}{f_c}}$$

où  $f_c = 1/RC$  est la fréquence de coupure (filtre passe-bas).

**Théorème 4.6** (Convolution et transformée de Fourier dans  $L^2(\mathbb{R})$ ). Soient  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ . Alors :



$$\text{Système linéaire : } RCv'(t) + v(t) = x(t)$$

**Figure 4.4** La sortie d'un système linéaire est reliée à l'entrée par un **produit de convolution**.

1. Pour tout  $\nu \in \mathbb{R}$  :

$$f * g(\nu) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g))(\nu)$$

$$f * g(\nu) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)\mathcal{F}^{-1}(g))(\nu)$$

2. Pour tout  $\nu \in \mathbb{R}$  :

$$\mathcal{F}(fg)(\nu) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)(\nu)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(fg)(\nu) = \mathcal{F}^{-1}(f) * \mathcal{F}^{-1}(g)(\nu)$$

**Proposition 4.10** (Régularisation par convolution). Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , et  $g \in C^p(\mathbb{R})$  telle que  $g^{(k)}$  **bornée** pour  $k = 0, \dots, p$ . Alors

1.

$$f * g \in C^p(\mathbb{R})$$

2.

$$(f * g)^{(k)} = f * (g^{(k)}), \quad \forall k = 0, \dots, p$$

## 4.5 Formulaires

Les tables suivantes donnent, de manière synthétique, les propriétés importantes de la transformée de Fourier ainsi que les expressions des TFs des fonctions usuelles.

$f(x)$	$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi x\nu} dx$	Définition
$a \cdot f(x) + b \cdot g(x)$	$a \cdot \hat{f}(\nu) + b \cdot \hat{g}(\nu)$	Linéarité
$f(x - a)$	$e^{-i2\pi a\nu} \hat{f}(\nu)$	Translation en temps
$f(x) e^{iax}$	$\hat{f}\left(\nu - \frac{a}{2\pi}\right)$	Modulation
$f(ax)$	$\frac{1}{ a } \hat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right)$	Changement d'échelle
$\hat{f}(x)$	$f(-\nu)$	Dualité
$\frac{d^n f(x)}{dx^n}$	$(i2\pi\nu)^n \hat{f}(\nu)$	Dérivation
$x^n f(x)$	$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \frac{d^n \hat{f}(\nu)}{d\nu^n}$	Multiplication par un monôme
$(f * g)(x)$	$\hat{f}(\nu) \hat{g}(\nu)$	Convolution
$f(x) g(x)$	$\left(\hat{f} * \hat{g}\right)(\nu)$	Produit
$\overline{f(x)}$	$\overline{\hat{f}(-\nu)}$	Conjugué complexe

**Table 4.1** Propriétés principales de la transformée de Fourier (d'après Wikipedia)

$f(x)$	$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi x\nu} dx$	Définition
$\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x)$	$\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$	Fonction porte $\leftrightarrow$ sinus cardinal
$(1 -  t )\mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$	$\left(\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\right)^2$	Fonction triangle $\leftrightarrow$ sinus cardinal carré
$e^{-ax}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$	$\frac{1}{a + i2\pi\nu}$	Fonction exponentielle $\leftrightarrow$ fraction rationnelle
$e^{-\pi x^2}$	$e^{-\pi\nu^2}$	Fonction gaussienne $\leftrightarrow$ fonction gaussienne
$e^{-a x }$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}$	Distribution Laplace $\leftrightarrow$ fonction lorentzienne

**Table 4.2** Transformées de Fourier de fonctions usuelles (d'après Wikipedia)





Les distributions arrivent naturellement lorsqu'on s'intéresse à la dérivée de certaines fonctions, ou à la limite de certaines suites de fonctions. En physique, la fameuse impulsion de Dirac “valant  $+\infty$  en 0 et 0 ailleurs” est couramment utilisée depuis son introduction il y a plus d'un siècle. Pourtant, de tels objets, qui ne sont pas des fonctions, n'ont été définis mathématiquement qu'au milieu du 20<sup>e</sup> siècle par Laurent Schwartz. Mathématiquement, une distribution est un objet simple : c'est une forme linéaire sur un espace de fonctions bien choisi. C'est donc une “fonction de fonction” : au lieu de chercher à décrire le Dirac  $\delta$  en fonction d'une variable réelle  $t$  comme on ferait avec une fonction classique, on va le définir avec des fonctions tests, i.e.  $\delta(\varphi) = \varphi(0)$ . Pour faire l'analogie avec la physique, on ne peut pas observer l'impulsion directement, mais seulement au travers d'une fonction  $\varphi$  représentant le système de mesure.

Les ambitions de ce chapitre sont modestes : il ne s'agit pas d'élaborer une théorie consistante des distributions, mais seulement de présenter une définition mathématique la plus rigoureuse possible, ainsi que quelques propriétés couramment utilisées en physique.

### 5.1 Fonctions tests et distributions

**Définition 5.1** (Espace des fonctions tests  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ). *On note  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  l'espace des fonctions infiniment dérivables et à support compact sur  $\mathbb{R}$ .*

*Exemple :*

$$f(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$$

**Définition 5.2** (Distributions). *On appelle **distribution** sur  $\mathbb{R}$  toute application  $T$  linéaire et continue de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ). On note :*

$$\begin{aligned} T &: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

L'espace des distributions est noté  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

Cette définition est bien sûr incomplète, dans la mesure où, on l'a vu, la continuité dépend de la topologie. Celle utilisée ici n'est pas basée sur une simple norme, mais une collection de semi-normes.

**Définition 5.3** (Convergence dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ). *On dit qu'une suite  $(\varphi_n)_n$  d'éléments de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  converge vers une fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  si et seulement si :*

1. *il existe un **compact**  $\mathcal{K}$  tel que  $\forall n, \text{Supp}(\varphi_n) \subset \mathcal{K}$ .*
2.  *$\forall k \in \mathbb{N}, \varphi_n^{(k)}$  converge uniformément vers  $\varphi^{(k)}$ .*

Il ne reste plus qu'à définir la continuité, chose que l'on peut faire comme d'habitude en utilisant les suites.

**Définition 5.4** (Continuité sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ).  *$T$  est continue si et seulement si, pour toute suite  $\varphi_n$  de  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  tendant vers 0 dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ , la suite  $T(\varphi_n)$  tend vers 0 dans  $\mathbb{R}$ .*

*Exemples :*

- Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On pose :

$$\begin{aligned} \delta_a : \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto T(\varphi) = \varphi(a). \end{aligned}$$

(distribution de Dirac en  $a$ )

- Soient  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $(\lambda_n)_n$  une suite quelconque définie sur  $\mathbb{Z}$ . On pose :

$$\begin{aligned} \Delta_a : \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto T(\varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n \varphi(na). \end{aligned}$$

**Remarque :** Grâce à la définition des fonctions tests et de la convergence, la “plupart” des formes linéaires sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  seront continues. En fait, on aura même bien du mal à trouver des contre-exemples...

**Proposition 5.1.** *Soit  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ . On pose alors :*

$$\begin{aligned} T_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

$T_f$  est une distribution, appelée **distribution régulière** associée à la fonction  $f$ .

**Proposition 5.2.** *L'application  $f \mapsto T_f$  est **injective** de  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , et on a donc*

$$T_f = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ p.p.}$$

Ainsi, on peut faire l'**identification**  $f \leftrightarrow T_f$ , et écrire

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi(x) dx$$

Autrement dit, les distributions sont une “bonne” généralisation des fonctions. Et on peut considérer toute fonction  $f$  “au sens des distributions” en utilisant  $T_f$ .

*Exemples :*

- Distribution constante.
- Distribution d'Heaviside  $\mathbb{1}_{[0,+\infty]}$ .
- Plus généralement, toute fonction à croissance au plus polynomiale.

**Remarque :** Toutes les distributions ne sont pas régulières. Par exemple, la distribution  $\delta$  **n'est pas** une distribution régulière : il **n'existe pas de fonction**  $f$  telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$$

**Définition 5.5** (Produit d'une distribution et d'une fonction). Soient  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  et  $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Alors on définit **le produit de  $T$  par  $g$**  par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle$$

*Exemples :*

- Produit d'une fonction par un Dirac.
- Produit d'une fonction par un peigne de Dirac.

**Définition 5.6** (Convergence dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ). On dit qu'une suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  vers une distribution  $T$  si et seulement si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle T, \varphi \rangle \text{ dans } \mathbb{R}$$

*Exemples :*

- $T_n = \delta_{a_n}$  avec  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$  ;
- $T_n = T_{f_n}$  avec  $f_n(x) = n\mathbb{1}_{[-1/2n; +1/2n]}(x)$  ;
- $T_n = T_{f_n}$  avec  $f_n(x) = \sin(2\pi nx)$ .

## 5.2 Dérivées des distributions

Une des motivations des distributions est de dériver des fonctions non dérivables. On va voir que cela est possible facilement par dualité, et que, au sens des distributions, toutes les fonctions seront infiniment dérivables.

**Définition 5.7** (Dérivée d'une distribution). Soit  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  une distribution quelconque. Alors l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle \end{aligned}$$

est une distribution : c'est la **dérivée d'ordre  $k$**  de  $T$ , qu'on note

$$\langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle.$$

*Exemples :*

- $T = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$ .
- $T = \delta_a$ .

**Proposition 5.3** (Convergence des dérivées). *Toute distribution est infiniment dérivable. De plus,*

$$\text{Si } T_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T, \text{ alors : } \forall k \in \mathbb{N}, T_n^{(k)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} T^{(k)}$$

**Remarque :** Considérons une fonction telle que  $f' \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ . Cette définition permet de coïncider avec la dérivée au sens des fonctions, car dans ce cas on aura bien  $T'_f = T_{f'}$  (par intégration par partie). La proposition suivante précise ce résultats lorsque la fonction  $f$  n'est pas dérivable.

**Proposition 5.4** (formule des sauts). *Soit  $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  telle que :*

- *il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de réels où  $f$  est  $C^1$  sur  $]a_n; a_{n+1}[$   $n \in \mathbb{Z}$*
- *les discontinuités  $\sigma_n = f(a_n^+) - f(a_n^-)$  sont d'amplitudes finies pour tout  $n$ .*

*Alors :*

$$T'_f = T_{f'} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sigma_n \delta_{a_n}$$

### 5.3 Transformée de Fourier des distributions

On aimerait définir la transformée de Fourier d'une distribution comme d'habitude par dualité : si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , on a bien

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle.$$

On pourrait donc définir pour toute distribution  $T$  sa transformée de Fourier :

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle.$$

Le problème est que  $\hat{\varphi}$  n'est plus toujours une fonction test, l'expression précédente n'a donc pas de sens. Il faut donc modifier la définition des distributions pour que les fonctions tests soient stables par transformation de Fourier. Pour ce faire, nous allons d'abord introduire l'espace des fonctions de Schwartz, qui jouera un rôle central dans la suite.

#### L'espace de Schwartz

**Définition 5.8.** *On dit qu'une fonction  $f$  est à **décroissance rapide** si et seulement si*

$$\forall k \in \mathbb{N}, t^k f(t) \xrightarrow[|t| \rightarrow +\infty]{} 0.$$

**Définition 5.9** (L'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ). *On note  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  l'espace des fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) telles que*

1.  *$f$  est  $C^\infty$  ;*
2.  *$\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}$  est à décroissance rapide.*

*Exemple :*

- La fonction gaussienne  $f(t) = e^{-t^2}$ .
- La fonction “bump”  $f(t) = e^{-\frac{1}{1-t^2}} \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$ .

**Propriétés 5.1.** *L'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  vérifie les propriétés suivantes :*

1.  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}), \forall p \geq 1$ .
2.  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est stable par dérivation.
3.  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est stable par multiplication par un polynôme.
4.  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est stable par transformée de Fourier.

Dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , la transformée de Fourier se comporte comme une isométrie bijective, comme énoncé dans la suite.

**Théorème 5.1.** *L'application  $f \mapsto \hat{f}$  est linéaire, continue, **bijective** de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , c-à-d :*

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt, \\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu) e^{+i2\pi\nu t} d\nu. \end{aligned}$$

**Théorème 5.2** (Isométrie). *L'application  $f \mapsto \hat{f}$  est une **isométrie** de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  pour la norme définie sur  $L^2(\mathbb{R})$ . Donc,  $\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  :*

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2} &= \langle f, g \rangle_{L^2}, \\ \|\hat{f}\|_2 &= \|f\|_2, \end{aligned}$$

*c'est-à-dire (formules de Parseval-Plancherel),*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu) \overline{\hat{g}(\nu)} d\nu &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt, \\ \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu &= \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \quad (\text{conservation de l'énergie}). \end{aligned}$$

Enfin, dans la suite on utilisera une topologie très forte sur la classe de Schwartz, comme défini ci-dessous.

**Définition 5.10** (Convergence vers 0 dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ). *On dit que la suite  $\varphi_n$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  converge vers 0 dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  si et seulement si*

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x^p \varphi_n^{(q)}\|_{\infty} = 0.$$

### Distributions tempérées

Munis de la définition de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , nous sommes alors prêts à introduire les distributions tempérées, qui nous permettront de donner un sens à la transformée de Fourier d'une distribution.

**Définition 5.11** (Distributions tempérées). *On appelle **distribution tempérée** sur  $\mathbb{R}$  toute application  $T$  **linéaire** et **continue** de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ). On note  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  cet espace.*

*Exemples :* Les distributions suivantes sont tempérées :

- $\delta_a$ .
- $\Delta_a$ .

- $T_f$  avec  $f$  une fonction à croissance polynomiale.

**Remarque :**  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

**Définition 5.12** (Transformée de Fourier d'une distribution tempérée). *Soit  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . On pose :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle.$$

Alors  $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .  $\hat{T}$  est la **transformée de Fourier de  $T$**  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

*Exemple :* Vérifier par la définition ci-dessus que  $\hat{\delta} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ .

### Propriétés

La transformée de Fourier des distributions admet essentiellement les mêmes propriétés que dans le cadre des fonctions, mais valables de manière beaucoup plus générale, comme pour la dérivation. On ne donnera pas toutes ces propriétés, on se contentera d'insister sur l'inversion et les relations entre TF et dérivation.

**Définition 5.13** (Transformée de Fourier inverse dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ). *Soit  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . On pose :*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle.$$

**Proposition 5.5** (Inversion de la TF dans  $\mathcal{S}'$ ). *La transformée de Fourier est une application linéaire, bijective et bicontinue de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , et on a :*

$$\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad \hat{\hat{T}} = \check{\check{T}} = T.$$

**Remarque :** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R})$  (ou  $L^2(\mathbb{R})$ ). Alors  $T_f$  est tempérée, et

$$\widehat{T_f} = T_{\hat{f}}.$$

La transformée de Fourier d'une fonction de  $L^1(\mathbb{R})$  ou de  $L^2(\mathbb{R})$  peut être donc considérée indifféremment au sens des fonctions ou au sens des distributions.

**Proposition 5.6** (Transformée de Fourier et translation dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ). *Soient  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , et  $a \in \mathbb{R}$ . Alors*

$$\begin{aligned} \widehat{\tau_a T} &= e^{-2j\pi a f} \hat{T}, \\ \tau_a \hat{T} &= e^{2j\pi a x} T. \end{aligned}$$

**Proposition 5.7** (Transformée de Fourier et dérivée dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ). *Soit  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Alors*

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \quad \widehat{T^{(k)}} &= (-2j\pi x)^k \hat{T}, \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \widehat{T^{(k)}} &= (2j\pi f)^k \hat{T}. \end{aligned}$$

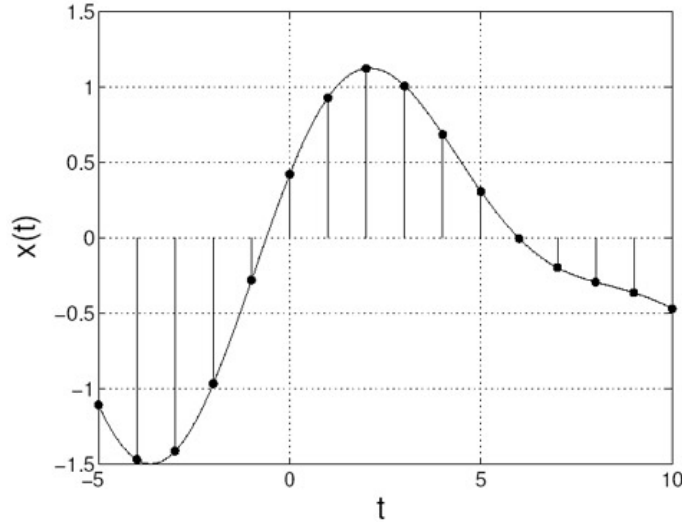
On peut également définir la convolution entre une distribution et certaines fonctions, mais c'est plus délicat. Aussi on se contentera d'admettre le résultat suivant : pour toute fonction localement intégrable  $f$ , on a

$$f * \delta = f.$$

Autrement dit, le Dirac est élément neutre pour la convolution. On retrouve ainsi le terme de “réponse impulsionnelle” : c'est la réponse d'un système à une entrée  $\delta$ .

## 5.4 Théorème d'échantillonnage

On se propose d'utiliser la théorie des distributions pour établir le fameux théorème d'échantillonnage de Shannon. L'outil de base pour cela est le peigne de Dirac, qui est une distribution tempérée.



**Figure 5.1** Échantillonnage d'un signal analogique

**Proposition 5.8** (Transformée de Fourier du peigne de Dirac). Soit  $\Delta_a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{na}$  le peigne de Dirac de période  $a$ , défini par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \Delta_a(\varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(na).$$

Alors  $\Delta_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  et sa transformée de Fourier est un peigne :

$$\hat{\Delta}_a = \frac{1}{a} \hat{\Delta}_{\frac{1}{a}}.$$

*Démonstration.* On développe la fonction suivante en série de Fourier que l'on évalue en  $x = 0$  :

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi\left(x + \frac{n}{a}\right).$$

On peut également montrer que, au sens des distributions,

$$\hat{\Delta}_a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2i\pi nax}.$$

□

**Théorème 5.3** (Théorème d'échantillonnage (Nyquist-Shannon)). Soit  $s \in L^1$  un signal (une fonction) à bande limitée, c'est-à-dire tel que

$$\text{Supp}(\hat{s}) \subset [-B; +B].$$

$s$  peut être complètement reconstitué par ses échantillons  $(s(kT_e))_{k \in \mathbb{Z}}$  si  $F_e > 2B$  avec la formule suivante :

$$s(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(kT_e) \frac{\sin(\pi F_e(t - kT_e))}{\pi F_e(t - kT_e)}. \quad (5.1)$$

*Démonstration.* Le **signal échantillonné** à la période  $T_e > 0$  est défini par

$$s_e = s \Delta_{T_e} = s \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{kT_e} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(kT_e) \delta_{kT_e}.$$

Sa transformée de Fourier s'écrit :

$$\hat{s}_e(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(kT_e) e^{-j2\pi kT_e f} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}(f - kF_e),$$

avec  $F_e = 1/T_e$  la fréquence d'échantillonnage. Autrement dit, **échantillonner le signal revient à périodiser sa transformée de Fourier**. La condition  $F_e > 2B$  garantit que

$$\hat{s} = \hat{s}_e \mathbf{1}_{[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}]}.$$

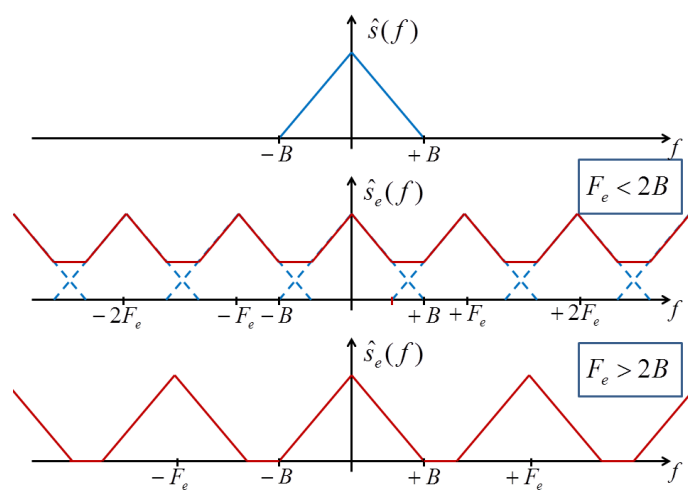
En prenant la TF inverse, il vient

$$s = s_e * \hat{\mathbf{1}}_{[-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}]},$$

d'où (5.1). □

Lorsque la condition  $F_e > 2B$  de Shannon-Nyquist n'est pas respectée, il se produit un phénomène de **repliement de spectre** (aliasing en Anglais) : la périodisation du spectre induite par l'échantillonnage est à trop haute fréquence, l'information haute fréquence est “repliée” sur les basses fréquences (voir Figure 5.2). C'est un phénomène qu'on observe fréquemment dans la vie quotidienne : si vous faites tourner une roue à une vitesse légèrement supérieure à la fréquence de rafraîchissement de votre oeil, vous aurez l'impression qu'elle recule doucement, car à chaque tour la roue parcourt un peu moins d'un tour.





**Figure 5.2** Illustration du phénomène de recouvrement de spectre



---

Exercices supplémentaires (énoncés)

---

## 6.1 Calcul intégral

**Exercice 1** On définit, pour  $x \geq 0$ , la suite de fonctions :

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

1. Etudier la convergence simple de la suite  $(f_n)$ .
2. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n f_n(x) e^{-2x} dx$$

**Exercice 2**

1. Montrer que pour  $x > 0$ , on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

2. Pour  $p \geq 0$ , on définit les intégrales :

$$I_p = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-px} dx$$

Calculer  $I_p$ .

3. En utilisant les questions précédentes, calculer l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx$$

**Exercice 3** On pose

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xt} dx$$

1. Montrer que la fonction  $F$  est définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Montrer que pour tout  $t > 0$ ,  $F'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$ .
3. Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)$ .
4. Calculer l'expression de  $F$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  à l'aide de fonctions élémentaires. En déduire que  $F$  se prolonge par continuité en 0.

**Exercice 4** Soit  $0 < a < b$ . On considère dans  $\mathbb{R}^2$  le domaine  $\Omega = ]0, +\infty[ \times ]a, b[$  et la fonction :

$$f(x, y) = e^{-xy}$$

.

1. Montrer que  $f \in L^1(\Omega)$  et calculer  $\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy$ .
2. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \, dx$$

**Exercice 5** Un étudiant étourdi a oublié son cours et décide de faire confiance à ChatGPT. Il obtient le résultat suivant recopié dans la figure 6.1. Déterminez dans la "preuve" proposé les imprécisions sur les définitions, les arguments inutiles, les arguments insuffisants (aussi appelé arnaques), en complétant à chaque fois la preuve



Pour montrer que la fonction  $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$  est intégrable sur l'intervalle  $]1, +\infty[$ , c'est-à-dire que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

converge, on utilise une estimation de la décroissance de la fonction et on s'appuie sur un critère de convergence pour les intégrales impropres. Voici comment procéder :

### 1. Étudier le comportement asymptotique de $\frac{\sin(t)}{t}$

- La fonction  $\sin(t)$  est bornée, on a  $|\sin(t)| \leq 1$  pour tout  $t$ .
- Ainsi,  $\left| \frac{\sin(t)}{t} \right| \leq \frac{1}{t}$  pour tout  $t > 0$ .

### 2. Comparaison avec une fonction intégrable

Pour montrer que  $\frac{\sin(t)}{t}$  est intégrable sur  $]1, +\infty[$ , on utilise le théorème de comparaison. On sait que :

$$\left| \frac{\sin(t)}{t} \right| \leq \frac{1}{t} \quad \text{pour tout } t > 1$$

L'intégrale de  $\frac{1}{t}$  sur  $]1, +\infty[$  est une intégrale de référence qui diverge. Toutefois, cela ne prouve pas directement que notre intégrale converge.

### 3. Utilisation du critère d'oscillation et de décroissance

Bien que  $\frac{1}{t}$  ne soit pas intégrable sur  $]1, +\infty[$ , la fonction  $\frac{\sin(t)}{t}$  oscille et a des alternances de signe, ce qui est crucial. En fait, l'intégrale d'une fonction oscillante comme  $\sin(t)$  qui décroît assez rapidement peut converger.

### 4. Critère d'intégrabilité absolue

Pour aller plus loin, on considère que si une fonction n'est pas absolument intégrable mais reste bornée et oscille suffisamment, l'intégrale peut converger. La fonction  $\frac{\sin(t)}{t}$  décroît en  $\frac{1}{t}$ , et les oscillations de  $\sin(t)$  assurent que les contributions positives et négatives de l'intégrale finissent par se compenser au fur et à mesure que  $t \rightarrow \infty$ .

### Conclusion

L'intégrale de  $\frac{\sin(t)}{t}$  converge sur  $]1, +\infty[$  car bien que  $\frac{1}{t}$  ne soit pas intégrable sur cet intervalle, l'oscillation de  $\sin(t)$  combinée avec la décroissance en  $\frac{1}{t}$  suffit à assurer la convergence par compensation des contributions positives et négatives.

En résumé, on a montré que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \quad \text{converge.}$$

**Figure 6.1** Une réponse étonnante de ChatGPT

## 6.2 Transformée de Fourier

### Exercice 6

Calculer la transformée de Fourier de

$$g(x) = x \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x)$$

### Exercice 7

1. Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

$$f_0(x) = e^{-a|x|} \quad f_1(x) = \frac{1}{a^2+x^2} \quad f_2(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

2. Calculer l'intégrale suivante

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

### Exercice 8

On pose

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2x} - \frac{x}{2}} dx$$

On rappelle aussi 2 résultats vus en TD :

- La fonction  $x \mapsto e^{-\pi x^2}$  est égale à sa transformée de Fourier.
- L'intégrale de Gauss vaut

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

1. Montrer que  $F \in L^1(\mathbb{R})$ .
2. Calculer  $\hat{F}$ . En déduire que  $F(t) = \sqrt{2\pi} e^{-|t|}$ .

**Exercice 9** Soit  $a > 0$ ,  $p \in \mathbb{N}$  et  $g$  une fonction  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  à support compact. On considère l'équation dans  $\mathbb{R}$  :

$$ay + (-1)^p y^{(2p)} = g$$

1. En utilisant la transformée de Fourier, trouver une solution  $y \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ . On explicitera  $y$  sous forme intégrale.
2. Montrer que cette solution vérifie :  $\|y\|_{L^\infty} \leq C \|y\|_{L^1}$ , avec  $C$  constante.

## 6.3 Distributions

**Exercice 10** *Valeur principale de  $\frac{1}{x}$*

Pour  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  on définit :

$$\langle Vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right)$$

Montrer que  $Vp(\frac{1}{x})$  est une distribution sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $xVp(\frac{1}{x}) = 1$ .

**Exercice 11** *Partie finie de  $\frac{1}{x}$*

Pour  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  on définit :

$$\langle Pf(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(\varepsilon) \ln(\varepsilon) \right)$$

Montrer que  $Pf(\frac{1}{x})$  est une distribution sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $xPf(\frac{1}{x}) = U(x)$ ,  $U$  étant la fonction de Heavyside, ou échelon.

**Exercice 12**

1. Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose :

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, \quad \rho_n(x) = n\rho(nx) \text{ pour } n \geq 1$$

Calculer la limite dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  de la suite  $T_n = T_{\rho_n}$ .

2. Calculer dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  ( $\alpha \neq 0$ ) :

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \alpha^2 \right) U(x) \sin(\alpha x)$$

où  $U$  est la fonction de Heaviside  $U(x) = 1$  si  $x \geq 0$  et 0 sinon.

(NB : la question revient à introduire la distribution-fonction  $T = T_{U(x) \sin(\alpha x)}$  et à calculer  $\frac{d^2 T}{dx^2} + \alpha^2 T$ )





---

## Exercices supplémentaires (corrigés)

---

### 7.1 Calcul intégral

#### Exercice 1

1. La suite  $f_n(x)$  converge vers  $e^x$ . Pour le démontrer, il suffit de prendre le logarithme et de calculer un équivalent quand  $n \rightarrow +\infty$ .

2. On aimerait intervertir limite et intégrale, et donc montrer que la limite vaut 1. Mais pour cela, il faut dominer la suite de fonctions par une fonction intégrable ne dépendant pas de  $n$  : on pourra alors utiliser le théorème de convergence dominée. Un moyen de le faire est de montrer par récurrence que  $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x.$$

#### Exercice 2

1. Se rappeler de la somme d'une suite géométrique...
2. Après deux intégrations par partie, on trouve  $I_p = \frac{2}{p^3}$ .
3. On écrit :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx &= \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx \\ &= \int_0^\infty x^2 e^{-x} \sum_{n=0}^\infty e^{-nx} dx. \end{aligned}$$

La suite de fonctions  $f_N(x) = \sum_{n=1}^N e^{-nx}$  vérifie  $\forall N \geq 1$ ,

$$|f_N(x)| \leq e^{-x},$$

qui est une fonction intégrable sur  $[0, \infty[$ . Donc par le théorème de convergence dominée on peut intervertir série et intégrale et on obtient :

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^\infty I_n = 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3}.$$

### Exercice 3

1. Il faut montrer que  $F$  est définie, continue et dérivable sur tout segment  $[a, b]$ , pour tous  $0 < a < b$ . Définissons

$$f(t, x) = \frac{\sin x}{x} e^{-xt}.$$

Pour tout  $x > 0$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est continue et dérivable sur  $[a, b]$ , et on a les majorations suivantes  $\forall t \in [a, b], \forall x > 0$  :

$$\begin{aligned} |f(t, x)| &\leq e^{-xt} \leq e^{-ax} \\ \left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} \right| &= |-\sin x e^{-xt}| \leq e^{-xt} \leq e^{-ax}. \end{aligned}$$

La fonction  $x \mapsto e^{-ax}$  est intégrable et ne dépend pas de  $t$ . On conclut en utilisant les deux théorèmes du cours (continuité et dérivabilité sous l'intégrale).

2. On écrit :

$$F'(t) = - \int_0^\infty \sin x e^{-xt} dx = -\operatorname{Im} \left( \int_0^\infty e^{ix} e^{-xt} dx \right) = \frac{-1}{t^2 + 1}.$$

3. La limite vaut 0 (utiliser le théorème de convergence dominée avec la même majoration)

4. En intégrant l'expression de  $F'$ , on obtient

$$F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t$$

(la constante est obtenue avec la question précédente).  $F$  est donc prolongeable par continuité en 0, et on obtient la valeur de l'intégrale impropre du sinus cardinal :

$$F(0) = \frac{\pi}{2} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} dx.$$

### Exercice 4

1. Utiliser le théorème de Fubini positif (Tonelli), car la fonction est positive
2. L'intégrale vaut  $\ln(b) - \ln(a)$ .

## 7.2 Transformée de Fourier

### Exercice 5

Après une intégration par parties et un calcul classique, on obtient

$$\hat{g}(u) = \frac{i}{2\pi f} \left( \cos(\pi f) - \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \right).$$

### Exercice 6

**1.** Le calcul de  $\hat{f}_0$  et  $\hat{f}_2$  a été fait en TD et/ou en cours. Pour  $f_1$ , il suffit de remarquer que

$$f_1(x) = 2\hat{f}_0\left(\frac{x}{2\pi}\right)$$

avec  $a = 1$ . Comme  $f_0$  est une fonction paire,  $\widehat{\hat{f}_0} = f_0$ .

**2.** Par le théorème de Parseval,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_1(u)|^2 du = \frac{\pi}{2}.$$

### Exercice 7

1.  $F$  est une fonction à valeurs positives, donc d'après le théorème de Fubini-Tonelli on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} F(t) dt &= \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2x}} dt \right) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} \sqrt{2\pi x} dx \\ &= 2\sqrt{2\pi} < +\infty.\end{aligned}$$

Le résultat est fini, donc  $F$  est bien une fonction intégrable.

2. L'application du théorème de Fubini donne :

$$\begin{aligned}\hat{F}(u) &= \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2x}} e^{-i2\pi ut} dt \right) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}} \sqrt{2\pi x} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi s^2} e^{-i2\pi u \sqrt{2\pi x} s} ds \right) dx\end{aligned}$$

par le changement de variable  $t = \sqrt{2\pi x} s$ . Or on sait que la fonction  $s \mapsto e^{-\pi s^2}$  est invariante par transformée de Fourier, donc

$$\begin{aligned}\hat{F}(u) &= \sqrt{2\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}} e^{-2\pi^2 x u^2} dx \\ &= \sqrt{2\pi} \frac{2}{1 + 4\pi^2 u^2}.\end{aligned}$$

On reconnaît la transformée de Fourier d'une fonction bien connue, d'où le résultat.

### Exercice 8

1. En prenant la transformée de Fourier de l'équation différentielle et en simplifiant, on trouve une solution dans le domaine de Fourier :

$$\hat{y}(u) = \frac{\hat{g}(u)}{a + (2\pi u)^{2p}}.$$

Comme  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  et que le dénominateur ne s'annule jamais ( $a > 0$ ), on a aussi  $\hat{y} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . En prenant sa transformée de Fourier inverse on reste bien dans la classe de Schwartz, et la solution  $y \in C^\infty \cap L^1$  s'écrit

$$y(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{g}(u)}{a + (2\pi u)^{2p}} e^{i2\pi ut} du.$$

2. On écrit :

$$\begin{aligned}\|y\|_\infty &\leq \|y\|_1 \text{ car la TF est continue, c'est vrai pour tout fonction } L^1 \\ &\leq \|\hat{g}\|_\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a + (2\pi u)^{2p}} du.\end{aligned}$$

Or d'après la définition de  $\hat{y}$ , on a  $\|\hat{g}\|_\infty \leq a\|\hat{y}\|_\infty \leq a\|y\|_1$ , cqfd.

## 7.3 Distributions

**Exercice 9** On l'a vu en cours : on fait appel à l'inégalité des accroissements finis. Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , et  $a, b \in \mathbb{R}$  tels  $\varphi$  soit à support dans  $[a, b]$ . Alors

$$\left| \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right| = \left| \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx \right| \leq 2\|\varphi'\| |b - a|.$$

On en déduit la continuité, la linéarité étant évidente.

**Exercice 10** On note  $T = Pf(\frac{1}{x})$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , on fait une intégration par partie en dérivant  $\varphi$  et intégrant  $1/x$ , ce qui annule le terme  $\varphi(\varepsilon) \ln(\varepsilon)$ . On a donc :

$$\langle T, \varphi \rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi'(x) \ln(x) dx = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) \ln(x) dx < +\infty.$$

(attention pour la limite on a utilisé le théorème de convergence monotone (ou le théorème de convergence dominée). De plus, si le support de  $\varphi$  est inclus dans  $[a, b]$ , on a

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq |b \ln b| \|\varphi'\|_{\infty}.$$

Cela permet de montrer la continuité de  $T$  sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  (à expliciter en prenant une suite de fonctions tests tendant vers 0).

On a ensuite facilement le résultat  $xPf(\frac{1}{x}) = U(x)$ .

### Exercice 11

1. Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , on a

$$\begin{aligned} \langle T, \varphi \rangle &= \frac{n}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{1 + n^2 x^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\frac{y}{n})}{1 + y^2} dy. \end{aligned}$$

Soit

$$f_n(y) = \frac{\varphi(\frac{y}{n})}{1 + y^2},$$

les fonctions  $f_n$  sont intégrables, convergent vers  $\frac{\varphi(0)}{1+y^2}$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , et vérifient

$$\forall y \in \mathbb{R}, |f_n(y)| \leq \frac{\|\varphi\|_{\infty}}{1 + y^2} \in L^1(\mathbb{R}).$$

Donc pas le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T, \varphi \rangle = \frac{\varphi(0)}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + y^2} dy = \varphi(0).$$

D'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} T = \delta$ .

2. Il suffit d'appliquer 2 fois la formule des sauts car la fonction et sa dérivée sont  $C^1$  par morceaux. On obtient  $\delta$ .



---

## Bibliographie

---

- [1] Claude Gasquet et Patrick Witomski, “Analyse de Fourier et applications : filtrage, calcul numérique, ondelettes”, Dunod, 2000.
- [2] Robert Dalmasso et Patrick Witomski, “Analyse de Fourier et applications : exercices corrigés”, Dunod, 2000.
- [3] Walter Rudin, “Real and complex analysis”, Tata McGraw-Hill Education, 1987.
- [4] Cédric Villani, “Intégration et Analyse de Fourier”, cours de l’ENS Lyon, <http://cedricvillani.org/wp-content/uploads/2013/03/IAF.pdf>, 2006.