Filière 3EA
1^{re} année

Statistique - TD1

Moyenne et variance empiriques, manupulations de concepts de bases

1 Indépendance de la moyenne et de la variance empiriques (cas Gaussien)

On considère un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, de composantes X_1, X_2 et X_3 dans la base canonique. On suppose que X_1, X_2 et X_3 sont des variables aléatoires réelles (VAR) indépendantes de loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$.

a) Quelle est la densité du triplet (X_1, X_2, X_3) ? En déduire qu'il s'agit bien d'un vecteur Gaussien. Soit M la matrice de changement de base orthonormée telle que :

$$M^T := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Il est possible de vérifier (on ne demande pas de le faire) que la matrice M est une matrice orthogonale qui vérifie donc $M^{-1} = M^T$. On note X le vecteur colonne de composantes $(X_i)_{i=1,2,3}$ et Y le vecteur colonne $M^T X$ de composantes $(Y_i)_{i=1,2,3}$.

b) Quelle est la densité du triplet (Y_1, Y_2, Y_3) ?

c) Déterminer les lois de Y_1, Y_2 et Y_3.

d) Soit $\overline{X} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^3 X_i$. Vérifier que :

$$\sum_{i=1}^{3} X_i^2 = \sum_{i=1}^{3} Y_i^2.$$

$$Y_2^2 + Y_3^2 = \sum_{i=1}^{3} X_i^2 - 3\overline{X}.$$

En déduire que les variables aléatoires $\overline{X}$ et $S_*^2 := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^3 (X_i - \overline{X})^2$ sont indépendantes.

e) Donner les lois de $\overline{X}$ et de $2S_*^2$.

2 Loi uniforme sur $[0, \theta]$

Nous reprenons l'exemple de cours où les x_i sont 100 réalisations de VAR X_i indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, \theta]$. On sait de plus que $\min_{1 \leq i \leq 100} x_i = 0,25$ et $\max_{1 \leq i \leq 100} x_i = 24,71$. On pose

$$Z_n = \max_{1 \leq i \leq 100} Xi \qquad Y_n = \min_{1 \leq i \leq 100} Xi.$$

a) Calculer la fonction de répartition puis la densité de Z_n. En déduire l'espérance et la variance de Z_n.

b) Calculer la fonction de répartition de Y_n. En déduire que sa loi admet la densité :

$$y \mapsto \frac{n}{\theta}(1 - \frac{y}{\theta})^{n-1} 1_{[0,\theta]}(y).$$

En déduire l'espérance et la variance de Y_n.

c) On veut trouver un nouvel estimateur de θ. On pose $T_n = Z_n + Y_n$. Montrer que T_n est sans biais pour θ. En utilisant la formule générale (sans indépendance) de la variance d'une somme, puis en appliquant l'inégalité de Schwarz au terme de covariance, montrer qu'asymptotiquement quand $n \to \infty$, on a $V(T_n) \leq O(\frac{1}{n^2})$. Donner la valeur de l'estimation de θ associée à T_n pour les valeurs mesurées

Filière 3EA
1^{re} année

Statistique - TD2
Manipulation d'estimations dans le cas continue

1 Estimateurs de l'écart type

1.1 Un premier estimateur

Soient $x_1, ..., x_n$ les réalisations respectives de $X_1, ..., X_n$ variables aléatoires indépendantes et de même loi gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

a) Déterminer l'information de Fisher apportée par ce n-échantillon sur le paramètre σ.

b) En déduire un minorant de la variance de tout estimateur sans biais de σ.

c) Déterminer a de façon que :
$$\tilde{\sigma} = \frac{a}{n} \sum_{i=1}^{n} |X_i|$$
soit un estimateur sans biais de σ.

d) Avec cette valeur de a, l'estimateur $\tilde{\sigma}$ est-il convergent ? efficace ?

1.2 Illustrations numériques et comparaison d'estimateurs

On considère une loi gaussienne $\mathcal{N}(0; 4)$. On veut effectuer des comparaisons entre l'estimateur précédent, l'estimateur du maximum de vraisemblance : $\hat{\sigma} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)^2$ et avec la racine carrée de l'estimateur sans biais de la variance $s_* = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2\right)^{\frac{1}{2}}$

a) Quel protocole proposez-vous pour évaluer ces estimateurs ?

b) Comme il s'agit de trois variables aléatoires, on choisit de simuler n réalisations d'une loi normale centrée et de variance 4, pour diverses valeurs de n, puis d'effectuer les calculs correspondants. Commentez ce tableau.

n	10	50	100	200	500	1000
$\tilde{\sigma}$	2.6655	2.2528	2.0063	1.9844	2.0146	1.9515
$\hat{\sigma}$	2.7737	2.3343	2.0966	2.0034	2.0336	1.9708
s_*	2.5647	2.3544	2.1072	1.9859	2.0345	1.9718

Figure 1 – Valeurs des trois estimations pour chaque n.

c) On a répété 100 fois l'expérience précédente. Pour chaque valeur de n, on a calculé la moyenne des 100 estimations obtenues et leur variance reportée, en chiffres plus petits, sous la moyenne. Au vu de ce tableau, quel estimateur choisiriez-vous ? Justifier votre réponse.

n	10	20	50	100
$\tilde{\sigma}$	2.0361 0.2863	2.0331 0.1257	1.9744 0.0511	2.0110 0.0217
$\hat{\sigma}$	1.9727 0.2298	2.0086 0.1147	1.9688 0.0448	2.0031 0.0209
s_*	1.9854 0.2424	2.0018 0.1259	1.9655 0.0466	2.0048 0.0211

FIGURE 2 – Moyenne et variance des estimations en fonction de n, sur 100 répétitions.

2 Estimateur du maximum de vraisemblance - Loi inverse-gamma

On dit qu'une VAR X suit une loi inverse-gamma, notée $IG(r, \lambda)$, si et seulement si elle admet la densité :

$$x \mapsto f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \frac{1}{x^{r+1}} \exp\left(-\frac{\lambda}{x}\right) 1_{\mathbb{R}_+^*}(x), \quad r > 0, \lambda > 0.$$

Une telle VAR peut s'écrire $X = \frac{1}{Y}$ avec Y qui suit une loi $\gamma(r, \lambda)$. Il est possible de montrer que

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\lambda}{r-1} \qquad V(X) = \frac{\lambda^2}{(r-1)^2(r-2)}.$$

On considère un n-échantillon $x_1, ..., x_n$ constitué des n réalisations respectives de $X_1, ..., X_n$ VAR indépendantes et de même loi que X. On supposera dans cet exercice que r est connu.

a) On veut estimer λ. Écrire la log-vraisemblance du n-échantillon.

b) En déduire que l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre λ est :

$$\lambda_n^{MV} = rn \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i} \right)^{-1}.$$

L'on fera bien attention à justifier qu'on obtient bien un maximum en ce point.

c) En s'appuyant sur les résultats de l'addition de VAR gammas indépendantes, dire quelle est la loi de :

$$Z = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}}.$$

Calculer alors l'espérance et la variance de λ_n^{MV}. Cet estimateur est-il convergent ?

d) Calculer la quantité d'information de Fisher apportée par la VAR X sur le paramètre λ. En déduire simplement la quantité d'information apportée par le n-échantillon $X_1, ..., X_n$ sur le paramètre λ. L'estimateur $\hat{\lambda}_n = \frac{rn-1}{rn} \lambda_n^{MV}$ est-il un estimateur efficace du paramètre λ ?

Filière 3EA
1^{re} année

Statistique - TD3

Estimations cas continu (suite) et Test de Neyman-Pearson

1 Estimateur du maximum de vraisemblance - Loi de Pareto

On appelle loi de Pareto de paramètres $a > 0$ et $\theta > 0$ la loi qui a pour fonction de répartition F

$$F(x, a, \theta) := \begin{cases} 1 - (\frac{a}{x})^\theta & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Elle a donc comme densité contre la mesure de Lebesgue la fonction

$$x \mapsto f(x, a, \theta) := \frac{\theta}{a}(\frac{a}{x})^{\theta+1} 1_{[a;+\infty[}(x).$$

Cette loi a été introduite pour modéliser la distribution de revenus supérieurs à un seuil donné.

a) Calculer la quantité d'information de Fisher apportée par une observation X_i sur le paramètre θ. On la notera $I_1(\theta)$.

b) Montrer que si la variable aléatoire réelle (VAR) X suit une loi de Pareto de paramètres a et θ alors la variable aléatoire réelle $Y = \ln(\frac{X}{a})$ suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\theta)$ de paramètre θ. Rappeler l'espérance et la variance d'une telle loi.

c) On considère la statistique $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(\frac{X_i}{a})$, où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. Montrer que T_n est un estimateur sans biais et efficace de $u = \frac{1}{\theta}$. Pour cela, admettre que dans cet exemple particulier, $I_1(u) = \frac{1}{I_1(\theta)}$.

d) (*Pour aller plus loin, à faire chez vous*) Montrer la relation admise sur l'information de Fisher, et montrer que T_n est en fait l'estimateur au maximum de vraisemblance.

2 Test d'hypothèses de Neyman et Pearson - Loi inverse-gamma

La puissance de l'écho reçu par un radar altimétrique permet d'analyser l'état de l'océan. Ceci permet également de déceler la présence de pluie qui diminue cette puissance.
On a mesuré la puissance de $n = 25$ échos reçus et on a obtenu $x_1, ..., x_n$ telles que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_i} = 7,70$.
La puissance d'un écho est souvent modélisée par une loi inverse-gamma. On rappelle qu'une VAR X suit une loi inverse-gamma, notée $IG(r, \lambda)$, si et seulement si elle admet la densité :

$$x \mapsto f(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \frac{1}{x^{r+1}} \exp\left(-\frac{\lambda}{x}\right) 1_{\mathbb{R}_+^*}(x), \quad r > 0, \lambda > 0.$$

Une telle VAR peut s'écrire $X = \frac{1}{Y}$ avec Y qui suit une loi $\gamma(r, \lambda)$. Il est possible de montrer que

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\lambda}{r-1} \qquad V(X) = \frac{\lambda^2}{(r-1)^2(r-2)}.$$

Une connaissance préalable du phénomène et des appareils de mesure nous permet de fixer la valeur de r à 4. On veut mettre en œuvre le test de l'hypothèse H0 : absence de pluie, contre H1 : présence de pluie.

a) Montrer que le test peut se ramener à la situation suivante. On observe un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de loi $IG(r, \lambda)$ où λ est inconnu et on teste :

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \qquad \text{contre} \qquad H_1 : \lambda = \lambda_1$$

pour un certain $\lambda_1 < \lambda_0$.

b) À l'aide du théorème de Neyman et Pearson, montrer que le test le plus puissant de niveau α fixé repose sur la statistique $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X_k}$. Énoncer la règle de décision correspondante.

c) Sous l'hypothèse H_0, quelle est la loi de la statistique de test ? Montrer que le risque α de première espèce peut s'écrire :

$$\alpha = \mathbb{P}(T_n > \mu_\alpha) = \int_{2\mu_\alpha\lambda_0} h(u)du,$$

où $h(.)$ représente la densité de probabilité d'un khi-deux à $2rn$ degrés de liberté et μ_α la valeur critique de niveau α.

d) En appliquant le théorème central limite à la suite $\frac{1}{X_1}, ..., \frac{1}{X_n}$ montrer que, sous l'hypothèse H_0, on a :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_k} - \frac{nr}{\lambda_0}}{\frac{\sqrt{nr}}{\lambda_0}} \underset{n \to +\infty}{\to} \mathcal{N}(0, 1).$$

On utilise cette loi asymptotique pour faire le test et on fixe $\lambda_0 = 25$. On rappelle que le quantile d'ordre 95% d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ vaut approximativement $F^{-1}(0, 95.) = 1, 64$. Quelle hypothèse retenez-vous au risque $\alpha = 5\%$?

Filière 3EA
1^{re} année

Statistique - TD4

Régression linéaire multiple et estimation discrète

1 Régression linéaire multiple et influence du choix du modèle

Dans cet exercice, nous allons considérer des observations Y_1, ..., Y_n d'une variable Y qui dépend linéairement de deux paramètres X_1 et X_2, à l'ajout d'un bruit additif près. Nous aurons donc n de loi donnée par les relations

$$Y_k := aX_{k,1} + bX_{k,2} + B_k,$$

avec $B_1, ..., B_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

a) Écrire l'estimateur des coefficients a et b obtenue par la méthode des moindres carrés, en faisant l'hypothèse de rang plein.

b) Les estimateurs obtenus sont-ils sans biais ?

c) Calculer la matrice de covariance de $\hat{\theta} := \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$.

Dans quel cas $\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont-ils décorrélés ?
L'on pourra utiliser la relation donnant la matrice de covariance de $Z = AY$ en fonction de celle de Y et de la matrice A.

d) Plaçons-nous dans la même situation que précédemment, et modifions le choix de l'estimateur. Nous allons prendre l'estimateur des moindres carrées d'un modèle ignorant l'influence du paramètre explicatif X_2 (soit par méconnaissance du système, ou par choix du fait de la difficulté de la mesure). Ainsi, ceci revient à prendre l'estimateur $\hat{\alpha}$ des moindres carrées du modèle

$$Z_k = \alpha X_{k,1} + \epsilon,$$

et de l'appliquer aux mesures (y_k) et $(x_{k,1})$. Est-ce que $\hat{\alpha}$ est un estimateur sans biais de a ? Quelle est sa variance (la comparer à la variance de $\hat{a}$) ?

e) (**Pour aller plus loin**) Proposer un cheminement similaire à la question précédente dans le cas où l'on prend l'estimateur des moindres carrés d'un modèle ajoutant un paramètre explicatif sans influence.

2 Mobilisation contre la réforme des retraites

On désire évaluer la mobilisation contre la réforme des retraites à Toulouse. Pour cela, on s'intéresse au nombre de manifestants qui traversent le pont Saint-Pierre par seconde lors d'une manifestation. On compte, à plusieurs reprises pendant la manifestation, le nombre de manifestants Ni qui passent pendant T_i secondes sur le pont et on note les résultats obtenus sur n mesures (i = 1,...,n). Le nombre N_i est modélisé comme une variable aléatoire discrète suivant une loi de Poisson de paramètre λT_i et on suppose que les différentes mesures sont issues de variables aléatoires indépendantes.
On rappelle que pour une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre μ, on a : $\mathbb{P}[X = k] = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$ pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X] = Var(X) = \mu$, $\mathbb{E}[e^{itX}] = \varphi_{Poisson}(t) = e^{\mu(e^{it}-1)}$).

2.1 Estimation du paramètre λ

À partir de l'observation de N_i, pour i = 1, . . . , n et de la connaissance exacte des T_i pour i = 1,...,n :

a) Déterminer l'estimateur $\hat{\lambda}^{MV}$ du maximum de vraisemblance de λ.

b) $\hat{\lambda}^{MV}$ est-il sans biais ?

c) Donner une condition sur les T_i pour que l'estimateur $\hat{\lambda}^{MV}$ soit convergent.
On rappelle que l'estimateur du maximum de vraisemblance est asymptotiquement sans biais, convergent et asymptotiquement efficace dans le cas de variables aléatoires indépendantes et de même loi. Est-ce le cas ici ?

d) $\hat{\lambda}^{MV}$ est-il efficace ?

e) Application au cas où $T_i = iT$, pour i = 1,...,n, où T est une constante fixée.

2.2 Test paramétrique sur λ

À partir de l'observation des N_i, pour i = 1, . . . , n et de la connaissance exacte des T_i pour i = 1,...,n, on souhaite valider le comptage réalisé par les syndicats ou celui réalisé par le ministère de l'Intérieur.

a) On exprime cette problématique sous la forme d'un test binaire d'hypothèses simples :

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \text{ contre } H_1 : \lambda = \lambda_1 > \lambda_0.$$

À quelle hypothèse (H0 ou H1) peut-on associer le comptage des syndicats (respectivement celui du ministère de l'Intérieur) en prenant en compte les tendances usuelles de minimisation et d'exagération ?

b) Construire le test optimal de Neyman-Pearson : déterminer la statistique exhaustive (après simplifications) et la règle de décision.

c) Quelle est la loi de $S = \sum_{i=1}^{n} N_i$ pour n fixé ?

d) Pour $\lambda_0 = 0.1$ et $\lambda_1 = 0.2$, un risque α de l'ordre de 5% et $\sum_{i=1}^{n} T_i = 170$, calculer le seuil μ_α. (Le risque β sera estimé aux questions suivantes.)

e) La table de la loi de Poisson est donnée pour des valeurs de paramètres allant jusqu'à λ = 20. Au-delà de cette valeur, on considère que la loi de Poisson peut être approchée par une loi normale. Refaites le calcul précédent en utilisant cette approximation (même si le paramètre de la loi de Poisson utilisé est inférieur, mais proche, de 20).

f) En déduire le calcul de β.

g) On a relevé les cinq mesures suivantes :

T_i	10	10	30	50	70
N_i	2	5	7	11	14

Que concluez-vous ?

h) (**Pour aller plus loin**) En utilisant le relevé des valeurs et l'estimation du maximum de vraisemblance de λ, donner un intervalle de confiance à 95% de la valeur du paramètre λ (c'est-à-dire un intervalle aléatoire dépendant des mesures contenant λ avec probabilité 95%).

k \ λ	17	24	34
0	,0000	,0000	,0000
1	,0000	,0000	,0000
2	,0000	,0000	,0000
3	,0000	,0000	,0000
4	,0002	,0000	,0000
5	,0007	,0000	,0000
6	,0021	,0000	,0000
7	,0054	,0000	,0000
8	,0126	,0002	,0000
9	,0261	,0004	,0000
10	,0491	,0011	,0000
11	,0847	,0025	,0000
12	,1350	,0054	,0000
13	,2009	,0107	,0000
14	,2808	,0198	,0001
15	,3715	,0344	,0002
16	,4677	,0563	,0005
17	,5640	,0871	,0010
18	,6550	,1283	,0020
19	,7363	,1803	,0037
20	,8055	,2426	,0068
21	,8615	,3139	,0116
22	,9047	,3917	,0191
23	,9367	,4728	,0302
24	,9594	,5540	,0460
25	,9748	,6319	,0674
26	,9848	,7038	,0953
27	,9912	,7677	,1306
28	,9950	,8225	,1733
29	,9973	,8679	,2235
30	,9986	,9042	,2804
31	,9993	,9322	,3427
32	,9996	,9533	,4089
33	,9998	,9686	,4772
34	,9999	,9794	,5454
35	1,0000	,9868	,6117
36	1,0000	,9918	,6744
37	1,0000	,9950	,7319
38	1,0000	,9970	,7834
39	1,0000	,9983	,8283
40	1,0000	,9990	,8664
41	1,0000	,9995	,8981
42	1,0000	,9997	,9237
43	1,0000	,9998	,9439
44	1,0000	,9999	,9596
45	1,0000	1,0000	,9714
46	1,0000	1,0000	,9801

	0	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7793	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8906	0,8925	0,8943	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

FIGURE 3 – Fonctions de répartition des lois de Poisson $\mathbb{P}_\lambda(X \leq k)$ (gauche) et normale centrée réduite $\mathbb{P}_{\mathcal{N}(0,1)}(X \leq y)$ (droite).

Rappel : La fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ vérifie

$$\Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx, \qquad \Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(-y) = 1 - \Phi_{\mathcal{N}(0,1)}(y)$$