ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Αριθμητική Ανάλυση

Προγραμματιστικές Εργασίες

Γιακουμόγλου Πασχάλης ΑΕΜ:10054 giakoupg@ece.auth.gr
Κυρατσούς Χρήστος ΑΕΜ:10105 chrkyrlaz@ece.auth.gr

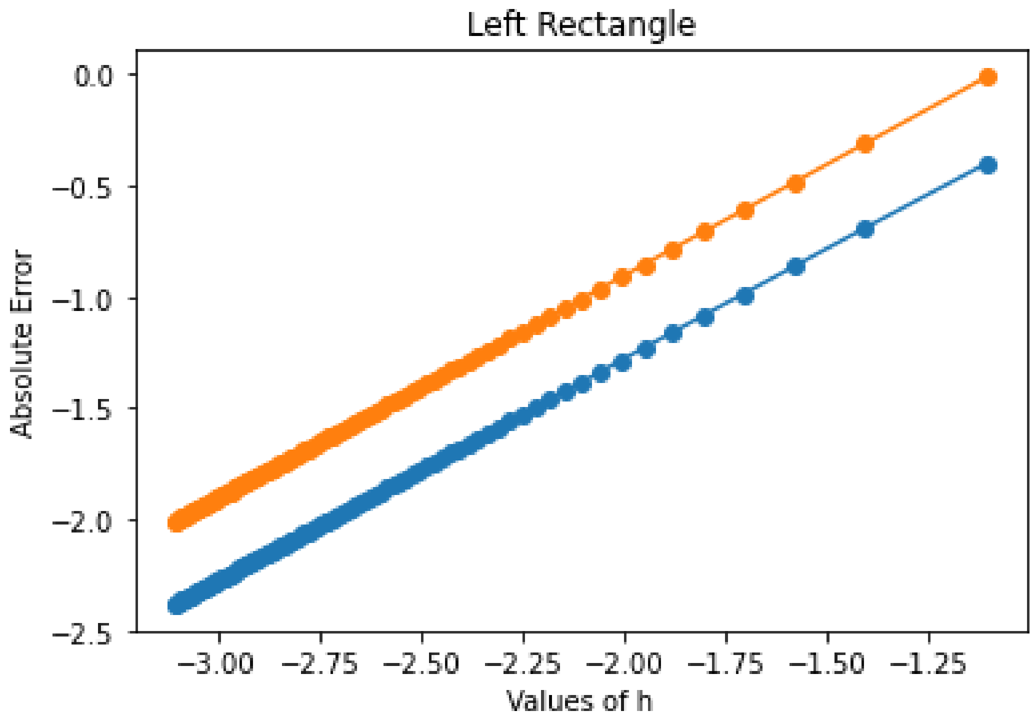
ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2021

<u>Εργασία 1</u>

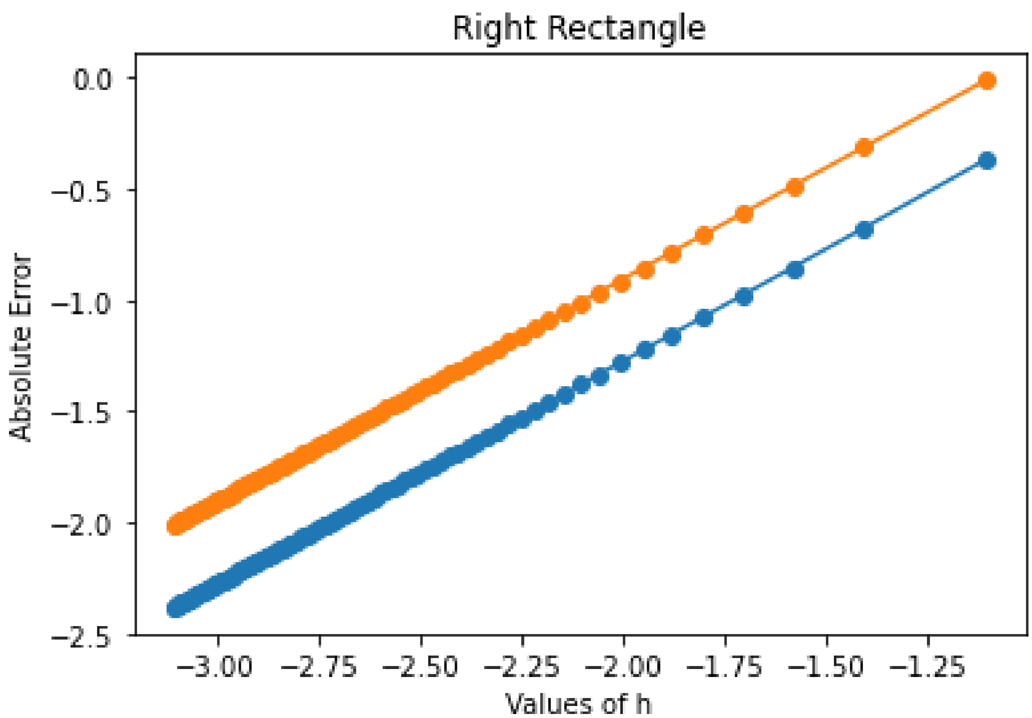
a) Για το πρώτο ερώτημα της Εργασίας, γράψαμε έναν κώδικα που υλοποιεί τις ζητούμενες μεθόδους ολοκλήρωσης, με την βοήθεια των βιβλιοθηκών NumPy (για την χρήση πινάκων) και Matplotlib (για την οπτικοποίηση των δεδομένων μας) της Python.

b) Για το δεύτερο ερώτημα, ορίσαμε την υπό ολοκλήρωση συνάρτηση, την οποία δέχονται σαν όρισμα οι συναρτήσεις για τις μεθόδους ολοκλήρωσης. Έπειτα, και σε μορφή πινάκων, αποθηκεύσαμε τα αποτελέσματα της κάθε μεθόδου ξεχωριστά. Να σημειωθεί ότι κατά την αποθήκευση των αποτελεσμάτων στους πίνακες μετατρέψαμε τα αποτελέσματά μας σε λογαρίθμους του 10, όπως ζητήθηκε από την άσκηση για την γραμμική απεικόνιση των αποτελεσμάτων μας. Τέλος, σχηματίσαμε τέσσερα διαγράμματα, ένα για κάθε μέθοδο ολοκλήρωσης. Αναμενόμενα όσο μειώνεται το μήκος του h, μειώνεται και το σφάλμα. Η καλύτερη μέθοδος επιβεβαιώνεται ότι είναι αυτή του Simpson, αφού για το εύρος των h το απόλυτο σφάλμα είναι περίπου από 10^{-4} έως 10^{-12} , ακολουθεί η μέθοδος του τραπέζιου και τέλος είναι οι μέθοδοι του αριστερού και δεξιού παραλληλογράμμου, οι οποίες παρουσιάζουν μια ελάχιστη διαφορά.

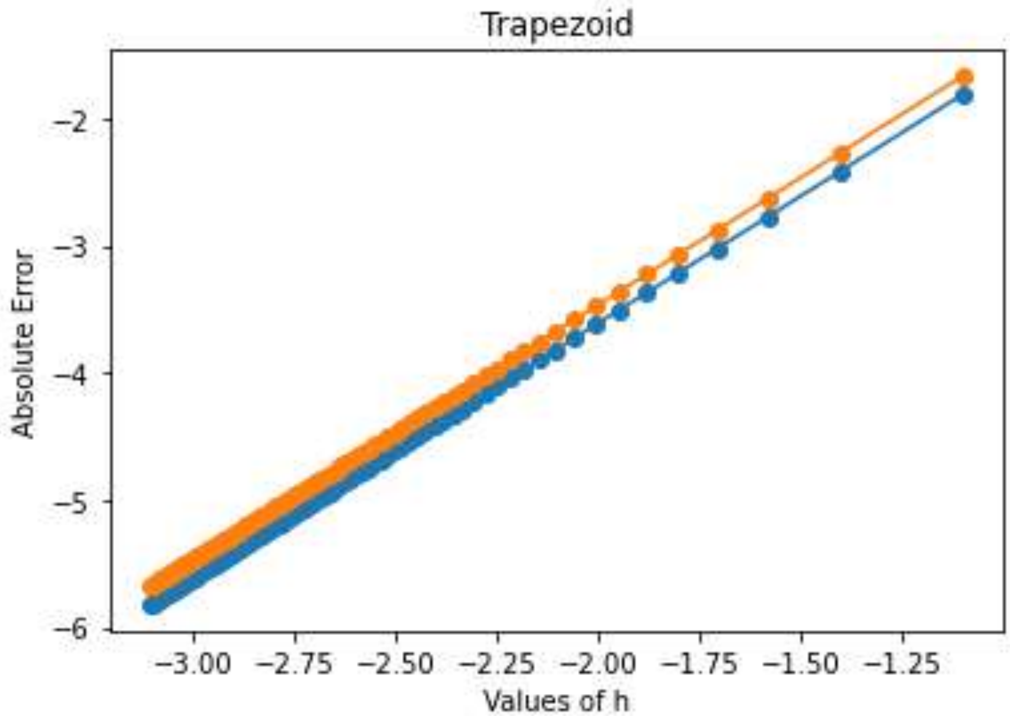
c) Για το τρίτο ερώτημα, σχεδιάσαμε στα ήδη υπάρχοντα διαγράμματα και την απεικόνιση του μέγιστου σφάλματος της κάθε μεθόδου, όπως δίνονται στα, παραδοθέντα σε μας, συγγράμματα (Οι πράξεις για τον υπολογισμό των παραγώγων της συνάρτησης έγιναν σε λογισμικό για την αποφυγή οποιουδήποτε λάθους) ("Πορτοκαλί" = Μέγιστο Σφάλμα , "Μπλε" = Απόλυτο Σφάλμα). Στα διαγράμματα παρατηρούμε ότι οι γραφικές παραστάσεις των μεγίστων σφαλμάτων είναι "πιο πάνω" από τις γραφικές παραστάσεις των αποτελεσμάτων των μεθόδων μας. Το παραπάνω είναι λογικό, αφού τα αποτελέσματα των μεθόδων θα είναι πάντα μικρότερα ή ίσα από τα μέγιστα σφάλματα της κάθε μεθόδου. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι καμπύλες στη μέθοδο του τραπεζίου είναι πιο «κοντά», ακόμα και σε σχέση με αυτή του Simpson (αν συγκρίνουμε προφανώς τα σφάλματα ίδιας δύναμης αφού είμαστε σε λογαριθμική κλίμακα).

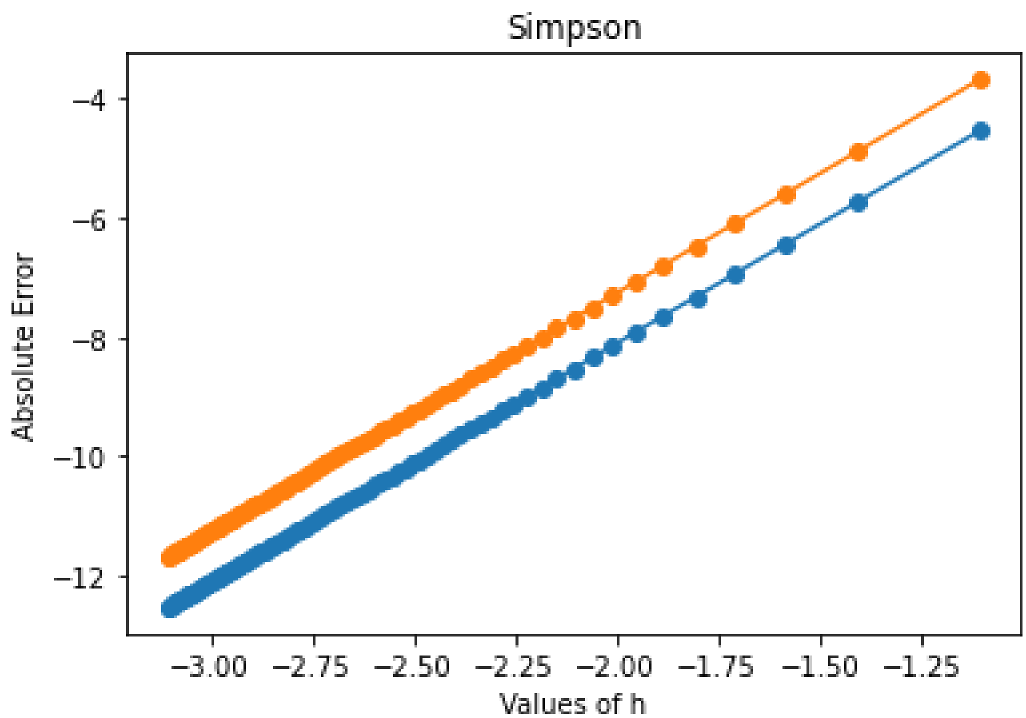


Left Rectangle
Absolute Error
Values of h
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.5
−3.00
−2.75
−2.50
−2.25
−2.00
−1.75
−1.50
−1.25



Right Rectangle
Absolute Error
Values of h
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.5
−3.00
−2.75
−2.50
−2.25
−2.00
−1.75
−1.50
−1.25


Trapezoid
Absolute Error
−2
−3
−4
−5
−6
−3.00
−2.75
−2.50
−2.25
−2.00
−1.75
−1.50
−1.25
Values of h


Simpson
Absolute Error
−4
−6
−8
−10
−12
−3.00
−2.75
−2.50
−2.25
−2.00
−1.75
−1.50
−1.25
Values of h

Εργασία 2

a) Για το πρώτο ερώτημα της Εργασίας, γράψαμε έναν κώδικα που υλοποιεί την μέθοδο *Euler*, με την βοήθεια των βιβλιοθηκών *NumPy* (για την χρήση πινάκων). Ο κώδικας λειτουργεί για οποιοδήποτε σύστημα κανονικών διαφορικών εξισώσεων

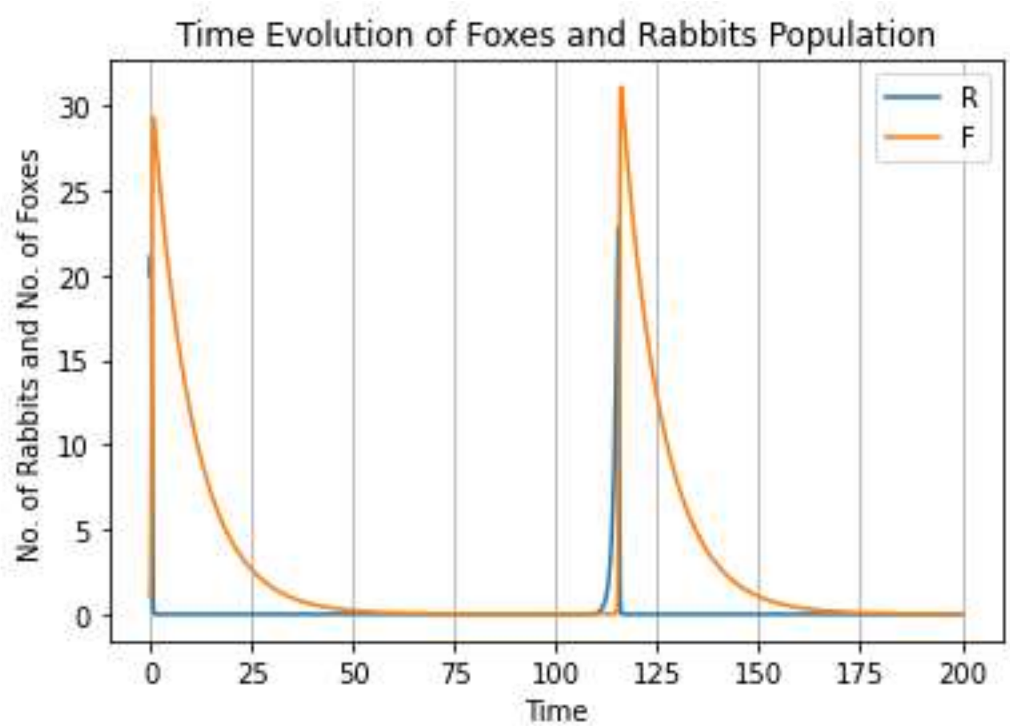
b) Για αρχικές συνθήκες

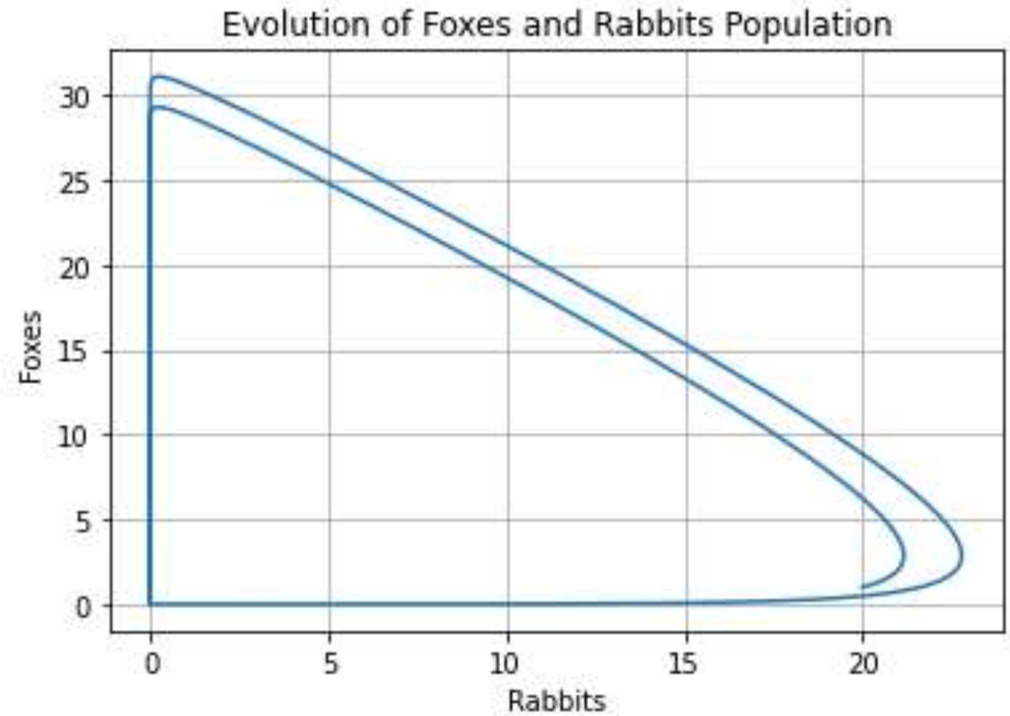
$$x_1(0) = 20 \text{ λαγούς},$$
$$x_2(0) = 1 \text{ αλεπού},$$

$$tmax = 200$$

βάλαμε βήμα διακριτοποιήσης $dt = 0.01$. Για πιο μεγάλα βήματα διακριτοποίησης, όπως $dt = 0.1$, η επίλυση του συστήματος παίρνει και αρνητικές τιμές, κάτι το οποίο δεν είναι αποδεκτό και θα έπρεπε να βάλουμε περιορισμούς στο σύστημα

c) Τα διαγράμματα είναι τα εξής:

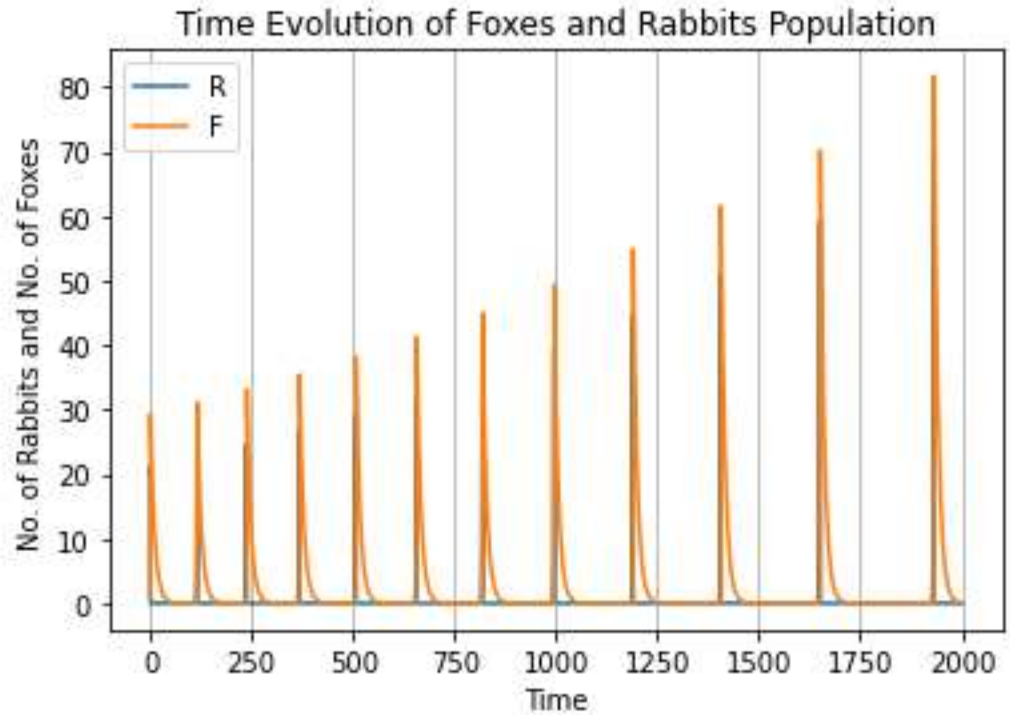


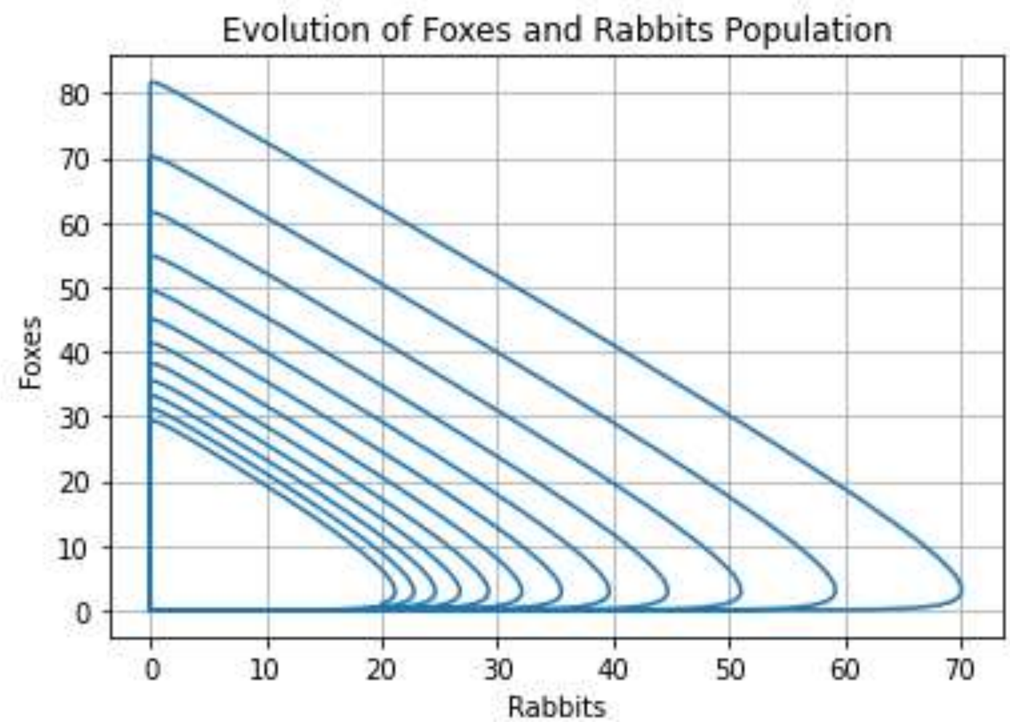


Παρατηρούμε στο πρώτο διάγραμμα ότι ο πληθυσμός των λαγών στα πρώτα δευτερόλεπτα φθίνει πολύ γρήγορα ενώ ο πληθυσμός των αλεπούδων αυξάνεται ακαριαία. Στη συνέχεια φθίνει ο πληθυσμός των αλεπούδων μειώνεται σχεδόν εκθετικά (όπως φαίνεται και από την επίλυση της διαφορικής για $x'_1 = 0.4x_0x_1 - 0.1x_1$ για $x_0 = 0$). Όταν μειωθεί αρκετά ο αριθμός των αλεπούδων μπορεί να αυξηθεί ξανά ο πληθυσμός των λαγών σε ένα νούμερο μεγαλύτερο της αρχικής τιμής του, όμως φθίνει ξανά γρήγορα και επαναλαμβάνεται το ίδιο φαινόμενο. Για μεγαλύτερο $tmax$ αναμένεται το ίδιο φαινόμενο να συμβαίνει περιοδικά.

Στο δεύτερο διάγραμμα η σχέση να των αλεπούδων και των λαγών φαίνεται να ακολουθεί σε κάθε περίοδο δύο «τρίγωνα» εάν για κάθε «αναγέννηση-εξαφάνιση». Το κάθε τρίγωνο στις γωνίες του έχει τις ακραίες τιμές (για κάθε τρίγωνο αρχικά κάτω δεξιά το $maxrabbit - minfox$, μετά πάνω αριστερά $maxrabbit - minfox$ και τέλος κάτω αριστερά $minrabbit - minfox$). Το μεγαλύτερο τρίγωνο που παίρνει τις αντίστοιχες τιμές για τη δεύτερη περίοδο του φαινομένου έχει την κάτω δεξιά γωνία ($maxrabbit - minfox$) πιο δεξιά, ενώ την πάνω αριστερή γωνία ($minrabbit - maxfox$) πιο πάνω σε σχέση με το πρώτο. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι, μετά από την αναγέννηση, οι δύο πληθυσμοί πέτυχαν μεγαλύτερους μέγιστους πληθυσμούς.

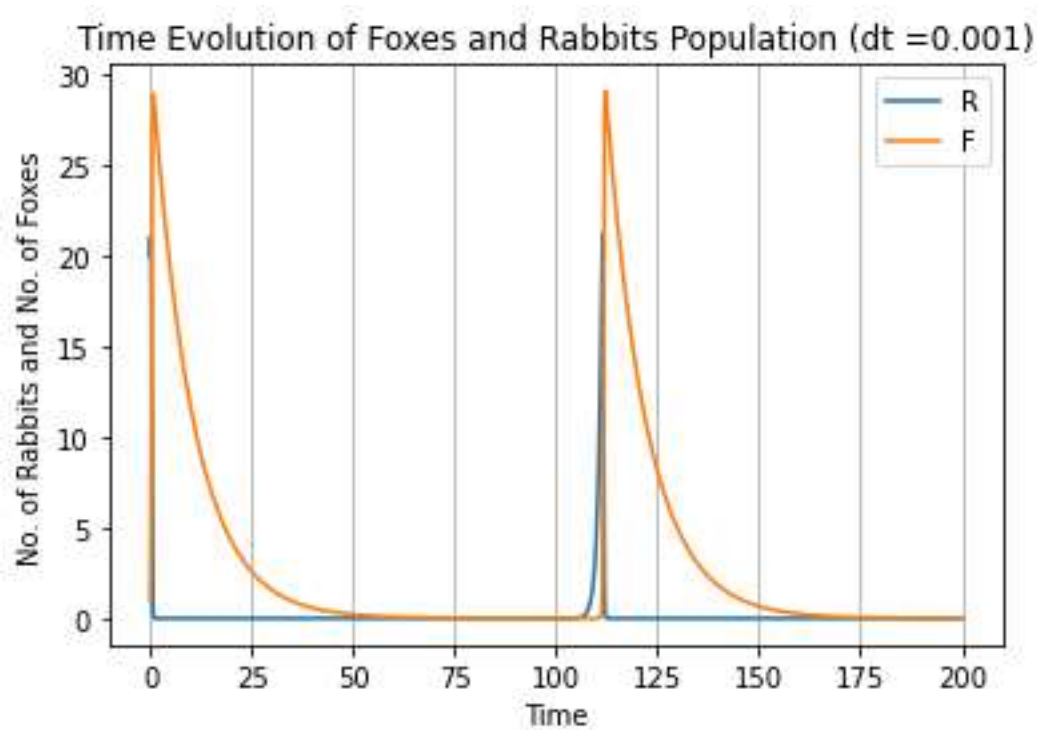
Για $tmax = 2000$ έχουμε:

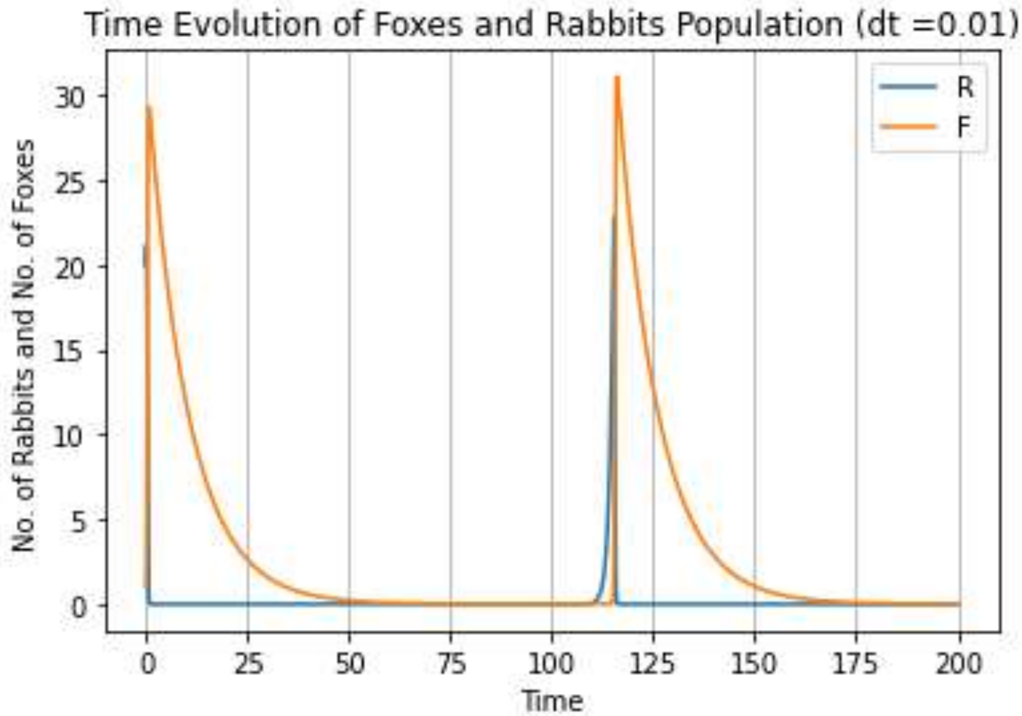




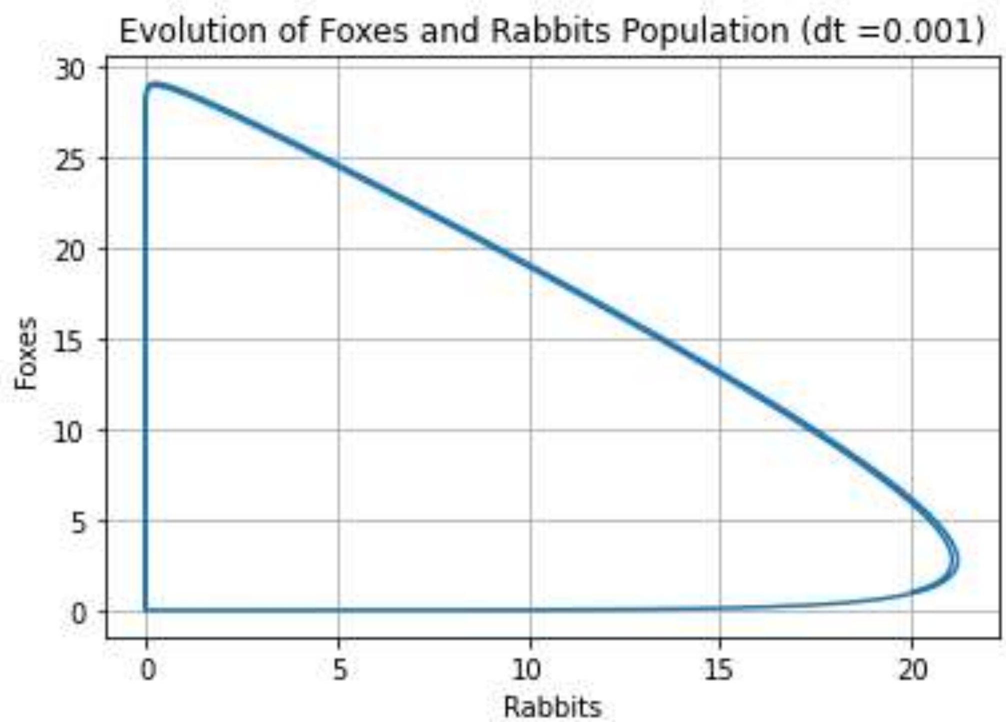
Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο. Παρατήρουμε ότι όντως το φαινόμενο «αναγέννηση-εξαφάνιση» είναι περιοδικό, ενώ οι μέγιστες τιμές συνεχίζουν να αυξάνονται όπως φαίνεται και από το γεγονός ότι δημιουργήθηκαν για τις επόμενες «αναγεννήσεις-εξαφανίσεις» μεγαλύτερα τρίγωνα. Μπορούμε να υποθέσουμε, τόσο βλέποντας το πρώτο διάγραμμα, όσο και από το γεγονός, ότι δημιουργούνται συνεχώς τρίγωνα αγαγεννήσεως-εξαφάνισης και ότι το σύστημα δεν θα οδηγηθεί σε κάποιου είδους ισορροπία/συγκλίνει σε κάποιο σταθερό αριθμό λαγών αλεπούδων.

d) Για $dt = 0.001$ έχουμε τα εξής διαγράμματα:

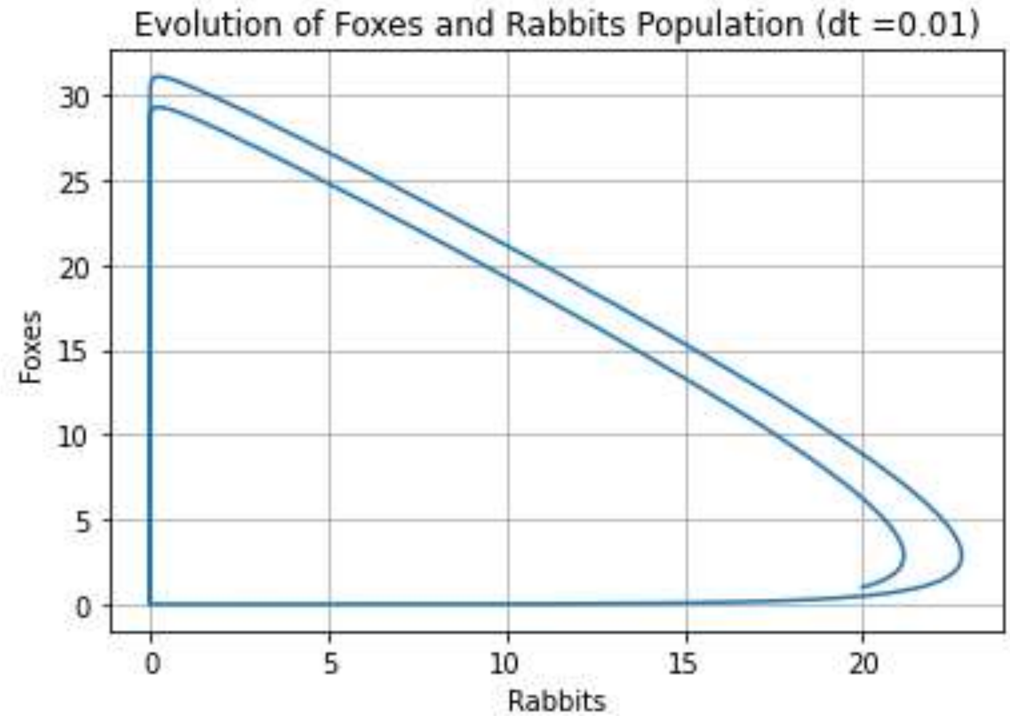




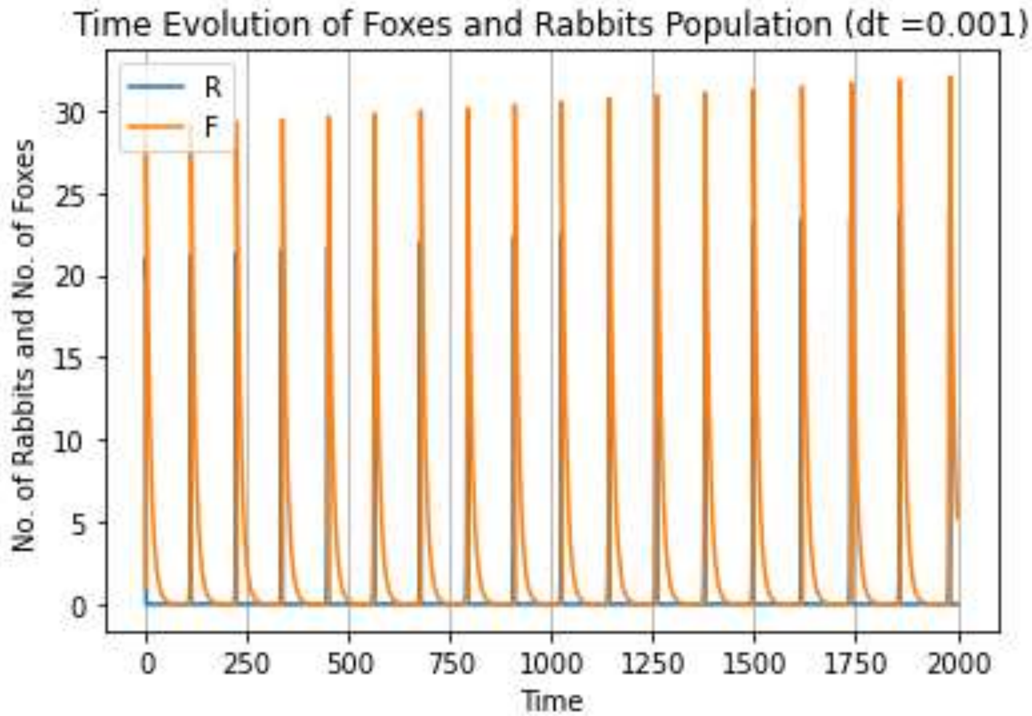
Time Evolution of Foxes and Rabbits Population (dt =0.01)
R
F
No. of Rabbits and No. of Foxes
Time
0
5
10
15
20
25
30
0
25
50
75
100
125
150
175
200

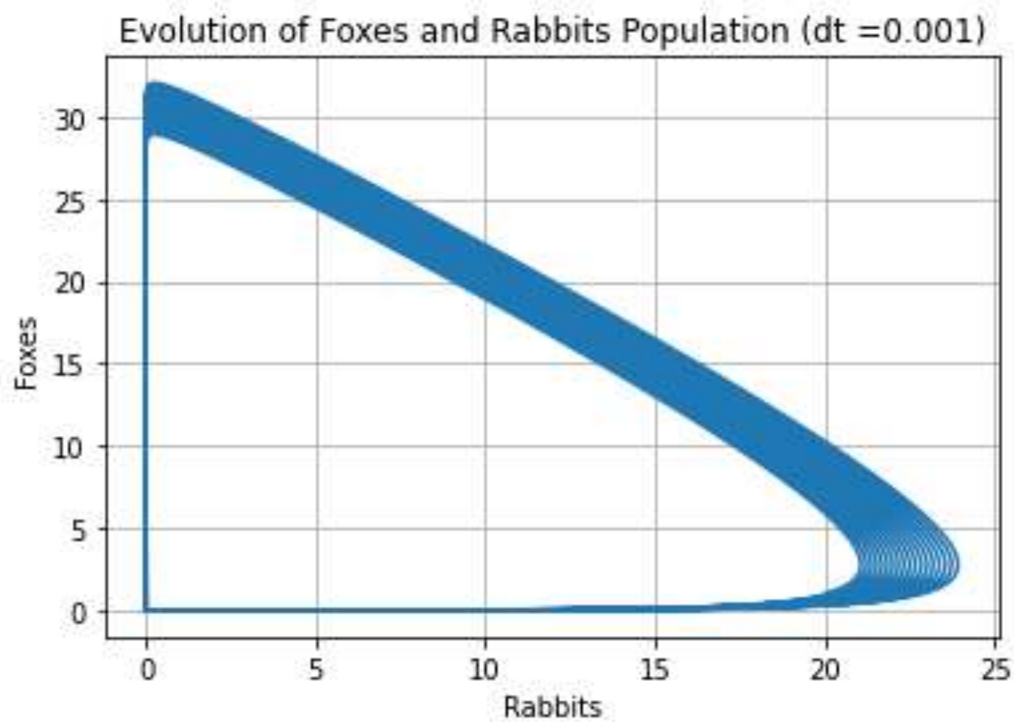


Evolution of Foxes and Rabbits Population (dt =0.001)
Foxes
Rabbits
0
5
10
15
20
25
30
0
5
10
15
20



Οι παρατηρήσεις για την περιοδικότητα και την μετατόπιση των ακραίων τιμών συνεχίζουν να ισχύουν. Για $dt = 0.001$ η περίοδος του φαινομένου «αναγέννησης-εξαφάνισης» είναι περίπου η ίδια, ενώ οι ακραίες τιμές στη δεύτερη επανάληψη μετατοπίστηκαν σε μικρό βαθμό σε σχέση με τη πρώτη. Για αυτό τα 2 τρίγωνα σχεδόν ταυτίζονται. Για πολλές επαναλήψεις ($tmax = 2000$) επιβεβαιώνονται οι παρατηρήσεις. Βλέπουμε ότι, μετά από την χρονική στιγμή $t = 2000$, οι ακραίες τιμές των αλεπούδων-λαγών είναι $33 - 23$ αντίστοιχα, ενώ για $dt = 0.01$ ήταν $80 - 70$, η οποία είναι αρκετά σημαντική διαφορά. Αυτό σημαίνει ότι οι μετατοπίσεις στις ακραίες τιμές για $dt = 0.001$ είναι πάρα πολύ μικρές και ίσως στην πραγματική λύση ($dt \to 0$) να μην μεταβάλλονται σε κάθε περίοδο. Άρα, στην πραγματική λύση ίσως υπάρχει ένα τρίγωνο που ακολουθεί η σχέση αλεπούδων-λαγών στην ίδια περίοδο. Για tmax = 2000 παρατηρούμε ότι όντως τα τρίγωνα είναι πολύ κοντά


Time Evolution of Foxes and Rabbits Population (dt =0.001)
R
F
No. of Rabbits and No. of Foxes
0
5
10
15
20
25
30
0
250
500
750
1000
1250
1500
1750
2000
Time


Evolution of Foxes and Rabbits Population (dt =0.001)
Foxes
0
5
10
15
20
25
30
0
5
10
15
20
25
Rabbits