Modèles stochastiques :
Simulation de signaux auto-régressifs

Préparation : avant la séance répondez aux questions 1, 2, 3a et 6a

LES MODÈLES STOCHASTIQUES de signaux ou d'images sont cruciaux dans la pratique du traitement de données car ils permettent de modéliser des situations incertaines. Il peut s'agir de modéliser des erreurs de mesures ou de modéliser la connaissance partielle d'une quantité d'intérêt.

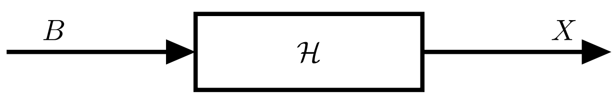
L'analyse fondamentale de ces signaux repose sur leur caractérisation « au second ordre » dans le cas stationnaire. Plus précisément, d'un point de vue temporel, le travail proposé ici est consacré à la fonction de *covariance* et d'un point de vue fréquentiel, il est consacré à la *densité spectrale de puissance* (DSP). Tous les signaux considérés sont centrés (de moyenne nulle).

1. *Rappel de cours – On considère un signal aléatoire $X = [X_n]_{n\in\mathbb{Z}}$ centré et stationnaire à l'ordre 2.*

1a. *Rappelez la définition de la fonction de covariance γ_X du signal X.*

1b. *Rappelez la définition de la densité spectrale de puissance S_X du signal X.*

La manière la plus simple et la plus pratique de fabriquer des signaux corrélés repose sur le filtrage (linéaire invariant) des bruits blancs comme figuré ci-dessous.



L'entrée du filtre est un bruit blanc $B = [B_n]_{n\in\mathbb{Z}}$ et on notera r_b sa puissance. La sortie est le signal d'intérêt $X = [X_n]_{n\in\mathbb{Z}}$. Dans la suite on notera h_n, pour $n \in \mathbb{Z}$ la réponse impulsionnelle, $H(\nu)$, pour $\nu \in [-0.5\,,\,+0.5]$ le transfert en fréquence et $H(z)$, pour $z \in \mathbb{C}$ le transfert en z.

2. *Rappel de cours concernant la Densité Spectrale de Puissance.*

2a. *Rappelez la relation entre la DSP en entrée, la DSP en sortie et le transfert en fréquence.*

2b. *Que devient-elle ici dans le cas où l'entrée est un bruit blanc ?*

Dans ce travail on se consacre à un filtre récursif dont la relation entrée / sortie s'écrit :

$$X_n = \alpha X_{n-1} + B_n\,. \tag{1}$$

Le coefficient α est l'unique paramètre du filtre. Il sera choisi dans $[-1\,,\,+1]$ et on pourra commencer par $\alpha = 0.95$. Le signal de sortie est appelé *signal auto-régressif d'ordre 1* (AR 1).

3. *Caractérisation spectrale du signal auto-régressif d'ordre 1.*

3a. *A partir de la relation (1) déterminez (théoriquement) le transfert en z du filtre, en déduire le transfert en fréquence et la DSP $S_X(\nu)$.*

3b. *Tracez $S_X(\nu)$, pour une grille fréquentielle de 1024 valeurs de ν dans l'intervalle $[-2\,,\,+2]$. On pourra utiliser la fonction `linspace` pour générer la grille de valeurs. Les calculs se font sans boucle « `for` ». On prendra $r_b = 2$.*

En dehors de la structure de covariance et de la forme spectrale, une autre caractéristique des signaux aléatoires est capitale : la loi probabilité. Dans le cas qui nous intéresse ici, la loi du signal X est déterminée par la loi de l'entrée B (et par la structure du filtre). Par exemple, le bruit d'entrée peut suivre une loi de Bernoulli (binaire) ou bien une loi de Gauss, de Laplace, de Cauchy,... Dans ce travail on commencera par le cas gaussien et on pourra très simplement travailler avec d'autres lois dans un second temps.

Nous en arrivons alors à la partie simulation elle-même. Commencez par fabriquer une réalisation du signal d'entrée en utilisant par exemple les commandes suivantes :

```
% Définition des constantes
    Taille = 512;
    VarB = 2;

% Simulation de l'entrée
    Bruit = sqrt(VarB) * randn(Taille,1);
```

4. *Tracez la réalisation de l'entrée, sous la forme d'un signal et sous la forme d'un histogramme.*

L'opération de filtrage de l'entrée peut alors être réalisée en utilisant la fonction `filter`. Lisez en détail la documentation de cette fonction. En vous référant à la relation (1), déterminez précisément et avec soin les paramètres à passer à la fonction `filter` pour qu'elle réalise l'opération souhaitée. Fabriquez ainsi la variable `Signal` qui contient le signal filtré X.

5. *Présentez l'entrée et la sortie sur deux sous-figures d'une même figure.*

Sans modifier la valeur de α, relancez plusieurs fois la simulation afin d'évaluer la variabilité avec la réalisation du bruit d'entrée. Faites ensuite varier le coefficient α : prenez 0.5, 0.8, 0.9, 0.95, 0.99. Prenez également $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$. Testez également des valeurs négatives.

6. *Analysez en détail et commentez les résultats en fonction de la valeur de α.*

La suite du travail consiste à comparer la DSP « vraie » $S_X(\nu)$ à la DSP « empirique » $\widehat{S}_X(\nu)$. La notion d'*estimation* en tant que tel est en dehors du programme de cet enseignement mais on va cependant estimer simplement la DSP à partir du signal simulé. Utilisez la séquence suivante.

```
% Calcul du périodogramme (DSP empirique)
    [NuGrid Periodo] = CalcPeriodo(Signal);
```

7. *Superposez les tracés de la DSP « empirique » (le périodogramme) et de la DSP « vraie » sur la même figure. Comparez les deux courbes et commentez. Commentez en particulier l'influence du paramètre α et de r_b.*

Pour terminer, on réalise les opérations similaires à propos de la fonction de covariance du processus. En particulier on va comparer la covariance « *vraie* » $\gamma_X(p)$ à la covariance « *empirique* » $\widehat{\gamma}_X(p)$.

8. *Caractérisation corrélatoire du signal auto-régressif d'ordre 1.*

8a. *A partir de la relation (1), montrez que la fonction de covariance s'écrit :*

$$\gamma_X(p) = \frac{r_b}{1-\alpha^2}\,\alpha^{|p|} \quad \text{pour } p \in \mathbb{Z}$$

8b. *Tracez $\gamma_X(p)$, pour une grille de valeur de p. Les calculs se font ici également sans boucle « `for` ».*

Pour calculer la covariance empirique utilisez la séquence suivante.

```
% Calcul de la covariance empirique
    [Temps CovarEmpiric]  = CalcCovar(Signal);
```

9. *Superposez les tracés des deux covariances sur la même figure. Comparez les deux courbes et commentez. Commentez en particulier l'influence des paramètres α et r_b.*