Somme de variables aléatoires indépendantes, continues et uniformes.

On s'intéresse à la somme de N variables aléatoires continues, mutuellement indépendantes, et uniformément distribuées sur l'intervalle [0, 1]. On les note U_k, et on définit deux quantités d'intérêts : leur somme et leur moyenne.

$$\forall k \in [\![1, N]\!], \quad U_k \sim \mathcal{U}([0,1])$$
$$S = \sum_{k=1}^{N} U_k \qquad M = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} U_k$$

On cherche à exprimer la densité de probabilité des variables aléatoires S et M que l'on notera D_S et D_P. La méthode présentée repose sur la fonction caractéristique des variables aléatoires : φ_S et φ_M. Ainsi que sur la transformation de Fourier. L'idée de cette démonstration est suggérée dans un article de MathWorld [1], bien que la démonstration en elle-même n'y figure pas.

1 Transformée de Fourier

1.1 Définitions

Plusieurs définitions existent pour la transformée de Fourier [2], selon si l'on ajoute ou non un coefficient de normalisation 2π ou $\sqrt{2\pi}$ ou si l'on écrit la transformée avec des fréquences normalisées ou non. Toutes conduisent aux mêmes propriétés. On utilise ici les définitions et notations suivantes :

$$\mathcal{F}_x[x \mapsto f(x)](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(itx)dx$$
$$\mathcal{F}_t^{-1}[t \mapsto f(t)](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp(-itx)dx$$

1.2 Lien avec la densité de probabilité

La fonction caractéristique d'une densité la décrit entièrement (d'où son nom), et permet notamment des générer les moments de la loi, si ils existent. On fait ici le lien avec la transformation de Fourier pour une variable aléatoire notée X.

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \mathbb{E}[\exp(itx)] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} D_X(x)\exp(itx)dx \\
&= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}_x[x \mapsto D_X(x)](t)
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
D_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}_t^{-1}[t \mapsto \varphi_X(t)](x) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(t)\exp(-itx)dt
\end{aligned}$$

1.3 Calcul d'une intégrale

Dans ce paragraphe, on souhaite calculer l'intégrale (1) qui intervient dans le développement principal.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t}\exp[-it(x-k)]dt \tag{1}$$

Pour cela, on se base sur l'étude des signaux rectangle et signe, ainsi que de leurs transformées de Fourier respectives. On définit ces deux fonctions de la manière suivante :

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases} \qquad \operatorname{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction rect est légèrement différente de la définition habituelle, mais cela simplifie les expressions. On a le premier développement suivant :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rect}(x) &= \frac{1}{2}[\mathrm{sgn}(x+1) - \mathrm{sgn}(x-1)] \\
\mathcal{F}_x[x \mapsto \mathrm{rect}(x)](t) &= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}_x[x \mapsto \mathrm{sgn}(x)](t)\,[\exp(it) - \exp(-it)] \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}_x[x \mapsto \mathrm{sgn}(x)](t)\sin(t) \qquad (2)
\end{aligned}$$

Or, en utilisant directement la formule de la transformation de Fourier, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_x[x \mapsto \mathrm{rect}(x)](t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\exp(itx)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{it}[\exp(it) - \exp(-it)] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{t}\sin(t) \qquad (3)
\end{aligned}$$

En égalisant (2) et (3), on arrive à une expression explicite pour (1) :

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}_x[x \mapsto \mathrm{sgn}(x)](t)\sin(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{t}\sin(t) \\
\mathcal{F}_x[x \mapsto \mathrm{sgn}(x)](t) &= -\frac{2}{it} \\
\mathcal{F}_x[x \mapsto \mathrm{sgn}(x-k)](t) &= -\frac{2}{it}\exp(itk) \\
\mathrm{sgn}(x-k) &= \mathcal{F}_t^{-1}\left[t \mapsto -\frac{2}{it}\exp(itk)\right](x) \\
&= -\frac{2}{i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t}\exp(itk)\exp(-itx)dt \\
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t}\exp[-it(x-k)]dt &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}}i\mathrm{sgn}(x-k) \qquad (4)
\end{aligned}$$

2 Calcul des densités de probabilité

2.1 Loi de Irwin-Hall

On s'intéresse ici à la somme des variables uniformes sur [0, 1], supposées *iid.*

$$\begin{aligned}
\varphi_S(t) &= \varphi_{\sum_{k=1}^N U_k}(t) \\
&= \prod_{k=1}^{N}\varphi_{U_k}(t) \\
&= \frac{1}{(it)^N}[\exp(it) - 1]^N \\
&= \frac{(-i)^N}{t^N}\sum_{k=0}^{N}C_k^N(-1)^{N-k}\exp(itk) \\
&= \frac{(-1)^N i^N}{t^N}(-1)^N\sum_{k=0}^{N}C_k^N(-1)^{-k}\exp(itk) \\
&= \frac{i^N}{t^N}\sum_{k=0}^{N}C_k^N(-1)^k\exp(itk)
\end{aligned}$$

On prend la transformée de Fourier inverse :

$$D_S(x) = \mathcal{F}_t^{-1}[t \mapsto \varphi_S(t)](x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{i^N}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{N} C_k^N (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^N} \exp(itk) \exp(-itx) dt \\
&= \frac{i^N}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{N} C_k^N (-1)^k J \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Avec :

$$
J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^N} \exp[-it(x-k)] dt
$$

Pour calculer l'intégrale J, on réalise une intégration par partie :

$$
u(t) = -\frac{1}{N-1} t^{1-N} \qquad\qquad v(t) = \exp[-it(x-k)]
$$

Les fonctions u et v sont bien dérivable sur l'ensemble des réels. De plus, comme $1-N < 0$ et $|\exp[-it(x-k)]| \leq 1$, on a $\lim\limits_{t\to\pm\infty} t^{1-N} \exp[-it(x-k)] = 0$. L'intégration par partie conduit alors à la relation suivante :

$$
J = -\frac{i(x-k)}{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{1-N} \exp[-it(x-k)] dt
$$

On peut encore réaliser cette même intégration par partie N-2 fois, au delà, il n'y a plus une puissance de t pour dominer l'exponentielle complexe dans l'intégrale restante. On s'arrête avant, et on reconnaît l'expression de I donnée en (1) dont une forme explicite a été calculé précédemment (4).

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{-i(x-k)}{N-1} \frac{-i(x-k)}{N-2} \cdots \frac{-i(x-k)}{1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} \exp[-it(x-k)] dt \\
&= \frac{(-i)^{N-1}(x-k)^{N-1}}{(N-1)!} I \\
&= \frac{(-i)^{N-1}(x-k)^{N-1}}{(N-1)!} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-i) \mathrm{sgn}(x-k)
\end{aligned}
$$

On injecte cette expression de J dans l'équation (5) pour obtenir la formule de la densité de Irwin-Hall :

$$
\begin{aligned}
D_S(x) &= \frac{i^N}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{N} C_k^N (-1)^k \frac{(-1)^N i^N (x-k)^{N-1}}{(N-1)!} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sgn}(x-k) \\
&= \frac{1}{2(N-1)!} \sum_{k=0}^{N} C_k^N (-1)^k (x-k)^{N-1} \mathrm{sgn}(x-k) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

2.2 Lois de Bates

La densité de Bates se déduit de celle de Irwin-Hall en utilisant une propriété de la fonction caractéristique :

$$
\varphi_{aX+b}(t) = \varphi_X(at) \exp(itb)
$$

On a $M = S/N$, on utilise donc $a = 1/N$ et $b = 0$. Puis, on prend la transformée de Fourier inverse :

$$
\begin{aligned}
D_M(x) &= \mathcal{F}_t^{-1} \left[t \mapsto \varphi_S \left(\frac{t}{N} \right) \right] (x) \\
&= |N| \mathcal{F}_t^{-1} [t \mapsto \varphi_S(t)](Nx) \\
&= \frac{N}{2(N-1)!} \sum_{k=0}^{N} C_k^N (-1)^k (Nx-k)^{N-1} \mathrm{sgn}(Nx-k) \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Références

[1] Eric W. Weisstein. Uniform sum distribution. From MathWorld – A Wolfram Web Resource `https://mathworld.wolfram.com/UniformSumDistribution.html`.

[2] BibM@th. Fourier transform. `https://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./f/fouriertransf.html`.