

Application

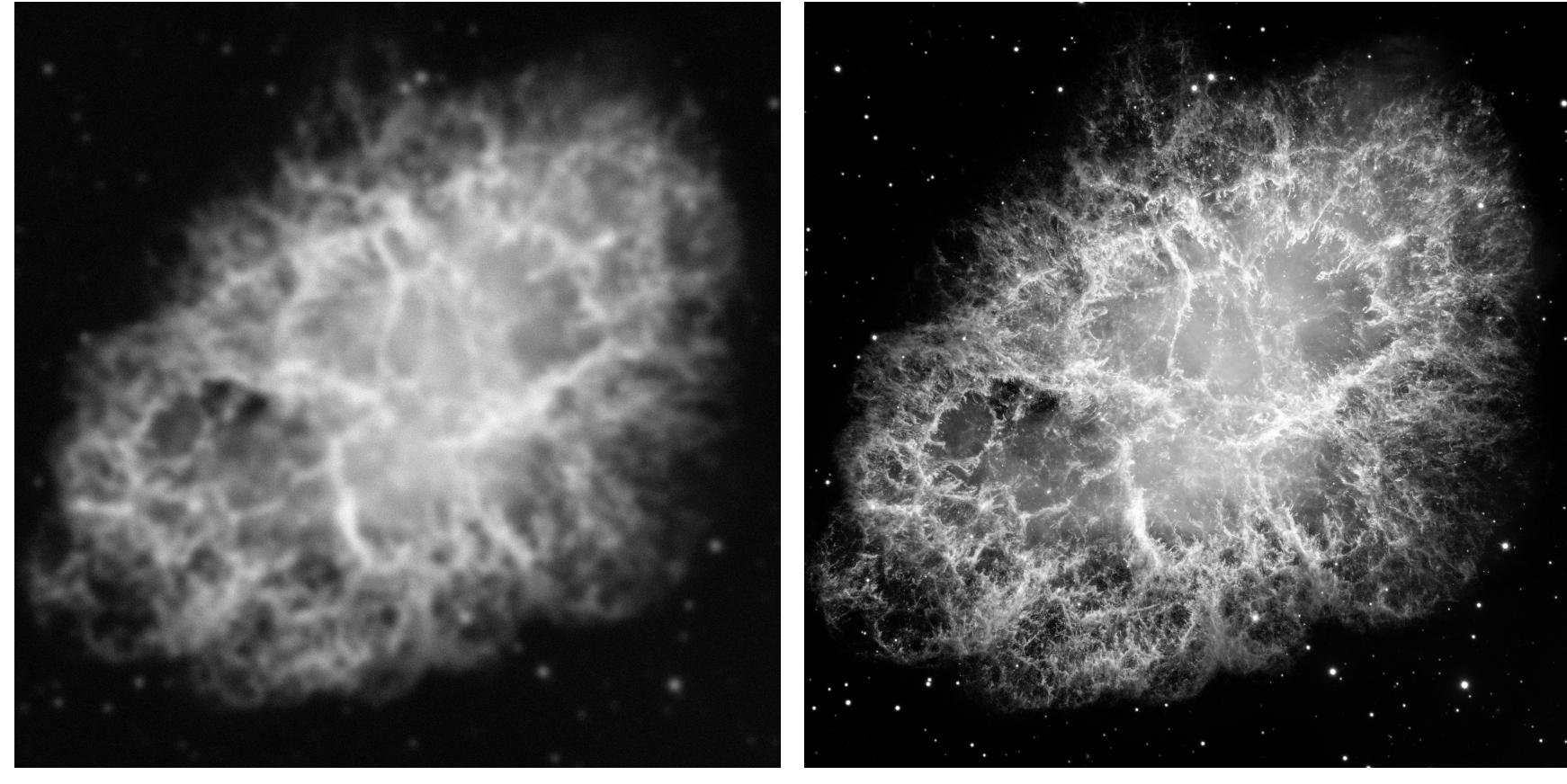


Image floue \mathbf{y} Image nette \mathbf{x}
Nébuleuse du Crab. Crédit image: NASA, ESA, J. Hester and A. Loll (Arizona State University). Accès via ESA/Hubble, 2005.

Modèle :
• Convolutif
• Erreur additive

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Déconvolution

Reconstituer \mathbf{x} à partir de \mathbf{y} et \mathbf{H} via un traitement automatisé.

Désidérata

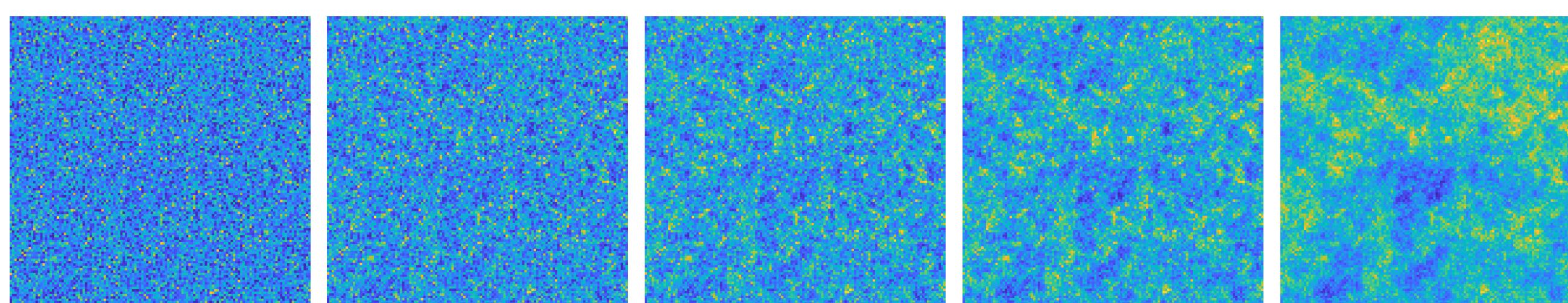
- **Positivité des pixels** : physique du problème (énergie, intensité...).
- **Maîtrise de la DSP** : modélisation des caractéristiques des images.
- **Modèle explicite** : méthodes automatisées, accès aux incertitudes.

Modélisation probabiliste de l'image \mathbf{x}

- Champ aléatoire iid gaussien tronqué positif $\mathbf{u} \sim \mathcal{N}_+(\mu_u, \gamma_u \mathbf{I})$.
- Filtrage à RI positive par une matrice $\mathbf{x} = \mathbf{A}_\omega \mathbf{u}$.
- DSP maîtrisée par ω calibrant la corrélation entre les pixels.

$$\pi(\mathbf{x} | \boldsymbol{\eta}) = |\det \mathbf{A}_\omega|^{-1} K(\mu_u, \gamma_u)^P \exp(-\gamma_u \|\mathbf{A}_\omega^{-1} \mathbf{x} - \mu_u \mathbf{1}\|^2/2) \mathbb{1}_+(\mathbf{A}_\omega^{-1} \mathbf{x}) \quad (1)$$

$$K(\mu_u, \gamma_u) = \sqrt{\frac{\gamma_u}{2\pi}} \times 2 \left[1 + \text{erf}\left(\sqrt{\frac{\gamma_u}{2}} \mu_u\right) \right]^{-1} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\eta} = [\mu_u, \gamma_u, \omega]$$



Réalisations de \mathbf{x} avec une corrélation croissante, filtrage AR(1).

Cadre bayésien

- Observation \mathbf{y} : $f(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \gamma_e) = (\gamma_e / (2\pi))^{P/2} \exp(-\gamma_e \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2/2)$
- A priori contraint sur \mathbf{x} : $\pi(\mathbf{x} | \boldsymbol{\eta})$ décrit par (1)
- A priori uniforme et séparable sur $\boldsymbol{\eta}$: $\pi(\boldsymbol{\eta}) = \pi(\mu_u) \pi(\gamma_u) \pi(\omega)$
- A priori gamma sur γ_e : $\pi(\gamma_e) = \beta^\alpha \Gamma(\alpha)^{-1} \gamma_e^{\alpha-1} \exp(-\beta \gamma_e) \mathbb{1}_+(\gamma_e)$

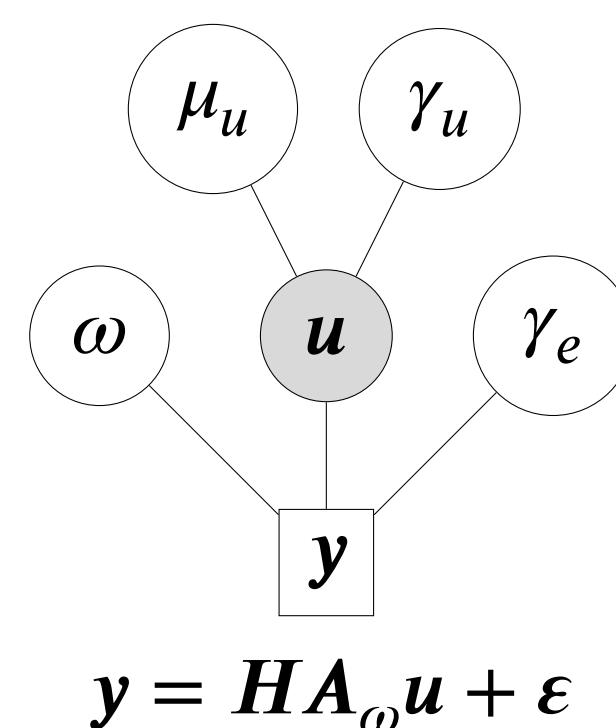
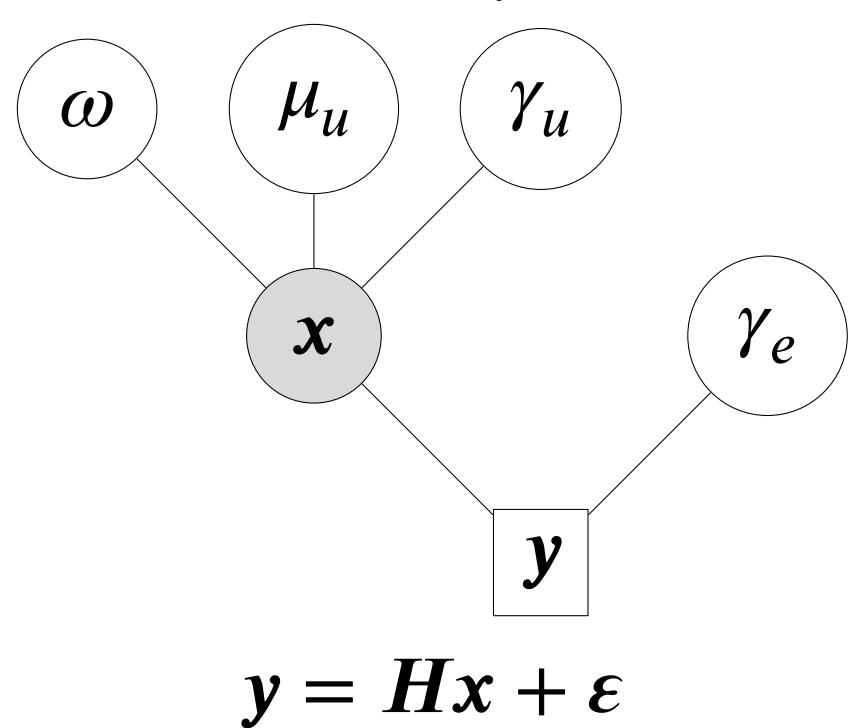
Pour un modèle hiérarchique en \mathbf{x} :

Loi jointe : $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta) = f(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \gamma_e) \pi(\mathbf{x} | \boldsymbol{\eta}) \pi(\boldsymbol{\eta}) \pi(\gamma_e)$

Posterior : $\pi(\mathbf{x}, \theta | \mathbf{y}) \propto f(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \gamma_e) \pi(\mathbf{x} | \boldsymbol{\eta}) \pi(\boldsymbol{\eta}) \pi(\gamma_e)$

Avec $\theta = [\boldsymbol{\eta}, \gamma_e]$ l'ensemble des paramètres.

Modèles hiérarchiques



Formulations équivalentes du posterior

$$\pi(\square, \theta | \mathbf{y}) \propto Z_\square(\theta) \exp\left[-\frac{1}{2}(\square - \mathbf{m}_\square)' \Gamma_\square (\square - \mathbf{m}_\square)\right] \mathbb{1}_+(\mathbf{K}_\square \square)$$

\square	Γ_\square	\mathbf{m}_\square	\mathbf{K}_\square
\mathbf{x}	$\gamma_e \mathbf{H}' \mathbf{H} + \gamma_u \mathbf{A}_\omega^{-t} \mathbf{A}_\omega^{-1}$	$\Gamma_x^{-1} (\gamma_e \mathbf{H}' \mathbf{y} + \gamma_u \mu_u \mathbf{A}_\omega^{-t} \mathbf{1})$	\mathbf{A}_ω^{-1}
\mathbf{u}	$\gamma_e \mathbf{A}_\omega^t \mathbf{H}' \mathbf{H} \mathbf{A}_\omega + \gamma_u \mathbf{I}$	$\Gamma_u^{-1} (\gamma_e \mathbf{A}_\omega^t \mathbf{H}' \mathbf{y} + \gamma_u \mu_u \mathbf{1})$	\mathbf{I}
\mathbf{z}_x	\mathbf{I}	$\Gamma_x^{-0.5} (\gamma_e \mathbf{H}' \mathbf{y} + \gamma_u \mu_u \mathbf{A}_\omega^{-t} \mathbf{1})$	$\mathbf{A}_\omega^{-1} \Gamma_x^{-0.5}$
\mathbf{z}_u	\mathbf{I}	$\Gamma_u^{-0.5} (\gamma_e \mathbf{A}_\omega^t \mathbf{H}' \mathbf{y} + \gamma_u \mu_u \mathbf{1})$	\mathbf{I}

avec $\Gamma_\square^{-0.5}$ tel que $\Gamma_\square^{-0.5} \Gamma_\square^{-0.5} = \mathbf{I}$

Densités conditionnelles à partir du posterior

- des paramètres de l'image $\pi(\boldsymbol{\eta} | *)$ [soumis pour publication à SSP],
- du paramètre de bruit $\pi(\gamma_e | *)$ qui suit une loi gamma,
- d'un des 2 champs : $\pi(\mathbf{x} | *)$ ou $\pi(\mathbf{u} | *)$.

Problème : densité multivariée, contraint, et non séparable.

Solution : exprimer la densité d'un pixel du champ.

Densité du pixel p

Densité conditionnelle de la nouvelle image $\tilde{\mathbf{x}}$:

$$\pi(\tilde{\mathbf{x}} | *) \propto \exp\left[-\frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{m})' \Gamma(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{m})\right] \mathbb{1}_+(\mathbf{K} \tilde{\mathbf{x}})$$

où

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + (\tilde{x}_p - x_p) \mathbf{1}_p^t = \mathbf{x} + \delta_p \mathbf{1}_p^t$$

dépend de la précédente image \mathbf{x} et de l'écart δ_p à ajouter au pixel x_p . Quantités intermédiaires :

$$c_0 = \Gamma(0, 0) \quad \tau_x = (\Gamma \mathbf{m} - \Gamma \mathbf{x}) / c_0 \quad (2) \quad \kappa_x = \mathbf{K} \mathbf{x}. \quad (3)$$

Gaussienne tronquée scalaire :

$$\delta_p \sim \mathcal{N}_{(m_p, M_p)}(\mathbf{1}_p^t \tau_x, c_0) \quad (4)$$

avec seulement 1 ou 2 inégalités en considérant les plus contraignantes

$$m_p = \begin{cases} -\left(\max_{n \in \mathbb{N}_P} \frac{\mathbf{1}_n^t \mathbf{K} \mathbf{1}_p}{\mathbf{1}_n^t \kappa_x}\right)^{-1} & \text{si } \exists n \in \mathbb{N}_P \quad \mathbf{1}_n^t \mathbf{K} \mathbf{1}_p > 0, \\ -\infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5)$$

$$M_p = \begin{cases} -\left(\min_{n \in \mathbb{N}_P} \frac{\mathbf{1}_n^t \mathbf{K} \mathbf{1}_p}{\mathbf{1}_n^t \kappa_x}\right)^{-1} & \text{si } \exists n \in \mathbb{N}_P \quad \mathbf{1}_n^t \mathbf{K} \mathbf{1}_p < 0, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Mise à jour des quantités intermédiaires

$$\kappa_{\tilde{x}} = \kappa_x + \delta_p \mathbf{K} \mathbf{1}_p \quad (6) \quad \tau_{\tilde{x}} = \tau_x - \frac{\delta_p}{c_0} \Gamma \mathbf{1}_p. \quad (7)$$

Pseudo-code pour une déconvolution par échantillonnage

Pour $t = 1, 2, \dots$:

```
# Échantillonnage paramètres
Échantillonner une proposition  $\theta^p$  selon  $\mathcal{N}(\theta_{t-1}, \sigma^2 \mathbf{I})$ .
Calculer  $\alpha = \exp[L_P(\theta^p) - L_P(\theta_{t-1})]$  où  $L_P(\theta) = \log \pi(\theta | *)$ .
Accepter avec une probabilité  $\alpha$  la proposition :  $\theta_t = \theta^p$ .
Si refusé, dupliquer l'échantillon précédent :  $\theta_t = \theta_{t-1}$ .
```

```
# Échantillonnage  $\gamma_e$ 
Échantillonner  $\gamma_e$  selon une distribution Gamma  $\mathcal{G}(\cdot, \cdot)$ .
```

```
# Échantillonnage pixels
Calculer  $\tau_x$  et  $\kappa_x$  selon (2) et (3) par FFT circulaire.
```

Pour chaque pixel p :

Calculer m_p et M_p selon (5).

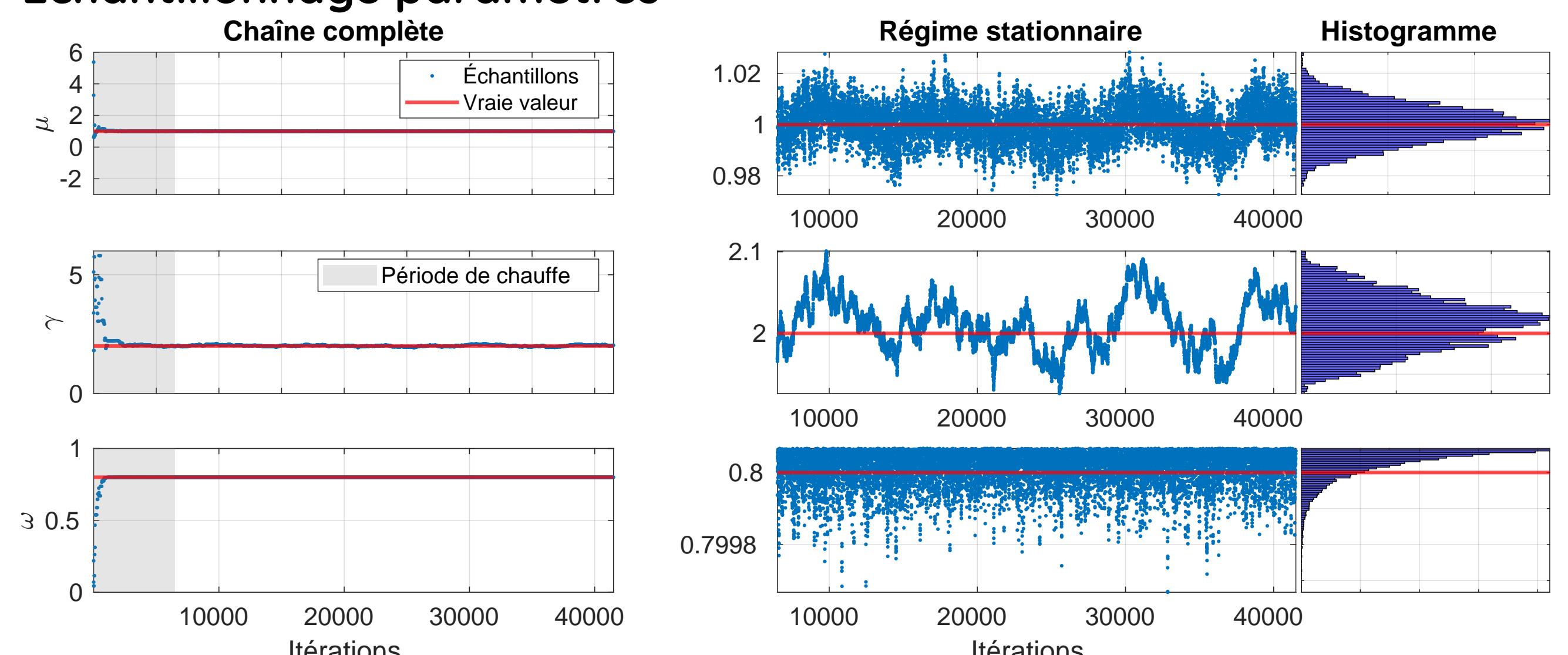
Tirer δ_p selon (4).

Remplacer le pixel p avec $\tilde{x}_p = x_p + \delta_p$.

Mettre à jour κ_x et τ_x selon (6) et (7).

Fin

Échantillonnage paramètres



Perspectives

- Tester les différentes possibilités selon les spécificités des champs.
- Alternatives : optimisation pixel par pixel ou globalement (ADMM).
- Identifier si ces méthodes sont équivalentes ou non.
- Modèle à labels pour garantir une masse de pixels nuls (fond astro).

Bibliographie

- V. Mazet, D. Brie, and J. Idier, "Simulation of positive normal variables using several proposal distributions," IEEE SSP, Juillet 2005, pp. 37-42
- N. Chopin, "Fast simulation of truncated gaussian distributions," Statistics and Computing, vol.21, no.2, p.275-288, Jan. 2010