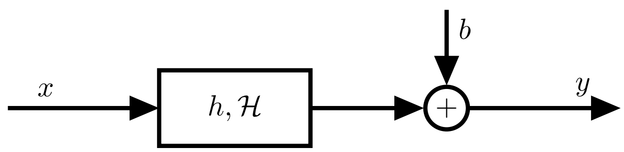
Déconvolution de signaux impulsionnels par filtrage de Wiener

Préparation : avant la séance répondez à la question 2.

Du point de vue des retombées pratiques, le travail proposé ici peut concerner des problématiques en imagerie et dans différents contextes : contrôle non-destructif par ultrason, séismique réflection pour la géophysique, tomographie optique cohérente en dermatologie, astrophysique,... et au delà physique ou sciences de la nature en général. Dans ces domaines de l'imagerie, pour certaines applications, les signaux d'intérêt (mais inconnus et à déterminer), sont impulsionnels : ils présentent quelques impulsions de relativement grande amplitude sur un fond quasiment nul. C'est notamment le cas lorsqu'il s'agit de localiser deux interfaces d'un milieu pour en quantifier l'épaisseur.

Dans ces situations, les signaux mesurés peuvent être approchés comme la convolution bruitée des signaux impulsionnels d'intérêt avec une fonction d'appareil. On représente les choses sous la forme du schéma-bloc



où x représente le signal impulsionnel inconnu, b le bruit de mesure (modélisé comme additif) et y le signal mesuré. La « boite » représente naturellement le filtre (la convolution) et on note h la réponse impulsionnelle. On écrit :

$$y = h \star x + b\,.$$

A cause de cette convolution et du bruit, le signal mesuré présente une faible résolution : deux impulsions proches peuvent être confondues dans le signal mesuré et/ou noyées dans un bruit de mesure qui peut être important. Il est alors difficile de restituer les positions et les amplitudes initiales des pics.

Remarque —— *Pour réaliser la suite du travail, on a besoin de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel et inversement. Pour cela on se servira des trois fonctions fournies* `MyFFT`, `MyIFFT` *et* `MyFFTRI`*. Le deux premières servent sur les signaux eux-mêmes pour calculer la transformée de Fourier (*`MyFFT`*) et son inverse (*`MyIFFT`*). La troisième (*`MyFFTRI`*) sert à calculer le gain en fréquence, c'est-à-dire transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.*

1. *Visualisation des signaux. Chargez le fichier des données* `Data.mat` *en utilisant la fonction* `load`*.*

1a. *Tracez les caractéristiques du filtre dans le domaine temporel (sa réponse impulsionnelle h) et dans le domaine de Fourier (sa réponse en fréquence $\mathcal{H}$). Quel est l'effet de ce filtre ?*

1b. *Concernant le signal mesuré y, on donne en fait deux exemples y_1 et y_2. Tracez les également dans le domaine temporel et dans le domaine de Fourier. Commentez.*

1c. *Dans le cas de l'exemple 1, en plus de y_1, on donne la solution $x_1^\bullet$: il s'agit du signal « vrai » à partir duquel on a pu simuler y_1. Vous pouvez alors comparer $x_1^\bullet$, $h \star x_1^\bullet$ et y_1. Commentez.*

Dans la pratique réelle, on ne connaît évidemment pas le signal « vrai » $x^\bullet$ et il s'agit justement de le déterminer, de le restaurer.

Cette restauration des signaux d'intérêt pose la question de la *déconvolution-débruitage*. Il s'agit alors d'inverser l'effet de la convolution et d'éliminer le bruit, afin de retrouver au mieux le signal de départ x à partir du signal mesuré y et connaissant le filtre h. Cet objectif peut être atteint par un filtrage de Wiener, dont le gain en fréquence est :

$$\mathcal{W}(\nu) = \frac{\mathcal{H}^*(\nu)}{|\mathcal{H}(\nu)|^2 + \mathcal{S}_B(\nu)/\mathcal{S}_X(\nu)} \tag{1}$$

où $\mathcal{S}_B$ et $\mathcal{S}_X$ représentent les densités spectrales de puissance (DSP) du bruit de mesure et du signal qu'on cherche à restaurer.

2. *Deux cas particuliers.*

2a. *Considérez le cas où il n'y a pas de bruit. Donnez le gain du filtre de Wiener correspondant et commentez.*

2b. *Considérez le cas où il n'y a pas de convolution. Précisez h et $\mathcal{H}$ et donnez le gain du filtre de Wiener correspondant. Commentez.*

Dans le présent travail, pour ce qui concerne $\mathcal{S}_B$, on se placera dans le cas du bruit blanc, c'est-à-dire $\mathcal{S}_B(\nu) = r_B$. Pour ce qui concerne $\mathcal{S}_X$, d'une façon générale, elle décrit l'information que l'on possède *a priori* sur le type de signal que l'on cherche à restaurer :

— dans le cas d'un signal plutôt lisse et corrélé (positivement), on pourrait s'appuyer sur la DSP d'un signal auto-régressif de coefficient proche de l'unité,

— dans le cadre du traitement d'images, on peut associer la DSP à la structure de corrélation d'une texture que l'on s'attend à trouver,

— lorsqu'il s'agit d'un signal impulsionnel comme ici, on ne veut pénaliser aucune fréquence, ce qui conduit à choisir une DSP constante, *i.e.,* un bruit blanc également et on pose $\mathcal{S}_X(\nu) = r_X$.

Avec ces deux modèles pour le signal et le bruit, la quantité $\mu = \mathcal{S}_B(\nu)/\mathcal{S}_X(\nu)$ dans (1) est constante et vaut $\mu = r_B/r_X$. Elle s'apparente au rapport attendu entre le niveau de bruit et le niveau de signal.

3. *Filtre de Wiener.*

3a. *Commencez par fixer une valeur pour μ, par exemple $\mu = 1$. Sur trois sous figures (l'une au dessus de l'autre) d'une même figure, tracez le gain du filtre, le gain du filtre de Wiener et le produit des deux, c'est-à-dire $\mathcal{H}(\nu)$, $\mathcal{W}(\nu)$, et $\mathcal{H}(\nu)\mathcal{W}(\nu)$.*

3b. *Faites varier la valeur de μ, observez et commentez. On fera varier en échelle logarithmique, par exemple entre $\mu = 10^{-10}$ et 1.*

4. *Déconvolution et débruitage par filtrage de Wiener.*

4a. *Filtrez le signal mesuré y_1 par le filtre de Wiener pour obtenir le signal restauré $\widehat{x}_1$. Jouez sur la valeur de μ et commentez le résultat (caractéristique du signal, niveau de bruit,… contenu fréquentiel). On rappelle que dans ce cas de y_1 le signal original $x_1^\bullet$ est également donné et on pourra donc réaliser des comparaisons.*

4b. *Filtrez ensuite le signal mesuré y_2 et commentez le résultat.*