Оглавление

[]russian

Глава 1

ТФКП

1.1. Серия полезных результатов

1.1.1. Теорема Коши для прямоугольного треугольника

(a) Прямоугольный треугольник (b)

Теорема 1. Рассматриваем треугольник ABC (рис. 1.1a).

$$f \in \mathcal{A}(G), \qquad A = a + pi, \quad B = b + pi, \quad c = b + qi, \qquad a < b, \quad p < q, \qquad \triangle\, ABC \subset G$$

$$I := \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial \triangle ABC}} f(z)\, \mathrm{d}\, z = 0$$

Доказательство. Рассмотрим точки:

$$D = \frac{a+b}{2} + i\frac{p+q}{2}, \qquad K = \frac{a+b}{2} + pi, \qquad E = b + i\frac{p+q}{2}$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial \triangle ABC}} f(z)\, \mathrm{d}\, z = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial \square}} + \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial \triangle_1}} + \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial \triangle_2}}$$

$$\int\limits_{\overrightarrow{ED}} + \int\limits_{\overrightarrow{DE}} = 0, \qquad \int\limits_{\overrightarrow{DK}} + \int\limits_{\overrightarrow{KD}} = 0$$

К каждому из треугольников можно применить такое же рассуждение, а к прямоугольникам — теорему Коши для прямоугольника. Получаем

$$I = \sum_{k=1}^{2^n} I_{n_k} \tag{1.1}$$

$$I_{n_k} = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial \triangle_{n_k}}} f(z)\, \mathrm{d}\, z \tag{1.2}$$

Рассмотрим какой-то из шагов (треугольник обозначим $\alpha\beta\gamma$, рис. 1.1b):

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\triangle\alpha\beta\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\triangle\alpha\beta\gamma}} f(z) - f(\alpha)\,\mathrm{d}\,z + f(\alpha) \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\triangle\alpha\beta\gamma}} 1\,\mathrm{d}\,z$$

Второй интеграл равен 0 (по св-ву 5 криволинейных интегралов). Значит, это равно

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\triangle\alpha\beta\gamma}} f(z) - f(\alpha)\,\mathrm{d}\,z \tag{1.3}$$

По св-ву 7 криволинейных интегралов, это означает, что

$$\left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\triangle\alpha\beta\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}\,z \right| \le \int\limits_{\partial\triangle\alpha\beta\gamma} |f(z) - f(\alpha)|\,|\mathrm{d}\,z| \tag{1.4}$$

Применим теорему Кантора:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0: \quad \forall\alpha \in [A, C], \quad z \in \partial \bigtriangleup \alpha\beta\gamma \quad |f(z) - f(\alpha)| < \varepsilon \tag{1.5}$$

Выберем n так, что

$$z^{-n} \cdot |C - A| < \delta$$

Тогда

$$(1.4), (1.5) \implies \int\limits_{\partial\triangle\alpha\beta\gamma} |f(z) - f(\alpha)|\,|\mathrm{d}\,z| < \varepsilon \int\limits_{\partial\triangle\alpha\beta\gamma} |\mathrm{d}\,z| \underset{\text{из геом. сообр.}}{<} 3\varepsilon|\gamma - \alpha| = 3\varepsilon \cdot |C - A| \cdot 2^{-n} \tag{1.6}$$

$$\underset{(1.4)}{\implies} \forall k \quad |I_{n_k}| < 3\varepsilon|C - A| \cdot 2^{-n} \tag{1.7}$$

$$\underset{(1.1)}{\implies} |I| \le \sum_{k=1}^{2^n} |I_{n_k} < 3\varepsilon|C - A| \cdot 2^{-n} \cdot 2^n = 3\varepsilon|C - A| \tag{1.8}$$

$$\implies |I| = 0$$

□

Если треугольник перевернуть относительно оси ординат, результат не изменится.

Замечание. Аналитичность f использовалась для прямоугольника.

1.1.2. Теорема Коши для треугольника

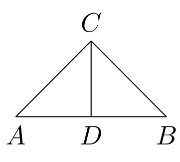

Рис. 1.2

Теорема 2. Рассматриваем треугольник ABC (рис. 1.2)

$$A = a + pi, \quad B = b + pi, \quad C = d + qi, \qquad a < d < l, \qquad q > p$$

$$\underbrace{\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\triangle ADC}}}_{0} + \underbrace{\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\triangle DBC}}}_{0} = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\triangle ABC}}$$

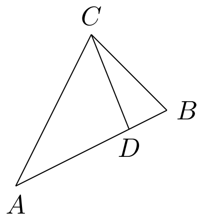

Рис. 1.3

Теорема 3. Рассматриваем треугольник ABC (рис. 1.3). Считаем, что наибольшая сторона — это AB.

Возьмём θ так, что $e^{i\theta} \cdot \triangle\, ABC$ повёрнут "правильно".

$$f_\theta(z) \coloneqq f(e^{-i\theta} z), \qquad f_\theta \in A(G_\theta)$$

Получаем треугольник $A_1 B_1 C_1$ из предыдущей теоремы.

Дальше пользуемся свойством 8 криволинейных интегралов.

1.1.3. Теорема Коши для конечносвязной многоугольной области

Определение 1. *Многоугольником* будем называть замкнутую кривую $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, устроенную следующим образом:

$$n \geq 2, \qquad a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n < c_{n+1} = b$$

$$\forall t \in [c_k, c_{k+1}] \quad \Gamma(t) = \Gamma(c_k) \cdot \frac{c_{k+1} - t}{c_{k+1} - c_k} + \Gamma(c_{k+1}) \cdot \frac{t - c_k}{c_{k+1} - c_k}$$

Точки $\Gamma(c_k)$ будем называть *вершинами* многоугольника.

Определение 2. *Многоугольной областью* будем называть область, граница которой является многоугольником.

Определение 3. *Конечносвязной многоугольной областью* будем называть область, граница которой состоит из конечного объединения многоугольников.

Теорема 4. Имеется некая конечносвязная многоугольная область D, ограниченная многоугольниками $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$.

$$\partial D = \bigcup_{\nu=1}^{k} \Gamma_\nu$$

Пусть есть область G такая, что $G \supset \overline{D}$ и функция $f \in \mathcal{A}(G)$. Рассмотрим

$$\overset{\curvearrowleft}{\partial} D = \bigcup_{\nu=1}^{k} \overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_\nu,$$

при этом, каждая кривая Γ_ν положительно ориентированна относительно области D.

$$\Longrightarrow \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial} D} f(z)\, \mathrm{d}\, z = 0$$

Доказательство. Применим теорему о триангуляции конечносвязной многоугольной области:

$$\exists \, \{\, \Delta_k \,\}_{k=1}^{N}, \quad \Delta_k \text{ — откр.:} \qquad \begin{cases} \Delta_k \cap \Delta_l = \emptyset, \quad k \neq l \\ \overline{\Delta}_k \cap \overline{\Delta}_l = \begin{cases} \emptyset \\ \text{общая вершина} \\ \text{общая сторона} \end{cases} \\ \bigcup_{k=1}^{N} \overline{\Delta}_k = \overline{D} \end{cases}$$

Рассмотрим

$$\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\substack{\circlearrowleft \\ \partial\Delta_k}} f(z) \, \mathrm{d}\, z$$

Каждый из них предстаим в виде суммы интегралов по трём сторонам. В результате:

1. каждый внутренний отрезок мы пройдём дважды в разных направлениях;
2. все "внутренние" границы (многоугольники) проходятся полностью в отрицательном (относительно самого многоугольника) направлении;
3. остаётся только "внешняя" граница.

$$\sum = 0$$

□