Оглавление

1 Линейные функционалы **2**

1.1 Продолжение про сопряжённый оператор . . . 2

1.1.1 Интегральный оператор в L^p и сопряжённый к нему . . . 2

1.2 Эрмитово-сопряжённый оператор . . . 3

1.2.1 Простейшие свойства эрмитово-сопряжённого оператора . . . 3

1.2.2 Эрмитово-сопряжённый к интегральному оператору . . . 4

1.2.3 Теорема о ядре и образе оператора и его сопряжённого . . . 5

Глава 1

Линейные функционалы

1.1. Продолжение про сопряжённый оператор

Обозначение. $(T^* f)(x) = f(TX)$

Определение 1. $(X, \|\cdot\|),\ (Y, \|\cdot\|), \quad x \in X, \quad f \in X^*$

$$\langle f, x \rangle := f(x)$$

$T \in \mathscr{B}(X, Y), \quad T^* : Y^* \to X^*$

$$\langle T^* f, x \rangle = \langle f, Tx \rangle$$

$\pi : X \to X^{**}, \quad f \in X^*, \quad x \in X$

$$f(x) = \langle f, x \rangle\,, \quad \langle \pi(x), f \rangle = f(x)$$

Можно отождествить $\pi(X)$ с X:

$$\langle x, f \rangle = f(x)$$

Пример. $\mathrm{L}^p(\mu), \quad \mathrm{L}^q(\mu), \quad 1 < p < +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad f \in \mathrm{L}^p, \quad g \in \mathrm{L}^q$

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_X f(x) g(x) \,\mathrm{d}\,\mu, \quad \langle g, f \rangle = \int\limits_X f(x) g(x) \,\mathrm{d}\,\mu$$

1.1.1. Интегральный оператор в L^p и сопряжённый к нему

Теорема 1. $(\mathbb{R}^n, \lambda_n),\ (\mathbb{R}^m, \lambda_m), \quad K(x, y) \in \mathrm{L}^p\big(\mathbb{R}^{n+m}, \lambda_{n+m}\big), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m$

$$M := \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^m} |K(x, y)|^p \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y \Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

$$(\mathscr{K} f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} K(x, y) f(y) \,\mathrm{d}\,y$$

Тогда

1. $\mathscr{K} \in \mathscr{B}\big(\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^m), \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)\big), \quad \|\mathscr{K}\| \le M$;
2. $\mathscr{K}^* \in \mathscr{B}\big(\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^m), \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^m)\big)$

$$(\mathscr{K}^* g)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K^*(y, x) g(x) \,\mathrm{d}\,x$$

$$\implies K^*(y, x) = K(x, y)$$

Доказательство.

1. Воспользуемся теоремой Фубини:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^m}|K(x,y)|^p\,\mathrm{d}\,y\Big)\,\mathrm{d}\,x<+\infty\implies\text{для п. в. } x\quad\int\limits_{\mathbb{R}^m}|K(x,y)|^p\,\mathrm{d}\,y<+\infty$$

Возьмём $f\in\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^m)$ и x такой, что внутренний интеграл конечен.

$$|(\mathscr{K}f)(x)|=\Big|\int\limits_{\mathbb{R}^m}K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}\,y\Big|\underset{\text{нер-во Гёльдера}}{\leq}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^m}|K(x,y)|^p\,\mathrm{d}\,y\Big)^{\frac{1}{q}}\cdot\|f\|_q$$

Возведём в степень p и проинтегрируем по $\mathbb{R}^n$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|(\mathscr{K}f)(x)|^p\,\mathrm{d}\,x\leq\|f\|_q^p\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^m}|K(x,y)|^p\,\mathrm{d}\,y\Big)\,\mathrm{d}\,x=M^p\implies$$

$$\implies\|\mathscr{K}f\|_p\leq M\|f\|_q\quad\forall f\in\mathrm{L}^q\implies\|\mathscr{K}\|\leq M,\quad\mathscr{K}\in\mathscr{B}(\dots)$$

2. $\mathscr{K}^*\in\mathscr{B}\big(\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^n),\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^m)\big)$

$$g\in\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^n),\quad f\in\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^m)$$

$$\langle\mathscr{K}^*g,f\rangle=\langle g,\mathscr{K}f\rangle=\int\limits_{\mathbb{R}^n}g(x)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^m}K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}\,y\Big)\,\mathrm{d}\,x\underset{\text{т. Фубини}}{=\!=\!=}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(x,y)g(x)\,\mathrm{d}\,x\Big)f(y)\,\mathrm{d}\,y \tag{1.1}$$

$$\langle\mathscr{K}^*g,y\rangle\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{\mathbb{R}^n}K^*(y,x)g(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\langle\mathscr{K}^*g,f\rangle=\int\limits_{\mathbb{R}^m}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}K^*(y,x)g(x)\Big)f(y)\,\mathrm{d}\,y\underset{(1.1)}{\implies}K^*(y,x)=K(x,y)$$

$\square$

1.2. Эрмитово-сопряжённый оператор

H — гильбертово, $\quad T\in\mathscr{B}(H),\quad y\in H$ — фиксирован, $\quad G_y:H\to\mathbb{C},\quad x\in H,\quad G_y(x):=(Tx,y)$

$$\implies G_y\in\mathscr{L}in(H,\mathbb{C})$$

Возьмём $x\in H$.

$$|G_y(x)|=\big|(Tx,y)\big|\leq\|Tx\|\cdot\|y\|\leq\|T\|\cdot\|y\|\cdot\|x\|\implies G_y\in H^*,\quad\|G_y\|\leq\|T\|\cdot\|y\|$$

Воспользуемся теоремой Рисса:

$$\exists!z\in H:\quad G_y(x)=(x,z),\quad\|z\|=\|G_y\|_{H^*}$$

Определение 2. $T^*y:=z$

$$T^*\in\mathscr{B}(H),\quad\|T^*\|\leq\|T\|$$

1.2.1. Простейшие свойства эрмитово-сопряжённого оператора

Теорема 2. H — гильбертово, $\quad T\in\mathscr{B}(H)$

1. $T^{**}=T$;
2. $T^*\in\mathscr{B}(H),\quad\|T^*\|=\|T\|$;
3. $\alpha\in\mathbb{C},\quad(\alpha T)^*=\overline{\alpha}T^*$;
4. $T,S\in\mathscr{B}(H)\implies(T+S)^*=T^*+S^*$;

5. $(TS)^* = S^*T^*$;
6. если T — биекция, то $\exists T^{-1} \in \mathscr{B}(H), \quad \exists (T^*)^{-1}$, при этом $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Доказательство.

1. $(Tx, y) = (x, T^*y)$

$$(x, Ty) = \overline{(Ty, x)} = \overline{(y, T^*x)} = (T^*x, y) = (x, T^{**}y) \quad \forall x$$

$$\implies Ty = T^{**}y \quad \forall y \in H$$

2. $T^* \in \mathscr{B}(H), \quad \|T^*\| \le \|T\| \implies \|T^{**}\| \le \|T^*\| \xRightarrow[T^{**}=T]{} \|T^*\| = \|T\|$

3. $\alpha \in \mathbb{C}$

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \implies \big((\alpha T)x, y\big) = (x, \overline{\alpha}T^*y) \implies (\alpha T^*) = \overline{\alpha}T^*$$

4. Очевидно.
5. Очевидно.
6. $\exists T^{-1}$

$$\left.\begin{aligned} T \cdot T^{-1} = I \underset{5)}{\implies} (T^{-1})^*T^* = (I^*) = I \\ T^{-1} \cdot T = I \underset{5)}{\implies} (T^*)(T^{-1})^* = I \end{aligned}\right\} \implies \exists (T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

□

Замечание. X, Y — банаховы, $\quad T \in \mathscr{B}(X, Y), \quad \exists T^{-1} \in \mathscr{B}(Y, X)$

$$\exists (T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

Без доказательства. □

1.2.2. Эрмитово-сопряжённый к интегральному оператору

Теорема 3. $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n, \lambda_n), \quad K(x, y) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{2n})$,

$$M = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |K(x, y)|^2 \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$(\mathscr{K} f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) \,\mathrm{d}\,y$$

Тогда

1. $\mathscr{K} \in \mathscr{B}\big(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)\big), \quad \|\mathscr{K}\| \le M$
2. $\mathscr{K}^* \in \mathscr{B}\big(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)\big)$

$$(\mathscr{K}^* g)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K^*(y, x) g(x) \,\mathrm{d}\,x$$

$$\implies K^*(y, x) = \overline{K(x, y)}$$

Доказательство.

1. Так же, как в предыдущей теореме.
2. Возьмём $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

$$(f, g) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)} \,\mathrm{d}\,x$$

$$(\mathscr{K}^* g, f) = (g, \mathscr{K} f) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x) \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) \,\mathrm{d}\, y} \,\mathrm{d}\, x \xlongequal[\text{т. Фубини}]{} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{K(x,y)} g(x) \Big) \overline{f(x)} \,\mathrm{d}\, y = $$
$$= \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{K(x,y)} g(x) \,\mathrm{d}\, x, f \Big)$$

$$\implies (\mathscr{K}^* g)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{K(x,y)} g(x) \,\mathrm{d}\, x \implies K^*(y,x) = \overline{K(x,y)}$$

□

1.2.3. Теорема о ядре и образе оператора и его сопряжённого

Теорема 4. H — гильбертово, $\quad T \in \mathscr{B}(H)$

$$H = (\operatorname{Ker} T) \oplus \overline{T^*(H)}$$

($\overline{(T^*(H))}$ — замыкание образа T^*)

$$H = (\operatorname{Ker} T^*) \oplus \overline{T(H)}$$

Общее наблюдение. L — подпространство в алгебраическом смысле,

$$M = L^\perp = \{\, x \in H \mid x \perp y \quad \forall y \in L \,\}$$

$$(\overline{L})^\perp = M$$

$$\implies H = M \oplus \overline{L}$$

Доказательство (теоремы). В качестве L возьмём $L = T^*(H)$. Возьмём $x \in L^\perp$.

$$(x, T^* y) = 0 \iff (Tx, y) = 0 \iff Ty = 0 \iff y \in \operatorname{Ker} M$$

$$\implies \big(T^*(H)\big)^\perp = \operatorname{Ker} T \implies H = \operatorname{Ker} T \oplus \overline{T^*(H)}$$

Применим эту формулу к T^* (учитывая, что $T^{**} = T$):

$$H = \operatorname{Ker} T^* \oplus \overline{T(H)}$$

□

Определение 3. $(X, \|\cdot\|)$, $\quad T \in \mathscr{B}(X)$, $\quad Y \subset X$ — подпространство в алгебраическом смысле
Будем говорить, что Y — *инвариантное подпространство* для T, если $T(Y) \subset Y$ (т. е. $T\big|_Y \in \mathscr{B}(Y)$).

Замечание (проблема инвариантного подпространства).

1. X — сепарабельно, банахово, $\quad T \in \mathscr{B}(X)$
   Существует ли нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство?
   Энфло построил пример, доказывающий, что нет.
2. H — гильбертово, $\quad T \in \mathscr{B}(H)$
   Неизвестно.

Теорема 5. H — гильбертово, $\quad T \in \mathscr{B}(H)$, $\quad Y$ — инвариантное подпространство для T

$$Y^\perp \text{ — инвариантное подпространство для } T^*$$