

# Содержание

<b>I Метрические пространства</b>	<b>3</b>
1 Полные метрические пространства. Свойства фундаментальных последовательностей. Теорема о замкнутом подпространстве	3
2 Банаховы пространства. Критерий полноты нормированного пространства	4
3 Полнота $m(A)$ , $\mathcal{C}(K)$ , $\mathcal{C}^{(n)}[a, b]$	5
4 Неравенства Юнга, Гёльдера, Минковского	7
5 Определение и свойства пространств $l^p$ , $F$	10
6 Определение и полнота пространств $L^p$ , пространств последовательностей	12
7 Примеры не полных нормированных пространств	14
8 Свойства метрики. Теорема о пополнении метрического пространства. Примеры	15
9 Теорема о вложенных шарах с замечаниями	18
10 Всюду плотные множества. Сепарабельные пространства. Примеры: $m(A)$ , $\mathcal{C}[a, b]$ , пространства последовательностей. Сепарабельность подпространства	19
11 Нигде не плотные множества. Теорема Бэра о категориях	21
12 Полные системы элементов, примеры. Полнота характеристических функций в $L^p$	22
13 Полнота характеристических функций элементов полукольца в $L^p$ . Сепарабельность $L^p$ по мере Лебега	23
14 Плотность непрерывных функций в $L^p$ для регулярной меры. Следствие	25
15 Компакты в метрических пространствах. Определение и примеры вполне ограниченных множеств	25
16 Свойства вполне ограниченных множеств. Лемма о разбиении	27
17 Теорема Хаусдорфа: критерий компактности в терминах вполне ограниченности. Следствия	28
18 Теорема Арцела–Асколи: критерий относительной компактности множества в пространстве $\mathcal{C}(K)$	29
19 Достаточные условия равностепенной непрерывности множества в $\mathcal{C}(K)$	31
<b>II Линейные пространства</b>	<b>32</b>
20 Линейные операторы. Примеры. Простейшие свойства	32
21 Непрерывность и ограниченность линейного оператора. Определение нормы оператора	34
22 Формула для вычисления нормы линейного оператора. Примеры непрерывных и не непрерывных операторов	35
23 Теоремы вложения для $l^p$ и для $L^p$ . Полнота пространства операторов, действующих из нормированного пространства в банахово	37
24 Линейные функционалы. Примеры. Вычисление норм интегрального функционала и интегрального оператора в $\mathcal{C}[a, b]$	38

<b>25 Изоморфизм пространств, эквивалентные нормы. Свойства линейно-изоморфных про-</b>	
<b>странств</b>	<b>41</b>
<b>26 Изоморфизм конечномерных пространств, эквивалентность норм, полнота, характеристика относительно компактных и компактных множеств, непрерывность линейных операторов</b>	<b>43</b>
<b>27 Конечномерные подпространства: замкнутость, существование элемента наилучшего приближения. Существование многочлена наилучшего приближения</b>	<b>45</b>
<b>28 Лемма Рисса о почти перпендикуляре, следствия их неё. Теорема Рисса: критерий конечномерности пространства</b>	<b>45</b>
<b>29 Продолжение линейного оператора со всюду плотного множества</b>	<b>46</b>
<b>30 Фактор-пространство нормированного и банахова пространства</b>	<b>47</b>
<b>31 Гильбертово пространство. Примеры. Замкнутость ортогонального дополнения. Непрерывность скалярного произведения, тождество параллелограмма</b>	<b>49</b>
<b>32 Существование и единственность элемента ближайшего приближения в подпространстве гильбертова пространства. Теорема о проекции на подпространство. Следствия</b>	<b>51</b>
<b>33 Критерий принадлежности множеству ортогональных проекторов</b>	<b>53</b>
<b>34 Проектор на конечномерное пространство. Критерий полноты семейства элементов. Неравенство Бесселя</b>	<b>55</b>

1

# Функциональный анализ, 5 семестр, коллоквиум

2025

## Часть I

### Метрические пространства

Обозначение.  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$

#### 1. Полные метрические пространства. Свойства фундаментальных последовательностей. Теорема о замкнутом подпространстве

**Определение 1.**  $X$  — множество,  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

$(X, \rho)$  называется *метрическим пространством*, если выполняются свойства:

1.  $\rho(x, y) \geq 0$ ,  $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ ;
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;
3.  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ .

**Определение 2.**  $(X, \rho)$  — *полное*, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

**Свойства.**  $(X, \rho)$ ,  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальная.

1.  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  ограничена;
2. если существует  $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$  такая, что  $\lim x_{n_k} = a$ , то  $\exists \lim x_n = a$ ;
3.  $\forall \{\varepsilon_k > 0\}_{k=1}^\infty \quad \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty : \quad \forall j > k \quad \rho(x_{n_j}, x_{n_k}) < \varepsilon_k$ .

#### Доказательство.

1. Возьмём  $\varepsilon = 1$ .

$$\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m \geq N \quad \rho(x_n, x_m) < 1 \implies \rho(x_N, x_m) < 1 \text{ при } m > N$$

Пусть  $R = \max \{ \rho(x_1, x_N), \dots, \rho(x_{N-1}, x_N) \} + 1$ . Тогда  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in B_R(x_N)$ .

2. Возьмём  $\varepsilon > 0$ . Воспользуемся фундаментальностью:

$$\exists N : \quad \forall n, m > N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Зафиксируем  $n_k > N$  такой, что  $\rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$ .

Пусть  $n > N$ . Тогда  $\rho(x_n, a) \stackrel{\Delta}{\leq} \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon \implies \lim \rho(x_n, a) = 0$ .

3. Докажем по индукции:

\*Как всегда, огромное спасибо Якову и всем остальным причастным к [диску](#).

• **База.**  $\varepsilon_1$

$$\exists N_1 : \forall n, m \geq N_1 \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon_1 \implies \rho(x_{N_1}, x_m) < \varepsilon_1 \text{ при } m > N_1$$

• **Переход.** Допустим, уже построены  $n_1 < \dots < n_{k-1} < n_j$  такие, что

$$\forall m > n_j \quad \rho(x_m, x_{n_j}) < \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \dots, k-1$$

$$\begin{aligned} \exists n_k > n_{k-1} : \quad \forall n, m \geq n_k \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon_k \implies \rho(x_{n_k}, x_m) < \varepsilon_k \text{ при } m > n_k \\ \implies \exists \text{ требуемые } \{x_{n_k}\} \end{aligned}$$

□

**Следствие.**  $(X, \rho)$ ,  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальная

$$\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty : \quad \sum_{k=1}^\infty \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < +\infty$$

**Теорема 1.**  $(X, \rho)$ ,  $Y \subset X$

1.  $(X, \rho)$  — полное,  $Y$  замкнуто.

Тогда  $(Y, \rho)$  полно.

2.  $(Y, \rho)$  — полное.

Тогда  $Y$  замкнуто.

**Доказательство.**

1. Пусть  $\{y_n\}_{n=1}^\infty$  фундаментальна в  $Y$ . Тогда она фундаментальна и в  $X$ , а  $X$  полно. Значит,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \in X$ . Так как  $Y$  замкнуто,  $a \in Y \implies (Y, \rho)$  — полное.

2. Пусть  $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $y_n \in Y$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ . Проверим, что  $a \in Y$ .

$$\exists \lim y_n \implies \{y_n\}_{n=1}^\infty \text{ фундаментальна} \xrightarrow[Y \text{ полно}]{} \exists \lim y_n \in Y.$$

□

## 2. Банаховы пространства. Критерий полноты нормированного пространства

**Определение 3.**  $X$  — линейное пространство над полем  $\mathbb{K}$

$p : X \rightarrow \mathbb{R}$  называется *полунормой*, если

1. полуаддитивность:  $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$ ;
2. однородность:  $p(\lambda x) = |\lambda|p(x) \quad \forall \lambda \in K, x \in X$ .

**Определение 4.**  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{K}$ .

$p : X \rightarrow \mathbb{R}$  называется *нормой*, если

1.  $p$  — полунорма;
2.  $p(x) = 0 \iff x = \mathbb{O}$ .

**Определение 5.**  $(X, \|\cdot\|)$  называется *банаховым*, если оно полное.

**Определение 6.**

1.  $X$  — линейное пространство над  $K$ .

$L \subset X$  называется *подпространством* (в алгебраическом смысле), если оно является линейным пространством, т. е.

$$\left. \begin{array}{l} x, y \in L \\ \alpha, \beta \in K \end{array} \right\} \implies \alpha x + \beta y \in L$$

2.  $(X, \|\cdot\|)$

$L \subset X$  называется (*замкнутым*) подпространством, если

- (a)  $L$  — подпространство в алгебраическом смысле;
- (b)  $L$  замкнуто.

**Теорема 2.**  $(X, \|\cdot\|)$  — полное **тогда и только тогда**, когда из абсолютной сходимости ряда следует его сходимость.

### Доказательство.

•  $\implies$

Возьмём  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  такую, что  $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|$  сходится. Применим к этому ряду критерий Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N, p \in \mathbb{N} : \quad \|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_{n+p}\| < \varepsilon$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

Требуется доказать, что  $S_n$  образуют фундаментальную последовательность. Для этого оценим норму разности:

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=1}^p x_{n+k} \right\| \stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{k=1}^p \|x_{n+k}\| < \varepsilon$$

•  $\Leftarrow$

Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  фундаментальна. Нужно доказать, что у неё есть предел.

Воспользуемся следствием из свойств фундаментальных последовательностей:

$$\begin{aligned} \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty : \quad & \sum_{k=1}^\infty \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < +\infty \\ \implies & \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^\infty \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < +\infty \end{aligned}$$

Рассмотрим ряд без нормы:

$$\exists S = x_{n_1} + \sum_{k=1}^\infty (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$$

$$S_m = x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \cdots + (x_{n_m} - x_{n_{m-1}}) = x_{n_m}$$

При этом,

$$\exists \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S \quad \implies \quad \exists \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_m} = S \xrightarrow{\text{св-во фунд. посл. 2}} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = S$$

□

### 3. Полнота $m(A)$ , $\mathcal{C}(K)$ , $\mathcal{C}^{(n)}[a, b]$

**Определение 7.**  $X$  — множество.

$m(X)$  — пространство ограниченных функций:

$$m(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{K} \mid \sup_{x \in X} |f(x)| < +\infty \right\}$$

Норма на таком пространстве называется *равномерной, чебышёвской или sup-нормой*:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

**Теорема 3.**  $m(X)$  — банахово пространство.

### Доказательство.

1. Проверим, что  $\|f\|_\infty$  удовлетворяет аксиомам нормы:

$$\|f\|_\infty = 0 \iff \sup_{x \in X} |f(x)| = 0 \iff f(x) \equiv 0 \iff f = \mathbb{O}$$

$$\lambda \in K, \quad \|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in X} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$$

Пусть  $f, g \in m(X)$ ,  $x$  фиксирован. Тогда  $f(x), g(x)$  — числа.

$$\|f\|_\infty + \|g\|_\infty \geq \Rightarrow |f(x)| + |g(x)| \stackrel{\Delta}{\geq} |f(x) + g(x)| \quad \forall x \in X$$

В силу произвольности  $x$ ,

$$\Rightarrow \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \geq \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| = \|f + g\|_\infty$$

2. Проверим полноту.

Возьмём фундаментальную последовательность  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  (в смысле нормы  $\|\cdot\|_\infty$ ).

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m > N \quad \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

Зафиксируем  $x \in X$ .

$$\Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Из полноты  $K$  следует, что  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

Обозначим  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  (поточечный).

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \text{ при фиксированном } x, \quad n, m > N$$

Перейдём к пределу по  $n$ :

$$|f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X, \quad m > N$$

Воспользуемся произвольностью  $x$ :

$$\|f - f_m\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow (f - f_m) \in m(X)$$

$$f = (f - f_m) + f_m$$

В силу линейности  $m(X)$  это означает, что  $f \in m(X)$ ,  $\|f - f_m\|_\infty < \varepsilon$  при  $m > N$

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} f_m = f \text{ в пространстве } m(X)$$

□

**Определение 8.**  $K$  — топологический компакт, если:

1.  $\forall \{G_\alpha : \text{откр.}\}_{\alpha \in A} : K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \quad \exists \{\alpha_j\}_{j=1}^n : \quad K \subset \bigcup_{j=1}^n G_{\alpha_j};$
2. *Xaycдорфовостъ:  $\forall a \neq b \in K \quad \exists U, V$  — открытые:  $a \in U, b \in V, \quad U \cap V = \emptyset$ .*

**Определение 9.**  $K$  — топологический компакт.

Введём пространство непрерывных функций на компакте:

$$\mathcal{C}(K) = \{ f : K \rightarrow \mathbb{K} \text{ — непрерывны} \}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)| = \max_{x \in K} |f(x)|$$

**Утверждение 1.**  $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$  — банахово.

**Доказательство.**  $m(K)$  — пространство ограниченных функций с такой же нормой. Уже доказано, что оно банахово.

Линейная комбинация линейных функций линейна, поэтому  $C(K)$  — подпространство в алгебраическом смысле. Осталось проверить замкнутость.

Возьмём  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $f_n \in C(K)$ ,  $f \in m(K)$  такие, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  в  $C(K)$ .

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0 \iff f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{K} f \implies f \in C(K) \implies C(K) \text{ замкнуто}$$

□

**Определение 10.**  $n \in \mathbb{N}$  — фиксировано.

Рассмотрим пространство непрерывных производных:

$$\mathcal{C}^{(n)}[a, b] = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K} \mid \exists f^{(n)} \in \mathcal{C}[a, b] \right\}$$

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{(n)}} := \max_{0 \leq k \leq n} \|f^{(k)}\|_\infty, \quad f^{(0)} := f$$

**Утверждение 2.**  $\mathcal{C}[a, b]^{(n)}$  — банахово.

**Доказательство.** Пусть  $\{f_m\}_{m=1}^\infty$  фундаментальна в  $\mathcal{C}^{(n)}[a, b]$ . Возьмём  $\varepsilon > 0$ .

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall m, p > N \quad \|f_m - f_p\|_{\mathcal{C}^{(n)}} < \varepsilon$$

$$\implies \forall 0 \leq k \leq n \quad \|f_m^{(k)} - f_p^{(k)}\|_\infty < \varepsilon$$

Значит,  $\{f_m^{(k)}\}_{m=1}^\infty$  фундаментальна в  $\mathcal{C}[a, b]$ .

$$\implies \exists \varphi_k \text{ — непрер.} : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_m^{(k)} - \varphi_k\| = 0$$

$\mathcal{C}[a, b]$  — банахово  $\implies \varphi_k \in \mathcal{C}[a, b]$ .

$$\lim \|f^{(k)} - \varphi_k\|_\infty = 0, \quad 0 \leq k \leq n \implies \begin{cases} f_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{[a, b]} \varphi_0, \\ f'_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{[a, b]} \varphi_1 \\ \dots \\ f_m^{(n)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{[a, b]} \varphi_n \end{cases} \xrightarrow{\text{в анализе доказано}} \begin{cases} \varphi_1 = \varphi'_0 \\ \varphi_2 = \varphi'_1 = \varphi''_0 \\ \dots \\ \varphi_n = \varphi_0^{(n)} \end{cases}$$

$$\|f_m - \varphi_0\|_{\mathcal{C}^{(n)}} = \max_{0 \leq k \leq n} \|f_m^{(k)} - \varphi_0^{(k)}\|_\infty \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = \varphi_0 \text{ в } \mathcal{C}^{(n)}[a, b].$$

□

## 4. Неравенства Юнга, Гёльдера, Минковского

**Утверждение 3** (неравенство Юнга).  $a, b > 0, \quad p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ( $q$  называется *сопряжённым показателем*).

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \text{равенство только при } a^p = b^q$$

**Доказательство.** Воспользуемся тем, что  $\ln x$  выпукла вверх, т. е.  $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$ . Это означает, что график лежит над хордой, т. е.

$$\forall x_1 \neq x_2 \quad \forall 0 < \alpha < 1, \quad \beta = 1 - \alpha \quad f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) > \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

Применим это неравенство к  $\ln$ :

$$f(x) = \ln x, \quad x_1 = a^p, \quad x_2 = b^q, \quad \alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{q}$$

$$\ln\left(\frac{1}{p} \cdot a^p + \frac{1}{q} \cdot b^q\right) > \frac{1}{p} \cdot \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) = \ln(ab)$$

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} > ab$$

□

**Утверждение 4** (неравенство Гёльдера).  $(T, \mathcal{U}, \mu), \quad f, g$  измеримы,  $p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

$$\int_T |fg| d\mu \leq \left( \int_T |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \int_T |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1)$$

**Доказательство.**

$$A = \left( \int_T |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad B = \left( \int_T |g(x)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

- $A = 0$

Докажем, что в таком случае  $f(x) = 0$  почти всюду:

Рассмотрим  $e = \{x \mid f(x) \neq 0\} = \{x \mid |f(x)| > 0\}$ .

$$e_n := \left\{ x \mid |f(x)| > \frac{1}{n} \right\}$$

$$0 = \int_T |f(x)|^p d\mu \geq \int_{e_n} |f(x)|^p d\mu \geq \left(\frac{1}{n}\right)^p \mu(e_n) \implies \mu(e_n) = 0$$

При этом,  $e = \bigcup e_n \implies \mu(e) = 0$ .

$$A = 0 \implies f(x) = 0 \text{ п. в. по } \mu \implies f(x) \cdot g(x) = 0 \text{ п. в.} \implies (1)$$

- Аналогично,  $B = 0 \implies (1)$
- $A = +\infty \implies (1)$
- $B = +\infty \implies (1)$
- $0 < A, B < +\infty$

Рассмотрим нормировку функций  $f$  и  $g$ :

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{A} \implies \int_T |f_1|^p d\mu = \frac{1}{A^p} \int_T |f(x)|^p d\mu = \frac{A^p}{A^p} = 1$$

Аналогично,

$$g_1(x) = \frac{g(x)}{B} \implies \int_T |g_1|^p d\mu = 1$$

Возьмём  $a = |f_1(x)|$ ,  $b = |g_1(x)|$ , применим неравенство Юнга:

$$|f_1(x)| \cdot |g_1(x)| \leq \frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q} \quad \forall x \in T$$

Проинтегрируем:

$$\int_T |f_1| \cdot |g_1| d\mu \leq \frac{1}{p} \int_T |f_1|^p d\mu + \frac{1}{q} \int_T |g_1|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Подставим изначальные функции и умножим на  $AB$ :

$$\int_T \frac{|f| \cdot |g|}{AB} d\mu \leq 1 \implies \int_T |f| \cdot |g| d\mu \leq AB$$

□

**Утверждение 5** (неравенство Минковского).  $(T, \mathcal{U}, \mu)$ ,  $f, g$  измеримы,  $1 \leq p \leq +\infty$

$$\left( \int_T |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_T |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_T |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2)$$

**Доказательство.**

- $p = 1$

$$|f(x) + g(x)| \stackrel{\Delta}{\leq} |f(x)| + |g(x)|$$

Проинтегрируем:

$$\int_T |f + g| d\mu \leq \int_T |f| d\mu + \int_T |g| d\mu$$

- $p > 1$

Обозначим

$$A = \left( \int_T |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad B = \left( \int_T |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad C = \left( \int_T |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Рассмотрим отдельно тривиальные случаи:

- Если  $A = +\infty$  или  $B = +\infty$  или  $C = 0$ , то (2).
- $A < +\infty$ ,  $B < +\infty$

Докажем сначала, что  $C < +\infty$ . Возьмём  $a, b \in \mathbb{R}$ . Понятно, что  $|a + b| \leq 2 \max\{|a|, |b|\}$ .

$$|a + b|^p \leq 2^p \max\{|a|^p, |b|^p\} \leq 2^p (|a|^p + |b|^p)$$

Подставим  $a = f(x)$ ,  $b = g(x)$  (для фиксированного  $x$ ):

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

Проинтегрируем по  $T$  и  $\mu$ :

$$C^p = \int_T |f + g|^p d\mu \leq 2^p \left( \int_T |f|^p d\mu + \int_T |g|^p d\mu \right) = 2^p (A^p + B^p) < +\infty$$

Теперь докажем само неравенство:

$$C^p = \int_T |f + g|^p d\mu = \int_T |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu \leq \underbrace{\int_T |f| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu}_{I_1} + \underbrace{\int_T |g| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_T |f| \cdot |f + g|^{p-1} d\mu \stackrel{\text{нер-во Гёльдера}}{\leq} \left( \int_T |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_T |f + g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \implies p + q = pq \implies pq - q = p$$

$$I_1 \leq A \cdot C^{\frac{p}{q}}$$

Аналогично,  $I_2 \leq B \cdot C^{\frac{p}{q}}$ .

$$C^p \leq A \cdot C^{\frac{p}{q}} + B \cdot C^{\frac{p}{q}} = (A + B)C^{\frac{p}{q}}$$

$$p - \frac{p}{q} = p \left(1 - \frac{1}{q}\right) = 1$$

Сократим на  $C^{\frac{p}{q}}$ :

$$C \leq A + B$$

□

## 5. Определение и свойства пространств $l^p, F$

**Определение 11.**  $n \in \mathbb{N}$  фиксировано,  $1 \leq p < +\infty$

$$l_n^p = (\mathbb{K}^n, \|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}})$$

Возьмём  $T = \{1, 2, \dots, n\}$ . Функции на  $T$  будут элементами  $\mathbb{K}^n$ .

$$\mu(j) = 1, \quad 1 \leq j \leq n$$

$$l_n^p = L^p(T, \mu) — \text{банахово}$$

**Определение 12.** Зафиксируем  $n \in \mathbb{N}$ . Рассмотрим  $l_n^\infty = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ , где

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{K}\}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

При этом,  $l_n^\infty = m(X)$ , где  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $f(j) = x_j$ . Значит,  $l_n^\infty$  — банахово пространство.

**Определение 13.**  $l^\infty$  — пространство ограниченных последовательностей, т. е.

$$l^\infty = \left\{ x = \{x_j \in \mathbb{K}\}_{j=1}^\infty \mid \sup_{j \geq 1} |x_j| < +\infty \right\}$$

$$l^\infty = m(\mathbb{N}) \implies l^\infty — \text{банахово}$$

**Утверждение 6.**  $\{x^{(m)} \in l_n^p\}_{m=1}^\infty$ ,  $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x - x^{(m)}\|_p = 0 \iff \lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(m)} = x_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

**Доказательство.**

•  $\implies$

–  $p < +\infty$

$$\underbrace{\left( \sum |x_j - x_j^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}}}_{\rightarrow 0} \geq |x_j - x_j^{(m)}| \text{ при фиксированном } j$$
$$\implies \lim_{m \rightarrow \infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$$

–  $p = +\infty$

$$\max_{1 \leq j \leq m} |x_j - x_j^{(m)}| \geq |x_j - x_j^{(m)}| \text{ при фиксированном } j$$

•  $\Leftarrow$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0 \implies \lim \left( \sum_{j=1}^n |x_j - x_j^{(m)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

Для бесконечных так же берём max.

□

#### Определение 14.

$$l^p = \left\{ x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K} \mid \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < +\infty \right\}$$
$$\|x\|_p = \left( \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Докажем, что  $l^p$  – банахово:

$$T = \mathbb{N}, \quad \mu(j) = 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad L^p(\mathbb{N}, \mu) = l^p, \quad f \in L^p(\mathbb{N}, \mu), \quad f(j) = x_j$$

#### Замечание.

1.  $\{x^{(m)} \in l^p\}_{m=1}^{\infty}, \quad 1 \leq p \leq +\infty, \quad x \in l^p$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x^{(m)} - x\|_p \implies \lim_{m \rightarrow \infty} x_j^{(m)} = x_j \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

2. В другую сторону **неверно**.

#### Определение 15.

$F$  – множество *финитных* последовательностей:

$$F = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{N(x)}, 0, \dots) \mid x_j \in \mathbb{K}\}$$

На  $F$  рассматриваем норму  $\|\cdot\|_p$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ .

#### Утверждение 7.

$(F, \|\cdot\|_p)$  не полны.

**Доказательство.** При фиксированном  $p$  можно считать, что  $(F, \|\cdot\|_p) \subset l^p$  (подпространство в алгебраическом смысле).

Проверим, что оно не замкнуто. Возьмём

$$x = \left\{ \frac{1}{2^k} \right\}_{k=1}^{\infty} \in l^p \quad \forall 1 \leq p \leq +\infty$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}} < +\infty$$

Положим

$$x^{(m)} = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^m}, 0, \dots \right) \in F$$

- $1 \leq p < +\infty$

$$\|x - x^{(m)}\|_p = \left( \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{pk}} \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$$

- $p = +\infty$

$$\|x - x^{(m)}\|_{\infty} = \frac{1}{2^{m+1}} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$$

Значит,  $F$  не замкнуто.  $\square$

## 6. Определение и полнота пространств $L^p$ , пространств последовательностей

**Определение 16.**  $1 \leq p < +\infty$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^p(T, \mu) &= \{ f \mid |f|^p \in \mathcal{L}(T, \mu) \} = \left\{ f \text{ — измерима} \mid \int_T |f|^p d\mu < +\infty \right\} \\ \|f\|_p &= \left( \int_T |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

**Утверждение 8.**  $\|\cdot\|_p$  — полуформа на  $\mathcal{L}^p(T, \mu)$ .

**Доказательство.**

- $\|f\|_p = \left( \int_T |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0;$
- $\lambda \in \mathbb{K}, \quad \|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p;$
- $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$  — неравенство Минковского.

$\square$

$$\|f\|_p = 0 \iff \int_T |f(x)|^p d\mu = 0 \iff f(x) = 0 \text{ п. в.}$$

Обозначим  $N = \{ f \text{ — изм.} \mid f(x) = 0 \text{ п. в.} \}$ .

**Определение 17.**

$$L^p = \mathcal{L}^p / N$$

То есть,  $f \sim g$ , если  $f - g \in N$ , то есть  $f(x) = g(x)$  п. в..

В пространстве  $L^p$  будем рассматривать  $\bar{f}$  — классы эквивалентности  $f$ .

$$\|\bar{f}\|_p = \|f\|_{\mathcal{L}^p}$$

**Утверждение 9.**  $\|\cdot\|_{L^p}$  — норма.

**Доказательство.**

$$\|\bar{f}\| = 0 \iff \left( \int_T |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \iff f(x) = 0 \text{ п. в.} \implies f \in N$$

$\square$

**Определение 18.**  $p = \infty$

$\mathcal{L}^{\infty}(T, \mu)$  — пространство существенно ограниченных функций.

$f$  — измерима

$$f \in \mathcal{L}^\infty \iff \exists c > 0 : |f(x)| \leq c \text{ п. в.}$$

Определим существенный супремум:

$$\|f\|_\infty = \inf \{ c > 0 \mid \mu \{ x \mid |f(x)| > c \} = 0 \}$$

### Утверждение 10.

$$f \in \mathcal{L}^\infty(T, \mu) \implies |f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ п. в.}$$

**Доказательство.** Возьмём  $e_m = \{ x \mid |f(x)| > \|f\|_\infty + \frac{1}{m} \} \implies \mu e_m = 0$ .

$$e := \{ x \mid |f(x)| > \|f\|_\infty \} = \bigcup e_m \implies \mu e = 0$$

□

### Утверждение 11. $\mathcal{L}^\infty(T, \mu)$ , $\|\cdot\|_\infty$ — полунорма.

**Доказательство.**

1.  $\lambda \neq 0 \in \mathbb{K}$

$$\|f(x)\| > c \iff |\lambda f(x)| > |\lambda| \cdot c$$

2. Пусть  $f, g \in \mathcal{L}^\infty(T, \mu)$ ,  $x \in T$ .

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \underset{\text{п. в.}}{\leq} \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$$\implies \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

3.  $\|f\|_\infty = 0 \implies |f(x)| \leq 0 \text{ п. в.} \implies f(x) = 0 \text{ п. в.}$

□

### Определение 19. $L^\infty(T, \mu) = \mathcal{L}^\infty(T, \mu)/N$ , где $N = \{ f — изм. \mid f(x) = 0 \text{ п. в.} \}$ .

$$\bar{f} \in \mathcal{L}^\infty/N, \quad \|\bar{f}\|_\infty = \|f\|_\infty$$

$$\|\bar{f}\|_\infty = 0 \iff \|f\|_\infty = 0 \iff f(x) = 0 \text{ п. в.} \iff f \in N = \mathbb{O}$$

**Теорема 4 (Фату).**  $(T, \mathcal{U}, \mu)$ ,  $g_n(x)$  измеримы,  $g_n(x) \geq 0$ ,  $g_n \rightarrow g(x)$  п. в. на  $T$

$$\int_T g_n(x) d\mu \leq C \implies \int_T g(x) d\mu \leq C$$

**Теорема 5.**  $(T, \mathcal{U}, \mu)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$

$L^p(T, \mu)$  — банаховы.

**Доказательство.**

•  $p < +\infty$

Воспользуемся критерием полноты. Возьмём  $\{ f_n \}_{n=1}^\infty$ ,  $f_n \in L^p$  (т. е. берём классы, а из классов берём произвольных представителей) такие, что  $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_p \leq C < +\infty$ .

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

Докажем, что  $\exists S(x) = \sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ , т. е.  $S(x) \in L^p : \lim_{n \rightarrow \infty} \|S - S_n\|_p = 0$ .

Рассмотрим для начала сумму модулей:

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_k(x)|, \quad \sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$$

Проверим, что  $\sigma(x)$  п. в. конечна.

$$\|\sigma_n\|_p \stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{k=1}^n \|f_k\|_p \leq C$$

Применим теорему Фату:

$$\left. \begin{aligned} \int_T |\sigma_n(x)|^p d\mu &\leq C^p \\ |\sigma_n(x)|^p &\rightarrow |\sigma(x)|^p \end{aligned} \right\} \implies \int_T |\sigma(x)|^p d\mu \leq C \implies \sigma(x) < +\infty \text{ п. в.}$$

Значит, для п. в.  $x$   $\exists \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = S(x)$ .

Воспользуемся критерием Коши для  $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| \leq C$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall m > n > N \quad \sum_{k=n+1}^m \|f_k\|_p < \varepsilon$$

$$\|S_m - S_n\|_p \leq \sum_{k=n+1}^m \|f_k\|_p < \varepsilon$$

Снова воспользуемся теоремой Фату:

$$\left. \begin{aligned} \int_T |S_m(x) - S_n(x)|^p d\mu &< \varepsilon^p \\ |S_m(x) - S_n(x)|^p &\xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} |S(x) - S_m(x)|^p \text{ п. в.} \end{aligned} \right\} \implies \int_T |S(x) - S_m(x)|^p d\mu \leq \varepsilon^p$$

$$S - S_n \in L^p, \quad S_n \in L^p \implies S = (S - S_n) + S_n \implies S \in L^p$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|S - S_n\|_p = 0 \implies L^p - \text{полное}$$

- $p = \infty$

Рассмотрим  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  — фундаментальная в  $L^{\infty}(T, \mu)$

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{\infty} \text{ при } x \in T \setminus E_n, \quad \mu E_n = 0$$

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad T_1 = T \setminus E \implies f_n \in m(T_1)$$

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальна в  $m(T_1)$ , а оно баанахово.

$$\implies \exists f \in m(T_1) : \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$$

Положим  $f|_E = 0$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{L^{\infty}(T)} = 0$$

□

## 7. Примеры не полных нормированных пространств

### Пример.

$$\mathcal{C}[a, b], \quad \|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < +\infty$$

**Утверждение 12.**  $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_p)$  — неполное нормированное пространство.

**Доказательство.** Возьмём  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ .

$$\left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \implies f(x) \stackrel{[a,b]}{=} 0 \implies \|\cdot\|_p — \text{норма}$$

Рассмотрим  $L^p[a, b]$ ,  $\lambda$  — классическая мера Лебега.

Докажем, что  $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_p)$  — подпространство  $(L^p, \lambda)$  в алгебраическом смысле.

$$f \in \mathcal{C}[a, b] \rightarrow \{ g \in L^p[a, b] \mid g(x) = f(x) \text{ п. в. по } \lambda \}$$

Проверим, что  $C[a, b]$  не замкнуто.

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\left( \int_{-1}^1 |f_n(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Докажем, что  $\exists f \in C[-1, 1]$  такой, что  $f(x) = g(x)$  п. в. на  $[-1, 1]$ .

**Пусть** такая  $f$  существует.

$$\int_{-1}^1 |f(x) - g(x)|^p d\lambda = 0 \implies \begin{cases} \int_{-1}^0 |f(x)|^p d\lambda = 0 \implies f(x) \stackrel{[-1,0]}{=} 0 \\ \int_0^1 |f(x) - 1|^p d\lambda = 0 \implies f(x) \stackrel{[0,1]}{=} 1 \end{cases} \text{ — } \emptyset$$

□

**Пример.**

$$\mathcal{P} = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad n \geq 0 \right\}, \quad \forall [a, b]$$

$$\|p(x)\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |p(x)|, \quad \mathcal{P} \subset \mathcal{C}[a, b]$$

**Утверждение 13.**  $(\mathcal{P}, \|\cdot\|_\infty)$  не полно.

**Доказательство.** Ясно, что  $\mathcal{P}$  — подпространство в алгебраическом смысле. Докажем, что оно не замкнуто.

$$e^x \notin \mathcal{P}, \quad \text{т. к. } (e^x)^{(n)} = e^x \not\equiv 0$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} |e^x - P_n(x)| = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e^x - P_n\|_\infty = 0 \implies \mathcal{P} \text{ не замкнуто}$$

□

## 8. Свойства метрики. Теорема о пополнении метрического пространства. Примеры

**Свойства.**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.

1.  $x, y, z, u \in X \implies |\rho(x, y) - \rho(z, u)| \leq \rho(x, u) + \rho(y, z);$
2.  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна (как функция двух переменных);

$$3. A \subset X, \rho(x, A) := \inf_{a \in A} \rho(x, a)$$

При фиксированном  $A$  функция  $\rho(x, A)$  непрерывна по  $x$ ;

$$4. A \text{ замкнуто}, \quad x_0 \notin A \implies \rho(x_0, A) > 0.$$

#### Доказательство.

$$1. \rho(x, y) \stackrel{\Delta}{\leq} \rho(y, z) + \rho(x, z) \stackrel{\Delta}{\leq} \rho(y, z) + \rho(z, u) + \rho(x, u).$$

2. Пусть есть две последовательности такие, что  $\lim x_n = x$ ,  $\lim y_n = y$ . Требуется проверить, что  $\lim \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$ .

$$|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \stackrel{1}{\leq} \underbrace{\rho(x, x_n)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\rho(y, y_n)}_{\rightarrow 0}$$

$$3. A \subset X, \quad x, z \in X, \quad y \in A, \quad y \text{ фиксирован}.$$

$$\rho(x, A) \leq \rho(x, y) \stackrel{\Delta}{\leq} \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

В силу произвольности  $y$  можно взять точную нижнюю грань:

$$\rho(x, A) \leq \rho(x, z) + \inf_{y \in A} \rho(z, y) = \rho(x, z) + \rho(z, A) \implies \rho(x, A) - \rho(z, A) \leq \rho(x, z)$$

$$\text{Аналогично, } \rho(z, A) - \rho(x, A) \leq \rho(x, z)$$

$$\implies |\rho(x, A) - \rho(z, A)| \leq \rho(x, z)$$

Зафиксируем  $x$  и устремим к нему  $z$ :

$$\lim_{z \rightarrow x} \rho(z, A) = \rho(x, A)$$

$$4. A = \overline{A} \implies X \setminus A \text{ открыто.}$$

$$x_0 \notin A \implies x_0 \in X \setminus A \implies \exists r > 0 : B_r(x_0) \in X \setminus A \implies \forall y \in A \quad \rho(x_0, y) \geq r \implies \rho(x_0, A) \geq r$$

□

**Определение 20.**  $(X, \rho)$ ,  $(Y, d)$  — метрические пространства,  $T : X \rightarrow Y$ .

1.  $T$  называется *изометрическим вложением*, если оно сохраняет расстояния:

$$d(Tx, Tz) = \rho(x, z) \quad \forall x, z \in X$$

2.  $T$  называется *изометрией*, если  $T(X) = Y$  и  $d(Tx, Tz) = \rho(x, z)$ . Говорят, что  $(X, \rho)$  и  $(Y, d)$  *изометричны*.

#### Свойства.

1.  $T : X \rightarrow Y$  — изометрическое вложение.

Тогда  $T$  инъективно и непрерывно.

2.  $T$  — изометрия.

Тогда существует  $T^{-1} : Y \rightarrow X$  — изометрия.

3. Изометрия — отношение эквивалентности на множестве метрических пространств.

4.  $T$  — изометрическое вложение,  $Z = T(X)$ .

Тогда  $T$  — изометрия  $X$  и  $Z$ .

#### Доказательство.

1. Пусть  $x, z \in X$ ,  $Tx = Tz$ .

$$0 = d(Tx, Tz) = \rho(x, z) \implies x = z$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \implies \lim \rho(x_n, x) = 0 \implies \lim d(Tx_n, Tx) = 0$$

2. Очевидно.

3. Следует из предыдущих.

4. Очевидно.

□

**Определение 21.**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $(Z, d)$  — полное,  $\exists T : X \rightarrow Z$ :  $T$  — изометрическое вложение и  $T(X) = Z$ .

Будем говорить, что  $(Z, d)$  — *пополнение*  $(X, \rho)$ .

**Теорема 6** (о пополнении метрического пространства).  $(X, \rho)$  — метрическое пространство.

Тогда  $\exists (Z, d)$  — пополнение.

### Доказательство.

- $X$  ограничено

Зафиксируем  $t \in X$ . Рассмотрим функцию  $f_t(x) = \rho(t, x)$ . Понятно, что  $f_t \in m(X)$ .

Определим отображение  $\varphi : X \rightarrow m(X)$ :  $\varphi(t) = f_t$ .

Проверим, что  $\varphi$  — изометрическое вложение. Для  $s, t \in X$   $\|\varphi(t) - \varphi(s)\|_\infty = \sup_{x \in X} |\rho(t, x) - \rho(s, x)|$ .

$$\left. \begin{aligned} |\rho(t, x) - \rho(s, x)| &\leq \rho(t, s) \\ |\rho(t, t) - \rho(s, t)| &= \rho(t, s) \end{aligned} \right\} \implies \|\varphi(t) - \varphi(s)\|_\infty = \rho(t, s)$$

- $(X, \rho)$  — произвольное.

Зафиксируем  $a \in X$ . Для  $t \in X$  рассмотрим  $f_t(x) = \rho(t, x) - \rho(a, x)$ .

$$|f_t(x)| \stackrel{\Delta}{\leq} \rho(a, t) \quad \forall x \implies f_t \in m(X)$$

$$\varphi : X \rightarrow m(X) : \varphi(t) := f_t$$

Возьмём  $t, s \in X$ .

$$\|\varphi(t) - \varphi(s)\|_{m(X)} = \sup_{x \in X} |f_t(x) - f_s(x)| = \sup_{x \in X} |\rho(t, x) - \rho(s, x)| = \rho(t, s)$$

Значит,  $\varphi$  — изометрическое вложение.

$$Z = \overline{\varphi(X)}$$

□

### Примеры.

1. Пространства финитных последовательностей:  $(F, \|\cdot\|_p)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Уже знаем, что  $(F, \|\cdot\|_p) \subset l^p$  и оно не замкнуто.

- $p < +\infty$

$$\overline{F} = l^p, \quad \text{для } x = (x_1, x_2, \dots) \in l^p \quad x^{(m)} = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots)$$

$$\|x - x^{(m)}\|_p = \left( \sum |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$$

(т. к. это остаток сходящегося ряда).

Таким образом,  $l^p$  — пополнение  $F$  по  $\|\cdot\|_p$ .

- $p = +\infty$

$$\overline{(F, \|\cdot\|_\infty)}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0$$

$C_0$  — последовательности, предел которых равен 0.

$$\{x_j\}_{j=1}^\infty, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} x_j = 0, \quad x^{(m)} = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots)$$

$$\|x - x^{(m)}\|_\infty = \sup_{j > m} |x_j| \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0 \implies C_0 \subset \overline{F}^{\|\cdot\|_\infty}$$

2.  $\mathcal{P} = \left\{ \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad n \geq 0 \right\}$

$\mathcal{P} \subset \mathcal{C}[a, b]$  по теореме Вейерштрасса, которая утверждает, что

$$\forall f \in \mathcal{C}[a, b] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in \mathcal{P}: \quad \|f - p\|_\infty < \varepsilon$$

3.  $\mathcal{C}[a, b], \quad \|f\|_p = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < +\infty$

$$\overline{\mathcal{C}[a, b]}^{\|\cdot\|_p} = L^p[a, b]$$

## 9. Теорема о вложенных шарах с замечаниями

**Теорема 7.**  $(X, \rho)$  — полное тогда и только тогда, когда

$$\forall \{D_n = D_{r_n}(x)\}_{n=1}^\infty: \quad D_{n+1} \subset D_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 \quad \bigcap_{n=1}^\infty D_n \neq \emptyset$$

**Доказательство.**

- $\implies$

Центры шаров образуют фундаментальную последовательность, её предел принадлежит всем шарам.

- $\impliedby$

Возьмём фундаментальную последовательность  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ .

Обозначим  $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ . В силу фундаментальности  $x_k$

$$\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty: \quad \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$D_k = D_{\varepsilon_k}(x_{n_k})$$

Проверим, что  $D_{k+1} \subset D_k$ . Возьмём  $y \in D_{k+1}$ .

$$\rho(x_{n_{k+1}}, y) \leq \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\begin{aligned} \rho(y, x_{n_k}) &\stackrel{\Delta}{=} \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, y) < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k} \implies y \in D_k \implies \\ &\implies D_{k+1} \subset D_k \implies \exists a \in \bigcap_{k=1}^\infty D_k \implies \lim x_{n_k} = a \end{aligned}$$

□

**Замечание.** В условиях теоремы пересечение состоит ровно из одной точки, и это точка  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Замечание.** Требование  $\lim r_n = 0$  существенно.

**Пример (подготовительный).**  $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $F_n \subset \mathbb{R}$ ,  $F_n = \overline{F}_n$ ,  $F_{n+1} \subset F_n$ ,  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ . Примером таких множеств являются лучи  $F_n = [n, +\infty)$ .

**Пример (существенность требования).** Построим метрическое пространство, в котором шарами будут лучи из предыдущего примера.

$$X = [1, +\infty), \quad \rho(x, y) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

1. Проверим неравенство треугольника:

$$x \neq y \neq z \in X \quad \rho(x, y) + \rho(y, z) = 1 + \frac{1}{x+y} + 1 + \frac{1}{y+z} > 2 > 1 + \frac{1}{x+z}$$

2. Полнота.

Пусть  $\{x_n\}$  фундаментальна. Докажем, что, начиная с какого-то элемента, она стабилизируется. Возьмём  $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\exists N : \quad \forall n, m \geq N \quad \rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2} \implies \rho(x_m, x_N) < \frac{1}{2} \implies x_m = x_N \quad \forall m \geq N$$

3. Шары в  $X$ .

Пусть  $r_n = 1 + \frac{1}{2n}$ ,  $D_n = D_{r_n}(n)$ . Понятно, что  $n \in D_n$ .

- $x > n$

$$\rho(n, x) = 1 + \frac{1}{n+x} < 1 + \frac{1}{2n} = r_n \implies x \in D_n$$

- $x < n \implies x \notin D_n$

$$D_n = [n, +\infty), \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \emptyset$$

**Замечание.** Если  $(X, \|\cdot\|)$  нормировано, то требование стремления радиусов к нулю избыточно:

$$\text{полнота} \iff \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset \text{ при } D_{n+1} \subset D_n$$

**Доказательство.** Следует из линейности. □

## 10. Всюду плотные множества. Сепарабельные пространства. Примеры: $m(A)$ , $C[a, b]$ , пространства последовательностей. Сепарабельность подпространства

**Определение 22.**  $(X, \rho)$ ,  $A, C \subset X$   
А плотно в  $C$ , если  $C \subset \overline{A}$ , т. е.

$$\begin{aligned} \forall x \in C \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A : \quad \rho(x, a) < \varepsilon \\ \iff C \subset \bigcup_{a \in A} B_{\varepsilon}(a) \quad \forall \varepsilon > 0 \\ \iff \forall x \in C \quad \forall \varepsilon > 0 \quad B_{\varepsilon}(x) \cap A \neq \emptyset \end{aligned}$$

**Определение 23.** А всюду плотно в  $X$ , если  $\overline{A} = X$ .

**Замечание.**

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ плотно в } B \\ B \text{ плотно в } C \end{array} \right\} \implies A \text{ плотно в } C$$

**Определение 24.**  $(X, \rho)$  сепарабельно, если в нём существует счётное всюду плотное множество.

**Теорема 8.**  $n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq p \leq +\infty$

$l_n^p$  сепарабельно.

**Доказательство.** Пусть  $l_n^p = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ . Рассмотрим  $\mathbb{Q}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n), \quad x_j \in \mathbb{Q}\}$ .

Знаем, что  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \implies \mathbb{Q}^n$  всюду плотно в  $l_n^p$ .

Для комплексных последовательностей рассмотрим  $\widetilde{\mathbb{Q}} = \{z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{Q}\}$ .  $\square$

**Следствие.** Пространство финитных последовательностей  $(F, \|\cdot\|_{1 \leq p \leq +\infty})$  сепарабельно.

**Доказательство.** Вложим  $l_n^p$  в  $F$ :

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in l_n^p \quad \rightarrow \quad (x_1, \dots, x_n, 0, \dots) \in F$$

$$\implies F = \bigcup_{n=1}^{\infty} l_n^p \implies E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n - \text{всюду плотное в } (F, \|\cdot\|_p)$$

$\square$

**Следствие.**  $l^p, \quad 1 \leq p < +\infty, \quad C_0$  сепарабельны.

**Доказательство.**  $F$  — пространство финитных последовательностей.

$$\overline{(F, \|\cdot\|_p)}^{\|\cdot\|_p} = l^p, \quad 1 \leq p < +\infty$$

$E = \{(x_1, \dots, x_n, 0, \dots) \mid x_j \in \mathbb{Q}, \quad n \in \mathbb{N}\}$  — счётное всюду плотное в  $l^p$ .

$$\overline{(F, \|\cdot\|_\infty)}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0 \implies C_0 \text{ сепарабельно.} \quad \square$$

**Утверждение 14.**  $C \subset l^\infty$  сепарабельно.

**Доказательство.** Упражнение.  $\square$

**Теорема 9.**  $l^\infty$  не сепарабельно.

**Доказательство.** Пусть  $A \subset \mathbb{N}$ . Рассмотрим  $x_j^A = \begin{cases} 1, & j \in A \\ 0, & j \notin A \end{cases}$ . Тогда  $x^A = \{x_j^A\}_{j=1}^{\infty}$ .

Заметим, что множество таких последовательностей  $\{x^A\}_{A \subset \mathbb{N}}$  не счётно:  
Пусть  $A, C \subset \mathbb{N}, \quad A \neq C$ .

$$x_j^A - x_j^C = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

Поскольку  $A \neq C, \|x^A - x^C\|_\infty = 1$ .

$$\implies B_{\frac{1}{2}}(x^A) \cap B_{\frac{1}{2}}(x^C) = \emptyset$$

Пусть  $E$  всюду плотно в  $l^\infty$ . Тогда в каждом таком шарике должен быть его представитель:

$$\forall A \subset \mathbb{N} \quad \exists e_A \in E \cap B_{\frac{1}{2}}(x^A)$$

При этом,  $A \neq C \implies e_A \neq e_C$ .

$$\{e_A\}_{A \subset \mathbb{N}} \subset E, \quad \{e_A\}_{A \subset \mathbb{N}} \text{ не счётно} \implies E \text{ не счётно.} \quad \square$$

**Теорема 10.**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство, сепарабельно,  $Y \subset X$ .

Тогда  $Y$  сепарабельно.

**Доказательство.**

$$\rho(x_n, Y) := \inf_{y \in Y} \rho(x_n, y)$$

$$\exists \{y_{n,k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_{n,k}) = \rho(x_n, Y)$$

Рассмотрим  $F = \{y_{n,k}\}_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}}$  — счётное. Проверим, что  $F$  всюду плотно в  $Y$ .

Пусть  $y \in Y$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $y \in X$ .

$$\begin{aligned} &\exists x_n : \rho(x_n, y) < \varepsilon \\ \implies &\rho(x_n, Y) < \varepsilon \implies \exists y_{nk} : \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon \\ \implies &\rho(y, y_{nk}) \stackrel{\Delta}{\leq} \rho(y, x_n) + \rho(x_n, y_{n,k}) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

□

**Следствие.**  $X$  — бесконечное множество.

Тогда  $m(X)$  не сепарабельно.

**Доказательство.**  $X$  — бесконечное  $\implies \exists \{a_j\}_{j=1}^{\infty}, a_j \in X, a_j \neq a_k$ .

$$L = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) \in m(X), f(x) \stackrel{x \neq a_j}{=} 0 \right\}.$$

$$f \in L \quad \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |f(a_j)|$$

$$L \xrightarrow{\Phi} l^{\infty} : f \mapsto \{f(a_j)\}_{j=1}^{\infty}$$

$\Phi$  — изометрия  $\implies L \subset m(X)$ .  $l^{\infty}$  не сепарабельно  $\implies L$  не сепарабельно. Значит,  $m(X)$  не сепарабельно. □

## 11. Нигде не плотные множества. Теорема Бэра о категориях

**Определение 25.**  $(X, \rho)$  — метрическое пространство,  $A \subset X$ .

$A$  нигде не плотно, если  $A$  не плотно ни в одном шаре:

$$\begin{aligned} \forall B_r(x) : x \in X, r > 0 \quad \exists B_{r_1}(x_1) \subset B_r(x) : B_{r_1}(x_1) \cap A = \emptyset \\ \iff \text{Int}(\overline{A}) = \emptyset \\ \iff \forall D_r(x) \quad \exists D_{r_1}(x_1) \subset D_r(x) : D_{r_1}(x_1) \cap A = \emptyset \end{aligned}$$

**Определение 26.**  $(X, \rho)$ ,  $M \subset X$  — множество первой категории, если

$$M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j, \quad M_j \text{ нигде не плотно}$$

Все остальные множества называются множествами второй категории.

**Теорема 11.**  $(X, \rho)$  — полное.

Тогда  $X$  — множество второй категории.

**Доказательство.** Пусть  $M_j \subset X$  — нигде не плотные,  $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$ . Докажем, что  $\exists x \in X \setminus M$ . Воспользуемся теоремой о вложенных шарах.

Возьмём  $D_0 = D_{r_0}(x_0)$ ,  $r_0 = 1$ .  $M_1$  нигде не плотно  $\implies \exists D_1 = D_{r_1}(x_1) \subset D_0 : D_1 \cap M_1 = \emptyset$ . При этом, можно взять  $r_1 < 1$  (если при большем  $r_1$  не пересекалось, то и не начнёт).

$M_2$  нигде не плотно  $\implies \exists D_2 = D_{r_2}(x_2) \subset D_1 : D_2 \cap M_2 = \emptyset$ ,  $r_2 < \frac{1}{2}$ .

...

$$\exists D_{n+1} = D_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset D_n : \quad D_{n+1} \cap M_{n+1} = \emptyset, \quad r_{n+1} < \frac{1}{n+1}$$

$X$  — полное  $\xrightarrow[\text{т. о вложенных шарах}]{} \exists a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ , т. к.  $\lim r_n = 0$ .

$$a \in X, \quad D_n \cap M_n = \emptyset \implies a \notin M_n \quad \forall n \implies a \notin M$$

□

## 12. Полные системы элементов, примеры. Полнота характеристических функций в $L^p$

**Определение 27.**  $X$  — линейное пространство,  $\{x_\alpha \in X\}_{\alpha \in A}$ .

$$\mathcal{L}\{x_\alpha\} = \left\{ x = \sum_{j=1}^n c_j x_{\alpha_j} \right\}$$

$\mathcal{L}\{x_\alpha\}$  будем называть *линейной оболочкой*  $\{x_\alpha\}$ .

**Определение 28.**  $(X, \|\cdot\|)$ .

Будем говорить, что  $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — *полная система элементов*, если  $\overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}} = X$ .

**Примеры.**

1.  $C[a, b]$ ,  $\{x^n\}_{n=0}^\infty$

$$\mathcal{L}\{x^n\}_{n \geq 0} = \mathcal{P} = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \right\}, \quad \overline{\mathcal{P}} = C[a, b]$$

$\implies \{x^n\}_{n=0}^\infty$  — полное семейство.

2.  $l^p$ ,  $1 \leq p < +\infty$ ,  $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

$\{e_n\}_{n=1}^\infty$  — полное семейство в  $l^p$  и в  $C_0$ .

$$\mathcal{L}\{e_n\}_{n=1}^\infty = F \text{ — финитные последовательности} \implies \overline{(\mathcal{L}\{e_n\})}^{\|\cdot\|_p} = l^p, \quad 1 \leq p < +\infty$$

$$\overline{\mathcal{L}\{e_n\}}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0$$

**Утверждение 15.**  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — счётное полное семейство.

Тогда  $(X, \|\cdot\|)$  сепарабельно.

**Доказательство.** Пусть  $X$  над  $\mathbb{R}$ .

Рассмотрим  $E = \mathcal{L}\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — всюду плотно, но не счётно.

Возьмём  $H = \left\{ x = \sum_{j=1}^n c_j x_j \mid c_j \in \mathbb{Q} \right\}$  — счётно,  $E \subset \overline{H}$ ,  $\overline{E} = X$ . □

**Следствие.**  $C[a, b]$  сепарабельно.

**Теорема 12 (Лебега, о предельном переходе).**  $\{h_n(x) \geq 0\}$  — измеримые,  $h_n(x) \leq \Phi(x)$

$$\int_T \Phi(x) d\mu < +\infty, \quad h_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F(x)$$

(все утверждения п. в.).

$$\implies \int_T F(x) d\mu < +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T h_n(x) d\mu = \int_T F(x) d\mu$$

**Теорема 13.**  $(T, \mathcal{U}, \mu)$

1.  $\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{U}}$  — полное семейство в  $L^\infty$ ;
2.  $\{\chi_e\}_{\substack{e \in \mathcal{U}, \\ \mu e < +\infty}}$  — полное семейство в  $L^p$ ,  $1 \leq p < +\infty$ .

**Доказательство.** Пусть  $f(x)$  — измеримая,  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in T$ . Возьмём  $n \in \mathbb{N}$ .

$$e_k := \left\{ x \in T \mid \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n^2 - 1 \right\}, \quad e_{n^2} := \{x \in T \mid n \leq f(x)\}$$

$$\implies T = \bigcup_{k=0}^{n^2} e_k$$

$$g_n(x) := \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n} \chi_{e_k}(x)$$

$$g_n(x) \leq f(x) < g_n(x) + \frac{1}{n}, \quad x \in \bigcup_{k=0}^{n^2-1} e_k$$

1.  $p = \infty$

Если  $n > \|f\|_\infty$ , то  $e_{n^2} = \{x \mid f(x) > n\} \implies \mu(e_{n^2}) = 0 \implies |f(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{n}$  п. в. на  $T$ .

$$g_n \in \mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{U}} \implies f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{U}}}$$

2.  $1 \leq p < +\infty$

$$|f(x) - g_n(x)|^p \leq (f(x))^p, \quad \int_T (f(x))^p d\mu < +\infty$$

$$\forall x \in T \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f(x) \implies |f(x) - g_n(x)|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ п. в. } x$$

$$\left( \int_T |f - g_n|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0 \implies f \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{\mu e < +\infty}}$$

Для произвольной  $f$  можно написать  $f = f_+ - f_-$ .

□

### 13. Полнота характеристических функций элементов полукольца в $L^p$ . Сепарабельность $L^p$ по мере Лебега

**Определение 29.**  $T$  — множество,  $\mathcal{R}$  — семейство подмножеств  $T$ .

$\mathcal{R}$  будем называть *полукольцом*, если

1.  $\emptyset \in \mathcal{R}$ ;
2.  $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cap B \in \mathcal{R}$ ;
3.  $A, B \in \mathcal{R}, \quad B \subset A \implies \exists \{e_j \in \mathcal{R}\}_{j=1}^n : \quad e_i \cap e_j = \emptyset, \quad A \setminus B = \bigcup_{j=1}^n e_j$ .

**Определение 30.**  $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, +\infty]$  — мера на полукольце, если

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
2.  $\{e_j \in \mathcal{R}\}_{j=1}^\infty, \quad e_j \cap e_i = \emptyset, \quad e = \bigcup_{j=1}^\infty e_j \in \mathcal{R} \implies \mu e = \sum_{j=1}^\infty \mu e_j$ .

**Определение 31.**  $E \subset T$

Определим *внешнюю меру*:

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu e_j \mid E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} e_j, \quad e_j \in \mathcal{R} \right\}$$

$\mathcal{U}$  —  $\sigma$ -алгебра измеримых множеств.

**Теорема 14.**  $(T, \mathcal{U}, \mu)$  — пространство с мерой,  $\mu$  — стандартное распространение с  $\mathcal{R}$ ,  $1 \leq p < +\infty$ . Тогда  $\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{R}}$  — полное семейство в  $L^p(T, \mu)$ .

**Доказательство.** Пусть  $E \in \mathcal{U}$ ,  $\mu E < +\infty$ . Приблизим  $\chi_E$  линейными комбинациями  $\{\chi_{e_j}\}_{e_j \in \mathcal{R}}$ .

$$\mu E = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu e_j \mid E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} e_j, \quad e_j \cap e_i = \emptyset, \quad e_j \in \mathcal{R} \right\}$$

Возьмём  $\varepsilon > 0$ . По определению  $\inf$ ,

$$\exists \{e_j \in \mathcal{R}\}_{j=1}^{\infty} : \quad e_j \cap e_i = \emptyset, \quad \mu E \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu e_j < \mu E + \varepsilon$$

Обозначим  $A = \bigcup e_j$ .

Так как ряд сходится, можно отбросить его начало:

$$\exists n \in \mathbb{N} : \quad \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu e_j < \varepsilon$$

Обозначим  $B = \bigcup_{j=1}^n e_j$ .

$$\chi_B = \sum_{j=1}^n \chi_{e_j} \in \mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{R}}$$

При этом,  $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$ ,  $\mu(A \setminus E) < \varepsilon$ .

$$\|\chi_E - \chi_B\|_p \stackrel{\Delta}{=} \|\chi_A - \chi_E\|_p + \|\chi_A - \chi_B\|_p = \left( \int_{A \setminus E} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{A \setminus B} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < 2\varepsilon^{\frac{1}{p}} \implies \chi_E \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{R}}}$$

Уже доказано, что

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L}\{\chi_E\}_{\substack{E \in \mathcal{U} \\ \mu E < +\infty}}}^{\|\cdot\|_p} &= L^p(T, \mu) \\ \implies \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{R}}}^{\|\cdot\|_p} &= L^p \end{aligned}$$

□

**Следствие.**  $\mu$  — стандартное распространение с  $\mathcal{R}$  на  $\mathcal{U}$ ,  $1 \leq p < +\infty$ .

Если  $\mathcal{R}$  счётно, то  $L^p(T, \mathcal{U}, \mu)$  сепарабельно.

**Следствие.**  $E \subset \mathbb{R}^n$  измеримо по мере Лебега  $\lambda$ ,  $1 \leq p < +\infty$ .

Тогда  $L^p(E, \lambda)$  сепарабельно.

**Доказательство.**  $\mathcal{R} = \{e = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j)\}$  — полуокольцо ячеек. Рассмотрим

$$\mathcal{R}_0 = \left\{ \prod_{j=1}^n [a_j, b_j) \mid a_j, b_j \in \mathbb{Q} \right\}$$

Понятно, что  $\mathcal{R}_0$  счётно.

Возьмём  $e \in \mathcal{R}$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists e_0 \in \mathcal{R}_0 : \quad e \subset e_0, \quad \lambda(e_0 \setminus e) < \varepsilon$$

$$\implies \|\chi_{e_0} - \chi_e\|_p = \left( \int_{e_0 \setminus e} d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\implies \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}}_{e \in \mathcal{R}} \ni \{\chi_e\}_{e \in \mathcal{R}} \implies \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}}_{e \in \mathcal{R}_0}^{\|\cdot\|_p} = L^p(\mathbb{R}^n, \lambda) \xrightarrow[L^p(E) \subset L^p(\mathbb{R}^n)]{} L^p(E) \text{ сепарабельно}$$

□

## 14. Плотность непрерывных функций в $L^p$ для регулярной меры. Следствие

**Определение 32.**  $(T, \rho), (T, \mathcal{U}, \mu)$

Будем говорить, что  $\mu$  — борелевская мера, если все открытые множества измеримы.

**Определение 33.**  $\mu$  — борелевская мера

Будем говорить, что  $\mu$  регулярна, если

$$\forall e \in \mathcal{U} \quad \mu(e) = \inf_{\substack{G \text{ откп.} \\ e \subset G}} \mu G = \sup_{\substack{F \text{ замкн.} \\ F \subset e}} \mu F$$

**Теорема 15.**  $(T, \rho), (T, \mathcal{U}, \mu)$ ,  $\mu$  — регулярная,  $1 \leq p < +\infty$ .

Тогда  $\mathcal{C}(T) \cap L^p(T, \mu)$  плотно в  $L^p(T, \mu)$ .

**Доказательство.** Пусть  $e \in \mathcal{U}$ ,  $\mu e < +\infty$ . Приблизим  $\chi_e$  непрерывными (по  $\|\cdot\|_p$ ).

$$\mu \text{ регулярна} \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ замкн. } F, \text{ откп. } G : \quad F \subset e \subset G, \quad \mu(G \setminus F) < \varepsilon$$

$$\varphi(x) := \frac{\rho(x, T \setminus G)}{\rho(x, T \setminus G) + \rho(x, F)}$$

Пусть  $\rho(x, F) = 0 \implies x \in F, x \notin T \setminus G \implies \rho(x, T \setminus G) \neq 0 \implies \varphi \in \mathcal{C}(T)$ .

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in T \setminus G \\ 1, & x \in F \\ 0 \leq x \leq 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$|\varphi(x) - \chi_e(x)| = \begin{cases} 0, & x \in T \setminus G \\ 0, & x \in F \end{cases}$$

$$|\chi_e(x) - \varphi(x)| \leq 1 \quad \forall x$$

$$\|\chi_e - \varphi\|_p = \left( \int_T |\chi_e - \varphi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_{G \setminus F} |\chi_e - \varphi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_{G \setminus F} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \mu(G \setminus F) \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}}_{\mu e < +\infty}^{\|\cdot\|_p} = L^p(T, \mu) \implies \overline{\mathcal{C}(T) \cap L^p}^{\|\cdot\|_p} = L^p$$

□

**Следствие.**  $K \subset \mathbb{R}^n$  — компакт,  $1 \leq p < +\infty$

$$\overline{\mathcal{C}(K)}^{\|\cdot\|_p} = L^p(K, \lambda)$$

## 15. Компакты в метрических пространствах. Определение и при- меры вполне ограниченных множеств

**Утверждение 16** (секвенциальная компактность).  $(K, \rho)$  — метрический компакт.

$$\iff \forall \{x_n \in K\}_{n=1}^{\infty} \exists \{x_{n_j}\} : \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} \in K$$

**Утверждение 17.**  $(K, \rho)$  — метрический компакт  $\implies K$  ограничено и замкнуто.

**Замечание.** Для  $K \subset \mathbb{K}^n$  верно и обратное. В общем случае — нет.

**Пример.**

$$l^2 = \left\{ x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \mid \left( \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2 < +\infty \right\}$$

$$D_1(\mathbb{O}) = \{x \in l^2 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$$

Покажем, что  $D_1$  не компакт.

$$e_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0) \in D_1(\mathbb{O})$$

$$\|e_i - e_j\|_2 = \sqrt{2}$$

$\forall \{e_{n_k}\}$  не фундаментальна  $\implies \nexists \lim \{e_{n_k}\}$

**Определение 34.**  $(X, \rho)$ ,  $A \subset X$ .

$A$  относительно компактно, если  $\overline{A}$  компактно.

$$\iff \forall \{x_n \in A\}_{n=1}^{\infty} \exists \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} : \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} \in X$$

**Определение 35.**  $(X, \rho)$ ,  $A \subset X$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $F \subset X$ .

Будем говорить, что  $F$  —  $\varepsilon$ -сеть для множества  $A$ , если

$$\forall a \in A \exists b \in F : \rho(a, b) < \varepsilon$$

$$\iff A \subset \bigcup_{b \in F} B_{\varepsilon}(b)$$

**Определение 36.**  $A \subset X$  вполне ограничено, если  $\forall \varepsilon > 0$  существует конечная  $\varepsilon$ -сеть для  $A$ .

**Замечание.** Если  $A$  вполне ограничено, то  $A$  ограничено.

**Примеры.**

1.  $A \subset \mathbb{K}^n$

Докажем, что если  $A$  ограничено, то  $A$  вполне ограничено.

$A$  ограничено  $\implies \exists M > 0 : \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in A \quad |x_j| \leq M$ .

Пусть  $Q = \{x \in \mathbb{K}^n \mid |x_j| \leq M\}$ .

$$Q = \bigcup_{j=1}^N Q_j, \quad \text{diam } Q_j < \varepsilon, \quad F = \{\text{вершины } Q_j\}$$

$\implies F$  —  $\varepsilon$ -сеть.

2.  $l^2$

$$D = \left\{ x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \mid \|x\|_2 = \left( \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1 \right\}$$

$D$  ограничено. Проверим, что оно **не** вполне ограничено.

Рассмотрим  $e_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0)$ .

$$\|e_j - e_i\|_2 = \sqrt{2}$$

Возьмём  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ .

$$B_{\frac{1}{2}}(e_j) \cap B_{\frac{1}{2}}(e_i) = \emptyset$$

Если  $F$  —  $\frac{1}{2}$ -сеть для  $D$ , то  $\forall j \exists f_j \in F \cap B_{\frac{1}{2}}(e_j)$

$f \neq f_i \Rightarrow \{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset F \Rightarrow F$  бесконечно.

3.  $l^2$

$$\Pi = \left\{ x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \mid |x_j| \leq \frac{1}{2^j} \right\} — \text{сийбертова кирпич (в } \mathbb{R}^3 \text{ так устроены кирпичи)}$$

Проверим, что  $\Pi$  вполне ограничено.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \left( \sum_{j=N+1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^j} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

$$\Pi^* = \left\{ x = (x_1, \dots, x_N, 0, \dots) \mid |x_j| \leq \frac{1}{2^j} \right\}$$

Можно считать, что  $\Pi^* \subset \mathbb{R}^N$  (если отбросить нулевые координаты).

$$\xrightarrow[\mathbb{R}^n \subset l^2]{} \exists F \subset \mathbb{R}^n — \text{конечная } \varepsilon\text{-сеть}$$

Проверим, что  $F$  —  $2\varepsilon$ -сеть для  $\Pi$ . Возьмём  $x \in \Pi$ .

$$x = (x_1, \dots, x_N, x_{N+1}, \dots) = \underbrace{(x_1, \dots, x_N, 0, \dots)}_y + \underbrace{(0, \dots, 0, x_{N+1})}_z$$

$$\|z\|_2 = \left( \sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \text{ в силу выбора } N$$

$$\exists f \in F : \|y - f\|_2 < \varepsilon \text{ т. к. } y \in \Pi^*$$

$$\|x - f\|_2 = \|(y - f) + z\|_2 \stackrel{\Delta}{\leq} \|y - f\| + \|z\| < 2\varepsilon$$

## 16. Свойства вполне ограниченных множеств. Лемма о разбиении

**Свойства.**  $(X, \rho)$

1.  $A \subset X$  вполне ограничено  $\Rightarrow \bar{A}$  вполне ограничено.
2.  $A \subset Y \subset X$ ,  $A$  вполне ограничено в  $X$   $\Rightarrow A$  вполне ограничено в  $Y$ .
3.  $A$  вполне ограничено  $\Rightarrow A$  сепарабельно.

**Доказательство.**

1. Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $F$  — конечная  $\varepsilon$ -сеть для  $A$ .

Проверим, что  $F$  —  $2\varepsilon$ -сеть для  $\bar{A}$ . Возьмём  $x \in \bar{A}$ . Пусть  $x \in \bar{A} \Rightarrow \exists y \in A$ ;  $\rho(x, y) < \varepsilon$ .

$$\exists f \in F : \rho(y, f) < \varepsilon \Rightarrow \rho(x, f) \stackrel{\Delta}{\leq} \rho(x, y) + \rho(y, f) < 2\varepsilon$$

2. Пусть  $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \{x_j\}_{j=1}^n$  —  $\varepsilon$ -сеть для  $A$ , т. е.  $A \subset \bigcup_{j=1}^n B_{\varepsilon}(x_j)$ .

Пусть  $y_j \in A \cap B_\varepsilon(x_j)$  (если  $A \cap B_\varepsilon(x_j) = \emptyset$ , то забудем об этом  $j$ ).

$$E = \{y_j\}_{j=1}^n - 2\varepsilon\text{-сеть для } A, \quad E \subset A \subset Y$$

Возьмём  $x \in A$ .

$$\exists x_j : \rho(x, x_j) < \varepsilon, \quad \rho(x_j, y_j) < \varepsilon \implies \rho(x, y_j) \leq \rho(x, x_j) + \rho(x_j, y_j) < 2\varepsilon$$

3. Пусть  $F_n$  — конечная  $\frac{1}{n}$ -сеть. Пусть  $E = \bigcup F_n \implies E$  всюду плотно в  $A \implies A$  сепарабельно.

□

**Обозначение.**  $\operatorname{diam} B = \sup_{x, y \in B} \rho(x, y)$

**Лемма 1.**  $(X, \rho), \quad \varepsilon > 0, \quad A \subset X, \quad \exists$  конченая  $\varepsilon$ -сеть для  $A$ .

$$\implies A = \bigcup_{j=1}^n C_j, \quad C_j \cap C_i = \emptyset, \quad C_j \neq \emptyset, \quad \operatorname{diam} C_j \leq 2\varepsilon$$

**Доказательство.**

$$\exists \{x_j\}_{j=1}^n : \quad A \subset \bigcup_{j=1}^n B_\varepsilon(x_j)$$

$$C_1 := A \cap B_\varepsilon(x_1)$$

$$C_2 := (A \cap B_\varepsilon(x_2)) \setminus C_1$$

...

$$C_j = (A \cap B_\varepsilon(x_j)) \setminus (C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{j-1})$$

Пустые  $C_j$  не рассматриваем.

□

## 17. Теорема Хаусдорфа: критерий компактности в терминах вполне ограниченности. Следствия

**Теорема 16.**  $(X, \rho), \quad A \subset X$

$$A \text{ — компакт} \iff \begin{cases} (A, \rho) \text{ — полное} \\ A \text{ вполне ограничено} \end{cases}$$

**Доказательство.**

•  $\implies$

— Проверим полноту.

Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  фундаментальна в  $A$ . Т. к.  $A$  — компакт,

$$\exists \{x_{n_j}\}_{j=1}^\infty : \quad \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = a \in A$$

По свойству фундаментальных последовательностей,  $\lim x_n = a \implies (A, \rho)$  — полное.

— Проверим вполне ограниченность.

Возьмём  $\varepsilon > 0$ .

$$A \subset \bigcup_{x \in A} B_\varepsilon(x)$$

$A$  — компакт  $\implies \exists \{x_j \in A\}_{j=1}^n : \quad A \subset \bigcup_{j=1}^n B_\varepsilon(x_j) \implies \{x_j\}_{j=1}^n$  —  $\varepsilon$ -сеть.

•  $\Leftarrow$

Возьмём  $\{x_n \in A\}_{n=1}^\infty$ . Докажем, что  $\exists \{x_{n_j}\} : \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} \in A$ .

Возьмём  $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$ . Воспользуемся леммой о разбиении:

$$\exists \text{ конечная } \frac{1}{2}\text{-сеть} \implies \exists \left\{ C_j^{(1)} \right\}_{j=1}^{N_1} : A = \bigcup_{j=1}^{N_1} C_j^{(1)}, \quad \text{diam } C_j^{(1)} \leq 1$$

Существует  $C_{j_1}^{(1)}$ , содержащая бесконечное число элементов  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ . Обозначим  $A_1 = C_{j_1}^{(1)}$ .

Возьмём  $\varepsilon_2 = \frac{1}{3}$ ,  $\exists \text{ конечная } \varepsilon_2\text{-сеть}$ .

$$A_1 = \bigcup_{j=1}^{N_2} C_j^{(2)}, \quad \text{diam } C_j^{(2)} \leq 2\varepsilon_2 = \frac{2}{3}$$

Среди них есть  $C_{j_2}^{(2)}$ , содержащий бесконечное число элементов  $\{x_n\}$ . Обозначим  $A_2 = C_{j_2}^{(2)}$ .

Получим  $\{A_m\}_{m=1}^\infty$ , каждое из которых содержит бесконечное число элементов  $\{x_n\}$ .

$$A_{m+1} \subset A_m, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \text{diam } A_m = 0$$

Пусть  $x_{n_1} \in A_1$ .

$$\begin{aligned} & \exists n_2 > n_1 : x_{n_2} \in A_2, \dots, \exists n_m > n_{m-1} : x_{n_m} \in A_m \\ & \implies \forall j > m \quad x_{n_j} \in A_m \implies \rho(x_{n_j}, x_{n_m}) \leq \text{diam } A_m \implies \{x_{n_m}\} \text{ фундаментальна} \end{aligned}$$

□

**Следствие.**  $(X, \rho)$ ,  $A \subset X$ ,  $A$  относительно компактно.

Тогда  $A$  вполне ограничено.

**Доказательство.**  $A$  относительно компактно  $\implies \overline{A}$  компактно  $\xrightarrow{\text{теорема}} \overline{A}$  вполне ограничено  $\implies A$  вполне ограничено. □

**Следствие.**  $(X, \rho)$  — полное,  $A$  вполне ограничено.

Тогда  $A$  относительно компактно.

**Доказательство.**  $(X, \rho)$  — полное  $\implies \overline{A}$  — полное  $\xrightarrow{\text{теорема, } A \text{ вполне ограничено}} \overline{A}$  — компакт  $\implies A$  относительно компактно. □

**Следствие.**  $(X, \rho)$  — полное,  $A \subset X$ .

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ относительно компактная } \varepsilon\text{-сеть для } A \\ & \implies A \text{ относительно компактно} \end{aligned}$$

**Доказательство.** Возьмём  $\varepsilon > 0$ . Пусть  $H_\varepsilon$  — относительно компактная  $\varepsilon$ -сеть для  $A$ .

$$\begin{aligned} & \implies H_\varepsilon \text{ вполне ограничено} \implies \exists F \text{ — конечная } \varepsilon\text{-сеть для } H_\varepsilon \implies \\ & \implies F \text{ — } \varepsilon\text{-сеть для } A \implies A \text{ вполне ограничено} \end{aligned}$$

□

## 18. Теорема Арцела—Асколи: критерий относительной компактности множества в пространстве $\mathcal{C}(K)$

**Теорема 17.**  $K$  — метрический компакт

$\Phi \subset \mathcal{C}(K)$  относительно компактно **тогда и только тогда**, когда

1.  $\Phi$  ограничено в  $\mathcal{C}(K)$ ;
2.  $\Phi$  равностепенно непрерывно.

**Доказательство.**  $\mathcal{C}(K)$  — полное. Значит,

$$\Phi \text{ относительно компактно} \iff \Phi \text{ вполне ограничено}$$

•  $\implies$

1.  $\Phi$  вполне ограничено  $\implies \Phi$  ограничено.
2. Равностепенная непрерывность

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ конечная } \varepsilon\text{-сеть } \{ \varphi_j \in \mathcal{C}(K) \}_{j=1}^n$$

$$\varphi_j \text{ равном. непр.} \implies \exists \delta_j : \quad \forall x, y \in K : \rho(x, y) < \delta_j \quad |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| < \varepsilon \quad 1 \leq j \leq n$$

Положим  $\delta = \min_{1 \leq j \leq n} \{ \delta_j \}$ . Проверим условие равностепенной непрерывности с  $\delta$ .

Пусть  $f \in \Phi$ ,  $x, y \in K : \rho(x, y) < \delta$ .

$$\{ \varphi_j \} - \varepsilon\text{-сеть} \implies \exists 1 \leq m \leq n : \quad \|f - \varphi_m\|_\infty < \varepsilon \implies \max_{x \in K} |f(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(y)| \stackrel{\Delta}{\leq} |f(x) - \varphi_m(x)| + |\varphi_m(x) - \varphi_m(y)| + |\varphi_m(y) - f(y)| < 3\varepsilon$$

•  $\Leftarrow$

$$\Phi \text{ ограничено} \implies \exists M > 0 : \quad \forall f \in \Phi \quad \forall x \in K \quad |f(x)| \leq M$$

Возьмём  $\varepsilon > 0$ .

Знаем, что  $\mathcal{C}(K) \subset m(K)$ . Проверим, что  $\Phi$  вполне ограничено. Для этого достаточно доказать, что существует относительно компактная  $\varepsilon$ -сеть в  $m(K)$ .

Воспользуемся условием равностепенной непрерывности:

$$\exists \delta : \quad \forall \rho(x, y) < \delta \quad \forall f \in \Phi \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{3}$$

По лемме о разбиении,

$$\exists C_j : \quad K = \bigcup_{j=1}^n C_j, \quad C_j \cap C_i = \emptyset, \quad C_j \neq \emptyset, \quad \text{diam } C_j < \delta \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \Psi := & \left\{ g(x) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x) \mid y_j \in \mathbb{K} \right\} \\ \|g(x)\|_\infty = & \left\| \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x) \right\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |y_j| = \|y\|_{l_n^\infty} \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$F : l_n^\infty \rightarrow \Psi : \quad F(y) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x)$$

$$\|F(y)\|_{m(K)} = \|y\|_{l_n^\infty}, \quad \|F(y) - F(z)\|_{m(K)} = \|y - z\|_{l_n^\infty}$$

$F$  — изометрия. Это означает, что она сохраняет компактность.

Выберем компакт

$$Q = \{ y = (y_1, \dots, y_n) \mid |y_j| \leq M \} \implies F(Q) \text{ — компакт в } m(K)$$

$$F(Q) = \left\{ g(x) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j} \mid |y_j| \leq M \right\}$$

Проверим, что  $F(Q)$  —  $\varepsilon$ -сеть для  $\Phi$ .

Пусть  $f \in \Phi$ ,  $C_j \neq \emptyset$ . Выберем  $x_j \in C_j$ . Рассмотрим  $y_j = f(x_j)$ .

$$g(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j) \chi_{C_j}(x) \in F(Q)$$

Оценим  $\|f - g\|_\infty$ . Возьмём произвольный  $x \in K$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \exists 1 \leq m \leq n : \quad x \in C_m \Rightarrow g(x) = f(x_m) \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x) - g(x)| = |f(x) - f(x_m)| &\stackrel{(3)}{<} \varepsilon \quad \text{т. к. } \rho(x, x_m) < \delta \\ (4) \Rightarrow \rho(x, x_m) < \delta \end{aligned}$$

□

## 19. Достаточные условия равностепенной непрерывности множества в $\mathcal{C}(K)$

**Теорема 18.**  $f \in \Phi \subset \mathcal{C}(K)$

$$1. \exists M > 0, \alpha, \beta > 0 : \forall x, y \in K : \rho(x, y) < \beta \quad |f(x) - f(y)| \leq M(\rho(x, y))^\alpha$$

$$2. K = [a, b], \exists f'(x), \exists L > 0 : |f'(x)| \leq L \quad \forall x \in (a, b)$$

$$3. K \subset G \subset \mathbb{R}^n, \quad K \text{ — компакт}, \quad G \text{ — открытое}, \quad \exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

$$\exists L > 0 : \forall x \in G \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| \leq L$$

$$4. K \subset G \subset \mathbb{C}, \quad K \text{ — компакт}, \quad G \text{ — открытое}, \quad f \text{ аналитична в } G$$

$$\exists L > 0 : |f(z)| \leq L$$

В каждом из этих случаев  $\Phi$  равностепенно непрерывно.

**Доказательство.**

$$1. \text{ Пусть } \varepsilon > 0, \quad x, y \in K, \quad f \in \Phi, \quad \rho(x, y) < \delta < \beta$$

$$|f(x) - f(y)| \leq M(\rho(x, y))^\alpha < M\delta^\alpha < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \delta < \left( \frac{\varepsilon}{M} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\delta := \min \left\{ \beta, \left( \frac{\varepsilon}{M} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}$$

2. Воспользуемся теоремой о промежуточном значении:

$$\exists c \in (a, b) : f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq L|y - x|$$

Получили случай 1 с  $M = L$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\forall \beta$ .

3. Пусть  $y, z \in K$ :  $[y, z] \subset G$  Рассмотрим

$$\Gamma(t) : 0 \leq t \leq 1, \quad \Gamma(t) = t \cdot z + (1 - t) \cdot y, \quad \Gamma(0) = y, \quad \Gamma(1) = z$$

$$f(z) - f(y) = f(\Gamma(1)) - f(\Gamma(0))$$

$f(\Gamma(t))$  — дифференцируемая функция от  $t$ . Применим к ней случай 2.

Теперь рассмотрим  $F = \mathbb{R}^n \setminus G$  — компакт. Известно, что  $\rho(x, F)$  непрерывна.

$$h(x) := \rho(x, F), \quad x \in K$$

$$\forall x \in F \quad h(x) > 0$$

$$\exists \min_{x \in K} h(x) =: r > 0$$

Пусть  $x, y \in K$ :  $\rho(x, y) < r$ .

$$y \in B_r(x) \subset G \implies [x, y] \subset G$$

Возьмём  $\alpha = 1$ ,  $M = L\sqrt{n}$ ,  $\beta = r$  и применим случай 1.

4.  $F := \mathbb{C} \setminus G$

$$\exists r > 0 : \forall z \in K \quad \rho(z, F) \geq r$$

Возьмём  $\delta = \frac{r}{3}$ .

$$\gamma = \{ \zeta \mid |z - \zeta| = 2\delta \} \subset G$$

Возьмём  $z, w \in K$ :  $\rho(z, w) < \delta$ .

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta$$

$$|f(z) - f(w)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma^+} f(\zeta) \left( \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right) d\zeta \right|$$

Вычислим отдельно:

$$\left| \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \right| = \left| \frac{z - w}{(\zeta - z)(\zeta - w)} \right| \underset{\substack{|\zeta - z| = 2\delta \\ |\zeta - w| \geq \delta}}{<} \frac{|z - w|}{2\delta \cdot \delta}$$

Теперь

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{L|z - w|}{2\delta^2} \cdot 2\pi \cdot 2\delta = \frac{L}{\delta} |z - w|$$

Применяем случай 1 с  $\alpha = \beta = 1$ ,  $M = \frac{L}{\delta}$ .

□

## Часть II

### Линейные пространства

#### 20. Линейные операторы. Примеры. Простейшие свойства

**Определение 37.**  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{K}$ , если

1.  $x, y \in X \implies \alpha x + \beta y \in X \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K};$
2.  $\emptyset \in X$ .

**Определение 38.**  $X, Y$  линейны над  $\mathbb{K}$ ,  $A : X \rightarrow Y$ .

Будем  $A$  называть линейным оператором, если

1.  $A(x + z) = Ax + Az;$
2.  $A(\alpha x) = \alpha Ax.$

**Замечание.**  $\mathcal{L}in(X, Y)$  — линейное пространство над  $K$ .

### Примеры.

1.  $K(s, t) \in \mathcal{C}([a, b] \times [a, b])$

Определим *интегральный оператор*:

$$(\mathcal{K}f)(s) = \int_a^b K(s, t)f(t) dt$$

$K(s, t)$  называется *ядром интегрального оператора*.

$$\mathcal{K} \in \mathcal{L}in(\mathcal{C}[a, b])$$

2.  $X = \mathcal{C}^{(1)}[a, b], \quad Y = \mathcal{C}[a, b]$

$$\mathcal{D}(f) := f'$$

$$\mathcal{D} \in \mathcal{L}in(X, Y)$$

3.  $l^1 \hookrightarrow l^2$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < +\infty \implies \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < +\infty$$

$Ax = x$  — *оператор вложения*

**Определение 39.**  $X$  — линейное пространство над полем  $\mathbb{K}$ ,  $B \subset X$ .

$B$  называется *выпуклым*, если

$$\forall x, y \in B \quad \forall t \in [0, 1] \quad tx + (1 - t)y \in B$$

**Теорема 19.**  $X, Y$  — линейные пространства,  $A \in \mathcal{L}in(X, Y)$ .

1.  $L$  — подпространство  $X \implies A(L)$  — подпространство  $Y$ ;
2.  $M$  — подпространство  $Y \implies A^{-1}(M)$  — подпространство  $X$ ;  
(прообраз)
3.  $B \subset X$  — выпуклое  $\implies A(B)$  — выпуклое в  $Y$ ;
4.  $C \subset Y$  — выпуклое  $\implies A^{-1}(C)$  — выпуклое в  $X$ ;  
(прообраз)
5.  $A$  — биекция  $\implies \exists A^{-1} \in \mathcal{L}in(Y, X)$ .

**Без доказательства.** Было в алгебре. □

**Определение 40.**  $A \in \mathcal{L}in(X, Y)$ ,  $X, Y$  линейны над  $\mathbb{K}$ .

Определим *ядро оператора*:

$$\text{Ker } A = \{x \in X \mid Ax = 0\}$$

и *образ оператора*:

$$\text{Im } A = A(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : y = Ax\}$$

**Следствие.**  $A \in \mathcal{L}in(X, Y) \implies \text{Ker } A$  — подпространство  $X$ ,  $\text{Im } A$  — подпространство  $Y$ .

**Определение 41.**  $X, Y, Z$  линейны,  $X \xrightarrow{A} Y \xrightarrow{B} Z$ .

$C = B \cdot A$  называется *произведением операторов*, если  $C(x) = B(A(x))$ .

**Утверждение 18.** Если  $A, B$  линейны, то  $A \cdot B$  линеен.

## 21. Непрерывность и ограниченность линейного оператора. Определение нормы оператора

**Определение 42.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \mathcal{L}in(X, Y)$ .

$A$  ограничен, если  $\forall$  ограниченного  $B \subset X$   $A(B)$  ограничено.

**Теорема 20.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \mathcal{L}in(X, Y)$ .

Следующие условия равносильны:

1.  $A$  непрерывен в  $\mathbb{O}$ ;
2.  $A$  непрерывен на  $X$ ;
3.  $\exists c > 0 : \|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X \quad \forall x \in X$ ;
4.  $A$  ограничен;
5.  $\exists r > 0 : A(\mathbb{B}_r(\mathbb{O}))$  ограничено.

**Доказательство.**

- $1 \implies 2$

В силу линейности  $A(\mathbb{O}) = \mathbb{O}$ .

$A$  непрерывен в  $\mathbb{O} \iff \exists \delta > 0 : \forall \|x\| < \delta \quad \|Ax\| < \varepsilon$ .

Зафиксируем  $x_0 \in X$ .

$$\|x - x_0\| < \delta \underset{\text{непр. в } \mathbb{O}}{\implies} \|A(x - x_0)\| < \varepsilon \iff \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon \iff \text{непр. в } x_0$$

- $2 \implies 1$  — очевидно.

- $1 \implies 3$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall \|x\| \leq \delta \quad \|Ax\| < \varepsilon$$

Возьмём  $z \in X, z \neq \mathbb{O}$ .

$$\left\| \frac{z}{\|z\|} \right\| = 1$$

$$x = \delta \cdot \frac{z}{\|z\|} \implies \|x\| = \delta \implies \|Ax\| < \varepsilon \implies \left\| A\left(\delta \cdot \frac{z}{\|z\|}\right) \right\| < \varepsilon \iff \\ \iff \frac{\delta}{\|z\|} \cdot \|Az\| < \varepsilon \iff \|Az\| < \frac{\varepsilon}{\delta} \|z\|$$

- $3 \implies 4$

Возьмём  $B \subset X$  — ограниченное, т. е.

$$\exists R > 0 : \forall x \in B \quad \|x\| \leq R \implies \|Ax\| \leq \frac{c\|x\|}{3} \leq cR \implies A(B) \text{ ограничено}$$

- $4 \implies 5$

$$\mathbb{B}_r(\mathbb{O}) \text{ ограничено} \underset{\text{очевидно}}{\implies} A(\mathbb{B}_r(0)) \text{ ограничено}$$

- $5 \implies 1$

$$\exists R > 0 : A(\mathbb{B}_r(0)) \subset \mathbb{B}_R(\mathbb{O})$$

т. е.  $\|x\| < r \implies \|Ax\| < R$ .

$$\delta := \varepsilon \cdot \frac{r}{R}$$

Пусть  $\|x\| < \delta$

$$\implies \|x\| < \varepsilon \cdot rR \implies \left\| x \cdot \frac{R}{\varepsilon} \right\| < r \implies \left\| A \left( x \cdot \frac{R}{\varepsilon} \right) \right\| < R \implies \|Ax\| \cdot \frac{R}{\varepsilon} < R \iff \|Ax\| < \varepsilon$$

□

**Определение 43.**  $\mathcal{B}(X, Y)$  — множество всех ограниченных линейных операторов из  $X$  в  $Y$

**Замечание.**  $\mathcal{B}(X, Y)$  — подпространство  $\mathcal{L}in(X, Y)$ .

**Определение 44.**  $A \subset \mathcal{B}(X, Y)$ .

Введём норму на  $\mathcal{B}$ :

$$\|A\| = \inf \{ c > 0 \mid \|Ax\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in X \}$$

## 22. Формула для вычисления нормы линейного оператора. Примеры непрерывных и не непрерывных операторов

**Утверждение 19.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$

1.  $A \in \mathcal{B}(X, Y) \implies \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X;$
2.  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(X, Y)}$  удовлетворяет аксиомам нормы.

**Доказательство.**

1. Зафиксируем  $x \in X$ , возьмём  $c > \|A\|$ .

$$\implies \|Ax\| \leq c\|x\| \implies \|Ax\| \leq \inf \{ c > 0 \mid c > \|A\| \} \|x\| \implies \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

2.  $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ .

(a)  $\lambda \in K, x \in X$ .

$$\begin{aligned} \|(\lambda A)x\| &= \|\lambda \cdot (Ax)\| = |\lambda| \cdot \|Ax\| \leq |\lambda| \cdot \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall x \\ &\implies \|\lambda A\| \leq |\lambda| \cdot \|A\| \end{aligned}$$

Пусть  $\lambda \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\lambda} (\lambda A) \right\| &\leq \left| \frac{1}{\lambda} \right| \cdot \|\lambda A\| \\ &\implies \|A\| \cdot |\lambda| \leq \|\lambda A\| \end{aligned}$$

(b) Неравенство треугольника

Пусть  $x \in X$

$$\begin{aligned} \|(A + B)x\| &= \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| = (\|A\| + \|B\|) \|x\| \quad \forall x \\ &\implies \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

(c)  $\|A\| = 0$

$$\implies \forall x \in X \quad \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| = 0$$

□

**Теорема 21.**  $A \in \mathcal{B}(X, Y)$

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

**Доказательство.** Обозначим  $a = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$ ,  $b = \sup_{\|x\| < 1} \|Ax\|$ ,  $c = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$ ,  $d = \sup_{x \neq 0} \|Ax\|$ .

Очевидно, что  $a \leq b$ ,  $d \geq c$ .

Докажем, что

$$\|A\| \geq a \geq b \geq \|A\|, \quad \|A\| \geq d \geq c \geq \|A\|$$

1. Пусть  $x : \|x\| \leq 1$ .

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \implies a \leq \|A\|$$

2. Пусть  $z \in X \neq 0$ ,  $\varepsilon > 0$ . Рассмотрим

$$x = \frac{z}{\|z\| \cdot (1 + \varepsilon)} \implies \|x\| < 1 \implies \|Ax\| \leq b$$

$$\implies \left\| A\left(\frac{z}{\|z\|(1+\varepsilon)}\right) \right\| \leq b \iff \|Az\| \leq (1+\varepsilon)b \cdot \|z\| \quad \forall z \implies \|A\| \leq (1+\varepsilon)b \quad \forall \varepsilon > 0 \implies \|A\| \leq b$$

3. Пусть  $x \in X \neq 0$

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \implies \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| \implies \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| \implies d \leq \|A\|$$

4. Пусть  $z \in X \neq 0$

$$\left\| \frac{z}{\|z\|} \right\| = 1 \implies \left\| A\left(\frac{z}{\|z\|}\right) \right\| \leq c \implies \|Az\| \leq c\|z\| \implies \|A\| \leq c$$

□

### Примеры.

1.  $X = C[a, b]$ ,  $h(x) \in C[a, b]$

$M_h(f) = h(x) \cdot f(x)$  — мультипликатор.

Проверим, что  $M_h \in \mathcal{B}(C[a, b])$ ,  $\|M_h\|_{\mathcal{B}(C[a, b])} = \|h\|_\infty$ .

$$x \in [a, b] \implies (M_h(f))(x) = h(x)f(x) \implies \|h \cdot f\|_\infty \leq \max_{[a, b]} |h(x)| \cdot \max_{[a, b]} |f(x)| = \|h\|_\infty \cdot \|f\|_\infty$$

$$\forall f \in C[a, b] \quad \|M_h(f)\|_\infty \leq \|h\|_\infty \|f\|_\infty \implies \|M_h\|_{\mathcal{B}(C[a, b])} \leq \|h\|_\infty$$

Пусть  $f(x) = \chi_{[a, b]}(x) \in C[a, b]$ .

$$\|\chi_{[a, b]}\|_\infty = 1$$

$$\|M_h\| = \sup_{\|f\|=1} \|M_h(f)\|_\infty \geq \|M_h(\chi_{[a, b]})\|_\infty = \|h\|_\infty \implies \|M_h\|_{\mathcal{B}(C[a, b])} = \|h\|_\infty$$

2.  $Y = C[0, 1]$ ,  $X = \{f \mid f' \in C[0, 1]\}$

$X$  — подпространство  $Y$ , т. е.  $\|f\|_X = \max_{[0, 1]} |f'(x)|$ .

$$f \in X, \quad \mathcal{D}(f) = f', \quad \mathcal{D} \in \mathcal{L}in(X, Y)$$

Проверим, что  $\mathcal{D}$  не ограничен.

$$x^n \in C[0, 1], \quad \|x^n\|_\infty = 1 \implies \sup_{\|f\|=1} \|\mathcal{D}(f)\|_\infty \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mathcal{D}(x^n)\|$$

$$\mathcal{D}(x^n) = nx^{n-1} \implies \|\mathcal{D}(x^n)\|_\infty = n$$

$$\implies \sup \|\mathcal{D}(f)\| \geq \sup \|\mathcal{D}(x^n)\| = +\infty$$

$$3. Y = \mathcal{C}[0, 1], \quad X = \mathcal{C}^{(1)}[0, 1]$$

$$\|f\|_X = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$$

$$\mathcal{D}(f) = f'$$

Проверим, что  $\mathcal{D} \in \mathcal{B}(X, Y)$ ,  $\|\mathcal{D}\|_{\mathcal{B}(X, Y)} = 1$ .

- Возьмём  $f \in X$ .

$$\mathcal{D}(f) \in Y, \quad \mathcal{D} \in \mathcal{L}in(X, Y)$$

$$\|\mathcal{D}(f)\| = \max_{[0,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty \leq \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$$

$$\implies \mathcal{D} \in \mathcal{B}(X, Y), \quad \|\mathcal{D}\| \leq 1$$

- Пусть  $f(x) = x \in X = \mathcal{C}[0, 1]^{(1)}$

$$\|f\|_\infty = 1, \quad \|f'\| = 1$$

$$\implies \|\mathcal{D}(f)\| = 1, \quad \|\mathcal{D}(f)\| = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\} = 1$$

$$\implies \|\mathcal{D}(f)\| = \sup_{\|g\|=1} \|\mathcal{D}(g)\| \geq \|\mathcal{D}(x)\|_\infty = 1 \implies \|\mathcal{D}\| = 1$$

## 23. Теоремы вложения для $l^p$ и для $L^p$ . Полнота пространства операторов, действующих из нормированного пространства в банахово

**Теорема 22.**  $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$ ,  $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^{p_1}$ ,  $Ax = x$

$$\implies A \in \mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2}), \quad \|A\|_{\mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2})} = 1$$

$A$  называется *оператором вложения*.

**Доказательство.** Пусть  $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^{p_1}$ ,  $\|x\|_{p_1} = 1$ , т. е.

$$\left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} = 1 \implies |x_n| \leq 1 \quad \forall n$$

- $p_2 < +\infty$

$$\frac{p_2}{p_1} > 1 \implies |x_n|^{p_2} \leq |x_n|^{p_1} \implies \|x\|_{p_2} = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \leq \|x\|_{p_1} = 1$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_{p_1}=1} \|Ax\|_{p_2} \leq 1$$

- $p_2 = +\infty$

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \leq 1 \implies \|A\|_{\mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2})} \leq 1$$

Возьмём  $e = (1, 0, 0, \dots)$ .

$$\|e\|_p = 1 \quad \forall p$$

$$\|Ae\|_{p_2} = \|e\|_{p_1} \implies \|A\| \geq 1, \quad \|A\|_{\mathcal{B}(l^{p_1}, l^{p_2})} = 1$$

□

**Теорема 23.**  $(T, \mathcal{U}, \mu)$ ,  $\mu(T) < +\infty$ ,  $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$ ,  $f \in L^{p_2}(T, \mu)$ ,  $Af = f$

$$\implies A \in \mathcal{B}(L^{p_2}, L^{p_1}), \quad \|A\|_{\mathcal{B}(L^{p_2}, L^{p_1})} = \left(\mu(T)\right)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}$$

**Доказательство.**

- $p_2 = +\infty$

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ п. в. по } \mu$$

$$\begin{aligned}\|Af\|_{p_1} &= \left( \int_T |f(x)|^{p_1} d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \|f\|_\infty \left( \int_T d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} = \|f\|_\infty (\mu(T))^{\frac{1}{p_1}} \\ \implies \|A\| &\leq (\mu(T))^{\frac{1}{p_1}}\end{aligned}$$

•  $p_2 < +\infty$

$$\begin{aligned}\|Af\|_{p_1} &= \left( \int_T |f|^{p_1} d\mu \right)^{\frac{1}{p_1}} \stackrel{\text{неп-во Гёльдера}}{\leq} \left( \left( \int_T (|f|^{p_1})^{\frac{p_2}{p_1}} d\mu \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \left( \int_T d\mu \right)^{1-\frac{p_1}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p_1}} = \\ &= \|f\|_{p_2} \cdot (\mu(T))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \implies \|A\| \leq (\mu(T))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}\end{aligned}$$

•  $f = \chi_T(x) \in L^p$

$$\begin{aligned}\|\chi_T\|_{L^p} &= \left( \int_T \chi_T(x) d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = (\mu(T))^{\frac{1}{p}} \\ \|A\|_{\mathcal{B}(L^{p_2}, L^{p_1})} &= \sup_{\substack{g \in L^{p_2} \\ g \neq 0}} \frac{\|Ag\|_{p_2}}{\|g\|_{p_2}} = \sup_{\substack{g \in L^{p_2} \\ g \neq 0}} \frac{\|g\|_{p_1}}{\|g\|_{p_2}} \geq \frac{\|\chi_T\|_{p_1}}{\|\chi_T\|_{p_2}} = (\mu(T))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}\end{aligned}$$

□

**Теорема 24.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$  — банахово.

Тогда  $\mathcal{B}(X, Y)$  — банахово.

**Доказательство.** Возьмём фундаментальную  $\{A_n \in \mathcal{B}(X, Y)\}_{n=1}^\infty$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m > N \quad \|A_n - A_m\| < \varepsilon$$

Зафиксируем  $x \in X$ . Проверим, что  $\{A_n x\}$  фундаментальна.

$$\|A_n x - A_m x\| < \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \|x\| \implies \{A_n x\}_{n=1}^\infty \text{ фундаментальна в } Y \xrightarrow[Y \text{ банахово}]{} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$$

Положим

$$Ax := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$$

$$A_n \in \mathcal{L}in(X, Y) \implies A \in \mathcal{L}in(X, Y)$$

Уже знаем, что  $\|A_n x - A_m x\| < \varepsilon \|x\|$ . Зафиксируем  $m$  и перейдём к пределу по  $n$ :

$$\|Ax - A_m x\| \leq \varepsilon \|x\| \implies A - A_m \in \mathcal{B}(X, Y), \quad \|A - A_m\| \leq \varepsilon \implies A \in \mathcal{B}(X, Y), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|A - A_m\| = 0$$

□

## 24. Линейные функционалы. Примеры. Вычисление норм интегрального функционала и интегрального оператора в $C[a, b]$

**Определение 45.**  $(X, \|\cdot\|)$  — нормированное над полем  $\mathbb{K}$ .

$X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$  называется *сопряжённым пространством*.

$$f \in X^* \quad \|f\|_{X^*} = \inf \{C > 0 \mid |f(x)| \leq C \|x\| \}$$

**Следствие.**  $X^*$  — банахово.

**Доказательство.**  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  — полные. Можно воспользоваться теор. 24.

□

**Следствие.**  $f \in X^*$

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\| < 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

**Примеры.**

1.  $l^p$ , зафиксируем  $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x &= \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^p, \quad f(x) := x_i \\ |f(x)| &= |x_i| \leq \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < +\infty \\ |x_i| &< \sup_{n \geq 1} |x_n| = \|x\|_\infty, \quad p = +\infty \\ &\implies f \in (l^p)^*, \quad \|f\|_{(l^p)^*} \leq 1 \end{aligned}$$

Возьмём  $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$ .

$$\|e_i\|_p = 1, \quad |f(e_i)| = 1 \implies \|f\|_{(l^p)^*} \geq 1$$

2.  $X = \mathcal{C}(K)$ ,  $K$  — компакт,  $x_0 \in K$  — фиксирована.

$$\begin{aligned} G : \mathcal{C}(K) &\rightarrow \mathbb{C}: \quad f \in \mathcal{C}(K) \quad G(f) = f(x_0) — \text{функционал значения в точке} \\ f &\in \mathcal{C}(K) \quad |G(f)| = |f(x_0)| \leq \max_{x \in K} |f(x)| = \|f\|_{\mathcal{C}(K)} \\ &\implies G \in (\mathcal{C}(K))^*, \quad \|G\|_{(\mathcal{C}(K))^*} \leq 1 \end{aligned}$$

Пусть  $f(x) = \chi_K$ .

$$\chi_K(x) \in \mathcal{C}(K), \quad \|\chi_K\|_\infty = 1, \quad |G(\chi_K)| = |\chi_K(x_0)| = 1 \implies \|G\| \geq 1$$

**Теорема 25.**  $\varphi(x) \in [a, b]$ ,  $\varphi(x)$  фиксирована,  $f \in \mathcal{C}[a, b]$ .

$$\begin{aligned} G(f) &:= \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) \, dx \\ &\implies G \in (C[a, b])^*, \quad \|G\| = \int_a^b |\varphi(x)| \, dx \end{aligned}$$

**Доказательство.**

•  $f \in \mathcal{C}[a, b]$

$$\begin{aligned} |G(f)| &= \left| \int_a^b \varphi(x) \cdot f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \cdot |\varphi(x)| \, dx \leq \|f\|_\infty \cdot \int_a^b |\varphi(x)| \, dx \quad \forall x \implies \\ &\implies G \in (\mathcal{C}[a, b])^*, \quad \|G\| \leq \int_a^b |\varphi(x)| \, dx \end{aligned}$$

•  $f = \chi_{[a, b]}$

$$\|\chi_{[a, b]}\| = 1$$

$$-\varphi(x) \stackrel{[a, b]}{>} 0$$

$$|G(\chi_{[a, b]})| = \left| \int_a^b \varphi(x) \, dx \right| \stackrel{\varphi(x) > 0}{=} \int_a^b \varphi(x) \, dx$$

$$-\varphi(x) \stackrel{[a,b]}{\leq} 0$$

$$|G(\chi_{[a,b]})| = \left| \int_a^b \varphi(x) \, dx \right| = \int_a^b |\varphi(x)| \, dx$$

—  $\varphi$  — произвольная

$$g(x) := \operatorname{sign} \varphi(x), \quad \|g\|_\infty = 1$$

$$\int_a^b g\varphi = \int_a^b |\varphi(x)| \, dx$$

$g$  не является непрерывной, поэтому подставить её мы не можем. Приблизим её непрерывными:

$$\varepsilon > 0 \quad \varphi(t) \text{ равномерно непрерывна} \implies \exists \delta > 0 : \quad \forall |t - s| < \delta \quad |\varphi(t) - \varphi(s)| < \varepsilon$$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b - \text{разбиение } [a, b] : \quad t_k - t_{k-1} < \delta$$

$$x, t \in [t_{k-1}, t_k] \implies |\varphi(s) - \varphi(t)| < \varepsilon$$

$$\mathcal{F} := \{ [t_{k-1}, t_k] \}_{k=1}^n$$

Разобьём отрезки на два множества:

$$1. \Delta_1, \dots, \Delta_r - \text{отрезки такие, что } \varphi(t) \stackrel{\Delta_j}{>} 0 \text{ или } \varphi(t) \stackrel{\Delta_j}{<} 0;$$

$$2. \Delta_{r+1}, \dots, \Delta_n - \text{отрезки, на которых } \exists s \in \Delta_j : \quad \varphi(s) = 0;$$

Проверим, что вклад отрезков второго сорта в интеграл очень маленький.

$$\text{Пусть } r + 1 \leq j \leq n, \quad t \in \Delta_j, \quad \exists s \in \Delta_j : \quad \varphi(s) = 0.$$

$$|\varphi(t)| = |\varphi(t) - \varphi(s)| < \varepsilon \implies \int_{\Delta_j} |\varphi(t)| \, dt \leq \varepsilon |\Delta_j| \implies \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |\varphi(t)| \, dt \leq \varepsilon \left( \sum_{j=r+1}^n |\Delta_j| \right) \leq \varepsilon(b - a)$$

$$h(t) = \begin{cases} \operatorname{sign} \varphi(t), & t \in \Delta_j, \quad 1 \leq j \leq r \\ \text{линейная на } \Delta_j, & r + 1 \leq j \leq n \\ \text{если } [a, t_1] = \Delta_j, & r + 1 \leq j \leq n, \text{ то } h(a) := 0 \\ \text{если } [t_{n-1}, b] = \Delta_j, & r + 1 \leq j \leq n, \text{ то } h(b) := 0 \end{cases}$$

$$h(t) \in C[a, b], \quad \|h\|_\infty \leq 1, \quad f(t) \cdot \varphi(t) = |\varphi(t)|, \quad t \in \Delta_j, \quad 1 \leq j \leq r$$

$$|h(t) \cdot \varphi(t)| \leq |\varphi(t)| \quad \forall t \in [a, b]$$

$$\begin{aligned} \|G\| &= \sup_{\|f\| \leq 1} |G(f)| \geq |G(h)| = \left| \int_a^b \varphi(t) \cdot h(t) \, dt \right| = \left| \int_{\bigcup_{j=1}^r \Delta_j} |\varphi(t)| \, dt + \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} \varphi(t) \cdot h(t) \, dt \right| \geq \\ &\geq \int_{\bigcup_{j=1}^n \Delta_j} |\varphi(t)| \, dt - \left| \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |\varphi(t)| \cdot |h(t)| \, dt \right| \geq \int_{\bigcup_{j=1}^n \Delta_j} |\varphi(t)| \, dt - \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |\varphi(t)| \, dt = \\ &= \int_a^b |\varphi(t)| \, dt - 2 \int_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |\varphi(t)| \, dt \geq \int_a^b |\varphi(t)| \, dt - 2\varepsilon(b - a) \quad \forall \varepsilon > 0 \\ &\implies \|G\| \geq \int_a^b |\varphi(t)| \, dt \end{aligned}$$

□

**Теорема 26.**  $K(s, t) \in \mathcal{C}([a, b] \times [a, b]), \quad f \in \mathcal{C}[a, b]$

$$(\mathcal{K}f)(s) = \int_a^b K(s, t)f(t) dt$$

$$\implies \mathcal{K} \in \mathcal{B}(\mathcal{C}[a, b]), \quad \|\mathcal{K}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{C}[a, b])} = \max_{a \leq s \leq b} \underbrace{\int_a^b |K(s, t)| dt}_M$$

**Доказательство.**

- $\|\mathcal{K}\| \leq M$

Возьмём  $f \in \mathcal{C}[a, b], \quad s \in [a, b]$ .

$$|(\mathcal{K}f)(s)| = \left| \int_a^b K(s, t)f(t) dt \right| \leq \|f\|_\infty \int_a^b |K(s, t)| dt \leq M \cdot \|f\|_\infty \implies$$

$$\implies \|\mathcal{K}f\|_\infty = \max_{a \leq s \leq b} |(\mathcal{K}f)(s)| \leq M \cdot \|f\|_\infty \implies \|\mathcal{K}\| \leq M$$

- $\|\mathcal{K}\| \geq M$

$$g(s) := \int_a^b |K(s, t)| dt \implies g \in \mathcal{C}[a, b] \implies \exists s_0 : \max g(s) = g(s_0) = M$$

$$\varphi(t) = K(s_0, t)$$

$$f \in \mathcal{C}[a, b], \quad \|f\|_\infty \leq 1$$

$$\|\mathcal{K}f\| = \max_{a \leq s \leq b} |(\mathcal{K}f)(s)| \geq |(\mathcal{K}f)(s_0)| = \left| \int_a^b K(s_0, t)f(t) dt \right| = |G(f)|, \text{ где } G(f) = \int_a^b f(t) \cdot \varphi(t) dt$$

По предыдущей теореме

$$\|G\|_{\mathcal{C}^*[a, b]} = \int_a^b |K(s_0, t)| dt = M$$

$$\|K\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|\mathcal{K}f\| \geq \sup_{\|f\| \leq 1} |G(f)| = \|G\| = M$$

□

## 25. Изоморфизм пространств, эквивалентные нормы. Свойства линейно-изоморфных пространств

**Определение 46.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$  над  $\mathbb{K}$   
 $(X, \|\cdot\|)$  линейно изоморфно  $(Y, \|\cdot\|)$ , если

$$\exists A \in \mathcal{B}(X, Y), \quad \exists A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$$

$A$  называется линейным изоморфизмом

**Теорема 27.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), \quad A : X \rightarrow Y$

$A$  — линейный изоморфизм тогда и только тогда, когда

1.  $A \in \mathcal{L}in(X, Y);$
2.  $A(X) = Y$  ( $A$  — сюръекция);
3.  $\exists C_2 > C_1 > 0 : C_1 \|x\|_X \leq \|Ax\|_Y \leq C_2 \|x\|_X \quad \forall x \in X.$

**Доказательство.**

•  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{B}(X, Y) &\Rightarrow A \in \mathcal{L}in(X, Y) \\ \exists A^{-1} &\Rightarrow A(X) = Y \\ A \in \mathcal{B}(X, Y) &\Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X \Rightarrow C_2 = \|A\| \\ A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) &\Rightarrow \|A^{-1}y\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|y\| \end{aligned}$$

Возьмём  $x \in X$ ,  $y := Ax$ .

$$\begin{aligned} A^{-1}y &= x \\ \|x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\| &\Rightarrow \frac{1}{\|A^{-1}\|} \cdot \|x\| \leq \|Ax\| \Rightarrow C_1 = \frac{1}{\|A^{-1}\|} \end{aligned}$$

•  $\Leftarrow$

$$\|Ax\| \leq C_2 \|x\| \Rightarrow \|A\| \leq C_2 \Rightarrow A \in \mathcal{B}(X, Y)$$

Проверим, что  $A$  — инъекция, т. е. ядро состоит только из нуля:

$$\begin{aligned} Ax = 0 &\Rightarrow C_1 \|x\| \leq \|Ax\| \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0 \\ &\Rightarrow \exists A^{-1}, \quad A^{-1} \in \mathcal{L}in(Y, X) \end{aligned}$$

Возьмём  $y \in Y$ .

$$\begin{aligned} \exists! x : \quad Ax = y, \quad x = A^{-1}y \\ C_1 \|x\| \leq \|Ax\| \Rightarrow C_1 \|A^{-1}y\| \leq \|y\| \Rightarrow \|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{C_1} \|y\| \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X), \quad \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{C_1} \end{aligned}$$

□

**Следствие (критерий обратимости линейного оператора).**

$$\begin{aligned} (X, \|\cdot\|), \quad (Y, \|\cdot\|), \quad A \in \mathcal{L}in(X, Y), \quad A(X) = Y, \quad \exists C_1 > 0 : \quad C_1 \|x\| \leq \|Ax\| \\ \Rightarrow \exists A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \end{aligned}$$

**Утверждение 20.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$ ,  $A$  — линейный изоморфизм.

Тогда

1.  $(X, \|\cdot\|)$  банахово  $\Leftrightarrow (Y, \|\cdot\|)$  банахово;
2.  $K \subset X$  — компакт  $\Leftrightarrow A(K)$  — компакт в  $Y$ ;
3.  $K \subset X$  относительно компактно  $\Leftrightarrow A(K)$  относительно компактно в  $Y$ .

**Доказательство.**

1.  $(X, \|\cdot\|)$  — банахово. Проверим, что  $Y$  — банахово.

Возьмём  $\{y_n\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальная в  $Y$ . Докажем что она имеет предел.

$$\begin{aligned} x_n &:= A^{-1}y_n \\ \lim_{n,m \rightarrow \infty} \|y_n - y_m\| &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &= \|A^{-1}y_n - A^{-1}y_m\| = \|A^{-1}(y_n - y_m)\| \leq \\ &\leq \|A^{-1}\| \cdot \|y_n - y_m\| \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^\infty \text{ фундаментальна} \end{aligned}$$

$X$  — банахово  $\Rightarrow \exists \lim x_n = x_0 \Rightarrow \lim y_n = Ax_0 \Rightarrow Y$  — банахово.

2.  $K$  — компакт,  $A$  непрерывно  $\Rightarrow A(K)$  — компакт.

3.  $K$  относительно компактно,  $A$  непрерывно  $\implies A(K)$  относительно компактно.

□

**Определение 47.**  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{K}$ ,  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  — различные нормы на  $X$ .  
 $\|\cdot\|_1$  эквивалентна  $\|\cdot\|_2$ , если

$$\forall \{x_n \in X\}_{n=1}^{\infty} \quad \forall x_0 \in X \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_1 = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\|_2 = 0,$$

то есть, нормы порождают одну и ту же топологию.

**Следствие (критерий эквивалентности норм).**  $X$  — линейное,  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  — нормы на  $X$ .

$$\|\cdot\|_1 \text{ эквивалентна } \|\cdot\|_2 \iff \exists 0 < C_1 < C_2 < +\infty : \quad C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1$$

**Доказательство.** Обозначим  $X = (X, \|\cdot\|_1)$ ,  $Y = (X, \|\cdot\|_2)$ . Определим  $I : X \rightarrow Y : \quad Ix = x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ix_n - Ix_0\|_2 = 0 \implies I \in \mathcal{B}(X, Y)$$

$$\begin{aligned} I \text{ — биекция} &\iff I \in \mathcal{B}(Y, X) \implies I \text{ — линейный изоморфизм} \iff \\ &\iff \exists 0 < C_1 < C_2 : \quad \|Ix\|_2 \leq C_2\|x\|_1 \iff C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1 \end{aligned}$$

□

## 26. Изоморфизм конечномерных пространств, эквивалентность норм, полнота, характеристика относительно компактных и компактных множеств, непрерывность линейных операторов

**Определение 48.**  $X$  — линейное пространство.

Говорят, что  $\dim X = n \in \mathbb{N}$ , если  $\exists \{x_1, \dots, x_n\}$  — ЛНЗ, при этом  $\forall \{x_j\}_{j=1}^{n+1}$  — ЛЗ.  
Если  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \{x_j\}_{j=1}^n$  — ЛНЗ, то  $\dim X = \infty$ .

**Теорема 28.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$  — линейные над  $\mathbb{K}$ ,  $\dim X = \dim Y = n \in \mathbb{N}$ .

Тогда  $X$  линейно изоморфно  $Y$ .

**Доказательство.** Рассмотрим  $Z = l_n^2 = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ . Докажем, что  $l_n^2$  и  $X$  линейно изоморфны. Этого достаточно в силу транзитивности.

Пусть  $\{f_j\}_{j=1}^n$  — базис в  $X$ ,  $e_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0)$  — базис в  $l_n^2$ .

Определим  $A : l_n^2 \rightarrow X : \quad Ae_j = f_j$ .

$$A\left(\sum_{j=1}^n c_j e_j\right) := \sum_{j=1}^n c_j f_j \implies A \in \mathcal{L}in(l_n^2, X)$$

Понятно, что  $A$  — биекция.

- Проверим непрерывность

$$\begin{aligned} z \in l_n^2, \quad z = \sum_{j=1}^n c_j e_j \quad \|A(z)\| &= \left\| \sum_{j=1}^n c_j f_j \right\|_X \leq \sum_{j=1}^n |c_j| \cdot \|f_j\| \stackrel{\text{КБ}}{\leq} \left( \sum_{j=1}^n |c_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=1}^n \|f_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = M\|z\|_{l_n^2} \\ &\implies A \in \mathcal{B}(l_n^2, X), \quad \|A\| \leq M \end{aligned}$$

- Найдём  $c > 0$  :  $\|Az\| \geq c\|z\| \quad \forall z \in l_n^2$

$$g(z) := \|Az\|, \quad z \in l_n^2$$

$g(z)$  непрерывна на  $l_n^2$ .

$$S := \{ z \in l_n^2 \mid \|z\| = 1 \}$$

$S$  — компакт в  $l_n^2$ .

$$\exists \min_{z \in S} g(z) =: r > 0 \implies \forall z \in S \quad \|Az\| \geq r$$

Возьмём  $u \in l_n^2 \neq 0$ .

$$\frac{u}{\|u\|} \in S \implies \left\| A \left( \frac{u}{\|u\|} \right) \right\| \geq r \implies \|Au\| \geq r \|u\| \xrightarrow{\text{критерий лин. изоморфности}} l_n^2 \text{ линейно изоморфно } X$$

□

**Следствие.**  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $\dim X < +\infty$

1.  $X$  — банахово;
2.  $K \subset X$  — компакт  $\iff K$  ограничено и замкнуто;
3.  $K \subset X$  относительно компактно  $\iff K$  ограничено.

**Доказательство.**

1.  $l_n^2$  — банахово  $\implies X$  — банахово.
2.  $K \subset X$ ,  $A : X \rightarrow l_n^2$  — линейный изоморфизм  $\implies A, A^{-1}$  ограничены.  
 $K$  — компакт  $\implies (A(K) — компакт \iff K \text{ ограничено и замкнуто})$ .  
 $\implies K = A^{-1}(A(K))$ ,  $K$  ограничено и замкнуто

□

**Теорема 29.**  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $\dim X < +\infty$ ,  $(Y, \|\cdot\|)$

$$\mathcal{L}in(X, Y) = \mathcal{B}(X, Y)$$

**Доказательство.**

- Пусть  $T \in \mathcal{L}in(l_n^2, X)$ ,  $z \in l_n^2$ .

$$z = \sum_{j=1}^n c_j e_j, \quad e_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0 \dots, 0)$$

$$\begin{aligned} \|Tz\| &= \left\| \sum_{j=1}^n c_j Te_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |c_j| \|Te_j\| \stackrel{\text{К-B}}{\leq} \left( \sum_{j=1}^n |c_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{j=1}^n \|Te_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \implies \\ &\implies \|Tz\| \leq M \|z\| \implies T \in \mathcal{B}(l_n^2, X) \end{aligned}$$

- $U \in \mathcal{L}in(X, Y)$

Пусть  $l_n^2 \xrightarrow{A} X \xrightarrow{U} Y$ ,  $A$  — линейный изоморфизм. Положим  $T = UA$ .

$$\implies T \in \mathcal{L}in(l_n^2, Y) = \mathcal{B}(l_n^2, Y) \implies T \in \mathcal{B}(l_n^2, Y)$$

$$U = TA^{-1} \implies U \in \mathcal{B}(X, Y)$$

□

**Следствие.**  $\dim X = n \in \mathbb{N}$ ,  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  — нормы на  $X$ .

Тогда  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_2$  эквивалентны.

## 27. Конечномерные подпространства: замкнутость, существование элемента наилучшего приближения. Существование многочлена наилучшего приближения

**Определение 49.**  $(X, \rho)$ ,  $Y \subset X$ ,  $a \in X$

$$\rho(a, Y) = \inf_{y \in Y} \rho(a, y)$$

Если  $\exists y_0 \in Y : \rho(a, Y) = \rho(a, y_0)$ , то  $y_0$  называется элементом наилучшего приближения.

**Теорема 30.**  $(X, \|\cdot\|)$

1.  $L \subset X$  — конечномерное подпространство в алгебраическом смысле  $\implies L$  замкнуто;
2.  $a \in X \implies$  в  $L$  существует элемент наилучшего приближения.

**Доказательство.**

1.  $\dim L < +\infty \implies L$  — банахово  $\implies L$  замкнуто.

2.  $a \in X$ ,  $f = \rho(a, L) = \inf \|a - y\|$

$$\exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty} : d \leq \|a - y_n\| \leq d + \frac{1}{n}$$

Проверим, что  $\{y_n\}$  ограничена:

$$\|y_n\| \stackrel{\Delta}{\leq} \|a\| + \|y_n - a\| \leq \|a\| + d + 1$$

$$\begin{aligned} \dim L < +\infty \implies \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ относительно компактна} \implies \exists \{y_{n_j}\} : \exists \lim_{j \rightarrow \infty} y_{n_j} = y_0 \in L \\ d \leq \|a - y_{n_j}\| \leq d + \frac{1}{n_j} \implies \|a - y_0\| = d \end{aligned}$$

□

**Следствие.**  $\mathcal{C}[a, b]$ ,  $\|f\|_{\infty} = \max |f(x)|$ ,  $\mathcal{P}_n = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j x^j, a_j \in \mathbb{R} \right\}$

$$\exists p \in \mathcal{P}_n : \inf_{q \in \mathcal{P}_n} \|f - q\|_{\infty} = \|f - p\|$$

$p$  называется многочленом наилучшего приближения

## 28. Лемма Рисса о почти перпендикуляре, следствия их неё. Теорема Рисса: критерий конечномерности пространства

**Лемма 2.**  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $L \subsetneq X$  — замкнутое подпространство,  $0 < \varepsilon < 1$

$$\exists x_0 : \|x_0\| = 1, \rho(x_0, L) > 1 - \varepsilon$$

**Доказательство.** Возьмём  $z \in X \setminus L$ .

$$\rho(z, L) = d > 0 \quad (\text{т. к. } L = \overline{L})$$

$$\rho(z, L) = \inf_{y \in L} \|z - y\|$$

$$\exists y \in L : d \leq \|z - y\| < \frac{d}{1 - \varepsilon}$$

Выберем  $x_0 = \frac{z-y}{\|z-y\|}$ . Возьмём  $u \in L$ .

$$\|x_0 - u\| = \left\| \frac{z-y}{\|z-y\|} - u \right\| = \frac{\|z-y - u \cdot \|z-y\|\|}{\|z-y\|} \geq \frac{d}{\frac{d}{1-\varepsilon}} = 1 - \varepsilon$$

□

**Замечание.** Если  $\exists y_0 : \rho(z, y_0) = d$ , то  $x_0 = \frac{z-y_0}{\|z-y_0\|} \implies \|x_0 - u\| \geq 1$

**Следствие.**  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $L$  — подпространство,  $\dim L < +\infty$

$$\exists x_0 : \begin{cases} \|x_0\| = 1 \\ \rho(x_0, L) = 1 \end{cases}$$

**Следствие.**  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $L_n \subsetneq L_{n+1}$ ,  $L_n$  — замкнутые подпространства,  $L_1 \neq \emptyset$

$$\exists \{y_n \in L_n\}_{n=1}^{\infty} : \begin{cases} \|y_n\| = 1, \\ \rho(y_{n+1}, L_n) > \frac{1}{2} \end{cases}$$

**Доказательство. Индукция.** Пусть  $y_1 \in L_1$ ,  $\|y_1\| = 1$ ,  $L_1 \subseteq L_2$ . По лемме

$$\exists y_2 \in L_2 : \begin{cases} \|y_2\| = 1, \\ \rho(y_2, L_1) > \frac{1}{2} \end{cases}$$

□

**Теорема 31.**  $\bar{B}$  — замкнутый единичный шар в пространстве  $X$ .

$$\bar{B} \text{ — компакт} \iff \dim X < +\infty$$

**Доказательство.**

•  $\Leftarrow$

$\dim X < +\infty \implies \bar{B}$  ограничен и замкнут  $\iff$  компакт

•  $\Rightarrow$

Пусть  $\dim X = +\infty$ . Существует ЛНЗ набор  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Положим  $L_n = \mathcal{L}\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ .

$$L_n \subsetneq L_{n+1} \xrightarrow{\text{второе следствие}} \exists \{y_n\} : \begin{cases} \|y_n\| = 1, \\ \|y_{n+1} - y_n\| > \frac{1}{2} \quad \forall m \neq (n+1) \end{cases}$$

Значит, не существует фундаментальной подпоследовательности  $\{y_{n_j}\}$ . Значит,  $\nexists \lim_{j \rightarrow \infty} y_{n_j}$ .

□

## 29. Продолжение линейного оператора со всюду плотного множества

**Теорема 32.**  $(X, \|\cdot\|)$  — нормированное,  $(Y, \|\cdot\|)$  — банахово,  $L \subset X$  — подпространство в алгебраическом смысле,  $L$  всюду плотно,  $A \in \mathcal{B}(L, Y)$

$$\exists! V \in \mathcal{B}(X, Y) : \begin{cases} V|_L = A, \\ \|V\|_{\mathcal{B}(X, Y)} = \|A\|_{\mathcal{B}(L, Y)} \end{cases}$$

**Доказательство.**

- Существование

Возьмём  $x \in X$ .

$$\begin{aligned} & \exists \{x_n \in L\}_{n=1}^{\infty} : \lim x_n = x \\ & \|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \leq \|A\| \cdot \|x_n - x_m\| \xrightarrow[n,m \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

Значит,  $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальна в  $Y \implies \exists \lim Ax_n \in Y$ . Положим  $Vx = \lim Ax_n$ .

- Корректность определения (не получится тот же предел для другой последовательности)

Пусть  $\lim z_n = x, z_n \in L \implies \exists \lim Az_n$

$$\left. \begin{aligned} & \exists \lim Ax_n \\ & \exists \lim Az_n \end{aligned} \right\} \implies \lim(A(x_n - z_n)) = 0 \implies \lim Ax_n = \lim Az_n$$

- Норма

Пусть  $x \in L, x_n \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} x \implies Ax_n = Ax \implies Vx = \lim Ax_n = Ax$ .

$$\begin{aligned} & \lim x_n = x, \|Ax_n\| \leq \|A\| \cdot \|x_n\|, x_n \in L \\ & \implies \|Vx\| = \lim \|Ax_n\| \leq \|A\| \cdot \lim \|x_n\| = \|A\| \cdot \|x\| \implies \|V\| \leq \|A\| \end{aligned}$$

В другую сторону верно по определению:

$$\|V\| = \sup_{\{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}} \geq \sup_{\{x \in L \mid \|x\| \leq 1\}} \|Vx\| = \|A\|$$

В итоге  $\|V\| = \|A\|$ .

- Единственность

Пусть  $V, W \in \mathcal{B}(X, Y), V|_L = A, W|_L = A, x \in X$ .

$$\exists \{x_n \in L\} : \lim x_n = x \implies Vx = \lim Vx_n = \lim Ax_n = \lim Wx_n = Wx$$

□

## 30. Фактор-пространство нормированного и банахова пространства

**Определение 50.**  $X$  – линейное,  $Y \subset X$  – подпространство в алгебраическом смысле.  
Фактор-пространство  $X$  по  $Y$  – это

$$X/Y = \{\bar{x}\}_{x \in X}, \quad \bar{x} = \{z \in X \mid (z - x) \in Y\}$$

**Замечание.**  $X/Y$  линейно.

**Доказательство.**  $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda \bar{x} = \overline{\lambda x}, \quad \bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}, \quad \overline{\mathbb{O}} = Y$$

□

**Определение 51.**  $(X, \|\cdot\|), Y \subset X$  – замкнутое подпространство,  $\bar{x} \in X/Y$ .  
Норма  $\bar{x}$  – это

$$\|\bar{x}\| = \inf_{z \in X} \|z\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \rho(x, Y)$$

**Определение 52.**  $\varphi : X \rightarrow X/Y, \varphi(x) = \bar{x}$   
 $\varphi$  называется каноническим гомоморфизмом.

**Замечание.**  $\varphi \in \mathcal{L}in(X, X/Y)$

**Теорема 33.**  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $Y \subset X$  – замкнутое подпространство

1.  $\|\bar{x}\|$  удовлетворяет аксиомам нормы;
2.  $\varphi \in \mathcal{B}(X, X/Y)$ , причём  $\|\varphi\| = 1$ , если  $Y \subsetneq X$ ;
3. если  $X$  – банахово, то  $X/Y$  – банахово.

**Доказательство.**

1. •  $\|\bar{x}\| = 0 \implies \rho(x, Y) = 0$   
 $Y$  замкнуто  $\implies$  расстояние может быть равно нулю только при  $x \in Y \implies \bar{x} = \overline{\mathbb{O}}$

•  $\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \bar{x} = \overline{\alpha x}$

$$\|\overline{\alpha x}\| = \inf_{x \in X} \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \inf_{x \in \bar{x}} \|x\| = |\alpha| \cdot \|\bar{x}\|$$

•  $\bar{x}, \bar{z} \in X/Y, u \in \bar{x}, v \in \bar{z}$

$$\|\bar{x} + \bar{z}\| = \|\overline{x+z}\| \leq \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

В силу произвольности  $u$  и  $v$ , можно взять  $\inf$  в неравенствах:

$$\|\bar{x} + \bar{z}\| \leq \inf_{u \in \bar{x}} \|u\| + \inf_{v \in \bar{z}} \|v\| = \|\bar{x}\| + \|\bar{z}\|$$

2.  $\varphi(x) = \bar{x}$

$$\|\bar{x}\| = \inf_{u \in \bar{x}} \|u\| \underset{x \in \bar{x}}{\leq} \|x\| \implies \|\varphi(x)\| \leq \|x\| \implies \|\varphi\| \leq 1$$

Пусть  $Y \subsetneq X$ . Возьмём  $\varepsilon > 0$ . По лемме Рисса имеем

$$\begin{aligned} \exists x_0 : \rho(x_0, Y) &> 1 - \varepsilon \\ \implies \|\varphi\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} |\varphi(x)| \geq |\varphi(x_0)| = \rho(x_0, Y) > 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

Значит,  $\|\varphi\| \leq 1$  и  $\|\varphi\| > 1 - \varepsilon \implies \|\varphi\| = 1$ .

3.  $X$  – банахово

Воспользуемся критерием полноты:

$$\{\bar{x}_n\}_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} \|\bar{x}_n\| < +\infty \stackrel{?}{\implies} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n < +\infty$$

$$\exists \{z_n \in \bar{x}_n\} : \|z_n\| \leq 2\|\bar{x}_n\| \implies \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\| < +\infty$$

По критерию полноты для  $X$  имеем, что  $\exists z = \sum z_n, z \in X$ .

$$S_n = \sum_{j=1}^n z_j, \quad \lim S_n = z$$

$\varphi$  непрерывно  $\implies \lim \varphi(S_n) = \varphi(z)$

$$\varphi(z) = \bar{z}, \quad \varphi(S_n) = \sum_{j=1}^n \bar{z}_j = \sum \bar{x}_j$$

□

### 31. Гильбертово пространство. Примеры. Замкнутость ортогонального дополнения. Непрерывность скалярного произведения, тождество параллелограмма

**Определение 53.**  $H$  — линейное пространство над  $\mathbb{C}$ .

Отображение  $(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  называется *скалярным произведением*, если

1.  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad x, y \in H;$
2.  $(x + z, y) = (x, y) + (z, y), \quad x, y, z \in H;$
3.  $(y, x) = \overline{(x, y)}, \quad x, y \in H;$
4.  $(x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \iff x = \mathbb{O}.$

**Определение 54.** Норма, порождённая скалярным произведением:  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ .

**Определение 55.**  $(H, \|\cdot\|)$ ,  $\|\cdot\|$  порождена  $(\cdot, \cdot)$

$H$  называется *предгильбертовым* пространством.

**Определение 56.**  $(H, \|\cdot\|)$  — предгильбертово.

$H$  называется *гильбертовым*, если  $H$  полно.

#### Свойства.

1. Неравенство Коши—Буняковского

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

2.  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  — норма

3. Тождество параллелограмма

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

4. Непрерывность скалярного произведения

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y)$$

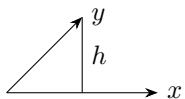


Рис. 1: К доказательству неравенства Коши—Буняковского

#### Доказательство.

1. См. рис. 1

$$\|h\|^2 \geq 0 \iff \text{Коши—Буняковского.}$$

2. (a)  $\|x\| = 0 \iff x = 0$

$$(b) \|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda}(x, x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$$

(c)

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x, y) + (y, x) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x, y) \leq \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

3.

$$(x+y, x+y) + (x-y, x-y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + (x, x) - (y, x) - (x, y) + (y, y) = (x, x) + (y, y)$$

4.

$$\begin{aligned} |(x, y) - (x_n, y_n)| &\stackrel{\Delta}{\leq} |(x, y) - (x_n, y)| + |(x_n, y) - (x_n, y_n)| = |(x - x_n, y) - (x_n, y - y_n)| \underset{\text{К-Б}}{\leq} \\ &\leq \|x - x_n\| \cdot \|y\| + \|x_n\| \cdot \|y - y_n\| \underset{\lim x_n = x}{\implies} \underset{\exists M > 0: \|x_n\| \leq M}{\leq} \underbrace{\|x - x_n\| \cdot \|y\|}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \rightarrow 0}} + M \cdot \underbrace{\|y - y_n\|}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \rightarrow 0}} \end{aligned}$$

□

### Примеры.

1.  $l_n^2 = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$

$$(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$$

$$\|x\|^2 = (x, x) = \sum |x_j|^2$$

$l_n^2$  — полное  $\implies l_n^2$  — гильбертово.

2.  $l^2 = \left\{ x = \{x_j\}_{j=1}^\infty \mid \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^\infty |x_j|^2} \right\}$

$$(x, y) = \sum_{j=1}^\infty x_j \bar{y}_j$$

$l^2$  — полное  $\implies l^2$  — гильбертово (с нормой, порождённой скалярным произведением)

3.  $F$  — финитные последовательности

$$(x, y) = \sum_{j=1}^\infty x_j \bar{y}_j$$

(на самом деле, число слагаемых конечно)

$$\|x\|^2 = \sum |x_j|^2$$

$F$  не полно  $\implies F$  — предгильбертово.  $l^2$  — пополнение  $(F, \|\cdot\|_2)$  до гильбертова.

4.  $(T, \mathcal{U}, \mu)$ ,  $L^2(T, \mu)$  — гильбертово пространство.

$$(f, g) = \int_T f(x) \overline{g(x)} \, d\mu$$

$$\|f\|^2 = (f, f)$$

5.  $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}[a, b]$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} (f, g) &= \sum_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx \\ \|f\| &= \left( \int_a^b |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_2)$  не полно  $\implies$  оно предгильбертово. Его пополнение до гильбертова —  $L^2([a, b], \lambda)$ .

6.  $\mathcal{P} = \left\{ p(x) = \sum_{n=0}^N c_n x^n \right\}$

- $\mathcal{P} \subset C[a, b]$

$$(p, q) = \int_a^b p(x)\overline{q(x)} \, dx$$

Такое пространство предгильбертово. Пополнение —  $(L^2[a, b], \lambda)$ .

- $\mathcal{P} \subset F$

$$(p, q) = \sum_{n=0}^N a_n \overline{b_n}$$

Предгильбертово пространство. Пополнение —  $l^2$ .

7.  $H^2 = \{ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \mid \{ a_n \}_{n=0}^{\infty} \in l^2 \}$  — пространство Харди

$$(f, g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}, \quad \|f\|_{H^2} = \|\{a_n\}\|_2 = \left( \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$H^2$  — гильбертово.

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in l^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \implies \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$$

Радиус сходимости  $R = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \implies f$  аналитична в  $\{z \mid |z| < 1\}$ .

**Определение 57.**  $H$  — предгильбертово,  $x, y \in H$

Будем говорить, что  $x$  ортогонально  $y$  ( $x \perp y$ ), если  $(x, y) = 0$ .

**Определение 58.**  $M \subset H$

$$M^\perp = \{y \in H \mid x \perp y \quad \forall x \in M\}$$

Если  $M$  — подпространство, то  $M^\perp$  называется *ортогональным дополнением*.

**Утверждение 21.**  $M \subset H$  (подмножество)

$M^\perp$  — замкнутое подпространство  $H$ .

**Доказательство.**

- Подпространство

Возьмём  $y, z \in M^\perp$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\forall x \in M \quad \begin{cases} (y, x) = 0 \\ (z, x) = 0 \end{cases} \implies (\alpha y + \beta z, x) = \alpha(y, x) + \beta(z, x) = 0 \implies \alpha y + \beta z \in M^\perp$$

- Замкнутость

Возьмём  $\{y_n \in M^\perp\}_{n=1}^{\infty}$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ . Возьмём  $x \in M$ .

$$(y_n, x) = 0$$

$$\lim(y_n, x) = (y_0, x) \implies (y_0, x) = 0 \implies y_0 \in M^\perp$$

□

## 32. Существование и единственность элемента ближайшего приближения в подпространстве гильбертова пространства. Теорема о проекции на подпространство. Следствия

**Лемма 3.**  $M$  — замкнутое подпространство  $H$ ,  $u, v \in M$ ,  $x \in H \setminus M$ ,  $d = \rho(x, M) = \inf_{z \in M} \|x - z\|$

$$\|u - v\|^2 \leq 2(\|u - x\|^2 + \|v - x\|^2) - 4d^2$$

**Доказательство.** Воспользуемся тождеством параллелограмма для  $(u - x)$ ,  $(v - x)$ .

$$2(\|u - x\|^2 + \|v - x\|^2) = \|u - v\|^2 + \|u + v - 2x\|^2$$

$$\|u + v - 2x\| = 2 \left\| x - \frac{u + v}{2} \right\|$$

$$u, v \in M \implies \frac{u + v}{2} \in M \implies \left\| x - \frac{u + v}{2} \right\| \geq d \implies \|u + v - 2x\|^2 \geq 4d^2$$

$$\|u - v\|^2 \leq (\|u - x\|^2 + \|v - x\|^2)^2 - 4d^2$$

□

**Теорема 34.**  $H$  — гильбертово,  $M$  — замкнутое подпространство,  $x \in H$

$$\exists! y \in M : \rho(x, M) = \|x - y\|,$$

т. е.  $y$  — элемент наилучшего приближения для  $H$ .

**Доказательство.**

- Существование

$$x \in H, \quad M, \quad d = \rho(x, M)$$

$$\exists \{y_n \in M\}_{n=1}^{\infty} : \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = d$$

Проверим, что  $\{y_n\}$  фундаментальна. Применим лемму.

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2 \left( \underbrace{\|y_n - x\|^2}_{n \rightarrow \infty \rightarrow d^2} + \underbrace{\|y_m - x\|^2}_{m \rightarrow \infty \rightarrow d^2} \right) - 4d^2 \xrightarrow[n, m \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\implies \{y_n\} \text{ фундаментальна, } M \text{ замкнуто} \implies M \text{ полно} \implies \exists y \in M : \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \implies \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\|}_d = \|x - y\| \implies \|x - y\| = d$$

- Единственность

Пусть  $\|x - y\| = d$ ,  $\|x - z\| = d$ . По лемме

$$\|y - z\|^2 = 2(\|y - x\|^2 + \|z - x\|^2) - 4d^2 = 0 \implies y = z$$

□

**Теорема 35.**  $H$  — гильбертово,  $M \subset H$ ,  $M$  — замкнутое подпространство,  $x \in H$

$$\exists! y \in M, z \in M^\perp : x = y + z$$

**Доказательство.**

- Существование

$$d = \rho(x, M)$$

По предыдущей теореме

$$\begin{aligned} \exists! y \in M : \|x - y\| = d &= \inf_{u \in M} \|x - u\| \\ z &:= x - y \end{aligned}$$

Проверим, что  $z \perp M$ . Возьмём  $u \neq 0 \in M$ .

$$\{tu\}_{t \in \mathbb{R}} \subset M \implies y + tu \in M \quad \forall t \in \mathbb{R} \implies \|x - (y + tu)\|^2 \geq d^2 \iff \|z - tu\|^2 \geq d^2$$

Докажем, что это возможно только при  $z \perp u$ :

$$\begin{aligned}
 (z - tu, z - tu) &= \|z\|^2 + t^2\|u\|^2 - t((u, z) + (z, u)) = \underbrace{\|z\|^2}_{d^2} + t^2\|u\|^2 - 2t \operatorname{Re}(z, u) \geq d^2 \\
 \implies t^2\|u\|^2 &\geq 2t \operatorname{Re}(z, u) \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
 - t > 0 \\
 t\|u\|^2 &\geq 2 \operatorname{Re}(z, u) \quad \forall t > 0 \implies 0 \geq \operatorname{Re}(z, u) \\
 - t < 0 \\
 t\|u\|^2 &\leq 2 \operatorname{Re}(z, u) \quad \forall t < 0 \implies 0 \leq \operatorname{Re}(z, u) \\
 \implies \operatorname{Re}(z, u) &= 0
 \end{aligned}$$

Аналогично для мнимой части получаем

$$\operatorname{Im}(z, u) = 0$$

- Единственность

$$\begin{aligned}
 x &= y + z, \quad x = y_1 + z_1, \quad y, y_1 \in M, \quad z, z_1 \in M^\perp \\
 u &= y - y_1 \implies u = z_1 - z \\
 \implies u &\in M \text{ и } u \in M^\perp \text{ — } \not\subset \implies u = 0
 \end{aligned}$$

□

**Определение 59.**  $H$  — гильбертово пространство,  $X, Y$  — замкнутые подпространства  
Будем говорить, что  $H$  — ортогональная сумма ( $H = X \oplus Y$ ), если

1.  $\forall h \in H \quad \exists x \in X, y \in Y : \quad h = x + y;$
2.  $\forall x \in X, y \in Y \quad (x, y) = 0.$

**Утверждение 22.** Если  $X \perp Y$ ,  $X, Y$  — подпространства, то  $X \cap Y = \{0\}$

**Доказательство.** Пусть  $u \in X \cap Y \implies u \in X, u \in Y \implies u \perp u \implies u = 0$ . □

**Замечание.** Если  $H = X \oplus Y$ , то

$$\forall h \in H \quad \exists! x \in X, y \in Y : \quad h = x + y$$

**Доказательство.** Пусть  $h = x + y, h = x_1 + y_1$ .

$$u = x - x_1 \implies u \in X, u \in Y \implies u = 0$$

□

**Следствие.**  $H$  — гильбертово,  $M$  — замкнутое подпространство  $H$

$$H = M \oplus M^\perp$$

**Следствие.**  $(M^\perp)^\perp = M$

**Следствие.** Если  $H = X \oplus Y$ ,  $X, Y$  — замкнутые, то  $Y = X^\perp$ .

### 33. Критерий принадлежности множеству ортогональных проекторов

**Определение 60.**  $H$  — гильбертово,  $M$  — замкнутое подпространство

$$\forall h \in H \quad \exists! x \in M, y \in M^\perp : \quad h = x + y$$

Определим оператор ортогонального проектирования:

$$P_M h := x, \quad P_{M^\perp} h := y$$

**Теорема 36.**  $H$  — гильбертово

1.  $M \subset H$  — замкнутое подпространство,  $P := P_M$  — ортогональный проектор на  $M$

Тогда

- (a)  $P \in \mathcal{B}(H)$ ;
- (b)  $P^2 = P$ ;
- (c) самосопряжённость:  $(Px, y) = (x, Py)$ .

2.  $P$  удовлетворяет свойствам (a), (b), (c),  $M := P(H)$

Тогда  $P = P_M$ , т. е.  $P$  — ортогональный проектор на  $P(H)$ .

**Доказательство.**

1.  $M \subset H, \quad x \in H$

$$\exists! y, z; \quad x = y + z, \quad y \in M, z \in M^\perp$$

- (a) Проверим линейность и ограниченность

Возьмём  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

$$\alpha x = \alpha y + \alpha z, \quad \alpha y \in M, \alpha z \in M^\perp$$

Значит, разложение единственno.

$$\implies P(\alpha x) = \alpha y = \alpha P(x)$$

Возьмём  $w \in H$

$$\exists! u \in M, v \in M^\perp : \quad w = u + v$$

$$\implies x + w = (u + y) + (v + z), \quad (u + y) \in M, (v + z) \in M^\perp$$

Разложение единственno.

$$\implies P(x + w) = u + y = Px + Pw$$

Возьмём  $x \in H, \quad x = y + z, \quad y \in M, z \in M^\perp$

$$\|x\|^2 = (y + z, y + z) = \|y\|^2 + \|z\|^2 \stackrel{y=Px}{\implies} \|Px\|^2 \leq \|x\|^2 \implies \|Px\| \leq \|x\| \quad \forall x \in H$$

$$P \in \mathcal{B}(H), \quad \|P\| \leq 1$$

$$M \neq \{0\} \implies \exists x \neq 0 \in M : \quad \|P\| = \sup_{u \neq 0 \in H} \frac{\|Pu\|}{\|u\|} \geq \frac{\|Px\|}{\|x\|} = 1 \implies \|P\| = 1$$

- (b)  $P^2 = P$

$$x \in M \implies Px = x, \quad x \in H \implies Px \in M \implies P(Px) = Px \implies P^2 = P$$

- (c) Самосопряжённость

$$x, y \in H, \quad P = P_M, \quad H = M \oplus M^\perp$$

Обозначим  $Q = P_{M^\perp}$ .

$$x = Px + Qx$$

$$(Px, y) = (Px, Py + Qy) \xlongequal{Px \perp Qy} (Px, Py)$$

$$(x, Py) = (Px + Qx, Py) = (Px, Py)$$

2.  $M := P(H)$

(a) Проверим, что если  $x \in M$ , то  $Px = x$ .

$$x \in M \implies \exists y \in H : Py = x \implies Px = P(Py) = P^2y = Py = x$$

(b) Проверим, что  $M$  замкнуто.

Возьмём  $\{x_n \in M\}_{n=1}^\infty$ ,  $\lim x_n = x$ . В силу непрерывности  $P$

$$\lim Px_n = Px$$

При этом,

$$Px_n = x_n \implies \lim x_n = Px \implies Px = x \implies x \in P(H)$$

$P_M$  — ортогональный проектор на  $M \implies$  если  $x \in M$ , то  $Px = P_Mx = x$

Возьмём  $y \in M^\perp$ ,  $P_My = 0$ .

$$\|Py\|^2 = (Py, Py) = (y, P(Py)) = (y, Py) \xlongequal[y \in M^\perp]{Py \in M} 0 \implies Py = 0$$

Возьмём  $x \in H$ .

$$x = y + z, \quad y \in M, \quad z \in M^\perp \implies Px = P_Mx$$

□

## 34. Проектор на конечномерное пространство. Критерий полноты семейства элементов. Неравенство Бесселя

**Следствие (ортогональный проектор на конечномерное пространство).**

$H$  — гильбертово,  $M \subset H$  — подпространство,  $\dim M = n$ ,  $\{e_j\}_{j=1}^n$  — ОНБ

$$P_Mx = \sum_{j=1}^n (x, e_j)e_j \quad \forall x \in H$$

**Доказательство.**

$$S_n := \sum_{j=1}^n (x, e_j)e_j \implies S_n \in M$$

$$x = S_n + (x - S_n)$$

Возьмём  $w = (x - S_n)$ . Проверим, что  $w \in M^\perp$ .

$$(S_n, e_j) = (x, e_j) \implies (w, e_j) = (x, e_j) - (x, e_j) = 0 \implies w \perp e_j \implies w \in M^\perp$$

□

**Следствие (критерий полноты семейства элементов гильбертова пространства).**

$H$  — гильбертово,  $\{x_\alpha \in H\}_{\alpha \in A}$  — семейство

$\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — полное **тогда и только тогда**, когда

$$x \in H, \quad x \perp x_\alpha \quad \forall \alpha \in A \implies x = 0$$

**Доказательство.** Пусть  $L = \overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}}$  — замыкание линейной оболочки.

$$\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ — полное} \iff L = H \iff L^\perp = \{0\} \iff (x \in H \perp x_\alpha \quad \forall \alpha \in A \implies x = 0)$$

□

**Следствие (неравенство Бесселя).**  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  — ОНС в  $H$ ,  $x \in H$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2$$

**Доказательство.** Возьмём  $\alpha_j \in \mathbb{C}$ . Запишем теорему Пифагора:

$$\left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right\|^2 = \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right) \underset{e_j \perp e_k}{=} \sum_{j=1}^k |\alpha_j|^2$$

Пусть  $L_n = \mathcal{L}\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned} P_{L_n} x = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j &\implies \|P_{L_n} x\|^2 = \sum_{j=1}^n |(x, e_j)|^2, \quad \|P_{L_n}\| \leq 1 \\ &\implies \sum_{j=1}^n |(x, e_j)|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall n \implies \sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)|^2 \leq \|x\|^2 \end{aligned}$$

□