Оглавление

Глава 1

Теория функции комплексной переменной

1.1. Основные понятия

Косплексная плоскость $\mathbb{C}$ является метрическим пространством, поскольку $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|_{R^2}$, если $z = x+iy$. Поэтому определны понятия точки сгущения множества и предела функции:

Определение 1. c является *точкой сгущения* множетсва $E \subset \mathbb{C}$, если

$$\forall \delta > 0 \quad \exists\, z \in E \setminus \{\, c \,\} : \quad |z-c| < \delta$$

Определение 2.

$$f(z) \xrightarrow[z\to c]{} A \in \mathbb{C} \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \quad \forall z \in E \setminus \{\, c \,\} : |z-c| < \delta \qquad |f(z) - c| < \varepsilon$$

Для $w = u+iv$ полагаем $\mathfrak{Re}\, w = u, \quad \mathfrak{Im}\, w = v, \quad \overline{w} = u-iv$. Множеству $x+i\cdot 0$ соспоставим $\mathbb{R}$. Полагаем, что $i \cdot 0 = 0$, и $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Утверждение 1. Если $u(z) = \mathfrak{Re}\, f(z), \quad v(z) = \mathfrak{Im}\, f(z)$, то

$$f(z) \xrightarrow[z\to c]{} A \iff \begin{cases} u(z) \xrightarrow[z\to c]{} \mathfrak{Re}\, A \\ v(z) \xrightarrow[z\to c]{} \mathfrak{Im}\, A \end{cases}$$

Из свойств функций нескольких переменных получаем:

$$f(z) \xrightarrow[z\to c]{} A \in \mathbb{C} \implies \exists\, \delta > 0,\ M > 0 : \quad \forall z \in E \setminus \{\, c \,\} : |z-c| < \delta \qquad |f(z)| \leq M \tag{1.1}$$

Утверждения.

1. $f(z) \xrightarrow[z\to c]{} A, \quad A \neq 0$

$$\implies \exists\, \delta > 0 : \quad \forall z \in E \setminus \{\, c \,\} : |z-c| < \delta \qquad |f(z)| > \frac{|A|}{2}$$

2. $f(z) \xrightarrow[z\to c]{} \quad \implies \quad kf(z) \xrightarrow[z\to c]{} kA$

3. $f(z) \xrightarrow[z\to c]{}, \quad g(z) \xrightarrow[z\to c]{}\to B$

$$\implies f(z) + g(z) \xrightarrow[z\to c]{} A+B$$

4. $f(z) \xrightarrow[z\to c]{} A, \qquad g(z) \xrightarrow[z\to c]{} B$

$$\implies f(z)g(z) \xrightarrow[z\to c]{} AB$$

5. $f(z) \xrightarrow[z\to c]{} A, \quad A \neq 0, \quad f(z) \neq 0$ при $z \in E \setminus \{\, c \,\}$

$$\implies \frac{1}{f(z)} \xrightarrow[z\to c]{} \frac{1}{A}$$

6. $f(z) \xrightarrow[z\to c]{} A, \qquad f(z) \neq 0, \quad A \neq 0, \quad g(z) \xrightarrow[z\to c]{} B$

$$\implies \frac{g(z)}{f(z)} \xrightarrow[z\to c]{} \frac{B}{A}$$

Доказательство.

1. Положим $\varepsilon := \frac{|A|}{2} > 0$. Тогда

$$\exists\, \delta > 0 : \quad \forall z \in E \setminus \{\, c \,\} : |z - c| < \delta \qquad |f(z) - A| < \frac{|A|}{2}$$

При таких z выполнено

$$|f(z)| = |f(z) - A + A| \overset{\triangle}{\geq} |A| - |f(z) - A| > |A| - \frac{1}{2}|A| = \frac{1}{2}|A|$$

2. Следует из линейности и аддитивности предела вещественных функций.

3. Аналогично.

4. $$\exists\, \delta' > 0,\ M' > 0,\ \delta'' > 0,\ M'' > 0 : \quad \forall z \in E \setminus \{\, c \,\} \quad \begin{cases} |z - c| < \delta' \implies |f(z)| < M' \\ |z - c| < \delta'' \implies |g(z)| < M'' \end{cases}$$

Возьмём $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, \delta'_\circ,\ \delta''_\circ : \quad \forall z \in E \setminus \{\, c \,\} \quad \begin{cases} |z - c| < \delta'_\circ \implies |f(z) - A| < \varepsilon \\ |z - c| < \delta''_\circ \implies |g(z) - B| < \varepsilon \end{cases}$$

Пусть $|z - c| < \delta_\circ = \min\{\, \delta', \delta'', \delta'_\circ, \delta''_\circ \,\}$. Тогда

$$|f(z)g(z) - AB| = \big|\big(f(z) - A\big)g(z) + A\big(g(z) - B\big)\big| \overset{\triangle}{\leq} |f(z) - A| \cdot |g(z)| + |A| \cdot |g(z) - B| < \\ < \varepsilon \cdot M'' + |A| \cdot \varepsilon = \varepsilon(M'' + |A|)$$

5. Возьмём δ_1 из 1. Выберем $\forall \varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, \delta_2 > 0 : \quad \forall z \in E \setminus \{\, c \,\} \quad |z - c| < \delta_2 \implies |f(z) - A| < \varepsilon \tag{1.2}$$

Выберем $\delta_3 := \min\{\, \delta_1, \delta_2 \,\}$. Тогда

$$1., (1.2) \implies \left| \frac{1}{f(z)} - \frac{1}{A} \right| = \frac{|A - f(z)|}{|A| \cdot |f(z)|} < \frac{\varepsilon}{|A| \cdot \frac{|A|}{2}} = \frac{2\varepsilon}{|A|^2}$$

При $z \in E \setminus \{\, c \,\}, \quad |z - c| < \delta_3$ это то, что требовалось доказать.

6. $$\frac{g(z)}{f(z)} = g(z) \cdot \frac{1}{f(z)} \to B \cdot \frac{1}{A} = \frac{B}{A}$$

□

Определение 3. $f(z) \xrightarrow[z\to c]{} \infty$, если

$$\forall L > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \quad \forall z \in E \setminus \{\, c \,\} \quad |z - c| < \delta \implies |f(z)| > L$$

Непрерывность в точке и на множестве определены, поскольку $\mathbb{C}$ является метрическим пространством.
Функции $f : E \to \mathbb{C}, \quad E \subset \mathbb{C}$ сопоставим функцию $f^* : E^* \to \mathbb{C}$:

Для $z = x + iy, \quad z \in E$ положим $f^*(x,y) \coloneqq f(z)$.

Если $f(z) = u(z) + iv(z), \quad u, v : E \to \mathbb{R}$, то далее знак $*$ в обозначениях $u^*(x,y),\ v^*(x,y)$ будем пропускать, поэтому верно равенство

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

Определение 4. Открытое связное множество в $\mathbb{C}$ будем называть областью.

1.2. Частные производные

Пусть $E \subset \mathbb{C}$ — область, $\quad z_\circ = x_\circ + iy_\circ \in E, \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.
Положим

$$f'_x(z_\circ) \coloneqq u'_x(x_\circ, y_\circ) + iv'_x(x_\circ, y_\circ)$$
$$f'_y(z_\circ) \coloneqq u'_y(x_\circ, y_\circ) + iv'_y(x_\circ, y_\circ)$$
$$f'_z(z_\circ) \coloneqq \frac{1}{2}\Big(f'_x(z_\circ) - if'_y(z_\circ)\Big)$$
$$f'_{\overline{z}}(z_\circ) \coloneqq \frac{1}{2}\Big(f'_x(z_\circ) + if'_y(z_\circ)\Big)$$

Пример. $f(z) \equiv z, \qquad f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z = x + iy$

$$u(x,y) \equiv x, \qquad v(x,y) \equiv y$$

$$z'_x = 1, \qquad z'_y = i, \qquad z'_z = \frac{1}{2}(1 - i \cdot i) = 1, \qquad z'_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(1 + i \cdot i) = 0$$

Определение 5. Пусть $E \subset \mathbb{C}$ — область, $\qquad z_\circ \in E, \qquad f : E \to \mathbb{C}, \qquad f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$
$u, v : E^* \to \mathbb{R}$

Будем говорить, что f дифференцируема в точке $z_\circ$, если $f^*(x,y)$ дифференцируема в точке $(x_\circ, y_\circ)$ в следующем смысле:
функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке $(x_\circ, y_\circ)$.

1.3. Формула для дифференцируемой функции

Пусть $\sigma \coloneqq s + it, \qquad E \subset \mathbb{C}$ — область, $\qquad z_\circ \in E, \quad z_\circ + \sigma \in E, \qquad z_\circ \leftrightarrow (x_\circ, y_\circ)$
Предположим, что $f(z)$ дифференцируема в точке $z_\circ$.

Тогда

$$f(z_\circ+\sigma) - f(z_\circ) = f^*(x_\circ+s, y_\circ+t) - f^*(x_\circ, y_\circ) = \Big(u(x_\circ+s, y_\circ+t) - u(x_\circ, y_\circ)\Big) + i\Big(v(x_\circ+s, y_\circ+t) - v(x_\circ, y_\circ)\Big) \tag{1.3}$$

В силу дифференцируемости f

$$u(x_\circ + s, y_\circ + t) - u(x_\circ, y_\circ) = u'_x(x_\circ, y_\circ)s + u'_y(x_\circ, y_\circ)t + r_1(s,t), \qquad \frac{|r_1(s,t)|}{\sqrt{s^2+t^2}} = \frac{|r_1(s,t)|}{|\sigma|} \xrightarrow[\sigma \to 0]{} 0$$

$$v(x_\circ + s, y_\circ + t) - v(x_\circ, y_\circ) = v'_x(x_\circ, y_\circ)s + v'_y(x_\circ, y_\circ)t + r_2(s,t), \qquad \frac{|r_2(s,t)|}{|\sigma|} \xrightarrow[\sigma \to 0]{} 0$$

Отсюда

$$(1.3) = \Big(u'_x(x_\circ, y_\circ)s + u'_y(x_\circ, y_\circ)t + r_1(s,t)\Big) + i\Big(v'_x(x_\circ, y_\circ)s + v'_y(x_\circ, y_\circ)t + r_2(s,t)\Big) =$$
$$= \Big(u'_x(x_\circ, y_\circ) + iv'_x(x_\circ, y_\circ)\Big)s + \Big(u'_y(x_\circ, y_\circ) + iv'_y(x_\circ, y_\circ)\Big)t + r_1(s,t) + ir_2(s,t) =$$
$$= f'_x(z_\circ)s + f'_y(z_\circ)t + r_1(s,t) + ir_2(s,t)$$

Положим $\rho(\sigma) \coloneqq r_1(s,t) + ir_2(s,t)$. Тогда

$$\frac{|\rho(\sigma)|}{|\sigma|} = \frac{\sqrt{r_1^2(s,t) + r_2^2(s,t)}}{|\sigma|} = \sqrt{\left(\frac{r_1(s,t)}{|\sigma|}\right)^2 + \left(\frac{r_2(s,t)}{|\sigma|}\right)^2} \xrightarrow[\sigma\to 0]{} 0 \tag{1.4}$$

Понятно, что

$$s = \frac{1}{2}(\sigma + \overline{\sigma}), \qquad t = \frac{1}{2i}(\sigma - \overline{\sigma}) = -\frac{i}{2}(\overline{\sigma} - \sigma)$$

Поэтому

$$f(z_\circ + \sigma) - f(z_\circ) = f'_x(z_\circ)\cdot\frac{1}{2}(\sigma + \overline{\sigma}) + \frac{i}{2}f'_y(z_\circ)(\overline{\sigma} - \sigma) + \rho(\sigma) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(f'_x(z_\circ) - if'_y(z_\circ)\Big)\sigma + \frac{1}{2}\Big(f'_x(z_\circ) + if'_y(z_\circ)\Big)\overline{\sigma} + \rho(\sigma) = f'_z(z_\circ)\sigma + f_{\overline{z}}(z_\circ)\overline{\sigma} + \rho(\sigma) \tag{1.5}$$

где для $\rho(\sigma)$ выполнено (1.4).

Определение 6. $E \subset \mathbb{C}$ — область, $\quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y) : E \to \mathbb{C}, \quad u, v : E* \to \mathbb{R}$

Будем говорить, что $f \in \mathcal{C}^1\Big(E\Big)$, если $u \in \mathcal{C}^1\Big(E^*\Big)$ и $v \in \mathcal{C}^1\Big(E^*\Big)$

Утверждение 2. $f \in \mathcal{C}^1\Big(E\Big)$

Тогда f дифференцируема в $\forall z \in E$.

Доказательство. По определению $u, v \in \mathcal{C}^1\Big(E^*\Big)$, поэтому по достаточному условию дифференциуемости функции u, v дифференцируемы для $\forall (x,y) \in E$.
Тогда, по определению, $f^*(x,y)$ дифференцируема $\forall (x,y) \in E$.
Значит, f дифференцируема для $\forall z \in E$. □

Определение 7. $E \subset \mathbb{C}$ — область, $\quad f : E \to \mathbb{C}$

Функцию f будем называть аналитической, если

1. $f \in \mathcal{C}^1\Big(E\Big)$;
2. $\forall z \in E \quad f'_{\overline{z}} = 0$.

Замечание. По предыдущему утверждению $f(z)$ дифференцируема $\forall z \in E$, поэтому для $\forall z \in E$ определены $f'_x(z), f'_y(z), f'_z(z), f'_{\overline{z}}(z)$.

Обозначение. Мноеество всех функций, аналитических в E, будем обозначать $A(E)$.

1.3.1. Свойства частных производных

Свойства. $E \subset \mathbb{C}$ — область, $\quad z \in E, \quad f, g$ дифференцируемы в z, $\quad \lambda$ — любой из символов $x, y, z, \overline{z}$.

1. $\Big(cf(z)\Big)'_\lambda = cf'_\lambda(z)$
2. $\Big(f(z) + g(z)\Big)'_\lambda = f'_\lambda(z) + g'_\lambda(z)$
3. $\Big(f(z)g(z)\Big)'_\lambda = f'_\lambda(z)g(z) + f(z)g'_\lambda(z)$
4. $f(z) \neq 0$
$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)'_\lambda = -\frac{f'_\lambda(z)}{f^2(z)}$$

5. $f(z) \neq 0$
$$\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right)'_\lambda = \frac{g'_\lambda(z)f(z) - g(z)f'_\lambda(z)}{f^2(z)}$$

Доказательство. Доказательства проводятся проверкой возникающих тождеств. Докажем для примера 4 при $\lambda = x$ и при $\lambda = \overline{z}$.

Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $\quad f'_x(z) = u'_x + iv'_x$ (далее не будем писать вргументы).

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{u + iv} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} = \frac{u}{u^2 + v^2} - i\frac{v}{u^2 + v^2}$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'_x = \left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)'_x - i\left(\frac{v}{u^2+v^2}\right)'_x = \frac{u'_x(u^2+v^2) - 2u(uu'_x + vv'_x)}{(u^2+v^2)^2} - i\frac{v'_x(u^2+v^2) - 2v(uu'_x + vv'_x)}{(u^2+v^2)^2} =$$
$$= \frac{u'_xv^2 - 2uvv'_x - u^2ux' - i(v'_xu^2 - 2uvu'_x - v^2v'_x)}{(u^2+v^2)^2} = \frac{(u'_x + iv'_x)(v^2 - u^2) - 2uv(v'_x - iu'_x)}{(u^2+v^2)^2} =$$
$$= \frac{f'_x(v^2 - u^2) + 2uvi(u'_x + iv'_x)}{(u^2+v^2)^2} = f'_x \cdot \frac{v^2 - u^2 + 2uvi}{(u^2+v^2)^2} = f'_x \cdot \frac{(v + iu)^2}{(u^2+v^2)^2} = -f'_x \cdot \frac{(u - iv)^2}{(u^2+v^2)^2} =$$
$$= -f'_x \cdot \frac{((u - iv)^2)}{(u - iv)^2(u + iv)^2} = -f'_x \cdot \frac{1}{(u + iv)^2} = -\frac{f'_x}{f^2}$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{f}\right)'_x + i\left(\frac{1}{f}\right)'_y\right] = \frac{1}{2}\left(-\frac{f'_x}{f^2} - i\frac{f'_y}{f^2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{f^2}(f'_x + if'_y) = -\frac{f'_{\overline{z}}}{f^2}$$

□

1.3.2. Первые свойства аналитических функций

Свойства. $f, g \in A(E), \qquad c \in E$

1. $cf \in A(E)$
2. $f + g \in A(E)$
3. $fg \in A(E)$
4. $f(z) \neq 0$
$$\implies \frac{1}{f} \in A(E)$$
5. $f(z) \neq 0$
$$\implies \frac{g}{f} \in A(E)$$

Доказательство. Следует из свойств частных производных, например, 4:

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)'_{\overline{z}} = -\frac{f'_{\overline{z}}(z)}{f^2(z)} = \frac{0}{f^2(z)} = 0$$

□

1.3.3. Первые примеры аналитических функций

Примеры.

1. $f(z) \equiv c, \qquad c \in \mathbb{C}$
$$c'_x = c'_y \equiv 0 \qquad \implies c'_{\overline{z}} \equiv 0$$
2. $f(z) \equiv z$
Уже проверено, что $z'_{\overline{z}} \equiv 0$

3. Пользуясь свойствами аналитических функций 1., 2., 3. и предыдущими примерами, получаем

$$z^2 \in A(\mathbb{C}), \quad z^3 \in A(\mathbb{C}), \quad \dots, \quad z^n \in A(\mathbb{C})$$

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n \in A(\mathbb{C})$$

4. Для $z = x + iy$ положим $e^z \coloneqq e^y \cos y + ie^x \sin y$. Тогда

$$(e^z)'_x = (e^x \cos y)'_x + i(e^x \sin y)'_x = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

$$(e^z)'_y = (e^x \cos y)'_y + i(e^x \sin y)'_y = -e^x \sin y + ie^x \cos y$$

$$(e^z)'_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\Big((e^z)'_x + i(e^z)'_y\Big) = \frac{1}{2}\Big(e^x \cos y + ie^x \sin y + i(-e^x \sin y + ie^x \cos y)\Big) = 0$$

5. Пусть $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n, \quad Q(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m, \quad m \geq 1, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ — все различные корни уравнения $Q(z) = 0, \quad k \leq m$.

   Тогда по примеру 3. и свойству 5.

$$\frac{P(z)}{Q(z)} \in A\big(\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^{k} \{\, \alpha_j \,\}\big)$$

6. Пусть $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \qquad$ для $z \in D$ пусть φ — аргумент $z, \quad -\pi < \varphi < \pi$.
   Положим $\ln z \coloneqq \ln|z| + i\varphi$ для $z \in D$.

   Если $z = x + iy, \quad |z| > 0, \quad z \in D$, то φ может быть определён разными формулами при $x > 0$, при $y \geq 0$ или при $y \leq 0$.
   Например, при $x > 0 \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ и тогда

$$\ln z = \ln\sqrt{x^2 + y^2} = i \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) = i \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

   Тогда

$$(\ln z)'_x = \left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)'_x + i\Big(\operatorname{arctg}\frac{y}{x})'_x = \frac{x}{x^2+y^2} + i\Big(-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\Big) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$(\ln z)'_y = \left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)'_y + i\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{y}{x^2+y^2} + i\Big(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\Big) = \frac{y}{x^2+y^2} + i\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$(\ln z)'_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\Big((\ln z)'_x + i(\ln z)'_y\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} + i(\frac{y}{x^2+y^2} + i\frac{x}{x^2+y^2})\Big) = 0$$

   Аналогично, $(\ln z)'_{\overline{z}} = 0$ при $y \geq 0$ и при $y \leq 0$. Получаем

$$\ln z \in A(D)$$

1.3.4. Ещё одно свойство аналитических функций

Утверждение 3. $f \in A(E), \qquad E$ — область, $\qquad z \in E, \qquad \sigma \in \mathbb{C}, \quad z + \sigma \in \mathbb{C}$
Тогда

$$f(z+\sigma) - f(z) = f'_z(z)\sigma + \rho(\sigma), \qquad \frac{|\rho(\sigma)|}{|\sigma|} \xrightarrow[\sigma\to 0]{} 0 \tag{1.6}$$

Доказательство. Из (1.5) и того, что $f \in A(E)$ следует, что

$$f(z-\sigma) - f(z) = f'_z(z)\sigma + f'_{\overline{z}}(z)\overline{\sigma} + \rho(\sigma) = f'_z(z)\sigma + \rho(\sigma)$$

где выполнено (1.4). □

1.3.5. Эквивалентные определения аналитических функций

Теорема 1. $E \subset \mathbb{C}$ — область, $\quad f \in \mathcal{C}^1\Big(E\Big), \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

Следующие условия эквивалентны:

1. $f'_{\overline{z}}(z) = 0 \quad \forall z \in E$
2. $f(z+\sigma) = f'_z(z)\sigma + \rho(\sigma) \quad \forall z \in E, \qquad \frac{|\rho(\sigma)|}{|\sigma|} \xrightarrow[\sigma \to 0]{} 0$
3. $\forall z = x + iy$ выполнены уравнения Коши—Римана:
$$\left.\begin{aligned} u'_x(x,y) &= v'_y(x,y) \\ u'_y(x,y) &= -v'_x(x,y) \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$
4.
$$\forall z \in E \quad \exists \lim_{\sigma \to 0} \frac{f(z+\sigma) - f(z)}{\sigma} \in \mathbb{C} \tag{1.8}$$

Предел в (1.8) называется комплексной призводной функции f в точке z и обозначается $f'(z)$.

Доказательство.

- Из (1.6) следует, что 1. $\implies$ 2.
- Если выполнено 2., то
$$\frac{f(z+\sigma) - f(z)}{\sigma} = f'_z(z) + \frac{\rho(\sigma)}{\sigma} \xrightarrow[\sigma \to 0]{} f'_z(z),$$
поэтому 2. $\implies$ 4., при этом получаем равенство
$$f'(z) = f'_z(z) \tag{1.9}$$
- Предположим, что выполнено 4.
Положим
$$\frac{f(z+\sigma) - f(z)}{\sigma} \coloneqq f'(z) = \delta(\sigma)$$
$$\implies f(z+\sigma) - f(z) = f'(z)\sigma + \sigma\delta(\sigma)$$
Положим $\rho_\circ(\sigma) \coloneqq \sigma\delta(\sigma)$. Тогда
$$4. \implies \frac{|\rho_\circ(\sigma)|}{|\sigma|} = |\delta(\sigma)| \xrightarrow[\sigma \to 0]{} 0$$
Запишем для f формулу (1.5):
$$f(z+\sigma) - f(z) = f'_z(z)\sigma + f'_{\overline{z}}(z)\overline{\sigma} + \rho(\sigma), \qquad \frac{|\rho(\sigma)|}{|\sigma|} \xrightarrow[\sigma \to 0]{} 0$$
Вычитая из неё предыдущую формулу, получаем
$$f'_z(z)\sigma + f'_z(z)\overline{\sigma} + \rho(\sigma) - f'(z)\sigma - \rho_\circ(\sigma) = 0$$
Делим на σ:
$$f'_z(z) - f'(z) + f'_{\overline{z}}(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma} + \frac{\rho(\sigma)}{\sigma} - \frac{\rho_\circ(\sigma)}{\sigma} = 0$$
или
$$f_{[}\overline{z}]'(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma} = f'(z) - f'_z(z) + \frac{\rho_\circ(\sigma)}{\sigma} - \frac{\rho(\sigma)}{\sigma}$$
$$f'(z) - f'_z(z) + \frac{\rho_\circ(\sigma)}{\sigma} - \frac{\rho(\sigma)}{\sigma} \xrightarrow[\sigma \to 0]{} f'(z) - f'_z(z)$$
Следовательно, существует $\lim\limits_{\sigma \to 0} f'_{\overline{z}}(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma} \eqqcolon A$.
Если $\sigma = s > 0$, то $\overline{\sigma} = \sigma$ и
$$a = \lim_{\sigma \to 0+} f'_{\overline{z}}(z) \cdot 1 = f'_{\overline{z}}(z)$$

Если положить $\sigma = it, \quad t > 0$, то $\overline{\sigma} = -it$, и

$$A = \lim_{t \ to 0^+} f'_{\overline{z}} \cdot \frac{-it}{it} = -f'_{\overline{z}}$$

$$\implies f'_{\overline{z}} = A = 0$$

То есть, 4. $\implies$ 1. и

$$f'_z(z) = f'(z)$$

- Далее,

$$f'_x(z) = u'_x(x,y) + iv'_x(x,y), \qquad f'_y(z) = u'_y(x,y) + iv'_y(x,y)$$

$$f'_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(f'_x(z) + if'_y(z)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\big(u'_x(x,y) + iv'_x(x,y)\big) + i\big(u'_y(x,y) + iv'_y(x,y)\big)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\big(u'_x(x,y) - v'_y(x,y)\big) + i\big(v'_x(x,y) + u'_y(x,y)\big)\Big)$$

Отсюда 1. $\iff$ 3.

$\square$

Следствие. $f \in A(E)$

$$\implies f'(z) = f'_x(z), \qquad z \in E$$

Доказательство. Имеем

$$f'_z = \frac{1}{2}\big(f'_x - if'_y\big), \qquad f'_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\big(f'_x + if'_y\big)$$

$$\implies f'_x = f'_z + f'_{\overline{z}}$$

$$f \in A(E) \implies f'_x = f'_z + 0 = f'_z = f'$$

$\square$