Содержание

Часть I
Уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной

Ааа! Дифуры!

$$\frac{\mathrm{d}\, y(x)}{\mathrm{d}\, x} = f\big(x, y(x)\big) \quad \text{или} \quad y' = f(x, y) \tag{1}$$

1. Продолжимость решения на границу и за границу; теорема о продолжимости решения на границу

Определение 1. Пусть $y = \varphi(x)$ – решение уравнения (1) на $\langle a, b\rangle$. Если этот промежуток произвольным образом сузить, то на новом промежутке функция $y = \varphi(x)$ останется решением, которое называют *сужением* исходного решения.

Определение 2. Решение уравнения (1), заданное на промежутке $\langle a, b)$ *продолжимо вправо в точку* b или *на границу*, если найдётся такое решение $y = \widetilde{\varphi}(x)$, определённое на промежутке $\langle a, b]$, что сужение $\widetilde{\varphi}(x)$ на $\langle a, b)$ совпадает с $\varphi(x)$.

Определение 3. Решение уравнения (1), заданное на промежутке $\langle a, b\rangle$ *продолжимо вправо за точку* b или *за границу*, если найдутся такие $\widetilde{b} > b$ и решение $y = \widetilde{\varphi}(x)$, определённое на промежутке $\left\langle a, \widetilde{b}\right\rangle$, что сужение $\widetilde{\varphi}(x)$ на $\langle a, b\rangle$ совпадает с $\varphi(x)$.

Теорема 1 (о продолжимости решения на границу).
$\varphi(x)$ – решение уравнения (1) на промежутке $\langle a, b)$, $\quad b < +\infty$

Для того чтобы это решение было продолжимо вправо в точку b необходимо и достаточно, чтобы существовали последовательность $\{\, x_k \,\}_{k=1}^{\infty}$ и число $\eta \in \mathbb{R}^1$ такие, что

$$\forall k \quad \begin{cases} x_k \in \langle a, b) \\ \big(x_k, \varphi(x_k)\big) \xrightarrow[k\to\infty]{} (b, \eta) \in \widetilde{G} \end{cases} \tag{2}$$

Доказательство.

- Достаточность
  Пусть выполняется условие (2)

  Утверждение 1. В силу того, что функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}$, найдутся такие $c > 0$ и $M \geq 1$, что

  $$\forall (x, y) \in \widetilde{G} \cap \overline{B_c}(b, \eta) \quad |f(x, y)| \leq M$$

  Доказательство.

  – $(b, \eta) \in G$, т. е. является внутренней
    Тогда существует $\overline{B_c}(b, \eta) \subset G$ – компакт, и на нём функция ограничена

  – $(b, \eta) \subset \widetilde{G}$ и "вблизи" находятся точки "плохой" границы
    Приведём рассуждение **от противного**:
    Допустим, $|f(b, \eta)| = M - 1$ и существует последовательность $c_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ $(c_m > 0)$ и последовательность точек $(x_m, y_m) \in \widetilde{G} \cap \overline{B_{c_m}}(b, \eta)$ такие, что $|f(x_m, y_m)| > M$
    Тогда $(x_m, y_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} (b, \eta)$, а это значит, что функция $|f(x, y)|$ терпит разрыв в точке (b, η), так как $|f(x_m, y_m)| - |f(b, \eta)| > 1$ для любого m

  □

  Докажем, что существует $\lim\limits_{x\to b-} \varphi(x)$ и он равен η:
  Для этого покажем, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta \in \langle a, b)$, что

  $$\forall x \in [\delta, b) : |\varphi(x) - \eta| < \varepsilon \tag{3}$$

  Зафиксируем произвольный $0 < \varepsilon \leq c$
  Тогда $|f(x, y)| \leq M$ для любой точки $(x, y) \in \widetilde{G} \cap \overline{B_\varepsilon}(b, \eta)$ и по условию (2) найдётся такой номер m, что выполняются равентсва

  $$b - x_m > \frac{\varepsilon}{2M}, \qquad |\varphi(x_m) - \eta| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

  По формуле Ньютона-Лейбница для всякого $x \in [x_m, b)$ имеем:

  $$|\varphi(x) - \varphi(x_m)| = \left| \int_{x_m}^{x} \varphi'(s)\, \mathrm{d}\, s \right| = \left| \int_{x_m}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big)\, \mathrm{d}\, s \right| \leq \int_{x_m}^{x} \big|f\big(s, \varphi(s)\big)\big|\, \mathrm{d}\, s \leq$$
  $$\leq M(x - x_m) < M(b - x_m) \underset{(4)_1}{<} \frac{\varepsilon}{2} \qquad (x_m \leq x < b)$$

  Поэтому
  $$|\varphi(x) - \eta| \leq |\varphi(x) - \varphi(x_m)| + |\varphi(x_m) - \eta| \underset{(4)_2}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

  Неравенство (3) верно при $\delta = x_m$, а значит, $\varphi(x) \xrightarrow[x\to b^{-0}]{} \eta$
  Доопределим функцию $y = \varphi(x)$ в точке b, положив $\varphi(b) = \eta$
  Согласно лемме о записи решения в интегральном виде

  $$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big)\, \mathrm{d}\, s \quad \forall x_0, x \in \langle a, b)$$

  В этом тождестве можно перейти к пределу при $x \to b^{-0}$, получая равенство $\eta = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big)\, \mathrm{d}\, s$, так как по условию точка $(b, \eta) \in \widetilde{G}$, а занчит, функция $f(x, y)$ определена

и непрерывна в этой точке
В результате функция

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \langle a, b) \\ \eta & x = b \end{cases}$$

по определению является продолжением решения $y = \varphi(x)$ на $\langle a, b]$

- Необходимость
  Допустим, что на промежутке $\langle a, b]$ существует решение $y = \widetilde{\varphi}(x)$ такое, что $\widetilde{\varphi}(x) \equiv \varphi(x)$ на $\langle a, b)$
  Поскольку $\widetilde{\varphi}(x)$ непрерывна, то $\widetilde{\varphi}(x) = \eta = \lim\limits_{x \to b} \widetilde{\varphi}(x)$
  Но тогда $\eta = \lim\limits_{x \to b^-} \varphi(x)$ и требуемая послеовательность точек x_k существует, причём по пореде-лению решения точка $(b, \eta) \in \widetilde{G}$

□

2. Продолжимость решения на границу и за границу; леммы о продолжимости решения за границу отрезка и интервала

Лемма 1 (о продолжимости решения за границу отрезка)**.** Пусть решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1) определено на промежутке $\langle a, b]$ и точка $\big(b, \varphi(b)\big) \in G$
Тогда это решение продолжимо вправо за точку b на полуотрезок Пеано, построенный для точки $\big(b, \varphi(b)\big)$.

Доказательство. По теореме Пеано на отрезке Пеано $\overline{P_h}\big(b, \varphi(b)\big)$ существует внутреннее решение $y = \psi(x)$ ЗК$(b, \varphi(b))$.
Тогда функция $y = \widetilde{\varphi}(x)$, где

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \langle a, b] \\ \psi(x), & x \in [b, b+h] \end{cases}$$

по определению является решением уравнения (1) на $\langle a, b+h]$
В самом деле, в точке b производная функции $\widetilde{\varphi}(x)$ существует, так как

$$\widetilde{\varphi}'_-(b) = \varphi'_-(b) = f\big(b, \varphi(b)\big) = \psi'_+(b) = \widetilde{\psi}'_+(b)$$

А выполнение других условий из определения решения для $\widetilde{\varphi}(x)$ очевидно □

Следствие. Если решение $y = \varphi(x)$ уравнения 1 определено на промежутке $\langle a, b]$ и не продолжимо вправо за точку b, то $\big(b, \varphi(b)\big) \in \widehat{G}$

Доказательство. Предположение противного противоречит лемме □

Из теоремы о продолжимости решения на границу и последней леммы вытекает следующее утверждение:

Лемма 2 (о продолжимости решения на границу интервала)**.** Пусть решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1) определено на промежутке $\langle a, b)$, существует число $\eta = \lim\limits_{x \to b^-} \varphi(x)$ и точка $(b, \eta) \in G$
Тогда это решение продолжимо вправо за точку b

3. Теорема о поведении интегральной кривой полного внутреннего решения

Теорема 2 (о поведении интегральной кривой полного внутреннего решения)**.** Предположим, что внутреннее решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1) определено на промежутке $\langle a, \beta)$ и не продолжимо вправо.
Тогда для любого компакта $\overline{H} \subset G$ найдётся такое число $\delta \in \langle a, \beta)$, что для всякого $x \in (\delta, \beta)$ точка $\big(x, \varphi(x)\big) \in G \setminus \overline{H}$

Другая формулировка. При стремлении аргумента полного внутреннего решения к границе максимального интервала существования дуга интегральной кривой покидает любой компакт, лежащий в области G, и никогда в него не возвращается

Доказательство. Переходя в условиях теоремы на язык последовательностей, докажем, что для любого компакта $\overline{H} \subset G$ и для любой последовательности $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \beta$, $x_k \in \langle a, \beta)$ существует $K > 0$ такое, что $\big(x_k, \varphi(x_k)\big) \in G \setminus \overline{H}$ при всех $k > K$
Рассуждая **от противного**, допустим, что существуют компакт $\overline{H}_* \subset G$ и последовательность $x_k \to \beta$, $x_k \in \langle a, \beta)$ такие, что $\big(x_k, \varphi(x_k)\big) \in \overline{H}_*$ для $k = 1, 2, ...$
Отсюда сразу же вытекает, что $\beta < +\infty$, так как в противном случае найдётся такой индекс k^*, что точка $\big(x_{k^*}, \varphi(x_{k^*})\big)$ будет лежать вне компакта в силу его ограниченности
НУО считаем, что последовательность x_k – сходящаяся (иначе перейдём к сходящейся подпоследовательности)
Пусть $(\beta, \eta) = \lim\limits_{k\to\infty} \big(x_k, \varphi(x_k)\big)$
Тогда предельная точка (β, η) также принадлежит компакту $\overline{H}_*$, а значит, выполняются условия теоремы о продолжимости решения (теор. 1), согласно которой решение $y = \varphi(x)$ продолжимо на промежуток $\langle a, \beta]$ – $\lightning$ с условием теоремы $\square$

4. Ломаные Эйлера. Лемма о ломаных Эйлера в роли ε-решения

Выберем в области G произвольную точку (x_0, y_0) и построим в ней отрезок поля направлений столь малой длины, что он целиком лежит в G, начинаясь в какой-то точке (x_{-1}, y_{-1}) и заканчиваясь в точке (x_1, y_1)
Проведём вправо через точку (x_1, y_1) и влево через точку (x_{-1}, y_{-1}) полуотрезки поля, лежащие в G и заканчивающиеся в точках (x_2, y_2) и (x_{-2}, y_{-2}) соответственно, и так далее
Этот процесс можно продолжать любое конечное число шагов N, поскольку область G – открытое множество
График полученной таким образом непрерывной кусочно-линейной функции $y = \psi(x)$ называется ломаной Эйлера
Итак, установлено, что ломаная Эйлера лежит в области G, проходит через точку (x_0, y_0) и абсциссы её угловых точек равны x_j $(j = \overline{-N, N})$

Определение 4. *Рангом дробления* ломаной Эйлера назовём число, равное $\max\{\, x_j - x_{j-1} \,\}$.

Формула, реккурентно задающая ломаную Эйлера $y = \psi(x)$, иммеет вид: $\psi(x_0) = y_0$ и далее при $j = 0, 1, ..., N-1$ для любого $x \in (x_j, x_{j+1}]$ или при $j = 0, -1, ..., 1-N$ для любого $x \in [x_{j-1}, x_j)$

$$\psi(x) = \psi(x_j) + f\big(x_j, \psi(x_j)\big)(x - x_j) \tag{5}$$

В частности, при $j = 0$ отрезок ломаной Эйлера определён для любого $x \in [x_{-1}, x_1]$ и, делясь на два полуотрезка, проходит через точку (x_0, y_0) под углом, тангенс которого равен $f(x_0, y_0)$
Из формулы (5) вытекает, что для всякого $j = \overline{0, N-1}$ производная $\psi'(x) = f\big(x_j, \psi(x_j)\big)$ при $x \in (x_j, x_{j+1})$, а в точке x_{j+1} она не определна, как и в точках x_{j-1} при $j \le 0$
Доопределим $\psi'(x)$ в точках разрыва как левостороннюю производную при $x > x_0$ и как правостороннюю производную при $x < x_0$, положив

$$\psi'(x_j) = \psi'_{\mp}(x_j) \lim_{x\to x_j^{\mp 0}} \frac{\psi(x) - \psi(x_j)}{x - x_j} \qquad (j = \pm 1 ...., \pm N)$$

А при $j = 0$ существует полная производная $\psi'(x_0) = f(x_0, y_0)$
Таким образом, для любого $x \in (x_j, x_{j+1}]$ $(j = 0, 1, ..., N-1)$ или для любого $x \in [x_{j-1}, x_j)$ $(j = 0, -1, ..., 1-N)$, дифференцируя равенство (5) по x, получаем

$$\psi'(x) = f\big(x_j, \psi(x_j)\big), \qquad j \in \{\, 1-N, ..., N-1 \,\} \tag{6}$$

Покажем, что на некотором промежутке всегда можно построить функцию, график которой проходит через заданную точку области G, такую, что при подстановке этой функции в уравнение (1) окажется, что разность между левой и правой частями уравнения по модулю не превосходит любого сколь угодно малого наперёд заданного положительного числа

Определение 5. Для всякого $\varepsilon > 0$ непрерывная и кусочно-гладкая на отрезке $[a, b]$ функция $y = \psi(x)$ называется *ε-решением* уравнения (1) на $[a, b]$, если для любого $x \in [a, b]$ точка $\big(x, \psi(x)\big) \in G$ и

$$\big|\psi'(x) - f\big(x, \psi(x)\big)\big| \le \varepsilon \tag{7}$$

Лемма 3 (о ломаных Эйлера в роли ε-решения)**.** Для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ и для любого отрезка Пеано $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ имеем:

1. Для любого $\delta > 0$ на $\overline{P_h}$ можно построить ломаную Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления, не превосходящим δ, график которой лежит в прямоугольнике $\overline{R}$ из определения отрезка Пеано
2. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что всякая ломаная Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления, не превосходящим δ, является ε-решением уравнения (1) на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

Доказательство.

1. Для произвольной точки (x_0, y_0) из G построим прямоугольник $\overline{R} \subset G$ с центром в (x_0, y_0) и два лежащих в нём равнобедренных треугольника $\overline{T^-}, \overline{T^+}$ с общей вершиной в точке (y_0, x_0) и основаниями, параллельными оси ординат, как это было сделано при построении отрезка Пеано
   При этом зафиксируются константы a, b, M, h
   Выберем $\delta_* < \delta$ так, чтобы число $\frac{h}{\delta_*} =: N \in \mathbb{N}$
   Положим $x_{j+1} := x_j + \delta_*$ $(j = \overline{0, N-1})$, тогда $x_N = x_0 + h$
   Для всякого $x > x_0$ будем последовательно строить отрезки ломаной Эйлера $y = \psi(x)$ с узлами в точках x_j
   Для любого $j = 0, ..., N$ это сделать возможно, так как модуль тангенса укла наклона каждого отрезка равен $\big|f\big(x_j, \psi(x_j)\big)\big|$, а тангенсы углов наклона боковых сторон треугольника $\overline{T^+}$ по построению равны $\pm M$, где $M = \max|f(x, y)|$ на компакте $\overline{R}$
   Поэтому любой отрезок ломаной Эйлера, начиная с первого, не может пересечь боковую стенку $\overline{T^+}$, а значит, содержится в нём
   В результате для всех $x \in [x_0, x_0 + h]$ точка $\big(x, \psi(x)\big) \in \overline{T^+}$ и требуемая ломаная Эйлера построена на $[x_0, x_0 + h]$
   Для левого полуотрезка Пеано всё аналогично

2. Зафиксируем теперь произвольное положительное число ε
   Функция $f(x, y)$ непрерывна на компакте $\overline{R}$, следовательно, по теореме Кантора f равномерно непрерывна на нём. По определнию это занчит, что существует такое $\delta_1 > 0$, что для любых двух точек $(x'y')$ и (x'', y'') из прямоугольника $\overline{R}$ таких, что $|x' - x''| \le \delta_1$ и $|y' - y''| < \delta_1$, выполняется неравенство $|f(x', y') - f(x'', y'')| \le \varepsilon$
   Положим $\delta := \min\left\{\, \delta_1, \frac{\delta_1}{M} \,\right\}$ и покажем, что для любой ломаной Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления меньшим, чем δ на отрезке Пеано $\overline{P_h}(x_0, y_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$, справедливо неравенство (7):
   Возьмём любую точку x из отрезка Пеано, например справа от x_0
   Найдётся индекс $j \in \{\, 0, ..., N-1 \,\}$ такой, что $x \in (x_j, x_{j+1}]$, т. е. x_j – ближайшая к x левая угловая точка ломаной Эйлера
   Согласно (6)
   $$\psi'(x) - f\big(x, \psi(x)\big) = f\big(x_j, \psi(x_j)\big) - f\big(x, \psi(x)\big)$$
   Оценим близость аргументов функции f:
   По выбору δ и j имеем
   $$|x - x_j| \le \delta \le \delta_1, \qquad |\psi(x) - \psi(x_j)| \underset{(5)}{=\!=} \big|f\big(x_j, \psi(x_j)\big)\big| \cdot |x - x_j| \le M\delta \overset{\text{def}\,\delta}{\le} \delta_1$$
   Поэтому из равномерной непрерывности функции f вытекает, что
   $$\big|f(x_j, \psi(x_j)) - f\big(x, \psi(x)\big)\big| \le \varepsilon$$
   А значит, неравенство (7) из определения ε-решения выполняется на отрезке Пеано

□

5. Лемма Асколи–Арцела

Лемма 4 (Арцела-Асколи; о существовании равномерно сходящейся подпоследовательности). Из любой ограниченной и равностепенно непрерывной на $[a,b]$ последовательности функций $\{\, h_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить равномерно сходящуюся на $[a,b]$ подпоследовательность

Доказательство. Рациональные числа образуют счётное всюду плотное множество на любом промежутке вещественной прямой
Счётность множества рациональных чисел, расположенных на отрезке $[a,b]$ означает, что их можно перенумеровать: $r_1, r_2, ...$
В точке r_1 числовая последовательность $\{\, h_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ по предположению сходится, поэтому из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, т. е. существует такая последовательность натуральных чисел

$$n^{(1)} = \left\{\, n_i^{(1)} \,\right\}_{i=1}^{\infty}, \qquad n_i^{(1)} < n_{i+1}^{(1)}$$

что последовательность значений $\left\{\, h_{n_i^{(1)}}(r_1) \,\right\}_{i=1}^{\infty}$ сходится
В точке r_2 последовательность $\left\{\, h_{n_i}^{(1)}(r_2) \,\right\}_{i=1}^{\infty}$ также ограничена, и из неё можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, т. е. у последовательности индексов $n^{(1)}$ имеется такая подпоследовательность индексов $n^{(2)} = \left\{\, n_i^{(2)} \,\right\}_{i=1}^{\infty}$, что последовательность значений $\left\{\, h_{n_i^{(2)}}(r_2) \,\right\}_{i=1}^{\infty}$ тоже сходится. При этом она сходится и в точке r_1 как подпоследовательность сходящейся последовательности
Продолжаем этот процесс
Введём последовательность индексов $\left\{\, n_i^{(i)} \,\right\}_{i=1}^{\infty}$ $\quad (n_i^{(i)} < n_{i+1}^{(i)})$, где $n_i^{(i)}$ – i-й член подпоследовательности $n^{(i)}$
Функциональная подпоследовательность $\left\{\, h_{n_i}^{(i)}(x) \,\right\}_{i=1}^{\infty}$ сходится во всех рациональных точках $[a,b]$, поскольку в любой рациональной точке r_k последовательность $\left\{\, h_{n_i^{(k)}}(x) \,\right\}_{i=1}^{\infty}$ сходится по построению, а любая другая с меньшим верхним индексом является её подпоследовательностью
Покажем, что $\{\, h_{i_*}(x) \,\}_{i=1}^{\infty}$, где $i_* = n_i^{(i)}$ является искомой подпоследовательностью:
Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$
По условию леммы последовательность $\{\, h_{i_*}(x) \,\}_{i=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна, следовательно, по выбранному ε найдётся такое число $\delta > 0$, что

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \forall x', x'' \in [a,b] : \quad \left(|x' - x''| < \delta \implies |h_{i_*}(x') - h_{i_*}(x'')| \le \frac{\varepsilon}{3} \right)$$

По построению последовательность функций $\{\, h_{i_*}(x) \,\}_{i=1}^{\infty}$ сходится поточечно во всех рациональных точках r_k из $[a,b]$
Поэтому по выбранному ε для любого $k \in \mathbb{N}$ найдётся такой номер $N_{r_k} > 0$, что $|h_{i_*}(r_k) - h_{j_*}(r_k)| \le \varepsilon/3$ для любых $i_*, j_* > N_{r_k}$
Последовательность индексов $N_{r_1}, N_{r_2}, ...,$ – счётная, поэтому она может стремиться к бесконечности. Перейти к конечной подпоследовательности позволяет использование появившейся из определения равностепенной непрерывности универсальной константы δ и плотности множества рациональных чисел:
Разобьём отрезок $[a,b]$ на непересекающиеся промежутки, длина которых не превосходит δ. Пусть их окажется l штук
Множество рациональных чисел всюду плотно, поэтому в каждом промежутке можно выбрать по рациональному числу: $r_1^*, ..., r_l^*$
Пусть $N = \max\{\, N_{r_1^*}, ..., N_{r_l^*} \,\}$, где константы N_r взяты из определения поточечной сходимости последовательности $\{\, h_{i_*}(x) \,\}_{i=1}^{\infty}$
Возьмём произвольное число $x \in [a,b]$. Предположим, что оно попало в промежуток с номером p. Тогда для любых $i_*, j_* > N$ получаем:

$$|h_{i_*}(x) - h_{j_*}(x)| \overset{\Delta}{\le} |h_{i_*}(x) - h_{i_*}(r_p^*)| + |h_{i_*}(r_p^*) - h_{j_*}(r_p^*)| + |h_{j_*}(r_p^*) - h_{j_*}(x)| \le \varepsilon$$

так как $|x - r_p^*| \le \delta$ и верна оценка из определения равномерной сходимости
Итак, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое N, что для любых $i_*, j_* \ge N$ и $x \in [a,b]$ справедливо неравенство $|h_{i_*}(x) - h_{j_*}(x)| \le \varepsilon$ $\square$

Замечание. При выполнении условий леммы Арцела-Асколи она позволяет “объявить о рождении” функции $h(x)$, определённой на отрезке $[a, b]$ и предельной для некоторой подпоследовательности функций $h_n(x)$

При этом, по теореме Стокса-Зайделя предельная функция непрерывна на $[a, b]$

6. Ломаные Эйлера. Теорема Пеано о существовании внутреннего решения

Теорема 3. Пеано; о существовании внутреннего решения Пусть правая часть уравнения (1) непрерывна в области G

Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ и для любого отрезка Пеано $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ существует по крайней мере одно решение задачи Коши уравнения (1) с начальными данными $x_0, y_0)$, определённое на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

Доказательство. Возьмём произвольную точку (x_0, y_0) из области G и построим какой-либо отрезок Пеано $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

Выберем произвольную последовательность положительных чисел ε_n, стремящуюся к нулю при $n \to \infty$

Тогда по лемме об ε-решении для всякого n можно построить ломаную Эйлера $\psi_n(x)$, проходящую через точку (x_0, y_0), определённую на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ и являющуюся ε_n-решением уравнения (1) на отрезке $\overline{P_j}(x_0, y_0)$

Поэтому для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \overline{P_h}(x_0, y_0)$ точка $\Big(x, \psi_n(x)\Big) \in \overline{R}$ и выполняется неравенство (7) $|\psi_n'(x) - f\big(x, \psi_n(x)\big)| < \varepsilon_n$

Покажем, что последовательность ломаных Эйлера $\{\, \psi_n(x) \,\}_{n=1}^{\infty}$ на отрезке Пеано удовлетворяет лемме Арцела–Асколи

Последовательность $\{\, \psi_n(x) \,\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена, так как график любой функции $y = \psi_n(x)$ лежит в прямоугольнике $\overline{R}$, а значит, $|\psi_n(x)| \le |y_0| + b$ для любого $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$

Для доказательства равностепенной непрерывности зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$

Положим $\delta = {}^{\varepsilon}\!/_{M}$, где $M = \max\limits_{(x,y)\in\overline{R}} |f(x, y)|$

Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x', x'' \in \overline{P_h}(x_0, y_0)$ таких, что $|x'' - x'| \le \delta$, получаем:

$$|\psi_n(x'') - \psi_n(x')| = \left| \int_{x_0}^{x''} \psi_n'(s)\,\mathrm{d}\,s - \int_{x_0}^{x'} \psi_n'(s)\,\mathrm{d}\,s \right| = \left| \int_{x'}^{x''} \psi_n'(s)\,\mathrm{d}\,s \right| \underset{(6)}{\le}$$

$$\le \left| \int_{x'}^{x''} \max_{j=1-N,\ldots,N-1} \left| f\big(x, \psi_n(x_j)\big) \right| \mathrm{d}\,s \right| \le M|x'' - x'| \le M\delta = \varepsilon$$

Действительно, интегрируя кусочно-постоянную функцию $\psi'(x)$ по s от x_0 до x, для любого $x \in [x_{-N}, x_N]$ имеем: $\psi(x) = \psi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \psi'(s)\,\mathrm{d}\,s$, где

$$\int_{x_0}^{x} \psi(s)\,\mathrm{d}\,s = \sum_{k=0}^{j-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \psi'(s)\,\mathrm{d}\,s + \int_{x_j}^{x} \psi'(s)\,\mathrm{d}\,s, \qquad x \in (x_j, x_{j+1}], \quad j \in \{\, 0, \ldots, N-1 \,\}$$

$$\int_{x_0}^{x} \psi'(s)\,\mathrm{d}\,s = \sum_{k=j+1}^{-1} \int_{x_{k+1}}^{x_k} \psi'(s)\,\mathrm{d}\,s + \int_{x_{j+1}}^{x} \psi'(s)\,\mathrm{d}\,s, \qquad x \in [x_j, x_{j+1}), \quad j \in \{\, -N, \ldots, -1 \,\}$$

В результате последовательность ломаных Эйлера $\psi_n(x)$ удовлетворяет условиям леммы Арцела-Асколи, и из неё можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{\, \psi_{i_*}(x) \,\}_{i_*=1}^{\infty}$

Пусть $\psi_{i_*} \xrightarrow[i_* \to \infty]{x \in \overline{P_h}} \varphi(x)$

Тогда, согласно замечанию после леммы Арцела-Асколи функция $y = \varphi(x)$ непрерывна на отрезке Пеано

Поскольку $\psi_{i_*}(x)$ по построению является ε_{i_*}-решением, из неравенства (7) вытекает, что

$$\forall x \in \overline{P_h}(x_0, y_0) \quad \forall i_* \in \mathbb{N}: \quad \psi_{i_*}'(x) = f\big(x, \psi_{i_*}(x)\big) + \Delta_{i_*}(x), \qquad |\Delta_{i_*}(x)| \le \varepsilon_{i_*}$$

Интегрируя это равенство по s от x_0 до x получаем:

$$\psi_{i_*}(x) - \psi_{i_*}(x_0) = \int_{x_0}^{x} f\big(s, \psi_{i_*}(s)\big)\,\mathrm{d}\,s + \int_{x_0}^{x} \Delta_{i_*}(s)\,\mathrm{d}\,s \tag{8}$$

причём $\psi_{i_*}(x_0) = y_0$ и $\left|\int_{x_0}^{x} \Delta_{i_*}(s)\,\mathrm{d}\,s\right| \le \varepsilon_{i_*}|x - x_0| \xrightarrow[i_* \to \infty]{} 0$, так как $|x - x_0| \le h$

Кроме того, $f\big(s, \psi_{i_*}(s)\big) \overset{s \in \overline{P_h}}{\underset{i_* \to \infty}{\rightrightarrows}} f\big(s, \varphi(s)\big)$, поскольку любая точка $\big(s, \psi_{i_*}(s)\big) \in \overline{R}$ и $f(x,y)$ по теореме Кантора равномерно непрерывна на $\overline{R}$

Поэтому можно осуществить предельный переход под знаком интеграла:

$$\int_{x_0}^{x} f\big(s, \psi_{i_*}(s)\big)\,\mathrm{d}\,s \xrightarrow[i_* \to \infty]{} \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big)\,\mathrm{d}\,s$$

Переходя в обеих частях равенств (8) к пределу при $i_* \to \infty$, получаем тождество

$$\varphi(x) \overset{[x_0 - h, x_0 + h]}{\equiv} \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big)\,\mathrm{d}\,s$$

Поэтому, согласно лемме о записи решения в интегральном виде, предельная функция $y = \varphi(x)$ является решением ВЗК(x_0, y_0) уравнения (1) на отрезке Пеано $[x_0 - h, x_0 + h]$ $\square$

7. Теорема о существовании решения для одного из случаев U_1^+, O_1^+, $B_{1<}^+$, $B_{1=}^+$

Для упрощения обозначений и формул, используемых в дальнейшем при решении граничной задачи Коши, НУО будем считать, что задача всегда ставится в начале координат и функция f там равна нулю, т. е. уравнение (1) имеет вид

$$y' = f_0(x, y) \tag{9}$$

где функция f_0 определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G} = G \cup \widehat{G}$, точка $O = (0,0) \in \widetilde{G}$, $f_0(0,0) = 0$ и поставлена граничная задача Коши с начальными данными $0, 0$.

НУО будем считать, что выполняются условия:

$$\begin{cases} b_{a,u}^+(a) \le a \quad \text{при } \tau_u = 0 \\ \forall x \in [0, a] \quad {b_{a,u}^+}'(x) \ge \tau_u \quad \text{при } \tau_u > 0 \\ -b_{a,l}^+(a) \le a \quad \text{при } \tau_l = 0 \\ \forall x \in [0, a] \quad -{b_{a,l}^+}'(x) \ge \tau_l \quad \text{при } \tau_l > 0 \end{cases} \tag{10}$$

Во всех точках кривых $\gamma_{a,u}^+$ и $\gamma_{a,l}^+$ введём ограничения на функцию f_0 в случаях $U_1^{+,=}$, $O_{1,=}^+$, $B_{1,=}^{+,=}$, $B_{1,=}^{+,>}$ и $B_{1,<}^{+,=}$:

$$\forall x \in (0, a] \quad \begin{cases} f_0\big(x, b_{a,u}^+(x)\big) \le {b_{a,u}^+}'(x), & \text{если } {b_{a,u}^+}'(0) = 0 \\ f_0\big(x, b_{a,l}^+(x)\big) \ge {b_{a,l}^+}'(x), & \text{если } {b_{a,l}^+}'(0) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

означающие, что в любой точке $\gamma_{a,u}^+$ и $\gamma_{a,l}^+$ правый полуотрезок поля направлений уравнения (9) направлен внутрь или по границе области G.

Теорема 4 (о существовании решения граничной задачи Коши)**.** Предположим, что в уравнении (9) функция f_0 определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}$.
Тогда в каждом из случаев $(N_1^+), (U_1^{+,>}), (O_{1,<}^+), (B_{1,<}^{+,>})$ и в каждом из случаев $(U_1^{+,=}), (O_{1,=}^+)$, $(B_{1,=}^{+,=})$, $(B_{1,=}^{+,>}), (B_{1,<}^{+,=})$ при условиях (11) на любом правом граничном отрезке Пеано существует по крайней мере одно решение граничной задачи Коши с начальными данными $(0,0)$

Доказательство. Рассмотрим, например, случай $(B_{1,=}^{+,>})$
Согласно (10) (первые два неравенства) правая верхнеграничная функция $b_{a,u}^+(x)$, параметризующая кривую ${\gamma_{a_u,u}^+}'(x) \ge \tau_u$ для любого $x \in (0, a_u]$. А у правой нижнеграничной привой $\gamma_{a_l,l}^+$ константа $a_l = c_O$ в силу (10) (последние два нераенства)
Пусть $c_* := \min\{\, c_U, c_O \,\}$, тогда множество $B_{c_*}^+ \setminus \big(\gamma_{a_u,u}^+ \cup \gamma_{a_l,l}^+\big) \subset G$

Далее, для τ_u найдётся (по непрерывности f_0) такая δ_{τ_u}, что $|f_0(x,y)| \le \tau_u$ в любой точке δ_{τ_u}-окрестности начала координат, принадлежащей $\widetilde{G}$
Положим $\widetilde{c} := \min\{\, c_*, \delta_{\tau_u} \,\}$, тогда на множестве $B^+_{\widetilde{c}}$ для функции $|f_0|$ справедлива та же оценка
Построим теперь лежащий в $B^+_{\widetilde{c}}$ криволинейный треугольник $\overline{T^+_b}$, как это было сделано при описании случая $(B^{+,>}_{1,=})$. Его высота $h^+ = \widetilde{a}$
Поскольку отрезок оси абсцисс $[0, h^+]$ лежит в $\widetilde{G}$ и является отрезком поля направлений в точке $O \in \widehat{G}$, из точки O вправо можно начать строить ломаную Эйлера с проивольным рангом дробления
Ломаная Эйлера не может покинуть $\overline{T^+_b}$ через верхнюю боковую сторону, лежащую на прямой $y = \tau_u x$, так как в любой её точке $|f_0(x,y)| \le \tau_u$. Аналогично при попадании ломаной Эйлера при $x = x_* > 0$ на нижнюю боковую сторону, являющуюся частью правой нижнеграничной кривой $\gamma^+_{\widetilde{a},l}$, по условию (11) (второе неравенство) $f_0\big(x_*, b^+_{\widetilde{a},l}(x_*)\big) \ge b^+_{\widetilde{a}}{}'(x_*)$, а значит, при $x > x_*$ следующий отрезок ломаной будет либо лежать на $\gamma^+_{\widetilde{a},l}$, либо внутри треугольника в силу выпуклости $\gamma^+_{\widetilde{a},l}$. Поэтому ломаная Эйлера с произвольным выбранным рангом дробления может быть продолжена на весь правый граничный отрезок Пеано $[0, h^+]$
Дальше дословно повторяется доказательство теоремы Пеано.
Аналогичные рассуждения проводятся и в остальных случаях. □

8. Теорема об отсутствии решения граничной задачи Коши

Теорема 5 (об отсутствии решений граничной задачи Коши)**.** В каждом из случаев $(U^{+,>}_2)$, $(O^+_{2,<})$, $(B^{+,>}_{2,<})$, (N^+_2) граничная задача Коши с начальными данными $(0,0)$ не имеет решений в правой полуплоскости

Доказательство. Допустим, что в каждом случае из условия теоремы на некотором отрезке $[0,a]$ существует решение $y = \varphi(x)$ задачи Коши уравнения (9) с начальными данными $(0,0)$, т. е. $\varphi(0) = 0$. Тогда $\varphi'(0) = f_0\big(0, \varphi(0)\big) = 0$. Но график любого решения должен лежать в $\widetilde{G}$, а значит, располагаться не ниже правой верхнеграничной кривой, у которой в точке O тангенс угла наклона согласно (10) равен $2\tau_u > 0$, или не выше правой нижнеграничной кривой, имеющей в точке O тангенс угла наклона, равный $-2\tau_l < 0$. Поэтому $\varphi'(0) \ne 0$ – $\lightning$ □

9. Лемма о продолжимости решений на отрезок Пеано; лемма о верхнем и нижнем решениях

Лемма 5 (о продолжимости решений на отрезок Пеано)**.** Пусть $y = \varphi(x)$ – это решение внутренней задачи Коши с начальными данными x_0, y_0, определённое на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$.
Тогда любое другое решение уравнения (1) $y = \psi(x)$ этой же задачи Коши, определённое на промежутке $\langle a, b\rangle \subsetneq [x_0 - h, x_0 + h]$, продолжимо на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

Доказательство. Докажем, например, продолжимость решения $y = \psi(x)$ с $\psi(x_0) = y_0$ на правый полуотрезок Пеано:
Если $\langle a, b\rangle = \langle a, b)$ (т. е. $b \le x_0 + h$), то график решения $y = \psi(x)$ при $x \in [x_0, b)$ лежит в треугольнике $\overline{T^+}$, построенном для решения $y = \varphi(x)$. Поэтому у любой последовательности $x_k \in [x_0, b)$ и $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} b$ точки $\big(x + k, \psi(x_k)\big) \in \overline{T^+} \subset \overline{R}$, а значит, найдётся сходящаяся последовательность $\big(x_{k_l}, \psi(x_{k_l})\big)$. Её предел – точка $(b, \eta) \in \overline{T^+}$
Следовательно, по теореме о продолжимости решения (теор. 1) $y = \psi(x)$ продолжимо на $[x_0, b]$, хотя могло быть там сразу и задано

- Если теперь $b = x_0 + h$, то лемма доказана
- Пусть $b < x_0 + h$. Построим равнобедренный треугольник $\overline{T^+_1}$ с вершиной в точке (b, η), боковыми сторонами, имеющими тангенсы углов наклона $\pm M$, и основанием, лежащим на основании треугольника $\overline{T^+}$ с абсциссой $x_0 + h$. Тогда $\overline{T^+_1} \subset \overline{T^+}$ и по теореме Пеано на $[b, x_0 + h]$ существует решение задачи Коши с начальными данными (b, η), продолжающее $\psi(x)$ до точки $x_0 + h$ включительно.

□

10. Теорема о локальной единственности решения внутренней задачи Коши

Пусть $(x_0, y_0) \in G$, $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ – некий отрезок Пеано и $\{\, \chi_k(x) \,\}_{k=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность решений ЗК(x_0, y_0) уравнения (1), определённых на $[x_0 - h, x_0 + h]$

Утверждение 2. Для любых $k \in \mathbb{N}$, $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ функции

$$\chi_k^l(x) := \min\{\, \chi_1(x), ..., \chi_k(x) \,\}, \qquad \chi_k^u(x) := \max\{\, \chi_1(x), ..., \chi_k(x) \,\}$$

также являются решениями поставленной задачи на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

Доказательство. Действительно, эти функции удовлетворяют всем трём условиям из определения решения, поскольку для любого $x_* \in [x_0 - h, x_0 + h]$ найдётся такой индекс $1 \le \boldsymbol{j} \le k$, что, например, $\chi_k^l(x_*) = \chi_j(x_*)$, и если $\chi_j(x_*) = \chi_m(x_*)$, то $\chi_j'(x_*) = \chi_m'(x_*) = f\big(x_*, \chi_k^l(x_*)\big)$ □

Лемма 6 (о нижнем и верхнем решениях)**.** Существуют решения ЗК(x_0, y_0) $y = \chi^l(x)$ и $y = \chi^u(x)$ уравнения (1) такие, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [x_0 - h, x_0 + h] : \begin{cases} \chi^l(x) \le \chi_k^l(x) \\ \chi^u(x) \ge \chi_k^u(x) \end{cases} \tag{12}$$

Доказательство. Рассмотрим, например, последовательность решений $\{\, x_k^l(x) \,\}_{k=1}^{\infty}$ на отрезке $[x_0, x_0 + h]$. Поскольку все их графики лежат в треугольнике $\overline{T^+}$, полученном при построении отрезка Пеано, эта последовательность равномерно ограничена и равностепенно ограничена (см. док-во теоремы Пеано). Следовательно, по лемме Арцела-Асколи из неё можно выделить равномерно на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ сходящуюся подпоследовательность, предел которой тоже будет решением уравнения (1) на отрезке Пеано
Но последовательность $\chi_k^l(x)$ монотонно убывает, поэтому она сама будет сходиться к нижнему решению $y = \chi^l(x)$, для которого, очевидно, будет верно неравенство (12)
Рассуждения для отрезка аналогичны так же, как и доказательство сходимости функции $\chi_k^u(x)$ к верхнему решению $y = \chi^u(x)$ □

11. Лемма Гронуола

Лемма 7 (Гронуолла; об интегральной оценке функции сверху)**.** Пусть функция $h(x) \in \mathcal{C}\big(\langle a, b\rangle\big)$ и существуют такие $x_0 \in \langle a, b\rangle$, $\lambda \ge 0$, $\mu > 0$, что

$$\forall x \in \langle a, b\rangle \quad 0 \le h(x) \le \lambda + \mu \left| \int_{x_0}^{x} h(s) \,\mathrm{d}\, s \right| \tag{13}$$

Тогда для любого $x \in \langle a, b\rangle$ справедливо неравенство

$$h(x) \le \lambda e^{\mu|x - x_0|} \tag{14}$$

Доказательство.

- Предположим, что $x \ge x_0$
  Введём в рассмотрение функцию $g(x) = \int_{x_0}^{x} h(s) \,\mathrm{d}\, s$

  $$\Longrightarrow \quad g(x_0) = 0, \qquad g(x) \ge 0, \qquad g(x) \in \mathcal{C}^1\big([x_0, b\rangle\big), \qquad g'(x) = h(x) \ge 0$$

  Подставим $g(x)$ в (13):

  $$g'(x) \le \lambda + \mu g(x) \quad \Longrightarrow \quad g'(x) - \mu g(x) \le \lambda \quad \Longrightarrow \quad e^{-\mu(x - x_0)}\Big(g'(x) - \mu g(x)\Big) \le \lambda e^{-\mu(x - x_0)}$$

При этом,
$$\left(g(x)e^{-\mu(x-x_0)}\right)' = g'(x)e^{-\mu(x-x_0)} - \mu e^{-\mu(x-x_0)}g(x) = e^{-\mu(x-x_0)}\left(g'(x) - \mu g(x)\right)$$
Отсюда
$$\left(g(x)e^{-\mu(x-x_0)}\right)' \le \lambda$$
Проинтегрируем по s от x_0 до x:
$$g(x)e^{-\mu(x-x_0)} - \underbrace{g(x_0)}_{0} \le \lambda \int_{x_0}^{x} e^{-\mu(s-x_0)}\,\mathrm{d}\,s = -\frac{\lambda}{\mu}(e^{-\mu(x-x_0)} - 1)$$
Умножим на $e^{\mu(x-x_0)}$:
$$g(x) \le \frac{\lambda}{\mu}(e^{\mu(x-x_0)} - 1)$$
Подставим в (13):
$$h(x) \le \lambda + \mu g(x) \le \lambda e^{\mu(x-x_0)}$$
Таким образом, неравенство доказано для всех $x \in [x_0, b\rangle$

- Если $x \le x_0$, то в (13)
$$h(x) \le \lambda - \mu \int_{x_0}^{x} h(s)\,\mathrm{d}\,s, \qquad g(x) \le 0$$
Дальнейшее доказательство аналогично

$\square$

Следствие. Если $\lambda = 0$, то есть
$$0 \le h(x) \le \mu \left| \int_{x_0}^{x} h(s)\,\mathrm{d}\,s \right|$$
то $h(x) \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} 0$

12. Условия Липшица; теорема о множестве единственности

Определение 6. Функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y глобально на множестве $D \subset \mathbb{R}^2$, если
$$\exists\, L > 0 : \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2| \tag{15}$$

Обозначение. $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(D)$

Определение 7. Функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y локально на множестве $\widetilde{G}$, если для любой точки $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ найдётся замкнутая c-окрестность $\overline{B}_c(x_0, y_0)$ такая, что функция f удовлетворяет условию Липшица по y глобально на множестве $U_c = \widetilde{G} \cap \widetilde{B}_c(x_0, y_0)$

Обозначение. $y \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(\widetilde{G})$

Теорема 6 (о множестве единственности)**.** Пусть в уравнении (1) функция $f(x, y)$ опредлена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}$ и удовлетворяет условию Липшица по y локально на множестве $\widetilde{G^\circ} = G^\circ \cup \widehat{G^\circ}$, где $G^\circ \subseteq G$ – область, а $\widehat{G^\circ} \subset \partial G^\circ \cap \widehat{G}$.
Тогда $\widetilde{G^\circ}$ – множество единственности для уравнения (1).

Доказательство. Возьмём любую точку (x_0, y_0) из множества $\widetilde{G^\circ}$ и покажем, что она является точкой единственности.
Поскольку $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(\widetilde{G^\circ})$, найдутся $\overline{B}_c(x_0, y_0)$ и $L > 0$ такие, что $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(U_c)$ с константой L, где

$U_c = \widetilde{G^\circ} \cap \overline{B}_c(x_0, y_0)$

- Если $(x_0, y_0) \in G^\circ$, то найдётся $c > 0$ такое, что $U_c = \overline{B}_c(x_0, y_0)$, решение ЗК$(x_0, y_0)$ существует на некотором интервале $(a, b) \ni x_0$ и для любого решения этой задачи, уменьшая при необходимости (a, b), можно добиться, чтобы его график лежал в U_c
- Пусть $(x_0, y_0) \in \widehat{G^\circ}$
  - Если решение ЗК(x_0, y_0) отсутсвует, то (x_0, y_0) – это точка единственности по определению
  - Пусть решение существует на некотром промежутке $\langle a, b\rangle$ таком, что $x_0 \in \langle a, b\rangle \subset [x_0 - c, x_0 + c]$

Утверждение 3. Тогда, уменьшая $\langle a, b\rangle$ при необходиости можно добиться, чтобы график решения лежал в U_c

Доказательство. Действительно, очевидно, что с уменьшением $\langle a, b\rangle$ график решения попадает в $\overline{B}_c(x_0, y_0)$. А ситуация, когда при $x < x_0$ и (или) $x > x_0$ график, оставаясь в $\widetilde{G}$, не принадлежит $\widetilde{G^\circ}$, преодолевается за счёт выбора константы $c_1 > c$ такой, что в $\overline{B}_{c_1}(x_0, y_0)$ юудет выполняться глобальное условие Липшица с константой, скажем, $L_1 := L + 1$. В результате с учётом непрерывности функции $f(x, y)$ бласть $\widetilde{G^\circ}$ увеличиться, включив в себя дугу интегральной кривой в малой окрестности точки (x_0, y_0) $\square$

Рассмотрим любые два решения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ ЗК(x_0, y_0), которые определены по крайней мере на некотором общем промежутке $\langle \alpha, \beta\rangle$ таком, что $x_0 \in \langle \alpha, \beta\rangle \subset [x_0 - c, x_0 + c]$
Как установлено выше, уменьшая при необходимости $\langle \alpha, \beta\rangle$, можно добиться, чтобы для всякого $x \in \langle \alpha, \beta\rangle$ точки $\big(x, \varphi_1(x)\big), \big(x, \varphi_2(x)\big) \in U_c$
По лемме о записи решения в интегральном виде для любого $x \in \langle \alpha, \beta\rangle$ справедливо

$$\varphi_j(x) = \varphi_j(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi_j(s)\big)\, \mathrm{d}\, s, \qquad j = 1, 2$$

Поэтому

$$\varphi_2(x) - \varphi_1(x) = \int_{x_0}^{x} \Big(f\big(s, \varphi_2(s)\big) - \big(s, \varphi_1(s)\big)\Big)\, \mathrm{d}\, s$$

точки $\big(s, \varphi_j(s)\big) \in U_c$ и для них выполнено неравенство (15). Тогда

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \le \left|\int_{x_0}^{x} \big|f\big(s, \varphi_2(s)\big) - f\big(s, \varphi_1(s)\big)\big|\, \mathrm{d}\, s\right| \le \left|\int_{x_0}^{x} L\big|\varphi_2(s) - \varphi_1(s)\big|\, \mathrm{d}\, s\right|$$

К последнему неравенству можно применить следствие к лемме Гроноулла (лемма 7), где $h(x) = |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)|, \quad \lambda = 0, \quad \mu = L$
Тогда $|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \overset{\langle \alpha, \beta\rangle}{\equiv} 0$, т. е. решения $y = \varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ ЗК(x_0, y_0) совпадают в каждой точке $\langle \alpha, \beta\rangle \ni x_0$. Поэтому по определению (x_0, y_0) – это точка единственности $\square$

13. Теорема Осгуда

Теорема 7 (Осгуда; о единственности в области; сильная)**.** Пусть в уравнении (1) функция $f(x, y)$ непрерывна в области G и

$$\forall\ (x, y_1), (x, y_2) \in G \quad |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \le h\big(|y_2 - y_1|\big) \tag{16}$$

где функция $h(s)$ определена, непрерывна и положительна для всякого $s \in (0, +\infty)$ и

$$\int_{\varepsilon}^{a} h^{-1}(s)\, \mathrm{d}\, s \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \infty, \qquad a > \varepsilon > 0$$

Тогда G – это область единственности для уравнения (1).

Доказательство. Без доказательства $\square$

14. Область существования общего решения, лемма о поведении в ней решений, формула общего решения

Опишем множество A^*, в котором можно построить общее решение, поскольку гарантировать его существование во всей области единственности G° нельзя, какой бы малой она ни была
В этом параграфе в роли A^* будет выступать вводимый ниже компакт $\overline{A}$

Алгоритм (построения $\overline{A}$). Пусть G° – область единственности для уравнения (1).
Возьмём любую точку $(x_0^*, y_0^*) \in G^\circ$
Поскольку G° является открытым множеством, существует такое $\delta > 0$, что $\overline{B}_{2\delta}(x_0^*, y_0^*) \subset G^\circ$
Пусть числа y_1, y_2 таковы, что

$$\begin{cases} 0 < y_0^* - y_1 < \delta \\ 0 < y_2 - y_0^* < \delta \end{cases}$$

и найдётся отрезок $[a, b] \ni x_0^*$ такой, что графики решений ЗК(x_0^*, y_1) $y = \varphi_1(x)$ и ЗК(x_0^*, y_2) $y = \varphi_2(x)$ лежат в $\overline{B}_c$ при $x \in [a, b]$. Тогда в $\overline{B}_\delta$ содержится компакт

$$\overline{A} = \{\, (x, y) \mid a \le x \le b, \quad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \,\} \tag{17}$$

При этом A (то же самое, со строгими неравенствами) – это область, так как по построению $\varphi_1(x_0^*) = y_1 < y_2 = \varphi_2(x_0^*)$, а значит, $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ для всякого $x \in [a, b]$, поскольку в области единственности G° дуги интегральных кривых не могут соприкасаться и разбивать A на несвязные подмножества

Лемма 8 (о поведении решений на компакте $\overline{A}$). Для любой точки $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ решение ЗК$_{(1)}(x_0, y_0)$ $y = \varphi(x)$ продолжимо на отрезок $[a, b]$

Доказательство. Для любой точки $(x_0^*, y_0^*) \in G^\circ$ построим компакт $\overline{A}$ вида (17), тогда $\overline{A} \subset \overline{B}_\delta \subset \overline{B}_{2\delta} \subset G^\circ$
Возьмём произвольную точку $(x_0, y_0) \in \overline{A}$. Тогда прямоугольник

$$\overline{R} \coloneqq \{\, (x, y) \mid |x - x_0| \le \delta, \quad |y - y_0| \le \delta \,\} \quad \subset \overline{B}_{2\delta}$$

Пусть $M \coloneqq \max_{\overline{B}_{2\delta}} |f(x, y)| > 0$ (при $M = 0$ лемма очевидна)
Положим $h \coloneqq \min\left\{ \delta, {}^{\delta}\!/\!_{M} \right\}$. Тогда $P_h(x_0, y_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$ – отрезок Пеано, построенный для произвольной точки $(x_0, y_0) \in \overline{A}$
Следовательно, по теореме Пеано решение ЗК(x_0, y_0) $y = \varphi(x)$ определено на отрезке Пеано $[x_0 - h, x_0 + h]$, длина которого неизменна для всех точек $(x_0, y_0) \in \overline{A}$

- Рассмотрим функцию $\varphi(x)$ при $x > x_0$:
  - Если $x_0 + h < b$, то $\varphi_1(x_0 + h) \le \varphi(x_0 + h) \le \varphi_2(x_0 + h)$, а значит, точка $x_0 + h$, $\big(x_0 + h, \varphi(x_0 + h)\big)$
    Выбрав эту точку в качестве начальной, решение $y - \varphi(x)$ можно продолжить вправо на полуотрезок Пеано $[x_0 + h, x_0 - h]$
    * Если $x_0 + 2h \ge b$, то лемма доказана
    * Иначе сделаем очередное продолжение решения вправо на длину h
      В результате за конечное число шагов будет продолжено вправо до точки b включительно
- Аналогично $y = \varphi(x)$ можно продолжить влево до точки a

□

Для любой точки $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ обозначим через $y = y(x, x_0, y_0)$ решение ЗК$_{(1)}(x_0, y_0)$
Тогда $y(x_0, x_0, y_0) = y_0$, и по лемме о поведении решений на компакте (лемма 8) решение $y = (x, x_0, y_0)$ определено для всякого $x \in [a, b]$
Для произвольной точки $\zeta \in [a, b]$ рассмотрим функцию

$$\varphi(xC) = y(x, \zeta, C), \qquad (\zeta, C) \in \overline{A} \tag{18}$$

на прямоугольнике $\overline{Q} = \overline{Q}_{\overline{A}} \coloneqq \{\, (x, C) \mid a \le x \le b, \quad \varphi_1(\zeta) \le C \le \varphi_2(\zeta) \,\}$, который является частным случаем множества Q_{A^*} из определения общего решения.
В самом деле, $\varphi_1(\zeta) \le C \le \varphi_2(\zeta)$ по построению $\overline{A}$. А по лемме решение $y = y(x, \zeta, C)$ определено для любого $x \in [a, b]$ и при $x = \zeta$ по определению решения ЗК $\varphi(\zeta, C) = y(\zeta, \zeta, C) = C$

15. Теорема о существовании общего решения

Теорема 8 (о существовании общего решения). Введённая в формуле (18) функция $y = \varphi(x, C)$ является общим решением уравнения (1) на компакте $\overline{A}$ из (17), построенном в окрестности произвольной точки из области единственности G°

Доказательство. Покажем, что функция $y = \varphi(x, C)$ удовлетворяет определению общего решения уравнения (1):

1. Возьмём произвольную точку $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ и рассмотрим уравнение $y_0 = \varphi(x_0, C)$ или согласно (18) уравнение
$$y_0 = y(x_0, \zeta, C) \tag{19}$$
Наличие у него решения $C = C_0$ фактически означает, что "выпущенное" из точки $(\zeta, C_0) \in \overline{A}$ решение уравнения (1) в момент x_0 попадает в точку $(x_0, y_0) \in \overline{A}$
Покажем, что решение уравнения (19) сущетсувует и единственно:
"Выпустим" из точки (x_0, y_0) решение $y = y(x, x_0, y_0)$, которое по лемме 8 определено на всём отрезке $[a, b]$ и, в частности, при $x = \zeta \in [a, b]$ по определению (18)
Пусть $C_0 = y(\zeta, x_0, y_0)$. Тогда (ζ, C) – это точка единственности, так как принадлежит графику решения $y = y(x, x_0, y_0)$
Поэтому решение ЗК(ζ, C) $y = u(x, \zeta, C_0)$ с начальными данными ζ, C_0 по лемме о поведении решений на компакте $\overline{A}$ (лемма 8) продолжимо на $[a, b]$ и совпадает с решением $y = y(x, x_0, y_0)$
Следовательно, $y_0 = y(x_0, \zeta, C)$, т. е. график функции $y = y(x, \zeta, C_0)$ проходит через точку (x_0, y_0). Другими словами, дуга интегральной кривой, проходящая через точки (x_0, y_0), (ζ, C_0), имеет на отрезке $[a, b]$ две параметризации $y = y(x, x_0, y_0)$ и $y = (x, \zeta, C_0)$
Итак, установлено, что уравнение (19) имеет единственное решение $C = C_0 = y(\zeta, x_0, y_0)$, т. е. $y_0 = y\big(x_0, \zeta, y(\zeta, x_0, y_0)\big)$

2. Функция $y = \varphi(x, C_0)$ является решением ЗК$_{(1)}(x_0, y_0)$, поскольку согласно (18) и (19) $\varphi(x_0, C_0) = y(x_0, \zeta, C_0) = y_0$

3. Осталось доказать, что функция $y = \varphi(x, C)$ из (18) непрерывна на компакте $\overline{Q}$ по совокупности переменных:

   - Поскольку для всякого $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ функция $y = \varphi(x, C)$ – это решение уравнения (1), она непрерывна по x при $x \in [a, b]$
   - Покажем, что для всякого $x \in [a, b]$ функция $y = \varphi(x, C)$ непрерывна по C при $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$:
   Допуская **противное**, предположим, что найдутся $\widetilde{\varepsilon} > 0$, $\widetilde{x} \in [a, b]$ и последовательность $C_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \widetilde{C}$, $C_k \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ такие, что $\big|\varphi(\widetilde{x}, C_k) - \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C})\big| \geq \widetilde{\varepsilon}$ при всех $k \geq 1$. Это значит, что при $x = \widetilde{x}$ функция $\varphi(\widetilde{x}, C)$ терпит разрыв в точке $\widetilde{C} \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$, поскольку любой компакт, в частности отрезок $[\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$, содержит все свои предельные точки. В этом случае, кстати, $\widetilde{x} \neq \zeta$, так как по определению $\varphi(\zeta, C_k) = C_k \xrightarrow[k\to\infty]{} C = \varphi(\zeta, C)$
   Выпуская из точек $(\zeta, C_k) \in \overline{A}$ дуги интегральных кривых, получаем последовательность решений $y = y(x, \zeta, C_k) = \varphi(x, C_k)$. Поскольку из любой сходящейся последовательности можно выдулить монотонную подпоследовательность, НУО считаем, что последовательность C_k монотонно возрастает, т. е. $C_k < C_{k+1} < \widetilde{C}$ для любого $k \geq 1$
   В области G° интегральные кривые не имеют общих точек, поэтому последовательность $\varphi(\widetilde{x}, C_k)$ тоже монотонно возрастает и ограничена, так как $\varphi(\widetilde{x}, C_k) \leq \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C}) - \widetilde{\varepsilon}$ по предположению. Но любая ограниченная монотонная последовательность имеет предел
   Пусть $\widetilde{y} = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi(\widetilde{x}, C_k)$, тогда $\widetilde{y} \leq \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C}) - \widetilde{\varepsilon}$
   Выберем произвольную точку y^* из интервала $\big(\widetilde{y}, \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C})\big)$
   Рассмотрим определённое на $[a, b]$ решение ЗК$(\widetilde{x}, y^*)$, обозначаемое $y = y(x, \widetilde{x}, y^*)$
   Пусть $C^* = y(\zeta, \widetilde{x}, y^*)$. Тогда $C^* < \widetilde{C}$, так как $y^* < \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C}) = y(\widetilde{y}, \zeta, \widetilde{C})$
   Дугу интегральной кривой решения $y = y(x, \widetilde{x}, y^*)$ на $[a, b]$, как было установлено, параметризует также решение с начальными данными ζ, C^*, имеющее согласно формуле (18) вид $y = \varphi(x, C^*)$, причём $\varphi(\widetilde{x}, C^*) = y^*$
   Однако существует индекс k^* такой, что член C^{k*} сходящейся к $\widetilde{C}$ последовательности C_k будет больше, чем C^*

В результате получилось так, что дуги интегральных кривых решений $y = \varphi(x, C_{k*})$ и $y = \varphi(x, C^*)$ пересекаются в некоторой точке x^*, лежащей между ζ и $\widetilde{x}$, поскольку $\varphi(\zeta, C_{k*}) = C_{k*} > C^* = \varphi(\zeta, C^*)$, а $\varphi(\widetilde{x}, C_{k*}) < \widetilde{y} < y^* = y(\widetilde{x}, \zeta, C^*) = \varphi(\widetilde{x}, C^*)$ – $\lightning$ с тем, что G – область единственности

Итак, доказано, что функция $y = \varphi(x, C)$ непрерывна по каждой из переменных в прямоугольнике $\overline{Q}$. Но этого недостаточно для её непрерывности по совокупности переменных
Воспользуемся ещё одним свойством функции φ:
Поскольку $y = \varphi(x, C)$ при любой константе $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ есть решение уравнения (1), то $\frac{\partial\varphi(x,C)}{\partial x} \equiv f\big(x, \varphi(x, C)\big)$ на $[a, b]$
Но $\big(x, \varphi(x, C)\big) \in \overline{A}$, когда точка $(x, C) \in \overline{Q}$, а на компакте $\overline{A}$ выполняется неравенство $|f(x, y)| \leq M$. Следовательно, функция $\left|\frac{\partial\varphi(x,C)}{\partial x}\right|$ ограничена на $[a, b]$
С учётом теоремы Лагранжа заключаем, что для любой константы $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi(\zeta)]$ и для любых $x_1, x_2 \in [a, b],\ x_1 < x_2$ найдётся такое $x_C \in (x_1, x_2)$, что $\varphi(x_2, C) - \varphi(x_1, C) = \frac{\partial\varphi(x_C,C)}{\partial x}(x_2 - x_1)$
Этого достаточно, чтобы непрерывность функции $y = \varphi(x, C)$ по x на $[a, b]$, равномерная относительно $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ в силу признака Вейрештрасса с $\delta = {}^{\varepsilon}\!/\!_{M}$, стала очевидной
Последнее свойство функции φ наряду с её поточечной непрерывностью по C гранатирует непрерывность $\varphi(x, C)$ по совокупности переменных в прямоугольнике $\overline{Q}$
Действительно, возьмём произвольную точку $(x_0, C_0) \in \overline{Q}$ и покажем, что функция $\varphi(x, C)$ непрерывна в этой точке:
Для этого зафиксируем любое число $\varepsilon > 0$. Тогда в силу непрерывности функции φ по C найдётся такое $\delta_{x_0} > 0$, что

$$\forall C \quad \left(|C - C_0| < \delta_{x_0} \implies |\varphi(x_0, C) - \varphi(x_0, C_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

А из равномерной непреывности $\varphi(x, C)$ по x относительно C вытекает, что

$$\exists\, \delta_0 > 0: \quad \forall C \in [x\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)] \quad \forall x \quad \left(|x - x_0| < \delta_0 \implies |\varphi(x, C) - \varphi(x_0, C)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Выберем число $\delta \coloneqq \min\{\, \delta_{x_0}, \delta_0 \,\}$, тогда для любой точки (x, C) получаем:

$$\|(x, C) - (x_0, C_0)\| \coloneqq \max\{\ |\ x - x_0|, |C - C_0|\ \} < \delta$$

Следовательно,

$$|\varphi(x, C) - \varphi(x_0, C_0)| \overset{\triangle}{\leq} |\varphi(x, C) - \varphi(x_0, C)| + |\varphi(x_0, C) - \varphi(x_0, C_0)| = \varepsilon$$

□

16. Формула общего решения, теорема о дифференцируемости общего решения

Определение 8. Общее решение $y = \varphi(x, C)$, определённое формулой (18), будем называть общим решением в форме Коши или классическим общим решением уравнения первого порядка (1).

Теорема 9 (о дифференцируемости общего решения)**.** Пусть на компакте $\overline{A}$ из (17) при некотором $\zeta \in [a, b]$ формула (18) задаёт общее решение $y = \varphi(x, C)$, и в уравнении (1) $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема по y в некоторой окрестности $\overline{A}$

$$\implies \quad \forall (x, C) \in \overline{Q}: \quad \frac{\partial\varphi(x, C)}{\partial x} = \exp\left(\int_\zeta^x \frac{\partial f\big(t, \varphi(t, C)\big)}{\partial y}\, \mathrm{d}\, t\right) \tag{20}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольным образом константу $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$, после чего для всякого $x \in [a, b]$ положим $\Delta\varphi = \varphi(x, C + \Delta C) - \varphi(x, C)$, где ΔC – приращение аргумента C
Поскольку при фиксированной C функция $y = \varphi(x, C)$ является решением уравнения (1), справедлива

цепочка равенств:

$$\frac{\mathrm{d}(\Delta\varphi)}{\mathrm{d}\,x} = f\Big(x, \varphi(x, C+\Delta C)\Big) - f\Big(x, \varphi(x, C)\Big) = \int_0^1 \mathrm{d}\left(f\big(x, \varphi(x,) + \Delta\varphi\cdot s\big)\right) =$$

$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\, f\Big(x, \varphi(x, C) + \Delta\varphi\cdot s\Big)}{\mathrm{d}\, s}\,\mathrm{d}\, s = p(x, \Delta C)\Delta\varphi, \qquad p(x, \Delta C) := \int_0^1 \frac{\partial f\Big(x, \varphi(x, C) + \Delta\varphi\cdot s)}{\partial y}\,\mathrm{d}\, s$$

- Пусть $\Delta C \neq 0$, тогда, поделив первое и последнее выражение в цепочке на ΔC, убеждаемся, что функция $\psi(x, \Delta C) := \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta C}$ является решением ЗК$(\zeta, 1)$ линейного однородного уравнения $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = p(x, \Delta C)u$, так как

$$\psi(\zeta, \Delta C) = \frac{\varphi(\zeta, C+\Delta C) - \varphi(\zeta, C)}{\Delta C} \underset{(18)}{=\!=} \frac{C+\Delta C - C}{\Delta C} = 1$$

  Следовательно, $\psi(x, \Delta C) = \exp\left(\int_\zeta^x p(t, \Delta C)\,\mathrm{d}\, t\right)$

- Но $p(x, \Delta C)$ существует и при $\Delta C = 0$:

$$p(x, 0) = \frac{\partial f\Big(x, \varphi(x, C)\Big)}{\partial y}$$

Поэтому

$$\frac{\partial\varphi(x, C)}{\partial C} = \lim_{\Delta C\to 0}\psi(x, \Delta C) = \exp\left(\lim_{\Delta C\to 0}\int_\zeta^x p(t, \Delta C)\,\mathrm{d}\, t\right)$$

В результате частная производная общего решения $y = \varphi(x, C)$ по C существует, непрерывна и вычисляется по формуле (20) □

Часть II

Уравнения первого порядка в симметричной форме

Ааа! Симметричные дифуры!

$$M(x, y)\,\mathrm{d}\, x + N(x, y)\,\mathrm{d}\, y = 0 \tag{21}$$

17. Определение интеграла, теорема о характеристическом свойстве интеграла

Определение 9. Непрерывную в области $B \subset \mathbb{R}^2$ функцию $U(x, y)$ будем называть допустимой, если для любой точки $(x_0, y_0) \in B$ найдётся такая непрерывная функция $y = \xi(x)$ или $x = \eta(y)$, определённая на интервале (α, β), содержащем точку x_0 или y_0, что:

1. $y_0 = \xi(x_0)$ или $x_0 = \eta(y_0)$
2. точка $\big(x, \xi(x)\big) \in B$ для любого $x \in (\alpha, \beta)$ или
   точка $\big(\eta(y), y\big) \in B$ для любого $y \in (\alpha, \beta)$
3. $y = \xi(x)$ или $x = \eta(y)$ – единственное решение уравнения

$$U(x, y) = U(x_0, y_0) \tag{22}$$

Замечание. Условие 3 означает, что выполняется по крайней мере одно из тождеств:

$$\left[\begin{array}{l} U\big(x,\xi(x)\big) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} U(x_0,y_0) \\ U\big(\eta(y),y\big) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} U(x_0,y_0) \end{array}\right.$$

Теорема 10 (о характеристическом свойстве интеграла)**.** Для того чтобы допустимая функция $U(x,y)$ была интегралом уравнения в симметричной форме (21) в области единственности B°, **необходимо и достаточно**, чтобы $U(x,y)$ обращалась в постоянную вдоль любого решения (21), т. е. чтобы:

- $U\big(x,\varphi(x)\big) \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} C$ для любого решения $y=\varphi(x)$, определённого на $\langle a,b\rangle$
- $U\big(\psi(y),y\big) \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} C$ для любого решения $x=\varphi(y)$, определённого на $\langle a,b\rangle$

Доказательство.

- Необходимость:
  Пусть $U(x,y)$ – интеграл уравнения (21) в области единственности B°, и пусть, например, $y=\varphi(x)$ – какое-либо решение уравнения (21), определённое на промежутке $\langle a,b\rangle$
  НУО[1]будем считать, что $\langle a,b\rangle=(a,b)$
  Возьмём произвольную точку $x_0\in(a,b)$ и положим $y_0 \coloneqq \varphi(x_0)$
  Точка $(x_0,y_0)\in B^\circ$, поэтому по определению допустимой функции уравнение (22) $U(x,y)=U(x_0,y_0)$ однозначно разрешимо или относительно x, или относительно y:
  - Пусть (22) однозначно разрешимо относительно y, т. е. существует такая единственная функция $y=\xi(x)$, заданная на некотором $(\alpha,\beta)\ni x_0$, что $U\big(x,\xi(x)\big) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} U(x_0,y_0)$
    Эта функция по опреелению интеграла является решением $\text{ЗК}_{(21)}(x_0,y_0)$
    Поскольку B° – область единственности, $\varphi(x) \overset{(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})}{\equiv} \xi(x)$, где $(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})=(a,b)\cap(\alpha,\beta)$. Следовательно,
    $$U\big(x,\varphi(x)\big) \overset{(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})}{\equiv} U(x_0,y_0) \tag{23}$$
  - Пусть (22) однозначно разрешимо относительно x, т. е. на некотором интервале $(\alpha,\beta)\ni y_0$ существует единственная функция $x=\eta(y)$ такая, что $\eta(y_0)=x_0$ и $U\big(\eta(y),y\big)\equiv U(x_0,y_0)$ на (α,β)
    Тогда по определению интеграла $x=\eta(y)$ на (α,β) является решением $\text{ЗК}_{(21)}(y_0,x_0)$, а значит, единственное решение этой ЗК имеет два представления: $y=\varphi(x)$ и $x=\eta(y)$. Поэтому дуга интегральной кривой такого решения в некоторой окрестности точки (x_0,y_0), не имея вертикальных и горизонтальных касательных, может быть параметризована как функцией $y=\varphi(x)$, так и функцией $x=\eta(x)$
    Иными словами, сущетвуют такие интервалы $(\widetilde{a},\widetilde{b})$ и $(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})$, что
    $$x_0\in(\widetilde{a},\widetilde{b})\subset(a,b),\quad y_0\in(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})\subset(\alpha,\beta),\qquad y \overset{(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})}{\equiv} \varphi\big(\eta(y)\big),\quad x \overset{(\widetilde{a},\widetilde{b})}{\equiv} \eta\big(\varphi(x)\big)$$
    Поэтому справедлива доказывающая (23) цепочка равенств:
    $$U\big(x,\varphi(x)\big) \overset{)\widetilde{a},\widetilde{b}}{\equiv} U\Big(\eta\big(\varphi(x)\big),\varphi(x)\Big) \overset{(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})}{\equiv} U\big(\eta(y),y\big) \overset{(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})}{\equiv} U(x_0,y_0)$$
  - Осталось показать, что (23) выполняется на всём интервале (a,b):
    Допустим, что $\widetilde{\beta}<b$ и найдутся такие $x_1,x_2\in[\widetilde{\beta},b)$, $(x_1<x_2)$, что $U\big(x,\varphi(x)\big) \overset{(\widetilde{\alpha},x_1]}{\equiv} U(x_0,y_0)$, $\quad U\big(x,\varphi(x)\big)\neq U(x_0,y_0)$ для любого $x\in(x_1,x_2)$
    При $y_1=\varphi(x_1)$ в последнем тождестве $U(x_1,y_1)=U(x_0,y_0)$. По определению решения точка $(x_1,y_1)\in B^\circ$, поэтому для неё верны все рассуждения, касающщиеся точки (x_0,y_0)
    Пусть $y=\xi_1(x)$ – единственное на (α_1,β_1), $\Big(x_! \in (\alpha_1,\beta_1)\subset(x_0,x_2)\Big)$ решение уравнения $U(x,y)=U(x_1,y_1)$, т. е. $U\big(x,\xi_1(x)\big)\equiv U(x_1,y_1)$ на (α_1,β_1), и оно же по определению интеграла является единственным решением $\text{ЗК}(x_1,y_1)$. Тогда $\xi_1(x)\equiv\varphi(x)$ на (α_1,β_1), и

$U\big(x,\varphi(x)\big) \overset{[x_1,\beta_1)}{\equiv} U(x_1,y_1) = U(x_0,y_0)$ – $\lightning$
Ситуация с точками $x_1, x_2 \in (a, \widetilde{\alpha}]$ рассматривается аналогично

– Достаточность:
Пусть допустимая функция $U(x,y)$ обращается в постоянную на любом решении уравнения (21). Покажем, что в таком случае $U(x,y)$ – интеграл этого уравнения в области единстненности B°
Возьмём произвольную точку $(x_0,y_0) \in B^\circ$. Тогда существует единственное решение ЗК(x_0,y_0) вида $y=\varphi(x)$ на $(a,b) \ni x_0$, или $x=\psi(y)$ на $(a,b) \ni y_0$
Пусть, например, $x=\psi(y)$ является решением уравнения (21). Тогда по условию теоремы $U\big(\psi(y),y\big) \equiv U(x_0,y_0)$ на (a,b)
Если функция $U(x,y)$, будучи допустимой, однозначно разрешима относительно x, т. е. на некотором $(\alpha,\beta) \ni y_0$ существует и единственна функция $x=\eta(y)$ такая, что $U\big(\eta(y),y\big) \equiv U(x_0,y_0)$ на (α,β), то $\psi(y) \equiv \eta(y)$ на $(a,b) \cap (\alpha,\beta)$. А если уравнение (22) однозначно разрешимо относительно y, то можно показать, как и при доказательстве необходимости, что функция $y=\xi(x)$ – решение уравнения (21), поскольку является обратной к решению $x=\psi(y)$
В результате допустимая функция $U(x,y)$ – это интеграл уравнения (21) в области единственности B°

$\square$

Действительно, если $\langle a,b\rangle = [a,b]$, то по лемме о продолжимости решения, решение может быть продолжено на интервал $(a_1,b_1) \supset [a,b]$

18. Определение гладкого интеграла, теорема о характеристическом свойстве гладкого интеграла

Определение 10. Гладкую функцию $U(x,y)$ будем называть галдкой допустимой в области B, если $U_x'^2 + U_y'^2 > 0$ для любой точки $(x,y) \in B$

Определение 11. Интеграл $U(x,y)$ уравнения (21) будем называть гладким, если U – гладкая допустимая функция

Теорема 11 (о характеристическом свойстве гладкого интеграла)**.** Для того чтобы гладкая допустимая функция $U(x,y)$ была гладким интегралом уравнения (21) в области единственности B°, **необходимо и достаточно**, чтобы выполнялось тождество

$$N(x,y)U_x'(x,y) - M(x,y)U_y'(x,y) \overset{B^\circ}{\equiv} 0 \qquad (24)$$

Доказательство.

- Необходимость
Пусть $U(x,y)$ – это гладкий интеграл уравнения (21). Возьём любую точку $(x_0,y_0) \in B^\circ$
Тогда $M^2(x_0,y_0) + N^2(x_0,y_0) \neq 0$. Пусть, например, $N(x_0,y_0) \neq 0$
Тогда $(x_0,y_0) \in B_N^\circ$, где B_N° – некая компонента связности открытого множества $B^\circ \setminus \overline{N}_0$, в которой $N(x,y) \neq 0$ и уравнение (21) равносильно уравнению $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$.
Пусть $y=\varphi(x)$ – решение ЗК$_{(21)}(x_0,y_0)$, определённое на некотором интервале $(a,b) \ni x_0$
Тогда по определению решениия

$$\varphi'(x) \equiv -\frac{M\big(x,\varphi(x)\big)}{N\big(x,\varphi(x)\big)} \quad \text{на } (a,b)$$

По теореме о характеристическом свойстве интегала имеем:

$$U\big(x,\varphi(x)\big) \overset{(a,b)}{\equiv} U(x_0,y_0)$$

Продиффиренцируем по x:

$$U_x'\big(x,\varphi(x)\big) + U_y'\big(x,\varphi(x)\big)\varphi'(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0$$

Подставляя $\varphi'(x)$ и домножая на N, получаем:

$$N\big(x,\varphi(x)\big)U'_x\big(x,\varphi(x)\big) - M\big(x,\varphi(x)\big)U'_y\big(x,\varphi(x)\big) \overset{(a,b)}{\equiv} 0$$

Положим $x = x_0$, тогда $\varphi(x_0) = y_0$, и для любой точки $(x_0, y_0) \in B^\circ$ получаем равенство (24)

- Достаточность
Пусть в B° выполняется тождество (24)
Возьмём любую точку $(x_0, y_0) \in B^\circ$, и пусть, например, $U'_y(x_0, y_0) \neq 0$
Тогда $U'_y(x,y) \neq 0$ в некоторой окрестности $V(x_0,y_0)$ и в ней уравнение (22) $U(x,y) = U(x_0,y_0)$ однозначно разрешимо относительно y, т. е. существует и единственна функция $y = \xi(x)$, определённая на нектором интервале $(\alpha,\beta) \ni x_0$ такая, что $\xi(x_0) = y_0, \quad \xi \in \mathcal{C}^1\big((\alpha,\beta)\big)$ и $U\big(x,\xi(x)\big) \equiv U(x_0,y_0)$ на (α,β)
Дифференцируя последнее тождество, получаем

$$U'_x\big(x,\xi(x)\big) + U'_y\big(x,\xi(x)\big)\xi'(x) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} 0, \qquad \big(x,\xi(x)\big) \in V$$

а значит, $\xi'(x) \equiv -\dfrac{U'_x\big(x,\xi(x)\big)}{U'_y\big(x,\xi(x)\big)}$
Покажем, что $y = \xi(x)$ является решением уравнения (21), т. е. на интервале (a,b), например, удовлетворяет тождеству $З_1$ из определения решения. Подставляя $\xi(x)$ в левую часть этого тождества, получаем:

$$M\big(x,\xi(x)\big) + N\big(x,\xi(x)\big)\xi'(x) \equiv \frac{M\big(x,\xi(x)\big)U'_y\big(x,\xi(x)\big) - N\big(x,\xi(x)\big)U'_x\big(x,\xi(x)\big)}{U'_y\big(x,\xi(x)\big)} \overset{(24)}{\equiv} 0$$

□

Следствие. Гладкая допустимая функция $U(x,y)$ есть гладкий интеграл уравнения (1) $y' = f(x,y)$ в области единственности G° **тогда и только тогда**, когда верно тождество

$$U'_x(x,y) + f(x,y)U'_y(x,y) \overset{G^\circ}{\equiv} 0$$

19. Теоремы о существовании непрерывного интеграла и о связи между интегралами

Теорема 12 (о существовании непрерывного интеграла)**.** Для любой точки (x_0,y_0) из области единственности B° найдётся окрестность $S \subset B^\circ$, в которй уравнение (21) имеет интеграл $U(x,y)$

Доказательство. Пусть (x_0,y_0) "— это произвольная точка из области единственности B° и, например, $N(x_0,y_0) \neq 0$. Тогда найдётся окрестность B°_N, в которой $N(x,y) \neq 0$, а значит, в ней уравнение в симметричной форме (21) равносильно уравнению $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$.
Согласно теореме о существовании общего решения в области

$$A = \{\, (x,y) \mid a < x < b, \quad \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x) \,\} \subset B^\circ_N$$

существует общее решение $y = \varphi(x,C)$.
По определению общего решения уравнение $y = \varphi(x,C)$ однозанчно разрешимо относительно C для любой точки $(x,y) \in A$, т. е. $C = U(x,y)$, причём $U\big(x,\varphi(x,C)\big) \overset{(a,b)}{\equiv} C$
В результате уравнение $U(x,y) = C$ однозначно разрешимо относительно y, а значит, функция U – допустимая и постоянна вдоль любого решения, график которого лежит в области A
По теореме о характеристическом свойстве интеграла функция $U(x,y)$ является интегралом уравнения (21) в области A □

TODO: связь между интегралами

20. Теоремы о существовании гладкого интеграла и о связи между интегралами

Теорема 13 (о существовании гладкого интеграла).
В уравнении (21) функции $M(x,y),\ N(x,y) \in \mathcal{C}^1\big(B\big)$
Тогда для любой точки (x_0, y_0) из области B существует её окрестность $A \subset B$, в которой уравнение (21) имеет гладкий интеграл $U(x,y)$

Доказательство. По слабой теореме о единственности в области множество B является областью единственности
Возьмём любую точку (x_0, y_0) из B. И пусть, например, $N(x_0, y_0) \neq 0$, B_N "— окрестность (x_0, y_0), в которой $N(x,y) \neq 0$ и уравнение (21) равносильно уравнению $y' = f_*(x,y)$ с $f_* := -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$. При этом по условию теоремы в области B_N определена и непрерывна частная производная $\frac{\partial f_*(x,y)}{\partial y}$
Пусть $A := \{\,(x,y) \mid a < x < b, \quad \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\,\}$ "— окрестность точки (x_0, y_0), лежащая в B_N вместе со своим замыканием. По теореме о существовании общего решения в A существует общее решение $y = \varphi(x, C)$ уравнения $y' = f_*(x,y)$, задаваемое формулой (18) $\varphi(x,C) = y(x, \xi C)$, в которой $\xi \in (a,b)$ выбирается произвольным образом, $(\xi, C) \in \overline{A}$, т. е. $C \in [\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)]$, а $y(x, \xi, C)$ "— решение ЗК(ξ, C)
Положим $\xi = x_0$. Согласно (20)

$$\frac{\partial\varphi(x,C)}{\partial C} = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f_*\big(t, \varphi(t,C)\big)}{\partial y}\,\mathrm{d}\,t\right), \qquad \frac{\partial\varphi(x_0,C)}{\partial C} = 1 \quad \forall C \in [\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$$

Следовательно, по теореме о неявной функции уравнение $\varphi(x,C) - y = 0$ однозначно разрешимо относительно C. Его решение $C = U(x,y)$, как установлено в доказательстве теоремы о существовании непрерывного интеграла, является интегралом уравнения (21) и непрерывно дифференцируемо по y в области A.
Остаётся заметить, что функция $U(x,y)$ является также гладкой по x, (т. к. обратная к ней $y = \varphi(x,C)$ гладкая по определнию общего решения).
Поэтому $U(x,y)$ "— гладкая допустимая функция, а значит, и гладкий интеграл.
Случай, когда $N(x_0, y_0) = 0,\ M(x_0, y_0) \neq 0$ рассматривается аналогично. □

Теорема 14 (о связи между интегралами). $U(x,y)$ "— интеграл уравнения (21) в некоторой области A. Тогда:

1. если $U_1(x,y)$ "— ещё один интеграл в A, то существует функция $\Phi(x)$ такая, что $U_1(x,y) \overset{A}{\equiv} U(x,y)$;

   Доказательство. Пусть интеграл $U(x,y)$ построен в области A при помощи общего решения $\varphi(x,C)$. Тогда $U\big(x, \varphi(x,C)\big) \overset{(a,b)}{\equiv} C$.
   Поскольку $U_1(x,y)$ "— тоже интеграл в A, то

   $$\forall C \in \mathbb{R} \quad U_1\big(x, \varphi(x,C)\big) \overset{(a,b)}{\equiv} \Phi\Big(U\big(x, \varphi(x,C)\big)\Big)$$

   Но точки $\big(x, \varphi(x,C)\big)$ заполняют всю область Am поэтому в A справедливо тождество $U_1(x,y) \equiv \Phi\big(U(x,y)\big)$. □

2. если функци $\Phi\big(U(x,y)\big)$ допустима, то $U_1(x,y) \overset{A}{\equiv} \Phi\big(U(x,y)\big)$ "— это интеграл уравнения (21) в области A.

   Доказательство. Пусть Φ "— произвольная вещественная функция такая, что функция $\Phi\big(u(x,y)\big)$ допустима.
   Положим $U_1(x,y) := \Phi\big(U(x,y)\big)$. Тогда функция U_1 допустима и обращается в постоянную вдоль любого решения (т. к. по предположению, U "— это интеграл). Поэтому U_1 является интегралом. □

TODO: связь между интегралами

21. Теорема об интеграле уравнения с разделяющимися переменными

TODO: Причесать уравнение с разделящимися переменными

Определение 12. Уравнением с разделяющимися переменными в симметрической форме будем называть уравнение (21) вида

$$g_1(x)h_2(y)\,\mathrm{d}\,x + g_2(x)h_1(y)\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{25}$$

в котором $g_1(x),\ g_2(x) \in \mathcal{C}\big(\langle a,b\rangle\big), \quad h_1(y),\ h_2(y) \in \mathcal{C}\big(\langle c,d\rangle\big)$, причём

$$(a,b) \setminus (g_1^\circ \cup g_2^\circ) = \bigcup_{k=1}^{k_*}(a_k,b_k), \qquad (c,d) \setminus (h_1^\circ \cup h_2^\circ) = \bigcup_{l=1}^{l_*}(c_l,d_l) \tag{26}$$

$$\forall x \in (a,b) \quad g_1^2(x) + g_2^2(x) \neq 0, \qquad \forall y \in (c,d) \quad h_1^2(y) + h_2^2(y) \neq 0 \tag{27}$$

где $g_i^\circ = \{\, x \in \langle a,b\rangle \mid g_i(x) = 0 \,\}, \quad h_i^\circ = \{\, y \in \langle c,d\rangle \mid h_i(y) = 0 \,\}$ "— замкнутые множества нулей функций g и h

Таким образом,

$$M(x,y) = g_1(x)h_2(y) \in \mathcal{C}\big(\widetilde{R}\big), \qquad N(x,y) = g_2(x)h_2(y) \in \mathcal{C}\big(\widetilde{R}\big)$$

где прямоугольник $\widetilde{R} = \{\, (x,y) \mid x \in \langle a,b\rangle\,, \quad y \in \langle c,d\rangle \,\}$
Условие (26) позволяет избежать “экзотических” ситуаций, типа канторовых множеств.
Условие (27) означает, что $\widetilde{R}$ не пересекают ни горизонтальные, ни вертикальные прямые, состоящие из особых точек и “разрезающие” его на части. Только любой из четырёх отрезков, ограничивающих $\widetilde{R}$ может целиком состоять из особых точек. Рассмотрим

$$H_i \coloneqq \{\, (x,y) \mid x \in g_i^\circ, \quad h_i^\circ \,\}, \qquad i = 1,2$$

Тогда H_i может состоять из не более чем счётного объединения точек, отрезков и четырёхугольников. Кроме того, $H_1 \cap H_2$ может содержать только вершины $\widetilde{R}$.
В результате уравнение (25) рассматриваем на множестве $\widetilde{B} = B \cup \widehat{B} \cup \breve{B}$, в котором

$$B = R \setminus (H_1 \cup H_2), \qquad \breve{B} = (H_1 \cup H_2) \cap \partial B, \qquad \widehat{B} = \partial B \setminus \breve{B}, \qquad R = \{\, (x,y) \mid x \in (a,b), \quad y \in (c,d) \,\}$$

Для любых $x_2 \in g_2^\circ$ и $y_2 \in h_2^\circ$ функции $N(x_2,y) \equiv M(x,y_2) \equiv 0$. Поэтому функции $x(y) = x_2$ при $y \in (c,d)$ и $y(x) = y_2$ при $x \in (a,b)$ удовлетворяют уравнению, являясь полными внутренними решениями соответственно на всех интервалах $(c_l,d_l) \subset (c,d) \setminus g_2^\circ$ и $(a_k,b_k) \subset (a,b) \setminus g_2^\circ$.
Остаётся решить уравнение в каждой из областей

$$B_{kl} \coloneqq \{\, (x,y) \mid x \in (a_k,b_k), \quad y \in (c_l,d_l) \,\} \setminus (H_1 \cup H_2), \qquad \bigcup_{k,l \geq 1} B_{kl} \eqqcolon B$$

причём для любой точки $(x,y) \in B_{kl}$ справедливы условия

$$g_2(x) \neq 0, \qquad h_2(y) \neq 0, \qquad g_1^2(x) + h_1^2(y) \neq 0 \tag{28}$$

Покажем, что любая область B_{kl} "— это область единственности:
Возьмём произвольную точку $(x_k,y_l) \in B_{kl}$ и рассмотрим случай, когда $h_1(y_l) \neq 0$:
Существует интеграл $(\widetilde{c},\widetilde{d}) \subset c_l,d_l$ такой, что $h_1(y) \neq 0$ для всякого $y \in (\widetilde{c},\widetilde{d})$. Поэтому в области

$$G^\circ \coloneqq \Big\{\, (x,y) \mid x \in (a_k,b_k), \quad y \in (\widetilde{c},\widetilde{d}) \,\Big\}$$

уравнение (25) равносильно уравнению (1) вида

$$y' = g(x)h(y) \tag{29}$$

в котором в данном случае $g = -g_1(x)g_2^{-1}(x), \quad h = h_2(y)h_1^{-1}(y) \neq 0$, и $f(x,y) = g(x)h(y)$ непрерывна в прямоугольной области G°

Определение 13. Уравнение (29), в котором $g \in \mathcal{C}\big((a_k, b_k)\big)$, $\quad h \in \mathcal{C}\big((\widetilde{c}, \widetilde{d})\big)$, называют уравнением с разделяющимися переменными, разрешённым относительно производной

Покажем, что G° "— область единственности для уравнения (29). Этого достаточно, чтобы произвольным образом выбранная точка (x_k, y_l) из B_{kl} оказаласть точкой единственности для уравнения (25).
Пусть $H(y) := \int h^{-1}(y)\ \mathrm{d}\,y$, и, для определённости, функция $h(y) > 0$ при $y \in (\widetilde{c}, \widetilde{d})$. Тогда $H(y)$ "— гладкая, строго возрастающая функция.
Сделаем в уравнени (29) замену $u := H(y)$. Для этого продифференцируем тождество $u(x) = H\big(y(x)\big)$ по x в силу уравнения (29), получая

$$\frac{\mathrm{d}\,u(x)}{\mathrm{d}\,x} = \frac{|diH\big(y(x)\big)}{\mathrm{d}\,y} \cdot \frac{\mathrm{d}\,y(x)}{\mathrm{d}\,x} = h^{-1}\big(y(x)\big) \cdot g(x) \cdot h\big(y(x)\big) = g(x)$$

$$u' = g(x)$$

Это уравнение определно в области

$$G_u^\circ = \Big\{\ (x, y) \mid x \in (a, b), \quad u \in \big(H(\widetilde{c}), H(\widetilde{d})\big)\ \Big\}$$

Его общее решение:

$$u(x, C) = \int g(x)\ \mathrm{d}\,x + C$$

Область G_u° является областью единственности для уравнения $u' = g(x)$, так как интегральные кривые в ней не могут иметь общих точек. Они получены параллельными переносами одной и той же первообразной.
А поскольку замена $u = H(y)$ обратима, G° оказывается областью единственности для уравнения (29).
В результате установлено, что B_{kl} "— область единственности для уравнения (25), и в ней (25) с учётом (28) равносильно уравнению с разделёнными переменными:

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)}\,\mathrm{d}\,x + \frac{h_1(y)}{h_2(y)}\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{30}$$

Рассмотрим в любой области B_{kl} гладкую функцию

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{g_1(s)}{g_2(s)}\ \mathrm{d}\,s + \int_{y_0}^{y} \frac{h_1(s)}{h_2(s)}\ \mathrm{d}\,s, \qquad x_0, y_0 \in B_{kl} \tag{31}$$

Тогда

$$U'_x(x, y) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}, \qquad U'_y(x, y) = \frac{h_1(y)}{h_2(y)}$$

$$\underset{(28)}{\Longrightarrow} U_x'^2 + U_y'^2 \neq 0$$

U "— гладкая допустимая функция и для неё, очевидно, выполняется тождество (24), а значит, по теореме о характеристическом свойстве гладкого интеграла функция $U(x, y)$ является интегралом уравнения (30).
В результате, доказана следующая теорема:

Теорема 15 (об интеграле уравнения с разделяющимися переменными)**.** Любая область B_{kl} с учётом условий (28) является областью еджинственности уравнения (25), и в ней функция $U(x, y)$ является гладким интегралом уравнения (25)

22. Теорема об интеграле уравнения в полных дифференциалах; теорема об уравнении в полных дифференциалах, локальная

Определение 14. Уравнение (21) называется уравнением в полных дифференциалах (УПД) в области B, если существует функция $U(x, y) \in \mathcal{C}^1\big(B\big)$ такая, что для всякой точки $(x, y) \in B$,

$$U'_x(x, y) = M(x, y), \qquad U'_y(x, y) = N(x, y) \tag{32}$$

Теорема 16 (об интеграле УПД)**.** $U(x, y)$ — это гладкий интеграл УПД в B

Доказательство. Пусть существует гладкая функция $U(x, y)$, для которой в B выполняются равенства (32). Тогда $U_x'^2 + U_y'^2 \neq 0$, а значит, по определению U "— гладкая допустимая функция.
При этом, в B очевидым образом выполняется тождество (24), следовательно, по теореме о характеристическом свойстве гладкого интеграла функция $U(x, y)$ являетя глдаким интегралом в B.
Остаётся показать, что B "— это область единственности.
Возьмём произвольную точку $(x_0, y_0) \in B$ и произвольное решение $y = \varphi(x)$ ЗК$_{(21)}(x_0, y_0)$ на каком-либо интервале $(a, b) \ni x_0$. Тогда $\varphi(x_0) = y_0$, и по определению решения

$$M\big(x, \varphi(x)\big) + N\big(x, \varphi(x)\big)\varphi'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

$$\implies \mathrm{d}\, U\big(x, \varphi(x)\big) = U_x'\big(x, \varphi(x)\big)\,\mathrm{d}\, x + U_y'\big(x, \varphi(x)\big)\,\mathrm{d}\,\varphi(x) = 0$$

$$\implies U\big(x, \varphi(x)\big) \overset{(a,b)}{=\!=\!=} U\big(x_0, \varphi(x_0)\big)$$

В результате любое решение поставленной ЗК$_{\text{УПД}}$ удовлетворяет уравнению (22) в некоторой окрестности точки x_0. А функция U, будучи допустимой, однозначно разершима, следоваетельно, в B не существует двух различных решений одной и той же ЗК. □

Теорема 17 (об УПД; локальная)**.** Предположим, что для уравнения (21) выолняются условия:

1. прямоугольник $R = \{\, (x, y) \mid x \in (a, b), \quad y \in (c, d) \,\} \subset B$;
2. в B существуют и непрерывны частные производные M_y', N_y';
3. верно тождество
$$M_y'(x, y) - N_x'(x, y) \equiv 0 \tag{33}$$
Тогда (21) "— УПД в R, и для любых $x_0, x \in (a, b), \quad y_0, y \in (c, d)$ его интегралами являются функции
$$U_1(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(s, y_0)\,\mathrm{d}\, s + \int_{y_0}^{y} N(x, s)\,\mathrm{d}\, s \tag{34}$$
$$U_2(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(s, y)\,\mathrm{d}\, s + \int_{y_0}^{y} N(x_0, s)\,\mathrm{d}\, s$$

Доказательство. Возьмём, например, гладкую функцию $U_1(x, y)$ и покажем, что она удовлетворяет равенствам (32) для любой точки $(x, y) \in R$. Этого достаточно, чтобы (21) было УПД в R.
Дифференцируя (34) сначала по y, а затем по x, получаем:

$$\frac{\partial U_1(x, y)}{\partial y} = N(x, y), \qquad \frac{\partial U_1(x, y)}{\partial x} = M(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial N(x, s)}{\partial x}\,\mathrm{d}\, s$$

Теперь во втором равенстве испольуем тождество (33):

$$\frac{\partial U_1(x, y)}{\partial x} = M(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial M(x, s)}{\partial y}\,\mathrm{d}\, s = M(x, y)$$

□

23. Теоремы о существовании и нахождении интегрирующего множителя, решение линейного уравнения при помощи интегрирующего множителя

Определение 15. Функция $\mu(x, y)$, определённая, непрерывная и не обращающаяся в ноль в области B, называется интегрирующим множителем дифференциального уравнения (21), если уравнение

$$\mu(x, y)M(x, y)\,\mathrm{d}\, x + \mu(x, y)N(x, y)\,\mathrm{d}\, y = 0 \tag{35}$$

является УПД в B.

Теорема 18 (о существовании интегрирующего множителя). Если в области единственности $B^\circ \subset B$ уравнение (21) имеет гладкий интеграл, тогда в B° существует интегрирующий множитель.

Доказательство. Пусть $U(x, y)$ "— гладкий интеграл уравнения (21) в области B°.
Тогда из тождества (24) вытекает, что в B°

$$\frac{U'_x(x, y)}{M(x, y)} = \frac{U'_y(x, y)}{N(x, y)}$$

причём числитель и значенатель в одной из частей равенства могут одновременно обращаться в ноль.
Поэтому функция

$$\mu(x, y) := \frac{U'_x(x, y)}{M(x, y)} = \frac{U'_y(x, y)}{N(x, y)}$$

удовлетворяет определнию интегриующего множителя. □

Если (35) "— УПД, то сголасно тождеству (33) $(\mu M)'_y - (\mu N)'_x = 0$.
Перегруппируем:

$$\mu'_x N - \mu'_y M - (M'_y - N'_x)\mu \tag{36}$$

Теорема 19 (о нахождении интегрирующего множителя).
Пусть нашлась такая функция $\omega(x, y) \in \mathcal{C}^1\big(B\big)$, что

$$\frac{M'_y(x, y) - N'_x(x, y)}{\omega'_x(x, y)N(x, y) - \omega'_y(x, y)M(x, y)} = \psi(\omega) \tag{37}$$

Тогда уравнение (21) имеет интегрирующий множитель $\mu(\omega) = \exp\left(\int \psi(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega\right)$

Доказательство. Будем искать μ как функцию ω.
В этом случае уравнение (36) примет вид

$$\frac{\mathrm{d}\,\mu}{\mathrm{d}\,\omega}\omega'_x N - \frac{\mathrm{d}\,\mu}{\mathrm{d}\,\omega}\omega'_y M = (M'_y - N'_x)\mu$$

или с учётом предположения (37):

$$\frac{\mathrm{d}\,\mu(\omega)}{\mathrm{d}\,\omega} = \psi(\omega)\mu(\omega)$$

Функция $\mu(\omega) = C \exp\Big(\int \psi(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega)$ является общим решением этого линейного однородного уравнения. Можно выбрать $C = 1$. □

TODO: Надо причесать линейные уравнения

Определение 16. Уравнение, разрешённое относительно производной, вида

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad p(x), q(x) \in \mathcal{C}\big((a, b)\big) \tag{38}$$

называется линейным диффенциальным уравнением первого порядка.

Найдём общее решение уравнения (38) и решение ЗК(x_0, y_0), используя интегрирующий множитель, для чего перепишем уравнение (38) в симметричной форме:

$$\Big(p(x)y - q(x)\Big)\,\mathrm{d}\,x + \mathrm{d}\,y = 0 \tag{39}$$

Очевидно, что в G существуют и непрерывны M'_y, N'_x.
Будем искать μ как функцию x, т. е. $\omega(x, y) = x$.
Тогда в формуле (37) $\psi(x) = p(x)$ и по теореме о нахождении интегрирующего множителя для любого $x_0 \in (a, b)$ имеем:

$$\mu(x) = e^{P(x)} \neq 0, \qquad P(x) := \int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}\,t$$

Умножая (39) на μ, получаем УПД:

$$e^{P(x)}\Big(p(x)y - q(x)\Big)\,\mathrm{d}\,x + e^{P(x)}\,\mathrm{d}\,y = 0$$

При $y_0 = 0$ из (34) находим

$$U = -\int_{x_0}^{x} e^{P(s)}q(s)\,\mathrm{d}\,s + \int_0^y e^{P(x)}\,\mathrm{d}\,s$$

Это "— интеграл уравнения (38).
Тогда равенство

$$e^{P(x)}y - \int_{x_0}^{x} e^{P(s)}q(s)\,\mathrm{d}\,s = C$$

является общим интегралом уравнения (39). Отсюда

$$y = \varphi(x, C) = e^{-P(x)}\left(C + \int_{x_0}^{x} e^{P(s)}q(s)\,\mathrm{d}\,s\right)$$

является классическим общим решением линейного уравнения (38), а формула

$$y = y(x, x_0, y_0) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}\,t\right)\left[y_0 + \int_{x_0}^{x}\exp\left(\int_{x_0}^{s} p(t)\,\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{d}\,s\right]$$

задаёт решение ЗК(x_0, y_0), определённое на (a, b) и называется формулой Коши.

Часть III
Нормальные системы ОДУ

Ааа! Нормальные системы!

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}, \qquad f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}\big(G\big), \qquad G \subset \mathbb{R}^{n+1} \tag{40}$$

24. Лемма о связи между локальным и глобальным условиями Липшица, достаточные условия для выполнения локального условия Липшица

Определение 17. Функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиб Липшица глобально по y на множестве $B \subset G$, если найдётся такая константа $L = L_B > 0$, что

$$\forall (x, \widetilde{y}), (x, \widehat{y}) \in B \quad \|f(x, \widehat{y}) - f(x, \widetilde{y})\| \le L\,\|\widehat{y} - \widetilde{y}\| \tag{41}$$

Обозначение. $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(B)$

Определение 18. Функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица локально по y в области G, если для любой точки $(x_\circ, y^\circ) \in G$ существуют окрестность $V(x_\circ, y^\circ) \subset G$ и константа Липшица $L = L_V > 0$ такие, что для любых двух точек $(x, \widetilde{y}), (x, \widehat{y}) \in V(x_\circ, y^\circ)$ выолняется неравенство (41).

Обозначение. $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$

Лемма 9 (о связи между локальным и глобальным условиями Липшица). Если $f(x, y) \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$, то для любого компакта $\overline{H} \subset G$ выполнено $f(x, y) \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(\overline{H})$

Доказательство. Рассуждая **от противного**, допустим, что существует компакт $\overline{H} \in G$, в котором $f(x,y) \notin \mathrm{Lip}_y^{gl}(\overline{H})$.
Это значит, что найдутся такие последовательности точек $(x_k, \widetilde{y}^{(k)}), (x_k, \widehat{y}^{(k)}) \in \overline{H}$ и костант $L_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$, что

$$\forall k \geq 1 \quad \left\| f(x_k, \widehat{y}^{(k)}) - f(x_k, \widetilde{y}^{(k)}) \right\| \geq L_k \left\| \widehat{y}^{(k)} - \widetilde{y}^{(k)} \right\| \tag{42}$$

Надо показать, что при каком-то k это неравенство нарушается.
Разряжая при необходимости два раза подряд последовательность инексов k и пользуясь принципом выбора Больцано"– Вейерштрасса, выберем такую подпоследовательность индексов $k_l \xrightarrow[l\to\infty]{} \infty$, что $(x_k, \widetilde{y}^{(k_l)}) \to (x_\circ, \widetilde{y}^{(\circ)})$, $\quad (x_{k_l}, \widehat{y}^{(k_l)}) \to (x_\circ, \widehat{y}^{(\circ)})$. При этом обе точки $(x_\circ, \widetilde{y}^{(\circ)}), (x_\circ, \widehat{y}^{(\circ)}) \in \overline{H}$, поскольку замкнутое множество содержит все свои предельные точки.
В результате векторы $\widetilde{y}^{(0)}$ и $\widehat{y}^{(0)}$ либо совпадают, либо нет.

- $\widetilde{y}^{(0)} \neq \widehat{y}^{(0)}$
  Тогда можно ввести в рассмотрение функцию

  $$h(x, \widetilde{y}, \widehat{y}) := \frac{\|f(x,\widehat{y}) - f(x,\widetilde{y})\|}{\|\widehat{y} - \widetilde{y}\|}$$

  определённую в некоторой окрестности точки $(x_\circ, \widetilde{y}^{(0)}, \widehat{y}^{(0)})$.
  Положим $h(x_\circ, \widetilde{y}^{(0)}, \widehat{y}^{(0)}) =: L_\circ$. Тогда существует окрестность $V(x_0, \widetilde{y}^{(0)}, \widehat{y}^{(0)})$, в которой h непрерывна и $h(x, \widetilde{y}, \widehat{y}) < L_\circ + 1$.

  $$\implies \exists K > 0: \quad \forall k_l > K \quad (x_{k_l}, \widetilde{y}^{(k_l)}, \widehat{y}^{(k_l)}) \in V(x_\circ, \widetilde{y}^{(0)}, \widehat{y}^{(0)})$$

  а значит, $h(x_{k_l}, \widetilde{y}^{(k_l)}, \widehat{y}^{(k_l)}) < L_\circ + 1$, или

  $$\left\| f(x_{k_l}, \widehat{y}^{(k_l)}) - f(x_{k_l}, \widetilde{y}^{(k_l)}) \right\| < (L_\circ + 1) \left\| \widehat{y}^{(k_l)} - \widetilde{y}^{(k_l)} \right\|$$

  Однако это неравенство при $l = l^*$ противоречит неравенству (42), поскольку всегда найдётся индекс l^* такой, что $L_{k_{l^*}} > L_\circ + 1$, т. к. $L_{k_l} \xrightarrow[l\to\infty]{} +\infty$.

- $y^{(0)} := \widetilde{y}^{(0)} = \widehat{y}^{(0)}$
  Тогда точка $(x_\circ, y^{(0)}) \in \overline{H} \subset G$. В этом случае используем предположение о том, что функция f удовлетворяет локальному условию Липшица.
  По определению для точки $(x_\circ, y^{(0)})$ существуют лежащая в G окрестность $V(x_\circ, y^{(0)})$ и константа Липшица $L > 0$ такие, что для любых двух точек $(x, \widetilde{y}), (x, \widehat{y}) \in V(x_\circ, y^{(0)})$ верно неравенство (41). При этом обе подпоследовательности — $(x_{k_l}, \widetilde{y}^{(k_l)})$ и $(x_{k_l}, \widehat{y}^{(k_l)})$ — имеют общий предел — точку $(x_\circ, y^{(0)})$.
  Поэтому найдётся такое число $K > 0$, что для всякого $k_l > K$ точки $(x_{k_l}, \widetilde{y}^{(k_l)})$ и $(x_{k_l}, \widehat{y}^{(k_L)}) \in V(x_\circ, y^{(0)})$, а значит, выполняется неарвенство (41). Но существует такой индекс l^*, что $L_{k_{l^*}} > L$. Следовтельно, неравенства (41) и (42) несовместны при $l = l^*$.

□

Лемма 10 (о достаточном условии локальной липшицевости)**.** Если вектор-функция $f(x,y)$ непрерывна всесте со своими частными производными по $y_1, \ldots, y_n$ в области G, то она удовлетворяет условию Липшица по y локально в G.

Доказательство. Пусть V — окрестнгость произвольной точки из области G. Очевидно, что её можно выбрать выпуклой по y и такой, что $\overline{V} \subset G$. Для этого достаточно в качестве V взять куб с центром в выбранной точке и достаточно маленьким ребром.
Покажем, что $f(x,y) \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(V)$:
По формуле конечных приращений имеем:

$$\forall (x, \widetilde{y}), (x, \widehat{y}) \in V \quad f(x, \widehat{y}) - f(x, \widetilde{y}) = \sum_{j=1}^{n} h^{(j)}(x, \widetilde{y}, \widehat{y}) \cdot (\widehat{y}_j - \widetilde{y}_j)$$

где

$$h^{(j)} := \int_0^1 \frac{\partial f\big(x, u(s)\big)}{\partial y_j}\,\mathrm{d}\,s, \qquad u(s) := \widetilde{y} + s(\widehat{y} - \widetilde{y}) \quad \forall s \in [0,1]$$

При этом $\big(x, u(s)\big) \in V$ в силу выпуклостти окрестности по y.
Поскольку чатсные производные f по y непрерывны в g и их конечное число, а компакт $\overline{V} \subset G$ по построению, то

$$\exists\, M > 0: \quad \forall s \in [0,1] \quad \forall j = \overline{1,n} \quad \left\| \frac{\partial f\big(x, u(s)\big)}{\partial y_j} \right\| \le M$$

Поэтому

$$\|f(x,\widehat{y}) - f(x,\widetilde{y})\| \le \sum_{j=1}^{n} \left\| \int_0^1 \frac{\partial f\big(x, u(s)\big)}{\partial y_j}\,\mathrm{d}\,s \cdot (\widehat{y}_j - \widetilde{y}_j) \right\| \le \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \left\| \frac{\partial f\big(x, u(s)\big)}{\partial y_j} \right\| \mathrm{d}\,s \cdot |\widehat{y}_j - \widetilde{y}_j| \le$$
$$\le Mn \cdot \max j = \overline{1,n} |\widehat{y}_j - \widetilde{y}_j| = nM\, \|\widehat{y} - \widetilde{y}\|$$

и верно неравенство (41) с глобальной константой Липшица $L = nM$, обслуживающей окрестность V произвольной точки из области G. □

25. Теорема Пикара

Введём $(k+1)$-е приближение по Пикару:

$$y^{(k+1)}(x) = y^\circ + \int_{x_0}^{x} f\big(s, y^{(k)}(s)\big)\,\mathrm{d}\,s. \tag{43}$$

Теорема 20 (Пикара). $f(x,y) \in \mathcal{C}\big(G\big), \quad f(x,y) \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$

Для любой точки $(x_\circ, y^\circ) \in G$ последовательные приближения Пикара $y^{(k)}(x)$ $(k = 0, 1, \dots)$ с начальными данными $x_\circ, y^\circ$ определены на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$, причём существует такой компакт $\overline{H} \subset G$, что для любых $k \ge 0$ и $x \in [\alpha, \beta]$ точка $\big(x, y^{(k)}(x)\big) \in \overline{H}$.

Тогда функции $y^{(k)}(x)$ равномерно относительно $[\alpha, \beta]$ стремятся при $k \to \infty$ к предельной функции $y(x)$, являющейся решением ЗК$_{(40)}(x_\circ, y^\circ)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Доказательство. Возьмём произвольную точку $(x_\circ, y^\circ) \in G$

По условию теоремы для этой точки надётся отрезок $[\alpha, \beta] \ni x_\circ$ и компакт $\overline{H} \subset G$ такие, что можно построить последовательные пикаровские приближения

$$y^{(k)}(x) = y^\circ + \int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y^{(k-1)}(s)\big)\,\mathrm{d}\,s, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

определённые для всякого $x \in [\alpha, \beta]$ такие, что их графики, т. е. точки $\big(x, y^{(k)}(x)\big)$, при всех x и k принадлежат $\overline{H}$.

Наличие компакта позволяет ввести на нём две глобальные константы:

- Обозначим через $L > 0$ константу Липшица, обслуживающую $\overline{H}$. Она существует по лемме о связи между условиями Липшица (лемма 9), согласно которой $f(x,y) \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(\overline{H})$.
- Положим $M := \max\limits_{\overline{H}} \|f(x,y)\|$.

Нужно установить равномерную сходимость последовательности пикаровских отображений. Сделаем это при помощи функциональных рядов:

Введём последовательность функций $\varphi^{(k)}(x)$, определённых на отрезке $[\alpha, \beta]$:

$$\varphi^{(0)}(x) := y^{(0)}(x), \quad \varphi^{(1)}(x) := y^{(1)}(x) - y^{(0)}(x), \quad \dots, \quad \varphi^{(k)}(x) := y^{(k)}(x) - y^{(k-1)}(x), \quad \dots$$

Рассмотрим функциональный ряд

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(x)$$

По определению $\varphi^{(k)}$,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi^{(k)}(x) = y^{(n)}(x)$$

Поэтому сходимость ряда $\varphi(x)$ равносильна сходимости последовательности пикаровских приближений $y^{(k)}(x)$.

Построим для ряда $\varphi(x)$ мажорантный ряд, оценив сверху по норме методом **индукции** члены $\varphi^{(k)}(x)$:

- **База.**

  Для всякого $x \in [\alpha, \beta]$ имеем:

  $$\left\|\varphi^{(0)}(x)\right\| = \left\|y^{(0)}(x)\right\|,$$

  $$\left\|\varphi^{(1)}(x)\right\| = \left\|y^{(1)}(x) - y^{(0)}(x)\right\| = \left\|\int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y^{(0)}(s)\big)\ \mathrm{d}\,s\right\| \leq \left|\int_{x_\circ}^{x} \left\|f\big(s, y^{(0)}(s)\big)\right\|\ \mathrm{d}\,s\right|$$

  Но по условию теоремы любая точка $\big(s, y^{(0)}(s)\big)$ лежит в $\overline{H}$, т. к. $[x_\circ \between x] \subset [\alpha, \beta]$. Следовательно,

  $$\left\|y^{(1)}(x)\right\| \leq M|x - x_\circ|.$$

  Далее,

  $$\left\|\boldsymbol{\varphi^{(2)}(x)}\right\| \leq \left|\int_{x_\circ}^{x} L\left\|y^{(1)}(s) - y^{(0)}(s)\right\|\ \mathrm{d}\,s\right| = L\left|\int_{x_\circ}^{x} \left\|\varphi^{(1)}(s)\right\|\ \mathrm{d}\,s\right| \leq$$
  $$\leq L\left|\int_{x\circ}^{x} M|s - x_\circ|\ \mathrm{d}\,s\right| \leq LM\frac{|x - x_\circ|^2}{2} = \boldsymbol{\frac{M}{L} \cdot \frac{(L|x - x_\circ|)^2}{2!}}$$

- **Предположим**, что для любых $k \geq 2$ и $x \in [\alpha, \beta]$

  $$\left\|\varphi^{(k)}(x)\right\| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{(L|x - x_\circ|)^2}{2!}. \tag{44}$$

- **Переход.** Оценим $\varphi^{(k+1)}(x)$:

  $$\left\|\varphi^{(k+1)}(x)\right\| = \left\|y^{(k+1)}(x) - y^{(k)}(x)\right\| = \left\|\int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y^{(k)}(s)\big)\ \mathrm{d}\,s - \int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y^{(k-1)}(s)\big)\ \mathrm{d}\,s\right\| \leq$$
  $$\leq \left|\int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y^{(k)}(s)\big) - f\big(s, y^{(k-1)}(s)\big)\ \mathrm{d}\,s\right|.$$

  Поскольку аргументы $f \in \overline{H}$, используем для оценок глобальное условие Липшица:

  $$\left\|\varphi^{(k+1)}(x)\right\| \underset{\text{Lip}}{\leq} \left|\int_{x_\circ}^{x} L\left\|y^{(k)}(s) - y^{(k-1)}(s)\right\|\ \mathrm{d}\,s\right| = L\left|\int_{x_\circ}^{x} \left\|\varphi^{(k)}(s)\right\|\ \mathrm{d}\,s\right| \underset{\textbf{предп.}}{\leq}$$
  $$\leq L\left|\int_{x_\circ}^{x} \frac{M}{N} \cdot \frac{(L|s - x_\circ|)^k}{k!}\ \mathrm{d}\,s\right| \leq \frac{M}{N} \cdot \frac{(L|x - x_\circ|^{k+1})}{(k+1)!}$$

  Таким образом, **индукцонное предположение** доказано.

Поскольку $|x - x_\circ| \leq \beta - \alpha$, справедлива равномерная оценка членов ряда $\varphi(x)$:

$$\left\|\varphi^{(k)}(x)\right\| \leq \frac{M}{N} \cdot \frac{\big(L(\beta - \alpha)\big)^k}{k!} \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Мажорантный для $\varphi(x)$ числовой ряд

$$\|y^\circ\| + \frac{M}{L} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(L(\beta - \alpha)\big)^k}{k!}$$

сходится при любых конечных α, β.

По признаку Вейерштрасса функциональный ряд $\sum \varphi^{(k)}(x)$ сходится равномерно на $[\alpha, \beta]$, а значит, последовательность $y^{(k)} \underset{k\to\infty}{\overset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows}} y(x)$.

Для всякого $x \in [\alpha, \beta]$ предельная функция $y(x)$ непрерывна по теореме Стокса"– Зайделя и точка $\big(x, y(x)\big)$, являясь предельной, содержится в $\overline{H}$. Следовательно, $\int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y(s)\big)\, \mathrm{d}\, s$ существует.

Рассмотрим равенство (43), устремив в нём k к бесконечности. Тогда слева получим $y(x)$, а справа

$$\int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y^{(k)}(s)\big)\, \mathrm{d}\, s \to \int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y(s)\big)\, \mathrm{d}\, s,$$

т. е. возможен переход к пределу под знаком интеграла.

Таким образом, в правой части (43) тоже можно перейти к пределу, получая формулу

$$y(x) = y^\circ + \int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y(s)\big)\, \mathrm{d}\, s \quad \forall x \in [\alpha, \beta],$$

т. е. $y(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению, что равносильно тому, что $y(x) \in$ (является решением) ЗК$_{(40)}(x_\circ, y^\circ)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. □

26. Теорема о существовании и единственности решений нормальной системы

Теорема 21 (о существовании и единственности решения). Пусть в системе (40) $f(x, y)$ непрерывна и $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$.

Тогда для любой точки $(x_0, y^0) \in G$ и для любого отрезка Пеано $P_h(x_0, y^0)$ на этом отрезке существует и единственно решение ЗК(x_0, y^0).

Доказательство.

- Существование.

  Возьмём любую точку $(x_0, y^0) \in G$ и найдём для неё отрезок $[\alpha, \beta]$ и компакт $\overline{H}$ из теоремы Пикара.

  Сначала построим отрезок Пеано с центром в т. x_0. Для этого возьмём такие $a, b > 0$, что компакт $\overline{R} = \big\{ (x, y) \mid |x - x_0| < a,\ \|y - y^0\| \le b \big\} \subset G$.

  Положим

  $$M = \max_{(x,y)\in\overline{R}} \|f(x, y)\|, \quad h = \min\left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \alpha = x_0 - h, \quad \beta = x_0 + h$$

  Тогда $[\alpha, \beta]$ — это искомый отрезок Пеано $P_h(x_0, y^0)$.

  Выберем $\overline{H} = \big\{ (x, y) \mid \alpha \le x \le \beta,\ \|y - y^0\| \le b \big\}$. Тогда $\overline{H} \subset \overline{R}$.

  Докажем **индукцией** по $k = 0, 1, \ldots,$ что

  $$\forall x \in [\alpha, \beta] \quad \left\| y^{(k)}(x) - y^0 \right\| \le b \tag{45}$$

  Тогда точка $\big(x, y^{(k)}(x)\big)$ попадёт в компакт $\overline{H}$, что позволит определить пикаровское приближение $y^{(k+1)}$ на всём отрезке Пеано $[\alpha, \beta]$.

  – По определению, $(^{(0)}x) \equiv y^0$, поэтому **база** очевидна.

  – Допустим, что неравенство (45) верно. Тогда для любого $x \in [\alpha, \beta]$

  $$\left\| y^{(k+1)}(x) - y^0 \right\| = \left\| \int_{x_0}^{x} f\big(s, y^{(k)}(s)\big)\, \mathrm{d}\, s \right\| \le \left| \int_{x_0}^{x} \left\| f\big(s, y^{(k)}(s)\big) \right\| \mathrm{d}\, s \right|$$

  Но согласно (45) точка $\big(s, y^{(k)}(s)\big) \in \overline{H} \subset \overline{R}$, поэтому под знаком интеграла $\|f\| \le M$ и $\left\| y^{(k+1)}(x) - y^0 \right\| \le M|x - x_0| \le Mh \le b$.

- Единственность
  Докажем **от противного**.
  Предположим, что существует ещё одно решение $\widetilde{y}(x)$ с теми же начальными данными, т. е. $\widetilde{y}(x_0) = y^0$, определённое на некотором интервале $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \ni x_0$.

  Пусть $[a, b]$ — отрезок, на котором определены оба решения. Достаточно показать, что на (a, b) решения $y(x)$ и $\widetilde{y}(x)$ совпадают.

  Используя интегральную формулу для любого $x \in (a, b)$ запишем разность этих решений:

$$y(x) - \widetilde{y}(x) = \int_{x_0}^{x} \Big(f\big(s, y(s)\big) - f\big(s, \widetilde{y}(s)\big) \Big) \, \mathrm{d}\, s$$

  При этом, существует такой компакт $\overline{H} \subset G$, что для всякого $s \in [a, b]$ точки $\big(s, y(s)\big)$, $\big(s, \widetilde{y}(s)\big) \in \overline{H}$.

  По условию теоремы в области G для функции $f(x, y)$ выполняется локальное условие Липшица. А значит, по лемме о связи между локальным и глобальным условиями Липшица функция $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(\overline{H})$ и L — глобальная константа Липшица. Поэтому

$$\|y(x) - \widetilde{y}(x)\| \le \left| \int_{x_0}^{x} \big\| f\big(s, y(s)\big) - f\big(s, \widetilde{y}(s)\big) \big\| \, \mathrm{d}\, s \right| \le L \left| \int_{x_0}^{x} \|y(s) - \widetilde{y}(s)\| \, \mathrm{d}\, s \right|$$

  Применяя следствие из теоремы Гронуолла с $\mu = L$ заключаем, что $\|y(x) - \widetilde{y}(x)\| \overset{(a,b)}{\equiv\!\equiv} 0$. Тогда $y(x) - \widetilde{y}(x) \overset{(a,b)}{\equiv\!\equiv} 0$.

$\square$

Следствие. G является областью единственности.

27. Линейные системы, теоремы о существовании, единственности и продолжимости решений линейных систем

Определение 19. Система (40) называется *линейной*, если она имеет вид

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(x)y_1 + \dots + p_{1n}(x)y_n + q_1(x) \\ \dots \\ y_n' = p_{n1}(x)y_1 + \dots + p_{nn}(x)y_n + q_n(x) \end{cases} \tag{46}$$

или в векторной записи

$$y' = P(x)y + q(x)$$

где функции $p_{ij}(x)$ и $q_i(x) \in \mathcal{C}\big((a, b)\big)$.

Другая формулировка. Нормальная система является линейной, если $f(x, y) = P(x)y + q(x)$, а $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$.

Теорема 22 (о существовании и единственности решений линейных систем)**.** Для любой точки $x_0 \in (a, b)$, для любого вектора $y^0 \in \mathbb{R}^n$ и для любого отрезка Пеано $P_h(x_0, y^)$ существует и единственно решение $\text{ЗК}_{(46)}(x_0, y^0)$, определённое на $P_h(x_0, y^0)$.

Доказательство. Поскольку функция $f(x, y) \in \mathcal{C}\big(G\big)$ и $f_y'(x, y) = P(x) \in \mathcal{C}\big(G\big)$, а значит, $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$, к системе (46) применима предыдущая теорема. $\square$

Теорема 23 (о продолжимости решений почти линейных систем)**.** Любое решение почти линейной системы продолжимо на интервал (a, b).

Доказательство. Рассмотрим произвольное решение почти линейной системы $y = \varphi(x)$, заданное на максимальном интервале существования (α, β). Для всякого $x_0 \in (\alpha, \beta)$ по интегральной формуле,

$$\varphi(x) \overset{(\alpha,\beta)}{=\!=\!=} \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big) \, \mathrm{d}\, s$$

$$\Longrightarrow \ \|\varphi(x_0)\| + \left| \int_{x_0}^{x} \big\|f\big(s, \varphi(s)\big)\big\| \, \mathrm{d}\, s \right| < \|\varphi(x_0)\| + \left| \int_{x_0}^{x} \Big(L(s) + M(s) \, \|\varphi(s)\| \Big) \, \mathrm{d}\, s \right|$$

Если $\beta < b$, то отрезок $[x_0, \beta] \subset (a, b)$, и в силу непрерывности функций L и M имеем:

$$L(x) \leq L_0, \quad M(x) \leq M_0 \qquad \forall x \in [x_0, \beta]$$

Поэтому

$$\|\varphi(x)\| \leq \|\varphi(x_0)\| + L_0(\beta - x_0) + M_0 \left| \int_{x_0}^{x} \|\varphi(s)\| \, \mathrm{d}\, s \right|$$

По лемме Гронуолла

$$\|\varphi(x)\| \leq \Big(\|\varphi(x_0)\| + L_0(\beta - x_0) \Big) e^{M_0(\beta - x_0)} \quad \forall x \in [x_0, \beta],$$

что **противоречит** теореме о поведении интегральной кривой полного решения.

Аналогично рассматривается случай, когда $\alpha > a$. □

Теорема 24 (о продолжимости решений линейных систем)**.** Любое решение линейной системы (46) продолжимо на интервал (a, b).

Доказательство. Покажем, что линейная система является почти линейной. Положим

$$p_0(x) \coloneqq \max_{i,j=\overline{1,n}} \{ \ |p_{ij}(x)| \, \}, \qquad q_0 \coloneqq \max_{i=\overline{1,n}} \{ \ |q_i(x)| \, \}$$

Тогда функции $p_0(x), q_0(x) \in \mathcal{C}\big(a, b\big)$.

Оценим сверху компоненты правой части системы (46):

$$|f_i(x, y)| = |p_{i1}(x) y_1 + \cdots + p_{in}(x) y_n + q_i(x)| \leq \sum_{j=1}^{n} |p_{ij}(x)| \cdot |y_j| + |q_i(x)| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} p_0(x) |y_j| + q_0(x) \leq n p_0(x) \max_{j=\overline{1,n}} |y_j| + q_0(x)$$

По определению нормы $\|f(x, y)\| \leq n p_0(x) \, \|y\| + q_0(x)$, т. е. система (46) почти линейна. □

28. Малые возмущения начальных данных по параметру, рассуждение о сдвиге

TODO: Понять эти бредни о сдвиге

TODO: Дальше нет...

29. **Теорема о непрерывной зависимости решений от начальных данных и параметра**
30. **Теорема о дифференцируеости решений по начальным данным**
31. **Теорема о дифференцируемости решений по вектору параметров**
32. **Теорема о многократной дифференцируемости решения по начальным данным и параметру**
33. **Теорема Ляпунова–Пуанкаре о разложении решения в ряд по степеням начальных данных и параметра**
34. **Теорема о разложении решения в ряд по степеням малого параметра**
35. **Теорема Коши об аналитичности решения по независимой переменной**
36. **Теорема об аналитичности решения ЛНС по независимой переменной**