Оглавление

Глава 1

Равномерное приближение

1.1. Многочлены Чебышёва первого рода

Определение 1. *Многочленом Чебышёва первого рода* назовём функцию

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, \ldots \quad x \in [-1, 1]$$

Можно доказать, что T_n — многочлен степени ровно n.

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k = 2, 3, \ldots$$

1.1.1. Корни и точки экстремума многочленов Чебышёва

Корни:

$$x_k = \cos\Big(\frac{2k-1}{2n}\pi\Big), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

Геометрическая интерпретация корней $T_n(x)$

x_k можно рассматривать как проекции на ось абсцисс $2n + 1$ равноотстоящих точек единичной окружности (т. е. верхняя полуокружность разделена на $2n$ частей).

Построение графика $T_n(x)$

Нужно разбить единичную полуокружность на $2n$ равных частей, занумеровать точки деления против часовой стрелки, отметить корни (проекции точек с чётными номерами) и точки экстремума (проекции точек с нечётными номерами). Отметить экстремальные значения $+1$ и -1.

1.1.2. Формы записи многочлена Чебышёва

1. $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Можно использовать только на $[-1, 1]$.
2. $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad T_0(x), \quad T_1(x)$.
3. $T_n(x) = a_n x^n - a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-4}x^{n-4} - \cdots, \quad a_n = 2^{n-1}$. Самая плохая форма.
4. $$T_n(x) = \prod \ldots$$
5. $$T_n(x) = \frac{1}{2}\Big(\big(x + \sqrt{x^2-1}\big)^n + \big(x - \sqrt{x^2-1}\big)^n\Big)$$

   Удобна, когда $x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 1$.