## Содержание

# Часть I
# ТФКП

## 1. Криволинейные интегралы от комплекснозначных функций — определения и свойства

**Определение 1.** $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}([a,b]) \subset \mathbb{R}^2, \qquad u, v \in \mathcal{C}(\Gamma), \qquad u : \Gamma \to \mathbb{R}, \quad v : \Gamma \to \mathbb{R}$
$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \in \mathcal{C}(\Gamma)$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x := \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} u(x,y)\,\mathrm{d}\,x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} v(x,y)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y := \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} u(x,y)\,\mathrm{d}\,y + i \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} v(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

**Свойства.**

1. $\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f + g\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f\,\mathrm{d}\,x + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} g\,\mathrm{d}\,x, \qquad \ldots \mathrm{d}\,y$
2. $c \in \mathbb{C}$
$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} cf\,\mathrm{d}\,x = c\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f\,\mathrm{d}\,x, \qquad \ldots \mathrm{d}\,y$$

3. $\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\,x = -\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\,x, \qquad \ldots \mathrm{d}\,y$

4. $\mathtt{T} = \{\, t_\nu \,\}_{\nu=0}^{m}\,, \quad a = t_0 < \cdots < t_m = b, \qquad \mathtt{P} = \{\, \tau_\nu \,\}_{\nu=1}^{m}\,, \quad \tau_\nu \in [t_{\nu-1}, t_\nu]$

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \qquad x(t_\nu) =: x_\nu, \quad y(t_\nu) =: y_\nu, \qquad M(\tau_\nu) = \begin{bmatrix} x(\tau_\nu) \\ y(\tau_\nu) \end{bmatrix}$$

$$\mathtt{S}_x(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \coloneqq \sum_{\nu=1}^{m} f\big(M(\tau_\nu)\big)(x_\nu - x_{\nu-1})$$

$$\mathtt{S}_y(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \coloneqq \sum_{\nu=1}^{m} f\big(M(\tau_\nu)\big)(y_\nu - y_{\nu-1})$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall \mathtt{P} \quad t_\nu - t_{\nu-1} < \delta, \quad \nu = 1, \ldots, m \quad \Longrightarrow \left| \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\,x - \mathtt{S}_x \right| < \varepsilon, \quad \left| \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\,y - \mathtt{S}_y \right| < \varepsilon$$

То есть, последовательность сумм Римана сходится к интегралу.

**Доказательство.**

1. Очевидно.

2. $c = a + bi, \qquad f = u + iv$

$$cf = au - bv + i(av + bu)$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} cf \,\mathrm{d}\,x = \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} (au - bv) \,\mathrm{d}\,x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} (av + bu) \,\mathrm{d}\,x = a \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} u \,\mathrm{d}\,x - b \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} v \,\mathrm{d}\,x + i\Big(a \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} v \,\mathrm{d}\,x + b \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} u \,\mathrm{d}\,x\Big) =$$

$$= a\Big(\int u \,\mathrm{d}\,x + i \int v \,\mathrm{d}\,x\Big) + b\Big(-\int v \,\mathrm{d}\,x + i \int u \,\mathrm{d}\,x\Big) = a \int f \,\mathrm{d}\,x + bi \int f \,\mathrm{d}\,x = c \int f \,\mathrm{d}\,x$$

3. Очевидно.

4. Следует из аналогичной теоремы для вещественных криволинейных интегралов второго рода.

$\square$

## 2. Криволинейные интегралы от комплекснозначных функций и криволинейные интегралы первого рода

**Определение 2** (криволинейный интеграл второго рода).

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(z) \,\mathrm{d}\,z \coloneqq \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(z) \,\mathrm{d}\,x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(z) \,\mathrm{d}\,y$$

**Свойства.**

1. $\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} (f + g) \,\mathrm{d}\,z = \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\,z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} g \,\mathrm{d}\,z$

2. $\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} cf \,\mathrm{d}\,z = c \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\,z$

3. $\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\,z = -\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\,z$

4. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} : z(t), \quad t \in [a,b], \qquad f : \overset{\curvearrowright}{\Gamma} \to \mathbb{C}, \qquad \mathtt{T} = \{\, t_\nu \,\}_{\nu=0}^{m}, \qquad \mathtt{P} = \{\, \tau_\nu \,\}_{\nu=1}^{m}$

$$z_\nu \coloneqq z(t_\nu) = x(t_\nu) + iy(t_\nu), \qquad x_\nu \coloneqq x(t_\nu), \quad y_\nu \coloneqq y(t_\nu), \qquad \widehat{z}_\nu \coloneqq z(\tau_\nu)$$

$$\mathtt{S}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \coloneqq \sum_{\nu=1}^{m} f(\widehat{z}_\nu)(z_\nu - z_{\nu-1})$$

$f \in \mathcal{C}\big(\Gamma\big)$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall \mathtt{T} : t_\nu - t_{\nu-1} < \delta, \quad \nu = 1, \dots, m \quad \forall \mathtt{P} \quad \Bigg| \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, z - \mathtt{S}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \Bigg| < \varepsilon$$

5. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} : [a,b] \to \mathbb{C}, \qquad z(a) = A, \quad z(b) = B, \qquad c \in \mathbb{C}$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} c \,\mathrm{d}\, z = c(B - A)$$

6. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} \in \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{C}\big(\Gamma\big), \qquad c \in \overset{\curvearrowright}{\Gamma}, \qquad \overset{\curvearrowright}{\Gamma} = \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1 \cup \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_2, \qquad \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1 \cap \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_2 = \{\, c \,\}$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(z) \,\mathrm{d}\, z = \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1} f(z) \,\mathrm{d}\, z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_2} f(z) \,\mathrm{d}\, z$$

7. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} \subset \mathbb{C}, \qquad f : \Gamma \to \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{C}\big(\Gamma\big), \qquad \Gamma \leftrightarrow \Gamma^*$

$$\Bigg| \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(z) \,\mathrm{d}\, z \Bigg| \le \int\limits_{\Gamma^*} |f^*(M)| \,\mathrm{d}\, l(M)$$

В дальнейшем мы будем такой интеграл обозначать $\int\limits_{\Gamma} |f(z)|\,|\mathrm{d}\, z|$.

8. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} \subset \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{C}\big(\Gamma\big), \qquad \theta \in (0, 2\pi)$

$$\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_\theta \coloneqq e^{i\theta} \overset{\curvearrowright}{\Gamma}$$

То есть,

$$\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_\theta = \big\{\, z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i\theta}\zeta, \quad \zeta \in \Gamma \,\big\}$$

$$f_\theta(z) \coloneqq f\big(e^{-i\theta} z\big), \quad z \in \Gamma_\theta$$

$$\Longrightarrow \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(\zeta) \,\mathrm{d}\, \zeta = e^{-i\theta} \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_\theta} f_\theta(z) \,\mathrm{d}\, z$$

**Доказательство.**

1. Очевидно.
2. $c = a + bi$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} cf \,\mathrm{d}\, z \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} cf \,\mathrm{d}\, x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} cf \,\mathrm{d}\, y = c \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, x + ic \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, y = c \Bigg( \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, y \Bigg) \overset{\text{def}}{=} c \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, z$$

3. $\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, z = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, y = - \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, x - \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, y = - \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, z$

4. $\mathtt{S}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) = \mathtt{S}_x(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) + i\mathtt{S}_y(f, \mathtt{T}, \mathtt{P})$
   Воспользуемся аналогичным свойством для $\mathtt{S}_x, \mathtt{S}_y$. Пусть

$$\left|\int f \,\mathrm{d}\, y - \mathtt{S}_x\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \left|\int f \,\mathrm{d}\, y - \mathtt{S}_y\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left|\int f \,\mathrm{d}\, z - \mathtt{S}\right| = \left|(\ldots x) + i(\ldots y)\right| \le |\ldots x| + |\ldots y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

5. Применим св-во 4. Рассмотрим любые $\mathtt{T}, \mathtt{P}$.
   Рассмотрим интегральную сумму

$$\mathtt{S}(c, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{m} c(z_\nu - z_{\nu-1}) = c \sum (z_\nu - z_{\nu-1}) = c(B - A)$$

6. Докажем для случая, когда $\Gamma$ — гладкая кривая.

$$\overset{\curvearrowright}{\Gamma}([a, b]) : [a, b] \to \mathbb{C} \quad\iff\quad \overset{\curvearrowright}{\Gamma}{}^{*}([a, b])$$

$$t \in [a, b], \qquad \Gamma^* : M(t), \qquad M(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(z) \,\mathrm{d}\, z = \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}{}^*} f\big(M(t)\big) \,\mathrm{d}\, x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}{}^*} f\big(M(t)\big) \,\mathrm{d}\, y = \int_a^b f^*\big(M(t)\big) x'(t) \,\mathrm{d}\, t + i \int_a^b f^*\big(M(t)\big) y'(t) \,\mathrm{d}\, t =$$

$$= \int_a^b f^*\big(M(t)\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big) \,\mathrm{d}\, t = \int_a^b f\big(z(t)\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big) \,\mathrm{d}\, t =$$

$$= \int_a^{t_0} f\big(z(t)\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big) \,\mathrm{d}\, t + \int_{t_0}^b f\big(z(t)\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big) \,\mathrm{d}\, t$$

Прочитывая эти равенства теперь в обратном порядке, получаем, что это равно

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1} f(z) \,\mathrm{d}\, z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_2} f(z) \,\mathrm{d}\, z$$

Случай для кусочно-гладких кривых доказывается аналогично.

7. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}([a, b]) \to \mathbb{C}, \qquad \mathtt{T} = \{\, t_j \,\}_{j=0}^{n}, \qquad \mathtt{P} = \{\, \tau_j \,\}_{,=1}^{n} \qquad z_j = z(t_j), \qquad z'_j = z(\tau_j)$

$$\mathtt{S}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} f(z'_j)(z_j - z_{j-1})$$

$$|\mathtt{S}| \le \sum_{j=1}^{n} |f(z'_j)| z_j - z_{j-1}|$$

Перейдём к плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$z(t) = x(t) + iy(t), \qquad M_j = \begin{bmatrix} x(t_j) \\ y(t_j) \end{bmatrix}, \qquad x_j(t) = x(t_j), \quad y_j = y(t_j)$$

$$M'_j = \begin{bmatrix} x(\tau_j) \\ y(\tau_j) \end{bmatrix}, \qquad x'_j = x(\tau_j), \quad y'_j = y(\tau_j)$$

$$\|\mathrm{dist}(M_j, M_{j-1})\| = |z_j - z_{j-1}|$$

$$\|\operatorname{dist}(M_{j-1}\ M_j)\| \leq l\Gamma^*(M_{j-1}, M_j) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} |f(z_j')| \cdot |z - z_{j-1}| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |f^*(M_j')| \cdot l\Gamma(M_{j-1}, M_j) =: \mathtt{S}^*(|f|, \mathtt{T}, \mathtt{P})$$

$$|\mathtt{S}| \leq \mathtt{S}^*$$

Перейдём к пределу:

$$\left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(z)\,\mathrm{d}\,z \right| \leq \int\limits_{\Gamma} |f(z)|\,|\,\mathrm{d}\,z|$$

8. $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}([a,b]) : [a,b] \to \mathbb{C}, \qquad \mathtt{T} = \{\, t_j \,\}_{,=0}^{n} \quad \mathtt{P} = \{\, \tau_j \,\}_{j=1}^{n}, \qquad z_j = z(t_j), \quad z_j' = z(\tau_j)$

$$\mathtt{S}_{\Gamma}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} f(z_j')(z_j - z_{j-1}) = e^{-i\theta} \sum_{j=1}^{n} f\Big(e^{-i\theta}(e^{i\theta})\Big)(e^{i\theta} z_j - e^{i\theta} z_{j-1}) =$$

$$= e^{-i\theta} \sum_{j=1}^{n} f_\theta(e^{i\theta} z_j')(e^{i\theta} z_j - e^{i\theta} z_{j-1}) = e^{-i\theta} \mathtt{S}_{\Gamma_\theta}(f_\theta, \mathtt{T}, \mathtt{P})$$

□

По индукции из свойства 6 получаем следующее утверждение:

**Свойство.** $c_1, \ldots, c_n \in \overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{j=1}^{n+1} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma_j}} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

## 3. Теорема Коши для прямоугольника

**Теорема 1.** $G \subset \mathbb{C}, \qquad f \in A(G), \qquad Q = \{\, z = x + iy \mid a \leq x \leq b, \quad p \leq y \leq q \,\} \subset G$

$$\Longrightarrow \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial Q}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$$

**Примечание.** Здесь ориентация роли не играет.

**Доказательство.** Обозначим

$$A = a + pi, \qquad B = b + pi, \qquad C = b + qi, \qquad D = a + qi$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial Q}} \cdots = \int\limits_{\overrightarrow{AB}} + \int\limits_{\overrightarrow{BC}} + \int\limits_{\overrightarrow{CD}} + \int\limits_{\overrightarrow{DA}} = \Bigg( \int\limits_{\overrightarrow{AB}} - \int\limits_{\overrightarrow{DC}} \Bigg) + \Bigg( \int\limits_{\overrightarrow{BC}} - \int\limits_{\overrightarrow{AD}} \Bigg)$$

Рассмотрим параметризацию $AB$:

$$\overrightarrow{AB} = \{\, t + pi \mid t \in [a,b] \,\}$$

$$\int\limits_{\overrightarrow{AB}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_a^b f(t + pi)\,\mathrm{d}\,t$$

Аналогично,

$$\overrightarrow{DC} = \{\, t + qi \,\}, \qquad \overrightarrow{BC} = \{\, b + it \,\}, \qquad \overrightarrow{AD} = a + ti$$

$$\int\limits_{\overrightarrow{DC}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_a^b f(t+qi)\,\mathrm{d}\,t, \qquad \int\limits_{\overrightarrow{BC}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = i\int_p^q f(b+ti)\,\mathrm{d}\,t, \qquad \int\limits_{\overrightarrow{AD}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = i\int_p^q f(a+ti)\,\mathrm{d}\,t$$

Всё это означает, что

$$\int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\partial Q}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \left(\int_a^b f(t+pi)\,\mathrm{d}\,t - \int_a^b f(t+qi)\,\mathrm{d}\,t\right) + \left(i\int_p^q f(b+ti)\,\mathrm{d}\,t - i\int_p^q f(a+ti)\,\mathrm{d}\,t\right) \tag{1}$$

Перейдём к плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$\int_a^b f^*(t,q)\,\mathrm{d}\,t - \int_a^b f^*(t,p)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b \Big(f^*(x,q) - f^*(x,p)\Big)\,\mathrm{d}\,x$$

$f^* \in \mathcal{C}^1\big(G^*\big)$, значит, можно применить формулу Ньютона—Лейбница:

$$= \int_a^b \left(\int_p^q f^{*\prime}_y(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,x$$

Аналогично,

$$\int_p^q f^*(b,y) - f^*(a,y)\,\mathrm{d}\,y = \int_p^q \left(\int_a^b f^{*\prime}_x(x,y)\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,y$$

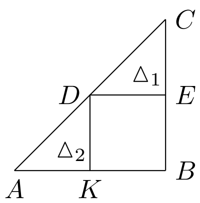
Подставляя последние две выкладки в (1), получаем

$$\int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\partial Q}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = -\int_a^b\int_p^q f^{*\prime}_y(x,y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x + i\int_p^q\int_a^b f^{*\prime}_x(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y =$$

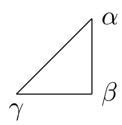
$$= \int_a^b\int_p^q -f^{*\prime}_y + if^{*\prime}_x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x = 2i\int_a^b\int_p^q \frac{1}{2}\Big(f^{*\prime}_x + if^{*\prime}_x\Big)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x \overset{\text{def}}{=} 2i\int_a^b\int_p^q \underbrace{f'_{\overline{z}}}_{0}\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x = 0$$

□

## 4. Теорема Коши для прямоугольного треугольника




(a) Прямоугольный треугольник




(b) Прямоугольный треугольничек

**Теорема 2.** Рассматриваем треугольник $ABC$ (рис. 1a).

$$f \in \mathcal{A}(G), \qquad A = a+pi, \quad B = b+pi, \quad c = b+qi, \qquad a<b, \quad p<q, \qquad \triangle\ ABC \subset G$$

$$I := \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\partial\triangle ABC}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$$

**Доказательство.** Рассмотрим точки:

$$D = \frac{a+b}{2} + i\frac{p+q}{2}, \qquad K = \frac{a+b}{2} + pi, \qquad E = b + i\frac{p+q}{2}$$

$$\int\limits_{\circlearrowleft\partial\triangle ABC} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int\limits_{\circlearrowleft\partial\square} + \int\limits_{\circlearrowleft\partial\triangle_1} + \int\limits_{\circlearrowleft\partial\triangle_2}$$

При этом,

$$\int\limits_{\overrightarrow{ED}} + \int\limits_{\overrightarrow{DE}} = 0, \qquad \int\limits_{\overrightarrow{DK}} + \int\limits_{\overrightarrow{KD}} = 0$$

К каждому из треугольников можно применить такое же рассуждение, а к прямоугольникам — теорему Коши для прямоугольника. Получаем

$$I = \sum_{k=1}^{2^n} I_{n_k} \tag{2}$$

$$I_{n_k} = \int\limits_{\circlearrowleft\partial\triangle_{n_k}} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

Рассмотрим какой-то из шагов (треугольник обозначим $\alpha\beta\gamma$, рис. 1b):

$$\int\limits_{\circlearrowleft\partial\triangle\alpha\beta\gamma} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int\limits_{\circlearrowleft\partial\triangle\alpha\beta\gamma} f(z) - f(\alpha)\,\mathrm{d}\,z + f(\alpha)\int\limits_{\circlearrowleft\partial\triangle\alpha\beta\gamma} 1\,\mathrm{d}\,z$$

Второй интеграл равен 0 (по св-ву 5 криволинейных интегралов). Значит, это равно

$$\int\limits_{\circlearrowleft\partial\triangle\alpha\beta\gamma} f(z) - f(\alpha)\,\mathrm{d}\,z$$

По св-ву 7 криволинейных интегралов, это означает, что

$$\left|\int\limits_{\circlearrowleft\partial\triangle\alpha\beta\gamma} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \le \int\limits_{\partial\triangle\alpha\beta\gamma} |f(z) - f(\alpha)|\,|\mathrm{d}\,z| \tag{3}$$

Применим теорему Кантора:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0: \quad \forall\alpha\in[A, C], \quad z\in\partial\triangle\alpha\beta\gamma \quad |f(z) - f(\alpha)| < \varepsilon$$

Выберем $n$ так, что

$$z^{-n}\cdot|C - A| < \delta$$

Тогда

$$\int\limits_{\partial\triangle\alpha\beta\gamma} |f(z) - f(\alpha)|\,|\mathrm{d}\,z| < \varepsilon\int\limits_{\partial\triangle\alpha\beta\gamma} |\mathrm{d}\,z| \underset{\text{из геом. сообр.}}{<} 3\varepsilon|\gamma - \alpha| = 3\varepsilon\cdot|C - A|\cdot 2^{-n}$$

$$\underset{(3)}{\Longrightarrow} \forall k \quad |I_{n_k}| < 3\varepsilon|C - A|\cdot 2^{-n}$$

$$\underset{(2)}{\Longrightarrow} |I| \le \sum_{k=1}^{2^n} |I_{n_k} < 3\varepsilon|C - A|\cdot 2^{-n}\cdot 2^n = 3\varepsilon|C - A|$$

$$\Longrightarrow |I| = 0$$

□

Если треугольник перевернуть относительно оси ординат, результат не изменится.

**Замечание.** Аналитичность $f$ использовалась для прямоугольника.

## 5. Теорема Коши для произвольного треугольника


(a) (b)

**Теорема 3.** Рассматриваем треугольник $ABC$ (рис. 2a)

$$A = a + pi, \quad B = b + pi, \quad C = d + qi, \qquad a < d < l, \qquad q > p$$

$$\underbrace{\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial}\triangle ADC}}_{0} + \underbrace{\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial}\triangle DBC}}_{0} = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial}\triangle ABC} = 0$$

**Теорема 4.** Рассматриваем треугольник $ABC$ (рис. 2b). Считаем, что наибольшая сторона — это $AB$.

Возьмём $\theta$ так, что $e^{i\theta} \cdot \triangle\, ABC$ повёрнут "правильно".

$$f_\theta(z) \coloneqq f(e^{-i\theta} z), \qquad f_\theta \in A(G_\theta)$$

Получаем треугольник $A_1B_1C_1$ из предыдущей теоремы.

Дальше пользуемся свойством 8 криволинейных интегралов.

## 6. Теорема Коши для многоугольника

**Теорема 5.** Имеется некая конечносвязная многоугольная область $D$, ограниченная многоугольниками $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$.

$$\partial D = \bigcup_{\nu=1}^{k} \Gamma_\nu$$

Пусть есть область $G$ такая, что $G \supset \overline{D}$ и функция $f \in \mathcal{A}(G)$. Рассмотрим

$$\overset{\curvearrowleft}{\partial} D = \bigcup_{\nu=1}^{k} \overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_\nu,$$

при этом, каждая кривая $\Gamma_\nu$ положительно ориентированна относительно области $D$.

$$\implies \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial} D} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$$

**Доказательство.** Применим теорему о триангуляции конечносвязной многоугольной области:

$$\exists \{\, \Delta_k \,\}_{k=1}^{N}, \quad \Delta_k \text{ — откр.:} \qquad \begin{cases} \Delta_k \cap \Delta_l = \emptyset, \quad k \neq l \\ \overline{\Delta}_k \cap \overline{\Delta}_l = \begin{cases} \emptyset \\ \text{общая вершина} \\ \text{общая сторона} \end{cases} \\ \bigcup_{k=1}^{N} \overline{\Delta}_k = \overline{D} \end{cases}$$

Рассмотрим

$$\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial}\Delta_k} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

Каждый из них представим в виде суммы интегралов по трём сторонам. В результате:

1. каждый внутренний отрезок мы пройдём дважды в разных направлениях;
2. все “внутренние” границы (многоугольники) проходятся полностью в отрицательном (относительно внешнего многоугольника) направлении;
3. остаётся только “внешняя” граница.

$$\sum = 0$$

□

## 7. Лемма об оценке интеграла

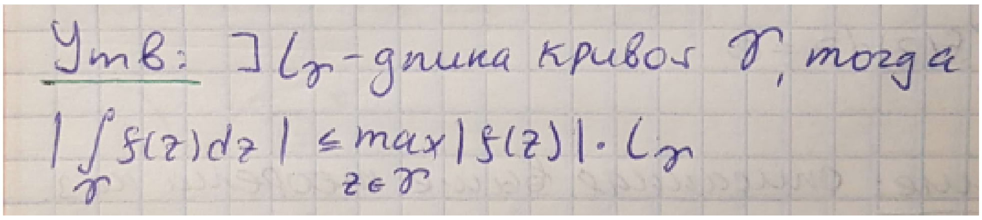



Рис. 3: Лемма из конспектов прошлых лет.

**Примечание.** Эту лемму я найти не смог, так что исхожу из предположения, что она отдельно не выделялась и спрятана в следующей теореме. Также, предполагаю, что на рис. 3 приведена эта лемма[a]. Возможно, лемма об оценке интеграла — это вообще другое.

[a] Источник. Низкий поклон этим людям.

**Лемма 1.**

$$\left|\int\limits_{\circlearrowleft\,\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \leq \max_{z\in\Gamma}|f(z)|\cdot l\Gamma$$

**Доказательство.** По свойству 7 криволинейных интегралов,

$$\left|\int\limits_{\circlearrowleft\,\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \leq \int\limits_{\Gamma}|f(z)|\,|\mathrm{d}\,z| \leq \int\limits_{\Gamma}\max|f(z)|\,|\mathrm{d}\,z| \underset{\text{св-во 6}}{\leq} \max|f(z)|\cdot l\Gamma$$

□

## 8. Теорема Коши для области с кусочно-гладкими границами

**Теорема 6.** $G\subset\mathbb{C}$, $\quad \overline{D}\subset G$, $\quad \partial D = \bigcup_{k=1}^{m}\Gamma_k$, $\quad \Gamma_k$ кусочно-гладкие, $\quad f\in\mathcal{A}(G)$

$$\int\limits_{\circlearrowleft\,\partial D} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$$

**Доказательство.** Пусть $\Gamma_k : [a,b]\to\mathbb{C}$.

$$\exists\delta_0>0:\quad \forall\zeta\in\partial D\quad \overline{\mathtt{B}}(\zeta) = \{\, z \mid |z-\zeta|\leq\delta_0 \,\}\subset G$$

$$T_{\delta_0} := \bigcup_{\zeta\in\partial D}\overline{\mathtt{B}_{\delta_0}(\zeta)}$$

**Утверждение 1.** $T_{\delta_0}$ — компакт.

**Доказательство.** Упражнение. $\square$

Значит, по теореме Кантора,
$f \in \mathcal{C}\big(T_{\delta_0}\big) \implies f$ равномерно непрерывна на $T_{\delta_0}$. То есть,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists 0 < \delta_1 \leq \delta_0 : \quad \forall z_1, z_2 \in T_{\delta_0} : |z_1 - z_2| < \delta_1 \quad |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon \tag{4}$$

Обозначим $\mathtt{P}_k = \{\, t_{kj} \,\}_{j=0}^{N_k}, \quad t_{k0} = a_k, \quad t_{kN_k} = b_k, \quad k = 1, \ldots, m.$
Выберем его так, чтобы

$$\forall t \in [t_{kj}, t_{k\ j+1}] \quad |\Gamma(t) - \Gamma(t_{kj})| < \delta_1$$

Такое разбиение можно выбрать в силу равномерной непрерывности.

Обозначим многоугольник $S_k = \{\, \Gamma(t_{kj}) \,\}_{j=0}^{M_k}$.

Обозначим $\widetilde{D}$ так, что $\partial\widetilde{D} = \bigcup_{k=1}^{m} S_k$. По определению $\widetilde{D} \subset G$. Применим к $\widetilde{D}$ аналогичную теорему для многоугольников:

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial \widetilde{D}}} f(z)\, \mathrm{d}\, z = 0 \quad \implies \quad \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial \widetilde{D}}} f(z)\, \mathrm{d}\, z = 0 \quad \implies \quad \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial D}} f(z)\, \mathrm{d}\, z = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial D}} f(z)\, \mathrm{d}\, z + \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial \widetilde{D}}} f(z)\, \mathrm{d}\, z \tag{5}$$

Рассмотрим некоторую кривую $\Gamma_k$ (ориентация согласована с общей ориентацией границы).
Обозначим $\Gamma(t_{kj}) =: z_{kj}, \quad 0 \leq j \leq N_k$.

Рассмотрим случай, когда $k = 1$ (остальные — аналогично). Это внешняя кривая. Т. к. кривая замкнутая, $z_{k0} = z_{kN_k}$.

Рассмотрим точки $z_{1j}, z_{1\ j+1}, z_{1\ j+2}$. Они обходятся в положительном направлении. Но, если рассматривать многоугольник $S_1$, то на нём эти же точки обходятся в противоположном направлении.

Обозначим $\overset{\curvearrowleft}{\gamma}_{1j} \coloneqq \Gamma([t_{1j}, t_{1\ j+1}])$. По одному из свойств,

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_1} f(z)\, \mathrm{d}\, z = \sum_{j=0}^{N_1-1} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma}_{1j}} f(z)\, \mathrm{d}\, z$$

Обозначим $\sigma_{1j}$ — отрезок с концами $z_{1j}, z_{1\ j+1}$. Тогда

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S}_1} f(z)\, \mathrm{d}\, z = \sum_{j=0}^{N_1-1} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\sigma}_{1j}} f(z)\, \mathrm{d}\, z$$

Из последних двух выражений получаем, что

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_1} f(z)\, \mathrm{d}\, z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{S}_1} f(z)\, \mathrm{d}\, z = \sum_{j=0}^{N_1-1} \left( \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma}_{1j}} f(z)\, \mathrm{d}\, z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\sigma}_{1j}} f(z)\, \mathrm{d}\, z \right) \tag{6}$$

Возьмём $c \in \mathbb{C}$.

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma}_{1j}} c\, \mathrm{d}\, z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\sigma}_{1j}} c\, \mathrm{d}\, z = c(z_{1\ j+1} - z_{1j}) + c(z_{1j} - z_{1\ j+1}) = 0 \quad \forall c$$

Пусть теперь $c = -f(z_{1j})$

$$(6) = \sum_{j=0}^{N_1-1} \left( \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma}_{1j}} \big(f(z) - f(z_{1j})\big)\, \mathrm{d}\, z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\sigma}_{1j}} \big(f(z) - f(z_{1j})\big)\, \mathrm{d}\, z \right) \tag{7}$$

Выберем разбиения такие, чтобы

$$\forall k \quad \forall j \quad \forall y \in [t_{kj}, t_{k\ j+1}] \quad |\Gamma_k(t) - \Gamma_k(t_{kj})| < \delta_1$$

Тогда при $z \in \gamma_{1j}$ и $z \in \sigma_{1j}$ можно применить лемму:

$$\Big| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma_{1j}}} f(z) - f(z_{1j})\,\mathrm{d}\,z \Big| \le \varepsilon \cdot l\gamma_{1j}, \quad \Big| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\sigma_{1j}}} f(z) - f(z_1)\,\mathrm{d}\,z \Big| \le \varepsilon \cdot l\sigma_{1j}$$

$$\implies \Big| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma_{1j}}} f(z)\ \mathrm{d}\,z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\sigma_{1j}}} f(z)\ \mathrm{d}\,z \Big| < 2\varepsilon \cdot l\ \gamma_{1j}$$

$$\underset{(7)}{\implies} \Big| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma_{1j}}} f(z)\ \mathrm{d}\,z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\sigma_{1j}}} f(z)\ \mathrm{d}\,z \Big| < 2\varepsilon \sum_{j=0}^{N_1-1} l\ \gamma_{1j} = 2\varepsilon l\Gamma_1$$

При остальных $k$ — аналогично.

$$\underset{(5)}{\implies} \Big| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\ D}} f(z)\ \mathrm{d}\,z \Big| < 2\varepsilon \sum l\Gamma_k \quad \implies \quad \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\ D}} f(z)\ \mathrm{d}\,z = 0$$

□

# 9. Формула Коши для функции, аналитической в круге

**Теорема 7.** $G \subset \mathbb{C}, \qquad D = \mathtt{B}_r(z_0), \qquad \overline{D} \subset G, \qquad f \in \mathcal{A}(G), \qquad z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\ D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta \tag{8}$$

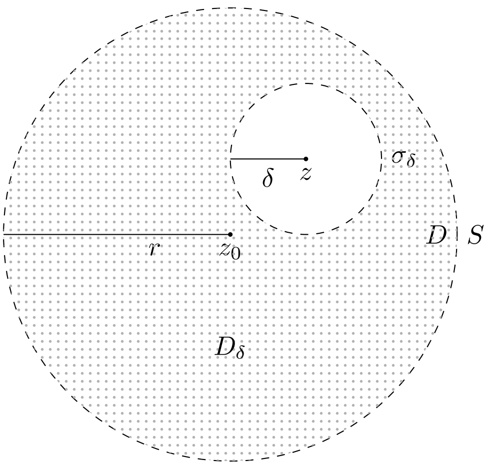



Рис. 4: Картинка к доказательству

**Доказательство.** Возьмём $\delta > 0$ так, чтобы $\delta < r - |z - z_0|$.
Рассмотрим $\mathtt{B}_\delta = \{\, \zeta \mid |\,\zeta - z| < \delta \,\}$. Понятно, что $\overline{\mathtt{B}}_\delta \subset D$.

Рассмотрим

$$\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

Она аналитична в $D \setminus \{\, z \,\}$.

Рассмотрим область $D_\delta = D \setminus \overline{\mathtt{B}}_\delta$.

$$\overline{D}_\delta \subset G \setminus \{\, z \,\}$$

По теореме Коши,

$$\int\limits_{\circlearrowleft \partial D_\delta} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta = 0 \tag{9}$$

Обозначим $S = \{\, \zeta \mid |\, \zeta - z_0| = r \,\}$, $\quad \sigma_\delta = \{\, \zeta \mid |\, \zeta - z| = \delta \,\}$.

$$(9) \implies \int\limits_{\circlearrowleft S} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta + \int\limits_{\circlearrowright \sigma_\delta} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta = 0 \quad \iff \quad \int\limits_{\circlearrowleft S} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta = -\int\limits_{\circlearrowright \sigma_\delta} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta = \int\limits_{\circlearrowleft \sigma_\delta} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta$$

$$\int\limits_{\circlearrowleft \sigma_\delta} \varphi(\zeta) + \varphi(z)\,\mathrm{d}\,\zeta \overset{\mathrm{def}\,\varphi}{=\!=\!=} \int\limits_{\circlearrowleft \sigma_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta + \int\limits_{\circlearrowleft \sigma_\delta} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta \tag{10}$$

$$\int\limits_{\circlearrowleft \sigma_\delta} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = f(z) \int\limits_{\circlearrowleft \sigma_\delta} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta \tag{11}$$

$$\circlearrowleft \sigma_\delta = \{\, \zeta \mid \zeta = z + \delta e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi] \,\}$$

$$\left(\delta e^{i\theta}\right)'_\theta = i\delta e^{i\theta}$$

$$\int\limits_{\circlearrowleft \sigma_\delta} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{\left(\delta e^{i\theta}\right)'}{\delta e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\,\theta = 2\pi i$$

$$\underset{(11)}{\implies} \int\limits_{\circlearrowleft \sigma_\delta} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = 2\pi i f(z)$$

$$\underset{(10)}{\implies} \int\limits_{\circlearrowleft S} \frac{f(\zeta) + f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = \int\limits_{\circlearrowleft \sigma_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta + 2\pi i f(z) \tag{12}$$

В силу непрерывности

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall \zeta \in \sigma_\delta \quad |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$$

$$\left| \int\limits_{\circlearrowleft \sigma_\delta} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta \right| \le \int\limits_{\sigma_\delta} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|}\,|\,\mathrm{d}\,\zeta| \le \int\limits_{\sigma_\delta} \frac{\varepsilon}{\delta}\,|\,\mathrm{d}\,\zeta| = \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot 2\pi\delta = 2\pi\varepsilon$$

$$\underset{(12)}{\implies} \left| \int\limits_{\circlearrowleft S} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta - 2\pi i f(z) \right| = \left| \int\limits_{\circlearrowleft \sigma_\delta} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta \right| \le 2\pi\varepsilon$$

$$\implies \int\limits_{\circlearrowleft S} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta - 2\pi i f(z) = 0$$

□

## 10. Бесконечная гладкость аналитической функции

**Замечание** (о предстоящем рассуждении).

$$f'_z = \frac{1}{2}(f'_x - i f'_y), \qquad f'_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f'_x + i f'_y) = 0$$

$$f' = f'_z = f'_z + f'_{\overline{z}} = f'_x, \qquad f' = f'_z = f'_z - f'_{\overline{z}} = i f'_y$$

$$f'_y = i f'$$

$$z^\alpha, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$z^\alpha \overset{\text{def}}{=} e^{\alpha \ln z}$$

$z^n, \quad n \in \mathbb{N}$ определено при $z \in \mathbb{C}$
$z^{-n}$ определено при $z \in \mathbb{C} \setminus \{ 0 \}$

$$(z^n)' = nz^{n-1}$$

$$(z^{-n})' = -nz^{-n-1}$$

$$\Big((z-a)^{-n}\Big)' = -n(z-a)^{-n-1}$$

$$\Big((z-a)^{-n}\Big)'_x = -n(z-a)^{-n-1}, \qquad \Big((z-a)^{-n}\Big)'_y = -in(z-a)^{-n-1}$$

$$\left(\frac{1}{z-a}\right)'_x = -\frac{1}{(z-a)^2}, \qquad \left(\frac{1}{z-a}\right)'_y = -i\frac{1}{(z-a)^2}$$

$$\implies \left(\frac{1}{a-z}\right)'_x = \frac{1}{(a-z)^2}, \qquad \left(\frac{1}{a-z}\right)'_y = \frac{i}{(a-z)^2}$$

$$\left(\frac{1}{a-z}\right)''_{xx} = \left(\frac{1}{(a-z)^2}\right)'_x = \frac{2}{(a-z)^3}, \qquad \left(\frac{1}{a-z}\right)''_{xy} = i\left(\frac{1}{(a-z)^2}\right) = \frac{2i}{(a-z)^3}$$

$$\left(\frac{1}{a-z}\right)''_{yy} = i\left(\frac{1}{(a-z)^2}\right)'_y = \frac{2i^2}{(a-z)^3}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\left(\frac{1}{a-z}\right)_{\underbrace{x\dots x}_{m}\underbrace{y\dots y}_{n}} = \frac{(m+n)!i^n}{(a-z)^{m+n+1}} \tag{13}$$

**Теорема 8.** $D \subset \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{A}(D) \qquad \implies \qquad f \in \mathcal{C}^\infty(D)$

**Доказательство.**

1. $D = \{ z \mid |z-a| < R \}$

   Выберем $0 < \rho < R$ и $\rho < r < R$. Обозначим $S = \{ z \mid |z-a| = r \}$. Применим формулу Коши:

   $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_S \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\,\zeta$$

   При этом, $S = \left\{ z = a + re^{i\theta} \right\}$. Значит,

   $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})}{a+re^{i\theta}-z} ire^{i\theta} \, \mathrm{d}\,\theta$$

   При этом, $z = x + iy$.

   > **Утверждение 2.** Теоремы о непрерывности интегралов от параметра и о производной интеграла от параметра остаются справедливыми, если функции комплекснозначные, а параметров несколько.

   Применим их и воспользуемся формулой (13):

   $$\Big(f(z)\Big)^{(m+n)}_{\underbrace{x\dots x}_{m}\underbrace{y\dots y}_{n}} = (m+n)!i^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})ir}{(a+re^{i\theta}-z)^{m+n+1}} \, \mathrm{d}\,\theta =$$

   $$= (m+n)!i^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_S \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{m+n+1}} \, \mathrm{d}\,\zeta$$

$$\Longrightarrow \quad \big(f(z)\big)^{(m+n)}_{\underbrace{x\dots x}_{m}\underbrace{y\dots y}_{n}} \in \mathcal{C}\big(\{\, z \mid |\, z-a| \le \rho \,\}\big)$$

В силу произвольности $\rho$ это означает, что $f \in \mathcal{C}^{m+n}\big(\{\, z \mid |\, z-a| < R \,\}\big)$. Значит, $f \in \mathcal{C}^\infty\big(|z-a| < R\big)$.

2. Произвольная область $D \subset \mathbb{C}$

   Возьмём $a \in D$

$$\exists R: \quad \{\, z \mid |\, z-a| < R \,\} \subset D$$

   По только что доказанному $f \in \mathcal{C}^\infty\big(\{\, z \mid |\, z-a| < R \,\}\big)$.

   Поскольку класс $\mathcal{C}^\infty$ определяется локально, теорема доказана.

□

## 11. Аналитичность производной аналитичной функции

**Теорема 9.** $D \subset \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{A}(D) \qquad \Longrightarrow \qquad f' \in A(D)$

**Доказательство.** $f' = f'_x$

У $f$ были все производные, а значит, и у $f'_x$ есть все производные, то есть $f' \in \mathcal{C}^\infty\big(D\big)$.

1. Рассмотрим $D = \{\, z \mid |\, z-a| < R \,\}, \quad 0 < \rho < r < R$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\,\zeta$$

$$f'(z) = f'_x(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \,\mathrm{d}\,\zeta$$

   Применим формулу (13):

$$\left.\begin{aligned} \big(f'_x(z)\big)'_x &= 2 \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} \,\mathrm{d}\,\zeta \\ \big(f'_x(z)\big)'_y &= 2i \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} \,\mathrm{d}\,\zeta \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \ (f'_x)'_{\overline{z}} = 0$$

$$\Longrightarrow \ \big(f'(z)\big)'_{\overline{z}} \equiv 0 \qquad \text{при } |z-a| < \rho$$

   В силу произвольности $\rho$

$$\big(f'(z)\big)'_{\overline{z}} = 0 \qquad \text{при } |z-a| < R$$

2. Пусть теперь $D$ — произвольная область

$$\exists R: \quad \{\, z \mid |\, z-a| < R \,\} \subset D$$

□

$$f \in \mathcal{A}(z \mid |z-a| < R), \qquad \rho < r < R, \qquad f'_x = f'$$

Но $f'$ тоже аналитична.

$$(f')'_x = (f')'$$

Это называется *второй комплексной производной*:

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int\limits_{S} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} \,\mathrm{d}\,\zeta$$

## 12. Формула Коши для $f^{(n)}$

Вычислим третью производную по той же формуле:

$$f'''(z) = (f'')'(z) = (f'')'_x(z) = \frac{2}{2\pi i}\int\limits_S f(\zeta)\left(\frac{1}{(\zeta - z)^3}\right)'_x \mathrm{d}\,\zeta = \frac{2\cdot 3}{2\pi i}\int\limits_S \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^4}\,\mathrm{d}\,\zeta$$

**Утверждение 3.**

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_S \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta$$

**Доказательство.** Доказывать будем по **индукции**. **База** уже доказана. **Переход**:

$$f^{(n+1)}(z) = \left(f^{(n)}\right)'(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_S f(\zeta)\left(\frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}}\right)' \mathrm{d}\,\zeta = \frac{n!\cdot(n+1)}{2\pi i}\int\limits_S \frac{f(z)}{(\zeta - z)^{n+2}}\,\mathrm{d}\,\zeta =$$

$$= \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int\limits_S \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+2}}\,\mathrm{d}\,\zeta$$

□

## 13. Разложение $f \in A\big(\mathtt{D}_r(a)\big)$ в ряд

**Теорема 10.** $f \in \mathcal{A}(D)$

$$\implies f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n,$$

где ряд сходится в $D$ и $\forall \rho_1 < \rho < R$ ряд сходится равномерно на $\overline{D}_\rho = \{\, z \mid |\, z - z_0| \le \rho \,\}$.

**Доказательство.** $S = \{\, z \mid |\, z - z_0| = R \,\}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

Обозначим $q(\zeta, z) = \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$.

$$|q| = \frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} \le \frac{\rho}{R} =: q_0 < 1$$

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|q^n| \le \sum_{n=1}^{\infty} q_0^n = \frac{q_0}{1 - q_0}$$

Значит, $1 + \sum q^n(z, \zeta)$ равномерно сходится при $\zeta \in S_r,\ z \in \overline{D}_\rho$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_r} f(\zeta)\frac{1}{\zeta - z_0}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n\right] \mathrm{d}\,\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,\mathrm{d}\,\zeta + \sum_{n=1}^{\infty}(z - z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty}(z - z_0)^n\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Обозначим $M = \max\limits_{z\in S} |f(z)|$.

$$|c_n| = \left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_S \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta\right| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{n+1}}\,|\,\mathrm{d}\,\zeta| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \frac{M}{R^{n+1}}\,|\,\mathrm{d}\,\zeta| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi R\cdot\frac{M}{R^{n+1}} = \frac{M}{R^n}$$

$$\implies |z - z_0|^n \cdot |c_n| \le \rho^n \cdot \frac{M}{R^n} = Mq_0^n$$

□

## 14. Разложение элементарных функций в степенной ряд

Мы уже выяснили, что аналитические функции раскладываются в ряд Тейлора:

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Будем рассматривать $z_0 = 0$.

1. $e^z \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$

$$e^0 = 1, \qquad \left(e^z\right)^{(n)}\Big|_{z=0} = (e^z)^{(n)}_{\underbrace{x\dots x}_{n}}\Big|_{z=0} = e^{x(n)}\Big|_{x=0} = 1$$

$$e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

2. $\cos z = 1 + \sum \frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$

3. $\sin z = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}z^{2n-1}$

4. $\log(1+z)$ аналитична при $|z| < 1$ и на $\mathbb{C}\setminus(-\infty, -1]$.
   В этой области достаточно рассмотреть функцию $\log(1+x)$.

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}z^n$$

5. $r \in \mathbb{R}\setminus(\mathbb{N}\cup\{\,0\,\})$

$$(1+z)^r = e^{r\log(1+z)}$$

   Она аналитична при $|z| < 1$. Рассмотрим $(1+x)^r$.

$$(1+z)^r = e^{r\log(1+z)} = 1 + rz + \frac{r(r-1)}{2!}z^2 + \dots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}z^n + \cdots$$

6. $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

$$(1+z)^\alpha = e^{\alpha\log(1+z)} \in \mathcal{A}(|z| < 1)$$

   Здесь нельзя сослаться на вещественный случай — $(1+x)^\alpha \in \mathbb{C}$.

$$1^\alpha = 1$$

$$\Big((1+z)^\alpha\Big) = \Big(e^{\alpha\log(1+z)}\Big)' = (e^w)'\big|_{w=\alpha\log(1+z)}\cdot\big(\alpha\log(1+z)\big)' = e^{\alpha\log(1+z)}\cdot\frac{\alpha}{1+z} =$$

$$= \alpha e^{\alpha\log(1+z)}e^{-\log(1+z)} = \alpha e^{(\alpha-1)\log(1+z)} = \alpha(1+z)^{\alpha-1}$$

$$\Big((1+z)^\alpha\Big)'' = \alpha(\alpha-1)(1+z)^{\alpha-2}$$

$$\Big((1+z)^\alpha\Big)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n}$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n + \cdots$$

## 15. Теорема единственности для аналитических функций с производными

**Теорема 11.** $D \subset \mathbb{C}$ — область, $f \in \mathcal{A}(D)$, $z_0 \in D$, $f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \forall n \geq 1$, $f(z_0) = 0$

$$\implies f(z) \overset{D}{\equiv} 0$$

**Доказательство.** Пусть

$$E = \Big\{ \zeta \in D \mid f(\zeta) = 0, \quad f^{(n)}(\zeta) = 0 \quad \forall n \geq 1 \Big\} \tag{14}$$

По условию $z_0 \in E \implies E \neq \emptyset$.

1. Докажем, что $E$ *относительно замкнуто* в $D$, то есть

**Утверждение 4.** $\{\, \zeta_m \,\}_{m=1}^{\infty}$, $\zeta_m \neq \zeta_l$, $\zeta_m \in E \quad \forall m$, $\zeta_m \xrightarrow[m\to\infty]{} z_*$, $z_* \in D$

$$\implies z_* \in E$$

По условию, $f \in \mathcal{C}(D)$.

$$\xRightarrow[\zeta_m \to z_*]{} f(\zeta_m) \to f(z_*) \tag{15}$$

$$\zeta_m \in E \quad \forall m \quad \underset{(15)}{\implies} 0 \to f(z_*) \implies f(z_*) = 0$$

$$f^{(n)} \in \mathcal{A}(D) \implies f^{(n)} \in \mathcal{C}(D)$$
$$\implies f^{(n)}(\zeta_m) \to f^{(n)}(z_*)$$
$$\implies 0 \to f^{(n)}(z_*) \implies f^{(n)}(z_*) = 0$$
$$\implies z_* \in E$$

2. Докажем, что множество $E$ *относительно открыто* в $D$, то есть

**Утверждение 5.** $z_* \in E \implies \exists \delta > 0: \quad \mathtt{B}_\delta(z_*) \subset E, \quad \mathtt{B}_\delta(z_*) = \{\, \zeta \mid |\zeta - z_*| < \delta \,\}$

$$z_* \in E \implies \exists \delta > 0: \quad \mathtt{B}_\delta(z_*) \subset D$$
$$\implies f \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_\delta(z_*)\big)$$
$$\implies \forall z \in \mathtt{B}_\delta(z_*) \quad f(z) = f(z_*) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_*)}{n!}(z - z_*)^n$$
$$\underset{(14)}{\implies} f(z) = 0 + \sum 0 = 0 \quad \forall z \in \mathtt{B}_\delta(z_*)$$
$$\implies f^{(n)}(z_*) \equiv 0, \quad z \in \mathtt{B}_\delta(z_*), \quad n \geq 1$$

По теореме из топологии, $E$ пусто или $E = D$. Мы уже проверили, что $E$ не пусто. □

**Замечание.** В метрических пространствах утв. 4 эквивалентно замкнутости $E$. Это не какое-то особое свойство.

## 16. Теорема единственности для аналитических функций со значениями функции

**Примечание.** Эта теорема была после теоремы о структуре аналитической функции в окрестности её нуля, так что в доказательстве используется та теорема.

**Теорема 12.** $D \subset \mathbb{C}, \quad E \subset D, \quad z_0$ — т. сг. $E$, $\quad z_0 \in D, \quad f \in \mathcal{A}(D), \quad f(z) \overset{E}{\equiv} 0$

$$\implies f(z) \overset{D}{\equiv} 0$$

**Доказательство.**

$$f(z) \xrightarrow[z \to z_0]{z \in E} f(z_0)$$

$$0 \to f(z_0)$$

То есть, $f(z_0) = 0$. **Пусть** $f(z) \not\equiv 0$. Тогда

$$\exists \varphi(z) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists \delta > 0 : \quad \begin{cases} f(z) = (z - z_0)^{n_0} \varphi(z) \\ |z - z_0| < \delta \quad \implies \quad \varphi(z) \neq 0 \end{cases}$$

$$\implies \text{ если } |z - z_0| < \delta, \quad f(z) = 0 \implies z = z_0 \tag{16}$$

$$z_0 \text{ — т. сг. } E \implies \exists z_1 \in E : \quad |z_1 - z_0| < \delta$$

$$z_1 \in E \implies f(z_1) = 0 \tag{17}$$

(16) и (17) противоречивы. □

**Следствие.** $f \in \mathcal{A}(D), \quad g \in \mathcal{A}(D), \quad \forall z \in E \quad f(z) = g(z)$

$$\implies f(z) \overset{D}{\equiv} g(z)$$

**Доказательство.** Рассмотрим функцию $h(z) = g(z) - f(z)$. В силу аналитичности $f$ и $g$ получаем $h(z) \in \mathcal{A}(D)$.

$$h(z) = 0 \quad \forall z \in E \implies h(z) \equiv 0$$

□

# 17. Структура аналитической функции в окрестности её нуля

**Теорема 13.** $D \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{A}(D), \quad f \not\equiv 0, \quad a \in D, \quad f(a) = 0$

$$\implies \exists n \in \mathbb{N} : \quad f(z) = (z - a)^n v(z)$$

$$\text{где } v \in \mathcal{A}(D) \quad \text{и} \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall z \in \mathtt{B}_\delta(a) \quad v(z) \neq 0$$

**Доказательство.** Рассмотрим $f^{(m)}(a)$. По теореме единственности с производными она не может быть везде равна нулю. Значит,

$$\exists m : f^{(m)}(a) \neq 0$$

Возьмём $n = \min \{ m \mid f^{(m)}(a) \neq 0 \}$. Пусть $\delta_1 > 0$ такое, что $\mathtt{B}_{\delta_1}(a) \subset D$. Тогда $f \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_{\delta_1}(a)\big)$.

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z - a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z - a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z - a)^{n+1} + \cdots$$

$$\implies f(z) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z - a)^{n+1} + \cdots = (z - a)^n \left( \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z - a) + \cdots \right)$$

Возьмём $z \neq a, \quad z \in \mathtt{B}_{\delta_1}(a), \quad (z - a)^n \neq 0$. Тогда

$$\frac{f(z)}{(z - a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z - a) + \cdots$$

Обозначим

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z - a) + \frac{f^{(n+2)}(a)}{(n+2)!}(z - a)^2 + \cdots = v(z)$$

$v(z)$ — степенной ряд, сходящийся в $\mathtt{B}_{\delta_1}(a)$.

$$\implies v \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_{\delta_1}(a)\big)$$

Если $z \neq a$, положим $v(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^n}$.

$$\implies v \in \mathcal{A}(D \setminus \{\, a \,\})$$

Если $z \in \mathtt{B}_{\delta_1}(a)$ и $z \neq a$, то

$$v(z) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a) + \cdots$$

$$\implies f \in \mathcal{A}\Big((D \setminus \{\, a \,\}) \cup \mathtt{B}_{\delta_1}(a)\Big) = \mathcal{A}(D)$$

Обозначим

$$c_1 = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad c_2 = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}, \quad \ldots, \quad c_{k+1} = \frac{f^{(n+k)}(a)}{(n+k)!}, \quad \ldots$$

$$v(z) = c_1 + c_2(z-a) + \cdots + c_k(z-a)^{k-1} + \cdots$$

$$z \in \mathtt{B}_{\delta_1}(a), \qquad c_1 \neq 0, \qquad c_1 = v(a), \qquad v \in \mathcal{C}\big(\mathtt{B}_{\delta_1}(a)\big), \qquad v(a) \neq 0$$

$$\implies \exists 0 < \delta \leq \delta_1 : \quad v(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathtt{B}_\delta(a)$$

При этом, $f(z) = (z-a)^n v(z)$. □

## 18. Аналитическое продолжение вдоль пути

**Определение 3.** $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}, \qquad D_1 \cap D_2 =: G \neq \emptyset, \qquad f_1 \in \mathcal{A}(D_1), \quad f_2 \in \mathcal{A}(D_2)$

$$\forall z \in G \quad f_1(z) = f_2(z)$$

Говорят, что функция $f_1$ *аналитически продолжена* в область $D_2$ функцией $f_2$.

**Теорема 14.** Пусть имеется два аналитических продолжения функции $f_1$ в область $D_2$: $f_2$ и $\widetilde{f}_2$.

$$\implies \widetilde{f}_2(z) \overset{D_2}{=\!=\!=} f_2(z)$$

**Доказательство.** следует из следствия к теореме единственности. □

**Определение 4.** *Путём* $\Gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ называется непрерывное отображение отрезка $[a,b]$ в $\mathbb{C}$.

**Замечание.** Нет требований к инъективности или сюръективности.

**Определение 5.** $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \qquad r_0, r_1, \ldots, r_n > 0$
Рассматриваем круги $\mathtt{B}_{r_k}\big(\Gamma(t_k)\big)$. Будем называть их *системой кругов*, если выполнено

$$\mathtt{B}_{r_k}\big(\Gamma(t_k)\big) \cap \mathtt{B}_{r_{k-1}}\big(\Gamma(t_{k-1})\big) \neq \emptyset, \qquad k = 1, \ldots, n$$

**Определение 6.** Пусть имеется путь $\Gamma(t)$ и система кругов, связанных им.

$$f \in \mathcal{A}\Big(\mathtt{B}_{r_0}\big(\Gamma(t_0)\big)\Big)$$

Будем говорить, что функция $f$ *аналитически продолжена вдоль пути* $\Gamma(t)$ *в круг* $\mathtt{B}_{r_n}\big(\Gamma(t_n)\big) = \mathtt{B}_{r_n}\big(\Gamma(b)\big)$, если функция $f$ аналитически продолжается из круга $r_0$ в круг $r_1$, далее из него в круг $r_2$, и так далее до круга $r_n$.

**Теорема 15.** Аналитическое продолжение вдоль пути единственно.

**Доказательство.** Следует из единственности аналитического продолжения в область. □

## 19. Функции, продолжимые по любому пути

**Определение 7.** $D \subset \mathbb{C}, \qquad B = \mathtt{B}_r(z_0) \subset D, \qquad f \in \mathcal{A}(B)$

Будем говорить, что функция $f$ *продолжима из круга $B$ по любому пути в области $D$*, если

$$\forall \Gamma(t) : [a, b] \to D : \ \Gamma(a) = z_0 \quad f \text{ аналитически продолжается вдоль этого пути,}$$

причём в качестве первого круга мы берём круг $B$.

## 20. Функция $\log z$

**Пример.** $D = \mathbb{C} \setminus \{ 0 \}, \qquad B = \mathtt{B}_1(1)$

Рассмотрим функцию $f(z) = \log z, \quad z \in B$.

$$\log z = \ln |z| + i \arg z, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

Зададим $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$.

Рассмотрим теперь любой круг $\widetilde{B}$. Хотим задать $\operatorname{Arg}$ так, чтобы он был в этом круге непрерывен. Положим $\log z := \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$ при $z \in \widetilde{B}$. Эта функция аналитична в $\widetilde{B}$.

## 21. Теорема о монодромии

**Определение 8.** Область называется *односвязной*, если любой замкнутый путь можно непрерывно деформировать в точку, оставаясь в этой области.

**Теорема 16.** $D$ — односвязная область, $\qquad B = \{ z \mid |z - z_0| < r \} \subset D, \qquad f \in \mathcal{A}(B), \qquad f$ продолжима в $D$ по любому пути.

Тогда $f$ аналитична в $D$, то есть

$$\exists F \in \mathcal{A}(D) : \quad F(z) \overset{B}{\equiv} f(z)$$

**Доказательство.** Можно взять путь, который (вместе с кругами) полностью покроет $D$. По определению, вдоль этого пути функция будет аналитична. □

## 22. Ряд Лорана

**Определение 9.** $0 \le r \le R \le +\infty$

$$D_{r,R}(a) = \{ z \mid r < |z - a| < R \}$$

Будем называть $D_{r,R}$ *кольцом.*

**Теорема 17.** $f \in \mathcal{A}\big(D_{r,R}(a)\big)$

$$\implies \exists c_n \in \mathbb{C} : \quad \forall z \in D_{r,R}(a) \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где ряды сходятся.

Если $r < r_1 < R_1 < R$, то каждый из рядов сходится равномерно и абсолютно при $z \in \overline{D_{r,R}(a)}$.

Эта формула называется разложением функции в *ряд Лорана.*

**Доказательство.**

$$f \in \mathcal{A}\Big(D_{r,R}(a)\Big), \qquad r_1 < r_2 < R_2 < R_1, \qquad r < r_1 < R_1 < R$$

Введём $S_\rho = \{\, z \mid |\, z - a| = \rho \,\}$. Пусть $z \in \overline{D}_{r,R}(a)$.
Возьмём $\varepsilon < \min\{\, r_2 - r_1, R_1 - R_2 \,\}$.
Обозначим $\sigma_\varepsilon = \{\, \zeta \mid |\, \zeta - z| = \varepsilon \,\}$.
Рассмотрим функцию

$$\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \qquad \varphi \in \mathcal{A}\Big(D_{r,R}(a) \setminus \{\, z \,\}\Big)$$

$$G_\varepsilon = D_{r_1,R_1}(a) \setminus \{\, \zeta \mid |\, \zeta - z| \le \varepsilon \,\}$$

$$\int\limits_{\circlearrowleft \partial G_\varepsilon} \varphi(\zeta)\, \mathrm{d}\,\zeta = 0 \quad \iff \quad \int\limits_{S_{R_1}} \varphi(\zeta)\, \mathrm{d}\,\zeta - \int\limits_{S_{r_1}} \varphi(\zeta)\, \mathrm{d}\,\zeta - \int\limits_{\sigma_\varepsilon} \varphi(\zeta)\, \mathrm{d}\,\zeta = 0$$

$$\implies \frac{1}{2\pi i} = \int\limits_{\sigma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta = \int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta - \int\limits_{S_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta \tag{18}$$

$$\{\, \zeta \mid |\, \zeta - z| \le \varepsilon \,\} \subset D_{r,R}(a)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta = f(z) \tag{19}$$

$$(18), (19) \implies f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta \tag{20}$$

- Рассмотрим $S_{R_1}$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}}$$

Обозначим $q_1(z, \zeta) = \frac{z-a}{\zeta-a}$.

$$|q_1(z,\zeta)| \le \frac{R_2}{R_1} = Q_1 < 1$$

$$\implies \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}}\, \mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n \mathrm{d}\,\zeta =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} (z-a)^n \int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, \mathrm{d}\,\zeta \tag{21}$$

Обозначим $c_n(R_1) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, \mathrm{d}\,\zeta$.

$$(21) \implies \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta = c_0(R_1) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(R_1)(z-a)^n$$

- Рассмотрим $S_{r_1}$

$$-\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = -\frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{\frac{\zeta-a}{z-a} - 1} = \frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta-a}{z-a}}$$

Аналогично,

$$c_{-n-1}(r_1) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{r_1}} f(\zeta)(\zeta - a)^n\, \mathrm{d}\,\zeta \tag{22}$$

$$\implies -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(r_1)(z-a)^{-n}$$

Воспользуемся леммой:

$$\iff -\int\limits_{S_{\rho_1}} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta + \int\limits_{S_{\rho_2}} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta = 0 \iff \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{\rho_0}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta \overset{\text{def}}{=} c_n \tag{23}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{r_1}} f(\zeta)(\zeta-a)^n\,\mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{\rho_0}} f(\zeta)(\zeta-a)^n\,\mathrm{d}\,\zeta \overset{\text{def}}{=} c_{-n-1} \tag{24}$$

$$(20),(23),(24) \implies f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

□

**Лемма 2.** $r < \rho_1 < \rho_2 < R, \qquad m \in \mathbb{Z}$

$$\implies \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{\rho_1}} f(\zeta)(\zeta-a)^m\,\mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{\rho_2}} f(\zeta)(\zeta-a)^m\,\mathrm{d}\,\zeta$$

**Доказательство.** Возьмём $\varphi(\zeta) = f(\zeta)(\zeta-a)^m \quad \in \mathcal{A}\big(D_{r,R}(a)\big)$
По теореме Коши,

$$\int\limits_{\partial D_{\rho_1,\rho_2}(a)} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta = 0$$

При этом, $\partial D_{\rho_1,\rho_2} = S_{\rho_1} \cup S_{\rho_2}$. □

## 23. Классификация особых точек аналитических функций; характеристика устранимой особой точки

**Определение 10.** $f \in \mathcal{A}\big(D_{0,R}(a)\big)$
Говорят, что $a$ — *особая точка* функции $f$.

Доказано, что

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{25}$$

Говорят, что

1. $a$ — *устранимая особая точка*, если $c_{-n} = 0 \quad \forall n \geq 1$;
2. функция $f$ имеет в $a$ *полюс*, если

$$\exists n_0 \geq 1 : \quad c_{-n_0} \neq 0, \quad c_{-n} = 0 \quad \forall n > n_0$$

3. $a$ — *существенная особая точка*, если

$$\exists \{\, n_k \,\}_{k=1}^{\infty} : \quad c_{-n_k} \neq 0$$

**Теорема 18.** Чтобы точка $a$ была устранимой особой точкой, **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\exists 0 < r < R, \quad \exists M : \quad |f(z)| \leq M \quad \forall z \in D_{0,r}(a) \tag{26}$$

**Доказательство.**

1. Необходимость

   Из условия на устранимую особую точку и (25) следует, что $f$ раскладывается в степенной ряд, а значит, $f(z) \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_R(a)\big)$ (по последней теореме предыдущего семестра).

2. Достаточность

Возьмём $0 < \varepsilon < r$ и $\varepsilon < |z-a| < r$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta$$

$$\left|-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta\right| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|}\,|\,\mathrm{d}\,\zeta|$$

$$|\zeta - z| \ge |z-a| - |\zeta - a| = |z-a| - \varepsilon \ge \frac{1}{2}|z-a|$$

$$\underset{(26)}{\Longrightarrow}\left|-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta\right| \le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{\frac{1}{2}|z-a|}\cdot 2\pi\varepsilon = \frac{2M\varepsilon}{|z-a|}$$

$$f(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_r}\frac{f(\varepsilon)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\,\mathrm{d}\,\zeta = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

□

## 24. Характеристика полюса

**Теорема 19.** Для того, чтобы $a$ была полюсом **необходимо и достаточно**, чтобы

$$|f(z)| \xrightarrow[z\to a]{} +\infty \tag{27}$$

**Доказательство.**

1. Достаточность

$$f(z) = \sum_{n=1}^{n_0} c_{-n}(z-a)^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(z-a)^n$$

$$\Longrightarrow\ f(z) = (z-a)^{-n_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{n_0-n} + c_0(z-a)^{n_0} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^{n+n_0}\right) =$$
$$= (z-a)^{-n_0}\Big(c_{-n_0} + c_{-n_0+1}(z-a) + \dots\Big)$$

$$\exists \delta_0 > 0: \quad |c_{-n_0} + c_{-n_0+1}(z-a) + \dots| \ge \frac{1}{2}|c_{-n_0}| \quad \text{при } |z-a| < \delta_0$$

$$\Longrightarrow\ |f(z)| \ge |z-a|^{-n_0}\cdot\frac{|c-n_0|}{2}\xrightarrow[z\to a]{} +\infty$$

2. Необходимость

$$(27)\ \Longrightarrow\ \exists \delta_1: \quad |f(z)| > 1 \quad \text{при } |z-a| < \delta_1$$

$$\Longrightarrow\ f(z) \ne 0 \quad \text{при } z \in D_{0,\delta_1}(a) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(z) := \frac{1}{f(z)} \in \mathcal{A}\big(D_{0,\delta_1}(a)\big)$$

Понятно, что $\varphi(z) \not\equiv 0$

$$(27)\ \Longrightarrow\ |\varphi(z)| \xrightarrow[z\to 0]{} 0$$

Пусть $|\varphi(z)| < 1$

$$\Longrightarrow\ \varphi \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_{\delta_1}(a)\big) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(a) = 0$$

$$\Longrightarrow\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \exists h \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_{\delta_1}(a)\big): \quad \varphi(z) = (z-a)^{n_0}h(z), \quad h(z) \ne 0, \quad z \in \mathtt{B}_{\delta_2}(a)$$

$$\Longrightarrow\ f(z) = \frac{1}{(z-a)^{n_0}}\cdot\frac{1}{h(z)}$$

$$\Longrightarrow\ g(z) = \frac{1}{h(z)} \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_{\delta_2}(a)\big)$$

$$\Longrightarrow\ g(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(a-a)^2 + \dots$$

$$\Longrightarrow\ f(z) = \frac{1}{(z-a)^{n_0}}\Big(c_0 + c_1(z-a) + \dots\Big) = c_0(z-a)^{-n_0} + c_1(z-a)^{-n_0+1} + \dots$$

□

## 25. Характеристика существенно особой точки

**Теорема 20.** $f \in \mathcal{A}\big(D_{0,R}(a)\big)$

Для того, чтобы $a$ была существенной особой точкой $f$, **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\exists\,\{\,z_n\,\}_{n=1}^{\infty},\ z_n \ne a,\ z_n \to a, \quad \exists\,\{\,\zeta_n\,\}_{n=1}^{\infty},\ \zeta_n \ne a,\ \zeta_n \to a, \quad \exists M: \quad \begin{cases} |f(z_n)| \le M & \forall n, \\ |f(\zeta_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \end{cases}$$

**Доказательство.**

- Пусть $\nexists\,\{\,\zeta_n\,\}:\ \zeta_n \to a,\ |f(\zeta_n)| \to +\infty$.

  $$\Longrightarrow\ \exists M_1, \quad \exists \delta_0 > 0: \quad \forall z \in D_{0,\delta_0}(a) \quad |f(z)| \le M_1$$

  Тогда $a$ — устранимая особая точка по характеристическому свойству устранимой особой точки.

- Пусть $\exists\,\{\,\zeta_n\,\},\ \zeta_n \to a,\ |f(\zeta_n)| \to +\infty$.

  – Если бы выполнялось $|f(z_n)| \xrightarrow[z\to a]{} +\infty$, то по характеристике полюса, $a$ — полюс $f$.

  – Если неверно, что $|f(z_n)| \to +\infty$, то

  $$\exists M, \quad \exists\,\{\,z_n\,\},\ z_n \to a: \quad |f(z_n)| \le M$$

  Итак, при наличии последовательностей $\{\,z_n\,\}$ и $\{\,\zeta_n\,\}$ $a$ не устранимая особая точка и не полюс.

□

## 26. Определение вычета; формулы для вычисления вычетов

**Определение 11.** $f \in \mathcal{A}(D_{0,R}(a))$, $\qquad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, $\qquad z \in D_{0,R}(a)$

Коэффициент $c_{-1}$ называется *вычетом* функции $f$ в точке $a$.

**Обозначение.** $c_{-1} = \operatorname{res}_f a, \qquad c_{-1} = \operatorname{res} f$

В соответствии с формулой (22) из доказательства теоремы о разложении в ряд Лорана

$$\operatorname{res}_f a = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho} f(z)\,\mathrm{d}\,z, \qquad 0 < \rho < R,$$

где $\gamma_\rho$ — окружность $\{\,z \mid |z-a| = \rho\,\}$.

Если $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, $E \subset \Omega$ — некоторое множество, то для $\forall a \in E$ выберем $R_a > 0$ так, чтобы $\{\,z \mid |z-a| < R_a\,\} \cap E = \{\,a\,\}$.

Тогда положим $\operatorname{res}_f a$ — вычет функции $f$, определяемый по множеству $D_{0,R_a}(a)$.

**Утверждение 6.** $\varphi, \psi \in \mathcal{A}\big(D_{0,r}(a)\big)$, $\qquad \psi(a) = 0, \quad \psi'(a) \ne 0, \qquad f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$

$$\Longrightarrow\ \operatorname{res}_f a = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

**Доказательство.** Выберем $r_a > 0$ так, чтобы при $z \in D_{0,r}(a) \setminus \{\,a\,\}$ выполнялось $\psi(z) \ne 0$. Пусть $v(z) = \frac{\psi(z)}{z-a}$.

Поскольку $\psi(z) = \psi(a) + \psi'(a)(z-a) + \dots$, то

$$\psi(a) = 0 \implies v(z) = \psi'(a) + \frac{1}{2}\psi''(a)(z-a) + \dots, \qquad v \in \mathcal{A}\big(D_R(a)\big)$$

Пусть $g(z) = \frac{\varphi(z)}{v(z)}$, $\quad g \in \mathcal{A}\big(D_{0,r_0}(0)\big)$, поскольку $v(z) \neq 0$, $z \in D_{r_a}(a)$.

$$f(z) = \frac{g(z)}{z-a} = \frac{1}{z-a}\big(g(a) + g'(a)(z-a) + \cdots\big) = \frac{g(a)}{z-a} + g'(a) + \frac{1}{2}g''(a)\cdot(z-a) + \cdots$$

$$\implies \operatorname{res}_f a = g(a) = \frac{\varphi(a)}{v(a)}$$

При этом,

$$\psi(z) = (z-a)v(z), \qquad \psi'(z) = v(z) + (z-a)v'(z), \qquad \psi'(a) = v(a)$$

□

**Утверждение 7.** $\varphi(a) \in \mathcal{A}\big(D_R(a)\big)$, $\qquad n \geq 2$, $\qquad f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$

$$\implies \operatorname{res}_f a = \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(a)$$

**Доказательство.**

$$\varphi(z) = \varphi(a) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k, \qquad z \in D_R(a)$$

Тогда

$$f(z) = \frac{\varphi(a)}{(z-a)^n} + \sum_{k=1}^{n-2}\frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^{k-n} + \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{z-a} + \sum_{k=n}^{\infty}\frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^{k-n}$$

□

## 27. Теорема о вычетах

**Теорема 21.** Пусть $\Omega, E$ определены выше, $\quad \overline{G} \subset \Omega$, $\quad E \subset G$, $\quad \Gamma = \partial G$ состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых.

Тогда для $f \in \mathcal{A}(\Omega \setminus E)$ справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{a\in E}\operatorname{res}_f a$$

**Доказательство.** Выберем $R_a$, $a \in E$ как раньше.
Пусть $\rho_a \leq \frac{1}{3}R_a$ и $\overline{D}_{\rho_a}(a) \subset G$. Тогда для $a_1, a_2 \in E$, $a_1 \neq a_2$ имеем

$$\overline{D}_{\rho_{a_1}}(a) \cap \overline{D}_{\rho_{a_2}}(a) \neq \emptyset$$

Пусть $U = G \setminus \bigcup_{a\in E}\overline{D}_{\rho_a}(a)$. Тогда $f \in \mathcal{A}\big(\Omega \setminus \bigcup_{a\in E}\overline{D}_{\rho_a}(a)\big)$, поэтому по теореме Коши имеем соотношение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$$

Обозначим через $\gamma(a)$ окружность $\{\, z \mid |z-a| = \rho_a \,\}$. Тогда $\overset{\curvearrowleft}{\partial} U = \overset{\curvearrowleft}{\partial} G \cup \bigcup_{a\in E} \overset{\curvearrowright}{\gamma}(a)$, поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int \overset{\curvearrowleft}{\partial} G f(z)\,\mathrm{d}\,z + \sum_{a\in E}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\gamma}(a)} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} f(z)\,\mathrm{d}\,z =$$

$$= -\sum_{a\in E}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\gamma}(a)} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{a\in E}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma}(a)} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{a\in E}\operatorname{res}_f a$$

□

# Часть II
# Теория меры

Все утверждения, приведённые здесь без доказательств, легко проверяются в случае $\mathbb{R}$ при помощи картинок.

Мера в нашем случае всегда будет обозначать меру Лебега.

## 28. Кольцо и $\sigma$-кольцо множеств; промежутки в $\mathbb{R}^m$ и их мера; элементарные множества и их меры

**Определение 12.** Имеется некоторое непустое множество множеств $\mathscr{R}$. Будем называть его *кольцом*, если

1. $A \in \mathscr{R},\ B \in \mathscr{R} \implies A \cup B \in \mathscr{R}$;
2. $\dots \implies A \setminus B \in \mathscr{R}$.

В частности, $A \setminus A = \emptyset \in \mathscr{R}$.

Вследствие того, что $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$, $A \cap B \in \mathscr{R}$.

**Определение 13.** $\mathscr{R}$ называется *$\sigma$-кольцом*, если

$$\{\, A_n \,\}_{n=1}^{\infty}, \quad A_n \in \mathscr{R} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$$

Можно проверить, что

$$A_1 \setminus \left(\bigcup_{n=2}^{\infty}(A_1 \setminus A_n)\right) = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$$

$\mathbb{R}^{m\geq 1}, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \qquad a \leq b$

Будем обозначать $\langle a, b\rangle$, где $\langle$ — это ( или [, а $\rangle$ — это ) или ].

Рассмотрим $m \geq 2, \quad A \in \mathbb{R}^m, \quad B \in \mathbb{R}^m$. $\langle A, B\rangle$ будем также называть *промежутком* в $\mathbb{R}^m$, где $A = (a_1, \dots, a_m),\ B = (b_1, \dots, b_m), \quad a_j \leq b_j$.

**Определение 14.** *Мерой* промежутка будем называть

$$\mathrm{m}\left(\langle A, B\rangle\right) = \prod_{j=1}^{m}(b_j - a_j)$$

**Определение 15.** *Элементарным множеством* будем называть конечное объединение промежутков:

$$I = \bigcup_{k=1}^{N}\langle A_k, B_k\rangle$$

**Обозначение.** $\mathscr{E}$ — множество всех элементарных множеств.

**Утверждение 8.** $I \in \mathscr{E}$. Тогда $I$ можно представить в виде объединения промежутков, таких что

$$\langle A_k, B_k \rangle \cap \langle A_l, B_l \rangle = \emptyset \quad \forall k \neq l$$

**Определение 16.** *Мерой* элементарного множества будем называть

$$\operatorname{m} I = \sum_{k=1}^{N} \operatorname{m} \left( \langle A_k, B_k \rangle \right)$$

**Утверждение 9.** Определение меры элементарного множества **корректно**, то есть, мера не зависит от способа разбиения.

**Определение 17.** Промежуток будем называть *открытым*, если все символы $\langle$ и $\rangle$ обозначают ( и ).

**Определение 18.** Элементарное множество будем называть *открытым*, если $I = \bigcup (a_k, b_k)$.

## 29. Внешняя мера $\operatorname{m}^* E$ множества $E$

Пусть имеется некоторое множество $E \subset \mathbb{R}^m$. Обозначим через $U(E)$ множество следующих открытых элементарных множеств:

$$U(E) = \{ \{ A_n \}_{n=1}^{\infty} \}, \qquad A_n \text{ — открытое элементарное множество,}$$

таких, что $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

**Определение 19.** *Внешней мерой* множества $E$ называется

$$\operatorname{m}^* E = \inf_{\{ A_n \}_{n=1}^{\infty} \in U(E)} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{m} A_n \quad \leq +\infty$$

Если ряд расходится, приписываем внешней мере значение $\infty$.

Понятно, что $\operatorname{m}^*$ определена для любого множества. Также очевидно, что $\operatorname{m}^* \emptyset = 0$.

## 30. Свойства внешней меры

**Свойства.**

1. $\operatorname{m}^* E \geq 0$;
2. $E_1 \subset E_2 \implies \operatorname{m}^* E_1 \leq \operatorname{m}^* E_2$;
3. $I \in \mathscr{E} \implies \operatorname{m}^* I = \operatorname{m} I$;
4. $$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \implies \operatorname{m}^* E \leq \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{m}^* E_n.$$

**Доказательство.**

1. Очевидно.
2. $U(E_2) \subset U(E_1)$.
3. Очевидно.
4. Будем считать, что $\operatorname{m}^* E_n < \infty \quad \forall n$.

Выберем $\forall \varepsilon > 0$, $\{ A_{n_k} \}_{k=1}^{\infty}, \quad A_{n_k} \in \mathscr{E}, \quad \{ A_{n_k} \} \subset U(E_n)$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}\, A_{n_k} < \mathrm{m}^*\, E_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{28}$$

Тогда

$$\{ A_{n_k} \}_{n=1}^{\infty}{}_{k=1}^{\infty} \in U(E)$$

$$\implies \mathrm{m}^*\, E \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}\, A_{n_k} \right)$$

(т. к. внешняя мера — это инфимум)

Применим теперь (28):

$$\sum \sum \mathrm{m}\, A_{n_k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left( \mathrm{m}^*\, E_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^*\, E_n + \varepsilon$$

□

## 31. Функция $\mathrm{d}(A, B)$ и её свойства

Определим неотрицательное число

$$\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{m}^*(A \vartriangle B) \geq 0$$

Понятно, что $A \vartriangle \emptyset = A$, поэтому $\mathrm{d}(A, \emptyset) = \mathrm{m}^*\, A$.

**Свойства.**

1. $\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(B, A)$;
2. $\mathrm{d}(A, B) \leq \mathrm{d}(A, C) + \mathrm{d}(C, B)$;
3. $\mathrm{d}(A_1 \cup A_2,\ B_1 \cup B_2) \leq \mathrm{d}(A_1, B_1) + \mathrm{d}(A_2, B_2)$;
4. $\mathrm{d}(A_1 \cap A_2,\ B_1 \cap B_2) \leq \mathrm{d}(A_1, B_1) + \mathrm{d}(A_2, B_2)$;
5. $\mathrm{d}(A_1 \setminus A_2,\ B_1 \setminus B_2) \leq \mathrm{d}(A_1, B_1) + \mathrm{d}(A_2, B_2)$.

**Доказательство.** Все свойства основаны на теоретико-множественных соображениях. Например, 3 основано на включении

$$A \vartriangle B \subset (A \vartriangle C) \cup (C \vartriangle B)$$

Далее нужно воспользоваться свойством 4 внешней меры. □

**Утверждение 10.** $|\,\mathrm{m}^*\, A - \mathrm{m}^*\, B| \leq \mathrm{d}(A, B)$

**Доказательство.** Пусть $\mathrm{m}^*\, A < \mathrm{m}^*\, B$. Тогда

$$\mathrm{m}^*\, B = d(B, \emptyset) \leq \mathrm{d}(B, A) + \mathrm{d}(A, \emptyset) = \mathrm{d}(B, A) + \mathrm{m}^*\, A$$

□

## 32. Определение $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_F$

**Определение 20.** Будем говорить, что множество $A \subset \mathbb{R}^m$ *конечно-измеримо (по Лебегу)*, если

$$\exists\ \{ A_n \}_{n=1}^{\infty}, \quad A_n \in \mathscr{E} : \quad \mathrm{d}(A_n, A) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

**Обозначение.** $\mathfrak{M}_F$ — множество всех конечно-измеримых множеств.

Понятно, что $\mathscr{E} \subset \mathfrak{M}_F$.

**Определение 21.** Множество $B \subset \mathbb{R}^m$ будем называть *измеримым (по Лебегу)*, если

$$\exists \{ A_n \}_{n=1}^{\infty}, \quad A_n \in \mathfrak{M}_F : \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Понятно, что $\mathfrak{M}_F \subset \mathfrak{M}$.

**Замечание.** В множестве $\mathbb{R}^m$ **не все** подмножества измеримы: $2^{R^m} \neq \mathfrak{M}$ (в отличие от внешней меры).

Для $B \in \mathfrak{M}$ будем рассматривать $\mathrm{m}^* B$.

## 33. $\mathfrak{M}$ — $\sigma$-кольцо

**Теорема 22.** Совокупность всех измеримых множеств является $\sigma$-кольцом.
Внешняя мера, определённая на $\mathfrak{M}$ обладает свойством *счётной аддитивности* ($\sigma$-*аддитивности*):

$$\{ B_n \}_{n=1}^{\infty}, \quad B_n \in \mathfrak{M}, \quad B_n \cap B_k = \emptyset \quad \Longrightarrow \mathrm{m}^* \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^* B_n$$

Доказывать теорему не будем. Докажем, что $\mathfrak{M}_{\mathbf{F}}$ является кольцом, и мера на нём аддитивна.

**Доказательство** ($\mathfrak{M}_F$ — кольцо)**.** Пусть есть $A \in \mathfrak{M}_F$ и $B \in \mathfrak{M}_F$. Тогда

$$\exists A_n \in \mathscr{E} : \quad \mathrm{d}(A_n, A) \to 0$$

$$\exists B_n \in \mathscr{E} : \quad \mathrm{d}(B_n, B) \to 0$$

Тогда, по одному из свойств d,

$$\mathrm{d}(A_n \cup B_n,\ A \cup B) \leq \mathrm{d}(A_n, A) + \mathrm{d}(B_n, B) \to 0$$

$$\mathrm{m}(A_n \setminus B_n,\ A \setminus B) \leq \mathrm{d}(A_n, A) + \mathrm{d}(B_n, B) \to 0$$

При этом, $A_n \cup B_n \in \mathscr{E}, \quad A_n \setminus B_n \in \mathscr{E}$.

$$\Longrightarrow A \cup B \in \mathfrak{M}_F, \quad A \setminus B \in \mathfrak{M}_F$$

□

## 34. $\mathrm{m}^*$ счётно-аддитивна на $\mathfrak{M}$

**Теорема 23.** Совокупность всех измеримых множеств является $\sigma$-кольцом.
Внешняя мера, определённая на $\mathfrak{M}$ обладает свойством *счётной аддитивности* ($\sigma$-*аддитивности*):

$$\{ B_n \}_{n=1}^{\infty}, \quad B_n \in \mathfrak{M}, \quad B_n \cap B_k = \emptyset \quad \Longrightarrow \mathrm{m}^* \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^* B_n$$

Доказывать теорему не будем. Докажем, что $\mathfrak{M}_{\mathbf{F}}$ является кольцом, и внешняя мера на нём аддитивна.

**Утверждение 11.** $A, B \in \mathscr{E}$

$$\mathrm{m}(A \cup B) + \mathrm{m}(A \cap B) = \mathrm{m}\, A + \mathrm{m}\, B \tag{29}$$

**Доказательство** (аддитивность меры)**.** Пусть $A, B \in \mathfrak{M}_F, \quad A \cap B = \emptyset$. Тогда

$$\exists \{ A_n \}, \{ B_n \} : \quad \mathrm{d}(A_n, A) \to 0, \quad \mathrm{d}(B_n, B) \to 0$$

Отдельно будет доказано, что

**Утверждение 12.** Если $\mathrm{d}(C_n, C) \to 0$, то $\mathrm{m}^* C_n \to \mathrm{m}^* C$

В соотношении (29) можно поставить внешнюю меру вместо меры:

$$\mathrm{m}^*(A_n \cup B_n) + \mathrm{m}^*(A_n \cap B_n) = \mathrm{m}^* A_n + \mathrm{m}^* B_n$$

Из утв. 12, $\mathrm{m}^*(A_n \cup B_n) \to \mathrm{m}^*(A \cup B)$.

$$\mathrm{m}^*(A_n \cap B_n) \to \mathrm{m}^*(A \cap B) = 0$$

$$\mathrm{m}^* A_n \to \mathrm{m}^* A, \qquad \mathrm{m}^* B_n \to \mathrm{m}^* B$$

Это всё влечёт, что

$$\mathrm{m}^*(A \cup B) = \mathrm{m}^* A + \mathrm{m}^* B$$

□

**Доказательство** (утв. 12). $|\mathrm{m}^* C_n - \mathrm{m}^* C| \le \mathrm{d}(C_n, C) \to 0$ □

Теперь для $E \in \mathfrak{M}$ будем полагать $\mathrm{m}\, E = \mathrm{m}^* E$. Это *мера Лебега*.

## 35. Простые функции; аппроксимация простыми функциями

**Определение 22.** $E \subset \mathbb{R}^m, \quad E \neq \emptyset$. *Характеристической функцией* множества $E$ называется функция $K_E(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$K_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

**Определение 23.** *Простой функцией* $f_0 : E \to \mathbb{R}$ будем называть функцию, множество значений которой конечно.

Если $c_1, \dots, c_n$ — все различные значения функции $f_0, \quad E_j = \{\, x \in E \mid f_0(x) = c_j \,\}$, то $E_j \cap E_k = \emptyset$, $\bigcup E_j = E$. Полагая $\chi_{E_j}(x) = K_{E_j}(x)\big|_E$, имеем соотношение

$$f_0(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}(x) \tag{30}$$

**Теорема 24.** $f : E \to \mathbb{R}$

1. Тогда существует последовательность простых функций, определённых на $E$ таких, что

$$\forall x \in E \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

2. Если множество $E$ измеримо по Лебегу и функция $f$ измерима, то все функции $f_n$ можно выбрать измеримыми.
3. Если $f(x) \ge 0, \quad x \in E$, то можно выбрать функции $f_n(x)$, которые при $\forall x$ монотонно возрастают по $n$.

**Доказательство.**

1. Пусть $f(x) \ge 0 \quad \forall x$.
   Положим для $n = 1, 2, \dots, \quad i = 1, \dots, n \cdot 2^n$

$$E_{ni} = \left\{\, x \in E \mid \frac{i-1}{2^n} \le f(x) < \frac{i}{2^n} \,\right\}$$

$$E_{n0} = \{\, x \in E \mid f(x) \ge n \,\}$$

   Далее пусть $\chi_{E_{ni}}(x) = K_{E_{ni}}(x)\big|_E, \qquad i = 0, 1, \dots, n \cdot 2^n$, и пусть

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{ni}}(x) + n\chi_{E_{n0}}(x) \tag{31}$$

Тогда для $x \in \bigcup E_{ni}$ имеем

$$|f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{2^n}$$

Для $\forall x \in E$ возьмём $N > f(x)$, тогда $\forall n > N \quad f_n(x) \to f(x)$.

2. Если $f$ измерима, то множества $E_{n\ i}$ измеримы из (31) следует измеримость $f_n$.
3. Монотонность $f_n$ также следует из (31).
4. Для произвольной функции $f$ положим $f = f^+ - f^-$ и (31) применим к $f^+$ и $f^-$.

$\square$

**Замечание.** Пусть $E_j \subset E$, не предполагаем условия $E_j \cap E_k = \emptyset, \quad E = \bigcup E_j$, числа $c_j$ не обязательно различны,

$$f_1(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}(x) \tag{32}$$

Тогда $f_1$ — простая функция, которую можно записать в виде (30) с какими-то множествами $E'_l$ и числами $c'_l$.

## 36. Примеры измеримых по Лебегу множеств

**Примеры.**

1. Любое элементарное множество $A$ измеримо.
2. $\mathbb{R}^m$ измеримо.
3. Открытые множества измеримы.
4. Замкнутые множества измеримы.

**Доказательство.**

1. По определению.
2. $\mathbb{R}^m = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, где $a_n = (-n, \dots, -n)$, $b_n = (n, \dots, n)$.
3. Пусть $\mathbb{Q}^m$ — множество всех точек с рациональными координатами в $\mathbb{R}^m$, $\quad G \subset \mathbb{R}^m$ открыто, $G \ne \emptyset$.
   Для любой точки $M \in G \cap \mathbb{Q}^m$ выберем максимальный промежуток $\big(a(M), b(M)\big)$ со следующими свойствами:
   - $a(M) = \big(a_1(M), \dots, a_m(M)\big)$;
   - $b(M) = \big(b_1(M), \dots, b_m(M)\big)$;
   - если $M = (M_1, \dots, M_m)$, то $a_j(M) = M_j - \delta(M)$;
   - $b_j = M_j + \delta(M)$;
   - $\big(a(M), b(M)\big) \subset G$.

   Тогда

   $$G = \bigcup_{M \in G \cap \mathbb{Q}^m} \big(a(M), b(M)\big)$$

4. Если $F \subset \mathbb{R}^m$ замкнуто, то $F = \mathbb{R}^m \setminus \big(\mathbb{R}^m \setminus F\big)$, множество $\mathbb{R}^m \setminus F$ открыто.

$\square$

## 37. Измеримые функции; теорема о множествах Лебега

**Определение 24.** Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ измеримо, $E \neq \emptyset$, $\quad f : E \to \mathbb{R} \cup \{ -\infty, +\infty \}, \quad a \in \mathbb{R}$.
*Множествами Лебега* будем называть множества

$$E_{<a}(f) = \{ M \in E \mid f(M) < a \}, \quad E_{\le a}(f) = \{ M \in E \mid f(M) \le a \}$$

$$E_{>a}(f) = \{ M \in E \mid f(M) > a \}, \quad E_{\ge a}(f) = \{ M \in E \mid f(M) \ge a \}$$

**Определение 25.** Будем говорить, что функция $f : E \to \overline{\mathbb{R}}, \quad E \subset \mathfrak{M}$ *измерима по Лебегу*, если $\forall a \in \mathbb{R}$ имеем

$$E_{<a}(f), E_{\le a}(f), E_{>a}(f), E_{\ge a} \in \mathfrak{M}$$

**Теорема 25.** Для того, чтобы при $\forall a \in \mathbb{R}$ были измеримы множества Лебега, **необходимо и достаточно**, чтобы при $\forall a \in \mathbb{R}$ было измеримо какое-то из них.

**Доказательство.** Имеем следующие соотношения:

$$E_{\ge a} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in E \mid f(x) > a - \frac{1}{n} \right\}, \qquad E_{<a} = E \setminus E_{\ge a}$$

$$E_{\le a} = \bigcap x \in E \mid f(x) < a + \frac{1}{n}, \qquad E_{>a} = E \setminus E_{\le a}$$

Поскольку $\mathfrak{M}$ — кольцо, $E \in \mathfrak{M}$,

$$E_{>a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a \implies E_{\ge a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a$$

$$E_{\ge a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a \implies E_{<a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a$$
$$E_{<a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a \implies E_{\le a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a$$
$$E_{\le a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a \implies E_{>a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a$$

□

## 38. Измеримость $|f|$

**Свойство.** $f$ измерима $\implies$ $|f|$ измерима.

**Доказательство.** $E_{<a}(|f|) = E_{<a}(f) \cap E_{>-a}(f)$. □

## 39. Измеримость $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $\sup\limits_n f_n(x)$

**Свойство.** Пусть $f_n$ измерима на $E$. Тогда

$$g_+(x) \coloneqq \sup_{n \ge 1} f_n(x), \quad h_+(x) \coloneqq \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

измеримы.

**Доказательство.** Имеем соотношение

$$E_{>a}(g_+) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{>a}(f_n)$$

Положим $g_m = \sup\limits_{n \ge m} f_n(x)$, тогда $g_m$ измеримы и $h(x) = \inf\limits_m g_m(x)$. □

## 40. Измеримость $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $\inf\limits_n f_n(x)$

**Свойство.** Пусть $f_n$ измерима на $E$. Тогда

$$g_-(x) \coloneqq \inf_{n\geq 1} f_n(x), \quad h_-(x) \coloneqq \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

измеримы.

**Доказательство.** Имеем соотношение

$$E_{<a}(g_-) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{<a}(f_n)$$

Положим $g_m(x) = \inf\limits_{n\geq m} f_n(x)$, тогда $g_m$ измеримы и $h(x) = \sup\limits_m g_m(x)$. □

## 41. Измеримость $f^+$, $f^-$

**Свойство.** Положим $f^+(x) = \max\{\, f(x), 0\,\}$, $\quad f^-(x) = -\min\{\, f(x), 0\,\}$.
Тогда $f^+, f^-$ измеримы.

**Доказательство.** Пусть $f, g$ измеримы.
Положим $f_{2n-1}(x) = f(x)$, $\quad f_{2n}(x) = g(x)$, тогда

$$\sup_{n\geq 1} f_n(x) = \max\{\, f(x), g(x)\,\}, \quad \inf_{n\geq 1} f_n(x) = \min\{\, f(x), g(x)\,\}$$

То есть, $\max\{\, f(x), g(x)\,\}$ и $\min\{\, (x), g(x)\,\}$ измеримы.
Если $c\in\mathbb{R}$, $\quad f$ измерима, то и $cf$ измерима:

- если $c>0$, то $E_{>ca}(cf) = E_{>a}(f)$;
- если $c<0$, то $E_{>ca}(cf) = E_{<a}(f)$;
- если $c=0$, то $0\cdot f \equiv f$.

□

## 42. Измеримость $\lim f_n(x)$

**Свойство.** Пусть $f_n(x)$ измеримы $\forall n$ и $\forall x\in E \quad \exists f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}$.
Тогда $f$ измерима.

**Доказательство.** $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. □

## 43. Измеримость $f_n + g_n$, $f_n g_n$

**Свойство.** Пусть $F(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad F\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$, $\quad f(x), g(x)$ измеримы.
Тогда $h(x) \coloneqq F\big(f(x), g(x)\big)$ измерима.

**Доказательство.** Пусть $G_a = \big\{\, (u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid F(u,v) > a\,\big\}$.
Тогда $F\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^2) \implies G_a$ открыто в $\mathbb{R}^2$.
Пусть $G_a \neq \emptyset$. Тогда можно представить $G_a = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, где $a_n = (u_n^-, v_n^-)$, $\ b_n = (u_n^+, v_n^+)$.

Теперь

$$\{\, x \in E \mid u_n^- < f(x) < u_n^+ \,\} = E_{>u_n^-}(f) \cap E_{<u_n^+}(f), \quad \{\, x \in E \mid v_n^- < g(x) < v_n^+ \,\} = E_{>v_n}(g) \cap E_{<v_n^+}(g),$$

поэтому

$$\{\, x \in E \mid \big(f(x), g(x)\big) \in (a_n, b_n) \,\} = \{\, x \in E \mid u_n^- < f(x) < u_n^+ \,\} \cap \{\, x \in E \mid v_n^- < g(x) < v_n^+ \,\} = \\ = E_{>u_n^-}(f) \cap E_{<u_n^+}(f) \cap E_{>v_n^-}(g) \cap E_{<v_n^+}(g)$$

$$E_{>a}(h) = \{\, x \in E \mid \big(f(x), g(x)\big) \in G_a \,\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\, x \in E \mid \big(f(x), g(x)\big) \in (a_n, b_n) \,\}$$

Это доказывает свойство. □

В частности, $F_1(u, v) = u + v \in (\mathbb{R}^2)$ и $F_2(u, v) = uv \in (\mathbb{R}^2)$.

## 44. Определение $I_E(f)$ и его свойства

**Определение 26.** Пусть $E, E_j$ измеримы, $E = \bigcup E_j$, $c_{j_0} = 0$, если $\operatorname{m} E_{j_0} = +\infty$. Положим

$$I_E\Big(\sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}\Big) := \sum_{j=1}^{n} c_j \operatorname{m} E_j \tag{33}$$

В этой формуле считаем, что $0 \cdot +\infty = 0$.

**Свойства.** $f$ — простая функция, записанная в виде (32).

1. $a \le f(x) \le b$, $\operatorname{m} E < +\infty$
$$\implies a \operatorname{m} E \le I_E(f) \le b \operatorname{m} E$$
2. Если $f(x) \le g(x)$, $x \in E$, то $I_E(f) \le I_E(g)$.
3. Если $c \in \mathbb{R}$, то $I_E(cf) = cI_E(f)$.
4. Если $\operatorname{m} E = 0$, то $I_E(f) = 0$.
5. $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, $F_1 \cup F_2 = E$
$$I_{F_1}(f) + I_{F_2}(f) = I_E(f)$$

**Доказательство (5).** Пусть $f(x) = \sum c_j \chi_{E_j}$, пусть $E_j' = E_j \cap F_1$, $E_j'' = E_j \cap F_2$.
Тогда $\operatorname{m} E_j' + \operatorname{m} E_j'' = \operatorname{m} E_j$,

$$I_{F_1}(f) = \sum c_j \operatorname{m} E_j', \qquad I_{F_2}(f) = \sum c_j \operatorname{m} E_j'', \qquad I_E(f) = \sum c_j \operatorname{m} E_j$$

Отсюда следует свойство. □

## 45. Определение интеграла Лебега для $f(x) \ge 0$

**Определение 27.**
$E \subset \mathbb{R}^m$ измеримо, $E \ne \emptyset$, $f : E \to \mathbb{R} \cup \{\, +\infty \,\}$, $f(x) \ge 0$ $\forall x \in E$, $f$ измерима.
Через $\mathrm{B}(f)$ обозначим множество всех простых функций $f_0 : E \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

- $f_0(x) \ge 0$;
- $f_0$ измерима;
- $f_0(x) \le f(x)$ $\forall x \in E$.

*Интегралом Лебега* назовём следующую величину

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} := \sup \{\, I_E(f_0) \mid f_0 \in \mathtt{B}(f) \,\} \tag{34}$$

**Определение 28.** Если $\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} < +\infty$, то функцию $f$ называют *суммируемой* на множестве $E$.

**Обозначение.** $f \in \mathscr{L}(E)$

## 46. Определение интеграла Лебега для функции любого знака

**Определение 29.** Если $f : E \to \mathbb{R} \cup \{\, -\infty, +\infty \,\}$ может принимать значения разных знаков, считаем $f = f^+ - f^-$ и называем $f$ *суммируемой*, если $f^+ \in \mathscr{L}(E)$ и $f^- \in \mathscr{L}(E)$. Тогда полагаем

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} := \int\limits_E f^+ \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} - \int\limits_E f^- \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \tag{35}$$

## 47. Счётная аддитивность функции $\int\limits_A f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$: характеристическая функция, простая функция $f$

**Теорема 26.** $f \in \mathscr{L}(E), \quad A \in \mathfrak{M}, \quad A \subset E, \quad \varphi(A) = \int\limits_A f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$.

Тогда $\varphi$ счётно-аддитивна на $\mathfrak{M}$, суженном на $E$.

**Доказательство.** Требуется установить равенство

$$\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n), \qquad \text{если } A_n \subset E, \quad A_n \cap A_k = \emptyset \tag{36}$$

1. Пусть $f(x) = \chi_F(x), \quad F \subset E$, тогда

$$\varphi(A) = \int\limits_A \chi_F(x) \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = I_E(\chi_{F\cap A}) = \mathrm{m}(F \cap A)$$

$$\varphi(A_n) = I_E(\chi_{F\cap A_n}) = \mathrm{m}(F \cap A_n)$$

   В силу счётной аддитивности меры Лебега имеем $\mathrm{m}(F \cap A) = \sum \mathrm{m}(F \cap A_n)$, откуда следует (36).

2. $f(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{F_j}(x)$.

$$\varphi(A) = \int\limits_A \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{F_j} \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = I_A\Big(\sum c_j \chi_{F_j}\Big) = \sum c_j \,\mathrm{m}(F_j \cap A)$$

$$\varphi(A_n) = I_{A_n}\Big(\sum c_j \chi_{F_j}\Big) = \sum c_j \,\mathrm{m}(F_j \cap A_n)$$

   Отсюда следует (36).

□

## 48. Счётная аддитивность $\int\limits_A f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$: $f(x) \geq 0$

**Теорема 27.** $f \in \mathscr{L}(E), \quad A \in \mathfrak{M}, \quad A \subset E, \quad \varphi(A) = \int\limits_A f \,\mathrm{d\,m}$.

Тогда $\varphi$ счётно-аддитивна на $\mathfrak{M}$, суженном на $E$.

**Доказательство** ($0 \le f(x) \le +\infty, \quad f$ измерима). Пусть $f_0 \in \mathtt{B}(f)$. Тогда, по пункту 2,

$$I_A(f_0) = \int\limits_A f_0 \,\mathrm{d\,m} = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f_0 \,\mathrm{d\,m} \le \sum \varphi(A_n)$$

$$\implies \varphi(A) = \sup \{\, I_A(f_0) \mid f_0 \in \mathtt{B}(f) \,\} \le \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

Поскольку $f \in \mathscr{L}(E)$, то $\varphi(A) < +\infty, \quad \varphi(A_n) < +\infty$.
Возьмём $\forall N$ и зафиксируем $\varepsilon > 0$.
Выберем $f_1, \ldots, f_N$ — простые функции, $f_j \in \mathtt{B}(f)$, удовлетворяющие условию

$$I_{A_j}(f_j) > \int\limits_{A_j} f \,\mathrm{d\,m} - \frac{\varepsilon}{N}, \quad j = 1, \ldots, N$$

Определим функцию $f_0 : E \to \mathbb{R}$:

$$f_0(x) = \begin{cases} f_j(x), & j \ge 2, \quad x \in A_j, \\ f_1(x), & x \in E \setminus \bigcup_{n=2}^{N} A_n \end{cases}$$

Тогда $f_0 \in \mathtt{B}(f), \quad \bigcup_{n=1}^{N} A_n \subset A$ и по пункту 2

$$\varphi(A) \ge \varphi\Big(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\Big) \ge I_{\bigcup A_n}(f_0) = \sum_{n=1}^{N} I_{A_n}(f_0) = \sum_{n=1}^{N} I_{A_n}(f_n) > \sum \Big(\varphi(A_n) - \frac{\varepsilon}{N}\Big) = \sum \varphi(A_n) - \varepsilon$$

В силу произвольности $N$ и $\varepsilon > 0$

$$\implies \varphi(A) \ge \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

□

## 49. Счётная аддитивность $\int\limits_A f \,\mathrm{d\,m}$: $f(x) \in \mathscr{L}(E)$

Из (35) следует, что достаточно установить (36) для $f(x) \ge 0, \quad x \in E$.

## 50. Следствие для $f \sim g$

Поскольку из свойства 4 следует, что $\int\limits_E f \,\mathrm{d\,m} = 0$, если $\mathrm{m}\, E = 0$, то из теоремы получаем важное следствие.

**Следствие.** Пусть $f_1, f_2 \in \mathscr{L}(E), \quad \mathrm{m}\,\{\, x \in E \mid f_1(x) \ne f_2(x) \,\} = 0$. Тогда

$$\int\limits_E f_1 \,\mathrm{d\,m} = \int\limits_E f_2 \,\mathrm{d\,m}$$

**Доказательство.** Пусть $F = \{\, x \in E \mid f_1(x) \ne f_2(x) \,\}$, тогда

$$\int\limits_E f_1 \,\mathrm{d\,m} = \int\limits_{E \setminus F} f_1 \,\mathrm{d\,m} + \int\limits_F f_1 \,\mathrm{d\,m} = \int\limits_{E \setminus F} f_1 \,\mathrm{d\,m} = \int\limits_{E \setminus F} f_2 \,\mathrm{d\,m} = \int\limits_{E \setminus F} f_2 \,\mathrm{d\,m} + \int\limits_F f_2 \,\mathrm{d\,m} = \int\limits_E f_2 \,\mathrm{d\,m}$$

□

## 51. $\left|\int\limits_E f \,\mathrm{d\,m}\right| \le \int\limits_E |f| \,\mathrm{d\,m}$

**Теорема 28.** Пусть $f \in \mathscr{L}(E)$, тогда $|f| \in \mathscr{L}(E)$ и

$$\left|\int\limits_E f \,\mathrm{d\,m}\right| \le \int\limits_E |f| \,\mathrm{d\,m}$$

**Доказательство.** Пусть $E_+ = \{\, x \in E \mid f(x) \ge 0 \,\}$, $\quad E_- = \{\, x \in E \mid f(x) < 0 \,\}$.
Тогда $\int\limits_E f \,\mathrm{d\,m} = \int\limits_{E_+} f \,\mathrm{d\,m} + \int\limits_{E_-} f \,\mathrm{d\,m} = \int\limits_E f^+ \,\mathrm{d\,m} - \int\limits_E f^- \,\mathrm{d\,m}$,

$$\int\limits_E |f| \,\mathrm{d\,m} = \int\limits_{E_+} + \int\limits_{E_-} = \int\limits_{E_+} f^+ \,\mathrm{d\,m} + \int\limits_{E_-} f^- \,\mathrm{d\,m} = \int\limits_E f^+ \,\mathrm{d\,m} + \int\limits_E f^- \,\mathrm{d\,m}$$

□

## 52. Дальнейшие свойства интеграла Лебега

**Свойства.**

1. Пусть $\exists\, c < \infty$ такая, что $|f(x)| \le c$, $\quad x \in E$, $\quad f$ измерима на $E$ и $\mathrm{m}\, E < +\infty$.
   Тогда $f \in \mathscr{L}(E)$.
2. Если $f$ измерима, $\mathrm{m}\, E < \infty$, $\quad a \le f(x) \le b$, $\quad x \in E$, то
   $$a\,\mathrm{m}\, E \le \int\limits_E f \,\mathrm{d}\, m \le b\,\mathrm{m}\, E$$
3. Если $f, g \in \mathscr{L}(E)$ и $f(x) \le g(x)$, $\quad x \in E$, то
   $$\int\limits_E f \,\mathrm{d\,m} \le \int g \,\mathrm{d\,m}$$
4. $f \in \mathscr{L}(E)$, $\quad c \in \mathbb{R}$
   $$\Longrightarrow \begin{cases} cf \in \mathscr{L}(E), \\ \int\limits_E cf \,\mathrm{d\,m} = c \int\limits_E f \,\mathrm{d\,m} \end{cases}$$
5. Если $\mathrm{m}\, E = 0$, $\quad f$ измерима, то
   $$\int\limits_E f \,\mathrm{d\,m} = 0$$
6. Если $f \in \mathscr{L}(E)$, $\quad F \subset E$, $\quad F$ измеримо, то $f \in \mathscr{L}(F)$.
7. Пусть $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Тогда $f + g \in \mathscr{L}(E)$ и
   $$\int\limits_E (f+g) \,\mathrm{d\,m} = \int\limits_E f \,\mathrm{d\,m} + \int\limits_E g \,\mathrm{d\,m}$$

**Доказательство.**

1. $f \in \mathscr{L}(E) \iff |f| \in \mathscr{L}(E)$ и для любой простой функции $s: \ 0 \le s(x) \le |f(x)|$ справедливо $s(x) \le c$, поэтому
   $$\int\limits_E s \,\mathrm{d\,m} \le \int\limits_E c \,\mathrm{d\,m} = c\,\mathrm{m}\, E, \qquad \int |f| \,\mathrm{d\,m} \le c\,\mathrm{m}\, E$$

2. Аналогично.

3. Без доказательства.

4. Докажем для $f(x) \geq 0, \quad x \in E, \quad c > 0$. Пусть $s \in \mathtt{B}(F)$
Тогда $cs \in \mathtt{B}(cf)$,
$$\int\limits_E cs \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \sum_{j=1}^{n} ca_j \,\mathrm{m}\, F_j = c\sum_{j=1}^{n} a_j \,\mathrm{m}\, F_j = c\int\limits_E s \,\mathrm{d}\,\mathrm{m},$$
если $s(x) = \sum a_j \chi F_j(x), \quad F_j \cap F_k = \emptyset$.
Переходя к супремуму, получаем нужное свойство.

5. Для любой простой функции $s \in \mathtt{B}(|f|)$ имеем
$$I_E(s) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = 0$$

6. Для $\forall s \in \mathtt{B}(|f|)$ на множестве $F$ положим $s_0(x) = \begin{cases} s(x), & x \in F \\ 0 \end{cases}$. Тогда
$$\int\limits_E s_0 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_F s \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \leq \int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$
$$\int\limits_F |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \leq \int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

□

## 53. Интеграл Римана и интеграл Лебега

**Теорема 29.** Пусть функция $f$ интегрируема по Риману на промежутке $(a, b)$.
Тогда она измерима по Лебегу на множестве $(a, b)$, суммируема, и справедливо равенство
$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x = \int\limits_{(a,b)} f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

**Без доказательства.** □

## 54. Теорема Фубини

**Теорема 30.** Имеется некое множество $E \subset \mathbb{R}^{m+n}, \quad m, n \geq 1, \quad E \subset \mathfrak{M}_{m+n}$
$$M \in \mathbb{R}^{m+n}, \quad M = (X, Y), \quad X \in \mathbb{R}^m,\ Y \in \mathbb{R}^n$$
Определим множества
$$E(X, \cdot) = \{\, Y \in \mathbb{R}^n \mid (X, Y) \in E \,\}, \qquad E(\cdot, Y) = \{\, X \in \mathbb{R}^m \mid (X, Y) \in E \,\}$$
Тогда

1. 
   - Для $m$-п. в. $X \qquad E(X, \cdot) \in \mathfrak{M}_n$.
   - Для $n$-п. в. $Y \qquad E(\cdot, Y) \in \mathfrak{M}_m$
2. Пусть $\mu_k$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^k$. Тогда
$$\mu_{m+n} E = \int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}} \mu_n E(X, \cdot) \,\mathrm{d}\,\mu_m(X) = \int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}} \mu_m E(\cdot, Y) \,\mathrm{d}\,\mu_n(Y)$$

3. $f : E \to \mathbb{R}$

$$\forall X \in \mathbb{R}^m \quad f_X : E(X, \cdot) \to \mathbb{R} : \quad f_X(Y) = f(X,Y)$$
$$\forall Y \in \mathbb{R}^n \quad f_Y : E(\cdot, Y) \to \mathbb{R} : \quad f_Y(X) = f(X,Y)$$

Для $m$-п. в. $X$ $\quad f_X$ измерима по $Y$ на $E(X, \cdot)$.
Для $n$-п. в. $Y$ $\quad f_Y$ измерима по $X$ на $E(\cdot, Y)$.

4. $f \in \mathscr{L}(E)$. Тогда
   - для $m$-п. в. $X$ $\quad f_X \in \mathscr{L}\big(E(X, \cdot)\big)$;
   - для $n$-п. в. $Y$ $\quad f_Y \in \mathscr{L}\big(E(\cdot, Y)\big)$;
   - $$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mu_{m+n} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \Big( \int\limits_{E(X,\cdot)} f_X \,\mathrm{d}\,\mu_n \Big) \,\mathrm{d}\,\mu_m(X) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big( \int\limits_{E(\cdot,Y)} f_Y \,\mathrm{d}\,\mu_m \Big) \,\mathrm{d}\,\mu_n(Y),$$

   или

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mu_{m+n} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \Big( f(X,Y) \,\mathrm{d}\,\mu_n(Y) \Big) \,\mathrm{d}\,\mu_m(X) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big( \int\limits_{E(\cdot,Y)} f(X,Y) \,\mathrm{d}\,\mu_m(X) \Big) \,\mathrm{d}\,\mu_n(Y)$$

## 55. Параметризованная поверхность в $\mathbb{R}^m$; измеримые множества на параметризованной поверхности

**Определение 30.** $D \subset \mathbb{R}^n$ открыто, связно, $\quad m > n$.
$\mathcal{C}^1$-поверхностью будем называть отображение $F : D \to \mathbb{R}^m$ такое, что $F \in \mathcal{C}^1(D)$, т. е.

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}, \quad f_k \in \mathcal{C}^1(D),$$

$F$ — биекция, $\quad \operatorname{rank} \mathcal{D}F(X) = n \quad \forall X \in D$.

**Определение 31.** $S = F(D), \quad E \subset S$
Будем говорить, что $E$ $S$-*измеримо*, если $F^{-1}(E) \subset \mathfrak{M}_n$

## 56. Определение $\mu_S(E)$ для параметризованной поверхности $S$

**Определение 32.** Определим $S$-*меру*:

$$\mu_S E := \int\limits_{F^{-1}(E)} \sqrt{\det\Big( \big(\mathcal{D}F(X)\big)^T \mathcal{D}F(X) \Big)} \,\mathrm{d}\,\mu_n(X)$$

**Определение 33.** $F : S \to \mathbb{R}$
Будем говорить, что $f$ $S$-*измерима*, если $\varphi(X) = f\big(F(X)\big)$ измерима на $F^{-1}(E)$.

## 57. Кусочно-гладкие поверхности $S$; $\mu_S(E)$

**Определение 34.** *Кусочно-гладкой* поверхностью будем называть $S = \bigcup_{k=1}^N S_k$, где $S_k$ — $\mathcal{C}^1$-поверхность, при этом $S_k \cap S_l = \emptyset$ или $\mu_{S_k}(S_k \cap S_l) = 0$.

**Определение 35.** $E \subset S$

Будем говорить, что $E$ *$S$-измеримо*, если $E \cap S_k \quad S_k$-измеримо $\forall k$

$$\mu_S E = \sum_{k=1}^{N} \mu_{S_k}(E \cap S_k)$$

**Определение 36.** $f : E \to \mathbb{R}$
Будем говорить, что $f$ *$S$-измерима*, если $f\big|_{S_k} \quad S_k$-измерима $\forall k$.

## 58. $\int\limits_S f \,\mathrm{d}\,\mu_S$

**Определение 37.** $f \in \mathscr{L}_S(E)$

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mu_S := \int\limits_{F^{-1}(E)} f\big(F(X)\big)\sqrt{\det\Big(\big(\mathcal{D}F(X)\big)^T \mathcal{D}F(X)\Big)}\,\mathrm{d}\,\mu_n(X)$$

**Определение 38.** $f \in \mathscr{L}_S(E) \iff f\big|_{S_k} \in \mathscr{L}_{S_k}(E \cap S_k)$

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mu_S = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{E \cap S_k} f\big|_{S_k} \,\mathrm{d}\,\mu_{S_k}$$

## 59. Параметризованная ориентированная поверхность в $\mathbb{R}^3$

**Определение 39.** $D \subset \mathbb{R}^2$ — область, $\quad F : D \to \mathbb{R}^3$ — $\mathcal{C}^1$-поверхность в $\mathbb{R}^3$

$$S = F(D), \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad X \in D, \quad T_1(X) = \begin{bmatrix} {f_1'}_{x_1}(X) \\ {f_2'}_{x_1}(X) \\ {f_3'}_{x_1}(X) \end{bmatrix}, \quad T_2(X) = \begin{bmatrix} {f_1'}_{x_2}(X) \\ {f_2'}_{x_2}(X) \\ {f_3'}_{x_2}(X) \end{bmatrix}$$

Рассмотрим ориентацию $\overset{\curvearrowleft}{S} \quad \big(T_1(X), T_2(X)\big)$.

## 60. $\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S}} f(M)\,\mathrm{d}\,x_i \wedge \mathrm{d}\,x_j$ для параметризованной и кусочно-гладкой ориентированной поверхности в $\mathbb{R}^3$

**Определение 40.**

$$f \in \mathscr{L}_S(E), \quad E \subset S, \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S}} f(Y)\,\mathrm{d}\,y_i \wedge \mathrm{d}\,y_j := \int\limits_{F^{-1}(S)} f\big(F(X)\big) \begin{vmatrix} {f_i'}_{x_1}(X) & {f_i'}_{x_2}(X) \\ {f_j'}_{x_1}(X) & {f_j'}_{x_2}(X) \end{vmatrix} \mathrm{d}\,\mu_2(X)$$

**Определение 41.** $\overset{\curvearrowleft}{S} = \bigcup_{k=1}^{N} \overset{\curvearrowleft}{S}_k$ — *ориентированная кусочно-гладкая* поверхность в $\mathbb{R}^3$, $\quad E \subset S$.

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S}} f(Y)\,\mathrm{d}\,y_i \wedge \mathrm{d}\,y_j := \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S}} f\big|_{S_k}\,\mathrm{d}\,y_i \wedge \mathrm{d}\,y_j$$

## 61. Формула Гаусса—Остроградского

**Теорема 31.** $V \subset \mathbb{R}^3$ ограничено, связно, $\quad \partial V = \bigcup_{k=1}^N \overline{S}_k, \quad S_k \cap S_l = \emptyset$
$\overset{\curvearrowleft}{S}_k, \quad Y \in S_k \quad \big(T_1(Y), T_2(Y)\big), \quad T_1(Y) \times T_2(Y)$ направлен вне $V$, $\quad \varphi \in \mathcal{C}(\overline{V}), \quad \varphi'_{y_i} \in \mathcal{C}(\overline{V})$

$$\sigma = \Big\{1, \quad (i, j, k) \text{ — чётная}, -1, \quad \text{иначе}$$

## 62. Формула Грина

**Теорема 32.** $D \subset \mathbb{R}^2$ — область, $\quad f \in \mathcal{C}(\overline{D}), \quad f'_{x_1} \in \mathcal{C}(\overline{D}), \quad g \in \mathcal{C}(\overline{D}), \quad g'_{x_2} \in \mathcal{C}(\overline{D}), \quad M = (x_1, x_2)$.
Тогда

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial} D} f(M)\,\mathrm{d}\,x_2 = \int\limits_D f'_{x_1}(M)\,\mathrm{d}\,\mu_2(M), \qquad \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial} D} g(M)\,\mathrm{d}\,x_1 = -\int\limits_D g'_{x_2}(M)\,\mathrm{d}\,\mu_2(M)$$

## 63. Коэффициенты Фурье; формула для частичной суммы ряда Фурье

**Определение 42.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}), \quad f(x + 2\pi) = f(x) \quad \forall x, \quad f \in \mathscr{L}([0, 2\pi])$
Функции $f$ сопоставляются *коэффициенты Фурье* и *ряд Фурье*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Рассмотрим частичную сумму

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \big(\cos ky \cdot \cos kx + \sin ky \cdot \sin kx\big)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m} =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}(\cos ky \cdot \cos kx + \sin ky \cdot \sin kx)\Big)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(y - x)\Big)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

Сумму вычислим отдельно:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt, \qquad D_n(2\pi l) = n + \frac{1}{2}$$

Будем считать, что $t \neq \pi n$. Тогда $\sin \frac{t}{2} \neq 0$.

$$\sin \frac{t}{2} D_n(t) = \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^n \sin \frac{t}{2} \cdot \cos kt$$

При этом,

$$\sin \frac{t}{2} \cdot \cos kt = \frac{1}{2} \Big(\sin(k + \frac{1}{2})t - \sin(k - \frac{1}{2})t\Big)$$

Тогда

$$\sin \frac{t}{2} D_n(t) = \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \Big(\sin(k + \frac{1}{2})t - \sin(k - \frac{1}{2})t\Big) = \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \Big(\sin \frac{3t}{2} - \sin \frac{t}{2} + \sin \frac{5t}{2} - \dots + \sin(n + \frac{1}{2})t\Big)$$

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

Пусть $y - x = t$.
Теперь

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(y-x)}{\sin\frac{y-x}{2}}\,\mathrm{d\,m}$$

**Утверждение 13.** $\varphi \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}), \quad \varphi(x) = \varphi(x+2\pi) \quad \forall x, \quad \varphi(x) \in \mathscr{L}([0,2\pi])$

$$\implies \forall a \in \mathbb{R} \quad \varphi \in \mathscr{L}([a, a+2\pi])$$

$$\int\limits_{[0,2\pi]} \varphi\,\mathrm{d\,m} = \int\limits_{[a,a+2\pi]} \varphi\,\mathrm{d\,m}$$

Применим это утверждение:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_x^{x+2\pi} f(y)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(y-x)}{\sin\frac{y-x}{2}}\,\mathrm{d\,m} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}\,t =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d\,m}(t)$$

## 64. Лемма Римана—Лебега

**Лемма 3.** $E \subset \mathbb{R}, \quad E \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}), \quad \psi$ измерима на $E, \quad \psi \in \mathscr{L}(E)$

$$\implies \int\limits_E \cos Ax\psi(x)\,\mathrm{d\,m} \xrightarrow[|A|\to\infty]{} 0$$

$$\int\limits_E \sin Ax\psi(x)\,\mathrm{d\,m} \xrightarrow[|A|\to\infty]{} 0$$

## 65. Признак Дини сходимости ряда Фурье

**Теорема 33.** $f(x) = f(x+2\pi), \quad f \in \mathscr{L}([0,2\pi]), \quad x \in (-\pi,\pi)$

$$\varphi(t) = \frac{f(x+t)-f(x)}{t} \in \mathscr{L}(-\varepsilon,\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$$

$$\implies S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

**Доказательство.**

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d\,m} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\Big)\,\mathrm{d\,m} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\Big)\,\mathrm{d}\,t = 1$$

Отсюда

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,\mathrm{d\,m} - f(x)\cdot 1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x+t)-f(x)\big)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d\,m} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\varepsilon}\dots + \frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\dots + \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\dots$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\varepsilon}\frac{f(x+t)-f(x)}{\sin\frac{t}{2}}\cdot\sin(n+\frac{1}{2})t\,\mathrm{d\,m}$$

$$\left|\sin\frac{t}{2}\right|\geq\frac{2}{\pi}\cdot\frac{|t|}{2}=\frac{|t|}{\pi}\geq\frac{\varepsilon}{\pi}\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{f(x+t)-f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}\in\mathscr{L}(-\pi,-\varepsilon),\quad\in\mathscr{L}(\varepsilon,\pi)$$

Теперь

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\varepsilon}\frac{f(x+t)-f(x)}{\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})t\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\dots\to 0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\Big(f(x+t)-f(x)\Big)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d\,m}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\underbrace{\frac{f(x+t)-f(x)}{t}}_{\varphi}\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d\,m}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\Big(f(x+t)-f(x)\Big)\Big(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}-\frac{2}{t}\Big)\sin(n+\frac{1}{2})t\,\mathrm{d\,m}$$

Напомним, что

$$\frac{1}{\sin\tau}-\frac{1}{\tau}=\frac{\tau-\sin\tau}{\tau\sin\tau}=\frac{-\frac{\tau^3}{\tau}+\dots}{\tau\sin\tau}\in\mathcal{C}\Big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big]$$

$\square$

## 66. Равенство Парсеваля

**Теорема 34.** $f^2\in\mathscr{L}[0,2\pi]$

$$\Longrightarrow\int_0^{2\pi}f^2\,\mathrm{d\,m}=2\pi a_0^2+\pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

## 67. Теорема о единственности ряда Фурье

**Теорема 35.** $f,g$ измеримы на $\mathbb{R}$, $\quad f(x)=f(x+2\pi),\ g(x)=g(x+2\pi),\quad f,g\in\mathscr{L}(0,2\pi)$

$$a_0(f)=a_0(g),\quad a_n(f)=a_n(g),\quad b_n(f)=b_n(g)\quad\forall n\geq 1$$

$$\Longrightarrow f\sim g$$

## 68. Преобразование Фурье; пример

Рассматриваем функции $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$.

**Определение 43.** $f=u+iv$

Будем говорить, что $f$ *суммируема* на всей оси, если $u$ и $v$ суммируемы на всей оси.

**Определение 44.** $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R})$

Её *преобразованием Фурье* называется

$$\widehat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}f(x)e^{-ixt}\,\mathrm{d\,m}(x)$$

**Определение 45.** $\varphi\in\mathscr{L}(\mathbb{R})$

Её *обратным преобразованием Фурье* называется

$$\widetilde{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{ixt} \, \mathrm{d}\, \mathrm{m}(t)$$

$$\widehat{\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

## 69. $\widehat{(f')}$; $\widehat{f}'$

Следующие формулы верны для широкого класса функций, который получается, если обосновать все шаги.

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} \, \mathrm{d}\, \mathrm{m}(x)$$

$$\widehat{f}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (-ix) e^{-itx} \, \mathrm{d}\, \mathrm{m}(x) = \big(\widehat{-ixf(x)}\big)(t)$$

Рассмотрим преобразование Фурье от производной.

$$\widehat{(f')}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-itx} \, \mathrm{d}\, \mathrm{m}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-itx} \, \mathrm{d}\, x =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{A \to \infty} \underbrace{\left(f(x) e^{-itA} - f(-A) e^{itA}\right)}_{0} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-it) f(x) e^{-itx} \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} it \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} \, \mathrm{d}\, x = it \widehat{f}(t)$$

## 70. Равенство Планшереля

**Теорема 36.** $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}), \quad |f|^2 \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$

$$\implies |\widehat{f}|^2 \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f|^2 \, \mathrm{d}\, \mathrm{m} = \int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{f}|^2 \, \mathrm{d}\, \mathrm{m}$$

## 71. $\widetilde{\widehat{f}}$

**Утверждение 14.** $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}), \quad \widehat{f} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}), \quad |f|^2, |\widehat{f}|^2 \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$

Для почти всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо

$$\widetilde{(\widehat{f})}(x) = f(x)$$

**Примечание.** Требование $f, \widehat{f} \in \mathscr{L}$ избыточно, если более обще определить преобразование Фурье.