Оглавление

Глава 1

Линейные функционалы

1.1. Линейные функционалы в гильбертовом пространстве

1.1.1. Представление линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве

Теорема 1 (Рисс). H — гильбертово пространство

1. $y \in H$ — фиксирован, $\quad f_y : H \to \mathbb{C} : \quad f_y(x) = (x, y)$

$$f_y \in H^*, \quad \|f_y\|_{H^*} = \|y\|_H$$

2. $f \in H^*$

$$\exists! y \in H : \quad f = f_y$$

Доказательство.

1. $y \in H$

   - Проверим, что $f_y \in \mathscr{L}in(H, \mathbb{C})$
     $\alpha \in \mathbb{C}, \quad x, y \in H$

$$f_y(\alpha x + z) = (\alpha x + z, y) = \alpha(x, y) + (z, y) = \alpha f(x) + f(z)$$

   - Оценим $\|f_y\|$

$$\|f_y\| = |(x, y)| \underset{\text{К—Б}}{\leq} \|y\| \cdot \|x\| \implies \|f_y\| \leq \|y\| \implies f \in H^*$$

     – Если $y = 0$, то $f_y(x) = 0 \implies f_y = \mathbb{O}, \quad \|f_y\| = 0$
     – $y \neq 0$

$$\|f_y\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f_y(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f_y(y)|}{\|y\|} = \frac{(y, y)}{\|y\|} = \|y\|$$

2. $f \in H^*$

   - Если $f = \mathbb{O}$, т. е. $f(x) \equiv 0$, то $f = f_0$
   - $f \neq \mathbb{O}$
     Рассмотрим $N = \operatorname{Ker} f \neq H$

$$H = N \oplus N^{\perp}, \quad N^{\perp} \neq \{ 0 \}$$

     Возьмём $y_0 \in N^{\perp}$. Докажем, что $\dim N^{\perp} = 1$.

$$f(y_0) \neq 0$$
$$v := \frac{y_0}{f(y_0)} \implies f(v) = 1$$

Возьмём $z \in N^{\perp}$. Докажем, что z пропорционально v.

$$u := z - f(z)v \implies u \in N^{\perp}$$

$$f(u) = f(z) - f(z)\underbrace{f(v)}_{1} = 0 \implies u \in N$$

Значит, $u = 0 \implies z = f(z)v$.
Будем искать y в виде $y = \alpha v$, где $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$1 = f_y(v) = f_y(v) = (v, \alpha v) = \alpha \|v\|^2 \implies \alpha = \frac{1}{\|v\|^2} \implies y = \frac{v}{\|v\|^2}$$

- Проверим единственность
  Пусть $f = f_y,\ f = f_z$.

$$\forall x \in H \quad f_y(x) = f_z(x) \implies (x, y) = (x, z) \implies (x, y - z) = 0 \implies y - z \in H^{\perp} = \{\, 0 \,\}$$

$\square$

Замечание. $C : H \to H^* : \quad C(y) = f_y$
Знаем, что $\|f_y\|_{H^*} = \|y\|_H$.

$$C(y + z) = f_{y+z}$$
$$\forall x \in H \quad f_{y+z}(x) = (x, y + z) = (x, y) + (x, z) = f_y + f_z$$
$$C(y + z) = C(y) + C(z)$$

Возьмём $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$C(\alpha y) = f_{\alpha y}$$
$$f_{\alpha y}(h) = (x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$$

C — сопряжённо-линейный изометрический изоморфизм между H и H^*. Говорят, что $H^* = H$, при этом имеют в виду, что $C(H) = H^*$.

Примеры.

1. l^2

$$f \in (l^2)^* \iff \exists! y = \{\, y_n \,\}_{n=1}^{\infty} \in l^2 : \quad \forall x \in l^2 \quad f(x) = f_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n$$

2. $(T, \mathcal{U}, \mu), \quad \mathrm{L}^2(\mu)$

$$\Phi \in \left(\mathrm{L}^2(T, \mu)\right)^* \iff \exists! g \in \mathrm{L}^2(\mu) : \quad \forall f \in \mathrm{L}^2(\mu) \quad \Phi(f) = \int_T f(x)\overline{g(x)} \,\mathrm{d}\,\mu$$

1.2. Геометрический смысл линейного функционала

Теорема 2. X — линейное пространство над $\mathbb{K}$

1. $f \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{K}), \quad f \neq \mathbb{O}, \quad L = \operatorname{Ker} f$

$$\operatorname{codim} L = \dim\left({}^{X}\!/_{L}\right) = 1$$

   Это называется *коразмерность* L.

2. $L \subset X, \quad \operatorname{codim} L = 1, \quad x_0 \in X \setminus L$

$$\exists! f \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{K}) : \quad L = \operatorname{Ker} f, \quad f(x_0) = 1$$

Доказательство.

1. $f \neq \mathbb{O} \implies \exists y_0 \notin L$
$$v := \frac{y_0}{f(y_0)} \implies f(v) = 1$$
Возьмём $x \in X$.
$$u := x - f(x)v \implies f(u) = f(x) - f(x)f(v) = 0 \implies u \in L \implies \overline{u} = \overline{0} \implies \overline{0} = \overline{x} - f(x)\overline{v} \implies$$
$$\implies \overline{x} = f(x)\overline{v} \implies \overline{x} = f(x)\overline{v} \implies {}^{X}\!/_{L} = \{\, \alpha\overline{v} \mid \alpha \in \mathbb{K} \,\} \implies \dim\left({}^{X}\!/_{L}\right) = 1$$

2. $L: \quad \dim\left({}^{X}\!/_{L}\right) = 1$
Возьмём $x \in X$.
$$\exists \alpha \in \mathbb{K} : \overline{x} = \alpha \cdot \overline{x}_0$$
Определим $f(x) = \alpha$.
$$\overline{x}_0 = 1 \cdot \overline{x}_0 \implies f(x_0) = 1$$
Проверим, что $f \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{K})$. Возьмём $\alpha \in \mathbb{K}, \quad x, y \in X$.
$$\left.\begin{aligned} \overline{x} &= \beta\overline{v} \\ \overline{y} &= \gamma\overline{v} \end{aligned}\right\} \implies \alpha\overline{x} + \overline{y} = (\alpha\beta + \gamma)\overline{v} \implies f(\alpha x + y) = \alpha\beta + \gamma = \alpha f(x) + f(y)$$
$$f(x) = 0 \iff \overline{x} = 0 \cdot \overline{v} = \overline{0} \iff x \in L \implies \operatorname{Ker} f = L$$
Проверим единственность. Пусть $\exists g \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{K}), \quad \operatorname{Ker} g = L, \quad g(x_0) = 1$.
$$\forall x \in X \quad x = \alpha \cdot \overline{x}_0 \implies x = \alpha x_0 + y, \quad y \in L \implies \begin{cases} f(x) = \alpha \\ g(x) = \alpha \end{cases}$$

□

Замечание. В условиях второго пункта $L = \operatorname{Ker} f, \quad f(x_0) = 1$
$$f^{-1}(1) = x_0 + L = \{\, x_0 + y \mid y \in L \,\}$$

Доказательство. Обозначим $M = f^{-1}(1)$.

- $z \in x_0 + L$, т. е. $z = x_0 + y, \quad y \in L$
$$f(z) = \underbrace{f(x_0)}_{1} + \underbrace{f(y)}_{0} = 1 \implies z \in M \implies x_0 + L \subset M$$

- $z \in M$
$$f(z) = 1 \implies f(z - x_0) = 0 \implies z - x_0 \in L \implies z - x_0 = y \implies z = x_0 + y \in x_0 + L \implies M \subset x_0 + L$$

□

Теорема 3 (норма линейного функционала). $(X, \|\cdot\|), \quad f \in X^*, \quad f \neq \mathbb{O}, \quad f(x_0) = 1, \quad L = \operatorname{Ker} f$
$$\|f\| = \frac{1}{\rho(x_0, L)}$$

Доказательство. Обозначим $d = \rho(x_0, L) = \inf \|x_0 - y\|$.

- $$1 = f(x_0) = f(x_0 - y) \leq \|f\| \cdot \|x_0 - y\| \quad \forall y \in L \implies 1 \leq \|f\| \inf \|x_0 - y\| = \|f\| d \implies \frac{1}{d} \leq \|f\|$$

- $x \in X \setminus L, \quad f(x) \neq 0$

$$f\Big(\frac{x}{f(x)}\Big) = 1 \implies f\Big(x_0 - \frac{x}{f(x)}\Big) \implies x_0 - \frac{x}{f(x)} \in L \implies \Big\|x_0 - \Big(x_0 - \frac{x}{f(x)}\Big)\Big\| \geq d \iff$$
$$\iff \frac{\|x\|}{\|f(x)\|} \geq d \implies |f(x)| \leq \frac{1}{d}\|x\| \implies \|f\| \leq \frac{1}{d}$$

□

Замечание. В обозначениях теоремы $M = f^{-1}(1)$

$$\rho(x_0, L) = \rho(0, M)$$

Доказательство.

$$\rho(x_0, L) = \inf \|x_0 - y\|$$
$$\rho(0, M) = \rho(0, x_0 + L) = \inf \|x_0 + y\| = \inf \|x_0 - y\| = \rho(x_0, L)$$

□

1.3. Продолжение линейных функционалов

1.3.1. Небольшое отступление: трансфинитная индукция

Определение 1. $\mathscr{P}$ — *частично упорядоченное множество*, если для некоторых элементов $a, b \in \mathscr{P}$ выполняется $a \leq b$, т. е. выделено

$$R \subset \mathscr{P} \times \mathscr{P}: \quad (a, b) \in R \text{ если } a \leq b$$

и выполнены аксиомы:

1. Рефлексивность: $\forall a \in \mathscr{P} \quad a \leq a$.
2. Транзитивность:
$$\left.\begin{matrix} a \leq b \\ b \leq c \end{matrix}\right\} \implies a \leq c$$
3. Антисимметричность:
$$\left.\begin{matrix} a \leq b \\ b \leq a \end{matrix}\right\} \implies a = b$$

Определение 2. $A \subset \mathscr{P}$
y — *верхняя грань* для A, если $\forall a \in A \quad a \leq y$.