Оглавление

Глава 1

Пространства

1.1. Пространства Лебега

1.1.1. Похожие пространства последовательностей

Пример.

$$l^p = \left\{ x = \{\, x_j \,\}_{j=1}^{\infty}, \quad x \in \mathbb{R}, \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < +\infty \right\}$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Докажем, что l^p — банахово:

$$T = \mathbb{N}, \quad \mu(j) = 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad L^p(\mathbb{N}, \mu) = l^p, \quad f \in L^p(\mathbb{N}, \mu), \quad f(j) = x_j$$

Замечание.

1. $\{\, x^{(m)} \,\}_{m=1}^{\infty}, \quad x^{(m)} \in l^p, \quad 1 \le p \le +\infty, \quad x \in l^p, \quad \lim\limits_{m\to\infty} \|x^{(m)} - x\|_p = 0$

$$\implies \lim_{m\to\infty} x_j^{(m)} = x_j \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

2. В другую сторону **неверно**.

Пример (в другую сторону). Рассмотрим последовательность базисных элементов:

$$e_m = (0, \ldots, 0, \underset{m}{1}, 0, \ldots, 0)$$

$$e_m = \{\, \delta_j^m \,\}_{j=1}^{\infty}, \quad \delta_j^m = \begin{cases} 1, & j = m \\ 0, & j \ne m \end{cases}$$

δ_j^m называются *символами Кронекера.*

Для любого фиксированного j $\lim\limits_{m\to\infty} \delta_j^m = 0$. Поккординатный предел равен $\mathbb{O}_n$.

$$\|e_m - \mathbb{O}_n\|_p = 1 \quad \forall m \implies \|e_m - \mathbb{O}_n\|_p \not\to 0$$

1.2. Не полные нормированные пространства

1.2.1. Пространство финитных последовательностей

Определение 1. F — множество *финитных* последовательностей:

$$F = \{\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_{N(x)}, 0, \ldots), \quad x_j \in \mathbb{R}, \mathbb{C} \,\}$$

$$(F, \|\cdot\|_p), \quad 1 \le p \le +\infty$$

Утверждение 1. $(F, \|\cdot\|_p)$ не полны.

Доказательство. При фиксированном p можно считать, что $(F, \|\cdot\|_p) \subset l^p$ (подпространство в алгебраическом смысле).

Проверим, что оно не замкнуто. Возьмём

$$x = \left\{ \frac{1}{2^k} \right\}_{k=1}^{\infty}, \quad x \in l^p \quad \forall 1 \le p \le +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}} < +\infty$$

Положим

$$x^{(m)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^m}, 0, \ldots\right) \in F$$

- $1 \le p < +\infty$

$$\|x - x^{(m)}\|_p = \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{pk}}\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

- $p = +\infty$

$$\|x - x^{(m)}\|_\infty = \frac{1}{2^{m+1}} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

Значит, F не замкнуто. □

1.2.2. Пространство непрерывных функций на отрезке с интегральной нормой

Пример.

$$\left(\mathcal{C}[a,b], \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}\,x\right)^{\frac{1}{p}}\right), \quad 1 \le p < +\infty$$

Утверждение 2. $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_p)$ — не полное нормированное пространство.

Доказательство. Возьмём $f \in \mathcal{C}[a,b]$.

$$\left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}\,x\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \implies f(x) \overset{[a,b]}{\equiv} 0 \implies \|\cdot\|_p \text{ — норма}$$

Рассмотрим $\mathrm{L}^p[a,b]$, λ — классическая мера Лебега.

Докажем, что $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_p)$ — подпространство (L^p, λ) в алгебраическом смысле.

$$f \in \mathcal{C}[a,b] \to \{\, g \in \mathrm{L}^p[a,b], \quad g(x) = f(x) \text{ п. в.по } \lambda \,\}$$

Проверим, что $C[a,b]$ не замкнуто.

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0 \\ nx, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

$$\left(\int_{-1}^1 |f_n(x) - g(x)|^p \,\mathrm{d}\,x\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Докажем, что $\nexists f \in \mathcal{C}[-1,1]$ такой, что $f(x) = g(x)$ п. в. на $[-1,1]$.

От противного. Пусть такая f существует.

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|^p \,\mathrm{d}\,\lambda = 0 \implies \begin{cases} \int_{-1}^{0} |f(x)|^p \,\mathrm{d}\,\lambda = 0 \implies f(x) \overset{[-1,0]}{=\!=\!=} 0 \\ \int_{0}^{1} |f(x) - 1|^p \,\mathrm{d}\,\lambda = 0 \implies f(x) \overset{[0,1]}{=\!=\!=} 1 \end{cases} \quad - \lightning$$

□

1.2.3. Пространство многочленов

Пример.

$$\mathscr{P} = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad n \geq 0 \right\}, \quad \forall [a, b]$$

$$\|p(x)\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |p(x)|, \quad \mathscr{P} \subset \mathcal{C}[a, b]$$

Утверждение 3. $(\mathscr{P}, \|\cdot\|_\infty)$ не полно.

Доказательство. Ясно, что $\mathscr{P}$ — подпространство в алгебраическом смысле. Докажем, что оно не замкнуто.

$$e^x \notin \mathscr{P}, \quad \text{т. к.} (e^x)^{(n)} = e^x \not\equiv 0$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}, \quad \lim_{n\to\infty} \max_{x \in [a,b]} |e^x - P_n(x)| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|e^x - P_n\|_\infty = 0 \implies \mathscr{P} \text{ не замкнуто}$$

□

1.3. Пополнение метрического пространства

Теорема 1 (простейшие свойства метрики). (X, ρ) — метрическое пространство.

1. $x, y, z, u \in X \implies |\rho(x, y) - \rho(z, u)| \leq \rho(x, u) + \rho(y, z)$;
2. $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ непрерывна (как функция двух переменных);
3. $A \subset X, \quad \rho(x, A) := \inf_{a \in A} \rho(x, a)$

   При фиксированном A функция $\rho(x, A)$ непрерывна по x;
4. A замкнуто, $\quad x_0 \notin A \implies \rho(x_0, A) > 0$.

Доказательство.

1. $\rho(x, y) \overset{\triangle}{\leq} \rho(y, z) + \rho(x, z) \overset{\triangle}{\leq} \rho(y, z) + \rho(z, u) + \rho(x, u)$.
2. Пусть есть две последовательности такие, что $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$. Требуется проверить, что $\lim \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$.

$$|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \underset{1}{\leq} \underbrace{\rho(x, x_n)}_{\to 0} + \underbrace{\rho(y, y_n)}_{\to 0}$$

3. $A \subset X, \quad x, z \in X, \quad y \in A, \quad y$ фиксирован.

$$\rho(x, A) \leq \rho(x, y) \overset{\triangle}{\leq} \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

В силу произвольности y можно взять точную нижнюю грань:

$$\rho(x, A) \le \rho(x, z) + \inf_{y \in A} \rho(z, y) = \rho(x, z) + \rho(z, A) \implies \rho(x, A) - \rho(z, A) \le \rho(x, z)$$

Аналогично, $\rho(z, A) - \rho(x, A) \le \rho(x, z)$

$$\implies |\rho(x, A) - \rho(z, A)| \le \rho(x, z)$$

Зафиксируем x и устремим к нему z:

$$\lim_{z \to x} \rho(z, A) = \rho(x, A)$$

4. $A = \overline{A} \implies X \setminus A$ открыто.

$$x_0 \notin A \implies X \setminus A \implies \exists r > 0 : \quad \mathtt{B}_r(x_0) \in X \setminus A \implies \forall y \in A \quad \rho(x_0, y) \ge r \implies \rho(x_0, A) \ge r$$

□

Определение 2. (X, ρ), (Y, d) — метрические пространства, $\quad T : X \to Y$.

1. T называется *изометрическим вложением*, если оно сохраняет расстояния:

$$d(Tx, Tz) = \rho(x, z) \quad \forall x, z \in X$$

2. T называется *изометрией*, если $T(X) = Y$ и $d(Tx, Tz) = \rho(x, z)$. Говорят, что (X, ρ) и (Y, d) *изометричны*.

Свойства.

1. $T : X \to Y$ — изометрическое вложение.
   Тогда T инъективно и непрерывно.
2. T — изометрия.
   Тогда существует $T^{-1} : Y \to X$ — изометрия.
3. Изометрия — отношение эквивалентности на множестве метрических пространств.
4. T — изометрическое вложение, $\quad Z = T(X)$.
   Тогда T — изометрия X и Z.

Доказательство.

1. Пусть $x, z \in X$, $\quad Tx = Tz$.
$$0 = d(Tx, Tz) = \rho(x, z) \implies x = z$$
$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \implies \lim \rho(x_n, x) = 0 \implies \lim d(Tx_n, Tx) = 0$$
2. Очевидно.
3. Следует из предыдущих.
4. Очевидно.

□

Определение 3. (X, ρ) — метрическое пространство, $\quad (Z, d)$ — полное, $\quad \exists T : X \to Z : \quad T$ — изометрическое вложение и $\overline{T(X)} = Z$.
Будем говорить, что (Z, d) — *пополнение* (X, ρ).

Замечание. (U, d) — полное, $\quad T : X \to U$ — изометрическое вложение.
Определим $Z = \overline{T(X)}$ (в U). Замкнутое пространство полно, поэтому Z будет пополнением.

Теорема 2 (о пополнении метрического пространства). (X, ρ) — метрическое пространство.
Тогда $\exists (Z, d)$ — пополнение.

Примечание. Есть естественное доказательство, но оно муторное. Мы же докажем коротко, но неестественно.