

Оглавление

1	Линейные пространства	2
1.1	Линейные операторы в нормированных пространствах	2
1.1.1	Эквивалентность непрерывности и ограниченности линейного оператора	3
1.1.2	Вычисление нормы непрерывного оператора	4

Глава 1

Линейные пространства

Определение 1. X — линейное пространство над полем K , $B \subset X$.
 B называется *выпуклым*, если

$$\forall x, y \in B \quad \forall t \in [0, 1] \quad tx + (1 - t)y \in B$$

Теорема 1. X, Y — линейные пространства, $A \in \mathcal{L}in(X, Y)$.

1. $L \subset X$ — подпространство $\implies A(L)$ — подпространство Y ;
2. $M \subset Y$ — подпространство $\implies A^{-1}(M)$ — подпространство X ;
(прообраз)
3. $B \subset X$ — выпуклое $\implies A(B)$ — выпуклое в Y ;
4. $C \subset Y$ — выпуклое $\implies A^{-1}(C)$ — выпуклое в X ;
(прообраз)
5. A — биекция $\implies \exists A^{-1} \in \mathcal{L}in(Y, X)$.

Примечание. Не надо думать, что A — биекция (кроме последнего).

Без доказательства. Было в алгебре. □

Определение 2. $A \in \mathcal{L}in(X, Y)$, X, Y линейны над K .

Определим *ядро оператора*:

$$\text{Ker } A = \{x \in X \mid Ax = 0\}$$

и *образ оператора*:

$$\text{Im } A = A(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : y = Ax\}$$

Следствие. $A \in \mathcal{L}in(X, Y) \implies \text{Ker } A$ — подпространство X , $\text{Im } A$ — подпространство Y .

Определение 3. X, Y, Z линейны, $X \xrightarrow{A} Y \xrightarrow{B} Z$.

$C = B \cdot A$ называется *произведением операторов*, если $C(x) = B(A(x))$.

Утверждение 1. Если A, B линейны, то $A \cdot B$ линеен.

1.1. Линейные операторы в нормированных пространствах

Определение 4. $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$, $A \in \mathcal{L}in(X, Y)$.

A ограничен, если

$$\forall \text{ ограниченного } B \subset X \quad A(B) \text{ ограничено}$$

1.1.1. Эквивалентность непрерывности и ограниченности линейного оператора

Теорема 2. $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \mathcal{L}in(X, Y)$.

Следующие условия равносильны (FCE):

1. A непрерывен в \mathbb{O}_n ;
2. A непрерывен на X ;
3. $\exists c > 0 : \|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X \quad \forall x \in X$;
4. A ограничен;
5. $\exists r > 0 : A(\mathbb{B}_r(\mathbb{O}_n))$ ограничено.

Доказательство.

- 1 \implies 2

В силу линейности $A(\mathbb{O}_n) = \mathbb{O}_n$.

A непрерывен в $\mathbb{O}_n \implies \exists \delta > 0 : \forall \|x\| < \delta \implies \|Ax\| < \varepsilon$.

Зафиксируем $x_0 \in X$, обозначим $y_0 = Ax_0$.

$$\|x - x_0\| < \delta \xrightarrow{\text{непр. в } \mathbb{O}_n} \|A(x - x_0)\| < \varepsilon \iff \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon \iff \text{непр. в } x_0$$

- 2 \implies 1 — очевидно.

- 1 \implies 3

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \|x\| \leq \delta \implies \|Ax\| < \varepsilon$$

Возьмём $z \in X, z \neq \mathbb{O}_n$.

$$\left\| \frac{z}{\|z\|} \right\| = 1$$

$$\begin{aligned} x = \delta \cdot \frac{z}{\|z\|} \implies \|x\| = \delta \implies \|Ax\| < \varepsilon \implies \left\| A\left(\delta \cdot \frac{z}{\|z\|}\right) \right\| < \varepsilon \iff \\ \iff \frac{\delta}{\|z\|} \cdot \|Az\| < \varepsilon \iff \|Az\| < \frac{\varepsilon}{\delta} \|z\| \end{aligned}$$

- 3 \implies 4

Возьмём $B \subset X$ — ограниченное, т. е.

$$\exists R > 0 : \forall x \in B \quad \|x\| \leq R \implies \|Ax\| \stackrel{3)}{\leq} c\|x\| \leq cR \implies A(B) \text{ ограничено}$$

- 4 \implies 5

$$\mathbb{B}_r(\mathbb{O}_n) \text{ ограничено} \xrightarrow{\text{очевидно}} A(\mathbb{B}_r(0))$$

- 5 \implies 1

$$\exists R > 0 : A(\mathbb{B}_r(0)) \subset \mathbb{B}_R(\mathbb{O}_n)$$

т. е. $\|x\| < r \implies \|Ax\| < R$.

Пусть $\|Ax\| < \varepsilon$. Найдём $\delta : \|x\| < \delta$.

$$\delta = \varepsilon \cdot \frac{r}{R}$$

Пусть $\|x\| < \delta$

$$\implies \|x\| < \varepsilon \cdot rR \implies \left\| x \cdot \frac{R}{\varepsilon} \right\| < r \implies \left\| A \left(x \cdot \frac{R}{\varepsilon} \right) \right\| < R \implies \|Ax\| \cdot \frac{R}{\varepsilon} < R \iff \|Ax\| < \varepsilon$$

□

Определение 5. $\mathcal{B}(X, Y)$ — множество всех ограниченных линейных операторов из X в Y (\iff множество всех непрерывных).

Замечание. $\mathcal{B}(X, Y)$ — подпространство $\mathcal{L}in(X, Y)$.

Определение 6. $A \subset \mathcal{B}(X, Y)$.

Введём *норму* на \mathcal{B} :

$$\|A\| = \inf \{ c > 0 \mid \|Ax\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in X \}$$

(по свойству 3 она конечна).

Утверждение 2. $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$

1. $A \in \mathcal{B}(X, Y) \implies \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X;$

2. $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(X, Y)}$ удовлетворяет аксиомам нормы.

Доказательство.

1. Зафиксируем $x \in X$, возьмём $c > \|A\|$.

$$\implies \|Ax\| \leq c\|x\| \implies \|Ax\| \leq \int \{ c > 0 \mid c > \|A\| \} \|x\| \implies \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

2. $A \in \mathcal{B}(X, Y)$.

(a) $\lambda \in K, x \in X$.

$$\begin{aligned} \|(\lambda A)x\| &= \|\lambda \cdot (Ax)\| = |\lambda| \cdot \|Ax\| \leq |\lambda| \cdot \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall x \\ &\implies \|\lambda A\| \leq |\lambda| \cdot \|A\| \end{aligned}$$

Пусть $\lambda \neq 0$.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\lambda} (\lambda A) \right\| &\leq \left| \frac{1}{\lambda} \right| \cdot \|\lambda A\| \\ &\implies \|A\| \cdot |\lambda| \leq \|\lambda A\| \end{aligned}$$

(b) Неравенство треугольника

Пусть $x \in X$

$$\begin{aligned} \|(A + B)x\| &= \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| = (\|A\| + \|B\|) \|x\| \quad \forall x \\ &\implies \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

(c) $\|A\| = 0$

$$\implies \forall x \in X \quad \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| = 0$$

□

1.1.2. Вычисление нормы непрерывного оператора

Теорема 3. $A \in \mathcal{B}(X, Y)$

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Доказательство. Обозначим $a = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$, $b = \sup_{\|x\| < 1} \|Ax\|$, $c = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$, $d = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Очевидно, что $a \leq b$, $d \geq c$.

Докажем, что

$$\|A\| \geq a \geq b \geq \|A\|, \quad \|A\| \geq d \geq c \geq \|A\|$$

1. Пусть $x : \|x\| \leq 1$.

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \implies a \leq \|A\|$$

2. Пусть $z \in X \neq 0$, $\varepsilon > 0$. Рассмотрим

$$x = \frac{z}{\|z\| \cdot (1 + \varepsilon)} \implies \|x\| < 1 \implies \|Ax\| \leq b$$

$$\implies \left\| A\left(\frac{z}{\|z\|(1+\varepsilon)}\right) \right\| \leq b \iff \|Az\| \leq (1+\varepsilon)b \cdot \|z\| \quad \forall z \implies \|A\| \leq (1+\varepsilon)b \quad \forall \varepsilon > 0 \implies \|A\| \leq b$$

3. Пусть $x \in X \neq 0$

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \implies \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| \implies \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| \implies d \leq \|A\|$$

4. Пусть $z \in X \neq 0$

$$\left\| \frac{z}{\|z\|} \right\| = 1 \implies \left\| A\left(\frac{z}{\|z\|}\right) \right\| \leq c \implies \|Az\| \leq c\|z\| \implies \|A\| \leq c$$

□

Примеры.

1. $X = \mathcal{C}[a, b]$, $h(x) \in \mathcal{C}[a, b]$ $M_h(f) = h(x) \cdot f(x)$ — мультипликатор.

Проверим, что

$$M_h \in \mathcal{B}(\mathcal{C}[a, b]), \quad \|M_h\|_{\mathcal{B}(\mathcal{C}[a, b])} = \|h\|_\infty$$

$$x \in [a, b] \implies (M_h(f)(x)) = h(x)f(x) \implies \|h \cdot f\|_\infty \leq \max_{[a, b]} |h(x)| \cdot \max_{[a, b]} |f(x)| = \|h\|_\infty \cdot \|f\|_\infty$$

$$\forall f \in \mathcal{C}[a, b] \quad \|M_h(f)\|_\infty \leq \|h\|_\infty \|f\|_\infty \implies \forall M_h \in \mathcal{B}(\mathcal{C}[a, b]) \quad \|M_h\|_{\mathcal{B}(\mathcal{C}[a, b])} \leq \|h\|_\infty$$

$$f(x) = \chi_{[a, b]}(x) \in \mathcal{C}[a, b], \quad \|\chi_{[a, b]}\|_\infty = 1$$

$$\|M_h\| = \sup_{\|f\|=1} \|M_h(f)\|_\infty \geq \|M_h(\chi_{[a, b]})\|_\infty = \|h\|_\infty \implies \|M_h\|_{\mathcal{B}(\mathcal{C}[a, b])} = \|h\|_\infty$$

2. $Y = \mathcal{C}[0, 1]$, $X = \{f \mid f' \in [0, 1]\}$

X — подпространство Y , т. е. $\|f\|_X = \max_{[0, 1]} |f'(x)|$.

$$f \in X, \quad \mathcal{D}(f) = f', \quad \mathcal{D} \in \mathcal{L}in(X, Y)$$

Проверим, что \mathcal{D} не является непрерывным.

$$x^n \in \mathcal{C}[0, 1], \quad \|x^n\|_\infty = 1 \implies \sup_{\|f\|=1} \|\mathcal{D}(f)\|_\infty \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mathcal{D}(x^n)\|$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(x^n) &= nx^{n-1} \implies \|\mathcal{D}(x^n)\|_\infty = n \\ &\implies \sup \|\mathcal{D}(f)\| \geq \sup \{\mathcal{D}(x^n)\} = +\infty\end{aligned}$$