Оглавление

Глава 1

Пространства

1.1. Пополнение метрического пространства

Теорема 1 (о пополнении метрического пространства)**.** (X,ρ) — метрическое пространство.
Тогда $\exists (Z,d)$ — пополнение.

Примечание. Есть естественное доказательство, но оно муторное. Мы же докажем коротко, но неестественно.

Доказательство.

- Пусть x ограничено, т. е. $\exists M \geq 0: \quad \forall x,y \in X \quad \rho(x,y) \leq M$.

  Зафиксируем $t \in X$. Рассмотрим функцию $f_t(x) = \rho(t,x)$. Понятно, что она ограничена, т. е. $f_t \in m(X)$.

  Определим отображение $\varphi : X \to m(X): \quad \varphi(t) \coloneqq f_t$.

  Проверим, что φ — изометрическое вложение. Для $s,t \in X \quad \|\varphi(t) - \varphi(s)\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} |\rho(t,x) - \rho(s,x)|$.

$$\begin{cases} |\rho(t,x) - \rho(s,x)| \leq \rho(t,s) \\ \text{Пусть } x = t \implies |\rho(t,t) - \rho(s,t)| = \rho(t,s) \end{cases} \implies \|\varphi(t) - \varphi(s)\|_\infty = \rho(t,s)$$

- (X,ρ) — произвольное.

  Зафиксируем $a \in X$. Для $t \in X$ рассмотрим $f_t(x) = \rho(t,x) - \rho(a,x)$.

$$|f_t(x)| \overset{\triangle}{\leq} \rho(a,t) \quad \forall x \implies f_t \in m(X)$$

$$\varphi : X \to m(X): \quad \varphi(t) \coloneqq f_t$$

  Возьмём $t,s \in X$.

$$\|\varphi(t) - \varphi(s)\|_{m(X)} = \sup_{x\in X} |f_t(x) - f_s(x)| = \sup_{x\in X} |\rho(t,x) - \rho(s,x)| = \rho(t,s)$$

  Значит, φ — изометрическое вложение.

$$Z = \overline{\varphi(X)}$$

$\square$

Замечание. $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное.
Рассмотрим $X^* = \{\, f : X \to \mathbb{C}$ — линейный непрерывный функционал $\}$. X^* всегда полное (это будет доказано позже).

Рассмотрим $(X^*)^*$. Существует естественное (каноническое) вложение X в X^{**}: $\overline{(\pi(x))}^{X^{**}}$.

Замечание. Пополнение единственно с точностью до изоморфизма.

1.1.1. Примеры пополнения

Примеры.

1. Пространства финитных последовательностей: $(F, \|\cdot\|_p), \quad 1 \le p \le \infty$.
   - $p < +\infty$
     Уже знаем, что $(F, \|\cdot\|_p) \subset l^p$ и оно не замкнуто.
     $$\overline{F} = l^p, \quad \text{для } x = (x_1, x_2, \dots) \in l^p \quad x^{(m)} = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots)$$
     $$\|x - x^{(m)}\|_p = \left(\sum |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$
     (т. к. это остаток сходящегося ряда).
     Таким образом, l^p — пополнение F по $\|\cdot\|_p$.
   - $p = +\infty$
     $$\overline{(F, \|\cdot\|_\infty)}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0$$
     C_0 — последовательности, предел которых равен 0.
     $$\{\, x_j \,\}_{j=1}^{\infty}, \quad \lim_{j\to\infty} x_j = 0, \quad x^{(m)} = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots)$$
     $$\|x - x^{(m)}\|_\infty = \sup_{j>m} |x_j| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \implies C_0 \subset \overline{F}^{\|\cdot\|_\infty}$$
2. $\mathscr{P} = \left\{\, \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad n \ge 0 \,\right\}$
   $\mathscr{P} \subset \mathcal{C}[a,b]$ по теореме Вейерштрасса, которая утверждает, что
   $$\forall f \in \mathcal{C}[a,b] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in \mathscr{P}: \quad \|f - p\|_\infty < \varepsilon$$
3. $\mathcal{C}[a,b]$, $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}\, x\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < +\infty$
   $$\overline{\mathcal{C}[a,b]}^{\|\cdot\|_p} = \mathrm{L}^p[a,b]$$

1.2. Теорема о вложенных шарах

Обозначение. (X, ρ) — метрическое пространство, $\quad r > 0$

$$\mathtt{D}_r(x) = \{\, y \in X \mid \rho(x,y) \le r \,\}$$

Теорема 2 (критерий полноты метрического пространства).

$$(X,\rho) \text{ — полное} \iff \left(\forall \{\, \mathtt{D}_n \,\}_{n=1}^{\infty} : \mathtt{D}_n = \mathtt{D}_{r_n}(x_n),\ D_{n+1} \subset D_n,\ \lim_{n\to\infty} r_n = 0 \implies \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathtt{D}_n \ne \emptyset\right)$$

Доказательство.

- $\implies$
  Центры шаров образуют фундаментальную последовательность, её предел принадлежит всем шарам.
- $\impliedby$
  Возьмём фундаментальную последовательность $\{\, x_n \,\}_{n=1}^{\infty}$.

Обозначим $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$. В силу фундаментальности x_k

$$\exists \{ x_{n_k} \}_{k=1}^{\infty} : \quad \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\mathtt{D}_k = \mathtt{D}_{\varepsilon_k}(x_{n_k})$$

Проверим, что $\mathtt{D}_{k+1} \subset \mathtt{D}_k$. Возьмём $y \in \mathtt{D}_{k+1}$.

$$\rho(x_{n_{k+1}}, y) \le \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\rho(y, x_{n_k}) \overset{\triangle}{\le} \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, y) < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k} \implies y \in \mathtt{D}_k \implies$$

$$\implies \mathtt{D}_{k+1} \subset \mathtt{D}_k \implies \exists a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathtt{D}_k \implies \lim x_{n_k} = a$$

□

Замечание. В условиях теоремы пересечение состоит ровно из одной точки, и это точка $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Замечание. Требование $\lim r_n = 0$ существенно.

Пример (подготовительный). $\{ F_n \}_{n=1}^{\infty}, \quad F_n \subset \mathbb{R}, \quad F_n = \overline{F}_n, \quad F_{n+1} \subset F_n, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$

Примером таких множеств являются лучи $F_n = [n, +\infty)$.

Пример (существенность требования). Построим метрическое пространство, в котором шарами будут лучи из предыдущего примера.

$$X = [1, +\infty), \quad \rho(x, y) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y}, & x \ne y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

1. Проверим неравенство треугольника:

$$x \ne y \ne z \in X \quad \rho(x, y) + \rho(y, z) = 1 + \frac{1}{x+y} + 1 + \frac{1}{y+z} > 2 > 1 + \frac{1}{x+z}$$

2. Полнота.

   Пусть $\{ x_n \}$ фундаментальна. Докажем, что, начиная с какого-то элемента, она стабилизируется. Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\exists N : \quad \forall n, m \ge N \quad \rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2} \implies \rho(x_m, x_N) < \frac{1}{2} \implies x_m = x_N \quad \forall m \ge N$$

3. Шары в X.

   Пусть $r_n = 1 + \frac{1}{2n}, \quad \mathtt{D}_n = \mathtt{D}_{r_n}(n)$. Понятно, что $n \in \mathtt{D}_n$.

   - $x > n$

$$\rho(n, x) = 1 + \frac{1}{n+x} < 1 + \frac{1}{2n} = r_n \implies x \in \mathtt{D}_n$$

   - $x < n \implies x \notin \mathtt{D}_n$

$$\mathtt{D}_n = [n, +\infty), \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathtt{D}_n = \emptyset$$

Замечание. Если $(X, \|\cdot\|)$ нормировано, то требование стремления радиусов к нулю избыточно:

$$\text{полнота} \iff \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathtt{D}_n \neq \emptyset \text{ при } \mathtt{D}_{n+1} \subset \mathtt{D}_n$$

Доказательство. Следует из линейности. □

1.3. Сепарабельные пространства

Сепарабельность означает некоторую малость.

Определение 1. $(X, \rho), \quad A, C \subset X$
A плотно в C, если $C \subset \overline{A}$, т. е.

$$\forall x \in C \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A: \quad \rho(x, a) < \varepsilon$$

или

$$C \subset \bigcup_{a \in A} \mathtt{B}_\varepsilon(a) \quad \forall \varepsilon > 0$$

или

$$\forall x \in C \quad \forall \varepsilon > 0 \mathtt{B}_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$$

Определение 2. *A всюду плотно в X*, если $\overline{A} = X$.

Замечание.

$$\begin{cases} A \text{ плотно в } B \\ B \text{ плотно в } C \end{cases} \implies A \text{ плотно в } C$$

Определение 3. (X, ρ) *сепарабельно*, если в нём существует счётное всюду плотное множество.

Теорема 3. $l_n^p, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 1 \le p \le +\infty$
l_n^p сепарабельно.

Доказательство. Пусть $l_n^p = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$. Рассмотрим $\mathbb{Q}^n = \{\, x = (x_1, \ldots, x_n), \quad x_j \in \mathbb{Q} \,\}$.
Знаем, что $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \implies \mathbb{Q}^n$ всюду плотно в l_n^p.
Для комплексных последовательностей рассмотрим $\widetilde{\mathbb{Q}} = \{\, z = x + \mathrm{i}y, \quad x, y \in \mathbb{Q} \,\}$. □

Следствие. Пространство финитных последовательностей $(F, \|\cdot\|_{1 \le p \le +\infty})$ сепарабельно.

Доказательство. Вложим l_n^p в F:

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in l_n^p \quad \to \quad (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots) \in F$$

$$\implies F = \bigcup_{n=1}^{\infty} l_n^p \implies E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n \text{ — всюду плотное в } (F, \|\cdot\|_p)$$

□