Оглавление

Глава 1

ТФКП

1.1. Теорема Фубини

Обозначение. m-почти всюду $\equiv$ всюду, за исключением множеств меры 0, для меры Лебега размерности m.

Теорема 1. Имеется некое множество $E \subset \mathbb{R}^{m+n}, \quad m, n \geq 1, \quad E \subset \mathfrak{M}_{m+n}$

$$M \in \mathbb{R}^{m+n}, \quad M = (X, Y), \quad X \in \mathbb{R}^m,\ Y \in \mathbb{R}^n$$

Возьмём $\forall X \in \mathbb{R}^m$. Определим множества

$$E(X, \cdot) = \{\, Y \in \mathbb{R}^n \mid (X, Y) \in E \,\}, \qquad E(\cdot, Y) = \{\, X \in \mathbb{R}^m \mid (X, Y) \in E \,\}$$

Тогда

1. - Для m-п. в. $X \qquad E(X, \cdot) \in \mathfrak{M}_n$.
   - Для n-п. в. $Y \qquad E(\cdot, Y) \in \mathfrak{M}_m$
2. Пусть μ_k — мера Лебега в $\mathbb{R}^k$. Тогда

$$\mu_{m+n} E = \int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}} \mu_n E(X, \cdot) \,\mathrm{d}\, \mu_m(X) = \int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}} \mu_m E(\cdot, Y) \,\mathrm{d}\, \mu_n(X)$$

3. $f : E \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathbb{R}^m \quad & f_X : E(X, \cdot) \to \mathbb{R} : \quad f_X(Y) = f(X, Y) \\ \forall Y \in \mathbb{R}^n \quad & f_Y : E(\cdot, Y) \to \mathbb{R} : \quad f_Y(X) = f(X, Y) \end{aligned}$$

Для m-п. в. $X \qquad f_X$ измерима по Y на $E(X, \cdot)$.
Для n-п. в. $Y \qquad f_Y$ измерима по X на $E(\cdot, Y)$.

4. $f \in \mathscr{L}(E)$. Тогда
   - для m-п. в. $X \qquad f_X \in \mathscr{L}\big(E(X, \cdot)\big)$;
   - для n-п. в. $Y \qquad f_Y \in \mathscr{L}\big(E(\cdot, Y)\big)$;
   - $$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\, \mu_{m+n} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \Big(\int\limits_{E(X,\cdot)} f_X \,\mathrm{d}\, \mu_n \Big) \,\mathrm{d}\, \mu_m(X) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{E(\cdot,Y)} f_Y \,\mathrm{d}\, \mu_m \Big) \,\mathrm{d}\, \mu_n(Y),$$

     или

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\, \mu_{m+n} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \Big(f(X, Y) \,\mathrm{d}\, \mu_n(Y) \Big) \,\mathrm{d}\, \mu_m(X) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{E(\cdot,Y)} f(X, Y) \,\mathrm{d}\, \mu_m(X) \Big) \,\mathrm{d}\, \mu_n(Y)$$

Примечание. В прошлом семестре обещали доказать теорему об интегралах по параметру. Она следует из теоремы Фубини.

1.2. Поверхностный интеграл I рода

Определение 1. $D \subset \mathbb{R}^n$ — открыто, связно, $\quad m > n$.
$\mathcal{C}^1$-поверхностью будем называть отображение $F : D \to \mathbb{R}^n$ такое, что $F \in \mathcal{C}^1(D)$, т. е.

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}, \quad f_k \in \mathcal{C}^1(D),$$

F — биекция, $\quad \operatorname{rank} \mathcal{D}F(X) = n \quad \forall X \in D$.

Определение 2. $S = F(D), \quad E \subset S$
Будем говорить, что E *S-измеримо*, если $F^{-1}(E) \subset \mathfrak{M}_n$
Определим *S-меру*:

$$\mu_S E \coloneqq \int\limits_{F^{-1}(E)} \sqrt{\det\Big(\big(\mathcal{D}F(X)\big)^T \mathcal{D}F(X)\Big)} \, \mathrm{d}\, \mu_n(X)$$

Определение 3. $F : S \to \mathbb{R}$
Будем говорить, что f *S-измерима*, если $\varphi(X) = f\big(F(X)\big)$ измерима на $F^{-1}(E)$.

Определение 4. $f \in \mathscr{L}_S(E)$

$$\int\limits_E f \, \mathrm{d}\, \mu_S \coloneqq \int\limits_{F^{-1}(E)} f\big(F(X)\big) \sqrt{\det\Big(\big(\mathcal{D}F(X)\big)^T \mathcal{D}F(X)\Big)} \, \mathrm{d}\, \mu_n(X)$$

Определение 5. *Кусочно-гладкой* поверхностью будем называть $S = \bigcup_{k=1}^N S_k$, где S_k — $\mathcal{C}^1$-поверхность, при этом $S_k \cap S_l = \emptyset$ или $\mu_{S_k}(S_k \cap S_l) = 0$.

Определение 6. $E \subset S$
Будем говорить, что E *S-измеримо*, если $E \cap S_k \quad S_k$ измеримо $\forall k$

$$\mu_S E = \sum_{k=1}^N \mu_{S_k}(E \cap S_k)$$

Определение 7. $f : E \to \mathbb{R}$
Будем говорить, что f *S-измерима*, если $f\big|_{S_k}$ S_k-измерима $\forall k$.

Определение 8. $f \in \mathscr{L}_S(E) \iff f\big|_{S_k} \in \mathscr{L}_{S_k}(E \cap S_k)$

$$\int\limits_E f \, \mathrm{d}\, \mu_S = \sum_{k=1}^N \int\limits_{E \cap S_k} f\big|_{S_k} \mathrm{d}\, \mu_{S_k}$$

1.3. Ориентированные поверхности в $\mathbb{R}^3$

Определение 9. $D \subset \mathbb{R}^2$ открыто, связно, $\quad F : D \to \mathbb{R}^3$ — $\mathcal{C}^1$-поверхность в $\mathbb{R}^3$

$$S = F(D), \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad X \in D, \quad T_1(X) = \begin{bmatrix} f'_{1\ x_1}(X) \\ f'_{2\ x_2}(X) \\ f'_{3\ x_3}(X) \end{bmatrix}, \quad T_2(X) = \begin{bmatrix} f'_{1\ x_2}(X) \\ f'_{2\ x_2}(X) \\ f'_{3\ x_2}(X) \end{bmatrix}$$

Рассмотрим ориентацию $\overset{\curvearrowleft}{S}$ $\big(T_1(X), T_2(X)\big)$.

$$f \in \mathscr{L}_S(E), \quad E \subset S, \quad i \neq j, \quad i, j \in \{\,1, 2, 3\,\}$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S} \cap E} f(Y)\,\mathrm{d}\, y_i \wedge \mathrm{d}\, y_j := \int\limits_{F^{-1}(E)} f\big(F(X)\big) \begin{vmatrix} f'_{i\ x_1}(X) & f'_{i\ x_2}(X) \\ f'_{j\ x_1}(X) & f'_{j\ x_2}(X) \end{vmatrix} \mathrm{d}\,\mu_2(X)$$

Определение 10. $\overset{\curvearrowleft}{S} = \bigcup_{k=1}^{N} \overset{\curvearrowleft}{S}_k$ — *ориентированная кусочно-гладкая* поверхность в $\mathbb{R}^3$, $\quad E \subset S$.

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S} \cap E} f(Y)\,\mathrm{d}\, y_i \wedge \mathrm{d}\, y_j := \sum_{k=1}^{N} \int f\big|_{S_k}\,\mathrm{d}\, y_i \wedge \mathrm{d}\, y_j$$

1.4. Формула Гаусса—Остроградского

Теорема 2. $V \subset \mathbb{R}^3$ ограничено, связно, $\quad \partial V = \bigcup_{k=1}^{N} \overline{S}_k, \quad S_k \cap S_l = \emptyset$
$\overset{\curvearrowleft}{S}_k, \quad y \in S_k \quad \big(T_1(Y), T_2(Y)\big), \quad T_1(Y) \times T_2(Y)$ направлен вне V.
$\varphi \in \mathcal{C}(\overline{V}), \quad i \in \{\,1, 2, 3\,\}, \quad \varphi'_{y_i} \in \mathcal{C}(\overline{V})$

$$\sigma = \begin{cases} 1, & (i, j, k) \text{ — чётная}, -1, \quad \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial}\, V} \varphi(Y)\,\mathrm{d}\, y_i \wedge \mathrm{d}\, y_j \wedge \mathrm{d}\, y_k = \sigma \cdot \int\limits_{V} \varphi'_{y_i}(Y)\,\mathrm{d}\,\mu_3(Y)$$

В частности, при $\varphi(Y) = y_1$,

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial}\, V} x_1\,\mathrm{d}\, x_2 \wedge \mathrm{d}\, x_3 = \int\limits_{V} 1\,\mathrm{d}\,\mu_3 = \mu_3 V$$

1.5. Формула Грина

Теорема 3. $D \subset \mathbb{R}^2$ — область, $\quad \partial D, \quad \overset{\curvearrowleft}{\partial}\, D, \quad f \in \mathcal{C}(\overline{D}), f'_{x_1} \in \mathcal{C}(\overline{D}), \quad M = (x_1, x_2)$. Тогда

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial}\, D} f(M)\,\mathrm{d}\, x_2 = \int\limits_{D} f'_{x_1}(M)\,\mathrm{d}\,\mu_2(M)$$

$g \in \mathcal{C}(\overline{D}), \quad g'_{x_2} \in \mathcal{C}(\overline{D})$. Тогда

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial}\, D} g(M)\,\mathrm{d}\, x_1 = -\int\limits_{D} g'_{x_2}(M)\,\mathrm{d}\,\mu_2(M)$$