Оглавление

Глава 1

Приближение функций

Примечание. В конспекте есть ещё несколько параграфов, которые на экзамен не попадут.

1.1. Интерполирование как способ приближения функций

Задача 1. В дискретные моменты времени $x_1, \dots, x_n$ наблюдаются значения функции f. Требуется установить её значения при других x.

Задача 2. Требуется вычислять одну и ту же сложную функцию в различных точках. Иногда целесообразно найти значения в некоторых точках, а в других точках вычислять по простым формулам, используя информацию о вычисленных точках.

1.2. Алгебраическое интерполирование

Определение 1. Пусть заданы значения функции в $n+1$ попарно различных точках:

$$f(x_0), \dots, f(x_n), \quad x_i \neq x_j$$

Требуется найти алгебраический многочлен степени не выше n

$$P_n(x): \quad P_n(x_j) = f(x_j)$$

Эта задача называется *задачей алгебраического интерполирования*.

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

Утверждение 1. Задача алгебраического интерполирования однозначно разрешима при любом выборе попарно различных узлов.

1.2.1. Представление в форме Лагранжа

TODO: Начало представления в форме Лагранжа

$$\dots$$

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

$$l_{kn}(x) = \frac{(x - x_{)})(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}) \dots}{\dots} = \dots$$

Примечание. В задании нужно пользоваться первым представлением из этой формулы.

Рассмотрим

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_{kn}(x) f(x_k) \tag{1.1}$$

Рассмотрим

$$\frac{\omega_{n+1}(x)}{x - x_k} = (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)$$

$$\lim_{x \to x_k} \frac{\omega_{n+1}(x)}{x - x_k} = \omega'_{n+1}(x_k)$$

Таким образом,

$$L_n(x_j) = \sum_{k=0}^{n} l_{kn}(x_j) f(x_k) = f(x_j) \quad \forall j = 0, \ldots, n$$

Получили, что (1.1) — интерполяционный многочлен. Он называется *представлением в форме Лагранжа*.

Устойчивость вычислений

Ранее получили представление в форме Лагранжа для интерполяционного многочлена:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_{kn}(x) f(x_k)$$

На практике оперируем приближёнными значениями $\widetilde{f}(x_k) = f(x_k) + \varepsilon(x_k)$, где $|\varepsilon(x_k)| \le \varepsilon_0$. Тогда

$$\widetilde{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_{kn}(x) \widetilde{f}(x_k) = \cdots = \sum l_{kn}(x) f(x_k) + \sum l_{kn}(x) \varepsilon(x_k) = P_n(x) + \sum l_{kn}(x) \varepsilon(x_k)$$

Оценим ошибку по абсолютной величине:

$$\left| \sum l_{kn}(x) \varepsilon(x_k) \right| \le \varepsilon_0 \sum |l_{kn}(x)|$$

Следовательно, $\lambda_n(x) = \sum |l_{kn}(x)|$ показывает, во сколько раз вырастет ошибка. Этот коэффициент называется *функцией Лебега*.

Определение 2. *Постоянной Лебега* назовём

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a,b]} \lambda_n(x)$$

Замечание. Если рассмотреть интерполяционный многочлен для $f \equiv 1$, то $P_n(x) \equiv f(x) \equiv 1$. Тогда из представления в форме Лагранжа получаем

$$\sum l_{kn}(x) = 1 \implies \lambda_n(x) \ge 1$$

Погрешность алгебраического интерполирования

Определение 3. *Погрешностью (остаточным членом)* алгебраического интерполирования назовём

$$R_n(f, x) = f(x) - P_n(x)$$

Замечание. Если функция f сама является многочленом степени не выше n, то она совпадёт с P_n и $R_n \equiv 0$.

Иначе $R_n(f, x_j) = 0$ (совпадает только в узлах интерполирования).

Теорема 1 (о представлении погрешности алгераического интерполирования)**.** $f \in \mathcal{C}^{n+1}[A, B]$, где $A = \min\{\, x, x_0, \ldots, x_n \,\}$, $B = \max\{\, x, x_0, \ldots, x_n \,\}$.

Тогда существует $\xi = \xi(x) \in (A, B)$ такое, что погрешность в точке x допускает представление:

$$R_n(f, x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$