Оглавление

Глава 1

ТФКП

1.1. Теорема Коши для конечносвязной области, ограниченной кусочно-гладкой кривой

Теорема 1. $G \subset \mathbb{C}$, $\overline{D} \subset G$, $\partial D = \bigcup_{k=1}^{m} \Gamma_k$, Γ_k кусочно-гладкие, $f \in \mathcal{A}(G)$

$$\int\limits_{\circlearrowleft \partial D} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$$

Доказательство. Пусть $\Gamma_k : [a, b] \to \mathbb{C}$.

$$\exists\,\delta_0 > 0 : \quad \forall \zeta \in \partial D \quad \overline{\mathtt{B}}(\zeta) = \{\, z \mid |z - \zeta| \le \delta_0 \,\} \subset G$$

$$T_{\delta_0} \coloneqq \bigcup_{\zeta \in \partial D} \overline{\mathtt{B}_{\delta_0}(\zeta)}$$

Утверждение 1. T_{δ_0} — компакт

Доказательство. Упражнение. □

Значит, по теореме Кантора,
$f \in \mathcal{C}\left(T_{\delta_0}\right) \implies f$ равномерно непрерывна на T_{δ_0}. То есть,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, 0 < \delta_1 \le \delta_0 : \quad \forall z_1, z_2 \in T_{\delta_0} : |z_1 - z_2| < \delta_1 \quad |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon \tag{1.1}$$

Обозначим $\mathtt{P}_k = \{\, t_{kj} \,\}_{j=0}^{N_k}$, $t_{k0} = a_k$, $t_{kN_k} = b_k$, $k = 1, \ldots, m$.
Выберем его так, чтобы

$$\forall t \in [t_{kj}, t_{k\ j+1}] \quad |\Gamma(t) - \Gamma(t_{kj})| < \delta_1 \tag{1.2}$$

Такое разбиение можно выбрать в силу равномерной непрерывности.

Обозначим многоугольник $S_k = \{\, \Gamma(t_{kj}) \,\}_{j=0}^{M_k}$.

Обозначим $\widetilde{D}$ так, что $\partial \widetilde{D} = \bigcup_{k=1}^{m} S_k$. По определению $\widetilde{D} \subset G$. Применим к $\widetilde{D}$ аналогичную теорему для многоугольников:

$$\int\limits_{\circlearrowleft \partial \widetilde{D}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0 \tag{1.3}$$

$$\implies \int\limits_{\circlearrowright \partial \widetilde{D}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0 \tag{1.4}$$

$$\implies \int\limits_{\circlearrowleft \partial D} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int\limits_{\circlearrowleft \partial D} f(z)\,\mathrm{d}\,z + \int\limits_{\circlearrowright \partial \widetilde{D}} f(z)\,\mathrm{d}\,z \tag{1.5}$$

Рассмотрим некоторую кривую Γ_k (ориентация согласована с общей ориентацией границы). Обозначим $\Gamma(t_{kj}) =: z_{kj}, \quad 0 \le j \le N_k$.

Рассмотрим случай, когда $k = 1$ (остальные — аналогично). Это внешняя кривая. Т. к. кривая замкнутая, $z_{k0} = z_{kN_k}$.

Рассмотрим точки $z_{1j}, z_{1\ j+1}, z_{1\ j+2}$. Они обходятся в положительном направлении. Но, если рассматривать многоугольник S_1, то на нём эти же точки обходятся в противоположном направлении.

Обозначим $\overset{\curvearrowleft}{\gamma}_{1j} \coloneqq \Gamma([t_{1j}, t_{1\ j+1}])$. По одному из свойств,

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_1} f(z)\ \mathrm{d}\,z = \sum_{j=0}^{N_1-1} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma}_{1j}} f(z)\ \mathrm{d}\,z \tag{1.6}$$

Обозначим σ_{1j} — отрезок с концами $z_{1j}, z_{1\ j+1}$. Тогда

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S_1}} f(z)\ \mathrm{d}\,z = \sum_{j=0}^{N_1-1} \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\sigma}_{1j}} f(z)\ \mathrm{d}\,z \tag{1.7}$$

Из последних двух выражений получаем, что

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_1} f(z)\ \mathrm{d}\,z + \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S}_1} f(z)\ \mathrm{d}\,z = \sum_{j=0}^{N_1-1} \left(\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma}_{1j}} f(z)\ \mathrm{d}\,z + \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\sigma}_{1j}} f(z)\ \mathrm{d}\,z \right) \tag{1.8}$$

Возьмём $c \in \mathbb{C}$.

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\sigma}_{1j}} c\ \mathrm{d}\,z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\sigma}_{1j}} c\ \mathrm{d}\,z = c(z_{1\ j+1} - z_{1j}) + c(z_{1j} - z_{1\ j+1}) = 0 \quad \forall c \tag{1.9}$$

Возьмём в качестве c выражение $f(z) - f(z_{1j})$

$$(1.8) = \sum_{j=0}^{N_1-1} \left(\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma}_{1j}} \big(f(z) - f(z_{1j})\big)\ \mathrm{d}\,z + \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\sigma}_{1j}} \big(f(z) - f(z_{1j})\big)\ \mathrm{d}\,z \right) \tag{1.10}$$

Выберем разбиения такие, чтобы

$$\forall k \quad \forall j \quad \forall y \in [t_{kj}, t_{k\ j+1}] \quad |\Gamma_k(t) - \Gamma_k(t_{kj})| < \delta_1 \tag{1.11}$$

Тогда при $z \in \gamma_{kj}$ выполнено

$$|z - z_{kj}| < \delta_1 \tag{1.12}$$

В частности,

$$|z_{k\ j+1} - z_{kj}| < \delta_1 \tag{1.13}$$

По одному из свойств криволинейных интегралов,

$$\left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma}_{1j}} f(z) - f(z_{1j})\ \mathrm{d}\,z \right| \le \int\limits_{\gamma_{1j}} |f(z) - f(z_{1j})|\,|\,\mathrm{d}\,z| \underset{(1.1),(1.12)}{\le} \int\limits_{\gamma_{1j}} \varepsilon\,|\,\mathrm{d}\,z| = \varepsilon \cdot l\ \gamma_{1j} \tag{1.14}$$

Если $z \in \sigma_{1j}$, то

$$|z - z_{1j}| \le |z_{1\ j+1} - z_{1j}| \underset{(1.13)}{<} \delta_1$$

$$\Longrightarrow \left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\sigma}_{1j}} f(z) - f(z_{1j})\ \mathrm{d}\,z \right| \le \int\limits_{\sigma_{1j}} |f(z) - f(z_{1j})|\,|\,\mathrm{d}\,z| < \varepsilon \cdot |z_{j+1} - z_{1j}| \le \varepsilon \cdot l\ \gamma_{1j} \tag{1.15}$$

$$(1.10), (1.14), (1.15) \implies \left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma}_{1j}} f(z)\ \mathrm{d}\,z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\sigma}_{1j}} f(z)\ \mathrm{d}\,z \right| < 2\varepsilon \cdot l\ \gamma_{1j} \tag{1.16}$$

$$\underset{(1.10)}{\Longrightarrow} \left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma_{1j}}} f(z)\,\mathrm{d}\,z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\sigma_{1j}}} f(z)\,\mathrm{d}\,z \right| < 2\varepsilon \sum_{j=0}^{N_1-1} l\;\gamma_{1j} = 2\varepsilon l \Gamma_1 \tag{1.17}$$

При остальных k — аналогично.

$$(1.5), (1.17) \implies \left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial D}} f(z)\,\mathrm{d}\,z \right| < 2\varepsilon \sum l \Gamma_k$$

$$\implies \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial D}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$$

□

1.2. Формула Коши

Теорема 2. $G \subset \mathbb{C}, \qquad D = \mathtt{B}_r(z_0), \qquad \overline{D} \subset G, \qquad f \in \mathcal{A}(G), \qquad z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta \tag{1.18}$$

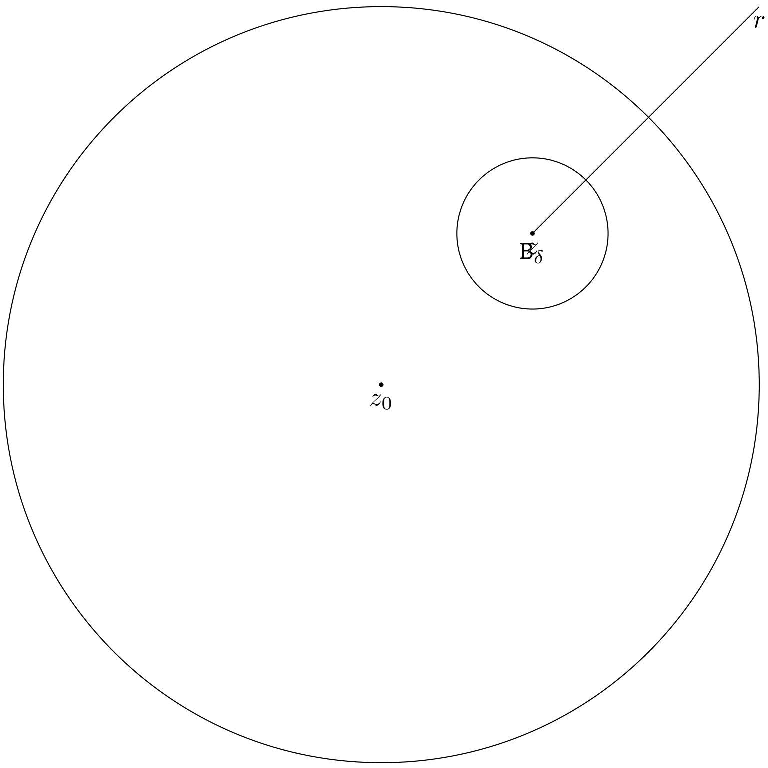

Рис. 1.1: *Картинку надо дорисовать.*

Доказательство. Возьмём $\delta > 0$ так, чтобы $\delta < r - |z - z_0|$.
Рассмотрим $\mathtt{B}_\delta = \{\, \zeta \mid |\zeta - z| < \delta \,\}$. Понятно, что $\overline{\mathtt{B}}_\delta \subset D$.

Рассмотрим

$$\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \tag{1.19}$$

Она аналитична в $D \setminus \{\, z \,\}$.

Рассмотрим область $D_\delta = D \setminus \overline{\mathtt{B}}_\delta$.

$$\overline{D}_\delta \subset G \setminus \{\, z \,\}$$

По теореме Коши,

$$\int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\partial}\, D_\delta} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta = 0 \tag{1.20}$$

Обозначим $S = \{\,\zeta \mid |\,\zeta - z| = r\,\}$, $\quad \sigma_\delta = \{\,\zeta \mid |\,\zeta - z| = \delta\,\}$.

$$(1.20) \implies \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{S}} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta + \int\limits_{\overset{\circlearrowright}{\sigma_\delta}} = \mathrm{d}\,\zeta 0 \quad \iff \quad \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{S}} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta = -\int\limits_{\overset{\circlearrowright}{\sigma_\delta}} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta = \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\sigma_\delta}} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta \tag{1.21}$$

$$\int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\sigma_\delta}} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta \overset{}{\underset{(1.18)}{=\!=\!=}} \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\sigma_\delta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\sigma_\delta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta + \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\sigma_\delta}} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta \tag{1.22}$$

$$\int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\sigma_\delta}} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = f(z) \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\sigma_\delta}} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta \tag{1.23}$$

$$\overset{\circlearrowleft}{\sigma_\delta} = \left\{\,\zeta \mid \zeta = z + \delta e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi]\,\right\}$$

$$\left(\delta e^{i\theta}\right)'_\theta = i\delta e^{i\theta}$$

$$\int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\sigma_\delta}} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{\left(\delta e^{i\theta}\right)'}{\delta e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\,\theta = 2\pi i \tag{1.24}$$

$$(1.23), (1.24) \implies \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\sigma_\delta}} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = 2\pi i f(z) \tag{1.25}$$

$$(1.22), (1.25) \implies \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{S}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\sigma_\delta}} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta + 2\pi i f(z) \tag{1.26}$$

$\square$