Содержание

Часть I
ТФКП

1. Криволинейные интегралы от комплекснозначных функций — определения и свойства

Определение 1. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}([a,b]) \subset \mathbb{R}^2, \qquad u, v \in \mathcal{C}\big(\Gamma\big), \qquad u : \Gamma \to \mathbb{R}, \quad v : \Gamma \to \mathbb{R}$
$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \in \mathcal{C}\big(\Gamma\big)$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x := \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} u(x,y)\,\mathrm{d}\,x + i\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} v(x,y)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y := \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} u(x,y)\,\mathrm{d}\,y + i\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} v(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

Свойства.

1. $\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f + g\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f\,\mathrm{d}\,x + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} g\,\mathrm{d}\,x, \qquad \ldots\mathrm{d}\,y$
2. $c \in \mathbb{C}$
$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} cf\,\mathrm{d}\,x = c\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f\,\mathrm{d}\,x, \qquad \ldots\mathrm{d}\,y$$
3. $\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f\,\mathrm{d}\,x = -\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f\,\mathrm{d}\,x, \qquad \ldots\mathrm{d}\,y$

4. $\mathtt{T} = \{\, t_\nu \,\}_{\nu=0}^{m}, \quad a = t_0 < \dots < t_m = b, \qquad \mathtt{P} = \{\, \tau_\nu \,\}_{\nu=1}^{m}, \quad \tau_\nu \in [t_{\nu-1}, t_\nu]$

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \qquad x(t_\nu) =: x_\nu, \quad x(t_\nu) =: y_\nu, \qquad M(\tau_\nu) = \begin{bmatrix} x(\tau_\nu) \\ y(\tau_\nu) \end{bmatrix}$$

$$\mathtt{S}_x(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \coloneqq \sum_{\nu=1}^{m} f\big(M(\tau_\nu)\big)(x_\nu - x_{\nu-1})$$

$$\mathtt{S}_y(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \coloneqq \sum_{\nu=1}^{m} f\big(M(\tau_\nu)\big)(y_\nu - y_{\nu-1})$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall \mathtt{P} \quad t_\nu - t_{\nu-1} < \delta, \quad \nu = 1, \dots, m \quad \implies \Bigg| \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\,x - \mathtt{S}_x \Bigg| < \varepsilon, \quad \Bigg| \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\,y - \mathtt{S}_y \Bigg| < \varepsilon$$

То есть, последовательность сумм Римана сходится к интегралу.

Доказательство.

1. Очевидно.
2. $c = a + bi, \qquad f = u + iv$

$$cf = au - bv + i(av + bu)$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} cf \,\mathrm{d}\,x = \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} (au - bv) \,\mathrm{d}\,x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} (av + bu) \,\mathrm{d}\,x = a \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} u \,\mathrm{d}\,x - b \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} v \,\mathrm{d}\,x + i\Bigg(a \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} v \,\mathrm{d}\,x + b \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} u \,\mathrm{d}\,x \Bigg) =$$

$$= a\Bigg(\int u \,\mathrm{d}\,x + i \int v \,\mathrm{d}\,x \Bigg) + b\Bigg(- \int v \,\mathrm{d}\,x + i \int u \,\mathrm{d}\,x \Bigg) = a \int f \,\mathrm{d}\,x + bi \int f \,\mathrm{d}\,x = c \int f \,\mathrm{d}\,x$$

3. Очевидно.
4. Следует из аналогичной теоремы для вещественных криволинейных интегралов второго рода.

□

2. Криволинейные интегралы от комплекснозначных функций и криволинейные интегралы первого рода

Определение 2 (криволинейный интеграл второго рода).

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(z) \,\mathrm{d}\,z \coloneqq \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(z) \,\mathrm{d}\,x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(z) \,\mathrm{d}\,y$$

Свойства.

1. $\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} (f + g) \,\mathrm{d}\,z = \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\,z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} g \,\mathrm{d}\,z$
2. $\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} cf \,\mathrm{d}\,z = c \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\,z$
3. $\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\,z = - \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\,l(M)$
4. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} : z(t), \quad t \in [a, b], \qquad f : \overset{\curvearrowright}{\Gamma} \to \mathbb{C}, \qquad \mathtt{T} = \{\, t_\nu \,\}_{\nu=0}^{m}, \qquad \mathtt{P} = \{\, \tau_\nu \,\}_{\nu=1}^{m}$

$$z_\nu \coloneqq z(t_\nu) = x(t_\nu) + iy(t_\nu), \qquad x_\nu \coloneqq x(t_\nu), \quad y_\nu \coloneqq y(t_\nu), \qquad \widehat{z}_\nu \coloneqq z(\tau_\nu)$$

$$\mathtt{S}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \coloneqq \sum_{\nu=1}^{m} f(\widehat{z}_\nu)(z_\nu - z_{\nu-1})$$

$f \in \mathcal{C}\big(\Gamma\big)$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall \mathtt{T} : t_\nu - t_{\nu-1} < \delta, \quad \nu = 1, \dots, m \quad \forall \mathtt{P} \quad \left| \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \, \mathrm{d}\, z - \mathtt{S}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \right| < \varepsilon$$

5. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} : [a, b] \to \mathbb{C}, \qquad z(a) = A, \quad z(b) = B, \qquad c \in \mathbb{C}$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} c \, \mathrm{d}\, z = c(B - A)$$

6. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} \in \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{C}\big(\Gamma\big), \qquad c \in \overset{\curvearrowright}{\Gamma}, \qquad \overset{\curvearrowright}{\Gamma} = \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1 \cup \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_2, \qquad \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1 \cap \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_2 = \{\, c \,\}$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(z) \, \mathrm{d}\, z = \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1} f(z) \, \mathrm{d}\, z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_2} f(z) \, \mathrm{d}\, z$$

7. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} \subset \mathbb{C}, \qquad f : \Gamma \to \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{C}\big(\Gamma\big), \qquad \Gamma \leftrightarrow \Gamma^*$

$$\left| \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(z) \, \mathrm{d}\, z \right| \le \int\limits_{\Gamma^*} |f^*(M)| \, \mathrm{d}\, l(M)$$

В дальнейшем мы будем такой интеграл обозначать $\int\limits_{\Gamma} |f(z)| \, |\, \mathrm{d}\, z|$.

8. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} \subset \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{C}\big(\Gamma\big), \qquad \theta \in (0, 2\pi)$

$$\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_\theta \coloneqq e^{i\theta} \overset{\curvearrowright}{\Gamma}$$

То есть,

$$\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_\theta = \big\{\, z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i\theta}\zeta, \quad \zeta \in \Gamma \,\big\}$$

$$f_\theta(z) \coloneqq f\big(e^{-i\theta} z\big), \quad z \in \Gamma_\theta$$

$$\implies \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(\zeta) \, \mathrm{d}\, \zeta = e^{-i\theta} \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_\theta} f_\theta(z) \, \mathrm{d}\, z$$

Доказательство.

1. Очевидно.
2. $c = a + bi$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} cf \, \mathrm{d}\, z \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} cf \, \mathrm{d}\, x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} cf \, \mathrm{d}\, y = c \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \, \mathrm{d}\, x + ic \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \, \mathrm{d}\, y = c \Bigg(\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \, \mathrm{d}\, x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \, \mathrm{d}\, y \Bigg) \overset{\text{def}}{=} c \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \, \mathrm{d}\, z$$

3. $\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \, \mathrm{d}\, z = \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \, \mathrm{d}\, x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \, \mathrm{d}\, y = \dots$
4. $\mathtt{S}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) = \mathtt{S}_x(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) + i\mathtt{S}_y(f, \mathtt{T}, \mathtt{P})$

Воспользуемся аналогичным свойством для $\mathtt{S}_x, \mathtt{S}_y$. Пусть

$$\left| \int f \,\mathrm{d}\, y - \mathtt{S}_x \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \left| \int f \,\mathrm{d}\, y - \mathtt{S}_y \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left| \int f \,\mathrm{d}\, z - \mathtt{S} \right| = \left| (\ldots x) + i(\ldots y) \right| \le |\ldots x| + |\ldots y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

5. Применим св-во 4. Рассмотрим любые $\mathtt{T}, \mathtt{P}$.
   Рассмотрим интегральную сумму

$$\mathtt{S}(c, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{m} c(z_\nu - z_{\nu-1}) = c \sum (z_\nu - z_{\nu-1}) = c(B - A)$$

6. Докажем для случая, когда Γ — гладкая кривая.

$$\overset{\curvearrowright}{\Gamma}([a,b]) : [a,b] \to \mathbb{C} \qquad \Longleftrightarrow \overset{\curvearrowright}{\Gamma}{}^{*}([a,b])$$

$$t \in [a,b], \qquad \Gamma^* : M(t), \qquad M(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(z) \,\mathrm{d}\, z = \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}{}^{*}} f\big(M(t)\big) \,\mathrm{d}\, x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}{}^{*}} f\big(M(t)\big) \,\mathrm{d}\, y = \int_a^b f^*\big(M(t)\big)x'(t) \,\mathrm{d}\, t + i \int_a^b f^*\big(M(t)\big)y'(t) \,\mathrm{d}\, t =$$

$$= \int_a^b f^*\big(M(t)\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big) \,\mathrm{d}\, t = \int_a^b f\big(z(t)\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big) \,\mathrm{d}\, t =$$

$$= \int_a^{t_0} f\big(z(t)\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big) \,\mathrm{d}\, t + \int_{t_0}^b f\big(z(t)\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big) \,\mathrm{d}\, t$$

Прочитывая эти равенства теперь в обратном порядке, получаем, что это равно

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1} f(z) \,\mathrm{d}\, z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_2} f(z) \,\mathrm{d}\, z$$

Случай для кусочно-гладких кривых доказывается аналогично.

7. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}([a,b]) \to \mathbb{C}, \qquad \mathtt{T} = \{\, t_j \,\}_{j=0}^{n}, \qquad \mathtt{P} = \{\, \tau_j \,\}_{,=1}^{n} \qquad z_j = z(t_j), \qquad z'_j = z(\tau_j)$

$$\mathtt{S}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} f(z'_j)(z_j - z_{j-1})$$

$$|\mathtt{S}| \le \sum_{j=1}^{n} |f(z'_j)| z_j - z_{j-1}|$$

Перейдём к плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$z(t) = x(t) + iy(t), \qquad M_j = \begin{bmatrix} x(t_j) \\ y(t_j) \end{bmatrix}, \qquad x_j(t) = x(t_j), \quad y_j = y(t_j)$$

$$M'_j = \begin{bmatrix} x(\tau_j) \\ y(\tau_j) \end{bmatrix}, \qquad x'_j = x(\tau_j), \quad y'_j = y(\tau_j)$$

$$\|\overline{M_j\ M_{j-1}}\| \rightleftharpoons \|\mathrm{dist}(M_j, M_{j-1})\| = |z_j - z_{j-1}|$$

$$\|\overline{M_{j-1}\ M_j}\| \le l\Gamma^*(M_{j-1}, M_j) \quad\Longrightarrow\quad \sum_{j=1}^{n} |f(z_j')| \cdot |z - z_{j-1}| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} |f^*(M_j')| \cdot l\Gamma(M_{j-1}, M_j) =: \mathtt{S}^*(|f|, \mathtt{T}, \mathtt{P})$$

$$|\mathtt{S}| \le \mathtt{S}^*$$

Перейдём к пределу:

$$\left| \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(z)\ \mathrm{d}\,z \right| \le \int_{\Gamma} |f(z)|\,|\,\mathrm{d}\,z|$$

8. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}([a,b]) : [a,b] \to \mathbb{C}, \qquad \mathtt{T} = \{\, t_j \,\}_{,=0}^{n} \quad \mathtt{P} = \{\, \tau_j \,\}_{j=1}^{n}, \qquad z_j = z(t_j), \quad z_j' = z(\tau_j)$

$$\mathtt{S}_{\Gamma}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} f(z_j')(z_j - z_{j-1}) = e^{-i\theta} \sum_{j=1}^{n} f\left(e^{-i\theta}(e^{i\theta})\right)(e^{i\theta} z_j - e^{i\theta} z_{j-1}) =$$

$$= e^{-i\theta} \sum_{j=1}^{n} f_\theta(e^{i\theta} z_j')(e^{i\theta} z_j - e^{i\theta} z_{j-1}) = e^{-i\theta} \mathtt{S}_{\Gamma_\theta}(f_\theta, \mathtt{T}, \mathtt{P})$$

□

По индукции из свойства 6 получаем следующее утверждение:

Свойство. $c_1, \ldots, c_n \in \overset{\curvearrowright}{\Gamma}$

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(z)\ \mathrm{d}\,z = \sum_{j=1}^{n+1} \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_j f(z)$$

3. Теорема Коши для прямоугольника

Теорема 1. $G \subset \mathbb{C}, \qquad f \in A(G), \qquad Q = \{\, z = x + iy \mid a \le x \le b, \quad p \le y \le q \,\} \subset G$

$$\Longrightarrow \int_{\overset{\curvearrowright}{\partial Q}} f(z)\ \mathrm{d}\,z = 0$$

Примечание. Здесь ориентация роли не играет.

Доказательство. Обозначим

$$A = a + pi, \qquad B = b + pi, \qquad C = b + qi, \qquad D = a + qi$$

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\partial Q}} \cdots = \int_{\overrightarrow{AB}} + \int_{\overrightarrow{BC}} + \int_{\overrightarrow{CD}} + \int_{\overrightarrow{DA}} = \left(\int_{\overrightarrow{AB}} - \int_{\overrightarrow{DC}} \right) + \left(\int_{\overrightarrow{BC}} - \int_{\overrightarrow{AD}} \right)$$

Рассмотрим параметризацию AB:

$$\overrightarrow{AB} = \{\, t + pi \mid t \in [a,b] \,\}$$

$$\int_{\overrightarrow{AB}} f(z)\ \mathrm{d}\,z = \int_a^b f(t + pi)\ \mathrm{d}\,t$$

Аналогично,

$$\overrightarrow{DC} = \{\, t + qi \,\}, \qquad \overrightarrow{BC} = \{\, b + it \,\}, \qquad \overrightarrow{AD} = a + ti$$

$$\int\limits_{\overrightarrow{DC}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_a^b f(t+qi)\,\mathrm{d}\,t, \qquad \int\limits_{\overrightarrow{BC}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = i\int_p^q f(b+ti)\,\mathrm{d}\,t, \qquad \int\limits_{\overrightarrow{AD}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = i\int_p^q f(a+ti)\,\mathrm{d}\,t$$

Всё это означает, что

$$\int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\partial Q}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \left(\int_a^b f(t+pi)\,\mathrm{d}\,t - \int_a^b f(t+qi)\,\mathrm{d}\,t\right) + \left(i\int_p^q f(b+ti)\,\mathrm{d}\,t - i\int_p^q f(a+ti)\,\mathrm{d}\,t\right) \tag{1}$$

Перейдём к плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$\int_a^b f^*(t,q)\,\mathrm{d}\,t - \int_a^b f^*(t,p)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b \Big(f^*(x,q) - f^*(x,p)\Big)\,\mathrm{d}\,x$$

$f^* \in \mathcal{C}^1\big(G^*\big)$, значит, можно применить формулу Ньютона—Лейбница:

$$= \int_a^b \left(\int_p^q f_y^{*\prime}(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,x$$

Аналогично,

$$\int_p^q f^*(b,y) - f^*(a,y)\,\mathrm{d}\,y = \int_p^q \left(\int_a^b f_x^{*\prime}(x,y)\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,y$$

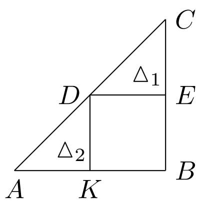
Подставляя последние две выкладки в (1), получаем

$$\int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\partial Q}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = -\int_a^b\int_p^q f_y^{*\prime}(x,y))\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x + i\int_p^q\int_a^b f_x^{*\prime}(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y =$$

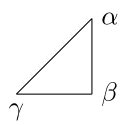
$$= \int_a^b\int_p^q -f_y^{*\prime} + if_x^{*\prime}\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x = 2i\int_a^b\int_p^q \frac{1}{2}\Big(f_x^{*\prime} + if_x^{*\prime}\Big)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x \overset{\text{def}}{=} 2i\int_a^b\int_p^q \underbrace{f'_{\overline{z}}}_{0}\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x = 0$$

□

4. Теорема Коши для прямоугольного треугольника



(a) Прямоугольный треугольник



(b) Прямоугольный треугольничек

Теорема 2. Рассматриваем треугольник ABC (рис. 1a).

$$f \in \mathcal{A}(G), \qquad A = a + pi, \quad B = b + pi, \quad c = b + qi, \qquad a < b, \quad p < q, \qquad \triangle\, ABC \subset G$$

$$I := \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\partial \triangle ABC}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$$

Доказательство. Рассмотрим точки:

$$D = \frac{a+b}{2} + i\frac{p+q}{2}, \qquad K = \frac{a+b}{2} + pi, \qquad E = b + i\frac{p+q}{2}$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial \triangle ABC}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial \square}} + \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial \triangle_1}} + \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial \triangle_2}}$$

При этом,

$$\int\limits_{\overrightarrow{ED}} + \int\limits_{\overrightarrow{DE}} = 0, \qquad \int\limits_{\overrightarrow{DK}} + \int\limits_{\overrightarrow{KD}} = 0$$

К каждому из треугольников можно применить такое же рассуждение, а к прямоугольникам — теорему Коши для прямоугольника. Получаем

$$I = \sum_{k=1}^{2^n} I_{n_k} \tag{2}$$

$$I_{n_k} = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial \triangle_{n_k}}} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

Рассмотрим какой-то из шагов (треугольник обозначим $\alpha\beta\gamma$, рис. 1b):

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial \triangle \alpha\beta\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial \triangle \alpha\beta\gamma}} f(z) - f(\alpha)\,\mathrm{d}\,z + f(\alpha) \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial \triangle \alpha\beta\gamma}} 1\,\mathrm{d}\,z$$

Второй интеграл равен 0 (по св-ву 5 криволинейных интегралов). Значит, это равно

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial \triangle \alpha\beta\gamma}} f(z) - f(\alpha)\,\mathrm{d}\,z$$

По св-ву 7 криволинейных интегралов, это означает, что

$$\left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial \triangle \alpha\beta\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}\,z \right| \leq \int\limits_{\partial \triangle \alpha\beta\gamma} |f(z) - f(\alpha)|\,|\mathrm{d}\,z| \tag{3}$$

Применим теорему Кантора:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall \alpha \in [A, C], \quad z \in \partial \triangle \alpha\beta\gamma \quad |f(z) - f(\alpha)| < \varepsilon$$

Выберем n так, что

$$z^{-n} \cdot |C - A| < \delta$$

Тогда

$$\int\limits_{\partial \triangle \alpha\beta\gamma} |f(z) - f(\alpha)|\,|\mathrm{d}\,z| < \varepsilon \int\limits_{\partial \triangle \alpha\beta\gamma} |\mathrm{d}\,z| \underset{\text{из геом. сообр.}}{<} 3\varepsilon|\gamma - \alpha| = 3\varepsilon \cdot |C - A| \cdot 2^{-n}$$

$$\underset{(3)}{\Longrightarrow} \forall k \quad |I_{n_k}| < 3\varepsilon|C - A| \cdot 2^{-n}$$

$$\underset{(2)}{\Longrightarrow} |I| \leq \sum_{k=1}^{2^n} |I_{n_k} < 3\varepsilon|C - A| \cdot 2^{-n} \cdot 2^n = 3\varepsilon|C - A|$$

$$\Longrightarrow |I| = 0$$

□

Если треугольник перевернуть относительно оси ординат, результат не изменится.

Замечание. Аналитичность f использовалась для прямоугольника.

5. Теорема Коши для произвольного треугольника

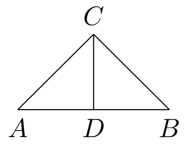


Рис. 2

Теорема 3. Рассматриваем треугольник ABC (рис. 2)

$$A = a + pi, \quad B = b + pi, \quad C = d + qi, \qquad a < d < l, \qquad q > p$$

$$\underbrace{\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial}\triangle ADC}}_{0} + \underbrace{\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial}\triangle DBC}}_{0} = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial}\triangle ABC} = 0$$

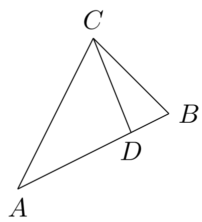


Рис. 3

Теорема 4. Рассматриваем треугольник ABC (рис. 3). Считаем, что наибольшая сторона — это AB.

Возьмём θ так, что $e^{i\theta}\cdot \triangle\ ABC$ повёрнут "правильно".

$$f_\theta(z) \coloneqq f(e^{-i\theta} z), \qquad f_\theta \in A(G_\theta)$$

Получаем треугольник $A_1B_1C_1$ из предыдущей теоремы.

Дальше пользуемся свойством 8 криволинейных интегралов.

6. Теорема Коши для многоугольника

Теорема 5. Имеется некая конечносвязная многоугольная область D, ограниченная многоугольниками $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$.

$$\partial D = \bigcup_{\nu=1}^{k} \Gamma_\nu$$

Пусть есть область G такая, что $G \supset \overline{D}$ и функция $f \in \mathcal{A}(G)$. Рассмотрим

$$\overset{\curvearrowleft}{\partial} D = \bigcup_{\nu=1}^{k} \overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_\nu,$$

при этом, каждая кривая Γ_ν положительно ориентированна относительно области D.

$$\implies \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial} D} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$$

Доказательство. Применим теорему о триангуляции конечносвязной многоугольной области:

$$\exists \{ \Delta_k \}_{k=1}^N, \quad \Delta_k \text{ — откр.:} \qquad \begin{cases} \Delta_k \cap \Delta_l = \emptyset, \quad k \neq l \\ \overline{\Delta}_k \cap \overline{\Delta}_l = \begin{cases} \emptyset \\ \text{общая вершина} \\ \text{общая сторона} \end{cases} \\ \bigcup_{k=1}^N \overline{\Delta}_k = \overline{D} \end{cases}$$

Рассмотрим

$$\sum_{k=1}^N \int\limits_{\circlearrowleft \partial \Delta_k} f(z) \, \mathrm{d}\, z$$

Каждый из них представим в виде суммы интегралов по трём сторонам. В результате:

1. каждый внутренний отрезок мы пройдём дважды в разных направлениях;
2. все "внутренние" границы (многоугольники) проходятся полностью в отрицательном (относительно самого многоугольника) направлении;
3. остаётся только "внешняя" граница.

$$\sum = 0$$

□

7. Лемма об оценке интеграла

Не знаю, где тут лемма.

8. Теорема Коши для области с кусочно-гладкими границами

Теорема 6. $G \subset \mathbb{C}, \qquad \overline{D} \subset G, \qquad \partial D = \bigcup_{k=1}^m \Gamma_k, \qquad \Gamma_k$ кусочно-гладкие, $\qquad f \in \mathcal{A}(G)$

$$\int\limits_{\circlearrowleft \partial D} f(z) \, \mathrm{d}\, z = 0$$

Доказательство. Пусть $\Gamma_k : [a, b] \to \mathbb{C}$.

$$\exists \delta_0 > 0 : \quad \forall \zeta \in \partial D \quad \overline{\mathsf{B}}(\zeta) = \{ z \mid |z - \zeta| \le \delta_0 \} \subset G$$

$$T_{\delta_0} \coloneqq \bigcup_{\zeta \in \partial D} \overline{\mathsf{B}_{\delta_0}(\zeta)}$$

Утверждение 1. T_{δ_0} — компакт.

Доказательство. Упражнение. □

Значит, по теореме Кантора,
$f \in \mathcal{C}(T_{\delta_0}) \implies f$ равномерно непрерывна на T_{δ_0}. То есть,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists 0 < \delta_1 \le \delta_0 : \quad \forall z_1, z_2 \in T_{\delta_0} : |z_1 - z_2| < \delta_1 \quad |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon \tag{4}$$

Обозначим $\mathsf{P}_k = \{ t_{kj} \}_{j=0}^{N_k}, \quad t_{k0} = a_k, \quad t_{kN_k} = b_k, \quad k = 1, \ldots, m.$
Выберем его так, чтобы

$$\forall t \in [t_{kj}, t_{k\ j+1}] \quad |\Gamma(t) - \Gamma(t_{kj})| < \delta_1$$

Такое разбиение можно выбрать в силу равномерной непрерывности.
Обозначим многоугольник $S_k = \{ \Gamma(t_{kj}) \}_{j=0}^{M_k}$.

Обозначим $\widetilde{D}$ так, что $\partial\widetilde{D} = \bigcup_{k=1}^{m} S_k$. По определению $\widetilde{D} \subset G$. Применим к $\widetilde{D}$ аналогичную теорему для многоугольников:

$$\int\limits_{\circlearrowleft \partial \widetilde{D}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0 \quad\Longrightarrow\quad \int\limits_{\circlearrowleft \partial \widetilde{D}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0 \quad\Longrightarrow\quad \int\limits_{\circlearrowleft \partial D} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int\limits_{\circlearrowleft \partial D} f(z)\,\mathrm{d}\,z + \int\limits_{\circlearrowright \partial \widetilde{D}} f(z)\,\mathrm{d}\,z \tag{5}$$

Рассмотрим некоторую кривую Γ_k (ориентация согласована с общей ориентацией границы). Обозначим $\Gamma(t_{kj}) =: z_{kj}, \quad 0 \le j \le N_k$.

Рассмотрим случай, когда $k = 1$ (остальные — аналогично). Это внешняя кривая. Т. к. кривая замкнутая, $z_{k0} = z_{kN_k}$.

Рассмотрим точки $z_{1j}, z_{1\ j+1}, z_{1\ j+2}$. Они обходятся в положительном направлении. Но, если рассматривать многоугольник S_1, то на нём эти же точки обходятся в противоположном направлении.

Обозначим $\overset{\circlearrowleft}{\gamma}_{1j} \coloneqq \Gamma([t_{1j}, t_{1\ j+1}])$. По одному из свойств,

$$\int\limits_{\circlearrowleft \Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{j=0}^{N_1-1} \int\limits_{\circlearrowleft \gamma_{1j}} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

Обозначим σ_{1j} — отрезок с концами $z_{1j}, z_{1\ j+1}$. Тогда

$$\int\limits_{\circlearrowleft S_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{j=0}^{N_1-1} \int\limits_{\circlearrowright \sigma_{1j}} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

Из последних двух выражений получаем, что

$$\int\limits_{\circlearrowleft \Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z + \int\limits_{\circlearrowright S_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{j=0}^{N_1-1} \left(\int\limits_{\circlearrowleft \gamma_{1j}} f(z)\,\mathrm{d}\,z + \int\limits_{\circlearrowright \sigma_{1j}} f(z)\,\mathrm{d}\,z \right) \tag{6}$$

Возьмём $c \in \mathbb{C}$.

$$\int\limits_{\circlearrowleft \sigma_{1j}} c\,\mathrm{d}\,z + \int\limits_{\circlearrowright \sigma_{1j}} c\,\mathrm{d}\,z = c(z_{1\ j+1} - z_{1j}) + c(z_{1j} - z_{1\ j+1}) = 0 \quad \forall c$$

Возьмём в качестве c выражение $f(z) - f(z_{1j})$

$$(6) = \sum_{j=0}^{N_1-1} \left(\int\limits_{\circlearrowleft \gamma_{1j}} \big(f(z) - f(z_{1j})\big)\,\mathrm{d}\,z + \int\limits_{\circlearrowright \sigma_{1j}} \big(f(z) - f(z_{1j})\big)\,\mathrm{d}\,z \right) \tag{7}$$

Выберем разбиения такие, чтобы

$$\forall k \quad \forall j \quad \forall y \in [t_{kj}, t_{k\ j+1}] \quad |\Gamma_k(t) - \Gamma_k(t_{kj})| < \delta_1$$

Тогда при $z \in \gamma_{kj}$ выполнено

$$|z - z_{kj}| < \delta_1 \tag{8}$$

В частности,

$$|z_{k\ j+1} - z_{kj}| < \delta_1 \tag{9}$$

По свойству 7 криволинейных интегралов,

$$\left| \int\limits_{\circlearrowleft \gamma_{1j}} f(z) - f(z_{1j})\,\mathrm{d}\,z \right| \le \int\limits_{\gamma_{1j}} |f(z) - f(z_{1j})|\,|\mathrm{d}\,z| \underset{(4),(8)}{\le} \int\limits_{\gamma_{1j}} \varepsilon\,|\mathrm{d}\,z| = \varepsilon \cdot l\ \gamma_{1j} \tag{10}$$

Если $z \in \sigma_{1j}$, то

$$|z - z_{1j}| \le |z_{1\ j+1} - z_{1j}| \underset{(9)}{<} \delta_1$$

$$\Longrightarrow \left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\sigma_{1j}}} f(z) - f(z_{1j})\ \mathrm{d}\, z \right| \le \int\limits_{\sigma_{1j}} |f(z) - f(z_{1j})|\,|\,\mathrm{d}\, z| < \varepsilon \cdot |z_{j+1} - z_{1j}| \le \varepsilon \cdot l\ \gamma_{1j} \tag{11}$$

$$(7), (10), (11) \implies \left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma_{1j}}} f(z)\ \mathrm{d}\, z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\sigma_{1j}}} f(z)\ \mathrm{d}\, z \right| < 2\varepsilon \cdot l\ \gamma_{1j}$$

$$\underset{(7)}{\Longrightarrow} \left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma_{1j}}} f(z)\ \mathrm{d}\, z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\sigma_{1j}}} f(z)\ \mathrm{d}\, z \right| < 2\varepsilon \sum_{j=0}^{N_1 - 1} l\ \gamma_{1j} = 2\varepsilon l \Gamma_1$$

При остальных k — аналогично.

$$\underset{(5)}{\Longrightarrow} \left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\, D}} f(z)\ \mathrm{d}\, z \right| < 2\varepsilon \sum l \Gamma_k \qquad \Longrightarrow \qquad \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\, D}} f(z)\ \mathrm{d}\, z = 0$$

□

9. Формула Коши для функции, аналитической в круге

Теорема 7. $G \subset \mathbb{C}$, $\quad D = \mathrm{B}_r(z_0)$, $\quad \overline{D} \subset G$, $\quad f \in \mathcal{A}(G)$, $\quad z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\, D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\ \mathrm{d}\, \zeta \tag{12}$$

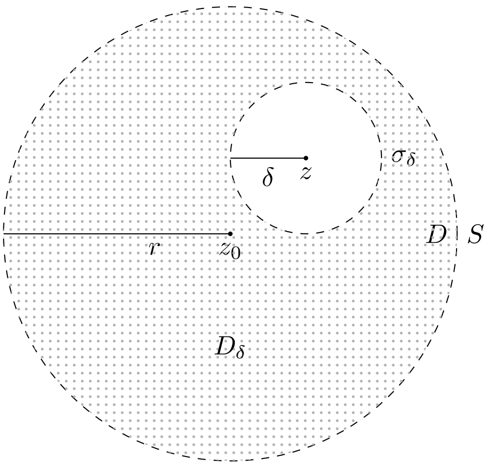


Рис. 4: Картинка к доказательству

Доказательство. Возьмём $\delta > 0$ так, чтобы $\delta < r - |z - z_0|$.
Рассмотрим $\mathrm{B}_\delta = \{\, \zeta \mid |\, \zeta - z| < \delta \,\}$. Понятно, что $\overline{\mathrm{B}}_\delta \subset D$.

Рассмотрим

$$\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

Она аналитична в $D \setminus \{\, z \,\}$.

Рассмотрим область $D_\delta = D \setminus \overline{\mathrm{B}}_\delta$.

$$\overline{D}_\delta \subset G \setminus \{\, z \,\}$$

По теореме Коши,

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\, D_\delta}} \varphi(\zeta)\ \mathrm{d}\, \zeta = 0 \tag{13}$$

Обозначим $S = \{\, \zeta \mid |\zeta - z| = r \,\}, \quad \sigma_\delta = \{\, \zeta \mid |\zeta - z| = \delta \,\}$.

$$(13) \implies \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S}} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\sigma_\delta}} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta = 0 \quad \iff \quad \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S}} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta = -\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\sigma_\delta}} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\sigma_\delta}} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\sigma_\delta}} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta \xlongequal{\operatorname{def}\varphi} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\sigma_\delta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\sigma_\delta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta + \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\sigma_\delta}} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta \tag{14}$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\sigma_\delta}} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = f(z) \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\sigma_\delta}} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta \tag{15}$$

$$\overset{\curvearrowleft}{\sigma_\delta} = \{\, \zeta \mid \zeta = z + \delta e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi] \,\}$$

$$\left(\delta e^{i\theta}\right)'_\theta = i\delta e^{i\theta}$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\sigma_\delta}} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{\left(\delta e^{i\theta}\right)'}{\delta e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\,\theta = 2\pi i$$

$$\underset{(15)}{\implies} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\sigma_\delta}} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = 2\pi i f(z)$$

$$\underset{(14)}{\implies} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\sigma_\delta}} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta + 2\pi i f(z) \tag{16}$$

В силу непрерывности

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall \zeta \in \sigma_\delta \quad |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$$

$$\left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\sigma_\delta}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta \right| \le \int\limits_{\sigma_\delta} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|}\,|\mathrm{d}\,\zeta| \le \int\limits_{\sigma_\delta} \frac{\varepsilon}{\delta}\,|\mathrm{d}\,\zeta| = \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot 2\pi\delta = 2\pi\varepsilon$$

$$\underset{(16)}{\implies} \left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta - 2\pi i f(z) \right| = \left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\sigma_\delta}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta \le 2\pi\varepsilon$$

$$\implies \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta - 2\pi i f(z) = 0$$

□

Замечание (о прошедшем рассуждении).

$$(e^{i\theta})' = ie^{i\theta}$$

$$\cos\theta + i\sin\theta$$

$$z_0 = a + bi$$

$$\zeta = z_0 + re^{i\theta} = (a + r\cos\theta) + i(b + r\sin\theta)$$

$$(a + r\cos\theta)' + i(b + r\sin\theta)' = r(\cos\theta)' + ir(\sin\theta)' = -r\sin\theta + ir\cos\theta = ir(\cos\theta + i\sin\theta) = ire^{i\theta}$$

10. Бесконечная гладкость аналитической функции

Замечание (о предстоящем рассуждении).

$$f'_z = \frac{1}{2}(f'_x - if'_y), \qquad f'_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f'_x + if'_y) = 0$$

$$f' = f'_z = f'_z + f'_{\overline{z}} = f'_x, \qquad f' = f'_z = f'_z - f'_{\overline{z}} = if'_y$$

$$f'_y = if'$$

$$z^\alpha, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$z^\alpha \overset{\text{def}}{=} e^{\alpha \ln z}$$

$z^n, \quad n \in \mathbb{N}$ определено при $z \in \mathbb{C}$
z^{-n} определено при $z \in \mathbb{C} \setminus \{ 0 \}$

$$(z^n)' = nz^{n-1}$$

$$(z^{-n})' = -nz^{-n-1}$$

$$\Big((z-a)^{-n}\Big)' = -n(z-a)^{-n-1}$$

$$\Big((z-a)^{-n}\Big)'_x = -n(z-a)^{-n-1}, \qquad \Big((z-a)^{-n}\Big)'_y = -in(z-a)^{-n-1}$$

$$\left(\frac{1}{z-a}\right)'_x = -\frac{1}{(z-a)^2}, \qquad \left(\frac{1}{z-a}\right)'_y = -i\frac{1}{(z-a)^2}$$

$$\implies \left(\frac{1}{a-z}\right)'_x = \frac{1}{(a-z)^2}, \qquad \left(\frac{1}{a-z}\right)'_y = \frac{i}{(a-z)^2}$$

$$\left(\frac{1}{a-z}\right)''_{xx} = \left(\frac{1}{(a-z)^2}\right)'_x = \frac{2}{(a-z)^3}, \qquad \left(\frac{1}{a-z}\right)''_{xy} = i\left(\frac{1}{(a-z)^2}\right) = \frac{2i}{(a-z)^3}$$

$$\left(\frac{1}{a-z}\right)''_{yy} = i\left(\frac{1}{(a-z)^2}\right)'_y = \frac{2i^2}{(a-z)^3}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\left(\frac{1}{a-z}\right)_{\underbrace{x\dots x}_m \underbrace{y\dots y}_n} = \frac{(m+n)!i^n}{(a-z)^{m+n+1}} \tag{17}$$

Теорема 8. $D \subset \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{A}(D) \qquad \implies \qquad f \in \mathcal{C}^\infty\big(D\big)$

Доказательство.

1. $D = \{ z \mid |z-a| < R \}$

   Выберем $0 < \rho < R$ и $\rho < r < R$. Обозначим $S = \{ z \mid |z-a| = r \}$. Применим формулу Коши:

   $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\circlearrowleft S} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\,\zeta$$

   При этом, $S = \left\{ z = a + re^{i\theta} \right\}$. Значит,

   $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})}{a+re^{i\theta}-z} ire^{i\theta} \, \mathrm{d}\,\theta$$

   При этом, $z = x + iy$.

   Утверждение 2. Теоремы о непрерывности интегралов от параметра и о производной интеграла от параметра остаются справедливыми, если функции комплекснозначные, а параметров несколько.

Применим их и воспользуемся формулой (17):

$$\Big(f(z)\Big)^{(m+n)}_{\underbrace{x\dots x}_{m}\underbrace{y\dots y}_{n}} = (m+n)!i^n \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})ir}{(a+re^{i\theta}-z)^{m+n+1}}\,\mathrm{d}\,\theta =$$

$$= (m+n)!i^n \cdot \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\circlearrowleft S} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{m+n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta$$

$$\implies \big(f(z)\big)^{(m+n)}_{\underbrace{x\dots x}_{m}\underbrace{y\dots y_n}} \in \mathcal{C}\big(\{\, z \mid |\, z-a| \le \rho\,\}\big)$$

В силу произвольности ρ это означает, что $f \in \mathcal{C}^{m+n}\big(\{\, z \mid |\, z-a| < R\,\}\big)$.
Значит, $f \in \mathcal{C}^{\infty}\big(|z-a|<R\big)$.

2. Произвольная область $D \subset \mathbb{C}$

   Возьмём $a \in D$

   $$\exists R: \quad \{\, z \mid |\, z-a| < R\,\} \subset D$$

   По только что доказанному $f \in \mathcal{C}^{\infty}\big(\{\, z \mid |\, z-a| < R\,\}\big)$.

   Поскольку класс $\mathcal{C}^{\infty}$ определяется локально, теорема доказана.

□

11. Аналитичность производной аналитичной функции

Теорема 9. $D \subset \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{A}(D) \qquad \implies \qquad f' \in A(D)$

Доказательство. $f' = f'_x$
У f были все производные, а значит, и у f'_x есть все производные, то есть $f' \in \mathcal{C}^{\infty}\big(D\big)$.
Рассмотрим $D = \{\, z \mid |\, z-a| < R\,\}, \quad 0<\rho<r<R$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\circlearrowleft S} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta$$

$$f'(z) = f'_x(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\circlearrowleft S} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\,\zeta$$

Применим формулу (17):

$$\left.\begin{aligned} \big(f'_x(z)\big)'_x &= 2\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\circlearrowleft S} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3}\,\mathrm{d}\,\zeta \\ \big(f'_x(z)\big)'_y &= 2i\cdot\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\circlearrowleft S} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3}\,\mathrm{d}\,\zeta \end{aligned}\right\} \implies (f'_x)'_{\overline{z}} = 0$$

$$\implies \big(f'(z)\big)'_{\overline{z}} \equiv 0 \quad \text{при } |z-a|<\rho$$

В силу произвольности ρ

$$\big(f'(z)\big)'_{\overline{z}} = 0 \quad \text{при } |z-a|<R$$

Пусть теперь D — произвольная область

$$\exists R: \quad \{\, z \mid |\, z-a| < R\,\} \subset D$$

□

$$f \in \mathcal{A}(z \mid |z-a|<R), \qquad \rho<r<R, \qquad f'_x = f'$$

Но f' тоже аналитична.

$$(f')'_x = (f')'$$

Это называется *второй комплексной производной*:

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \oint_{S} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} \,\mathrm{d}\,\zeta$$

12. Формула Коши для $f^{(n)}$

Вычислим третью производную по той же формуле:

$$f'''(z) = (f'')'(z) = (f'')'_x(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_S f(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z)^3} \right)'_x \mathrm{d}\,\zeta = \frac{2 \cdot 3}{2\pi i} \int_S \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^4} \,\mathrm{d}\,\zeta$$

Утверждение 3.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_S \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \,\mathrm{d}\,\zeta$$

Доказательство. Доказывать будем по **индукции**. **База** уже доказана. **Переход**:

$$f^{(n+1)}(z) = \left(f^{(n)}\right)'(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_S f(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}} \right)' \mathrm{d}\,\zeta = \frac{n! \cdot (n+1)}{2\pi i} \int_S \frac{f(z)}{(\zeta - z)^{n+2}} \,\mathrm{d}\,\zeta =$$

$$= \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_S \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+2}} \,\mathrm{d}\,\zeta$$

□

13. Разложение $f \in A\big(\mathtt{D}_r(a)\big)$ в ряд

Теорема 10. $f \in \mathcal{A}(D)$

$$\Longrightarrow \quad f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

То есть,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \qquad f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

где ряд сходится в D и $\forall \rho_1 < \rho < R$ ряд сходится равномерно на $\overline{D}_\rho = \{\, z \mid |z - z_0| \le \rho \,\}$.

Доказательство. $S_r = \{\, z \mid |z - z_0| = r \,\}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\,\zeta$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

Обозначим $q(\zeta, z) = \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$.

$$|q| = \frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} \le \frac{\rho}{r} =: q_0 < 1$$

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|q^n| \le \sum_{n=1}^{\infty} q_0^n = \frac{q_0}{1-q_0}$$

Значит, $1 + \sum q^n(z,\zeta)$ равномерно сходится при $\zeta \in S_r,\ z \in \overline{D}_\rho$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_r} f(\zeta)\frac{1}{\zeta - z_0}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}\right)^n\right)\,\mathrm{d}\,\zeta =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,\mathrm{d}\,\zeta + \sum_{n=1}^{\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty}(z-z_0)^n\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Обозначим $M(r) = \max\limits_{z\in S_r}|f(z)|$.

$$|c_n| = \left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_r}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta\right| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_r}\frac{|f(\zeta)}{|\zeta - z_0|^{n+1}}\,|\,\mathrm{d}\,\zeta| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_r}\frac{M(r)}{r^{n+1}}\,|\,\mathrm{d}\,\zeta| =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi r\cdot\frac{M(r)}{r^{n+1}} = \frac{M(r)}{r^n}$$

$$\Longrightarrow\ |z-z_0|^n\cdot|c_n| \le \rho^n\cdot\frac{M(r)}{r^n} = M(r)q_0^n$$

$\square$

14. Разложение элементарных функций в степенной ряд

Мы уже выяснили, что аналитические функции раскладываются в ряд Тейлора:

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Будем рассматривать $z_0 = 0$.

1. $e^z \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$

$$e^0 = 1, \qquad \left(e^z\right)^{(n)}\Big|_{z=0} = (e^z)^{(n)}_{\underbrace{x\ldots x}_{n}}\Big|_{z=0} = e^{x(n)}\Big|_{x=0} = 1$$

$$e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\quad \forall z\in\mathbb{C}$$

2. $\cos z = 1 + \sum\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$

3. $\sin z = \sum\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}z^{2n-1}$

4. $\log(1+z)$ аналитична при $|z|<1$ и на $\mathbb{C}\setminus(-\infty,-1]$.
   В этой области достаточно рассмотреть функцию $\log(1+x)$.

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}z^n$$

5. $r\in\mathbb{R}\setminus(\mathbb{N}\cup\{\,0\,\})$

$$(1+z)^r = e^{r\log(1+z)}$$

   Она аналитична при $|z|<1$. Рассмотрим $(1+x)^r$.

$$(1+z)^r = e^{r\log(1+z)} = 1 + rz + \frac{r(r-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}z^n + \cdots$$

6. $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

$$(1+z)^\alpha = e^{\alpha\log(1+z)} \in \mathcal{A}(|z|<1)$$

Здесь нельзя сослаться на вещественный случай — $(1+x)^\alpha \in \mathbb{C}$.

$$1^\alpha = 1$$

$$\Big((1+z)^\alpha\Big) = \Big(e^{\alpha\log(1+z)}\Big)' = (e^w)'\big|_{w=\alpha\log(1+z)} \cdot \big(\alpha\log(1+z)\big)' = e^{\alpha\log(1+z)}\cdot\frac{\alpha}{1+z} =$$
$$= \alpha e^{\alpha\log(1+z)}e^{-\log(1+z)} = \alpha e^{(\alpha-1)\log(1+z)} = \alpha(1+z)^{\alpha-1}$$

$$\Big((1+z)^\alpha\Big)'' = \alpha(\alpha-1)(1+z)^{\alpha-2}$$

$$\Big((1+z)^\alpha\Big)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n}$$

$$(1+z)^\alpha = 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\cdots$$

15. Теорема единственности для аналитических функций с производными

Теорема 11. $D \subset \mathbb{C}$ — область, $\quad f\in\mathcal{A}(D), \quad z_0\in D, \quad f^{(n)}(z_0)=0, \quad n\geq 1$

$$\implies f(z) \overset{D}{\equiv} 0$$

Доказательство. Пусть

$$E = \Big\{\,\zeta\in D \mid f(\zeta)=0, \quad f^{(n)}(\zeta)=0 \quad \forall n\geq 1\,\Big\} \tag{18}$$

По условию $z_0\in E \implies E\neq\emptyset$.

1. Докажем, что E *относительно замкнуто* в D, то есть

Утверждение 4. $\{\,\zeta_m\,\}_{m=1}^\infty, \quad \zeta_m\neq\zeta_l, \quad \zeta_m\in E \quad \forall m, \quad \zeta_m \xrightarrow[m\to\infty]{} z_*, \quad z_*\in D$

$$\implies z_*\in E$$

По условию, $f\in\mathcal{C}(D)$.

$$\underset{\zeta_m\to z_*}{\implies} f(\zeta_m)\to f(z_*) \tag{19}$$

$$\zeta_m\in E \quad \forall m \quad \underset{(19)}{\implies} 0\to f(z_*) \implies f(z_*)=0$$

$$f^{(n)}\in\mathcal{A}(D) \implies f^{(n)}\in\mathcal{C}(D)$$
$$\implies f^{(n)}(\zeta_m)\to f^{(n)}(z_*)$$
$$\implies 0\to f^{(n)}(z_*) \implies f^{(n)}(z_*)=0$$
$$\implies z_*\in E$$

2. Докажем, что множество E *относительно открыто* в D, то есть

Утверждение 5. $z_*\in E \implies \exists\delta>0: \quad \mathrm{B}_\delta(z_*)\subset E, \quad \mathrm{B}_\delta(z_*)=\{\,\zeta \mid |\,\zeta-z_*|<\delta\,\}$

$$z_*\in E \implies \exists\delta>0: \quad \mathrm{B}_\delta(z_*)\subset D$$
$$\implies f\in\mathcal{A}\big(\mathrm{B}_\delta(z_*)\big)$$

$$\implies \forall z\in\mathrm{B}_\delta(z_*) \quad f(z)=f(z_*)+\sum_{n=1}^\infty\frac{f^{(n)}(z_*)}{n!}(z-z_*)^n$$

$$\underset{(18)}{\implies} f(z)=0+\sum 0=0 \quad \forall z\in\mathrm{B}_\delta(z_*)$$

$$\implies f^{(n)}(z_*)\equiv 0, \quad z\in\mathrm{B}_\delta(z_*), \quad n\geq 1$$

По теореме из топологии, E пусто или $E = D$. Мы уже проверили, что E не пусто. $\square$

16. Теорема единственности для аналитических функций со значениями функции

Теорема 12. $D \subset \mathbb{C}$, $\quad E \subset D$, $\quad z_0$ — т. сг. E, $\quad z_0 \in D$, $\quad f \in \mathcal{A}(D)$, $\quad f(z) = 0 \quad \forall z \in E$

$$\implies f(z) \equiv 0$$

Доказательство.

$$f(z) \xrightarrow[\substack{z \in E \\ z \to z_0}]{} f(z_0)$$

$$0 \to f(z_0)$$

То есть, $f(z_0) = 0$. **Пусть** $f(z) \not\equiv 0$. Тогда

$$\exists \varphi(z) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists \delta > 0 : \quad \begin{cases} f(z) = (z - z_0)^{n_0} \varphi(z) \\ |z - z_0| < \delta \quad \implies \quad \varphi(z) \neq 0 \end{cases}$$

$$\implies \text{ если } |z - z_0| < \delta, \quad f(z) = 0 \implies z = z_0 \tag{20}$$

$$z_0 \text{ — т. сг. } E \implies \exists z_1 \in E : \quad |z_1 - z_0| < \delta$$

$$z_1 \in E \implies f(z_1) = 0 \tag{21}$$

(20) и (21) противоречивы. $\square$

Следствие. $f \in \mathcal{A}(D)$, $\quad g \in \mathcal{A}(D)$, $\quad \forall z \in E \quad f(z) = g(z)$

$$\implies f(z) \overset{D}{\equiv} g(z)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(z) = g(z) - f(z)$. В силу аналитичности f и g получаем $h(z) \in \mathcal{A}(D)$.

$$h(z) = 0 \quad \forall z \in E \implies h(z) \equiv 0$$

$\square$

17. Структура аналитической функции в окрестности её нуля

Теорема 13. $D \subset \mathbb{C}$, $\quad f \in \mathcal{A}(D)$, $\quad f \not\equiv 0$, $\quad a \in D$, $\quad f(a) = 0$

$$\implies \exists n \in \mathbb{N} : \quad f(z) = (z - a)^n v(z)$$

$$\text{где } v \in \mathcal{A}(D) \quad \text{и} \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall z \in \mathtt{B}_\delta(a) \quad v(z) \neq 0$$

Доказательство. Рассмотрим $f^{(m)}(a)$. По предыдущей теореме она не может быть везде равна нулю. Значит,

$$\exists m : f^{(m)}(a) \neq 0$$

Возьмём $n = \min \left\{ m \mid f^{(m)}(a) \neq 0 \right\}$. Пусть $\delta_1 > 0$ такое, что $\mathtt{B}_{\delta_1}(a) \subset D$. Тогда $f \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_{\delta_1}(a)\big)$.

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z - a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z - a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z - a)^{n+1} + \cdots$$

$$\implies f(z) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z - a)^{n+1} + \dots = (z - a)^n \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z - a) + \cdots \right)$$

Возьмём $z \neq a, \quad z \in \mathtt{B}_{\delta_1}(a), \qquad (z-a)^n \neq 0$. Тогда

$$\frac{f(z)}{(z-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a) + \cdots$$

Обозначим

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a) + \frac{f^{(n+2)}(a)}{(n+2)!}(z-a)^2 + \cdots = v(z)$$

$v(z)$ — степенной ряд, сходящийся в $\mathtt{B}_{\delta_1}(a)$.

$$\implies v \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_{\delta_1}(a)\big)$$

Если $z \neq a$, положим $v(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^n}$.

$$\implies v \in \mathcal{A}(D \setminus \{\, a \,\})$$

Если $z \in \mathtt{B}_{\delta_1}(a)$ и $z \neq a$, то

$$v(z) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a) + \cdots$$

$$\implies f \in \mathcal{A}\Big((D \setminus \{\, a \,\}) \cup \mathtt{B}_{\delta_1}(a)\Big) = \mathcal{A}(D)$$

Обозначим

$$c_1 = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad c_2 = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}, \quad \dots, \quad c_{k+1} = \frac{f^{(n+k)}(a)}{(n+k)!}, \quad \dots$$

$$v(z) = c_1 + c_2(z-a) + \cdots + c_k(z-a)^{k-1} + \cdots$$

$$z \in \mathtt{B}_{\delta_1}(a), \qquad c_1 \neq 0, \quad c_1 = v(a), \qquad v \in \mathcal{C}\big(\mathtt{B}_{\delta_1}(a)\big), \qquad v(a) \neq 0$$

$$\implies \exists 0 < \delta \le \delta_1 : \quad v(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathtt{B}_{\delta}(a)$$

При этом, $f(z) = (z-a)^n v(z)$. □

18. Аналитическое продолжение вдоль пути

Определение 3. $D_1, D_2 \in \mathbb{C}, \qquad D_1 \cap D_2 =: G \neq \emptyset, \qquad f_1 \in \mathcal{A}(D_1), \quad f_2 \in \mathcal{A}(D_2)$

$$\forall z \in G \quad f_1(z) = f_2(z)$$

Говорят, что функция f_1 *аналитически продолжена* в область D_2 функцией f_2.

Теорема 14. Пусть имеется два аналитических продолжения функции f_1 в область D_2: f_2 и $\widetilde{f}_2$.

$$\implies \widetilde{f}_2(z) \overset{D_2}{\equiv} f_2(z)$$

Доказательство. G открыто, $\quad \forall z_0 \in G \;$ — т. сг. G. Рассмотрим область D_2:

$$f_2(z) = \widetilde{f}_2(z) \quad \forall z \in G$$

Можно применить следствие из теоремы о единственности. □

Определение 4. *Путём* $\Gamma(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$ называется непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ в $\mathbb{C}$.

Замечание. Нет требований к инъективности или сюръективности.

Определение 5. $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \qquad r_0, r_1, \dots, r_n > 0$
Рассматриваем круги $\mathtt{B}_{r_k}\big(\Gamma(t_k)\big)$. Будем называть их *системой кругов*, если выполнено

$$\mathtt{B}_{r_k}\big(\Gamma(t_k)\big) \cap \mathtt{B}_{r_{k-1}}\big(\Gamma(t_{k-1})\big) \neq \emptyset, \qquad k = 1, \dots, n$$

Определение 6. Пусть имеется путь $\Gamma(t)$ и система кругов, связанных им.

$$f \in \mathcal{A}\Big(\mathtt{B}_{r_0}\big(\Gamma(t_0)\big)\Big) = \mathtt{B}_{r_0}\big(\Gamma(a)\big)$$

Будем говорить, что функция f *аналитически продолжена вдоль пути* $\Gamma(t)$ *в круг* $\mathtt{B}_{r_n}\big(\Gamma(t_n)\big) = \mathtt{B}_{r_n}\big(\Gamma(b)\big)$, если функция f аналитически продолжается из круга r_0 в круг r_1, далее из него в круг r_2, и так далее до круга r_n.

Теорема 15. Аналитическое продолжение вдоль пути единственно.

Доказательство. Следует из единственности аналитического продолжения в область. □

19. Функции, продолжимые по любому пути

Определение 7. $D \subset \mathbb{C}, \qquad B = \mathtt{B}_r(z_0) \subset D, \qquad f \in \mathcal{A}\big(B_r(z_0)\big)$

Будем говорить, что функция f *продолжима из круга B по любому пути в области D*, если

$$\forall \Gamma(t) : [a, b] \to D : \ \Gamma(a) = z_0 \quad f \text{ аналитически продолжается вдоль этого пути},$$

причём в качестве первого круга мы берём круг B.

20. Функция $\log z$

Пример. $D = \mathbb{C} \setminus \{\, 0 \,\}, \qquad B = \mathtt{B}_1(1)$

Рассмотрим функцию $f(z) = \log z, \quad z \in B$.

$$\log z = |z| + i \arg z, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

Зададим $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$.

Рассмотрим теперь любой круг $\widetilde{B}$. Хотим задать Arg так, чтобы он был в этом круге непрерывен. Положим $\log z := \log |z| + i \operatorname{Arg} z$ при $z \in \widetilde{B}$. Эта функция аналитична в $\widetilde{B}$.

21. Теорема о монодромии

Определение 8. Область называется *односвязной*, если любой замкнутый путь можно непрерывно деформировать в точку, оставаясь в этой области.

Теорема 16. D — односвязная область, $\qquad B = \{\, z \mid |\, z - z_0| < r \,\} \subset D, \qquad f \in \mathcal{A}(B), \qquad f$ продолжима в D по любому пути.

Тогда f аналитична в D, то есть

$$\exists F \in \mathcal{A}(D) : \quad F(z) \overset{B}{\equiv} f(z)$$

Доказательство. TODO: Доказательство теоремы о монодромии. Тут какие-то интуитивные рассуждения. □

22. Ряд Лорана

Определение 9. $0 \le r \le R \le +\infty$

$$D_{r,R}(a) = \{\, z \mid r < |\, z - a| < R \,\}$$

Будем называть $D_{r,R}$ *кольцом.*

Теорема 17. $f \in \mathcal{A}\big(D_{r,R}(a)\big)$

$$\implies \exists c_n \in \mathbb{Z}: \quad \forall z \in D_{r,R}(a) \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где ряды сходятся.

Если $r < r_1 < R_1 < R$, то каждый из рядов сходится равномерно и абсолютно при $z \in \overline{D_{r,R}(a)}$.

Эта формула называется разложением функции в *ряд Лорана.*

Доказательство.

$$f \in \mathcal{A}\Big(D_{r,R}(a)\Big), \qquad r_1 < r_2 < R_2 < R_1, \qquad r < r_1 < R_1 < R$$

Введём $S_\rho = \{\, z \mid |\, z-a| = \rho \,\}$.

- Пусть $z \in \overline{D}_{r,R}(a)$.
  Возьмём $\varepsilon < \min\{\, r_2 - r_1, R_1 - R_2 \,\}$.
  Обозначим $\sigma_\varepsilon = \{\, \zeta \mid |\, \zeta - z| = \varepsilon \,\}$.
  Рассмотрим функцию

$$\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \qquad \varphi \in \mathcal{A}\Big(D_{r,R}(a) \setminus \{\, z \,\}\Big)$$

$$G_\varepsilon = D_{r_1,R_1}(a) \setminus \{\, \zeta \mid |\, \zeta - z| \le \varepsilon \,\}$$

$$\int\limits_{\circlearrowleft \partial G_\varepsilon} \varphi(\zeta)\, \mathrm{d}\,\zeta = 0 \quad \iff \quad \int\limits_{S_{R_1}} \varphi(\zeta)\, \mathrm{d}\,\zeta - \int\limits_{S_{r_1}} \varphi(\zeta)\, \mathrm{d}\,\zeta - \int\limits_{\sigma_\varepsilon} \varphi(\zeta)\, \mathrm{d}\,\zeta = 0$$

$$\implies \frac{1}{2\pi i} = \int\limits_{\sigma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta = \int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta - \int\limits_{S_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta \tag{22}$$

$$\{\, \zeta \mid |\, \zeta - z| \le \varepsilon \,\} \subset D_{r,R}(a)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta = f(z) \tag{23}$$

$$(22), (23) \implies f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta \tag{24}$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}}$$

Обозначим $q_1(z, \zeta) = \frac{z-a}{\zeta-a}$.

$$|q_1(z,\zeta)| \le \frac{R_2}{R_1} = Q_1 < 1$$

$$\implies \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}}\, \mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n \mathrm{d}\,\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} (z-a)^n \int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a}^{n+1})\, \mathrm{d}\,\zeta \tag{25}$$

Обозначим $c_n(R_1) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}\,\zeta$.

$$(25) \implies \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\,\zeta = c_0(R_1) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(R_1)(z-a)^n$$

- Пусть z лежит на окружности.

$$-\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = -\frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{\frac{\zeta-a}{z-a} - 1} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta-a}{z-a}}$$

$$c_{-n-1}(r_1) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{r_1}} f(\zeta)(\zeta-a)^n \,\mathrm{d}\,\zeta \tag{26}$$

$$\implies -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\,\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(r_1)(z-a)^{-n}$$

Воспользуемся леммой:

$$\iff -\int\limits_{S_{\rho_1}} \varphi(\zeta) \,\mathrm{d}\,\zeta + \int\limits_{S_{\rho_2}} \varphi(\zeta) \,\mathrm{d}\,\zeta = 0 \iff \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{\rho_0}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}\,\zeta \overset{\text{def}}{=} c_n \tag{27}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{r_1}} f(\zeta)(\zeta-a)^n \,\mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{\rho_0}} f(\zeta)(\zeta-a)^n \,\mathrm{d}\,\zeta \overset{\text{def}}{=} c_{-n-1} \tag{28}$$

$$(24), (27), (28) \implies f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

□

Лемма 1. $r < \rho_1 < \rho_2 < R, \qquad m \in \mathbb{Z}$

$$\implies \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{\rho_1}} f(\zeta)(\zeta-a)^m \,\mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{\rho_2}} f(\zeta)(\zeta-a)^m \,\mathrm{d}\,\zeta$$

Доказательство. Возьмём $\varphi(\zeta) = f(\zeta)(\zeta-a)^m \quad \in \mathcal{A}\big(D_{r,R}(a)\big)$
По теореме Коши,

$$\int\limits_{\partial D_{\rho_1,\rho_2}(a)} \varphi(\zeta) \,\mathrm{d}\,\zeta = 0$$

□

23. Классификация особых точек аналитических функций; характеристика устранимой особой точки

Определение 10. $f \in \mathcal{A}\big(D_{0,R}(a)\big)$
Говорят, что a — *особая точка* функции f.

Доказано, что

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{29}$$

Говорят, что

1. a — *устранимая особая точка*, если $c_{-n} = 0 \quad \forall n \geq 1$;

2. функция f имеет в a *полюс*, если

$$\exists n_0 \geq 1 : \quad c_{-n_0} \neq 0, \quad c_n = 0 \quad \forall n > n_0$$

3. a — *существенная особая точка*, если

$$\exists \{ n_k \}_{:=1}^{\infty} \quad c_{-n_k} \neq 0$$

Теорема 18. Чтобы точка a была устранимой особой точкой, **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\exists 0 < r < R, \quad \exists M : \quad |f(z)| \leq M \quad \forall z \in D_{0,r}(a) \tag{30}$$

Доказательство.

1. Необходимость

   Из условия на устранимую особую точку и (29) следует, что f раскладывается в степенной ряд, а значит, $f(z) \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_R(a)\big)$ (по последней теореме предыдущего семестра).

2. Достаточность

   Возьмём $0 < \varepsilon < r$ и $\varepsilon < |z - a| < r$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\,\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\,\zeta$$

$$\left| -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\,\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S_\varepsilon} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|} \,|\mathrm{d}\,\zeta|$$

$$|\zeta - z| \geq |z - a| - |\zeta - a| = |z - a| - \varepsilon \geq \frac{1}{2}|z - a|$$

$$\underset{(30)}{\Longrightarrow} \left| -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\,\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{\frac{1}{2}|z - a|} \cdot 2\pi\varepsilon = \frac{2M\varepsilon}{|z - a|}$$

$$f(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_r} \frac{f(\varepsilon)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\,\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\,\zeta \right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \,\mathrm{d}\,\zeta = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n$$

□

24. Характеристика полюса

Теорема 19. Для того, чтобы a была полюсом **необходимо и достаточно**, чтобы

$$|f(z)| \xrightarrow[z \to a]{} +\infty \tag{31}$$

Доказательство.

1. Достаточность

$$f(z) = \sum_{n=1}^{n_0} c_{-n}(z - a)^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (z - a)^n$$

$$\Longrightarrow f(z) = (z - a)^{-n_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - a)^{n_0 - n} + c_0(z - a)^{n_0} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - a)^{n + n_0} \right) =$$
$$= (z - a)^{-n_0} \Big(c_{-n_0} + c_{-n_0 + 1}(z - a) + \ldots \Big)$$

$$\exists \delta_0 > 0 : \quad |c_{-n_0} + c_{-n_0+1}(z - a) + \ldots| \geq \frac{1}{2}|c_{-n_0}| \quad \text{при } |z - a| < \delta_0$$

$$\Longrightarrow \ |f(z)| \geq |z-a|^{-n_0} \cdot \frac{|c-n_0|}{2} \xrightarrow[z\to a]{} +\infty$$

2. Необходимость

$$(31) \implies \exists \delta_1 : \quad |f(z)| > 1 \quad \text{при } |z-a| < \delta_1$$

$$\Longrightarrow \ f(z) \neq 0 \quad \text{при } z \in D_{0,\delta_1}(a) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(z) := \frac{1}{f(z)} \in \mathcal{A}\big(D_{0,\delta_1}(a)\big)$$

Понятно, что $\varphi(z) \not\equiv 0$

$$(31) \implies |\varphi(z)| \xrightarrow[z\to 0]{} 0$$

Пусть $|\varphi(z)| < 1$

$$\Longrightarrow \ \varphi \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_{\delta_1}(a)\big) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(a) = 0$$

$$\Longrightarrow \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \exists h \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_{\delta_1}(a)\big) : \quad \psi(z) = (z-a)^{n_0} h(z), \quad h(z) \neq 0, \quad z \in \mathtt{B}_{\delta_2}(a)$$

$$\Longrightarrow \ f(z) = \frac{1}{(z-a)^{n_0}} \cdot \frac{1}{h(z)}$$

$$\Longrightarrow \ g(z) = \frac{1}{h(z)} \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_{\delta_2}(a)\big)$$

$$\Longrightarrow \ g(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(a-a)^2 + \dots$$

$$\Longrightarrow \ f(z) = \frac{1}{(z-a)^{n_0}}\Big(c_0 + c_1(z-a) + \dots\Big) = c_0(z-a)^{-n_0} + c_1(z-a)^{-n_0+1} + \dots$$

□

25. Характеристика существенно особой точки

Теорема 20. $f \in \mathcal{A}\big(D_{0,R}(a)\big)$
Для того, чтобы a была существенной особой точкой f, **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\exists \{\, z_n \,\}_{n=1}^{\infty}, \ z_n \neq a, \ z_n \to a, \quad \exists \{\, \zeta_n \,\}_{n=1}^{\infty}, \ \zeta_n \neq a, \ \zeta_n \to a, \quad \exists M : \quad \begin{cases} |f(z_n)| \leq M & \forall n, \\ |f(\zeta_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \end{cases}$$

Доказательство.

- Пусть $\nexists \{\, \zeta_n \,\} : \ \zeta_n \to a, \ |f(\zeta_n)| \to +\infty$.

$$\Longrightarrow \ \exists M_1, \quad \exists \delta_0 > 0 : \quad \forall z \in D_{0,\delta_0}(a) \quad |f(z)| \leq M_1$$

  Тогда a — устранимая особая точка по характеристическому свойству устранимой особой точки.

- Пусть $\exists \{\, \zeta_n \,\}, \ \zeta_n \to a, \ |f(\zeta_n)| \to +\infty$.
  - Если бы выполнялось $|f(z)| \xrightarrow[z\to a]{} +\infty$, то по характеристике полюса, a — полюс f.
  - Если неверно, что $|f(z)| \to +\infty$, то

$$\exists M, \quad \exists \{\, z_n \,\}, \ z_n \to a : \quad |f(z_n)| \leq M$$

  Итак, при наличии последовательностей $\{\, z_n \,\}$ и $\{\, \zeta_n \,\}$ a не устранимая особая точка и не полюс.

□

26. Определение вычета; формулы для вычисления вычетов

Определение 11. $f \in \mathcal{A}(D_{0,R}(a))$, $\quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n O(z-a)^n$, $\quad z \in D_{0,R}(a)$
Коэффициент c_{-1} называется *вычетом* функции f в точке a.

Обозначение. $c_{-1} = \operatorname{res}_f a$, $\qquad c_{-1} = \operatorname{res} f$

В соответствии с формулой (26) из доказательства теоремы о разложении в ряд Лорана

$$\operatorname{res}_f a = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho} f(z)\,\mathrm{d}\,z, \qquad 0 < \rho < R,$$

где γ_ρ — окружность $\{\, z \mid |\, z-a| = \rho \,\}$.

Если $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, $E \subset \Omega$ — некоторое множество, то для $\forall a \in E$ выберем $R_a > 0$ так, чтобы $\{\, z \mid |\, z-a| < R_a \,\} \cap E = \{\, a \,\}$.
Тогда положим $\operatorname{res}_f a$ — вычет функции f, определяемый по множеству $D_{0,R_a}(a)$.

Утверждение 6. $\varphi, \psi \in \mathcal{A}\big(D_r(a)\big), \qquad \psi(a) = 0, \quad \psi'(a) \neq 0, \qquad f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$

$$\implies \operatorname{res}_f a = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

Доказательство. Выберем $r_a > 0$ так, чтобы при $z \in D_{0,r}(a) \setminus \{\, a \,\}$ выполнялось $\psi(z) \neq 0$. Пусть $v(z) = \frac{\psi(z)}{z-a}$.

Поскольку $\psi(z) = \psi(a) + \psi'(a)(z-a) + \ldots$, то

$$\psi(a) = 0 \implies v(z) = \psi'(a) + \frac{1}{2}\psi''(a)(z-a) + \ldots, \qquad v \in \mathcal{A}\big(D_R(a)\big)$$

Пусть $g(z) = \frac{\varphi(z)}{v(z)}, \quad g \in \mathcal{A}\big(D_{0,r_0}(0)\big)$, поскольку $v(z) \neq 0$, $z \in D_{r_a}(a)$.

$$f(z) = \frac{g(z)}{z-a} = \frac{1}{z-a}\big(g(a) + g'(a)(z-a) + \cdots\big) = \frac{g(a)}{z-a} + g'(a) + \frac{1}{2}g''(a)\cdot(z-a) + \cdots$$

$$\implies \operatorname{res}_f a = g(a) = \frac{\varphi(a)}{v(a)}$$

При этом,

$$\psi(z) = (z-a)v(z), \qquad \psi'(z) = v(z) + (z-a)v'(z), \qquad \psi'(a) = v(a)$$

□

Утверждение 7. $\varphi(a) \in \mathcal{A}\big(D_R(a)\big), \qquad n \geq 2, \qquad f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$

$$\implies \operatorname{res}_f a = \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(a)$$

Доказательство.

$$\varphi(z) = \varphi(a) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k, \qquad z \in D_R(a)$$

Тогда

$$f(z) = \frac{\varphi(a)}{(z-a)^n} + \sum_{k=1}^{n-2}\frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^{k-n} + \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{z-a} + \sum_{k=n}^{\infty}\frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^{k-n}$$

□

27. Теорема о вычетах

Теорема 21. Пусть Ω, E определены выше, $\qquad \overline{G} \subset \Omega, \quad E \subset G, \qquad \Gamma = \partial G$ состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых.

Тогда для $f \in \mathcal{A}(\Omega \setminus E)$ справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\circlearrowleft\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{a\in E}\operatorname{res}_f a$$

Доказательство. Выберем $R_a,\ a \in E$ как раньше.
Пусть $\rho_a \le \frac{1}{3} R_a$ и $\overline{D}_{\rho_a}(a) \subset G$. Тогда для $a_1, a_2 \in E,\ a_1 \ne a_2$ имеем

$$\overline{D}_{\rho_{a_1}}(a) \cap \overline{D}_{\rho_{a_2}}(a) \ne \emptyset$$

Пусть $U = G \setminus \bigcup_{a \in E} \overline{D}_{\rho_a}(a)$. Тогда $f \in \mathcal{A}\big(\Omega \setminus \bigcup_{a \in E} \overline{D}_{\rho_a}(a)\big)$, поэтому по теореме Коши имеем соотношение

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$$

Обозначим через $\gamma(a)$ окружность $\{\, z \mid |\, z - a| = \rho_a \,\}$. Тогда $\overset{\curvearrowright}{\partial} U = \overset{\curvearrowright}{\partial} G \cup \bigcup_{a \in E} \overset{\curvearrowleft}{\gamma}(a)$, поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int \overset{\curvearrowright}{\partial} G f(z)\,\mathrm{d}\,z + \sum_{a \in E} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma}(a)} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} f(z)\,\mathrm{d}\,z =$$

$$= -\sum_{a \in E} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma}(a)} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{a \in E} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma}(a)} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{a \in E} \operatorname{res}_f a$$

□

Часть II
Теория меры

Все утверждения, приведённые здесь без доказательств, легко проверяются в случае $\mathbb{R}$ при помощи картинок.

Мера в нашем случае всегда будет обозначать меру Лебега.

28. Кольцо и σ-кольцо множеств; промежутки в $\mathbb{R}^m$ и их мера; элементарные множества и их меры

Определение 12. Имеется некоторое непустое множество множеств $\mathscr{R}$. Будем называть его *кольцом*, если

1. $A \in \mathscr{R},\ B \in \mathscr{R} \implies A \cup B \in \mathscr{R}$;
2. $\cdots \implies A \setminus B \in \mathscr{R}$.

В частности, $A \setminus A = \emptyset \in \mathscr{R}$.

Вследствие того, что $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$, $A \cap B \in \mathscr{R}$.

Определение 13. $\mathscr{R}$ называется *σ-кольцом*, если

$$\{\, A_n \,\}_{n=1}^{\infty}, \quad A_n \in \mathscr{R} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$$

Можно проверить, что

$$A_1 \setminus \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) \right) = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$$

$\mathbb{R}^{m \ge 1}, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \qquad a \le b$

Будем обозначать $\langle a, b \rangle$, где $\langle$ — это (или [, а $\rangle$ — это) или].

Рассмотрим $m \ge 2, \quad A \in \mathbb{R}^m, \quad B \in \mathbb{R}^m$. $\langle A, B \rangle$ будем также называть *промежутком* в $\mathbb{R}^m$, где $A = (a_1, \dots, a_m),\ B = (b_1, \dots, b_m), \quad a_j \le b_j$.

Определение 14. *Мерой* промежутка будем называть

$$\mathrm{m}\left(\langle A, B\rangle\right) = \prod_{j=1}^{m}(b_j - a_j)$$

Определение 15. *Элементарным множеством* будем называть конечное объединение промежутков:

$$I = \bigcup_{k=1}^{N} \langle A_k, B_k\rangle$$

Обозначение. $\mathscr{E}$ — множество всех элементарных множеств.

Утверждение 8. $I \subset \mathscr{E}$. Тогда I можно представить в виде объединения промежутков, таких что

$$\langle A_k, B_k\rangle \cap \langle A_l, B_l\rangle = \emptyset \quad \forall k \neq l$$

Определение 16. *Мерой* элементарного множества будем называть

$$\mathrm{m}\, I = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{m}\left(\langle A_k, B_k\rangle\right)$$

Утверждение 9. Определение множества элементарного множества **корректно**, то есть, мера не зависит от способа разбиения.

Определение 17. Промежуток будем называть *открытым*, если все символы $\langle$ и $\rangle$ обозначают (и).

Определение 18. Элементарное множество будем называть *открытым*, если $I = \bigcup(a_k, b_k)$.

Пусть имеется некоторое множество $E \subset \mathbb{R}^m$. Обозначим через $U(E)$ множество следующих открытых элементарных множеств:

$$U(E) = \{\,\{\,A_n\,\}_{n=1}^{\infty}\,\}, \qquad A_n\text{ — открытое элементарное множество,}$$

таких, что $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

29. Внешняя мера $\mathrm{m}^* E$ множества E

Определение 19. *Внешней мерой* множества E называется

$$\mathrm{m}^* E = \inf_{\{\,A_n\,\}_{n=1}^{\infty} \in U(E)} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}\, A_n \qquad \leq +\infty$$

Если ряд расходится, приписываем внешней мере значение ∞.

Понятно, что m^* определена для любого множества. Также очевидно, что $\mathrm{m}^* \emptyset = 0$.

30. Свойства внешней меры

Свойства.

1. $\mathrm{m}^* E \geq 0$;
2. $E_1 \subset E_2 \implies \mathrm{m}^* E_1 \leq \mathrm{m}^* E_2$;
3. $I \in \mathscr{E} \implies \mathrm{m}^* I = \mathrm{m}\, I$;

4.
$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \implies \mathrm{m}^* E \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^* E_n.$$

Доказательство.

1. Очевидно.
2. $U(E_2) \subset U(E_1)$.
3. Очевидно.
4. Будем считать, что $\mathrm{m}^* E_n < \infty \quad \forall n$.
   Выберем $\forall \varepsilon > 0$, $\{ A_{n_k} \}_{k=1}^{\infty}$, $\quad A_{n_k} \in \mathscr{E}$, $\quad \{ A_{n_k} \} \subset U(E_n)$ такие, что
   $$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}\, A_{n_k} < \mathrm{m}^* E_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{32}$$
   Тогда
   $$\{ A_{n_k} \}_{n=1}^{\infty}{}_{k=1}^{\infty} \in U(E)$$
   $$\implies \mathrm{m}^* E \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}\, A_{n_k} \right)$$
   (т. к. внешняя мера — это инфимум)
   Применим теперь (32):
   $$\sum \sum \mathrm{m}\, A_{n_k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{m}^* E_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^* E_n + \varepsilon$$

□

31. Функция $\mathrm{d}(A, B)$ и её свойства

Определим неотрицательное число
$$\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{m}^*(A \triangle B) \geq 0$$
Понятно, что $A \triangle \emptyset = A$, поэтому $\mathrm{d}(A, \emptyset) = \mathrm{m}^* A$.

Свойства.

1. $\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(B, A)$;
2. $\mathrm{d}(A, B) \leq \mathrm{d}(A, C) + \mathrm{d}(C, B)$;
3. $\mathrm{d}(A_1 \cup A_2,\ B_1 \cup B_2) \leq \mathrm{d}(A_1, B_1) + \mathrm{d}(A_2, B_2)$;
4. $\mathrm{d}(A_1 \cap A_2,\ B_1 \cap B_2) \leq \mathrm{d}(A_1, B_1) + \mathrm{d}(A_2, B_2)$;
5. $\mathrm{d}(A_1 \setminus A_2,\ B_1 \setminus B_2) \leq \mathrm{d}(A_1, B_1) + \mathrm{d}(A_2, B_2)$.

Доказательство. Все свойства основаны на теоретико-множественных соображениях. Например, 3 основано на включении
$$A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$$
Далее нужно воспользоваться свойством (**??**) внешней меры. □

Утверждение 10. $|\mathrm{m}^* A - \mathrm{m}^* B| \leq \mathrm{d}(A, B)$

Доказательство. Пусть $\mathrm{m}^* A < \mathrm{m}^* B$. Тогда
$$\mathrm{m}^* B = d(B, \emptyset) \leq \mathrm{d}(B, A) + \mathrm{d}(A, \emptyset) = \mathrm{d}(B, A) + \mathrm{m}^* A$$

$\square$

32. Определение $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_F$

Определение 20. Будем говорить, что множество $A \subset \mathbb{R}^m$ *конечно-измеримо (по Лебегу)*, если

$$\exists \{ A_n \}_{n=1}^{\infty}, \quad A_n \in \mathscr{E}: \quad \mathrm{d}(A_n, A) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Обозначение. $\mathfrak{M}_F$ — множество всех конечно-измеримых множеств.

Понятно, что $\mathscr{E} \subset \mathfrak{M}_F$.

Определение 21. Множество $B \subset \mathbb{R}^m$ будем называть *измеримым (по Лебегу)*, если

$$\exists \{ A_n \}_{n=1}^{\infty}, \quad A_n \in \mathfrak{M}_F: \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Понятно, что $\mathfrak{M}_F \subset \mathfrak{M}$.

Замечание. В множестве $\mathbb{R}^m$ **не все** подмножества измеримы: $2^{R^m} \neq \mathfrak{M}$ (в отличие от внешней меры).

Для $B \in \mathfrak{M}$ будем рассматривать $\mathrm{m}^* B$.

33. $\mathfrak{M}$ — σ-кольцо

Теорема 22. Совокупность всех измеримых множеств является σ-кольцом.
Внешняя мера, определённая на $\mathfrak{M}$ обладает свойством *счётной аддитивности* (σ-*аддитивности*):

$$\{ B_n \}_{n=1}^{\infty}, \quad B_n \in \mathfrak{M}, \quad B_n \cap B_k = \emptyset \quad \Longrightarrow \mathrm{m}^* \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^* B_n$$

Доказывать теорему не будем. Докажем, что $\mathfrak{M}_\mathbf{F}$ является кольцом, и мера на нём аддитивна.

Доказательство ($\mathfrak{M}_F$ — кольцо)**.** Пусть есть $A \in \mathfrak{M}_F$ и $B \in \mathfrak{M}_F$. Тогда

$$\exists A_n \in \mathscr{E}: \quad \mathrm{d}(A_n, A) \to 0$$

$$\exists B_n \in \mathscr{E}: \quad \mathrm{d}(B_n, B) \to 0$$

Тогда, по одному из свойств d,

$$\mathrm{d}(A_n \cup B_n,\ A \cup B) \leq \mathrm{d}(A_n, A) + \mathrm{d}(B_n, B) \to 0$$

$$(A_n \setminus B_n,\ A \setminus B) \leq \mathrm{d}(A_n, A) + \mathrm{d}(B_n, B) \to 0$$

Отсюда $A_n \cup B_n \in \mathscr{E}, \quad A_n \setminus B_n \in \mathscr{E}$.

$$\Longrightarrow A \cup B \in \mathfrak{M}_F, \quad A \setminus B \in \mathfrak{M}_F$$

$\square$

34. m^* счётно-аддитивна на $\mathfrak{M}$

Теорема 23. Совокупность всех измеримых множеств является σ-кольцом.
Внешняя мера, определённая на $\mathfrak{M}$ обладает свойством *счётной аддитивности* (σ-*аддитивности*):

$$\{ B_n \}_{n=1}^{\infty}, \quad B_n \in \mathfrak{M}, \quad B_n \cap B_k = \emptyset \quad \Longrightarrow \mathrm{m}^* \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^* B_n$$

Доказывать теорему не будем. Докажем, что $\mathfrak{M}_\mathbf{F}$ является кольцом, и мера на нём аддитивна.

Утверждение 11. $A, B \in \mathscr{E}$

$$\implies \mathrm{m}(A \cup B) + \mathrm{m}(A \cap B) = \mathrm{m}\, A + \mathrm{m}\, B \tag{33}$$

В частности, при $A \cap B = \emptyset$,

$$\mathrm{m}(A \cup B) = \mathrm{m}\, A + \mathrm{m}\, B$$

Доказательство (аддитивность меры). Пусть $A, B \in \mathfrak{M}_F, \quad A \cap B = \emptyset$. Тогда

$$\exists \{ A_n \}, \{ B_n \} : \quad \mathrm{d}(A_n, A) \to 0, \quad \mathrm{d}(B_n, B) \to 0$$

Отдельно будет доказано, что

Утверждение 12. Если $\mathrm{d}(C_n, C) \to 0$, то $\mathrm{m}^* C_n \to \mathrm{m}^* C$

В соотношении (33) можно поставить внешнюю меру вместо меры:

$$\mathrm{m}^*(A_n \cup B_n) + \mathrm{m}^*(A_n \cap B_n) = \mathrm{m}^* A_n + \mathrm{m}^* B_n$$

Из **??**, $\mathrm{m}^*(A_n \cup B_n) \to \mathrm{m}^*(A \cup B)$.

$$\mathrm{m}^*(A_n \cap B_n) \to \mathrm{m}^*(A \cap B) = 0$$

$$\mathrm{m}^* A_n \to \mathrm{m}^* A, \qquad \mathrm{m}^* B_n \to \mathrm{m}^* B$$

Это всё влечёт, что

$$\mathrm{m}^*(A \cup B) = \mathrm{m}^* A + \mathrm{m}^* B$$

□

Доказательство (утв. 12). $|\,\mathrm{m}^* C_n - \mathrm{m}^* C| \le \mathrm{d}(C_n, C) \to 0$ □

Теперь для $E \in \mathfrak{M}$ будем полагать $\mathrm{m}\, E = \mathrm{m}^* E$. Это *мера Лебега*.

35. Простые функции; аппроксимация простыми функциями

Определение 22. $E \subset \mathbb{R}^m, \quad E \neq \emptyset$. *Характеристической функцией* множества E называется функция $K_E(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$K_e(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Определение 23. *Простой функцией* $f_0 : E \to \mathbb{R}$ будем называть функцию, множество значений которой конечно.

Если $c_1, \dots, c_n$ — все различные значения функции $f_0, \quad E_j = \{ x \in E \mid f_0(x) = c_j \}$, то $E_j \cap E_k = \emptyset$, $\bigcup E_j = E$. Полагая $\chi_{E_j}(x) = K_{E_j}(x)\big|_E$, имеем соотношение

$$f_0(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}(x) \tag{34}$$

Теорема 24. $f : E \to \mathbb{R}$

1. Тогда существует последовательность простых функций, определённых на E таких, что
$$\forall x \in \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$
2. Если множество E измеримо по Лебегу и функция f измерима, то все функции f_n можно выбрать измеримыми.
3. Если $f(x) \ge 0, \quad x \in E$, то можно выбрать функции $f_n(x)$, которые при $\forall x$ монотонно возрастают по n.

Доказательство.

1. Пусть $f(x) \geq 0 \quad \forall x$.
   Положим для $n = 1, 2, \dots, \quad i = 1, \dots, n \cdot 2^n$
   $$E_{n\ i} = \left\{ x \in E \mid \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}$$
   $$E_{n\ 0} = \{ x \in E \mid f(x) \geq n \}$$
   Далее пусть $\chi_{E_{n\ i}}(x) = K_{E_{n\ i}}(x)\big|_E, \qquad i = 0, 1, \dots, n \cdot 2^n$, и пусть
   $$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n\ i}}(x) + n\chi_{E_{n\ 0}}(x) \tag{35}$$
   Тогда для $x \in \bigcup E_{n\ i}$ имеем
   $$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n} \tag{36}$$
   Для $\forall x \in E$ возьмём $N > f(x)$, тогда $\forall n > N$ выполнено (36) и $f_n(x) \to f(x)$.
2. Если f измерима, то множества $E_{n\ i}$ измеримы из (35) следует измеримость f_n.
3. Монотонность f_n также следует из (35).
4. Для произвольной функции f положим $f = f^+ - f^-$ и (35) применим к f^+ и f^-.

□

Замечание. Пусть $E_j \subset E$, не предполагаем условия $E_j \cap E_k = \emptyset, \quad E = \bigcup E_j$, числа c_j не обязательно различны,
$$f_1(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}(x) \tag{37}$$

Тогда f_1 — простая функция, которую можно записать в виде (34) с какими-то множествами E'_l и числами c'_l.

36. Примеры измеримых по Лебегу множеств

Примеры.

1. Любое элементарное множество A измеримо.
2. $\mathbb{R}^m$ измеримо.
3. Открытые множества измеримы.
4. Замкнутые множества измеримы.

Доказательство.

1. По определению.
2. $\mathbb{R}^m = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, где $a_n = (-n, \dots, -n), \ b_n = (n, \dots, n)$.
3. Пусть $\mathbb{Q}^m$ — множество всех точек с рациональными координатами в $\mathbb{R}^m, \quad G \subset \mathbb{R}^m$ открыто, $G \neq \emptyset$.
   Для любой точки $M \in G \cap \mathbb{Q}^m$ обозначим через $I(M)$ максимальный промежуток $\big(a(M), b(M)\big)$ со следующими свойствами:
   - $a(M) = \big(a_1(M), \dots, a_m(M)\big)$;
   - $b(M) = \big(b_1(M), \dots, b_m(M)\big)$;
   - если $M = (M_1, \dots, M_m)$, то $a_j(M) = M_j - \delta(M)$;

- $b_j = M_j + \delta(M)$;
- $\big(a(M), b(M)\big) \subset G$.

Тогда

$$G = \bigcup_{M \in G \cap \mathbb{Q}^m} \big(a(M), b(M)\big)$$

4. Если $F \subset \mathbb{R}^m$ замкнуто, то $F = \mathbb{R}^m \setminus \big(\mathbb{R}^m \setminus F\big)$, множество $\mathbb{R}^m \setminus F$ открыто.

$\square$

37. Измеримые функции; теорема о множествах Лебега

Определение 24. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ измеримо, $E \neq \emptyset$, $\quad f : E \to \mathbb{R} \cup \{\, -\infty, +\infty \,\}, \quad a \in \mathbb{R}$.
Множествами Лебега будем называть множества

$$E_{<a}(f) = \{\, M \in E \mid f(M) < a \,\}, \quad E_{\leq a}(f) = \{\, M \in E \mid f(M) \leq a \,\}$$

$$E_{>a}(f) = \{\, M \in E \mid f(M) > a \,\}, \quad E_{\geq a}(f) = \{\, M \in E \mid f(M) \geq a \,\}$$

Определение 25. Будем говорить, что функция $f : E \to \widehat{\mathbb{R}}, \quad E \subset \mathfrak{M}$ *измерима по Лебегу*, если $\forall a \in \mathbb{R}$ имеем

$$E_{<a}(f), E_{\leq a}(f), E_{>a}(f), E_{\geq a} \in \mathfrak{M}$$

Теорема 25. Для того, чтобы при $\forall a \in \mathbb{R}$ были измеримы множества Лебега, **необходимо и достаточно**, чтобы при $\forall a \in \mathbb{R}$ было измеримо какое-то из них.

Доказательство. Имеем следующие соотношения:

$$E_{\geq a} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in E \mid f(x) > a - \frac{1}{n} \right\}, \qquad E_{<a} = E \setminus E_{\geq a}$$

$$E_{\leq a} = \bigcap_{x \in E \mid f(x) < a + \frac{1}{n}}, \qquad E_{>a} = E \setminus E_{\leq a}$$

Поскольку $\mathfrak{M}$ — кольцо, $E \in \mathfrak{M}$,

$$E_{>a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a \implies E_{\geq a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a$$

$$E_{\geq a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a \implies E_{<a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a$$

$$E_{<a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a \implies E_{\leq a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a$$

$$E_{\leq a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a \implies E_{>a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a$$

$\square$

38. Измеримость $|f|$

Свойство. f измерима $\implies$ $|f|$ измерима.

Доказательство. $E_{<a}(|f|) = E_{<a}(f) \cap E_{>-a}(f)$. $\square$

39. Измеримость $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)$, $\sup\limits_n f_n(x)$

Свойство. Пусть f_n измерима на E. Тогда

$$g_+(x) := \sup_{n\geq 1} f_n(x), \quad h_+(x) := \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

измеримы.

Доказательство. Имеем соотношение

$$E_{>a}(g_+) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{>a}(f_n)$$

Положим $g_m(s_{n\geq m} f_n(x)$, тогда g_m измеримы и $h(x) = \inf_m g_m(x)$. □

40. Измеримость $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $\inf\limits_n f_n(x)$

Свойство. Пусть f_n измерима на E. Тогда

$$g_-(x) := \inf_{n\geq 1} f_n(x), \quad h_-(x) := \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

измеримы.

Доказательство. Имеем соотношение

$$E_{<a}(g_-) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{<a}(f_n)$$

Положим $g_m(x) = \inf\limits_{n\geq m} f_n(x)$, тогда g_m измеримы и $h(x) = \sup\limits_m g_m(x)$. □

41. Измеримость f^+, f^-

Свойство. Положим $f^+(x) = \max\{ f(x), 0 \}$, $\quad f^-(x) = -\min\{ f(x), 0 \}$.
Тогда f^+, f^- измеримы.

Доказательство. Пусть f, g измеримы.
Положим $f_{2n-1}(x) = f(x)$, $\quad f_{2n}(x) = g(x)$, тогда

$$\sup_{n\geq 1} f_n(x) = \max\{ f(x), g(x) \}, \quad \int_{n\geq 1} f_n(x) = \min\{ f(x), g(x) \}$$

То есть, $\max\{ f(x), g(x) \}$ и $\min\{ (x), g(x) \}$ измеримы.
Если $c \in \mathbb{R}$, $\quad f$ измерима, то и cf измерима:

- если $c > 0$, то $E_{>ca}(cf) = E_{>a}(f)$;
- если $c < 0$, то $E_{>ca}(cf) = E_{<a}(f)$;
- если $c = 0$, то $0 \cdot f \equiv f$.

□

42. Измеримость $\lim f_n(x)$

Свойство. Пусть $f_n(x)$ измеримы $\forall n$ и $\forall x \in E \quad \exists f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}$.
Тогда f измерима.

Доказательство. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$, утверждение следует из ??. $\square$

43. Измеримость $f_n + g_n,\ \ f_n g_n$

Свойство. Пусть $F(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2), \quad f(x), g(x)$ измеримы.
Тогда $h(x) \coloneqq F\big(f(x), g(x)\big)$ измерима.

Доказательство. Пусть $G_a = \{\, (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid F(u, v) > a \,\}$.
Тогда $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2) \implies G_a$ открыто в $\mathbb{R}^2$.
Пусть $G_a \neq \emptyset$. Тогда можно представить $G_a = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$, где $a_n = (u_n^-, v_n^-),\ b_n = (u_n^+, v_n^+)$.
Теперь

$$\{\, x \in E \mid u_n^- < f(x) < u_n^+ \,\} = E_{>u_n^-}(f) \cap E_{<u_n^+}(f), \quad \{\, x \in E \mid v_n^- < g(x) < v_n^+ \,\} = E_{>v_n}(g) \cap E_{<v_n^+}(g),$$

поэтому

$$\begin{aligned}\{\, x \in E \mid \big(f(x), g(x)\big) \in (a_n, b_n) \,\} &= \{\, x \in E \mid u_n^- < f(x) < u_n^+ \,\} \cap \{\, x \in E \mid v_n^- < g(x) < v_n^+ \,\} = \\ &= E_{>u_n^-}(f) \cap E_{<u_n^+}(f) \cap E_{>v_n^-}(g) \cap E_{<v_n^+}(g)\end{aligned}$$

$$E_{>a}(h) = \{\, x \in E \mid \big(f(x), g(x)\big) \in G_a \,\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\, x \in E \mid \big(f(x), g(x)\big) \in (a_n, b_n) \,\}$$

Это доказывает свойство. $\square$

В частности, $F_1(u, v) = u + v \in (\mathbb{R}^2)$ и $F_2(u, v) = uv \in (\mathbb{R}^2)$.

44. Определение $I_E(f)$ и его свойства

Определение 26. Пусть E, E_j измеримы, $\quad E = \bigcup E_j, \quad c_{j_0} = 0$, если $\mathrm{m}\, E_{j_0} = +\infty$. Положим

$$I_E\Big(\sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}\Big) \coloneqq \sum_{j=1}^{n} c_j \,\mathrm{m}\, E_j \tag{38}$$

В этой формуле считаем, что $0 \cdot +\infty = 0$.

Свойства. f_1 — простая функция, записанная в виде (37).

1. $a \le f_1(x) \le b, \quad \mathrm{m}\, E < +\infty$
$$\implies a \,\mathrm{m}\, E \le I_E(f_1) \le b \,\mathrm{m}\, E$$
2. Если $f_1(x) \le g_1(x), \quad x \in E$, то $I_E(f_1) \le I_E(g_1)$.
3. Если $c \in \mathbb{R}$, то $I_E(cf_1) = cI_E(f_1)$.
4. Если $\mathrm{m}\, E = 0$, то $I_E(f_1) = 0$.
5. $F_1 \cap F_2 = \emptyset, \quad F_1 \cup F_2 = E$
$$I_{F_1}(f_1) + I_{F_2}(f_1) = I_E(f_1) \tag{39}$$

Доказательство (5). Пусть $f_1(x) = \sum c_j \chi_{E_j}$, пусть $E_j' = E_j \cap F_1, \quad E_j'' = F_j \cap F_2$.
Тогда $\mathrm{m}\, E_j' + \mathrm{m}\, E_j'' = \mathrm{m}\, E_j$,

$$I_{F_1}(f_1) = \sum c_j \,\mathrm{m}\, E_j', \qquad I_{F_2}(f_1) = \sum c_j \,\mathrm{m}\, E_j'', \qquad I_E(f) = \sum c_j \,\mathrm{m}\, E_j$$

Отсюда следует свойство (39). $\square$

45. Определение интеграла Лебега для $f(x) \geq 0$

Определение 27. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримо, $E \neq \emptyset$, $f : E \to \mathbb{R} \cup \{ +\infty \}$, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in E$, f измерима.

Через $\mathtt{B}(f)$ обозначим множество всех простых функций $f_0 : E \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

- $f_0(x) \geq 0$;
- f_0 измерима;
- $f_0(x) \leq f(x) \quad \forall x \in E$.

Интегралом Лебега назовём следующую величину

$$\int\limits_E f \, \mathrm{d}\, \mathrm{m} := \sup \{ I_E(f_0) \mid f_0 \in \mathtt{B}(f) \} \tag{40}$$

Определение 28. Если $\int\limits_E f \, \mathrm{d}\, \mathrm{m} < +\infty$, то функцию f называют *суммируемой* на множестве E.

Обозначение. $f \in \mathscr{L}(E)$

46. Определение интеграла Лебега для функции любого знака

Определение 29. Если $f : E \to \mathbb{R} \cup \{ -\infty, +\infty \}$ может принимать значения разных знаков, считаем $f = f^+ - f^-$ и называем f *суммируемой*, если $f^+ \in \mathscr{L}(E)$ и $f^- \in \mathscr{L}(E)$. Тогда полагаем

$$\int\limits_E f \, \mathrm{d}\, \mathrm{m} := \int\limits_E f^+ \, \mathrm{d}\, \mathrm{m} - \int\limits_E f^- \, \mathrm{d}\, \mathrm{m} \tag{41}$$

47. Счётная аддитивность функции $\int\limits_A f \, \mathrm{d}\, \mathrm{m}$: характеристическая функция, простая функция f

Теорема 26. $f \in \mathscr{L}(E)$, $A \in \mathfrak{M}$, $A \subset E$, $\varphi(A) = \int\limits_A f \, \mathrm{d}\, \mathrm{m}$.

Тогда φ счётно-аддитивна на $\mathfrak{M}$, суженном на E.

Доказательство. Требуется установить равенство

$$\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n), \qquad \text{если } A_n \subset E, \quad A_n \cap A_k = \emptyset \tag{42}$$

1. Пусть $f(x) = \chi_F(x)$, $F \subset E$, тогда

$$\varphi(A) = \int \chi_F(x) \, \mathrm{d}\, \mathrm{m} = I_E(\chi_{F \cap A}) = \mathrm{m}(F \cap A)$$

$$\varphi(A_n) = I_E(\chi_{F \cap A_n}) = \mathrm{m}(F \cap A_n)$$

   В силу счётной аддитивности меры Лебега имеем $\mathrm{m}(F \cap A) = \sum \mathrm{m}(F \cap A_n)$, откуда следует (42).

2. $f(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{F_j}(x)$.

$$\varphi(A) = \int\limits_A \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{F_j} \, \mathrm{d}\, \mathrm{m} = I_A\big(\sum c_j \chi_{F_j}\big) = \sum c_j \, \mathrm{m}(F_j \cap A)$$

$$\varphi(A_n) = I_{A_n}\left(\sum c_j \chi_{F_j}\right) = \sum c_j \,\mathrm{m}(F_j \cap A_n)$$

Отсюда следует (42).

□

48. Счётная аддитивность $\int\limits_A f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$: $f(x) \geq 0$

Теорема 27. $f \in \mathscr{L}(E)$, $\quad A \in \mathfrak{M}$, $\quad A \subset E$, $\quad \varphi(A) = \int\limits_A f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$.

Тогда φ счётно-аддитивна на $\mathfrak{M}$, суженном на E.

Доказательство ($0 \leq f(x) \leq +\infty$, $\quad f$ измерима). Пусть $f_0 \in \mathtt{B}(f)$. Тогда, по пункту 2,

$$I_A(f_0) = \int\limits_A f_0 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f_0 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \leq \sum \varphi(A_n)$$

$$\implies \varphi(A) = \sup \{\, I_A(f_0) \mid f_0 \in \mathtt{B}(f) \,\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

Поскольку $f \in \mathscr{L}(E)$, то $\varphi(A) < +\infty$, $\quad \varphi(A_n) < +\infty$.
Возьмём $\forall N$ и зафиксируем $\varepsilon > 0$.
Выберем $f_1, \dots, f_N$ — простые функции, $f_j \in \mathtt{B}(f)$, удовлетворяющие условию

$$I_{A_j}(f_j) > \int\limits_{A_j} d \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} - \frac{\varepsilon}{N}, \quad j = 1, \dots, N$$

Определим функцию $f_0 : E \to \mathbb{R}$:

$$f_0(x) = \begin{cases} f_j(x), & j \geq 2, \quad x \in A, \\ f_1(x), & x \in E \setminus \bigcup_{n=2}^{N} A_n \end{cases}$$

Тогда $f_0 \in \mathtt{B}(f)$, $\quad \bigcup_{n=1}^{N} A_n \subset A$ и по пункту 2

$$\varphi(A) \geq \varphi\Big(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\Big) \geq I_{\bigcup A_n}(f_0) = \sum_{n=1}^{N} I_{A_n}(f_0) = \sum_{n=1}^{N} I_{A_n}(f_n) > \sum\Big(\varphi(A_n) - \frac{\varepsilon}{N}\Big) = \sum \varphi(A_n) - \varepsilon$$

В силу произвольности N и $\varepsilon > 0$

$$\implies \varphi(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

□

49. Счётная аддитивность $\int\limits_A f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$: $f(x) \in \mathscr{L}(E)$

Из (41) следует, что достаточно установить (42) для $f(x) \geq 0$, $\quad x \in E$.

50. Следствие для $f \sim g$

Поскольку из свойства 4 следует, что $\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = 0$, если $\mathrm{m}\, E = 0$, то из теоремы получаем важное следствие.

Следствие. Пусть $f_1, f_2 \in \mathscr{L}(E)$, $\quad \mathrm{m}\{\, x \in E \mid f_1(x) \neq f_2(x) \,\} = 0$. Тогда

$$\int\limits_E f_1 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_E f_2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

Доказательство. Пусть $F = \{\, x \in E \mid f_1(x) \neq f_2(x) \,\}$, тогда

$$\int\limits_E f_1 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E\setminus F} f_1 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} + \int\limits_F f_1 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E\setminus F} f_1 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E\setminus F} f_2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E\setminus F} f_2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} + \int\limits_F f_2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_E f_2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

$\square$

51. $\Big|\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}\Big| \leq \int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$

Теорема 28. Пусть $f \in \mathscr{L}(E)$, тогда $|f| \in \mathscr{L}(E)$ и

$$\Big|\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}\Big| \leq \int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

Доказательство. Пусть $E_+ = \{\, x \in E \mid f(x) \geq 0 \,\}$, $\quad E_- = \{\, x \in E \mid f(x) < 0 \,\}$.
Тогда $\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E_+} + \int\limits_{E_-} = \int\limits_E f^+ \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} - \int\limits_E f^- \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$,

$$\int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E_+} + \int\limits_{E_-} = \int\limits_{E_+} f^+ \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} + \int\limits_{E_-} f^- \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_E f^+ \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} + \int\limits_E f^- \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

$\square$

52. Дальнейшие свойства интеграла Лебега

Свойства.

1. Пусть $\exists\, c < \infty$ такая, что $|f(x)| \leq c$, $\quad x \in E$, $\quad f$ измерима на E и $\mathrm{m}\,E < +\infty$.
   Тогда $f \in \mathscr{L}(E)$.

2. Если f измерима, $\mathrm{m}\,E < \infty$, $\quad a \leq f(x) \leq b$, $\quad x \in E$, то
   $$a\,\mathrm{m}\,E \leq \int_E f \,\mathrm{d}\,m \leq b\,\mathrm{m}\,E$$

3. Если $f, g \in \mathscr{L}(E)$ и $f(x) \leq g(x)$, $\quad x \in E$, то
   $$\int_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \leq \int g \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

4. $f \in \mathrm{L}(E)$, $\quad c \in \mathbb{R}$
   $$\Longrightarrow \begin{cases} cf \in \mathscr{L}(E), \\ \int\limits_E cf \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = c \int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \end{cases}$$

5. Если $\mathrm{m}\,E = 0$, $\quad f$ измерима, то
   $$\lim_E \mathrm{d}\,\mathrm{m} = 0$$

6. Если $f \in \mathscr{L}(E)$, $\quad F \subset E$, $\quad F$ измеримо, то $f \in \mathscr{L}(F)$.

В частности, если $E = E_0 \cup S, \quad E_0 \cap S = 0, \quad \mathrm{m}\, S = 0$, то

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E_0} f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} + \int\limits_S f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E_0} f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m},$$

поскольку $\int\limits_S f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = 0$.

Отсюда следует важное свойство интеграла Лебега:

7. Пусть $f \sim h, \qquad f \in \mathscr{L}(E)$. Тогда
$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_E g \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

8. Пусть $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Тогда $f + g \in \mathscr{L}(E)$ и
$$\int\limits_E (f+g) \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} + \int\limits_E g \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

Доказательство.

1. Следует из того, что $f \in \mathscr{L}(E) \iff |f| \in (E)$ для любой простой функции $s: \; 0 \le s(x) \le |f(x)$ справедливо $s(x) \le c$, поэтому
$$\int\limits_E s \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \le \int\limits_E c \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = c\,\mathrm{m}\,E, \qquad \int |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \le c\,\mathrm{m}\,E$$

2. Аналогично.

3. Без доказательства.

4. Докажем для $f(x) \ge 0, \quad x \in E, \quad c > 0$. Пусть $s \in \mathcal{A}(F)$, т. е. s — простая функция, $\quad 0 \le s(x) \le f(x) \quad \forall x \in E$.
Тогда $cs \in \mathcal{A}(cf)$,
$$\int\limits_E cs \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \sum_{j=1}^n c a_j \,\mathrm{m}\, F_j = c \sum_{j=1}^n a_j \,\mathrm{m}\, F_j = c \int\limits_E s \,\mathrm{d}\,\mathrm{m},$$
если $s(x) = \sum a_j \xi_{F_j}(x), \quad F_j \cap F_k = \emptyset$.
Переходя к супремуму, получаем нужное свойство.

5. Если $F_j \subset E$, то $0 \le \mathrm{m}\, F_j \le \mathrm{m}\, E = 0$, для любой простой функции $s \in \mathcal{A}(|f|)$ имеем $0 \le s(x) \le |f(1)| = 0, \quad s(x) = 0, \quad \int\limits_E s \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = 0$, поэтому $\int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = 0$
$$0 \le \int\limits_E f^+ \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \le \int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = 0, \qquad 0 \le \int\limits_E f^- \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \le \int |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = 0$$
$$\int\limits_E \mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_E f^+ \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} - \int\limits_E f^- \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = 0$$

6. Для $\forall s \in \mathcal{A}(|f|)$ на множестве F положим
$$s_0(x) = \begin{cases} s(x), & x \in F, \\ 0, & x \in E \setminus F \end{cases}$$
$$\int\limits_E s_0 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_F s \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \le \int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$
$$\int\limits_F |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \le \int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}, \qquad |f| \in \mathscr{L}(F)$$

7. Пусть $E_0 = \{\, x \in E \mid f(x) = g(x) \,\}$, $\quad S = E \setminus E_0$. Тогда $\mathrm{m}\, S = 0$,

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E_0} f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}, \qquad \int\limits_E g \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E_0} g \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

□

53. Интеграл Римана и интеграл Лебега

Теорема 29. Пусть функция f интегрируема по Риману на промежутке (a, b).
Тогда она измерима по Лебегу на множестве $E = (a, b)$, суммируема, и справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

Без доказательства. □

54. Теорема Фубини

Теорема 30. Имеется некое множество $E \subset \mathbb{R}^{m+n}$, $\quad m, n \geq 1$, $\quad E \subset \mathfrak{M}_{m+n}$

$$M \in \mathbb{R}^{m+n}, \quad M = (X, Y), \quad X \in \mathbb{R}^m,\ Y \in \mathbb{R}^n$$

Возьмём $\forall X \in \mathbb{R}^m$. Определим множества

$$E(X, \cdot) = \{\, Y \in \mathbb{R}^n \mid (X, Y) \in E \,\}, \qquad E(\cdot, Y) = \{\, X \in \mathbb{R}^m \mid (X, Y) \in E \,\}$$

Тогда

1.
   - Для m-п. в. $X \qquad E(X, \cdot) \in \mathfrak{M}_n$.
   - Для n-п. в. $Y \qquad E(\cdot, Y) \in \mathfrak{M}_m$
2. Пусть μ_k — мера Лебега в $\mathbb{R}^k$. Тогда

$$\mu_{m+n} E = \int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}} \mu_n E(X, \cdot)\,\mathrm{d}\,\mu_m(X) = \int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}} \mu_m E(\cdot, Y)\,\mathrm{d}\,\mu_n(X)$$

3. $f : E \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathbb{R}^m \quad & f_X : E(X, \cdot) \to \mathbb{R} : \quad f_X(Y) = f(X, Y) \\ \forall Y \in \mathbb{R}^n \quad & f_Y : E(\cdot, Y) \to \mathbb{R} : \quad f_Y(X) = f(X, Y) \end{aligned}$$

   Для m-п. в. $X \qquad f_X$ измерима по Y на $E(X, \cdot)$.
   Для n-п. в. $Y \qquad f_Y$ измерима по X на $E(\cdot, Y)$.

4. $f \in \mathscr{L}(E)$. Тогда
   - для m-п. в. $X \qquad f_X \in \mathscr{L}\big(E(X, \cdot)\big)$;
   - для n-п. в. $Y \qquad f_Y \in \mathscr{L}\big(E(\cdot, Y)\big)$;
   - $$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mu_{m+n} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \Big(\int\limits_{E(X,\cdot)} f_X \,\mathrm{d}\,\mu_n \Big) \,\mathrm{d}\,\mu_m(X) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{E(\cdot,Y)} f_Y \,\mathrm{d}\,\mu_m \Big) \,\mathrm{d}\,\mu_n(Y),$$

     или

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mu_{m+n} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \Big(f(X, Y)\,\mathrm{d}\,\mu_n(Y) \Big) \,\mathrm{d}\,\mu_m(X) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{E(\cdot,Y)} f(X, Y)\,\mathrm{d}\,\mu_m(X) \Big) \,\mathrm{d}\,\mu_n(Y)$$

55. Параметризованная поверхность в $\mathbb{R}^m$; измеримые множества на параметризованной поверхности

Определение 30. $D \subset \mathbb{R}^n$ — открыто, связно, $\quad m > n$.
$\mathcal{C}^1$-поверхностью будем называть отображение $F : D \to \mathbb{R}^n$ такое, что $F \in \mathcal{C}^1(D)$, т. е.

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}, \quad f_k \in \mathcal{C}^1(D),$$

F — биекция, $\quad \operatorname{rank} \mathcal{D}F(X) = n \quad \forall X \in D$.

Определение 31. $S = F(D), \quad E \subset S$
Будем говорить, что E *S-измеримо*, если $F^{-1}(E) \subset \mathfrak{M}_n$

56. Определение $\mu_S(E)$ для параметризованной поверхности S

Определение 32. Определим *S-меру*:

$$\mu_S E := \int\limits_{F^{-1}(E)} \sqrt{\det\Big(\big(\mathcal{D}F(X)\big)^T \mathcal{D}F(X)\Big)} \,\mathrm{d}\,\mu_n(X)$$

Определение 33. $F : S \to \mathbb{R}$
Будем говорить, что f *S-измерима*, если $\varphi(X) = f\big(F(X)\big)$ измерима на $F^{-1}(E)$.

57. Кусочно-гладкие поверхности S; мера

Определение 34. *Кусочно-гладкой* поверхностью будем называть $S = \bigcup_{k=1}^N S_k$, где S_k — $\mathcal{C}^1$-поверхность, при этом $S_k \cap S_l = \emptyset$ или $\mu_{S_k}(S_k \cap S_l) = 0$.

Определение 35. $E \subset S$
Будем говорить, что E *S-измеримо*, если $E \cap S_k \quad S_k$ измеримо $\forall k$

$$\mu_S E = \sum_{k=1}^N \mu_{S_k}(E \cap S_k)$$

Определение 36. $f : E \to \mathbb{R}$
Будем говорить, что f *S-измерима*, если $f\big|_{S_k}$ S_k-измерима $\forall k$.

58. $\int\limits_S f \,\mathrm{d}\,\mu_S$

Определение 37. $f \in \mathscr{L}_S(E)$

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mu_S := \int\limits_{F^{-1}(E)} f\big(F(X)\big) \sqrt{\det\Big(\big(\mathcal{D}F(X)\big)^T \mathcal{D}F(X)\Big)} \,\mathrm{d}\,\mu_n(X)$$

Определение 38. $f \in \mathscr{L}_S(E) \iff f\big|_{S_k} \in \mathscr{L}_{S_k}(E \cap S_k)$

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mu_S = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{E \cap S_k} f\big|_{S_k} \,\mathrm{d}\,\mu_{S_k}$$

59. Параметризованная ориентированная поверхность в $\mathbb{R}^3$

Определение 39. $D \subset \mathbb{R}^2$ открыто, связно, $\quad F : D \to \mathbb{R}^3$ — $\mathcal{C}^1$-поверхность в $\mathbb{R}^3$

$S = F(D), \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad X \in D, \quad T_1(X) = \begin{bmatrix} f'_{1\ x_1}(X) \\ f'_{2\ x_2}(X) \\ f'_{3\ x_3}(X) \end{bmatrix}, \quad T_2(X) = \begin{bmatrix} f'_{1\ x_2}(X) \\ f'_{2\ x_2}(X) \\ f'_{3\ x_2}(X) \end{bmatrix}$

Рассмотрим ориентацию $\overset{\curvearrowleft}{S} \quad (T_1(X), T_2(X))$.

$$f \in \mathscr{L}_S(E), \quad E \subset S, \quad i \neq j, \quad i, j \in \{\,1, 2, 3\,\}$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S} \cap E} f(Y) \,\mathrm{d}\, y_i \wedge \mathrm{d}\, y_j := \int\limits_{F^{-1}(E)} f\big(F(X)\big) \begin{vmatrix} f'_{i\ x_1}(X) & f'_{i\ x_2}(X) \\ f'_{j\ x_1}(X) & f'_{j\ x_2}(X) \end{vmatrix} \mathrm{d}\,\mu_2(X)$$

60. Интеграл II рода для параметризованной и кусочно-гладкой ориентированной поверхности в $\mathbb{R}^3$

Определение 40. $\overset{\curvearrowleft}{S} = \bigcup_{k=1}^{N} \overset{\curvearrowleft}{S}_k$ — *ориентированная кусочно-гладкая* поверхность в $\mathbb{R}^3$, $\quad E \subset S$.

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S} \cap E} f(Y) \,\mathrm{d}\, y_i \wedge \mathrm{d}\, y_j := \sum_{k=1}^{N} \int f\big|_{S_k} \,\mathrm{d}\, y_i \wedge \mathrm{d}\, y_j$$

61. Формула Гаусса—Остроградского

Теорема 31. $V \subset \mathbb{R}^3$ ограничено, связно, $\quad \partial V = \bigcup_{k=1}^{N} \overline{S}_k, \quad S_k \cap S_l = \emptyset$

$\overset{\curvearrowleft}{S}_k, \quad y \in S_k \quad \big(T_1(Y), T_2(Y)\big), \quad T_1(Y) \times T_2(Y)$ направлен вне V.

$\varphi \in \mathcal{C}(\overline{V}), \quad i \in \{\,1, 2, 3\,\}, \quad \varphi'_{y_i} \in \mathcal{C}(\overline{V})$

$$\sigma = \Big\{ 1, \quad (i, j, k) \text{ — чётная}, -1, \quad \text{иначе}$$

Тогда

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial}\, V} \varphi(Y) \,\mathrm{d}\, y_i \wedge \mathrm{d}\, y_j \wedge \mathrm{d}\, y_k = \sigma \cdot \int\limits_V \varphi'_{y_i}(Y) \,\mathrm{d}\,\mu_3(Y)$$

В частности, при $\varphi(Y) = y_1$,

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial}\, V} x_1 \,\mathrm{d}\, x_2 \wedge \mathrm{d}\, x_3 = \int\limits_V 1 \,\mathrm{d}\,\mu_3 = \mu_3 V$$

62. Формула Грина

Теорема 32. $D \subset \mathbb{R}^2$ — область, $\quad \partial D, \quad \overset{\curvearrowleft}{\partial} D, \quad f \in \mathcal{C}(\overline{D}), f'_{x_1} \in \mathcal{C}(\overline{D}), \quad M = (x_1, x_2)$. Тогда

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial} D} f(M)\,\mathrm{d}\,x_2 = \int\limits_D f'_{x_1}(M)\,\mathrm{d}\,\mu_2(M)$$

$g \in \mathcal{C}(\overline{D}), \quad g'_{x_2} \in \mathcal{C}(\overline{D})$. Тогда

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial} D} g(M)\,\mathrm{d}\,x_1 = -\int\limits_D g'_{x_2}(M)\,\mathrm{d}\,\mu_2(M)$$

63. Коэффициенты Фурье; формула для частичной суммы ряда Фурье

Определение 41. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}), \quad f(x + 2\pi) = f(x) \quad \forall x, \quad f \in \mathscr{L}([0, 2\pi])$
Функции f сопоставляются *коэффициенты Фурье* и *ряд Фурье*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[0,2\pi]} f\,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Рассмотрим частичную сумму

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(y) \big(\cos ky \cdot \cos kx + \sin ky \cdot \sin kx\big)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m} =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1} \big(\cos ky \cdot \cos kx + \sin ky \cdot \sin kx\big)\Big)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(y - x)\Big)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

Сумму вычислим отдельно:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt, \qquad D_n(2\pi l) = n + \frac{1}{2}$$

Будем считать, что $t \neq \pi n$. Тогда $\sin \frac{t}{2} \neq 0$.

$$\sin \frac{t}{2} D_n(t) = \sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{t}{2} \cdot \cos kt$$

При этом,

$$\sin \frac{t}{2} \cdot \cos kt = \frac{1}{2} \Big(\sin(k + \frac{1}{2})t - \sin(k - \frac{1}{2})t\Big)$$

Тогда

$$\sin \frac{t}{2} D_n(t) = \sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \Big(\sin(k + \frac{1}{2})t - \sin(k - \frac{1}{2})t\Big)$$

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

Пусть $y-x=t$.
Теперь
$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(y)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(y-x)}{\sin\frac{y-x}{2}}\,\mathrm{d\,m}$$

Утверждение 13. $\varphi\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}),\quad \varphi(x)=\varphi(x+2\pi)\quad\forall x,\quad \varphi(x)\in\mathscr{L}([0,2\pi])$
$$\Longrightarrow\ \forall a\in\mathbb{R}\quad \varphi\in\mathscr{L}([a,a+2\pi])$$
$$\int\limits_{[0,2\pi]}\varphi\,\mathrm{d\,m}=\int\limits_{[a,a+2\pi]}\varphi\,\mathrm{d\,m}$$

Применим это утверждение:
$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_x^{x+2\pi}f(y)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(y-x)}{\sin\frac{y-x}{2}}\,\mathrm{d\,m}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}\,t=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d\,m}(t)$$

64. Лемма Римана—Лебега

Лемма 2. $E\subset\mathbb{R},\quad E\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}),\quad \psi$ измерима на $E\quad \varphi\in\mathscr{L}(E)$
$$\Longrightarrow\int\limits_E\cos Ax\psi(x)\,\mathrm{d\,m}\xrightarrow[|A|\to\infty]{}$$
$$\int\limits_E\sin Ax\psi(x)\,\mathrm{d\,m}\xrightarrow[|A|\to\infty]{}$$

65. Признак Дини сходимости ряда Фурье

Теорема 33. $f(x)=f(x+2\pi),\quad f\in\mathscr{L}([0,2\pi]),\quad x\in(-\pi,\pi),\quad \varphi(t)=\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\in\mathscr{L}(-\varepsilon,\varepsilon),\quad 0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$
$$\Longrightarrow S_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(x)$$

Доказательство.
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)\,\mathrm{d\,m}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\Big)\,\mathrm{d\,m}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\Big)\,\mathrm{d\,t}=1\tag{43}$$
□

Отсюда
$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+t)-f(x))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d\,m}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\varepsilon}\dots+\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\dots+\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\dots$$

Рассмотрим первый интеграл:
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\varepsilon}\frac{f(x+t)-f(x)}{\sin\frac{t}{2}}\cdot\sin(n+\frac{1}{2})t\,\mathrm{d\,m}$$
$$|\sin\frac{t}{2}|\ge\frac{2}{\pi}\cdot\frac{|t|}{2}=\frac{|t|}{\pi}\ge\frac{\varepsilon}{\pi}\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{f(x+t)-f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}\in\mathscr{L}(-\pi,-\varepsilon),\quad\in\mathscr{L}(\varepsilon,\pi)$$

Теперь
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\varepsilon}\frac{f(x+t)-f(x)}{\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})t\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$frac12\pi\int_{\varepsilon}^{\pi}\dots\to 0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\Big(f(x+t)-f(x)\Big)\frac{\sin(n+\frac12)t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{f(x+t)-f(x)}{\sin\frac{t}{2}}\cdot\sin(n+\frac{1}{2})t\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\Big(f(x+t)-f(x)\Big)\Big(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}-\frac{2}{t}\Big)\sin(n+\frac{1}{2})t\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

Напомним, что

$$\frac{1}{\sin\tau}\cdot\frac{1}{\tau}=\frac{\tau-\sin\tau}{\tau\cdot\sin\tau}=\frac{-\frac{\tau^3}{\tau}+\dots}{\tau\sin\tau}\in\mathcal{C}\Big([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\Big)$$

$$\implies (43)$$

TODO: Здесь как-то вперемешку.

66. Равенство Парсеваля

Теорема 34. $f^2\in\mathscr{L}([0,2\pi])$

$$\implies\int f^2\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}=2\pi a_0^2+\pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

67. Теорема о единственности ряда Фурье

Теорема 35. f,g измеримы на $\mathbb{R}$, $\quad f(x)=f(x+2\pi),\ g(x)=g(x+2\pi),\quad f,g\in\mathscr{L}(0,2\pi)$

$$a_0(f)=a_0(g),\quad a_n(f)=a_n(g),\quad b_n(f)=b_n(g)\quad\forall n\geq 1$$
$$\implies f\sim g$$

68. Преобразование Фурье; пример

Рассматриваем функции $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$.

Определение 42. $u\in\mathscr{L}(\mathbb{R}),\quad v\in\mathscr{L}(\mathbb{R}),\quad f=u+iv$

Напоминание.

$$\int\limits_{\mathbb{R}}f\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{\mathbb{R}}u\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}+i\int\limits_{\mathbb{R}}v\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

Будем говорить, что f *суммируема* на всей оси, если u и v суммируемы на всей оси.

Определение 43. $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R})$
Её *преобразованием Фурье* называется

$$\widehat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}f(x)e^{-xt}\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}(x)$$

Определение 44. $\varphi\in\mathscr{L}(\mathbb{R})$
Её *обратным преобразованием Фурье* называется

$$\widetilde{\varphi}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}(t)$$

$$\widehat{\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

69. $\widehat{(f')}$; $\widehat{f}'$

Следующие формулы верны для широкого класса функций, который получается, если обосновать все шаги.

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}(x)$$

$$\widehat{f}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (-ix) e^{-itx} \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}(x) = \left(\widehat{-ixf(x)}\right)(t)$$

По лемме Римана—Лебега $\widehat{f}(t) \xrightarrow[|t|\to\infty]{} 0$.

Рассмотрим преобразование Фурье от производной.

$$\widehat{(f')}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-itx} \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-itx} \,\mathrm{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \underbrace{\left(f(x)e^{-itA} - f(-A)e^{itA}\right)}_{0} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-it) f(x) e^{-itx} \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} it \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} \,\mathrm{d}\,x = it\widehat{f}(t)$$

70. Равенство Планшереля

Теорема 36. $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}), \quad |f|^2 \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$

$$\implies |\widehat{f}|^2 \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f|^2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{f}|^2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

71. $\widetilde{\widehat{f}}$

Утверждение 14. $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}), \quad \widehat{f} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}), \quad |f|^2, |\widehat{f}|^2 \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$

Для почти всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо

$$\widetilde{(\widehat{f})}(x) = f(x)$$

Примечание. Требование $f, \widehat{f} \in \mathscr{L}$ избыточно, если более обще определить преобразование Фурье.