

Типы уравнений первого порядка

Содержание

I	Уравнения, разрешённые относительно производной	1
1	Уравнение с разделёнными переменными	1
2	Уравнение с разделяющимися переменными	2
3	Линейное уравнение	2
4	Уравнение Бернулли	3
5	Уравнение Риккати	3
6	Однородное уравнение	5
7	Дробно-линейное уравнение	5
8	Обобщённо-однородное уравнение	6
9	Уравнение в полных дифференциалах	7
10	Поиск интегрирующего множителя	7
II	Уравнения, не разрешённые относительно производной	8
III	Уравнения высокого порядка	10
11	Общий случай	10
12	Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами	11
13	Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами	11
14	Уравнение Эйлера	12
IV	Системы ОДУ	12

Уравнения, разрешённые относительно производной

I. Уравнение с разделёнными переменными

$$\frac{dx}{g(x)} + \frac{dy}{h(y)} = 0$$

$$U(x, y) = \int \frac{dx}{g(x)} + \int \frac{dy}{h(y)} + C$$

II. Уравнение с разделяющимися переменными

$$g_1(x)h_2(y) dx + g_2(x)h_1(y) dy = 0$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \quad \quad \quad \text{!!!} \quad \quad \quad \searrow \\ \frac{g_1(x)}{g_2(x)} dx + \frac{h_1(y)}{h_2(y)} dy = 0 \qquad \begin{cases} g_2(x) = 0 & \iff x \equiv x_1, x_2, \dots \\ h_2(y) = 0 & \iff y \equiv y_1, y_2, \dots \end{cases} \end{array}$$

Это решения (т. к. dx и $g_2(x)$ одновременно обращаются в 0)

III. Линейное уравнение

$$y' + p(x)y = \underbrace{q(x)}_{\text{неоднородность}}, \quad p(x), q(x) \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$$

- Если $q(x) \equiv 0$, то уравнение $y' + p(x)y = 0$ называется линейным однородным (ЛОУ)
- Иначе $y' + p(x)y = q(x)$ – линейным неоднородным (ЛНУ)

$$\underbrace{y_{\text{ОН}}(x, C)}_{\text{общее неоднородное (все реш. ЛНУ)}} = \underbrace{y_{\text{ОО}}(x, C)}_{\text{общее однор. (все реш. ЛОУ)}} + \underbrace{y_{\text{ЧН}}(x, C)}_{\text{частное неоднор. (какое-то решение ЛНУ)}}$$

Алгоритм.

1. Ищем $y_{\text{ОО}}$:

$$y_{\text{ОО}} = C e^{-\int p(x) dx}$$

Примечание. Сюда, при допуске $C = 0$, входит $y \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, “потерянное” при выводе этой формулы

2. Ищем $y_{\text{ЧН}}$:

Будем искать в виде

$$y_{\text{ЧН}} = C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx}$$

Замечание. Эту формулу обязательно надо записать

Подставим это в ЛНУ:

$$\underbrace{C'(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} + C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} \cdot (-p(x))}_{y'_{\text{ЧН}} \text{ как производная произведения}} + \underbrace{p(x) C(x) e^{-\int p(x) dx}}_{y_{\text{ЧН}}} \equiv q(x)$$

Контрольная точка. Второй и третий член **должны** сократиться

$$C'(x) = e^{\int p(x) dx} q(x)$$

$$C(x) = \int e^{\int p(x) dx} q(x) dx + \underset{(C_2)}{0}$$

Подставляем в формулу для $y_{\text{ЧН}}$:

$$y_{\text{ЧН}} = \int e^{\int p(x) dx} q(x) dx \cdot e^{-\int p(x) dx}$$

Замечание. Если $p(x)$ можно проинтегрировать (т. е. $\int p(x) dx = \xi(x) + C_1$), нужно вместо C_1 записать какую-то конкретную константу (читайте: ноль). Мы ведь искали **частное** решение, а не континуум

3. Ищем y_{OH} :

$$y_{\text{OH}} = y_{\text{OO}} + y_{\text{CH}} = Ce^{-\int p(x) dx} + e^{-\int p(x) dx} \cdot \int e^{\int p(x) dx} q(x) dx$$

Замечание. Неберущийся неопределённый интеграл нужно записывать в виде интеграла с переменным верхним пределом, в нижнем пределе которого стоит выбранная числовая константа

$$y_{\text{OH}} = e^{-P(x)} \left(C + \int_{x_0}^x e^{P(s)} q(s) ds \right), \quad P(x) = \int_{x_0}^x p(t) dt$$

Замечание. Не стоит здесь пользоваться готовой формулой. Нужно идти по алгоритму

IV. Уравнение Бернулли

$$y' + p(x)y + r(x)y^\tau = 0, \quad p(x), r(x) \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$$

Замечание.

- При $\tau > 0$ уравнение имеет тривиальное решение $y \equiv 0$, $x \in (a, b)$
- При $\tau = 0, 1$ – это не уравнение Бернулли, а линейное

Стандартная замена:

$$u = y^{1-\tau}, \quad u' = (1-\tau)y^{-\tau}y'$$

Замечание. Здесь прямая замена не нужна – просто делим на y^τ

Получаем уравнение:

$$(1-\tau)^{-1}u' + p(x)u + r(x) = 0$$

V. Уравнение Риккати

$$y' + p(x)y + r(x)y^2 = q(x)$$

Иногда решается:

1. Если известно какое-то частное решение:

Пусть $y = \eta(x)$ – решение уравнения на некотором промежутке, то есть

$$\eta'(x) \equiv q(x) - p(x)\eta(x) - r(x)\eta^2(x), \quad \text{на } \langle a, b \rangle$$

Замена $y = z + \eta(x)$ преобразует наше уравнение в уравнение Бернулли

$$z' - \left(p(x) + 2r(x)\eta(x) \right) z + r(x)\eta^2(x) = 0$$

2. Если $r(x) \neq 0$ на $\langle a, b \rangle$ и $r(x) \in \mathcal{C}^1(\langle a, b \rangle)$:

Уравнение приводится к виду

$$u' + au^2 = s(x), \quad a \neq 0$$

при помощи композиции двух замен:

(a) Линейная замена

$$y = \gamma(x)z, \quad y' = \gamma'z + \gamma z', \quad z = y\gamma^{-1}$$

позволяет сделать коэффициент при квадратичном члене ненулевой константой

(b) Сдвигающая замена

$$z = u + \delta(x), \quad z' = u' + \delta'x', \quad u = z - \delta$$

позволяет аннулировать линейный член, сохраняя коэффициент при z^2 неизменным

3. Если уравнение имеет вид

$$u' = au^2 + cx^\sigma, \quad \sigma \neq 0, -2$$

Оно называется специальным уравнением Риккати

Замечание. При $\sigma = 0$ – это уравнение с разделяющимися переменными, а при $\sigma = -2$ – обобщённо-однородное

В последнем случае замена

$$u = x^{-1}v^{-1}$$

сводит уравнение к уравнению с разделяющимися переменными

$$xv' = -(cv^2 + v - a)$$

Специальное уравнение Риккати интегрируется в квадратурах **тогда и только тогда**, когда

$$k = \frac{\sigma}{2\sigma + 4} \in \mathbb{Z} \quad (k \neq 0), \quad \text{то есть} \quad \sigma = \frac{4k}{1 - 2k} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Алгоритм.

(a) Сделаем замену обеих переменных:

$$\begin{cases} x = t^{1/2-k} = t^{\frac{1}{\sigma+2}}, & t = x^{\frac{2}{1-2k}} > 0 \\ u = z(t)t^{k-1/2} = zt^{-\frac{1}{\sigma+2}}, & z = ux \end{cases}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d(zt^{k-1/2})}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{t^{k-1/2}\dot{z} + (k-1/2)t^{k-3/2}z}{(1/2-k)t^{-1/2-k}} = \frac{t^{2k}}{1/2-k}\dot{z} - t^{2k-1}z$$

Получаем уравнение

$$t\dot{z} + \left(k - \frac{1}{2}\right)z + a_0z^2 = c_0t, \quad a_0 := \left(\frac{1}{2} - k\right)a, \quad c_0 := \left(\frac{1}{2} - k\right)c$$

Это уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными, если коэффициент при линейном члене равен $-1/2$

(b) “Обнуляем” k :

В зависимости от знака k используется одна из замен, сохраняющих структуру уравнения и позволяющих уменьшать $|k|$ на 1:

• $k > 0$:

$$z = a^{-1} + tv_1^{-1}, \quad \dot{z} = v_1^{-1} - tv_1^{-2}\dot{v}_1, \quad v_1 = t(x - a^{-1})^{-1}$$

• $k < 0$:

$$z = t(v_1 + d)^{-1}, \quad \dot{z} = (v_1 + d)^{-1} - t(v_1 + d)^{-2}\dot{v}_1, \quad v_1 = tz^{-1} - d$$

$$d := \left(\frac{1}{2} + k\right)\left(\frac{1}{2} - k\right)^{-1}c^{-1}$$

В результате нескольких таких замен придём к уравнению

$$tv_k + \left(-\frac{1}{2}\right)v_k + a_kv_k^2 = c_kt$$

(с) Завершающая замена

$$v_k = t^{1/2}w, \quad \dot{v}_k = \frac{t^{-1/2}w}{2} - t^{1/2}\dot{w}, \quad w = t^{-1/2}v_k$$

приводит уравнение к уравнению с разделяющимися переменными

$$t^{1/2}\dot{w} = a_k w^2 - c_k$$

VI. Однородное уравнение

Определение 1. $h(x, y)$ называется однородной функцией степени k , если $h(sx, sy) = s^k h(x, y)$

Уравнения

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{и} \quad M(x, y) dx + N(x, y) dy, \quad M, N - \text{однородные порядка } k$$

называются однородными (порядка 0)

То есть, уравнение однородное, если каждое его слагаемое имеет одну и ту же суммарную степень по x и y
Стандартная замена:

$$y(x) = u(x)x, \quad \begin{cases} y' = u'x + u \\ dy = u dx + x du \end{cases}, \quad u = x^{-1}y$$

Контрольная точка. После замены **каждое** слагаемое должно содержать x^k

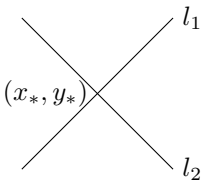
Сокращаем на x^k , группируем слагаемые при dx и dy – получаем уравнение с разделяющимися переменными

VII. Дробно-линейное уравнение

$$y' = \left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} \right)$$

Числитель и знаменатель задают прямые, пусть $l_1 = a_1x + b_1y + c_1$, $l_2 = a_2x + b_2y + c_2$
Возможны два случая:

$$\bullet \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$



Пусть (x_*, y_*) – решение системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

или, что то е самое, точка пересечения прямых l_1 и l_2

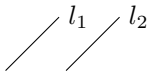
После сдвига начала координат в точку (x_*, y_*) прямые не будут иметь свободных членов

Итак, после замены

$$u = x - x_*, \quad v = y - y_*, \quad du = dx, \quad dv = dy$$

или $y'(x) = v'(u)$ получаем однородное уравнение

$$v' = h\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right)$$



$$\bullet \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Тогда $b_1 \neq 0$ и $\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1} = k$

В этом случае замена

$$u = a_1x + b_1y, \quad y = \frac{1}{b_1}(u - a_1x), \quad y' = \frac{1}{b_1}(u' - a_1)$$

сразу приводит уравнение к уравнению с разделяющимися переменными:

$$u' = b_1 h\left(\frac{u + c_1}{ku + c_2}\right) + a_1$$

VIII. Обобщённо-однородное уравнение

Определение 2. Уравнение называется обобщённо-однородным, если каждое его слагаемое имеет один и тот же суммарный порядок по x и y при условии, что x, dx имеют порядок 1, а y, dy – порядок $m \neq 0$

Тогда $y' = \frac{dy}{dx}$ имеет порядок $m - 1$

Аргументы входящих в уравнение функций типа логарифма или тригонометрических должны иметь нулевой порядок

Таким образом, чтобы установить, является ли уравнение обобщённо-однородным, надо приравнять порядки всех слагаемых, получая систему многих уравнений с одной неизвестной m . Если повезёт, такое число m найдётся. Тогда замена

$$y = z^m, \quad y' = mz^{m-1}z', \quad z = y^{1/m}$$

сведёт уравнение к однородному, но не всегда:

Проблема Проблема возникает, когда y может принимать значения разных знаков (ОДЗ этого не запрещает), и отсутствует инвариантность относительно замены $y = -\tilde{y}$

В таком случае надо отдельно проверить $y(x) \equiv 0$

Дальше возможно три случая:

- Общий:

Замена

$$y = (xu)^m, \quad y' = m(xu)^{m-1}(u + xu'), \quad u = x^{-1}y^{1/m}$$

приведёт к уравнению с разделяющимися переменными (но придётся решить два раза для разных знаков y)

- Если $\exists q \in \mathbb{Z} : m = 2q$

Делаем замену

$$y = x^{2q}u, \quad y' = 2qx^{2q-1}u + x^{2q}u', \quad u = x^{-2q}y$$

Она не фиксирует знак y , так что не придётся решать уравнение второй раз

Также получаем сразу уравнение с разделяющимися переменными

- Если $\exists q \in \mathbb{Z} : m = (2q)^{-1}$, при этом x тоже меняет знак, и отсутствует инвариантность относительно замены $x = -\tilde{x}$

Надо следать замену

$$y = |x|^{\frac{1}{2q}}u, \quad y' = \sigma \frac{dy}{dx} = \sigma \left((2q)^{-1}|x|^{\frac{1}{2q}-1}u + |x|^{\frac{1}{2q}}u' \right), \quad \text{где } u' = \frac{du}{d|x|}, \quad u = |x|^{-\frac{1}{2q}}y$$

где $\sigma = \text{sign } x$

Получается уравнение с разделяющимися переменными и параметром σ

Контрольная точка. В ответе не должно остаться σ (т. е. каждая σ должна “найти” свой $|x|$)

Примечание. $\sigma|x| = x$

IX. Уравнение в полных дифференциалах

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

Определение 3. Уравнение (1) называется уравнением в полных дифференциалах (УПД), если

$$\exists U(x, y) \in C^1(B) : \begin{cases} U'_x = M \\ U'_y = N \end{cases}$$

Если нашлась такая U , то $U(x, y) \equiv C$ – ответ

Утверждение 1. Уравнение (1) является УПД тогда и только тогда, когда

$$M'_y - N'_x \equiv 0 \quad \text{локально} \quad (2)$$

Проверяем (2)

Ищем U :

$$\begin{aligned} U'_x = M &\implies U(x, y) = \int M(x, y) dx + C(y) \\ U'_y = N &\implies \left(\int M(x, y) dx \right)'_y + C'(y) = N(x, y) \end{aligned} \quad (3)$$

$$C(y) = \int N(x, y) dy + \int \left(\int M(x, y) dx \right)'_y dy + 0$$

или

$$\begin{aligned} U'_y = N &\implies U(x, y) = \int N(x, y) dy + C(x) \\ U'_x = M &\implies \left(\int N(x, y) dy \right)'_x + C'(x) = M(x, y) \end{aligned} \quad (4)$$

$$C(y) = \int M(x, y) dx + \int \left(\int N(x, y) dy \right)'_x dx + 0$$

Подставляем $C(y)$ в первое выражение, получаем $U(x, y)$

Контрольная точка. В (3) и (4) не должно остаться x

Замечание. Может оказаться, что $C' \equiv 0$. Тогда можно считать, что $C(y) \equiv 0$ (нужна ведь произвольная константа)

X. Поиск интегрирующего множителя

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

Если это не УПД, то есть $M'_y - N'_x \neq 0$, то можно попытаться найти интегрирующий множитель. Это будет $\mu(x, y) \in C^1(B^0)$, такая что

$$\mu M dx + \mu N dy = 0$$

станет УПД, то есть

$$N\mu'_x - M\mu'_y = (M'_y - N'_x)\mu$$

Это уравнение мат. физики. Его можно попытаться решить:

Пусть μ – функция от ω :

$$\mu(\omega) = \mu(\omega(x, y)), \quad \mu'_x = \frac{d\mu}{d\omega} \omega'_x, \quad \mu'_y = \frac{d\mu}{d\omega} \omega'_y$$

$$\frac{d\mu}{d\omega} = \frac{\overbrace{M'_y - N'_x}^A}{N\omega'_x - N\omega'_y} \cdot \mu(\omega)$$

Нужно подобрать ω так, чтобы A зависело от ω

Если подобрали, то

$$\frac{d\mu}{d\omega} = A(\omega)\mu$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\mu(\omega) = 1 \cdot e^{\int A(\omega) d\omega}$$

Как выбрать ω :

- $\omega = x$

$$A(x) \stackrel{?}{=} \frac{M'_y - N'_x}{N}$$

- $\omega = y$

$$A(y) \stackrel{?}{=} \frac{M'_y - N'_x}{-M}$$

- $\omega = x^\alpha y^\beta$ или $\omega = x^\alpha \pm y^\beta$

Подставляем, например, $\alpha = 1$, и подбираем β так, чтобы привелись подобные

Уравнения, не разрешённые относительно производной

$$F(x, y, y') = 0, \quad D \in \mathcal{C}(W), \quad W \text{ связно}$$

Варианты решения:

1. Свести к

$$y' = f_k(x, y), \quad k = 1, 2, \dots$$

k может быть сколько угодно – конечное число (например, если уравнение содержало y'^2), счётно (например, $\sin y'$) или континуум

Каждое из них решаем как обычно

2. Свести к

- (а) $y = g(x, y')$

Положим $p = y'$, тогда $dy = p dx$. Подставим:

$$y = g(x, p) \tag{5}$$

Берём дифференциалы от левой и правой частей:

$$(g'_x(x, p) - p) dx + g'_p(x, p) dp = 0$$

Как правило, левая часть раскладывается на множители:

$$\chi(x, p) (M(x, p) dx + N(x, p) dp) = 0 \tag{6}$$

где равенство $\chi(x, p) = 0$ задаёт особые решения в неявном виде, а уравнение в симметричной форме $M dx + N dp = 0$ предстоит решить

Совет На этом моменте надо забыть, что $p = y'$ – исходное уравнение мы уже проинтегрировали

Если (6) решается только относительно:

p. Решения будут иметь вид

$$\begin{cases} p = \varphi(x, C) \\ p = \varphi_k(x), \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

где $\varphi_0(x)$ – решение уравнения $\chi(x, p) = 0$, а φ_k – решения, не попавшие в формулу $p = \varphi(x, C)$

Подставим в (5):

$$\begin{cases} y = g\left(x, \varphi(x, C)\right) \\ y = g\left(x, \varphi_k(x)\right) \end{cases}$$

x. Аналогично:

$$\begin{cases} x = \psi(p, C) \\ x = \psi_k(p) \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x = \psi(p, C) \\ y = g(\psi(p, C), p) \end{cases} \\ \begin{cases} x = \psi_k(p) \\ y = g(\psi_k(p), p) \end{cases} \end{cases}$$

Если уравнение можно решить и относительно x , и относительно p , то надо решать относительно p

Решение 3К Если сразу подставить начальные данные x_0, y_0 в формулу общего решения, записанного в параметрическом виде, то придётся решать двумерную систему относительно p и C

Лучше сначала найти значения p , отвечающие выбранным начальным данным. Для этого надо подставить x_0, y_0 в равенство (5) и найти p_1, p_2, \dots – корни полученного уравнения, после чего для всякого m из уравнения $x_0 = \psi(p_m, C)$ найти константы C_m

Контрольная точка. Сожно проверить выполнение равенства:

$$y_0 = g\left(\psi(p_m, C_m), p_m\right)$$

(b) $x = h(y, y')$

Положим $y' = p$, $dx = p^{-1} dy$

Дифференцируем равенство $x = h(y, p)$:

$$\left(h'_y(y, p) - p^{-1}\right) dy + h'_p(y, p) dp = 0$$

!!!

Надо проверить, будет ли функция $y(x) = C$ при каких-либо C решением

3. Если $F(x, y') = 0$ или $F(y, y') = 0$, то ищем $\xi(t), \mu(t)$ такие, что

$$F\left(\xi(t), \mu(t)\right) \stackrel{t}{=} 0$$

Если нашлись, то уравнение можно проинтегрировать в общем виде:

(a) Если $F(y, y') = 0$ и допускает параметризацию аргументов y и $y' = p$ ($dy = p dx$) функциями t :

$$y = \varphi(t), \quad p = \psi(t), \quad F\left(\varphi(t), \psi(t)\right) \equiv 0$$

Интегрируя равенство $y = \varphi(t)$, получаем:

$$\begin{cases} dy = p dx = \psi(t) dx \\ dy = \varphi'(t) dt \end{cases}$$

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C, \quad y = \varphi(t)$$

(b) Если $F(x, y') = 0$ – аналогично

Уравнения высокого порядка

XI. Общий случай

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}), \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Существует 4 способа понизить порядок:

1. Нет первых нескольких производных:

$$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}), \quad 1 \leq k \leq n$$

(если $k = 1$, то нет y)

Замена:

$$z = y^{(k)}, \quad z' = y^{(k+1)}, \quad \dots$$

Порядок понижается на k :

$$f(x, z, z', \dots, z^{(n-k)})$$

$$z = z(x, C_1, \dots, C_{n-k}), \quad y^{(k)} = z(y, C_1, \dots, C_{n-k})$$

2. Нет x :

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

y становится независимой переменной:

$$y'(x) = p(y)$$

Обязательно пишем ОДЗ на замену: $y \stackrel{?}{=} C$

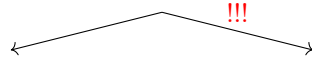
$$y''(x) = \frac{d y'(x)}{d x} = \frac{d p(y)}{d y} \cdot \frac{d y}{d x} = p'(y) \cdot p(y)$$

$$y'''(x) = \dots = \left(p''(y)p(y) + p'^2(y) \right) \cdot p(y)$$

Получаем уравнение на порядок ниже:

$$\tilde{F}(y, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0$$

$$p = p(y, C_1, \dots, C_{n-1}), \quad y' = p(y, C_1, \dots, C_{n-1})$$



$$p^{-1}(y, C_1, \dots, C_{n-1}) dy = dx$$

$$p(y, C_1, \dots, C_{n-1}) = 0$$

3. Однородное относительно $y, y', \dots, y^{(n)}$ порядка k (x не влияет):

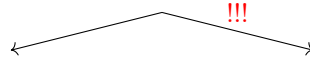
Замена $y' = z(x)y$

$$y'' = z'y + zy' = (z' + z^2)y, \quad y''' = \dots = (z'' + 3zz' + z^3)y$$

$$\tilde{F}(x, z, \dots, z^{(n-1)}) = 0, \quad z = z(x, C_1, \dots, C_{n-1})$$

Получаем ЛОУ:

$$y' = z(x, C_1, \dots, C_{n-1})y$$



$$\ln \frac{y}{C_n} = \int z \, dx$$

$$y = C_n^\sigma, \quad \sigma = 1, -1$$

$$y \equiv 0$$

4. ООУ относительно всех переменных:

Каждое слагаемое имеет суммарный порядок s , если считать, что x имеет порядок 1, y имеет порядок m , y' имеет порядок $m-1$, и т. д.

Замена:

$$x = e^t > 0, \quad y = u(t)e^{mt}$$

Смотрим инвариантность. Если нет, то смотрим на порядок выше — там скорее всего будет Возвратная замена:

$$t = \ln x, \quad u(t) = yx^{-m}$$

$$y' = (\dot{u} + mu)e^{(m-1)t}, \quad y'' = \left(\ddot{u} + (2m-1)\dot{u} + m(m-1)u \right) e^{(m-2)t}$$

$$\tilde{F}^{(n)}(u, \dots) = 0$$

Контрольная точка. Всё делится на e^{st}

Получаем случай 2

XII. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\underbrace{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y}_{L(y)} = 0$$

Его *характеристическое уравнение*:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n \equiv 0$$

Нам нужны n различных вещественных ЛНЗ решений φ_i .

Характеристическое уравнение имеет n корней. Однако, некоторые из них могут совпасть:

1. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$ — пара комплексно-сопряжённых корней. Тогда существует 2 вещественных ЛНЗ решения:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad e^{\alpha x} \sin \beta x$$

2. λ — корень кратности k . Тогда существует k ЛНЗ решений:

$$e^{\lambda x}, \quad x e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad x^{k-1} e^{\lambda x}$$

3. $\{\lambda_i\}$ — различные вещественные ЛНЗ корни. Тогда $\varphi_i = e^{\lambda_i x}$.

Имея n различных ЛНЗ вещественных корней, можем выписать решение ЛОУ:

$$y = C_1 \varphi_1 + \dots + C_n \varphi_n$$

XIII. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$Ly = q(x)$$

Метод вариации

$\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — фундаментальная система решений ЛОУ. Будем искать решение ЛНУ в виде

$$y_{\text{чн}} = y_{\text{оо}} + \psi(x), \quad \psi(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + \dots + C_n(x)\varphi_n(x)$$

Находим $C_i(x)$ из системы

$$\begin{cases} C_1'\varphi_1 + \dots + C_n'\varphi_n = 0 \\ C_1\varphi_1' + \dots + C_n\varphi_n' = 0 \\ \dots \\ C_1'\varphi_1^{(n-2)} + \dots + C_n'\varphi_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'\varphi_1^{(n-1)} + \dots + C_n'\varphi_n^{(n-1)} \equiv q(x) \end{cases}$$

Метод неопределённых коэффициентов

Можно применить, если

$$q(x) = e^{\alpha x} (P_k(x) \cos \beta x + Q_l(x) \sin \beta x)$$

Находим *характеристическое число* $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, $m = \max\{k, l\}$, s — кратность λ_0 как корня характеристического уравнения. Частное решение будет иметь вид

$$\psi(x) = x^s e^{\alpha x} (\tilde{P}_m(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_m(x) \sin \beta x)$$

При этом, неоднородность делим на части, к некоторым применяем метод неопределённых коэффициентов, к оставшемуся — вариацию.

XIV. Уравнение Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = q(x)$$

Делаем замену $x = e^t > 0$, $y(x) = y(t)$.

$$y' = \dot{y} e^{-t}, \quad y'' = (\ddot{y} - \dot{y}) e^{-2t}$$

Если x может принимать отрицательные значения, действуем по-другому:

1. Если $q(x)$ — чётная функция, то можно сделать ту же замену, но в ответе вместо x написать $|x|$.
2. Если $q(x)$ — нечётная функция, то введём обозначение: $x = \sigma|x|$. Тогда замена $|x| = e^t$, $t = \ln|x|$ приведёт уравнение к такому же, но с параметром σ .

Контрольная точка. В ответе σ не останется, так как она умножится на $|x|$.

3. Иначе придётся сделать дополнительную замену $x = -e^t$.

Системы ОДУ

TODO: Системы