# Оглавление

# Глава 1

# Численное дифференцирование

**Определение 1.** Задача называется *корректной*, если её решение существует, единственно и непрерывно по исходным данным.

$$f^{(m)}(x) \simeq P_n^{(m)}(x)$$

## 1.1. Формулы численного дифференцирования

### 1.1.1. Правая разностная производная

Функция $f$ задана в точках $a$ и $a+h$.

$$f'(a) \simeq P_1'(a) = f(a, a+h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

### 1.1.2. Левая разностная производная

Функция $f$ задана в точках $a-h$ и $a$.

$$f'(a) \simeq P_1'(a) = \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$$

### 1.1.3. Центральная разностная производная

$$f'(a) \simeq f(a-h, a) + hf(a-h, a, a+h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

### 1.1.4. Точка в начале таблицы

Известны значения функции $f$ в точках $a, a+h$ и $a+2h$.

$$f'(a) \simeq \frac{-3f(a) + 4f(a+h) - f(a+2h)}{2h}$$

### 1.1.5. Точка в конце таблицы

Известны значения в точках $a-2h, a-h$ и $a$.

$$f'(a) = \frac{3f(a) - 4f(a-h) + f(a-2h)}{2h}$$

## 1.2. Метод неопределённых коэффициентов построения формул численного дифференцирования

Известны значения в точках $x-h, x$ и $x+h$.

Запишем разложение в ряд Тейлора:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1}h + \cdots$$

$$f(x-h) = f(x) - \frac{f'(x)}{1}h + \cdots$$

$$f(x) = f(x)$$

Домножим всё на $\alpha, \beta, \gamma$ и сложим:

$$\alpha f(x+h) + \beta f(x-h) + \gamma f(x) = (\alpha + \beta + \gamma) f(x) + h(\alpha - \beta) f'(x) + \cdots$$

Подберём $\alpha, \beta, \gamma$ так чтобы получалось значение второй производной и остаток:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{h^2}, \quad \gamma = -\frac{2}{h^2}$$

Получаем

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(x) + \cdots$$