Оглавление

0.1. Аналитичность суперпозиции аналитических функций

Теорема 1. $E, G \subset \mathbb{C}$ — области, $\quad f \in A(E), \quad f(z) \in G \quad \forall z \in E, \quad \varphi \in A(G)$
$F : E \to \mathbb{C}, \quad F(z) \coloneqq \varphi\big(f(z)\big)$
Тогда $F \in A(E)$.

Доказательство. По определению $f \in \mathcal{C}^1\Big(E\Big), \quad \varphi \in \mathcal{C}^1\Big(G\Big)$.
Поэтому, по теореме о матрице Якоби, выполнено соотношение

$$F(z) = \varphi\big(f(z)\big) \in \mathcal{C}^1\Big(E\Big)$$

Фиксируем $\forall z \in E$.
Пусть $\sigma \in \mathbb{C}, \quad \sigma \neq 0, \quad z + \sigma \in E$.
Пусть $w \coloneqq f(z), \quad w \in G$.
Будем использовать теорему об эквивалентных определениях аналитических функций.
Пусть $\lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \neq 0, \quad w + \lambda \in G$.
Из условия следует соотношение

$$\varphi(w + \lambda) - \varphi(w) = \varphi'(w)\lambda + r(\lambda), \qquad \frac{|r(\lambda)|}{|\lambda|} \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0$$

Положим $r(\lambda) \eqqcolon \lambda\delta(\lambda)$. Тогда $\delta(\lambda) \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0$.
Положим $\delta(0) \coloneqq 0$. Тогда можно не рассматривать ограничение $\lambda \neq 0$ при следующей записи:

$$\varphi(w + \lambda) - \varphi(w) = \varphi'(w)\lambda + \lambda\delta(\lambda)$$

(в этих формулах мы пользовались соотношением $\varphi'_w(w) = \varphi'(w)$).
Положим $\lambda \coloneqq f(z + \sigma) - f(z)$. Тогда $f(z + \sigma) = f(z) + \lambda = w + \lambda$

$$F(z + \sigma) - F(z) = \varphi\big(f(z + \sigma)\big) - \varphi\big(f(z)\big) = \varphi(w + \lambda) - \varphi(w) = \varphi'(w)\lambda + \lambda\delta(\lambda) =$$
$$= \varphi'(w)\lambda + \Big(f(z + \sigma) - f(z)\Big)\delta\Big(f(z + \sigma) - f(z)\Big)$$

$$\lambda = f(z + \sigma) - f(z) = f'(z)\sigma + \rho(\sigma), \qquad \frac{|\rho(\sigma)|}{|\sigma|}$$

Получаем:

$$F(z + \sigma) - F(z) = \varphi'(w)\Big(f'(z)\sigma + \rho(\sigma)\Big) + \Big(f(z + \sigma) - f(z)\Big)\delta\Big(f(z + \sigma) - f(z)\Big) =$$
$$= \varphi'(2)f'(z)\sigma + \underbrace{\varphi'(w)\rho(\sigma) + \Big(f(z + \sigma) - f(z)\Big)\delta\Big(f(z + \sigma) - f(z)\Big)}_{R(\sigma)}$$

$$\frac{R(\sigma)}{\sigma} = \varphi'(w)\frac{\rho(\sigma)}{\sigma} + \frac{f(z+\sigma)-f(z)}{\sigma}\delta\Big(f(z+\sigma)-f(z)\Big) \xrightarrow[\sigma\to 0]{} \varphi'(w)\cdot 0 + f'(z)\cdot 0 = 0$$

Значит, $F \in A(E)$. □

Следствие. Из последних двух выражений и теоремы о равносильных определениях аналитичности получаем равенство

$$F'(z) = \Big(\varphi\big(f(z)\big)\Big)' = \varphi'\big(f(z)\big)\cdot f'(z) \tag{1}$$

Доказананная теорема, вместе со следствием, позволяют расширить список примеров аналитических функций:

0.1.1. Дальнейшие примеры аналитических функций

Примеры.

1. Если $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$, то $e^{P(z)} \in A(\mathbb{C})$
2. Пусть $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\quad \alpha \in \mathbb{C}$, $\quad \alpha \neq 0$
   Уже проверено, что

   $$\ln z \in A(D) \implies \alpha \ln z \in A(D) \implies e^{\alpha \ln z} \in A(D)$$

   Далее полагаем при $z \in D \quad z^\alpha := e^{\alpha \ln z}$.

   Рассмотрим случай $\alpha = 1$.

   $$\ln z \overset{\text{def}}{=} \ln|z| + i\varphi$$

   $$e^{\ln z} = e^{\ln|z| + i\varphi} \overset{\text{def}}{=} e^{\ln|z|}\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z$$

   Полагая $\ln z = f(z)$, $\quad e^w = \varphi(w)$, из (1) находим

   $$(e^{\ln z})' = (e^w)'\cdot(\ln z)'$$

   Пусть $w = u + iv$

   $$(e^w)' = (e^w)'_u = (e^u\cos v + ie^u \sin v)'_u = e^u \cos v + ie^u\sin v = e^w$$

   Если $w = \ln z$, то

   $$(e^w)' = e^w = e^{\ln z} = z$$
   $$\implies (e^{\ln z})' = z(\ln z)'$$

   Но $e^{\ln z} = z$

   $$\implies (e^{\ln z})' = z' = z'_x = (x+iy)'_x = 1$$

   Поэтому

   $$z(\ln z)' = 1, \qquad (\ln z)' = \frac{1}{z}, \qquad z \in D \tag{2}$$

   Находим при $\alpha \neq 0, 1$, $\quad z \in D$:

   $$\begin{aligned}(z^\alpha)' = (e^{\alpha \ln z})' = (e^w)'_{w=\alpha\ln z}\cdot(\alpha \ln z)' = e^{\alpha \ln z}\cdot(\alpha\ln z)'_x = \alpha e^{\alpha\ln z}\cdot(\ln z)'_x = \alpha e^{\alpha \ln z}\cdot(\ln z)' = \\ = \alpha e^{\alpha\ln z}\cdot\frac{1}{z} = \alpha e^{\alpha \ln z}\cdot e^{-\ln z} = \alpha\cdot e^{(\alpha-1)\ln z} = \alpha z^{\alpha-1}\end{aligned} \tag{3}$$

   Здесь использовалась формула $\dfrac{1}{e^w} = e^{-w}$. Действительно, если $w = u + iv$, то

   $$\begin{aligned}\frac{1}{e^w} = \frac{1}{e^u(\cos v + i\sin v)} = e^{-u}\cdot\frac{1}{\cos v + i \sin v} = e^{-u}\cdot\frac{\cos v - i\sin v}{\cos^2 v + \sin^2 v} = \\ = e^{-u}\big(\cos(-v) + i\sin(-v)\big) = e^{-u-iv} = e^{-w}\end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть дан степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_\circ)^n \tag{4}$$

$R > 0$ — его радиус сходимости, $\quad \mathtt{B}$ — круг сходимости, $\quad z \in \mathtt{B}$.
Тогда $f \in A(\mathtt{B})$.
Существует комплексная производная $f'(z)$:

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z - z_\circ)^{n-1} \tag{5}$$

Доказательство.

- Рассмотрим сначала случай, когда $z_\circ = 0$.

  Поскольку $|z| < R, \quad \exists\, r : \quad |r| + r < R$. Зафиксируем z и r.
  Так как $|z| + r < R$,

  $$\sum_{n=0}^{\infty} |c|(|z| + r)^n < \infty \tag{6}$$

  и $\overline{\mathtt{B}}_r(z) \subset \mathtt{B}$, то есть

  $$\forall w \in \mathbb{C} : |w| \le r \quad z + w \in \mathtt{B} \quad \implies f(z+w) \text{ абс. сходится}$$

  Докажем, что при $w \to 0$ дробь $\frac{f(z+w) - f(z)}{w}$ стремится к правой части (5) с $z_\circ = 0$, то есть к сумме $A \coloneqq \sum n c_n z^{n-1}$.
  Для этого надо показать, что при $w \to 0$ бесконечно мала разность

  $$\Delta w \coloneqq \frac{f(z+w) - f(z)}{w} - A = \frac{1}{w} \sum c_n \big((z+w)^n - z^n\big) - A = \sum c_n \left(\frac{(z+w)^n - z^n}{w} - n z^{n-1} \right)$$

  В полученном ряде слагаемы, соответсвующие $n = 0, 1$, нулевые. Поэтому

  $$|\Delta w| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left(\frac{(z+w)^n - z^n}{w} - n z^{n-1} \right) \right| \le \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \cdot \left| \underbrace{\frac{(z+w)^n - z^n}{w} - n z^{n-1}}_{\rho_n(w)} \right|$$

  Теперь надо оценить разности $\rho_n(w)$ при $n \ge 2$. Воспользуемся биномом Ньютона:

  $$\rho_n(w) = \frac{1}{w} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{n-k} w^k - z^n \right) - n z^{n-1} = \frac{1}{w} \sum_{k=1}^{n} C_n^k z^{n-k} w^k - n z^{n-1} = \frac{1}{w} \sum_{k=2}^{n} C_n^k z^{n-k} w^k$$

  Поскольку $|w| \le r$, отсюда следует нужная нам оценка:

  $$|rho_n(w)| = \left| w \sum_{k=2}^{n} C_n^k z^{n-k} w^{k-2} \right| \le |w| \sum_{k=2}^{n} C_n^k |z|^{n-k} |w|^{k-2} \le |w| \sum_{k=2}^{n} C_n^k |z|^{n-k} r^{k-2} \le \frac{|w|}{r^2} (|z| + r)^n$$

  Таким образом,

  $$|\Delta w| \le \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |\rho_n(w)| \le \frac{|w|}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot (|z| + r)^n$$

  Благодаря неравенству (6), отсюда вытекает, что $\Delta w \xrightarrow[w \to 0]{} 0$.

- Пусть теперь $z_\circ \ne 0$.

  Положим $\widetilde{z} \coloneqq z - \widetilde{z}_\circ$.

  $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \widetilde{z}^n =\!=\colon \widetilde{f}(\widetilde{z}), \qquad f(z+w) = \widetilde{(}\widetilde{z} + w)$$

Ряд $\widetilde{f}(\widetilde{z})$ — это первый случай. Продиффиренцируем его:

$$\frac{f(z+w)-f(z)}{w} = \frac{\widetilde{f}(\widetilde{z}+w)-\widetilde{f}(\widetilde{z})}{w} \xrightarrow[w\to 0]{} \widetilde{f}'(\widetilde{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n\widetilde{z}^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1}$$

$\square$