Оглавление

Глава 1

Пространства

1.1. Экскурс в теорию меры

Определение 1. T — множество, $\mathcal{R}$ — семейство подмножеств T.
$\mathcal{R}$ будем называть *полукольцом*, если

1. $\emptyset \in \mathcal{R}$;
2. $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cap B \in \mathcal{R}$;
3. $A, B \in \mathcal{R}, \quad B \subset A \implies \exists \{ e_j \}_{j=1}^n : \quad e_i \cap e_j = \emptyset,\ e_j \in \mathcal{R},\ A \setminus B = \bigcup j = 1^n e_j$.

Определение 2. $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ — *мера* на полукольце, если

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. если $\{ e_j \}_{j=1}^\infty, \quad e_j \in \mathcal{R}, \quad e_j \cap e_i = \emptyset, \quad e = \bigcup_{j=1}^\infty, \quad e \in \mathcal{R}$, то $\mu e = \sum_{j=1}^\infty \mu e_j$.

Пример. $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{R} = \left\{ e = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j) \;\middle|\; a_j < b_j \right\}, \quad \mu e = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$$

Определение 3 (стандартное распространение меры с полукольца на σ-алгебру)**.** $E \subset T$
Определим *внешнюю меру*:

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty \mu e_j \;\middle|\; E \subset \bigcup_{j=1}^\infty e_j, \quad e_j \in \mathcal{R} \right\}$$

$\mathcal{U}$ — σ-алгебра *измеримых множеств*.

Теорема 1. $(T, \mathcal{U}, \mu)$ — пространство с мерой, μ — стандартное распространение с $\mathcal{R}$, $p \le p < +\infty$.
Тогда $\{ \chi_e \}_{e \in \mathcal{R}}$ — полное семейство в $\mathrm{L}^p(T, \mu)$.

Доказательство. Пусть $E \in \mathcal{U}, \quad \mu E < +\infty$. Приблизим χ_E линейными комбинациями $\{ \chi_{e_j} \}_{e_j \in \mathcal{R}}$.

$$\mu E = \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty \mu e_j \;\middle|\; E \subset \bigcup_{j=1}^\infty e_j, \quad e_j \cap e_i = \emptyset, \quad e_j \in \mathcal{R} \right\}$$

Возьмём $\varepsilon > 0$. По определению inf,

$$\exists \{ e_j \}_{j=1}^\infty : \quad e_j \in \mathcal{R},\ e_j \cap e_i = \emptyset, \quad \mu E \le \sum_{j=1}^\infty \mu e_j < \mu E + \varepsilon$$

Обозначим $A = \bigcup e_j$.
Так как ряд сходится, можно отбросить его начало так, чтобы

$$\exists n \in \mathbb{N}: \quad \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu e_j < \varepsilon$$

Обозначим $B = \bigcup_{j=1}^{n} e_j$.

$$\chi_B = \sum_{j=1}^{n} \chi_{e_j} \in \mathscr{L}\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{R}}$$

При этом, $\mu(A \setminus B) < \varepsilon, \quad \mu(A \setminus E) < \varepsilon$.

$$\|\chi_E - \chi_B\|_p \overset{\triangle}{\le} \|\chi_A - \chi_E\|_p + \|\chi_A - \chi_B\|_p = \Big(\int\limits_{A \setminus E} \mathrm{d}\,\mu \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int\limits_{A \setminus B} \mathrm{d}\,\mu \Big)^{\frac{1}{p}} < 2\varepsilon^{\frac{1}{p}} \implies \chi_E \in \overline{\mathscr{L}\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{R}}}$$

Уже доказано, что

$$\overline{\mathscr{L}\{\chi_E\}_{E \in \mathcal{U},\ \mu E < +\infty}}^{\|\cdot\|_p} = \mathrm{L}^p(T, \mu)$$
$$\implies \overline{\mathscr{L}\{\chi_e\}_{e \in \mathscr{R}}}^{\|\cdot\|_p} = \mathrm{L}^p$$

□

Следствие. μ — стандартное распространение с $\mathcal{R}$ на $\mathcal{U}$, $\quad 1 \le p < +\infty$.
Если $\mathcal{R}$ счётно, то $\mathrm{L}^p(T, \mathcal{U}, \mu)$ сепарабельно.

Следствие. $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по мере Лебега λ, $\quad 1 \le p < +\infty$.
Тогда $L^p(E, \lambda)$ сепарабельно.

Доказательство. $\mathcal{R} = \Big\{ e = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j) \Big\}$ — полукольцо ячеек. Рассмотрим

$$\mathcal{R}_0 = \left\{ \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j) \;\middle|\; a_j, b_j \in \mathbb{Q} \right\}$$

Понятно, что $\mathcal{R}_0$ счётно.
Пусть $e \in \mathcal{R}$

$$e = \prod_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j), \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}, \quad a_j < b_j$$

Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$\exists e_0 \in \mathcal{R}_0: \quad e \subset e_0, \quad \lambda(e_0 \setminus e) < \varepsilon$$
$$\implies \|\chi_{e_0} - \chi_e\|_p = \Big(\int\limits_{e_0 \setminus e} \mathrm{d}\,\lambda \Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$
$$\implies \overline{\mathscr{L}\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{R}}} \ni \{\chi_e\}_{e \in \mathcal{R}} \implies \overline{\mathscr{L}\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{R}_0}}^{\|\cdot\|_p} = \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$$
$$\mathrm{L}^p(E, \lambda) \subset \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$$
$$\implies \mathrm{L}^p(E, \lambda) \text{ сепарабельно}$$

□

Определение 4. (T, ρ) — метрическое пространство, $\quad (T, \mathcal{U}, \mu)$ — пространство с мерой.
Будем говорить, что μ — *борелевская мера*, если все открытые множества измеримы.

Замечание. Все непрерывные функции измеримы.

Доказательство. $f : T \to \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{C}(T), \quad f$ непрерывна. Возьмём $c \in \mathbb{R}$.

$$\{ x \in T \mid f(x) \in (c, +\infty) \} = f^{-1}(c, +\infty)$$

f непрерывна $\implies f^{-1}(c, +\infty)$ открыто в $T \implies$ измеримо по $\mu \implies f$ измеримы. □

Определение 5. μ — борелевская мера.
Будем говорить, что μ *регулярна*, если

$$\forall e \in \mathcal{U} \quad \mu(e) = \inf_{\substack{G \text{ открыто} \\ e \subset G}} \mu G = \sup_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \subset e}} \mu F$$

Замечание. Мера Лебега в $\mathbb{R}^n$ регулярна.

1.1.1. Плотность непрерывных функций в $\mathrm{L}^p(T, \mu)$ для регулярных мер

Теорема 2. $(T, \rho), \ (T, \mathcal{U}, \mu), \quad \mu$ — регулярная, $\quad 1 \le p < +\infty$.
Тогда $\mathcal{C}(T) \cap \mathrm{L}^p(T, \mu)$ плотно в L^p.

Доказательство. Пусть $e \in \mathcal{U}$ — измеримо, $\mu e < +\infty$. Приблизим χ_e непрерывными (по $\|\cdot\|_p$). Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$\mu \text{ регулярна} \implies \exists \text{ замкн. } F, \text{ откр. } G : \quad F \subset e \subset G, \quad \mu(G \setminus E) < \varepsilon$$

$$\varphi(x) := \frac{\rho(x, T \setminus G)}{\rho(x, T \setminus G) + \rho(x, F}$$

Проверим непрерывность:
Пусть $\rho(x, F) = 0 \implies x \in F, \ x \notin T \setminus G \implies \rho(x, T \setminus G) \ne 0$.

$$\implies \rho \in \mathcal{C}(T)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in T \setminus G \\ 1, & x \in F \end{cases} \qquad \forall x \in T \implies 0 \le \varphi(x) \le 1$$

$$|\varphi(x) - \chi_e(x)| = \begin{cases} 0, & x \in T \setminus G \\ 0, & x \in F \end{cases}$$

$$|\chi_e(x) - \varphi(x)| \le 1 \quad \forall x$$

$$\|\chi_e - \varphi\|_p = \Big(\int\limits_T |\chi_e - \varphi|^p \,\mathrm{d}\,\mu \Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\int\limits_{G \setminus F} |\chi_e - \varphi|^p \,\mathrm{d}\,\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\int\limits_{G \setminus F} \mathrm{d}\,\mu \Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\mu(G \setminus F) \Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\overline{\mathscr{L}\{ \chi_e \}_{\in \mathcal{U}, \ \mu e < +\infty}}^{\|\cdot\|_p} = \mathrm{L}^p(T, \mu) \implies \overline{\mathcal{C}(T) \cap \mathrm{L}^p}^{\|\cdot\|_p} = \mathrm{L}^p$$

□

Следствие. $K \subset \mathbb{R}^n, \quad K$ — компакт, $\quad \lambda$ — мера Лебега, $\quad 1 \le p < +\infty$

$$\implies \overline{\mathcal{C}(K)}^{\|\cdot\|_p} = \mathrm{L}^p(K, \lambda)$$

1.2. Компакты в метрических пространствах

Утверждение 1. (K, ρ) — метрический компакт.

$$\iff \forall \{ x_n \}_{n=1}^{\infty} : x_n \in K \quad \exists \{ x_{n_j} \} : \quad \exists \lim_{j \to \infty} x_{n_j} \in K$$

(*секвенциальная компактность*)

Утверждение 2. (K,ρ) — метрический компакт $\implies$ K ограничено и замкнуто.

Замечание. Для $K \subset \mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) верно и обратное. В общем случае — нет.

Пример.

$$l^2 = \left\{ x = \{ x_j \}_{j=1}^{\infty} \;\middle|\; \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2 < +\infty \right\}$$

$$\mathtt{D}_1(\mathbb{O}_n) = \{ x \in l^2 \mid \|x\|_2 \le 1 \}$$

Покажем, что $\mathtt{D}_1$ не компакт.

$$e_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathtt{D}_1(\mathbb{O}_n)$$

$$\|e_i - e_j\|_2 = \sqrt{2}$$

$$\forall \{ e_{n_k} \} \text{ не фундаментальна } \implies \nexists \lim \{ e_{n_k} \}$$

Определение 6. (A,ρ), $\quad A \subset X$.
A *относительно компактно*, если $\overline{A}$ компактно.

$$\iff \forall \{ x_n \}_{n=1}^{\infty}, \ x_n \in A \quad \exists \{ x_{n_j} \}_{j=1}^{\infty} \quad \exists \lim_{j\to\infty} x_{n_j} \in X$$

Определение 7. (X,ρ), $\quad A \subset X$, $\quad \varepsilon > 0$, $\quad F \subset X$.
Будем говорить, что F — *ε-сеть* для множества A, если

$$\forall a \in A \quad \exists b \in F: \quad \rho(a,b) < \varepsilon$$

$$\iff A \subset \bigcup_{b \in F} \mathtt{B}_\varepsilon(b)$$

Определение 8. $A \subset X$.
A называется *вполне ограниченным*, если $\forall \varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть для A.