

Оглавление

1	Линейные пространства	2
1.1	Гильбертовы и предгильбертовы пространства	2
1.1.1	Критерий принадлежности множеству ортогональных проекторов	2
1.2	Ряды Фурье	4
1.2.1	Неравенство Бесселя	4
1.2.2	Разложение в ряд Фурье элемента из замыкания линейной оболочки ОНС	5

Глава 1

Линейные пространства

1.1. Гильбертовы и предгильбертовы пространства

1.1.1. Критерий принадлежности множеству ортогональных проекторов

Теорема 1. H — гильбертово

1. $M \subset H$ — замкнутое подпространство, $P := P_M$ — ортогональный проектор на M

Тогда

- (a) $P \in \mathcal{B}(H)$;
- (b) $P^2 = P$;
- (c) *самосопряжённость*: $(Px, y) = (x, Py)$.

2. P удовлетворяет свойствам (a), (b), (c), $M := P(H)$

Тогда $P = P_M$, т. е. P — ортогональный проектор на $P(H)$.

Доказательство.

1. $M \subset H$, $x \in H$

$$\exists! y, z; \quad x = y + z, \quad y \in M, \quad z \in M^\perp \\ Px = y$$

- (a) Проверим линейность

Возьмём $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\alpha x = \alpha y + \alpha z, \quad \alpha y \in M, \quad \alpha z \in M^\perp$$

Значит, разложение единственно.

$$\implies P(\alpha x) = \alpha y = \alpha P(x)$$

Возьмём $w \in H$

$$\exists! u \in M, v \in M^\perp : \quad w = u + v$$

$$\implies x + w = (y + z) + (u + v) = (y + u) + (z + v), \quad (y + u) \in M, \quad (z + v) \in M^\perp$$

Разложение единственно.

$$\implies P(x + w) = y + u = Px + Pw$$

Возьмём $x \in H$, $x = y + z$, $y \in M$, $z \in M^\perp$

$$\|x\|^2 = (y + z, y + z) = \|y\|^2 + \|z\|^2 \xrightarrow{y=Px} \|Px\|^2 \leq \|x\|^2 \implies \|Px\| \leq \|x\| \quad \forall x \in H$$

$$P \in \mathcal{B}(H), \quad \|P\| \leq 1$$

$$M \neq \{0\} \implies \exists x \neq 0 \in M : \quad \|P\| = \sup_{u \neq 0 \in H} \frac{\|Pu\|}{\|u\|} \geq \frac{\|Px\|}{\|x\|} = 1 \implies \|P\| = 1$$

(b) $P^2 = P$

$$x \in M \implies Px = x, \quad x \in H \implies Px \in M \implies P(Px) = Px \implies P^2 = P$$

(c) Самосопряжённость

$$x, y \in H, \quad P = P_M, \quad H = M \oplus M^\perp$$

Обозначим $Q = P_{M^\perp}$.

$$x = Px + Qx$$

$$(Px, y) = (Px, Py + Qy) \stackrel{Px \perp Qy}{=} (Px, Py)$$

$$(x, Py) = (Px + Qx, Py) = (Px, Py)$$

2. $M := P(H)$

(a) Проверим, что если $x \in M$, то $Px = x$.

$$x \in M \implies \exists y \in H : \quad Py = x \implies Px = P(Py) = P^2y = Py = x$$

(b) Проверим, что M замкнуто.

Возьмём $\{x_n \in M\}_{n=1}^\infty$, $\lim x_n = x$. В силу непрерывности P

$$\lim Px_n = Px$$

При этом,

$$Px_n = x_n \implies \lim x_n = Px \implies Px = x \implies x \in P(H)$$

P_M — ортогональный проектор на $M \implies$ если $x \in M$, то $Px = P_Mx = x$

Возьмём $y \in M^\perp$, $P_My = 0$.

$$\|Py\|^2 = (Py, Py) = (y, P(Py)) = (y, Py) \stackrel{\substack{y \in M^\perp \\ Py \in M}}{=} 0 \implies Py = 0$$

Возьмём $x \in H$.

$$x = y + z, \quad y \in M^\perp, \quad z = P_Mx \implies Px = P_Mx$$

□

Следствие (ортогональный проектор на конечномерное пространство). H — гильбертово, $M \subset H$ — подпространство, $\dim M = n$, $\{e_j\}_{j=1}^n$ — ОНБ

$$P_Mx = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j \quad \forall x \in H$$

Доказательство.

$$S_n := \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j \implies S_n \in M$$

$$x = S_n + (x - S_n)$$

Возьмём $w = (x - S_n)$. Проверим, что $w \in M^\perp$.

$$(S_n, e_j) = (x, e_j) \implies (w, e_j) = (x, e_j) - (x, e_j) = 0 \implies w \perp e_j \implies w \in M^\perp$$

□

Следствие (критерий полноты семейства элементов гильбертова пространства).

H — гильбертово, $\{x_\alpha \in H\}_{\alpha \in A}$ — семейство

$\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — полное **тогда и только тогда**, когда

$$x \in H, \quad x \perp x_\alpha \quad \forall \alpha \in A \implies x = 0$$

Доказательство. Пусть $L = \overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}}$ — замыкание линейной оболочки.

$$\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ — полное} \iff L = H \iff L^\perp = \{0\} \iff \left(x \in H \perp x_\alpha \quad \forall \alpha \in A \implies x = 0\right) \quad \square$$

Утверждение 1. l^2 , $L = \{x = \{x_n \in l^2\}_{n=1}^\infty \mid \sum_{n=1}^\infty x_n = 0\}$

$$\overline{L} = l^2$$

Доказательство. Упражнение \square

Утверждение 2. $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, $x_z = \{1, z, z^2, \dots\} = \{z^n\}_{n=0}^\infty \in l^2$

$$\{z_m\}_{m=1}^\infty, \quad |z_m| = 1, \quad \lim z_m = 0$$

Тогда $\{x_{z_m}\}_{m=1}^\infty$ — полное в l^2 .

Доказательство. Упражнение \square

Утверждение 3. $\lim z_m = a$, $|a| < 1$

$$\{x_{z_m}\}_{m=1}^\infty \text{ — полна}$$

Доказательство. Упражнение \square

1.2. Ряды Фурье

Определение 1. H — гильбертово, $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ — ОНС (ортонормированное семейство), т. е.

$$(e_n, e_m) = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$x \in H, \quad L = \{ce_n\}_{c \in \mathbb{C}}, \quad \dim L = 1 \implies Px = (x, e_n)e_n$$

Числа (x, e_n) будем называть абстрактными коэффициентами Фурье по системе $\{e_n\}_{n=1}^\infty$.

Замечание. Сходимость — это отдельная тема. Пока будем говорить, что мы каждому x сопоставили ряд Фурье:

$$x \sim \sum_{n=1}^\infty (x, e_n)e_n$$

Определение 2. $\{e_n\}$ — ОС (ортогональная система), $\|e_n\| > 0$

$$L = \{ce_n\}_{c \in \mathbb{C}}, \quad \widetilde{e}_n = \frac{e_n}{\|e_n\|}, \quad P_L x = (x, \widetilde{e}_n) \widetilde{e}_n = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} e_n$$

$$x \sim \sum_{k=1}^\infty c_k e_k, \quad c_n = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} \text{ — коэффициенты Фурье по ОС } \{e_n\}_{n=1}^\infty$$

1.2.1. Неравенство Бесселя

Следствие (из предыдущих следствий). $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ — ОНС в H , $x \in H$

$$\sum_{n=1}^\infty |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2$$

Доказательство. Возьмём $\alpha_j \in \mathbb{C}$. Запишем теорему Пифагора:

$$\left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right\|^2 = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right) \stackrel{e_j \perp e_k}{=} \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2$$

Пусть $L_n = \mathcal{L} \{ e_j \}_{j=1}^\infty$

$$\begin{aligned} P_{L_n} x &= \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j \implies \|P_{L_n} x\|^2 = \sum_{j=1}^n |(x, e_j)|^2, \quad \|P_{L_n}\| \leq 1 \\ \implies \sum_{j=1}^n |(x, e_j)|^2 &\leq \|x\|^2 \quad \forall n \implies \sum_{j=1}^\infty |(x, e_j)|^2 \leq \|x\|^2 \end{aligned}$$

□

1.2.2. Разложение в ряд Фурье элемента из замыкания линейной оболочки ОНС

Теорема 2. H — гильбертово, $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ — ОНС

Следующие условия равносильны:

1. $x \in L \{ e_n \}_{n=1}^\infty$;
2. $x = \sum_{n=1}^\infty (x, e_n) e_n$;
3. равенство Парсеваля: $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |(x, e_n)|^2$.

Доказательство.

- $1 \implies 2$

Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$\exists y \in \mathcal{L} \{ e_n \} : \|x - y\| < \varepsilon$$

$$y = \sum_{j=1}^m \alpha_j e_j$$

$$L_n = \mathcal{L} \{ e_j \}_{j=1}^n \implies y \in L_m$$

$$P_{L_m} x = \sum_{j=1}^m (x, e_j) e_j =: S_m$$

$$\|x - S_m\| = \min_{h \in L_m} \|x - h\| \leq \|x - y\| < \varepsilon$$

$$L_{m+1} \supset L_m \implies \rho(x, L_{m+1}) \leq \rho(x, L_m) = \|x - S_m\| < \varepsilon$$

$$\|x - S_{m+1}\| \leq \|x - S_m\| \implies \|x - S_n\| < \varepsilon \quad \forall n, m \implies \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = x$$

- $2 \implies 1$ — очевидно

$$x = \lim S_m \implies x \in \overline{\mathcal{L} \{ e_j \}}$$

- $2 \implies 3$

$$x = \lim S_n, \quad S_n = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j$$

$$(x, x) = \lim (S_n, S_n)$$

$$\|S_n\|^2 = (S_n, S_n) = \sum_{j=1}^n |(x, e_j)|^2 =: \sigma_n$$

$$\|x\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$$

• 3 \Rightarrow 2

$$x = S_n + (x - S_n), \quad w := x - S_n, \quad w \perp S_n$$

$$\Rightarrow \|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|x - S_n\|^2$$

$$\|S_n\|^2 = \sigma_n, \quad \lim \|S_n\|^2 = \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \lim \|x - S_n\|^2 = 0 \Rightarrow \lim S_n = x$$

□

Следствие. H — гильбертово, $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ — полная ОНС

$$\forall x \in H \quad x = \sum_{n=1}^\infty (x, e_n) e_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |(x, e_n)|^2$$

Определение 3. X — нормированное

$\{e_n\}_{n=1}^\infty$ — базис в X , если

$$\forall x \in X \quad \exists! \{\alpha_j \in \mathbb{C}\} : \quad x = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j e_j$$

Примеры.

1. $1 \leq p \leq +\infty, \quad e_n = (0, \dots, 0, \underset{n}{1}, 0, \dots, 0)$

$$x \in l^p, \quad x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, \quad \|x\|_p^p = \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p$$

$$x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n, \quad \|x - S_n\|_p = \left(\sum_{j=n+1}^\infty |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$