

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Линейные пространства</b>	<b>2</b>
1.1	Линейные операторы в нормированных пространствах . . . . .	2
1.1.1	Эквивалентность непрерывности и ограниченности линейного оператора . . . . .	3
1.1.2	Вычисление нормы непрерывного оператора . . . . .	4

# Глава 1

## Линейные пространства

**Определение 1.**  $X$  — линейное пространство над полем  $K$ ,  $B \subset X$ .  
 $B$  называется *выпуклым*, если

$$\forall x, y \in B \quad \forall t \in [0, 1] \quad tx + (1 - t)y \in B$$

**Теорема 1.**  $X, Y$  — линейные пространства,  $A \in \mathcal{L}in(X, Y)$ .

1.  $L \subset X$  — подпространство  $\implies A(L)$  — подпространство  $Y$ ;
2.  $M \subset Y$  — подпространство  $\implies A^{-1}(M)$  — подпространство  $X$ ;  
(прообраз)
3.  $B \subset X$  — выпуклое  $\implies A(B)$  — выпуклое в  $Y$ ;
4.  $C \subset Y$  — выпуклое  $\implies A^{-1}(C)$  — выпуклое в  $X$ ;  
(прообраз)
5.  $A$  — биекция  $\implies \exists A^{-1} \in \mathcal{L}in(Y, X)$ .

**Примечание.** Не надо думать, что  $A$  — биекция (кроме последнего).

**Без доказательства.** Было в алгебре. □

**Определение 2.**  $A \in \mathcal{L}in(X, Y)$ ,  $X, Y$  линейны над  $K$ .

Определим *ядро оператора*:

$$\text{Ker } A = \{ x \in X \mid Ax = 0 \}$$

и *образ оператора*:

$$\text{Im } A = A(X) = \{ y \in Y \mid \exists x \in X : y = Ax \}$$

**Следствие.**  $A \in \mathcal{L}in(X, Y) \implies \text{Ker } A$  — подпространство  $X$ ,  $\text{Im } A$  — подпространство  $Y$ .

**Определение 3.**  $X, Y, Z$  линейны,  $X \xrightarrow{A} Y \xrightarrow{B} Z$ .

$C = B \cdot A$  называется *произведением операторов*, если  $C(x) = B(A(x))$ .

**Утверждение 1.** Если  $A, B$  линейны, то  $A \cdot B$  линейен.

### 1.1. Линейные операторы в нормированных пространствах

**Определение 4.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \mathcal{L}in(X, Y)$ .

$A$  *ограничен*, если

$$\forall \text{ ограниченного } B \subset X \quad A(B) \text{ ограничено}$$

### 1.1.1. Эквивалентность непрерывности и ограниченности линейного оператора

**Теорема 2.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), A \in \mathcal{L}in(X, Y)$ .

Следующие условия равносильны (FCE):

1.  $A$  непрерывен в  $\mathbb{O}_n$ ;
2.  $A$  непрерывен на  $X$ ;
3.  $\exists c > 0 : \|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X \quad \forall x \in X$ ;
4.  $A$  ограничен;
5.  $\exists r > 0 : A(\mathbb{B}_r(\mathbb{O}_n))$  ограничено.

**Доказательство.**

- $1 \implies 2$

В силу линейности  $A(\mathbb{O}_n) = \mathbb{O}_n$ .

$A$  непрерывен в  $\mathbb{O}_n \implies \exists \delta > 0 : \forall \|x\| < \delta \quad \|Ax\| < \varepsilon$ .

Зафиксируем  $x_0 \in X$ , обозначим  $y_0 = Ax_0$ .

$$\|x - x_0\| < \delta \xrightarrow[\text{непр. в } \mathbb{O}_n]{\implies} \|A(x - x_0)\| < \varepsilon \iff \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon \iff \text{непр. в } x_0$$

- $2 \implies 1$  — очевидно.
- $1 \implies 3$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \|x\| \leq \delta \quad \|Ax\| < \varepsilon$$

Возьмём  $z \in X, z \neq \mathbb{O}_n$ .

$$\left\| \frac{z}{\|z\|} \right\| = 1$$

$$\begin{aligned} x = \delta \cdot \frac{z}{\|z\|} \implies \|x\| = \delta \implies \|Ax\| < \varepsilon \implies \left\| A\left(\delta \cdot \frac{z}{\|z\|}\right) \right\| < \varepsilon \iff \\ \iff \frac{\delta}{\|z\|} \cdot \|Az\| < \varepsilon \iff \|Az\| < \frac{\varepsilon}{\delta} \|z\| \end{aligned}$$

- $3 \implies 4$

Возьмём  $B \subset X$  — ограниченное, т. е.

$$\exists R > 0 : \forall x \in B \quad \|x\| \leq R \implies \|Ax\| \underset{3)}{\leq} c\|x\| \leq cR \implies A(B) \text{ ограничено}$$

- $4 \implies 5$

$$\mathbb{B}_r(\mathbb{O}_n) \text{ ограничено} \xrightarrow[\text{очевидно}]{\implies} A(\mathbb{B}_r(\mathbb{O}_n))$$

- $5 \implies 1$

$$\exists R > 0 : A(\mathbb{B}_r(\mathbb{O}_n)) \subset \mathbb{B}_R(\mathbb{O}_n)$$

т. е.  $\|x\| < r \implies \|Ax\| < R$ .

Пусть  $\|Ax\| < \varepsilon$ . Найдём  $\delta : \|x\| < \delta$ .

$$\delta = \varepsilon \cdot \frac{r}{R}$$

Пусть  $\|x\| < \delta$

$$\Rightarrow \|x\| < \varepsilon \cdot rR \Rightarrow \left\| x \cdot \frac{R}{\varepsilon} \right\| < r \Rightarrow \left\| A \left( x \cdot \frac{R}{\varepsilon} \right) \right\| < R \Rightarrow \|Ax\| \cdot \frac{R}{\varepsilon} < R \Leftrightarrow \|Ax\| < \varepsilon$$

□

**Определение 5.**  $\mathcal{B}(X, Y)$  — множество всех ограниченных линейных операторов из  $X$  в  $Y$  ( $\Leftrightarrow$  множество всех непрерывных).

**Замечание.**  $\mathcal{B}(X, Y)$  — подпространство  $\mathcal{L}in(X, Y)$ .

**Определение 6.**  $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ .

Введём норму на  $\mathcal{B}$ :

$$\|A\| = \inf \{ c > 0 \mid \|Ax\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in X \}$$

(по свойству 3 она конечна).

**Утверждение 2.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$

1.  $A \in \mathcal{B}(X, Y) \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X;$

2.  $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(X, Y)}$  удовлетворяет аксиомам нормы.

**Доказательство.**

1. Зафиксируем  $x \in X$ , возьмём  $c > \|A\|$ .

$$\Rightarrow \|Ax\| \leq c\|x\| \Rightarrow \|Ax\| \leq \int \{ c > 0 \mid c > \|A\| \} \|x\| \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

2.  $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ .

(a)  $\lambda \in K, \quad x \in X$ .

$$\|(\lambda A)x\| = \|\lambda \cdot (Ax)\| = |\lambda| \cdot \|Ax\| \leq |\lambda| \cdot \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \|\lambda A\| \leq |\lambda| \cdot \|A\|$$

Пусть  $\lambda \neq 0$ .

$$\left\| \frac{1}{\lambda}(\lambda A) \right\| \leq \left| \frac{1}{\lambda} \right| \cdot \|\lambda A\|$$

$$\Rightarrow \|A\| \cdot |\lambda| \leq \|\lambda A\|$$

(b) Неравенство треугольника

Пусть  $x \in X$

$$\|(A+B)x\| = \|Ax+Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| = (\|A\| + \|B\|)\|x\| \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

(c)  $\|A\| = 0$

$$\Rightarrow \forall x \in X \quad \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| = 0$$

□

### 1.1.2. Вычисление нормы непрерывного оператора

**Теорема 3.**  $A \in \mathcal{B}(X, Y)$

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

**Доказательство.** Обозначим  $a = \sup_{\|x\| \leq 1}$ ,  $b = \sup_{\|x\| < 1}$ ,  $c = \sup_{\|x\|=1}$ ,  $d = \sup_{x \neq 0}$ .

Очевидно, что  $a \leq b$ ,  $d \geq c$ .

Докажем, что

$$\|A\| \geq a \geq b \geq \|A\|, \quad \|A\| \geq d \geq c \geq \|A\|$$

1. Пусть  $x : \|x\| \leq 1$ .

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \implies a \leq \|A\|$$

2. Пусть  $z \in X \neq 0$ ,  $\varepsilon > 0$ . Рассмотрим

$$x = \frac{z}{\|z\| \cdot (1 + \varepsilon)} \implies \|x\| < 1 \implies \|Ax\| \leq b$$

$$\implies \left\| A \left( \frac{z}{\|z\| (1 + \varepsilon)} \right) \right\| \leq b \iff \|Az\| \leq (1 + \varepsilon)b \cdot \|z\| \quad \forall z \implies \|A\| \leq (1 + \varepsilon)b \quad \forall \varepsilon > 0 \implies \|A\| \leq b$$

3. Пусть  $x \in X \neq 0$

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \implies \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| \implies \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\| \implies d \leq \|A\|$$

4. Пусть  $z \in X \neq 0$

$$\left\| \frac{z}{\|z\|} \right\| = 1 \implies \left\| A \left( \frac{z}{\|z\|} \right) \right\| \leq c \implies \|Az\| \leq c\|z\| \implies \|A\| \leq c$$

□

### Примеры.

1.  $X = \mathcal{C}[a, b]$ ,  $h(x) \in \mathcal{C}[a, b]$   $M_h(f) = h(x) \cdot f(x)$  — мультипликатор.

Проверим, что

$$M_h \in \mathcal{B}(\mathcal{C}[a, b]), \quad \|M_h\|_{\mathcal{B}(\mathcal{C}[a, b])} = \|h\|_\infty$$

$$x \in [a, b] \implies (M_h(f))(x) = h(x)f(x) \implies \|h \cdot f\|_\infty \leq \max_{[a, b]} |h(x)| \cdot \max_{[a, b]} |f(x)| = \|h\|_\infty \cdot \|f\|_\infty$$

$$\forall f \in \mathcal{C}[a, b] \quad \|M_h(f)\|_\infty \leq \|h\|_\infty \|f\|_\infty \implies \forall M_h \in \mathcal{B}(\mathcal{C}[a, b]) \quad \|M_h\|_{\mathcal{B}(\mathcal{C}[a, b])} \leq \|h\|_\infty$$

$$f(x) = \chi_{[a, b]}(x) \in \mathcal{C}[a, b], \quad \|\chi_{[a, b]}\|_\infty = 1$$

$$\|M_h\| = \sup_{\|f\|=1} \|M_h(f)\|_\infty \geq \|M_h(\chi_{[a, b]})\|_\infty = \|h\|_\infty \implies \|M_h\|_{\mathcal{B}(\mathcal{C}[a, b])} = \|h\|_\infty$$

2.  $Y = \mathcal{C}[0, 1]$ ,  $X = \{f \mid f' \in [0, 1]\}$

$X$  — подпространство  $Y$ , т. е.  $\|f\|_X = \max_{[0, 1]} |f(x)|$ .

$$f \in X, \quad \mathcal{D}(f) = f', \quad \mathcal{D} \in \mathcal{L}in(X, Y)$$

Проверим, что  $\mathcal{D}$  не является непрерывным.

$$x^n \in \mathcal{C}[0, 1], \quad \|x^n\|_\infty = 1 \implies \sup_{\|f\|=1} \|\mathcal{D}(f)\|_\infty \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mathcal{D}(x^n)\|$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(x^n) &= nx^{n-1} \implies \|\mathcal{D}(x^n)\|_\infty = n \\ \implies \sup \|\mathcal{D}(f)\| &\geq \sup \{ \|\mathcal{D}(x^n)\| \} = +\infty\end{aligned}$$