# Содержание

# Часть I
# Уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной

Ааа! Дифуры!

$$\frac{\mathrm{d}\,y(x)}{\mathrm{d}\,x} = f\big(x, y(x)\big) \quad \text{или} \quad y' = f(x,y) \tag{1}$$

## 1. Продолжимость решения на границу и за границу; теорема о продолжимости решения на границу

**Определение 1.** Пусть $y = \varphi(x)$ – решение уравнения (1) на $\langle a, b\rangle$. Если этот промежуток произвольным образом сузить, то на новом промежутке функция $y = \varphi(x)$ останется решением, которое называют *сужением* исходного решения.

**Определение 2.** Решение уравнения (1), заданное на промежутке $\langle a, b)$ *продолжимо вправо в точку* $b$ или *на границу*, если найдётся такое решение $y = \widetilde{\varphi}(x)$, определённое на промежутке $\langle a, b]$, что сужение $\widetilde{\varphi}(x)$ на $\langle a, b)$ совпадает с $\varphi(x)$.

**Определение 3.** Решение уравнения (1), заданное на промежутке $\langle a, b\rangle$ *продолжимо вправо за точку* $b$ или *за границу*, если найдутся такие $\widetilde{b} > b$ и решение $y = \widetilde{\varphi}(x)$, определённое на промежутке $\left\langle a, \widetilde{b}\right\rangle$, что сужение $\widetilde{\varphi}(x)$ на $\langle a, b\rangle$ совпадает с $\varphi(x)$.

**Теорема 1** (о продолжимости решения на границу).
$\varphi(x)$ – решение уравнения (1) на промежутке $\langle a, b)$, $\quad b < +\infty$

Для того чтобы это решение было продолжимо вправо в точку $b$ необходимо и достаточно, чтобы существовали последовательность $\{ x_k \}_{k=1}^{\infty}$ и число $\eta \in \mathbb{R}^1$ такие, что

$$\forall k \quad \begin{cases} x_k \in \langle a, b) \\ \big(x_k, \varphi(x_k)\big) \xrightarrow[k\to\infty]{} (b, \eta) \in \widetilde{G} \end{cases} \tag{2}$$

**Доказательство.**

- Достаточность
  Пусть выполняется условие (2)

  **Утверждение 1.** В силу того, что функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}$, найдутся такие $c > 0$ и $M \geq 1$, что

  $$\forall (x, y) \in \widetilde{G} \cap \overline{B_c}(b, \eta) \quad |f(x, y)| \leq M$$

  **Доказательство.**

  - $(b, \eta) \in G$, т. е. является внутренней
    Тогда существует $\overline{B_c}(b, \eta) \subset G$ – компакт, и на нём функция ограничена
  - $(b, \eta) \subset \widetilde{G}$ и “вблизи” находятся точки “плохой” границы
    Приведём рассуждение **от противного**:
    Допустим, $|f(b, \eta)| = M - 1$ и существует последовательность $c_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ $(c_m > 0)$ и последовательность точек $(x_m, y_m) \in \widetilde{G} \cap \overline{B_{c_m}}(b, \eta)$ такие, что $|f(x_m, y_m)| > M$
    Тогда $(x_m, y_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} (b, \eta)$, а это значит, что функция $|f(x, y)|$ терпит разрыв в точке $(b, \eta)$, так как $|f(x_m, y_m)| - |f(b, \eta)| > 1$ для любого $m$

  □

  Докажем, что существует $\lim\limits_{x\to b-} \varphi(x)$ и он равен $\eta$:
  Для этого покажем, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta \in \langle a, b)$, что

  $$\forall x \in [\delta, b) : |\varphi(x) - \eta| < \varepsilon \tag{3}$$

  Зафиксируем произвольный $0 < \varepsilon \leq c$
  Тогда $|f(x, y)| \leq M$ для любой точки $(x, y) \in \widetilde{G} \cap \overline{B_\varepsilon}(b, \eta)$ и по условию (2) найдётся такой номер $m$, что выполняются равентсва

  $$b - x_m > \frac{\varepsilon}{2M}, \qquad |\varphi(x_m) - \eta| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

  По формуле Ньютона-Лейбница для всякого $x \in [x_m, b)$ имеем:

  $$|\varphi(x) - \varphi(x_m)| = \left| \int_{x_m}^{x} \varphi'(s) \, \mathrm{d}\, s \right| = \left| \int_{x_m}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big) \, \mathrm{d}\, s \right| \leq \int_{x_m}^{x} \big|f\big(s, \varphi(s)\big)\big| \, \mathrm{d}\, s \leq$$
  $$\leq M(x - x_m) < M(b - x_m) \underset{(4)_1}{<} \frac{\varepsilon}{2} \qquad (x_m \leq x < b)$$

  Поэтому
  $$|\varphi(x) - \eta| \leq |\varphi(x) - \varphi(x_m)| + |\varphi(x_m) - \eta| \underset{(4)_2}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

  Неравенство (3) верно при $\delta = x_m$, а значит, $\varphi(x) \xrightarrow[x\to b^{-0}]{} \eta$
  Доопределим функцию $y = \varphi(x)$ в точке $b$, положив $\varphi(b) = \eta$
  Согласно лемме о записи решения в интегральном виде

  $$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big) \, \mathrm{d}\, s \quad \forall x_0, x \in \langle a, b)$$

  В этом тождестве можно перейти к пределу при $x \to b^{-0}$, получая равенство $\eta = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big) \, \mathrm{d}\, s$, так как по условию точка $(b, \eta) \in \widetilde{G}$, а занчит, функция $f(x, y)$ определена

и непрерывна в этой точке
В результате функция

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \langle a, b) \\ \eta & x = b \end{cases}$$

по определению является продолжением решения $y = \varphi(x)$ на $\langle a, b]$

- Необходимость
  Допустим, что на промежутке $\langle a, b]$ существует решение $y = \widetilde{\varphi}(x)$ такое, что $\widetilde{\varphi}(x) \equiv \varphi(x)$ на $\langle a, b)$
  Поскольку $\widetilde{\varphi}(x)$ непрерывна, то $\widetilde{\varphi}(x) = \eta = \lim\limits_{x \to b} \widetilde{\varphi}(x)$
  Но тогда $\eta = \lim\limits_{x \to b^-} \varphi(x)$ и требуемая послеовательность точек $x_k$ существует, причём по порделению решения точка $(b, \eta) \in \widetilde{G}$

□

## 2. Продолжимость решения на границу и за границу; леммы о продолжимости решения за границу отрезка и интервала

**Лемма 1** (о продолжимости решения за границу отрезка)**.** Пусть решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1) определено на промежутке $\langle a, b]$ и точка $\big(b, \varphi(b)\big) \in G$
Тогда это решение продолжимо вправо за точку $b$ на полуотрезок Пеано, построенный для точки $\big(b, \varphi(b)\big)$.

**Доказательство.** По теореме Пеано на отрезке Пеано $\overline{P_h}\big(b, \varphi(b)\big)$ существует внутреннее решение $y = \psi(x)$ ЗК$(b, \varphi(b))$.
Тогда функция $y = \widetilde{\varphi}(x)$, где

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \langle a, b] \\ \psi(x), & x \in [b, b + h] \end{cases}$$

по определению является решением уравнения (1) на $\langle a, b + h]$
В самом деле, в точке $b$ производная функции $\widetilde{\varphi}(x)$ существует, так как

$$\widetilde{\varphi}'_-(b) = \varphi'_-(b) = f\big(b, \varphi(b)\big) = \psi'_+(b) = \widetilde{\psi}'_+(b)$$

А выполнение других условий из определения решения для $\widetilde{\varphi}(x)$ очевидно □

**Следствие.** Если решение $y = \varphi(x)$ уравнения 1 определено на промежутке $\langle a, b]$ и не продолжимо вправо за точку $b$, то $\big(b, \varphi(b)\big) \in \widehat{G}$

**Доказательство.** Предположение противного противоречит лемме □

Из теоремы о продолжимости решения на границу и последней леммы вытекает следующее утверждение:

**Лемма 2** (о продолжимости решения на границу интервала)**.** Пусть решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1) определено на промежутке $\langle a, b)$, существует число $\eta = \lim\limits_{x \to b^-} \varphi(x)$ и точка $(b, \eta) \in G$
Тогда это решение продолжимо вправо за точку $b$

## 3. Теорема о поведении интегральной кривой полного внутреннего решения

**Теорема 2** (о поведении интегральной кривой полного внутреннего решения)**.** Предположим, что внутреннее решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1) определено на промежутке $\langle a, \beta)$ и не продолжимо вправо.
Тогда для любого компакта $\overline{H} \subset G$ найдётся такое число $\delta \in \langle a, \beta)$, что для всякого $x \in (\delta, \beta)$ точка $\big(x, \varphi(x)\big) \in G \setminus \overline{H}$

**Другая формулировка.** При стремлении аргумента полного внутреннего решения к границе максимального интервала существования дуга интегральной кривой покидает любой компакт, лежащий в области $G$, и никогда в него не возвращается

**Доказательство.** Переходя в условиях теоремы на язык последовательностей, докажем, что для любого компакта $\overline{H} \subset G$ и для любой последовательности $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \beta$, $x_k \in \langle a, \beta)$ существует $K > 0$ такое, что $\big(x_k, \varphi(x_k)\big) \in G \setminus \overline{H}$ при всех $k > K$
Рассуждая **от противного**, допустим, что существуют компакт $\overline{H}_* \subset G$ и последовательность $x_k \to \beta$, $x_k \in \langle a, \beta)$ такие, что $\big(x_k, \varphi(x_k)\big) \in \overline{H}_*$ для $k = 1, 2, ...$
Отсюда сразу же вытекает, что $\beta < +\infty$, так как в противном случае найдётся такой индекс $k^*$, что точка $\big(x_{k^*}, \varphi(x_{k^*})\big)$ будет лежать вне компакта в силу его ограниченности
НУО считаем, что последовательность $x_k$ – сходящаяся (иначе перейдём к сходящейся подпоследовательности)
Пусть $(\beta, \eta) = \lim\limits_{k\to\infty} \big(x_k, \varphi(x_k)\big)$
Тогда предельная точка $(\beta, \eta)$ также принадлежит компакту $\overline{H}_*$, а значит, выполняются условия теоремы о продолжимости решения (теор. 1), согласно которой решение $y = \varphi(x)$ продолжимо на промежуток $\langle a, \beta]$ – $\lightning$ с условием теоремы ☐

## 4. Ломаные Эйлера. Лемма о ломаных Эйлера в роли $\varepsilon$-решения

Выберем в области $G$ произвольную точку $(x_0, y_0)$ и построим в ней отрезок поля направлений столь малой длины, что он целиком лежит в $G$, начинаясь в какой-то точке $(x_{-1}, y_{-1})$ и заканчиваясь в точке $(x_1, y_1)$
Проведём вправо через точку $(x_1, y_1)$ и влево через точку $(x_{-1}, y_{-1})$ полуотрезки поля, лежащие в $G$ и заканчивающиеся в точках $(x_2, y_2)$ и $(x_{-2}, y_{-2})$ соответственно, и так далее
Этот процесс можно продолжать любое конечное число шагов $N$, поскольку область $G$ – открытое множество
График полученной таким образом непрерывной кусочно-линейной функции $y = \psi(x)$ называется ломаной Эйлера
Итак, установлено, что ломаная Эйлера лежит в области $G$, проходит через точку $(x_0, y_0)$ и абсциссы её угловых точек равны $x_j$ $(j = \overline{-N, N})$

**Определение 4.** *Рангом дробления* ломаной Эйлера назовём число, равное $\max\{\, x_j - x_{j-1} \,\}$.

Формула, реккурентно задающая ломаную Эйлера $y = \psi(x)$, иммеет вид: $\psi(x_0) = y_0$ и далее при $j = 0, 1, ..., N-1$ для любого $x \in (x_j, x_{j+1}]$ или при $j = 0, -1, ..., 1-N$ для любого $x \in [x_{j-1}, x_j)$

$$\psi(x) = \psi(x_j) + f\big(x_j, \psi(x_j)\big)(x - x_j) \tag{5}$$

В частности, при $j = 0$ отрезок ломаной Эйлера определён для любого $x \in [x_{-1}, x_1]$ и, делясь на два полуотрезка, проходит через точку $(x_0, y_0)$ под углом, тангенс которого равен $f(x_0, y_0)$
Из формулы (5) вытекает, что для всякого $j = \overline{0, N-1}$ производная $\psi'(x) = f\big(x_j, \psi(x_j)\big)$ при $x \in (x_j, x_{j+1})$, а в точке $x_{j+1}$ она не определна, как и в точках $x_{j-1}$ при $j \leq 0$
Доопределим $\psi'(x)$ в точках разрыва как левостороннюю производную при $x > x_0$ и как правостороннюю производную при $x < x_0$, положив

$$\psi'(x_j) = \psi'_{\mp}(x_j) \lim_{x\to x_j^{\mp 0}} \frac{\psi(x) - \psi(x_j)}{x - x_j} \qquad (j = \pm 1...., \pm N)$$

А при $j = 0$ существует полная производная $\psi'(x_0) = f(x_0, y_0)$
Таким образом, для любого $x \in (x_j, x_{j+1}]$ $(j = 0, 1, ..., N-1)$ или для любого $x \in [x_{j-1}, x_j)$ $(j = 0, -1, ..., 1-N)$, дифференцируя равенство (5) по $x$, получаем

$$\psi'(x) = f\big(x_j, \psi(x_j)\big), \qquad j \in \{\, 1-N, ..., N-1 \,\} \tag{6}$$

Покажем, что на некотором промежутке всегда можно построить функцию, график которой проходит через заданную точку области $G$, такую, что при подстановке этой функции в уравнение (1) окажется, что разность между левой и правой частями уравнения по модулю не превосходит любого сколь угодно малого наперёд заданного положительного числа

**Определение 5.** Для всякого $\varepsilon > 0$ непрерывная и кусочно-гладкая на отрезке $[a, b]$ функция $y = \psi(x)$ называется *$\varepsilon$-решением* уравнения (1) на $[a, b]$, если для любого $x \in [a, b]$ точка $\big(x, \psi(x)\big) \in G$ и

$$\left|\psi'(x) - f\big(x, \psi(x)\big)\right| \leq \varepsilon \tag{7}$$

**Лемма 3** (о ломаных Эйлера в роли $\varepsilon$-решения)**.** Для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ и для любого отрезка Пеано $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ имеем:

1. Для любого $\delta > 0$ на $\overline{P_h}$ можно построить ломаную Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления, не превосходящим $\delta$, график которой лежит в прямоугольнике $\overline{R}$ из определения отрезка Пеано

2. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что всякая ломаная Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления, не превосходящим $\delta$, является $\varepsilon$-решением уравнения (1) на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

**Доказательство.**

1. Для произвольной точки $(x_0, y_0)$ из $G$ построим прямоугольник $\overline{R} \subset G$ с центром в $(x_0, y_0)$ и два лежащих в нём равнобедренных треугольника $\overline{T^-}, \overline{T^+}$ с общей вершиной в точке $(y_0, x_0)$ и основаниями, параллельными оси ординат, как это было сделано при построении отрезка Пеано
   При этом зафиксируются константы $a, b, M, h$
   Выберем $\delta_* < \delta$ так, чтобы число $\frac{h}{\delta_*} =: N \in \mathbb{N}$
   Положим $x_{j+1} := x_j + \delta_*$ $(j = \overline{0, N-1})$, тогда $x_N = x_0 + h$
   Для всякого $x > x_0$ будем последовательно строить отрезки ломаной Эйлера $y = \psi(x)$ с узлами в точках $x_j$
   Для любого $j = 0, ..., N$ это сделать возможно, так как модуль тангенса укла наклона каждого отрезка равен $\left|f\big(x_j, \psi(x_j)\big)\right|$, а тангенсы углов наклона боковых сторон треугольника $\overline{T^+}$ по построению равны $\pm M$, где $M = \max|f(x, y)|$ на компакте $\overline{R}$
   Поэтому любой отрезок ломаной Эйлера, начиная с первого, не может пересечь боковую стенку $\overline{T^+}$, а значит, содержится в нём
   В результате для всех $x \in [x_0, x_0 + h]$ точка $\big(x, \psi(x)\big) \in \overline{T^+}$ и требуемая ломаная Эйлера построена на $[x_0, x_0 + h]$
   Для левого полуотрезка Пеано всё аналогично

2. Зафиксируем теперь произвольное положительное число $\varepsilon$
   Функция $f(x, y)$ непрерывна на компакте $\overline{R}$, следовательно, по теореме Кантора $f$ равномерно непрерывна на нём. По определнию это занчит, что существует такое $\delta_1 > 0$, что для любых двух точек $(x'y')$ и $(x'', y'')$ из прямоугольника $\overline{R}$ таких, что $|x' - x''| \leq \delta_1$ и $|y' - y''| < \delta_1$, выполняется неравенство $|f(x', y') - f(x'', y'')| \leq \varepsilon$
   Положим $\delta := \min\left\{ \delta_1, \frac{\delta_1}{M} \right\}$ и покажем, что для любой ломаной Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления меньшим, чем $\delta$ на отрезке Пеано $\overline{P_h}(x_0, y_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$, справедливо неравенство (7):
   Возьмём любую точку $x$ из отрезка Пеано, например справа от $x_0$
   Найдётся индекс $j \in \{ 0, ..., N-1 \}$ такой, что $x \in (x_j, x_{j+1}]$, т. е. $x_j$ – ближайшая к $x$ левая угловая точка ломаной Эйлера
   Согласно (6)
   $$\psi'(x) - f\big(x, \psi(x)\big) = f\big(x_j, \psi(x_j)\big) - f\big(x, \psi(x)\big)$$
   Оценим близость аргументов функции $f$:
   По выбору $\delta$ и $j$ имеем
   $$|x - x_j| \leq \delta \leq \delta_1, \qquad |\psi(x) - \psi(x_j)| \underset{(5)}{=\!=} \left|f\big(x_j, \psi(x_j)\big)\right| \cdot |x - x_j| \leq M\delta \overset{\mathrm{def}\,\delta}{\leq} \delta_1$$
   Поэтому из равномерной непрерывности функции $f$ вытекает, что
   $$\left|f\big(x_j, \psi(x_j)\big) - f\big(x, \psi(x)\big)\right| \leq \varepsilon$$
   А значит, неравенство (7) из определения $\varepsilon$-решения выполняется на отрезке Пеано

$\square$

## 5. Лемма Асколи–Арцела

**Лемма 4** (Арцела-Асколи; о существовании равномерно сходящейся подпоследовательности)**.** Из любой ограниченной и равностепенно непрерывной на $[a, b]$ последовательности функций $\{ h_n \}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить равномерно сходящуюся на $[a, b]$ подпоследовательность

**Доказательство.** Рациональные числа образуют счётное всюду плотное множество на любом промежутке вещественной прямой
Счётность множества рациональных чисел, расположенных на отрезке $[a, b]$ означает, что их можно перенумеровать: $r_1, r_2, \ldots$
В точке $r_1$ числовая последовательность $\{ h_n \}_{n=1}^{\infty}$ по предположению сходится, поэтому из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, т. е. существует такая последовательность натуральных чисел

$$n^{(1)} = \left\{ n_i^{(1)} \right\}_{i=1}^{\infty}, \qquad n_i^{(1)} < n_{i+1}^{(1)}$$

что последовательность значений $\left\{ h_{n_i^{(1)}}(r_1) \right\}_{i=1}^{\infty}$ сходится
В точке $r_2$ последовательность $\left\{ h_{n_i}^{(1)}(r_2) \right\}_{i=1}^{\infty}$ также ограничена, и из ней можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, т. е. у последовательности индексов $n^{(1)}$ имеется такая подпоследовательность индексов $n^{(2)} = \left\{ n_i^{(2)} \right\}_{i=1}^{\infty}$, что последовательность значений $\left\{ h_{n_i^{(2)}}(r_2) \right\}_{i=1}^{\infty}$ тоже сходится. При этом она сходится и в точке $r_1$ как подпоследовательность сходящейся последовательности
Продолжаем этот процесс
Введём последовательность индексов $\left\{ n_i^{(i)} \right\}_{i=1}^{\infty}$ $\quad (n_i^{(i)} < n_{i+1}^{(i)})$, где $n_i^{(i)}$ – $i$-й член подпоследовательности $n^{(i)}$
Функциональная подпоследовательность $\left\{ h_{n_i}^{(i)}(x) \right\}_{i=1}^{\infty}$ сходится во всех рациональных точках $[a, b]$, поскольку в любой рациональной точке $r_k$ последовательность $\left\{ h_{n_i^{(k)}}(x) \right\}_{i=1}^{\infty}$ сходится по построению, а любая другая с меньшим верхним индексом является её подпоследовательностью
Покажем, что $\{ h_{i_*}(x) \}_{i=1}^{\infty}$, где $i_* = n_i^{(i)}$ является искомой подпоследовательностью:
Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$
По условию леммы последовательность $\{ h_{i_*}(x) \}_{i=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна, следовательно, по выбранному $\varepsilon$ найдётся такое число $\delta > 0$, что

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \forall x', x'' \in [a, b]: \quad \left( |x' - x''| < \delta \implies |h_{i_*}(x') - h_{i_*}(x'')| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right)$$

По построению последовательность функций $\{ h_{i_*}(x) \}_{i=1}^{\infty}$ сходится поточечно во всех рациональных точках $r_k$ из $[a, b]$
Поэтому по выбранному $\varepsilon$ для любого $k \in \mathbb{N}$ найдётся такой номер $N_{r_k} > 0$, что $|h_{i_*}(r_k) - h_{j_*}(r_k)| \leq \varepsilon/3$ для любых $i_*, j_* > N_{r_k}$
Последовательность индексов $N_{r_1}, N_{r_2}, \ldots,$ – счётная, поэтому она может стремиться к бесконечности. Перейти к конечной подпоследовательности позволяет использование появившейся из определения равностепенной непрерывности универсальной константы $\delta$ и плотности множества рациональных чисел:
Разобьём отрезок $[a, b]$ на непересекающиеся промежутки, длина которых не превосходит $\delta$. Пусть их окажется $l$ штук
Множество рациональных чисел всюду плотно, поэтому в каждом промежутке можно выбрать по рациональному числу: $r_1^*, \ldots, r_l^*$
Пусть $N = \max \left\{ N_{r_1^*}, \ldots, N_{r_l^*} \right\}$, где константы $N_r$ взяты из определения поточечной сходимости последовательности $\{ h_{i_*}(x) \}_{i=1}^{\infty}$
Возьмём произвольное число $x \in [a, b]$. Предположим, что оно попало в промежуток с номером $p$. Тогда для любых $i_*, j_* > N$ получаем:

$$|h_{i_*}(x) - h_{j_*}(x)| \overset{\triangle}{\leq} |h_{i_*}(x) - h_{i_*}(r_p^*)| + |h_{i_*}(r_p^*) - h_{j_*}(r_p^*)| + |h_{j_*}(r_p^*) - h_{j_*}(x)| \leq \varepsilon$$

так как $|x - r_p^*| \leq \delta$ и верна оценка из определения равномерной сходимости
Итак, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое $N$, что для любых $i_*, j_* \geq N$ и $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $|h_{i_*}(x) - h_{j_*}(x)| \leq \varepsilon$ $\square$

**Замечание.** При выполнении условий леммы Арцела-Асколи она позволяет "объявить о рождении" функции $h(x)$, определённой на отрезке $[a, b]$ и предельной для некоторой подпоследовательности функций $h_n(x)$
При этом, по теореме Стокса-Зайделя предельная функция непрерывна на $[a, b]$

## 6. Ломаные Эйлера. Теорема Пеано о существовании внутреннего решения

**Теорема 3** (Пеано; о существовании внутреннего решения). Пусть правая часть уравнения (1) непрерывна в области $G$
Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ и для любого отрезка Пеано $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ существует по крайней мере одно решение задачи Коши уравнения (1) с начальными данными $x_0, y_0)$, определённое на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

**Доказательство.** Возьмём произвольную точку $(x_0, y_0)$ из области $G$ и построим какой-либо отрезок Пеано $\overline{P_h}(x_0, y_0)$
Выберем произвольную последовательность положительных чисел $\varepsilon_n$, стремящуюся к нулю при $n \to \infty$
Тогда по лемме об $\varepsilon$-решении для всякого $n$ можно построить ломаную Эйлера $\psi_n(x)$, проходящую через точку $(x_0, y_0)$, определённую на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ и являющуюся $\varepsilon_n$-решением уравнения (1) на отрезке $\overline{P_j}(x_0, y_0)$
Поэтому для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \overline{P_h}(x_0, y_0)$ точка $\Big(x, \psi_n(x)\Big) \in \overline{R}$ и выполняется неравенство (7) $|\psi_n'(x) - f\big(x, \psi_n(x)\big)| < \varepsilon_n$
Покажем, что последовательность ломаных Эйлера $\{\, \psi_n(x) \,\}_{n=1}^{\infty}$ на отрезке Пеано удовлетворяет лемме Арцела–Асколи
Последовательность $\{\, \psi_n(x) \,\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена, так как график любой функции $y = \psi_n(x)$ лежит в прямоугольнике $\overline{R}$, а значит, $|\psi_n(x)| \le |y_0| + b$ для любого $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$
Для доказательства равностепенной непрерывности зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$
Положим $\delta = {}^{\varepsilon}\!/_{M}$, где $M = \max\limits_{(x,y)\in\overline{R}} |f(x, y)|$
Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x', x'' \in \overline{P_h}(x_0, y_0)$ таких, что $|x'' - x'| \le \delta$, получаем:

$$|\psi_n(x'') - \psi_n(x')| = \left| \int_{x_0}^{x''} \psi_n'(s)\, \mathrm{d}\, s - \int_{x_0}^{x'} \psi_n'(s)\, \mathrm{d}\, s \right| = \left| \int_{x'}^{x''} \psi_n'(s)\, \mathrm{d}\, s \right| \underset{(6)}{\le}$$
$$\le \left| \int_{x'}^{x''} \max_{j=1-N,\dots,N-1} \left| f\big(x, \psi_n(x_j)\big) \right| \mathrm{d}\, s \right| \le M|x'' - x'| \le M\delta = \varepsilon$$

Действительно, интегрируя кусочно-постоянную функцию $\psi'(x)$ по $s$ от $x_0$ до $x$, для любого $x \in [x_{-N}, x_N]$ имеем: $\psi(x) = \psi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \psi'(s)\, \mathrm{d}\, s$, где

$$\int_{x_0}^{x} \psi(s)\, \mathrm{d}\, s = \sum_{k=0}^{j-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \psi'(s)\, \mathrm{d}\, s + \int_{x_j}^{x} \psi'(s)\, \mathrm{d}\, s, \qquad x \in (x_j, x_{j+1}], \quad j \in \{\, 0, \dots, N-1 \,\}$$

$$\int_{x_0}^{x} \psi'(s)\, \mathrm{d}\, s = \sum_{k=j+1}^{-1} \int_{x_{k+1}}^{x_k} \psi'(s)\, \mathrm{d}\, s + \int_{x_{j+1}}^{x} \psi'(s)\, \mathrm{d}\, s, \qquad x \in [x_j, x_{j+1}), \quad j \in \{\, -N, \dots, -1 \,\}$$

В результате последовательность ломаных Эйлера $\psi_n(x)$ удовлетворяет условиям леммы Арцела-Асколи, и из неё можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{\, \psi_{i_*}(x) \,\}_{i_*=1}^{\infty}$
Пусть $\psi_{i_*} \xrightarrow[i_* \to \infty]{x \in \overline{P_h}} \varphi(x)$
Тогда, согласно замечанию после леммы Арцела-Асколи функция $y = \varphi(x)$ непрерывна на отрезке Пеано
Поскольку $\psi_{i_*}(x)$ по построению является $\varepsilon_{i_*}$-решением, из неравенства (7) вытекает, что

$$\forall x \in \overline{P_h}(x_0, y_0) \quad \forall i_* \in \mathbb{N}: \quad \psi_{i_*}'(x) = f\big(x, \psi_{i_*}(x)\big) + \Delta_{i_*}(x), \qquad |\Delta_{i_*}(x)| \le \varepsilon_{i_*}$$

Интегрируя это равенство по $s$ от $x_0$ до $x$ получаем:

$$\psi_{i_*}(x) - \psi_{i_*}(x_0) = \int_{x_0}^{x} f\big(s, \psi_{i_*}(s)\big)\,\mathrm{d}\,s + \int_{x_0}^{x} \Delta_{i_*}(s)\,\mathrm{d}\,s \tag{8}$$

причём $\psi_{i_*}(x_0) = y_0$ и $\left|\int_{x_0}^{x} \Delta_{i_*}(s)\,\mathrm{d}\,s\right| \le \varepsilon_{i_*}|x - x_0| \xrightarrow[i_* \to \infty]{} 0$, так как $|x - x_0| \le h$

Кроме того, $f\big(s, \psi_{i_*}(s)\big) \overset{s \in \overline{P_h}}{\underset{i_* \to \infty}{\rightrightarrows}} f\big(s, \varphi(s)\big)$, поскольку любая точка $\big(s, \psi_{i_*}(s)\big) \in \overline{R}$ и $f(x, y)$ по теореме Кантора равномерно непрерывна на $\overline{R}$

Поэтому можно осуществить предельный переход под знаком интеграла:

$$\int_{x_0}^{x} f\big(s, \psi_{i_*}(s)\big)\,\mathrm{d}\,s \xrightarrow[i_* \to \infty]{} \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big)\,\mathrm{d}\,s$$

Переходя в обеих частях равенств (8) к пределу при $i_* \to \infty$, получаем тождество

$$\varphi(x) \overset{[x_0 - h, x_0 + h]}{\equiv} \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big)\,\mathrm{d}\,s$$

Поэтому, согласно лемме о записи решения в интегральном виде, предельная функция $y = \varphi(x)$ является решением ВЗК($x_0$, $y_0$) уравнения (1) на отрезке Пеано $[x_0 - h, x_0 + h]$ □

## 7. Теорема о существовании решения для одного из случаев $U_1^+$, $O_1^+$, $B_{1<}^+$, $B_{1=}^+$

Для упрощения обозначений и формул, используемых в дальнейшем при решении граничной задачи Коши, НУО будем считать, что задача всегда ставится в начале координат и функция $f$ там равна нулю, т. е. уравнение (1) имеет вид

$$y' = f_0(x, y) \tag{9}$$

где функция $f_0$ определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G} = G \cup \widehat{G}$, точка $O = (0, 0) \in \widetilde{G}$, $f_0(0, 0) = 0$ и поставлена граничная задача Коши с начальными данными $0, 0$.

НУО будем считать, что выполняются условия:

$$\begin{cases} b_{a,u}^+(a) \le a \quad \text{при } \tau_u = 0 \\ \forall x \in [0, a] \quad {b_{a,u}^+}'(x) \ge \tau_u \quad \text{при } \tau_u > 0 \\ -b_{a,l}^+(a) \le a \quad \text{при } \tau_l = 0 \\ \forall x \in [0, a] \quad -{b_{a,l}^+}'(x) \ge \tau_l \quad \text{при } \tau_l > 0 \end{cases} \tag{10}$$

Во всех точках кривых $\gamma_{a,u}^+$ и $\gamma_{a,l}^+$ введём ограничения на функцию $f_0$ в случаях $U_1^{+,=}$, $O_{1,=}^+$, $B_{1,=}^{+,=}$, $B_{1,=}^{+,>}$ и $B_{1,<}^{+,=}$:

$$\forall x \in (0, a] \quad \begin{cases} f_0\big(x, b_{a,u}^+(x)\big) \le {b_{a,u}^+}'(x), & \text{если } {b_{a,u}^+}'(0) = 0 \\ f_0\big(x, b_{a,l}^+(x)\big) \ge {b_{a,l}^+}'(x), & \text{если } {b_{a,l}^+}'(0) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

означающие, что в любой точке $\gamma_{a,u}^+$ и $\gamma_{a,l}^+$ правый полуотрезок поля направлений уравнения (9) направлен внутрь или по границе области $G$.

**Теорема 4** (о существовании решения граничной задачи Коши)**.** Предположим, что в уравнении (9) функция $f_0$ определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}$.
Тогда в каждом из случаев $(N_1^+), (U_1^{+,>}), (O_{1,<}^+), (B_{1,<}^{+,>})$ и в каждом из случаев $(U_1^{+,=}), (O_{1,=}^+), (B_{1,=}^{+,=})$, $(B_{1,=}^{+,>}), (B_{1,<}^{+,=})$ при условиях (11) на любом правом граничном отрезке Пеано существует по крайней мере одно решение граничной задачи Коши с начальными данными $(0, 0)$

**Доказательство.** Рассмотрим, например, случай $(B_{1,=}^{+,>})$
Согласно (10) (первые два неравенства) правая верхнеграничная функция $b_{a,u}^+(x)$, параметризующая кривую ${\gamma_{a_u,u}^+}'(x) \ge \tau_u$ для любого $x \in (0, a_u]$. А у правой нижнеграничной привой $\gamma_{a_l,l}^+$ константа $a_l = c_O$ в силу (10) (последние два нераенства)
Пусть $c_* := \min\{\, c_U, c_O \,\}$, тогда множество $B_{c_*}^+ \setminus \big(\gamma_{a_u,u}^+ \cup \gamma_{a_l,l}^+\big) \subset G$

Далее, для $\tau_u$ найдётся (по непрерывности $f_0$) такая $\delta_{\tau_u}$, что $|f_0(x,y)| \le \tau_u$ в любой точке $\delta_{\tau_u}$-окрестности начала координат, принадлежащей $\widetilde{G}$
Положим $\widetilde{c} := \min\{\, c_*, \delta_{\tau_u} \,\}$, тогда на множестве $B^+_{\widetilde{c}}$ для функции $|f_0|$ справедлива та же оценка
Построим теперь лежащий в $B^+_{\widetilde{c}}$ криволинейный треугольник $\overline{T^+_b}$, как это было сделано при описании случая $(B^{+,>}_{1,=})$. Его высота $h^+ = \widetilde{a}$
Поскольку отрезок оси абсцисс $[0, h^+]$ лежит в $\widetilde{G}$ и является отрезком поля направлений в точке $O \in \widehat{G}$, из точки $O$ вправо можно начать строить ломаную Эйлера с проивольным рангом дробления
Ломаная Эйлера не может покинуть $\overline{T^+_b}$ через верхнюю боковую сторону, лежащую на прямой $y = \tau_u x$, так как в любой её точке $|f_0(x,y)| \le \tau_u$. Аналогично при попадании ломаной Эйлера при $x = x_* > 0$ на нижнюю боковую сторону, являющуюся частью правой нижнеграничной кривой $\gamma^+_{\widetilde{a},l}$, по условию (11) (второе неравенство) $f_0\big(x_*, b^+_{\widetilde{a},l}(x_*)\big) \ge b^{+\prime}_{\widetilde{a}}(x_*)$, а значит, при $x > x_*$ следующий отрезок ломаной будет либо лежать на $\gamma^+_{\widetilde{a},l}$, либо внутри треугольника в силу выпуклости $\gamma^+_{\widetilde{a},l}$. Поэтому ломаная Эйлера с произвольным выбранным рангом дробления может быть продолжена на весь правый граничный отрезок Пеано $[0, h^+]$
Дальше дословно повторяется доказательство теоремы Пеано.
Аналогичные рассуждения проводятся и в остальных случаях. □

## 8. Теорема об отсутствии решения граничной задачи Коши

**Теорема 5** (об отсутствии решений граничной задачи Коши)**.** В каждом из случаев $(U^{+,>}_2)$, $(O^+_{2,<})$, $(B^{+,>}_{2,<})$, $(N^+_2)$ граничная задача Коши с начальными данными $(0,0)$ не имеет решений в правой полуплоскости

**Доказательство.** Допустим, что в каждом случае из условия теоремы на некотором отрезке $[0,a]$ существует решение $y = \varphi(x)$ задачи Коши уравнения (9) с начальными данными $(0,0)$, т. е. $\varphi(0) = 0$. Тогда $\varphi'(0) = f_0\big(0, \varphi(0)\big) = 0$. Но график любого решения должен лежать в $\widetilde{G}$, а значит, располагаться не ниже правой верхнеграничной кривой, у которой в точке $O$ тангенс угла наклона согласно (10) равен $2\tau_u > 0$, или не выше правой нижнеграничной кривой, имеющей в точке $O$ тангенс угла наклона, равный $-2\tau_l < 0$. Поэтому $\varphi'(0) \ne 0$ – $\lightning$ □

## 9. Лемма о продолжимости решений на отрезок Пеано; лемма о верхнем и нижнем решениях

**Лемма 5** (о продолжимости решений на отрезок Пеано)**.** Пусть $y = \varphi(x)$ – это решение внутренней задачи Коши с начальными данными $x_0, y_0$, определённое на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$.
Тогда любое другое решение уравнения (1) $y = \psi(x)$ этой же задачи Коши, определённое на промежутке $\langle a, b\rangle \subsetneq [x_0 - h, x_0 + h]$, продолжимо на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

**Доказательство.** Докажем, например, продолжимость решения $y = \psi(x)$ с $\psi(x_0) = y_0$ на правый полуотрезок Пеано:
Если $\langle a, b\rangle = \langle a, b)$ (т. е. $b \le x_0 + h$), то график решения $y = \psi(x)$ при $x \in [x_0, b)$ лежит в треугольнике $\overline{T^+}$, построенном для решения $y = \varphi(x)$. Поэтому у любой последовательности $x_k \in [x_0, b)$ и $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} b$ точки $\big(x + k, \psi(x_k)\big) \in \overline{T^+} \subset \overline{R}$, а значит, найдётся сходящаяся последовательность $\big(x_{k_l}, \psi(x_{k_l})\big)$. Её предел – точка $(b, \eta) \in \overline{T^+}$
Следовательно, по теореме о продолжимости решения (теор. 1) $y = \psi(x)$ продолжимо на $[x_0, b]$, хотя могло быть там сразу и задано

- Если теперь $b = x_0 + h$, то лемма доказана
- Пусть $b < x_0 + h$. Построим равнобедренный треугольник $\overline{T^+_1}$ с вершиной в точке $(b, \eta)$, боковыми сторонами, имеющими тангенсы углов наклона $\pm M$, и основанием, лежащим на основании треугольника $\overline{T^+}$ с абсциссой $x_0 + h$. Тогда $\overline{T^+_1} \subset \overline{T^+}$ и по теореме Пеано на $[b, x_0 + h]$ существует решение задачи Коши с начальными данными $(b, \eta)$, продолжающее $\psi(x)$ до точки $x_0 + h$ включительно.

□

Пусть $(x_0, y_0) \in G$, $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ – некий отрезок Пеано и $\{\, \chi_k(x) \,\}_{k=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность решений ЗК$(x_0, y_0)$ уравнения (1), определённых на $[x_0 - h, x_0 + h]$

**Утверждение 2.** Для любых $k \in \mathbb{N}$, $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ функции

$$\chi_k^l(x) \coloneqq \min\{\, \chi_1(x), ..., \chi_k(x) \,\}, \qquad \chi_k^u(x) \coloneqq \max\{\, \chi_1(x), ..., \chi_k(x) \,\}$$

также являются решениями поставленной задачи на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

**Доказательство.** Действительно, эти функции удовлетворяют всем трём условиям из определения решения, поскольку для любого $x_* \in [x_0 - h, x_0 + h]$ найдётся такой индекс $1 \le \boldsymbol{j} \le k$, что, например, $\chi_k^l(x_*) = \chi_j(x_*)$, и если $\chi_j(x_*) = \chi_m(x_*)$, то $\chi_j'(x_*) = \chi_m'(x_*) = f\big(x_*, \chi_k^l(x_*)\big)$ □

**Лемма 6** (о нижнем и верхнем решениях). Существуют решения ЗК$(x_0, y_0)$ $y = \chi^l(x)$ и $y = \chi^u(x)$ уравнения (1) такие, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [x_0 - h, x_0 + h]: \quad \begin{cases} \chi^l(x) \le \chi_k^l(x) \\ \chi^u(x) \ge \chi_k^u(x) \end{cases} \tag{12}$$

**Доказательство.** Рассмотрим, например, последовательность решений $\{\, x_k^l(x) \,\}_{k=1}^{\infty}$ на отрезке $[x_0, x_0 + h]$. Поскольку все их графики лежат в треугольнике $\overline{T^+}$, полученном при построении отрезка Пеано, эта последовательность равномерно ограничена и равностепенно ограничена (см. док-во теоремы Пеано). Следовательно, по лемме Арцела-Асколи из неё можно выделить равномерно на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ сходящуюся подпоследовательность, предел которой тоже будет решением уравнения (1) на отрезке Пеано
Но последовательность $\chi_k^l(x)$ монотонно убывает, поэтому она сама будет сходиться к нижнему решению $y = \chi^l(x)$, для которого, очевидно, будет верно неравенство (12)
Рассуждения для отрезка аналогичны так же, как и доказательство сходиомости функции $\chi_k^u(x)$ к верхнему решению $y = \chi^u(x)$ □

## 10. Теорема о локальной единственности решения внутренней задачи Коши

**Теорема 6** (о локальной единственности решения внутренней ЗК).
Пусть $(x_0, y_0) \in G$ – это точка единственности.
Тогда решение ЗК$(x_0, y_0)$ уравнения (1) является локально единственным

**Доказательство. От противного**
Построим какой-нибудь отрезок Пеано $\overline{P_h(x_0, y_0)}$ и допустим, что для любого интревала $(\alpha, \beta)$ такого, что $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset [x_0 - h, x_0 + h]$, существуют такие решения ЗК $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, не совпадающие на $(\alpha, \beta)$
Тогда для всякого $k = 1, 2, ...$ найдутся решения $y = \varphi_k(x)$ и $y = \psi_k(x)$ ЗК, определённые на отрезке Пеано, такие, что

$$\exists\, x_k \in \left(x_0 - \frac{h}{k}, x_0 + \frac{h}{k}\right): \quad \varphi_k(x_k) < \psi_k(x_k)$$

Согласно утверждению 2 функция $\varphi_k^l = \min\{\, \varphi_1(x), ..., \varphi_k(x) \,\}$ и функция $\psi_k^u(x)$, удовлетворяющие неравенства типа (12)
В результате $x_k \xrightarrow[k \to \infty]{} x_0$ и справедливы неравенства

$$\forall k = 1, 2, ... \quad \varphi^l(x_k) \le \varphi_k(x_k) < \psi_k(x_k) \le \psi^u(x_k)$$

означающие, что $(x_0, y_0)$ – точка единственности – $\lightning$ □

## 11. Лемма Гронуола

**Лемма 7** (Гронуолла; об интегральной оценке функции сверху). Пусть функция $h(x) \in \mathcal{C}\big(\langle a,b\rangle\big)$ и существуют такие $x_0 \in \langle a,b\rangle$, $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$, что

$$\forall x \in \langle a,b\rangle \quad 0 \leq h(x) \leq \lambda + \mu \left| \int_{x_0}^{x} h(s)\,\mathrm{d}\,s \right| \tag{13}$$

Тогда для любого $x \in \langle a,b\rangle$ справедливо неравенство

$$h(x) \leq \lambda e^{\mu|x-x_0|} \tag{14}$$

**Доказательство.**

- Предположим, что $x \geq x_0$
  Введём в рассмотрение функцию $g(x) = \int_{x_0}^{x} h(s)\,\mathrm{d}\,s$

  $$\implies \quad g(x_0) = 0, \qquad g(x) \geq 0, \qquad g(x) \in \mathcal{C}^1\big([x_0,b\rangle\big), \qquad g'(x) = h(x) \geq 0$$

  Подставим $g(x)$ в (13):

  $$g'(x) \leq \lambda + \mu g(x) \quad \implies \quad g'(x) - \mu g(x) \leq \lambda \quad \implies \quad e^{-\mu(x-x_0)}\Big(g'(x) - \mu g(x)\Big) \leq \lambda e^{-\mu(x-x_0)}$$

  При этом,

  $$\Big(g(x)e^{-\mu(x-x_0)}\Big)' = g'(x)e^{-\mu(x-x_0)} - \mu e^{-\mu(x-x_0)}g(x) = e^{-\mu(x-x_0)}\Big(g'(x) - \mu g(x)\Big)$$

  Отсюда

  $$\Big(g(x)e^{-\mu(x-x_0)}\Big)' \leq \lambda$$

  Проинтегрируем по $s$ от $x_0$ до $x$:

  $$g(x)e^{-\mu(x-x_0)} - \underbrace{g(x_0)}_{0} \leq \lambda \int_{x_0}^{x} e^{-\mu(s-x_0)}\,\mathrm{d}\,s = -\frac{\lambda}{\mu}(e^{-\mu(x-x_0)} - 1)$$

  Умножим на $e^{\mu(x-x_0)}$:

  $$g(x) \leq \frac{\lambda}{\mu}(e^{\mu(x-x_0)} - 1)$$

  Подставим в (13):

  $$h(x) \leq \lambda + \mu g(x) \leq \lambda e^{\mu(x-x_0)}$$

  Таким образом, неравенство доказано для всех $x \in [x_0, b\rangle$

- Если $x \leq x_0$, то в (13)

  $$h(x) \leq \lambda - \mu \int_{x_0}^{x} h(s)\,\mathrm{d}\,s, \qquad g(x) \leq 0$$

  Дальнейшее доказательство аналогично

$\square$

**Следствие.** Если $\lambda = 0$, то есть

$$0 \leq h(x) \leq \mu \left| \int_{x_0}^{x} h(s)\,\mathrm{d}\,s \right|$$

то $h(x) \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} 0$

## 12. Условия Липшица; теорема о множестве единственности

**Определение 6.** Функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица по $y$ глобально на множестве $D \subset$

$\mathbb{R}^2$, если

$$\exists\, L>0: \quad \forall (x,y_1),(x,y_2)\in D \quad |f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2| \tag{15}$$

**Обозначение.** $f\in \mathrm{Lip}_y^{gl}(D)$

**Определение 7.** Функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица по $y$ локально на множестве $\widetilde{G}$, если для любой точки $(x_0,y_0)\in\widetilde{G}$ найдётся замкнутая $c$-окрестность $\overline{B}_c(x_0,y_0)$ такая, что функция $f$ удовлетворяет условию Липшица по $y$ глобально на множестве $U_c=\widetilde{G}\cap\overline{B}_c(x_0,y_0)$

**Обозначение.** $y\in \mathrm{Lip}_y^{loc}(\widetilde{G})$

**Теорема 7** (о множестве единственности)**.** Пусть в уравнении (1) функция $f(x,y)$ определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}$ и удовлетворяет условию Липшица по $y$ локально на множестве $\widetilde{G^\circ}=G^\circ\cup\widehat{G^\circ}$, где $G^\circ\subseteq G$ – область, а $\widehat{G^\circ}\subset\partial G^\circ\cap\widehat{G}$.
Тогда $\widetilde{G^\circ}$ – множество единственности для уравнения (1).

**Доказательство.** Возьмём любую точку $(x_0,y_0)$ из множества $\widetilde{G^\circ}$ и покажем, что она является точкой единственности.
Поскольку $f\in\mathrm{Lip}_y^{loc}(\widetilde{G^\circ})$, найдутся $\overline{B}_c(x_0,y_0)$ и $L>0$ такие, что $f\in\mathrm{Lip}_y^{gl}(U_c)$ с константой $L$, где $U_c=\widetilde{G^\circ}\cap\overline{B}_c(x_0,y_0)$

- Если $(x_0,y_0)\in G^\circ$, то найдётся $c>0$ такое, что $U_c=\overline{B}_c(x_0,y_0)$, решение ЗК$(x_0,y_0)$ существует на некотором интервале $(a,b)\ni x_0$ и для любого решения этой задачи, уменьшая при необходимости $(a,b)$, можно добиться, чтобы его график лежал в $U_c$
- Пусть $(x_0,y_0)\in\widehat{G^\circ}$
  - Если решение ЗК$(x_0,y_0)$ отсутсвует, то $(x_0,y_0)$ – это точка единственности по определению
  - Пусть решение существует на некотром промежутке $\langle a,b\rangle$ таком, что $x_0\in\langle a,b\rangle\subset[x_0-c,x_0+c]$

**Утверждение 3.** Тогда, уменьшая $\langle a,b\rangle$ при необходиости можно добиться, чтобы график решения лежал в $U_c$

**Доказательство.** Действительно, очевидно, что с уменьшением $\langle a,b\rangle$ график решения попадает в $\overline{B}_c(x_0,y_0)$. А ситуация, когда при $x<x_0$ и (или) $x>x_0$ график, оставаясь в $\widetilde{G}$, не принадлежит $\widetilde{G^\circ}$, преодолевается за счёт выбора константы $c_1>c$ такой, что в $\overline{B}_{c_1}(x_0,y_0)$ юудет выполняться глобальное условие Липшица с константой, скажем, $L_1:=L+1$. В результате с учётом непрерывности функции $f(x,y)$ бласть $\widetilde{G^\circ}$ увеличиться, включив в себя дугу интегральной кривой в малой окрестности точки $(x_0,y_0)$ $\square$

Рассмотрим любые два решения $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ ЗК$(x_0,y_0)$, которые определены по крайней мере на некотором общем промежутке $\langle\alpha,\beta\rangle$ таком, что $x_0\in\langle\alpha,\beta\rangle\subset[x_0-c,x_0+c]$
Как установлено выше, уменьшая при необходимости $\langle\alpha,\beta\rangle$, можно добиться, чтобы для всякого $x\in\langle\alpha,\beta\rangle$ точки $\big(x,\varphi_1(x)\big),\big(x,\varphi_2(x)\big)\in U_c$
По лемме о записи решения в интегральном виде для любого $x\in\langle\alpha,\beta\rangle$ справедливо

$$\varphi_j(x)=\varphi_j(x_0)+\int_{x_0}^{x} f\big(s,\varphi_j(s)\big)\,\mathrm{d}\,s,\qquad j=1,2$$

Поэтому

$$\varphi_2(x)-\varphi_1(x)=\int_{x_0}^{x}\Big(f\big(s,\varphi_2(s)\big)-\big(s,\varphi_1(s)\big)\Big)\,\mathrm{d}\,s$$

точки $\big(s,\varphi_j(s)\big)\in U_c$ и для них выполнено неравенство (15). Тогда

$$|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|\le\left|\int_{x_0}^{x}\big|f\big(s,\varphi_2(s)\big)-f\big(s,\varphi_1(s)\big)\big|\,\mathrm{d}\,s\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}L\big|\varphi_2(s)-\varphi_1(s)\big|\,\mathrm{d}\,s\right|$$

К последнему неравенству можно применить следствие к лемме Гроноулла (лемма 7), где $h(x) = |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)|, \quad \lambda = 0, \quad \mu = L$

Тогда $|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \overset{\langle\alpha,\beta\rangle}{\equiv} 0$, т. е. решения $y = \varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ ЗК$(x_0, y_0)$ совпадают в каждой точке $\langle\alpha,\beta\rangle \ni x_0$. Поэтому по определению $(x_0, y_0)$ – это точка единственности □

## 13. Теорема Осгуда

**Теорема 8** (Осгуда; о единственности в области; сильная)**.** Пусть в уравнении (1) функция $f(x, y)$ непрерывна в области $G$ и

$$\forall\ (x, y_1), (x, y_2) \in G \quad |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \le h\big(|y_2 - y_1|\big) \tag{16}$$

где функция $h(s)$ определена, непрерывна и положительна для всякого $s \in (0, +\infty)$ и

$$\int_\varepsilon^a h^{-1}(s)\,\mathrm{d}\,s \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \infty, \qquad a > \varepsilon > 0$$

Тогда $G$ – это область единственности для уравнения (1).

**Доказательство.** Без доказательства □

## 14. Область существования общего решения, лемма о поведении в ней решений, формула общего решения

Опишем множество $\overline{A}$, в котором можно построить общее решение, поскольку гарантировать его существование во всей области единственности $G^\circ$ нельзя, какой бы малой она ни была.

**Алгоритм** (построения $\overline{A}$)**.** Пусть $G^\circ$ – область единственности для уравнения (1).
Возьмём любую точку $(x_0^*, y_0^*) \in G^\circ$
Поскольку $G^\circ$ является открытым множеством, существует такое $\delta > 0$, что $\overline{B}_{2\delta}(x_0^*, y_0^*) \subset G^\circ$
Пусть числа $y_1, y_2$ таковы, что

$$\begin{cases} 0 < y_0^* - y_1 < \delta \\ 0 < y_2 - y_0^* < \delta \end{cases}$$

и найдётся отрезок $[a, b] \ni x_0^*$ такой, что графики решений ЗК$(x_0^*, y_1)$ $y = \varphi_1(x)$ и ЗК$(x_0^*, y_2)$ $y = \varphi_2(x)$ лежат в $\overline{B}_\delta$ при $x \in [a, b]$. Тогда в $\overline{B}_\delta$ содержится компакт

$$\overline{A} = \{\ (x, y) \mid a \le x \le b, \quad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\ \} \tag{17}$$

При этом $A$ – это область, так как по построению $\varphi_1(x_0^*) = y_1 < y_2 = \varphi_2(x_0^*)$, а значит, $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ для всякого $x \in [a, b]$, поскольку в области единственности $G^\circ$ дуги интегральных кривых не могут соприкасаться и разбивать $A$ на несвязные подмножества

**Лемма 8** (о поведении решений на компакте $\overline{A}$)**.** Для любой точки $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ решение ЗК$_{(1)}(x_0, y_0)$ $y = \varphi(x)$ продолжимо на отрезок $[a, b]$

**Доказательство.** Для любой точки $(x_0^*, y_0^*) \in G^\circ$ построим компакт $\overline{A}$ вида (17), тогда $\overline{A} \subset \overline{B}_\delta \subset \overline{B}_{2\delta} \subset G^\circ$
Возьмём произвольную точку $(x_0, y_0) \in \overline{A}$. Тогда прямоугольник

$$\overline{R} \coloneqq \{\ (x, y) \mid |x - x_0| \le \delta, \quad |y - y_0| \le \delta\ \} \quad \subset \overline{B}_{2\delta}$$

Пусть $M \coloneqq \max_{\overline{B}_{2\delta}} |f(x, y)| > 0$ (при $M = 0$ лемма очевидна)
Положим $h \coloneqq \min\left\{\ \delta, {}^{\delta}\!/_{M}\ \right\}$. Тогда $P_h(x_0, y_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$ – отрезок Пеано, построенный для произвольной точки $(x_0, y_0) \in \overline{A}$
Следовательно, по теореме Пеано решение ЗК$(x_0, y_0)$ $y = \varphi(x)$ определено на отрезке Пеано $[x_0 - h, x_0 + h]$, длина которого неизменна для всех точек $(x_0, y_0) \in \overline{A}$

- Рассмотрим функцию $\varphi(x)$ при $x > x_0$:
  - Если $x_0+h < b$, то $\varphi_1(x_0+h) \le \varphi(x_0+h) \le \varphi_2(x_0+h)$, а значит, точчка $x_0+h$, $\big(x_0+h, \varphi(x_0+h)\big)$ Выбрав эту точку в качестве начальной, решение $y - \varphi(x)$ можно продолжить вправо на полуотрезок Пеано $[x_0 + h, x_0 - h]$
    - Если $x_0 + 2h \ge b$, то лемма доказана
    - Иначе сделаем очередное продолжение решения вправо на длину $h$
      В результате за конечное число шагов будет продолжено вправо до точки $b$ включительно
- Аналогично $y = \varphi(x)$ можно продолжить влево до точки $a$

□

Для любой точки $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ обозначим через $y = y(x, x_0, y_0)$ решение ЗК$_{(1)}(x_0, y_0)$
Тогда $y(x_0, x_0, y_0) = y_0$, и по лемме о поведении решений на компакте (лемма 8) решение $y = (x, x_0, y_0)$ определено для всякого $x \in [a, b]$
Для произвольной точки $\zeta \in [a, b]$ рассмотрим функцию

$$\varphi(x, C) = y(x, \zeta, C), \qquad (\zeta, C) \in \overline{A} \tag{18}$$

на прямоугольнике $\overline{Q} = \overline{Q}_{\overline{A}} \coloneqq \{\, (x, C) \mid a \le x \le b, \quad \varphi_1(\zeta) \le C \le \varphi_2(\zeta) \,\}$, который является частным случаем множества $Q_{A^*}$ из определения общего решения.
В самом деле, $\varphi_1(\zeta) \le C \le \varphi_2(\zeta)$ по построению $\overline{A}$. А по лемме решение $y = y(x, \zeta, C)$ определено для любого $x \in [a, b]$ и при $x = \zeta$ по определению решения ЗК $\varphi(\zeta, C) = y(\zeta, \zeta, C) = C$

## 15. Теорема о существовании общего решения

**Теорема 9** (о существовании общего решения). Введённая в формуле (18) функция $y = \varphi(x, C)$ является общим решением уравнения (1) на компакте $\overline{A}$ из (17), построенном в окрестности произвольной точки из области единственности $G^\circ$

**Доказательство.** Покажем, что функция $y = \varphi(x, C)$ удовлетворяет определению общего решения уравнения (1):

1. Возьмём произвольную точку $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ и рассмотрим уравнение $y_0 = \varphi(x_0, C)$ или согласно (18) уравнение
   $$y_0 = y(x_0, \zeta, C) \tag{19}$$
   Наличие у него решения $C = C_0$ фактически означает, что "выпущенное" из точки $(\zeta, C_0) \in \overline{A}$ решение уравнения (1) в момент $x_0$ попадает в точку $(x_0, y_0) \in \overline{A}$
   Покажем, что решение уравнения (19) сущетсвует и единственно:
   "Выпустим" из точки $(x_0, y_0)$ решение $y = y(x, x_0, y_0)$, которое по лемме 8 определено на всём отрезке $[a, b]$ и, в частности, при $x = \zeta \in [a, b]$ по определению (18)
   Пусть $C_0 = y(\zeta, x_0, y_0)$. Тогда $(\zeta, C)$ – это точка единственности, так как принадлежит графику решения $y = y(x, x_0, y_0)$
   Поэтому решение ЗК$(\zeta, C)$ $y = u(x, \zeta, C_0)$ с начальными данными $\zeta, C_0$ по лемме о поведении решений на компакте $\overline{A}$ (лемма 8) продолжимо на $[a, b]$ и совпадает с решением $y = y(x, x_0, y_0)$
   Следовательно, $y_0 = y(x_0, \zeta, C)$, т. е. график функции $y = y(x, \zeta, C_0)$ проходит через точку $(x_0, y_0)$. Другими словами, дуга интегральной кривой, проходящая через точки $(x_0, y_0)$, $(\zeta, C_0)$, имеет на отрезке $[a, b]$ две параметризации $y = y(x, x_0, y_0)$ и $y = (x, \zeta, C_0)$
   Итак, установлено, что уравнение (19) имеет единственное решение $C = C_0 = y(\zeta, x_0, y_0)$, т. е. $y_0 = y\big(x_0, \zeta, y(\zeta, x_0, y_0)\big)$
2. Функция $y = \varphi(x, C_0)$ является решением ЗК$_{(1)}(x_0, y_0)$, поскольку согласно (18) и (19) $\varphi(x_0, C_0) = y(x_0, \zeta, C_0) = y_0$
3. Осталось доказать, что функция $y = \varphi(x, C)$ из (18) непрерывна на компакте $\overline{Q}$ по совокупности переменных:
   - Поскольку для всякого $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ функция $y = \varphi(x, C)$ – это решение уравнения (1), она непрерывна по $x$ при $x \in [a, b]$

- Покажем, что для всякого $x \in [a,b]$ функция $y = \varphi(x,C)$ непрерывна по $C$ при $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$:
  Допуская **противное**, предположим, что найдутся $\widetilde{\varepsilon} > 0$, $\widetilde{x} \in [a,b]$ и последовательность $C_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \widetilde{C}$, $C_k \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ такие, что $\left|\varphi(\widetilde{x}, C_k) - \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C})\right| \geq \widetilde{\varepsilon}$ при всех $k \geq 1$. Это значит, что при $x = \widetilde{x}$ функция $\varphi(\widetilde{x}, C)$ терпит разрыв в точке $\widetilde{C} \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$, поскольку любой компакт, в частности отрезок $[\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$, содержит все свои предельные точки. В этом случае, кстати, $\widetilde{x} \neq \zeta$, так как по определению $\varphi(\zeta, C_k) = C_k \xrightarrow[k\to\infty]{} C = \varphi(\zeta, C)$
  Выпуская из точек $(\zeta, C_k) \in \overline{A}$ дуги интегральных кривых, получаем последовательность решений $y = y(x, \zeta, C_k) = \varphi(x, C_k)$. Поскольку из любой сходящейся последовательности можно выдулить монотонную подпоследовательность, НУО считаем, что последовательность $C_k$ монотонно возрастает, т. е. $C_k < C_{k+1} < \widetilde{C}$ для любого $k \geq 1$
  В области $G^\circ$ интегральные кривые не имеют общих точек, поэтому последовательность $\varphi(\widetilde{x}, C_k)$ тоже монотонно возрастает и ограничена, так как $\varphi(\widetilde{x}, C_k) \leq \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C}) - \widetilde{\varepsilon}$ по предположению. Но любая ограниченная монотонная последовательность имеет предел
  Пусть $\widetilde{y} = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi(\widetilde{x}, C_k)$, тогда $\widetilde{y} \leq \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C}) - \widetilde{\varepsilon}$
  Выберем произвольную точку $y^*$ из интервала $\big(\widetilde{y}, \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C})\big)$
  Рассмотрим определённое на $[a,b]$ решение ЗК$(\widetilde{x}, y^*)$, обозначаемое $y = y(x, \widetilde{x}, y^*)$
  Пусть $C^* = y(\zeta, \widetilde{x}, y^*)$. Тогда $C^* < \widetilde{C}$, так как $y^* < \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C}) = y(\widetilde{y}, \zeta, \widetilde{C})$
  Дугу интегральной кривой решения $y = y(x, \widetilde{x}, y^*)$ на $[a,b]$, как было установлено, параметризует также решение с начальными данными $\zeta, C^*$, имеющее согласно формуле (18) вид $y = \varphi(x, C^*)$, причём $\varphi(\widetilde{x}, C^*) = y^*$
  Однако существует индекс $k^*$ такой, что член $C^{k*}$ сходящейся к $\widetilde{C}$ последовательности $C_k$ будет больше, чем $C^*$
  В результате получилось так, что дуги интегральных кривых решений $y = \varphi(x, C_{k*})$ и $y = \varphi(x, C^*)$ пересекаются в некоторой точке $x^*$, лежащей между $\zeta$ и $\widetilde{x}$, поскольку $\varphi(\zeta, C_{k*}) = C_{k*} > C^* = \varphi(\zeta, C^*)$, а $\varphi(\widetilde{x}, C_{k*}) < \widetilde{y} < y^* = y(\widetilde{x}, \zeta, C^*) = \varphi(\widetilde{x}, C^*)$ – $\lightning$ с тем, что $G$ – область единственности

Итак, доказано, что функция $y = \varphi(x,C)$ непрерывна по каждой из переменных в прямоугольнике $\overline{Q}$. Но этого недостаточно для её непрерывности по совокупности переменных
Воспользуемся ещё одним свойством функции $\varphi$:
Поскольку $y = \varphi(x,C)$ при любой константе $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ есть решение уравнения (1), то $\frac{\partial\varphi(x,C)}{\partial x} \equiv f\big(x, \varphi(x,C)\big)$ на $[a,b]$
Но $\big(x, \varphi(x,C)\big) \in \overline{A}$, когда точка $(x,C) \in \overline{Q}$, а на компакте $\overline{A}$ выполняется неравенство $|f(x,y)| \leq M$. Следовательно, функция $\left|\frac{\partial\varphi(x,C)}{\partial x}\right|$ ограничена на $[a,b]$
С учётом теоремы Лагранжа заключаем, что для любой константы $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi(\zeta)]$ и для любых $x_1, x_2 \in [a,b],\ x_1 < x_2$ найдётся такое $x_C \in (x_1, x_2)$, что $\varphi(x_2, C) - \varphi(x_1, C) = \frac{\partial\varphi(x_C, C)}{\partial x}(x_2 - x_1)$
Этого достаточно, чтобы непрерывность функции $y = \varphi(x,C)$ по $x$ на $[a,b]$, равномерная относительно $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ в силу признака Вейрештрасса с $\delta = {}^{\varepsilon}\!/_{M}$, стала очевидной
Последнее свойство функции $\varphi$ наряду с её поточечной непрерывностью по $C$ гранатирует непрерывность $\varphi(x,C)$ по совокупности переменных в прямоугольнике $\overline{Q}$
Действительно, возьмём произвольную точку $(x_0, C_0) \in \overline{Q}$ и покажем, что функция $\varphi(x,C)$ непрерывна в этой точке:
Для этого зафиксируем любое число $\varepsilon > 0$. Тогда в силу непрерывности функции $\varphi$ по $C$ найдётся такое $\delta_{x_0} > 0$, что

$$\forall C \quad \left(|C - C_0| < \delta_{x_0} \implies |\varphi(x_0, C) - \varphi(x_0, C_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

А из равномерной непреывности $\varphi(x,C)$ по $x$ относительно $C$ вытекает, что

$$\exists\, \delta_0 > 0: \quad \forall C \in [x\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)] \quad \forall x \quad \left(|x - x_0| < \delta_0 \implies |\varphi(x,C) - \varphi(x_0, C)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Выберем число $\delta \coloneqq \min\{\, \delta_{x_0}, \delta_0 \,\}$, тогда для любой точки $(x,C)$ получаем:

$$\|(x,C) - (x_0, C_0)\| \coloneqq \max\{\ |\ x - x_0|, |C - C_0|\ \} < \delta$$

Следовательно,

$$|\varphi(x,C)-\varphi(x_0,C_0)| \overset{\Delta}{\leq} |\varphi(x,C)-\varphi(x_0,C)|+|\varphi(x_0,C)-\varphi(x_0,C_0)| = \varepsilon$$

□

## 16. Формула общего решения, теорема о дифференцируемости общего решения

**Определение 8.** Общее решение $y=\varphi(x,C)$, определённое формулой (18), будем называть общим решением в форме Коши или классическим общим решением уравнения первого порядка (1).

**Теорема 10** (о дифференцируемости общего решения)**.** Пусть на компакте $\overline{A}$ из (17) при некотором $\zeta\in[a,b]$ формула (18) задаёт общее решение $y=\varphi(x,C)$, и в уравнении (1) $f(x,y)$ непрерывно дифференцируема по $y$ в некоторой окрестности $\overline{A}$

$$\Longrightarrow \qquad \forall (x,C)\in\overline{Q}: \quad \frac{\partial\varphi(x,C)}{\partial x} = \exp\left(\int_\zeta^x \frac{\partial f\big(t,\varphi(t,C)\big)}{\partial y}\,\mathrm{d}\,t\right) \tag{20}$$

**Доказательство.** Зафиксируем произвольным образом константу $C\in[\varphi_1(\zeta),\varphi_2(\zeta)]$, после чего для всякого $x\in[a,b]$ положим $\Delta\varphi=\varphi(x,C+\Delta C)-\varphi(x,C)$, где $\Delta C$ – приращение аргумента $C$
Поскольку при фиксированной $C$ функция $y=\varphi(x,C)$ является решением уравнения (1), справедлива цепочка равенств:

$$\frac{\mathrm{d}(\Delta\varphi)}{\mathrm{d}\,x} = f\Big(x,\varphi(x,C+\Delta C)\Big)-f\Big(x,\varphi(x,C)\Big) = \int_0^1 \mathrm{d}\Big(f\big(x,\varphi(x,)+\Delta\varphi\cdot s\big)\Big) =$$

$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\,f\Big(x,\varphi(x,C)+\Delta\varphi\cdot s\Big)}{\mathrm{d}\,s}\,\mathrm{d}\,s = p(x,\Delta C)\Delta\varphi, \qquad p(x,\Delta C) := \int_0^1 \frac{\partial f\Big(x,\varphi(x,C)+\Delta\varphi\cdot s\Big)}{\partial y}\,\mathrm{d}\,s$$

- Пусть $\Delta C\neq 0$, тогда, поделив первое и последнее выражение в цепочке на $\Delta C$, убеждаемся, что функция $\psi(x,\Delta C) := \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta C}$ является решением ЗК$(\zeta,1)$ линейного однородного уравнения $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}=p(x,\Delta C)u$, так как

  $$\psi(\zeta,\Delta C) = \frac{\varphi(\zeta,C+\Delta C)-\varphi(\zeta,C)}{\Delta C} \underset{(18)}{=\!=} \frac{C+\Delta C-C}{\Delta C} = 1$$

  Следовательно, $\psi(x,\Delta C)=\exp\left(\int_\zeta^x p(t,\Delta C)\,\mathrm{d}\,t\right)$

- Но $p(x,\Delta C)$ существует и при $\Delta C=0$:

  $$p(x,0) = \frac{\partial f\Big(x,\varphi(x,C)\Big)}{\partial y}$$

Поэтому

$$\frac{\partial\varphi(x,C)}{\partial C} = \lim_{\Delta C\to 0}\psi(x,\Delta C) = \exp\left(\lim_{\Delta C\to 0}\int_\zeta^x p(t,\Delta C)\,\mathrm{d}\,t\right)$$

В результате частная производная общего решения $y=\varphi(x,C)$ по $C$ существует, непрерывна и вычисляется по формуле (20) □

Часть II

# Уравнения первого порядка в симметричной форме

Ааа! Симметричные дифуры!

$$M(x,y)\,\mathrm{d}\,x + N(x,y)\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{21}$$

## 17. Определение интеграла, теорема о характеристическом свойстве интеграла

**Определение 9.** Непрерывную в области $B \subset \mathbb{R}^2$ функцию $U(x,y)$ будем называть допустимой, если для любой точки $(x_0, y_0) \in B$ найдётся такая непрерывная функция $y = \xi(x)$ или $x = \eta(y)$, определённая на интервале $(\alpha, \beta)$, содержащем точку $x_0$ или $y_0$, что:

1. $y_0 = \xi(x_0)$ или $x_0 = \eta(y_0)$
2. точка $\big(x, \xi(x)\big) \in B$ для любого $x \in (\alpha, \beta)$ или
   точка $\big(\eta(y), y\big) \in B$ для любого $y \in (\alpha, \beta)$
3. $y = \xi(x)$ или $x = \eta(y)$ – единственное решение уравнения

$$U(x,y) = U(x_0, y_0) \tag{22}$$

**Замечание.** Условие 3 означает, что выполняется по крайней мере одно из тождеств:

$$\left[\begin{array}{l} U\big(x, \xi(x)\big) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} U(x_0, y_0) \\ U\big(\eta(y), y\big) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} U(x_0, y_0) \end{array}\right.$$

**Определение 10.** Допустимая функция $U(x,y)$ называется *интегралом* уравнения (21) в области единственности $B^0$, если для любой точки $(x_0, y_0) \in B^0$ единственная функция $y = \xi(x)$ или $x = \eta(y)$ из определения допустимой функции — это решение ЗК$_{(21)}(x_0, y_0)$ на $(\alpha, \beta)$.

**Теорема 11** (о характеристическом свойстве интеграла)**.** Для того чтобы допустимая функция $U(x,y)$ была интегралом уравнения в симметричной форме (21) в области единственности $B^\circ$, **необходимо и достаточно**, чтобы $U(x,y)$ обращалась в постоянную вдоль любого решения (21), т. е. чтобы:

- $U\big(x, \varphi(x)\big) \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} C$ для любого решения $y = \varphi(x)$, определённого на $\langle a, b\rangle$
- $U\big(\psi(y), y\big) \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} C$ для любого решения $x = \varphi(y)$, определённого на $\langle a, b\rangle$

**Доказательство.**

- Необходимость:
  Пусть $U(x,y)$ – интеграл уравнения (21) в области единственности $B^\circ$, и пусть, например, $y = \varphi(x)$ – какое-либо решение уравнения (21), определённое на промежутке $\langle a, b\rangle$
  НУО[1]будем считать, что $\langle a, b\rangle = (a, b)$
  Возьмём произвольную точку $x_0 \in (a, b)$ и положим $y_0 := \varphi(x_0)$
  Точка $(x_0, y_0) \in B^\circ$, поэтому по определению допустимой функции уравнение (22) $U(x,y) = U(x_0, y_0)$ однозначно разрешимо или относительно $x$, или относительно $y$:
  - Пусть (22) однозначно разрешимо относительно $y$, т. е. существует такая единственная функция $y = \xi(x)$, заданная на некотором $(\alpha, \beta) \ni x_0$, что $U\big(x, \xi(x)\big) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} U(x_0, y_0)$
    Эта функция по опреелению интеграла является решением ЗК$_{(21)}(x_0, y_0)$
    Поскольку $B^\circ$ – область единственности, $\varphi(x) \overset{(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})}{\equiv} \xi(x)$, где $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = (a,b) \cap (\alpha, \beta)$. Следова-

тельно,
$$U\big(x,\varphi(x)\big) \overset{(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})}{\equiv} U(x_0,y_0) \tag{23}$$

– Пусть (22) однозначно разрешимо относительно $x$, т. е. на некотором интервале $(\alpha,\beta)\ni y_0$ существует единственная функция $x=\eta(y)$ такая, что $\eta(y_0)=x_0$ и $U\big(\eta(y),y\big)\equiv U(x_0,y_0)$ на $(\alpha,\beta)$
Тогда по определению интеграла $x=\eta(y)$ на $(\alpha,\beta)$ является решением ЗК$_{(21)}(y_0,x_0)$, а значит, единственное решение этой ЗК имеет два представления: $y=\varphi(x)$ и $x=\eta(y)$. Поэтому дуга интегральной кривой такого решения в некоторой окрестности точки $(x_0,y_0)$, не имея вертикальных и горизонтальных касательных, может быть параметризована как функцией $y=\varphi(x)$, так и функцией $x=\eta(x)$
Иными словами, сущетвуют такие интервалы $(\widetilde{a},\widetilde{b})$ и $(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})$, что
$$x_0\in(\widetilde{a},\widetilde{b})\subset(a,b),\quad y_0\in(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})\subset(\alpha,\beta),\qquad y\overset{(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})}{\equiv}\varphi\big(\eta(y)\big),\quad x\overset{(\widetilde{a},\widetilde{b})}{\equiv}\eta\big(\varphi(x)\big)$$
Поэтому справедлива доказывающая (23) цепочка равенств:
$$U\big(x,\varphi(x)\big)\overset{)\widetilde{a},\widetilde{b}}{\equiv}U\Big(\eta\big(\varphi(x)\big),\varphi(x)\Big)\overset{(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})}{\equiv}U\big(\eta(y),y\big)\overset{(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})}{\equiv}U(x_0,y_0)$$

– Осталось показать, что (23) выполняется на всём интервале $(a,b)$:
**Допустим**, что $\widetilde{\beta}<b$ и найдутся такие $x_1,x_2\in[\widetilde{\beta},b)$, $(x_1<x_2)$, что $U\big(x,\varphi(x)\big)\overset{(\widetilde{\alpha},x_1]}{\equiv}U(x_0,y_0)$, $\quad U\big(x,\varphi(x)\big)\neq U(x_0,y_0)$ для любого $x\in(x_1,x_2)$
При $y_1=\varphi(x_1)$ в последнем тождестве $U(x_1,y_1)=U(x_0,y_0)$. По определению решения точка $(x_1,y_1)\in B^\circ$, поэтому для неё верны все рассуждения, касающщиеся точки $(x_0,y_0)$
Пусть $y=\xi_1(x)$ – единственное на $(\alpha_1,\beta_1)$, $\Big(x_!\in(\alpha_1,\beta_1)\subset(x_0,x_2)\Big)$ решение уравнения $U(x,y)=U(x_1,y_1)$, т. е. $U\big(x,\xi_1(x)\big)\equiv U(x_1,y_1)$ на $(\alpha_1,\beta_1)$, и оно же по определению интеграла является единственным решением ЗК$(x_1,y_1)$. Тогда $\xi_1(x)\equiv\varphi(x)$ на $(\alpha_1,\beta_1)$, и $U\big(x,\varphi(x)\big)\overset{[x_1,\beta_1)}{\equiv}U(x_1,y_1)=U(x_0,y_0)$ – $\lightning$
Ситуация с точками $x_1,x_2\in(a,\widetilde{\alpha}]$ рассматривается аналогично

– Достаточность:
Пусть допустимая функция $U(x,y)$ обращается в постоянную на любом решении уравнения (21). Покажем, что в таком случае $U(x,y)$ – интеграл этого уравнения в области едиснтвенности $B^\circ$
Возьмём произвольную точку $(x_0,y_0)\in B^\circ$. Тогда существует единственное решение ЗК$(x_0,y_0)$ вида $y=\varphi(x)$ на $(a,b)\ni x_0$, или $x=\psi(y)$ на $(a,b)\ni y_0$
Пусть, например, $x=\psi(y)$ является решением уравнения (21). Тогда по условию теоремы $U\big(\psi(y),y\big)\equiv U(x_0,y_0)$ на $(a,b)$
Если функция $U(x,y)$, будучи допустимой, однозначно разрешима относительно $x$, т. е. на некотором $(\alpha,\beta)\ni y_0$ существует и единственна функция $x=\eta(y)$ такая, что $U\big(\eta(y),y\big)\equiv U(x_0,y_0)$ на $(\alpha,\beta)$, то $\psi(y)\equiv\eta(y)$ на $(a,b)\cap(\alpha,\beta)$. А если уравнение (22) однозначно разрешимо относительно $y$, то можно показать, как и при доказательстве необходимости, что функция $y=\xi(x)$ – решение уравнения (21), поскольку является обратной к решению $x=\psi(y)$
В результате допустимая функция $U(x,y)$ – это интеграл уравнения (21) в области единственности $B^\circ$

□

Действительно, если $\langle a,b\rangle=[a,b]$, то по лемме о продолжимости решения, решение может быть продолжено на интервал $(a_1,b_1)\supset[a,b]$

# 18. Определение гладкого интеграла, теорема о характеристическом свойстве гладкого интеграла

**Определение 11.** Гладкую функцию $U(x,y)$ будем называть галдкой допустимой в области $B$, если $U_x'^2+U_y'^2>0$ для любой точки $(x,y)\in B$

**Определение 12.** Интеграл $U(x,y)$ уравнения (21) будем называть гладким, если $U$ – гладкая допустимая функция

**Теорема 12** (о характеристическом свойстве гладкого интеграла)**.** Для того чтобы гладкая допустимая функция $U(x,y)$ была гладким интегралом уравнения (21) в области единственности $B^\circ$, **необходимо и достаточно**, чтобы выполнялось тождество

$$N(x,y)U'_x(x,y) - M(x,y)U'_y(x,y) \overset{B^\circ}{\equiv} 0 \tag{24}$$

**Доказательство.**

- Необходимость
  Пусть $U(x,y)$ – это гладкий интеграл уравнения (21). Возьмём любую точку $(x_0,y_0)\in B^\circ$
  Тогда $M^2(x_0,y_0)+N^2(x_0,y_0)\neq 0$. Пусть, например, $N(x_0,y_0)\neq 0$
  Тогда $(x_0,y_0)\in B_N^\circ$, где $B_N^\circ$ – некая компонента связности открытого множества $B^\circ\setminus\overline{N}_0$, в которой $N(x,y)\neq 0$ и уравнение (21) равносильно уравнению $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$.
  Пусть $y=\varphi(x)$ – решение ЗК$_{(21)}(x_0,y_0)$, определённое на некотором интервале $(a,b)\ni x_0$
  Тогда по определению решениия

  $$\varphi'(x) \equiv -\frac{M\big(x,\varphi(x)\big)}{N\big(x,\varphi(x)\big)} \quad \text{на } (a,b)$$

  По теореме о характеристическом свойстве интегала имеем:

  $$U\big(x,\varphi(x)\big) \overset{(a,b)}{\equiv} U(x_0,y_0)$$

  Продиффиренцируем по $x$:

  $$U'_x\big(x,\varphi(x)\big) + U'_y\big(x,\varphi(x)\big)\varphi'(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0$$

  Подставляя $\varphi'(x)$ и домножая на $N$, получаем:

  $$N\big(x,\varphi(x)\big)U'_x\big(x,\varphi(x)\big) - M\big(x,\varphi(x)\big)U'_y\big(x,\varphi(x)\big) \overset{(a,b)}{\equiv} 0$$

  Положим $x=x_0$, тогда $\varphi(x_0)=y_0$, и для любой точки $(x_0,y_0)\in B^\circ$ получаем равенство (24)

- Достаточность
  Пусть в $B^\circ$ выполняется тождество (24)
  Возьмём любую точку $(x_0,y_0)\in B^\circ$, и пусть, например, $U'_y(x_0,y_0)\neq 0$
  Тогда $U'_y(x,y)\neq 0$ в некоторой окрестности $V(x_0,y_0)$ и в ней уравнение (22) $U(x,y)=U(x_0,y_0)$ однозначно разрешимо относительно $y$, т. е. существует и единственна функция $y=\xi(x)$, определённая на некотором интервале $(\alpha,\beta)\ni x_0$ такая, что $\xi(x_0)=y_0, \quad \xi\in\mathcal{C}^1\big((\alpha,\beta)\big)$ и $U\big(x,\xi(x)\big)\equiv U(x_0,y_0)$ на $(\alpha,\beta)$
  Дифференцируя последнее тождество, получаем

  $$U'_x\big(x,\xi(x)\big) + U'_y\big(x,\xi(x)\big)\xi'(x) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} 0, \qquad \big(x,\xi(x)\big)\in V$$

  а значит, $\xi'(x) \equiv -\dfrac{U'_x\big(x,\xi(x)\big)}{U'_y\big(x,\xi(x)\big)}$
  Покажем, что $y=\xi(x)$ является решением уравнения (21), т. е. на интервале $(a,b)$, например, удовлетворяет тождеству $3_1$ из определения решения. Подставляя $\xi(x)$ в левую часть этого тождества, получаем:

  $$M\big(x,\xi(x)\big) + N\big(x,\xi(x)\big)\xi'(x) \equiv \frac{M\big(x,\xi(x)\big)U'_y\big(x,\xi(x)\big) - N\big(x,\xi(x)\big)U'_x\big(x,\xi(x)\big)}{U'_y\big(x,\xi(x)\big)} \overset{(24)}{\equiv} 0$$

$\square$

**Следствие.** Гладкая допустимая функция $U(x,y)$ есть гладкий интеграл уравнения (1) $y'=f(x,y)$ в области единственности $G^\circ$ **тогда и только тогда**, когда верно тождество

$$U'_x(x,y) + f(x,y)U'_y(x,y) \overset{G^\circ}{\equiv} 0$$

## 19. Теоремы о существовании непрерывного интеграла и о связи между интегралами

**Теорема 13** (о существовании непрерывного интеграла)**.** Для любой точки $(x_0, y_0)$ из области единственности $B^\circ$ найдётся окрестность $S \subset B^\circ$, в которой уравнение (21) имеет интеграл $U(x,y)$

**Доказательство.** Пусть $(x_0, y_0)$ — это произвольная точка из области единственности $B^\circ$ и, например, $N(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда найдётся окрестность $B_N^\circ$, в которой $N(x,y) \neq 0$, а значит, в ней уравнение в симметричной форме (21) равносильно уравнению $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$.
Согласно теореме о существовании общего решения в области

$$A = \{\, (x,y) \mid a < x < b, \quad \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x) \,\} \subset B_N^\circ$$

существует общее решение $y = \varphi(x, C)$.
По определению общего решения уравнение $y = \varphi(x, C)$ однозначно разрешимо относительно $C$ для любой точки $(x,y) \in A$, т. е. $C = U(x,y)$, причём $U\big(x, \varphi(x,C)\big) \overset{(a,b)}{\equiv} C$
В результате уравнение $U(x,y) = C$ однозначно разрешимо относительно $y$, а значит, функция $U$ – допустимая и постоянна вдоль любого решения, график которого лежит в области $A$
По теореме о характеристическом свойстве интеграла функция $U(x,y)$ является интегралом уравнения (21) в области $A$ ☐

## 20. Теоремы о существовании гладкого интеграла и о связи между интегралами

**Теорема 14** (о существовании гладкого интеграла)**.**
В уравнении (21) функции $M(x,y),\ N(x,y) \in \mathcal{C}^1(B)$
Тогда для любой точки $(x_0, y_0)$ из области $B$ существует её окрестность $A \subset B$, в которой уравнение (21) имеет гладкий интеграл $U(x,y)$

**Доказательство.** По слабой теореме о единственности в области множество $B$ является областью единственности
Возьмём любую точку $(x_0, y_0)$ из $B$. И пусть, например, $N(x_0, y_0) \neq 0$, $B_N$ — окрестность $(x_0, y_0)$, в которой $N(x,y) \neq 0$ и уравнение (21) равносильно уравнению $y' = f_*(x,y)$ с $f_* := -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$. При этом по условию теоремы в области $B_N$ определена и непрерывна частная производная $\frac{\partial f_*(x,y)}{\partial y}$
Пусть $A := \{\, (x,y) \mid a < x < b, \quad \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x) \,\}$ — окрестность точки $(x_0, y_0)$, лежащая в $B_N$ вместе со своим замыканием. По теореме о существовании общего решения в $A$ существует общее решение $y = \varphi(x, C)$ уравнения $y' = f_*(x,y)$, задаваемое формулой (18) $\varphi(x,C) = y(x, \xi C)$, в которой $\xi \in (a,b)$ выбирается произвольным образом, $(\xi, C) \in \overline{A}$, т. е. $C \in [\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)]$, а $y(x, \xi, C)$ — решение ЗК$(\xi, C)$
Положим $\xi = x_0$. Согласно (20)

$$\frac{\partial \varphi(x,C)}{\partial C} = \exp\left( \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f_*\big(t, \varphi(t,C)\big)}{\partial y} \,\mathrm{d}\, t \right), \qquad \frac{\partial \varphi(x_0, C)}{\partial C} = 1 \quad \forall C \in [\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$$

Следовательно, по теореме о неявной функции уравнение $\varphi(x,C) - y = 0$ однозначно разрешимо относительно $C$. Его решение $C = U(x,y)$, как установлено в доказательстве теоремы о существовании непрерывного интеграла, является интегралом уравнения (21) и непрерывно дифференцируемо по $y$ в области $A$.
Остаётся заметить, что функция $U(x,y)$ является также гладкой по $x$, (т. к. обратная к ней $y = \varphi(x,C)$ гладкая по определнию общего решения).
Поэтому $U(x,y)$ — гладкая допустимая функция, а значит, и гладкий интеграл.
Случай, когда $N(x_0, y_0) = 0,\ M(x_0, y_0) \neq 0$ рассматривается аналогично. ☐

**Теорема 15** (о связи между интегралами). $U(x,y)$ — интеграл уравнения (21) в некоторой области $A$. Тогда:

1. если $U_1(x,y)$ — ещё один интеграл в $A$, то существует функция $\Phi(x)$ такая, что $U_1(x,y) \overset{A}{\equiv} U(x,y)$;

2. если функци $\Phi\big(U(x,y)\big)$ допустима, то $U_1(x,y) \overset{A}{\equiv} \Phi\big(U(x,y)\big)$ — это интеграл уравнения (21) в области $A$.

**Доказательство.**

1. Пусть интеграл $U(x,y)$ построен в области $A$ при помощи общего решения $\varphi(x,C)$.
   Тогда $U\big(x,\varphi(x,C)\big) \overset{(a,b)}{\equiv} C$.
   Поскольку $U_1(x,y)$ — тоже интеграл в $A$, то

$$\forall C \in \mathbb{R} \quad U_1\big(x,\varphi(x,C)\big) \overset{(a,b)}{\equiv} \Phi\Big(U\big(x,\varphi(x,C)\big)\Big)$$

   Но точки $\big(x,\varphi(x,C)\big)$ заполняют всю область $A$, поэтому в $A$ справедливо тождество $U_1(x,y) \equiv \Phi\big(U(x,y)\big)$.

2. Пусть $\Phi$ — произвольная вещественная функция такая, что функция $\Phi\big(u(x,y)\big)$ допустима.
   Положим $U_1(x,y) \coloneqq \Phi\big(U(x,y)\big)$. Тогда функция $U_1$ допустима и обращается в постоянную вдоль любого решения (т. к. по предположению, $U$ — это интеграл). Поэтому $U_1$ является интегралом.

□

## 21. Теорема об интеграле уравнения с разделяющимися переменными

**Определение 13.** Уравнением с разделяющимися переменными в симметрической форме будем называть уравнение (21) вида

$$g_1(x)h_2(y)\,\mathrm{d}\,x + g_2(x)h_1(y)\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{25}$$

в котором $g_1(x),\ g_2(x) \in \mathcal{C}\big(\langle a,b\rangle\big), \quad h_1(y),\ h_2(y) \in \mathcal{C}\big(\langle c,d\rangle\big)$, причём

$$(a,b) \setminus (g_1^\circ \cup g_2^\circ) = \bigcup_{k=1}^{k_*}(a_k,b_k), \qquad (c,d) \setminus (h_1^\circ \cup h_2^\circ) = \bigcup_{l=1}^{l_*}(c_l,d_l) \tag{26}$$

$$\forall x \in (a,b) \quad g_1^2(x) + g_2^2(x) \neq 0, \qquad \forall y \in (c,d) \quad h_1^2(y) + h_2^2(y) \neq 0 \tag{27}$$

где $g_i^\circ = \{\, x \in \langle a,b\rangle \mid g_i(x) = 0 \,\}, \quad h_i^\circ = \{\, y \in \langle c,d\rangle \mid h_i(y) = 0 \,\}$ — замкнутые множества нулей функций $g$ и $h$

Таким образом,

$$M(x,y) = g_1(x)h_2(y) \in \mathcal{C}\big(\widetilde{R}\big), \qquad N(x,y) = g_2(x)h_2(y) \in \mathcal{C}\big(\widetilde{R}\big)$$

где прямоугольник $\widetilde{R} = \{\, (x,y) \mid x \in \langle a,b\rangle, \quad y \in \langle c,d\rangle \,\}$
Условие (26) позволяет избежать "экзотических" ситуаций, типа канторовых множеств.
Условие (27) означает, что $\widetilde{R}$ не пересекают ни горизонтальные, ни вертикальные прямые, состоящие из особых точек и "разрезающие" его на части. Только любой из четырёх отрезков, ограничивающих $\widetilde{R}$ может целиком состоять из особых точек. Рассмотрим

$$H_i \coloneqq \{\, (x,y) \mid x \in g_i^\circ, \quad y \in h_i^\circ \,\}, \qquad i = 1,2$$

Тогда $H_i$ может состоять из не более чем счётного объединения точек, отрезков и четырёхугольников. Кроме того, $H_1 \cap H_2$ может содержать только вершины $\widetilde{R}$.
В результате уравнение (25) рассматриваем на множестве $\widetilde{B} = B \cup \widehat{B} \cup \breve{B}$, в котором

$$B = R \setminus (H_1 \cup H_2), \qquad \breve{B} = (H_1 \cup H_2) \cap \partial B, \qquad \widehat{B} = \partial B \setminus \breve{B}, \qquad R = \{\, (x,y) \mid x \in (a,b), \quad y \in (c,d) \,\}$$

Для любых $x_2 \in g_2^\circ$ и $y_2 \in h_2^\circ$ функции $N(x_2, y) \equiv M(x, y_2) \equiv 0$. Поэтому функции $x(y) = x_2$ при $y \in (c, d)$ и $y(x) = y_2$ при $x \in (a, b)$ удовлетворяют уравнению, являясь полными внутренними решениями соответственно на всех интервалах $(c_l, d_l) \subset (c, d) \setminus g_2^\circ$ и $(a_k, b_k) \subset (a, b) \setminus g_2^\circ$.
Остаётся решить уравнение в каждой из областей

$$B_{kl} \coloneqq \{\, (x, y) \mid x \in (a_k, b_k), \quad y \in (c_l, d_l) \,\} \setminus (H_1 \cup H_2), \qquad \bigcup_{k,l \geq 1} B_{kl} =: B$$

причём для любой точки $(x, y) \in B_{kl}$ справедливы условия

$$g_2(x) \neq 0, \qquad h_2(y) \neq 0, \qquad g_1^2(x) + h_1^2(y) \neq 0 \tag{28}$$

Покажем, что любая область $B_{kl}$ — это область единственности:
Возьмём произвольную точку $(x_k, y_l) \in B_{kl}$ и рассмотрим случай, когда $h_1(y_l) \neq 0$:
Существует интеграл $(\widetilde{c}, \widetilde{d}) \subset c_l, d_l$ такой, что $h_1(y) \neq 0$ для всякого $y \in (\widetilde{c}, \widetilde{d})$. Поэтому в области

$$G^\circ \coloneqq \Big\{ \,(x, y) \mid x \in (a_k, b_k), \quad y \in (\widetilde{c}, \widetilde{d})\, \Big\}$$

уравнение (25) равносильно уравнению (1) вида

$$y' = g(x)h(y) \tag{29}$$

в котором в данном случае $g = -g_1(x)g_2^{-1}(x), \quad h = h_2(y)h_1^{-1}(y) \neq 0$, и $f(x, y) = g(x)h(y)$ непрерывна в прямоугольной области $G^\circ$

**Определение 14.** Уравнение (29), в котором $g \in \mathcal{C}\big((a_k, b_k)\big), \quad h \in \mathcal{C}\big((\widetilde{c}, \widetilde{d})\big)$, называют уравнением с разделяющимися переменными, разрешённым относительно производной

Покажем, что $G^\circ$ — область единственности для уравнения (29). Этого достаточно, чтобы произвольным образом выбранная точка $(x_k, y_l)$ из $B_{kl}$ оказаласть точкой единственности для уравнения (25).
Пусть $H(y) \coloneqq \int h^{-1}(y)\, \mathrm{d}\, y$, и, для определённости, функция $h(y) > 0$ при $y \in (\widetilde{c}, \widetilde{d})$. Тогда $H(y)$ — гладкая, строго возрастающая функция.
Сделаем в уравнени (29) замену $u \coloneqq H(y)$. Для этого продифференцируем тождество $u(x) = H\big(y(x)\big)$ по $x$ в силу уравнения (29), получая

$$\frac{\mathrm{d}\, u(x)}{\mathrm{d}\, x} = \frac{|diH\big(y(x)\big)}{\mathrm{d}\, y} \cdot \frac{\mathrm{d}\, y(x)}{\mathrm{d}\, x} = h^{-1}\big(y(x)\big) \cdot g(x) \cdot h\big(y(x)\big) = g(x)$$

$$u' = g(x)$$

Это уравнение определно в области

$$G_u^\circ = \Big\{ \,(x, y) \mid x \in (a, b), \quad u \in \big(H(\widetilde{c}), H(\widetilde{d})\big)\, \Big\}$$

Его общее решение:

$$u(x, C) = \int g(x)\, \mathrm{d}\, x + C$$

Область $G_u^\circ$ является областью единственности для уравнения $u' = g(x)$, так как интегральные кривые в ней не могут иметь общих точек. Они получены параллельными переносами одной и той же первообразной. А поскольку замена $u = H(y)$ обратима, $G^\circ$ оказывается областью единственности для уравнения (29).
В результате установлено, что $B_{kl}$ — область единственности для уравнения (25), и в ней (25) с учётом (28) равносильно уравнению с разделёнными переменными:

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)}\, \mathrm{d}\, x + \frac{h_1(y)}{h_2(y)}\, \mathrm{d}\, y = 0 \tag{30}$$

Рассмотрим в любой области $B_{kl}$ гладкую функцию

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{g_1(s)}{g_2(s)}\, \mathrm{d}\, s + \int_{y_0}^{y} \frac{h_1(s)}{h_2(s)}\, \mathrm{d}\, s, \qquad x_0, y_0 \in B_{kl} \tag{31}$$

Тогда

$$U'_x(x, y) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}, \qquad U'_y(x, y) = \frac{h_1(y)}{h_2(y)}$$

$$\underset{(28)}{\Longrightarrow} U'^2_x + U'^2_y \neq 0$$

$U$ — гладкая допустимая функция и для неё, очевидно, выполняется тождество (24), а значит, по теореме о характеристическом свойстве гладкого интеграла функция $U(x, y)$ является интегралом уравнения (30).
В результате, доказана следующая теорема:

**Теорема 16** (об интеграле уравнения с разделяющимися переменными). Любая область $B_{kl}$ с учётом условий (28) является областью единственности уравнения (25), и в ней функция $U(x, y)$ является гладким интегралом уравнения (25)

## 22. Теорема об интеграле уравнения в полных дифференциалах; теорема об уравнении в полных дифференциалах, локальная

**Определение 15.** Уравнение (21) называется уравнением в полных дифференциалах (УПД) в области $B$, если существует функция $U(x, y) \in \mathcal{C}^1\big(B\big)$ такая, что для всякой точки $(x, y) \in B$,

$$U'_x(x, y) = M(x, y), \qquad U'_y(x, y) = N(x, y) \tag{32}$$

**Теорема 17** (об интеграле УПД). $U(x, y)$ — это гладкий интеграл УПД в $B$

**Доказательство.** Пусть существует гладкая функция $U(x, y)$, для которой в $B$ выполняются равенства (32). Тогда $U'^2_x + U'^2_y \neq 0$, а значит, по определению $U$ — гладкая допустимая функция.
При этом, в $B$ очевидым образом выполняется тождество (24), следовательно, по теореме о характеристическом свойстве гладкого интеграла функция $U(x, y)$ явлется глдаким интегралом в $B$.
Остаётся показать, что $B$ — это область единственности.
Возьмём произвольную точку $(x_0, y_0) \in B$ и произвольное решение $y = \varphi(x)$ ЗК$_{(21)}(x_0, y_0)$ на каком-либо интервале $(a, b) \ni x_0$. Тогда $\varphi(x_0) = y_0$, и по определению решения

$$M\big(x, \varphi(x)\big) + N\big(x, \varphi(x)\big)\varphi'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

$$\Longrightarrow \ \mathrm{d}\, U\big(x, \varphi(x)\big) = U'_x\big(x, \varphi(x)\big)\, \mathrm{d}\, x + U'_y\big(x, \varphi(x)\big)\, \mathrm{d}\, \varphi(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \ U\big(x, \varphi(x)\big) \overset{(a,b)}{\equiv} U\big(x_0, \varphi(x_0)\big)$$

В результате любое решение поставленной ЗК$_{\text{УПД}}$ удовлетворяет уравнению (22) в некоторой окрестности точки $x_0$. А функция $U$, будучи допустимой, однозначно разершима, следоваетельно, в $B$ не существует двух различных решений одной и той же ЗК. □

**Теорема 18** (об УПД; локальная). Предположим, что для уравнения (21) выолняются условия:

1. прямоугольник $R = \{\, (x, y) \mid x \in (a, b), \quad y \in (c, d) \,\} \subset B$;
2. в $B$ существуют и непрерывны частные производные $M'_y, N'_y$;
3. верно тождество
$$M'_y(x, y) - N'_x(x, y) \equiv 0 \tag{33}$$
Тогда (21) — УПД в $R$, и для любых $x_0, x \in (a, b), \quad y_0, y \in (c, d)$ его интегралами являются функции
$$U_1(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(s, y_0)\, \mathrm{d}\, s + \int_{y_0}^{y} N(x, s)\, \mathrm{d}\, s \tag{34}$$
$$U_2(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(s, y)\, \mathrm{d}\, s + \int_{y_0}^{y} N(x_0, s)\, \mathrm{d}\, s$$

**Доказательство.** Возьмём, например, гладкую функцию $U_1(x, y)$ и покажем, что она удовлетворяет равенствам (32) для любой точки $(x, y) \in R$. Этого достаточно, чтобы (21) было УПД в $R$.
Дифференцируя (34) сначала по $y$, а затем по $x$, получаем:

$$\frac{\partial U_1(x, y)}{\partial y} = N(x, y), \qquad \frac{\partial U_1(x, y)}{\partial x} = M(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial N(x, s)}{\partial x}\, \mathrm{d}\, s$$

Теперь во втором равенстве испольуем тождество (33):

$$\frac{\partial U_1(x, y)}{\partial x} = M(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial M(x, s)}{\partial y}\, \mathrm{d}\, s = M(x, y)$$

$\square$

## 23. Теоремы о существовании и нахождении интегрирующего множителя, решение линейного уравнения при помощи интегрирующего множителя

**Определение 16.** Функция $\mu(x,y)$, определённая, непрерывная и не обращающаяся в ноль в области $B$, называется интегрирующим множителем дифференциального уравнения (21), если уравнение

$$\mu(x,y)M(x,y)\,\mathrm{d}\,x + \mu(x,y)N(x,y)\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{35}$$

является УПД в $B$.

**Теорема 19** (о существовании интегрирующего множителя). Если в области единственности $B^\circ \subset B$ уравнение (21) имеет гладкий интеграл, тогда в $B^\circ$ существует интегрирующий множитель.

**Доказательство.** Пусть $U(x,y)$ — гладкий интеграл уравнения (21) в области $B^\circ$.
Тогда из тождества (24) вытекает, что в $B^\circ$

$$\frac{U'_x(x,y)}{M(x,y)} = \frac{U'_y(x,y)}{N(x,y)}$$

причём числитель и значенатель в одной из частей равенства могут одновременно обращаться в ноль. Поэтому функция

$$\mu(x,y) \coloneqq \frac{U'_x(x,y)}{M(x,y)} = \frac{U'_y(x,y)}{N(x,y)}$$

удовлетворяет определнию интегриующего множителя. $\square$

Если (35) — УПД, то сголасно тождеству (33) $(\mu M)'_y - (\mu N)'_x = 0$.
Перегруппируем:

$$\mu'_x N - \mu'_y M - (M'_y - N'_x)\mu \tag{36}$$

**Теорема 20** (о нахождении интегрирующего множителя).
Пусть нашлась такая функция $\omega(x,y) \in \mathcal{C}^1\big(B\big)$, что

$$\frac{M'_y(x,y) - N'_x(x,y)}{\omega'_x(x,y)N(x,y) - \omega'_y(x,y)M(x,y)} = \psi(\omega) \tag{37}$$

Тогда уравнение (21) имеет интегрирующий множитель $\mu(\omega) = \exp\left(\int \psi(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega\right)$

**Доказательство.** Будем искать $\mu$ как функцию $\omega$.
В этом случае уравнение (36) примет вид

$$\frac{\mathrm{d}\,\mu}{\mathrm{d}\,\omega}\omega'_x N - \frac{\mathrm{d}\,\mu}{\mathrm{d}\,\omega}\omega'_y M = (M'_y - N'_x)\mu$$

или с учётом предположения (37):

$$\frac{\mathrm{d}\,\mu(\omega)}{\mathrm{d}\,\omega} = \psi(\omega)\mu(\omega)$$

Функция $\mu(\omega) = C\exp\left(\int \psi(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega\right)$ является общим решением этого линейного однородного уравнения. Можно выбрать $C = 1$. $\square$

**Определение 17.** Уравнение, разрешённое относительно производной, вида

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad p(x), q(x) \in \mathcal{C}\big((a,b)\big) \tag{38}$$

называется линейным диффренциальным уравнением первого порядка.

Найдём общее решение уравнения (38) и решение ЗК$(x_0, y_0)$, используя интегрирующий множитель, для чего перепишем уравнение (38) в симметричной форме:

$$\Big(p(x)y - q(x)\Big)\,\mathrm{d}\,x + \mathrm{d}\,y = 0 \tag{39}$$

Очевидно, что в $G$ существуют и непрерывны $M'_y, N'_x$.
Будем искать $\mu$ как функцию $x$, т. е. $\omega(x,y) = x$.
Тогда в формуле (37) $\psi(x) = p(x)$ и по теореме о нахождении интегрирующего множителя для любого $x_0 \in (a,b)$ имеем:

$$\mu(x) = e^{P(x)} \neq 0, \qquad P(x) \coloneqq \int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}\,t$$

Умножая (39) на $\mu$, получаем УПД:

$$e^{P(x)}\Big(p(x)y - q(x)\Big)\,\mathrm{d}\,x + e^{P(x)}\,\mathrm{d}\,y = 0$$

При $y_0 = 0$ из (34) находим

$$U = -\int_{x_0}^{x} e^{P(s)}q(s)\,\mathrm{d}\,s + \int_{0}^{y} e^{P(x)}\,\mathrm{d}\,s$$

Это — интеграл уравнения (38).
Тогда равенство

$$e^{P(x)}y - \int_{x_0}^{x} e^{P(s)}q(s)\,\mathrm{d}\,s = C$$

является общим интегралом уравнения (39). Отсюда

$$y = \varphi(x, C) = e^{-P(x)}\left(C + \int_{x_0}^{x} e^{P(s)}q(s)\,\mathrm{d}\,s\right)$$

является классическим общим решением линейного уравнения (38), а формула

$$y = y(x, x_0, y_0) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}\,t\right)\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} \exp\left(\int_{x_0}^{s} p(t)\,\mathrm{d}\,t\right)\mathrm{d}\,s\right]$$

задаёт решение ЗК$(x_0, y_0)$, определённое на $(a,b)$ и называется формулой Коши.

## Часть III

# Нормальные системы ОДУ

Ааа! Нормальные системы!

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots \\ y'_n = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}, \qquad f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}\big(G\big), \qquad G \subset \mathbb{R}^{n+1} \tag{40}$$

## 24. Лемма о связи между локальным и глобальным условиями Липшица, достаточные условия для выполнения локального условия Липшица

**Определение 18.** Функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица глобально по $y$ на множестве $B \subset G$, если найдётся такая константа $L = L_B > 0$, что

$$\forall (x, \widetilde{y}), (x, \widehat{y}) \in B \quad \|f(x, \widehat{y}) - f(x, \widetilde{y})\| \leq L\,\|\widehat{y} - \widetilde{y}\| \tag{41}$$

**Обозначение.** $f \in \mathrm{Lip}^{gl}_y(B)$

**Определение 19.** Функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица локально по $y$ в области $G$, если для любой точки $(x_\circ, y^\circ) \in G$ существуют окрестность $V(x_\circ, y^\circ) \subset G$ и константа Липшица $L = L_V > 0$ такие, что для любых двух точек $(x, \widetilde{y}), (x, \widehat{y}) \in V(x_\circ, y^\circ)$ выолняется неравенство (41).

**Обозначение.** $f \in \text{Lip}_y^{loc}(G)$

**Лемма 9** (о связи между локальным и глобальным условиями Липшица). Если $f(x, y) \in \text{Lip}_y^{loc}(G)$, то для любого компакта $\overline{H} \subset G$ выполнено $f(x, y) \in \text{Lip}_y^{gl}(\overline{H})$

**Доказательство.** Рассуждая **от противного**, допустим, что существует компакт $\overline{H} \in G$, в котором $f(x, y) \notin \text{Lip}_y^{gl}(\overline{H})$.
Это значит, что найдутся такие последовательности точек $(x_k, \widetilde{y}^{(k)}), (x_k, \widehat{y}^{(k)}) \in \overline{H}$ и костант $L_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$, что

$$\forall k \geq 1 \quad \left\| f(x_k, \widehat{y}^{(k)}) - f(x_k, \widetilde{y}^{(k)}) \right\| \geq L_k \left\| \widehat{y}^{(k)} - \widetilde{y}^{(k)} \right\| \tag{42}$$

Надо показать, что при каком-то $k$ это неравенство нарушается.
Разряжая при необходимости два раза подряд последовательность инексов $k$ и пользуясь принципом выбора Больцано"– Вейерштрасса, выберем такую подпоследовательность индексов $k_l \xrightarrow[l\to\infty]{} \infty$, что $(x_k, \widetilde{y}^{(k_l)}) \to (x_\circ, \widetilde{y}^{(\circ)})$, $\quad (x_{k_l}, \widehat{y}^{(k_l)}) \to (x_\circ, \widehat{y}^{(\circ)})$. При этом обе точки $(x_\circ, \widetilde{y}^{(\circ)}), (x_\circ, \widehat{y}^{(\circ)}) \in \overline{H}$, поскольку замкнутое множество содержит все свои предельные точки.
В результате векторы $\widetilde{y}^{(0)}$ и $\widehat{y}^{(0)}$ либо совпадают, либо нет.

- $\widetilde{y}^{(0)} \neq \widehat{y}^{(0)}$
  Тогда можно ввести в рассмотрение функцию

  $$h(x, \widetilde{y}, \widehat{y}) := \frac{\|f(x, \widehat{y}) - f(x, \widetilde{y})\|}{\|\widehat{y} - \widetilde{y}\|}$$

  определённую в некоторой окрестности точки $(x_\circ, \widetilde{y}^{(0)}, \widehat{y}^{(0)})$.
  Положим $h(x_\circ, \widetilde{y}^{(0)}, \widehat{y}^{(0)}) =: L_\circ$. Тогда существует окрестность $V(x_0, \widetilde{y}^{(0)}, \widehat{y}^{(0)})$, в которой $h$ непрерывна и $h(x, \widetilde{y}, \widehat{y}) < L_\circ + 1$.

  $$\implies \exists\, K > 0 : \quad \forall k_l > K \quad (x_{k_l}, \widetilde{y}^{(k_l)}, \widehat{y}^{(k_l)}) \in V(x_\circ, \widetilde{y}^{(0)}, \widehat{y}^{(0)})$$

  а значит, $h(x_{k_l}, \widetilde{y}^{(k_l)}, \widehat{y}^{(k_l)}) < L_\circ + 1$, или

  $$\left\| f(x_{k_l}, \widehat{y}^{(k_l)}) - f(x_{k_l}, \widetilde{y}^{(k_l)}) \right\| < (L_\circ + 1) \left\| \widehat{y}^{(k_l)} - \widetilde{y}^{(k_l)} \right\|$$

  Однако это неравенство при $l = l^*$ противоречит неравенству (42), поскольку всегда найдётся индекс $l^*$ такой, что $L_{k_{l^*}} > L_\circ + 1$, т. к. $L_{k_l} \xrightarrow[l\to\infty]{} +\infty$.

- $y^{(0)} := \widetilde{y}^{(0)} = \widehat{y}^{(0)}$
  Тогда точка $(x_\circ, y^{(0)}) \in \overline{H} \subset G$. В этом случае используем предположение о том, что функция $f$ удовлетворяет локальному условию Липшица.
  По определению для точки $(x_\circ, y^{(0)})$ существуют лежащая в $G$ окрестность $V(x_\circ, y^{(0)})$ и константа Липшица $L > 0$ такие, что для любых двух точек $(x, \widetilde{y}), (x, \widehat{y}) \in V(x_\circ, y^{(0)})$ верно неравенство (41). При этом обе подпоследовательности — $(x_{k_l}, \widetilde{y}^{(k_l)})$ и $(x_{k_l}, \widehat{y}^{(k_l)})$ — имеют общий предел — точку $(x_\circ, y^{(0)})$.
  Поэтому найдётся такое число $K > 0$, что для всякого $k_l > K$ точки $(x_{k_l}, \widetilde{y}^{(k_l)})$ и $(x_{k_l}, \widehat{y}^{(k_L)}) \in V(x_\circ, y^{(0)})$, а значит, выполняется неарвенство (41). Но существует такой индекс $l^*$, что $L_{k_{l^*}} > L$. Следовтельно, неравенства (41) и (42) несовместны при $l = l^*$.

$\square$

**Лемма 10** (о достаточном условии локальной липшицевости). Если вектор-функция $f(x, y)$ непрерывна всесте со своими частными производными по $y_1, \ldots, y_n$ в области $G$, то она удовлетворяет условию Липшица по $y$ локально в $G$.

**Доказательство.** Пусть $V$ — окрестнгость произвольной точки из области $G$. Очевидно, что её можно выбрать выпуклой по $y$ и такой, что $\overline{V} \subset G$. Для этого достаточно в качестве $V$ взять куб с центром в выбранной точке и достаточно маленьким ребром.
Покажем, что $f(x, y) \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(V)$:
По формуле конечных приращений имеем:

$$\forall (x, \widetilde{y}), (x, \widehat{y}) \in V \quad f(x, \widehat{y}) - f(x, \widetilde{y}) = \sum_{j=1}^{n} h^{(j)}(x, \widetilde{y}, \widehat{y}) \cdot (\widehat{y}_j - \widetilde{y}_j)$$

где

$$h^{(j)} := \int_0^1 \frac{\partial f\big(x, u(s)\big)}{\partial y_j} \,\mathrm{d}\, s, \qquad u(s) := \widetilde{y} + s(\widehat{y} - \widetilde{y}) \quad \forall s \in [0, 1]$$

При этом $\big(x, u(s)\big) \in V$ в силу выпуклостти окрестности по $y$.
Поскольку чатсные производные $f$ по $y$ непрерывны в $g$ и их конечное число, а компакт $\overline{V} \subset G$ по построению, то

$$\exists\, M > 0: \quad \forall s \in [0, 1] \quad \forall j = \overline{1, n} \quad \left\| \frac{\partial f\big(x, u(s)\big)}{\partial y_j} \right\| \leq M$$

Поэтому

$$\|f(x, \widehat{y}) - f(x, \widetilde{y})\| \leq \sum_{j=1}^{n} \left\| \int_0^1 \frac{\partial f\big(x, u(s)\big)}{\partial y_j} \,\mathrm{d}\, s \cdot (\widehat{y}_j - \widetilde{y}_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \left\| \frac{\partial f\big(x, u(s)\big)}{\partial y_j} \right\| \mathrm{d}\, s \cdot |\widehat{y}_j - \widetilde{y}_j| \leq$$
$$\leq Mn \cdot \max j = \overline{1, n} |\widehat{y}_j - \widetilde{y}_j| = nM \,\|\widehat{y} - \widetilde{y}\|$$

и верно неравенство (41) с глобальной константой Липшица $L = nM$, обслуживающей окрестность $V$ произвольной точки из области $G$. □

## 25. Теорема Пикара

Введём $(k+1)$-е приближение по Пикару:

$$y^{(k+1)}(x) = y^\circ + \int_{x_0}^{x} f\big(s, y^{(k)}(s)\big) \,\mathrm{d}\, s. \tag{43}$$

**Теорема 21 (Пикара).** $f(x, y) \in \mathcal{C}\big(G\big), \quad f(x, y) \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$

Для любой точки $(x_\circ, y^\circ) \in G$ последовательные приближения Пикара $y^{(k)}(x)$ $(k = 0, 1, \dots)$ с начальными данными $x_\circ, y^\circ$ определены на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$, причём существует такой компакт $\overline{H} \subset G$, что для любых $k \geq 0$ и $x \in [\alpha, \beta]$ точка $\big(x, y^{(k)}(x)\big) \in \overline{H}$.

Тогда функции $y^{(k)}(x)$ равномерно относительно $[\alpha, \beta]$ стремятся при $k \to \infty$ к предельной функции $y(x)$, являющейся решением ЗК$_{(40)}(x_\circ, y^\circ)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$.

**Доказательство.** Возьмём произвольную точку $(x_\circ, y^\circ) \in G$

По условию теоремы для этой точки надётся отрезок $[\alpha, \beta] \ni x_\circ$ и компакт $\overline{H} \subset G$ такие, что можно построить последовательные пикаровские приближения

$$y^{(k)}(x) = y^\circ + \int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y^{(k-1)}(s)\big) \,\mathrm{d}\, s, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

определённые для всякого $x \in [\alpha, \beta]$ такие, что их графики, т. е. точки $\big(x, y^{(k)}(x)\big)$, при всех $x$ и $k$ принадлежат $\overline{H}$.

Наличие компакта позволяет ввести на нём две глобальные константы:

- Обозначим через $L > 0$ константу Липшица, обслуживающую $\overline{H}$. Она существует по лемме о связи между условиями Липшица (лемма 9), согласно которой $f(x, y) \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(\overline{H})$.
- Положим $M := \max\limits_{\overline{H}} \|f(x, y)\|$.

Нужно установить равномерную сходимость последовательности пикаровских отображений. Сделаем это при помощи функциональных рядов:

Введём последовательность функций $\varphi^{(k)}(x)$, определённых на отрезке $[\alpha, \beta]$:

$$\varphi^{(0)}(x) \coloneqq y^{(0)}(x), \quad \varphi^{(1)}(x) \coloneqq y^{(1)}(x) - y^{(0)}(x), \quad \dots, \quad \varphi^{(k)}(x) \coloneqq y^{(k)}(x) - y^{(k-1)}(x), \quad \dots$$

Рассмотрим функциональный ряд

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(x)$$

По определению $\varphi^{(k)}$,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi^{(k)}(x) = y^{(n)}(x)$$

Поэтому сходимость ряда $\varphi(x)$ равносильна сходимости последовательности пикаровских приближений $y^{(k)}(x)$.

Построим для ряда $\varphi(x)$ мажорантный ряд, оценив сверху по норме методом **индукции** члены $\varphi^{(k)}(x)$:

- **База.**

  Для всякого $x \in [\alpha, \beta]$ имеем:

$$\left\|\varphi^{(0)}(x)\right\| = \left\|y^{(0)}(x)\right\|,$$

$$\left\|\varphi^{(1)}(x)\right\| = \left\|y^{(1)}(x) - y^{(0)}(x)\right\| = \left\|\int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y^{(0)}(s)\big)\,\mathrm{d}\,s\right\| \leq \left|\int_{x_\circ}^{x} \left\|f\big(s, y^{(0)}(s)\big)\right\|\,\mathrm{d}\,s\right|$$

  Но по условию теоремы любая точка $\big(s, y^{(0)}(s)\big)$ лежит в $\overline{H}$, т. к. $[x_\circ \between x] \subset [\alpha, \beta]$. Следовательно,

$$\left\|y^{(1)}(x)\right\| \leq M|x - x_\circ|.$$

  Далее,

$$\left\|\boldsymbol{\varphi^{(2)}(x)}\right\| \leq \left|\int_{x_\circ}^{x} L\left\|y^{(1)}(s) - y^{(0)}(s)\right\|\,\mathrm{d}\,s\right| = L\left|\int_{x_\circ}^{x} \left\|\varphi^{(1)}(s)\right\|\,\mathrm{d}\,s\right| \leq$$
$$\leq L\left|\int_{x_\circ}^{x} M|s - x_\circ|\,\mathrm{d}\,s\right| \leq LM\frac{|x - x_\circ|^2}{2} = \boldsymbol{\frac{M}{L} \cdot \frac{(L|x - x_\circ|)^2}{2!}}$$

- **Предположим**, что для любых $k \geq 2$ и $x \in [\alpha, \beta]$

$$\left\|\varphi^{(k)}(x)\right\| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{(L|x - x_\circ|)^2}{2!}. \tag{44}$$

- **Переход.** Оценим $\varphi^{(k+1)}(x)$:

$$\left\|\varphi^{(k+1)}(x)\right\| = \left\|y^{(k+1)}(x) - y^{(k)}(x)\right\| = \left\|\int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y^{(k)}(s)\big)\,\mathrm{d}\,s - \int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y^{(k-1)}(s)\big)\,\mathrm{d}\,s\right\| \leq$$
$$\leq \left|\int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y^{(k)}(s)\big) - f\big(s, y^{(k-1)}(s)\big)\,\mathrm{d}\,s\right|.$$

  Поскольку аргументы $f \in \overline{H}$, используем для оценок глобальное условие Липшица:

$$\left\|\varphi^{(k+1)}(x)\right\| \underset{\text{Lip}}{\leq} \left|\int_{x_\circ}^{x} L\left\|y^{(k)}(s) - y^{(k-1)}(s)\right\|\,\mathrm{d}\,s\right| = L\left|\int_{x_\circ}^{x} \left\|\varphi^{(k)}(s)\right\|\,\mathrm{d}\,s\right| \underset{\textbf{предп.}}{\leq}$$
$$\leq L\left|\int_{x_\circ}^{x} \frac{M}{N} \cdot \frac{(L|s - x_\circ|)^k}{k!}\,\mathrm{d}\,s\right| \leq \frac{M}{N} \cdot \frac{(L|x - x_\circ|^{k+1})}{(k+1)!}$$

  Таким образом, **индукцонное предположение** доказано.

Поскольку $|x - x_\circ| \le \beta - \alpha$, справедлива равномерная оценка членов ряда $\varphi(x)$:

$$\left\|\varphi^{(k)}(x)\right\| \le \frac{M}{N} \cdot \frac{\big(L(\beta-\alpha)\big)^k}{k!} \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Мажорантный для $\varphi(x)$ числовой ряд

$$\|y^\circ\| + \frac{M}{L} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big(L(\beta-\alpha)\big)^k}{k!}$$

сходится при любых конечных $\alpha, \beta$.

По признаку Вейерштрасса функциональный ряд $\sum \varphi^{(k)}(x)$ сходится равномерно на $[\alpha, \beta]$, а значит, последовательноть $y^{(k)} \underset{k\to\infty}{\overset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows}} y(x)$.

Для всякого $x \in [\alpha, \beta]$ предельная функция $y(x)$ непрерывна по теореме Стокса"– Зайделя и точка $\big(x, y(x)\big)$, являясь предельной, содержится в $\overline{H}$. Следовательно, $\int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y(s)\big)\,\mathrm{d}\,s$ существует.

Рассмотрим равенство (43), устремив в нём $k$ к бесконечности. Тогда слева получим $y(x)$, а справа

$$\int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y^{(k)}(s)\big)\,\mathrm{d}\,s \to \int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y(s)\big)\,\mathrm{d}\,s,$$

т. е. возможен переход к пределу под знаком интеграла.

Таким образом, в правой части (43) тоже можно перейти к пределу, получая формулу

$$y(x) = y^\circ + \int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y(s)\big)\,\mathrm{d}\,s \quad \forall x \in [\alpha, \beta],$$

т. е. $y(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению, что равносильно тому, что $y(x) \in$ (является решением) $\text{ЗК}_{(40)}(x_\circ, y^\circ)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. □

## 26. Теорема о существовании и единственности решений нормальной системы

**Теорема 22** (о существовании и единственности решения). Пусть в системе (40) $f(x, y)$ непрерывна и $f \in \text{Lip}_y^{loc}(G)$.

Тогда для любой точки $(x_0, y^0) \in G$ и для любого отрезка Пеано $P_h(x_0, y^0)$ на этом отрезке существует и единственно решение $\text{ЗК}(x_0, y^0)$.

**Доказательство.**

- Существование.

  Возьмём любую точку $(x_0, y^0) \in G$ и найдём для неё отрезок $[\alpha, \beta]$ и компакт $\overline{H}$ из теоремы Пикара.

  Сначала построим отрезок Пеано с центром в т. $x_0$. Для этого возьмём такие $a, b > 0$, что компакт $\overline{R} = \left\{\, (x, y) \;\middle|\; |\, x - x_0| < a,\ \left\|y - y^0\right\| \le b \,\right\} \subset G$.

  Положим

  $$M = \max_{(x,y)\in\overline{R}} \|f(x, y)\|, \quad h = \min\left\{\, a, \frac{b}{M} \,\right\}, \alpha = x_0 - h, \quad \beta = x_0 + h$$

  Тогда $[\alpha, \beta]$ — это искомый отрезок Пеано $P_h(x_0, y^0)$.

  Выберем $\overline{H} = \left\{\, (x, y) \;\middle|\; \alpha \le x \le \beta,\ \left\|y - y^0\right\| \le b \,\right\}$. Тогда $\overline{H} \subset \overline{R}$.

  Докажем **индукцией** по $k = 0, 1, \ldots,$ что

  $$\forall x \in [\alpha, \beta] \quad \left\|y^{(k)}(x) - y^0\right\| \le b \tag{45}$$

  Тогда точка $\big(x, y^{(k)}(x)\big)$ попадёт в компакт $\overline{H}$, что позволит определить пикаровское приближение $y^{(k+1)}$ на всём отрезке Пеано $[\alpha, \beta]$.

– По определению, $({}^{(0)}x) \equiv y^0$, поэтому **база** очевидна.
– Допустим, что неравенство (45) верно. Тогда для любого $x \in [\alpha, \beta]$

$$\left\|y^{(k+1)}(x) - y^0\right\| = \left\|\int_{x_0}^{x} f\big(s, y^{(k)}(s)\big)\,\mathrm{d}\,s\right\| \leq \left|\int_{x_0}^{x} \left\|f\big(s, y^{(k)}(s)\big)\right\|\,\mathrm{d}\,s\right|$$

Но согласно (45) точка $\big(s, y^{(k)}(s)\big) \in \overline{H} \subset \overline{R}$, поэтому под знаком интеграла $\|f\| \leq M$ и $\left\|y^{(k+1)}(x) - y^0\right\| \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b$.

- Единственность
Докажем **от противного**.
Предположим, что существует ещё одно решение $\widetilde{y}(x)$ с теми же начальными данными, т. е. $\widetilde{y}(x_0) = y^0$, определённое на некотором интервале $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \ni x_0$.
Пусть $[a, b]$ — отрезок, на котором определены оба решения. Достаточно показать, что на $(a, b)$ решения $y(x)$ и $\widetilde{y}(x)$ совпадают.
Используя интегральную формулу для любого $x \in (a, b)$ запишем разность этих решений:

$$y(x) - \widetilde{y}(x) = \int_{x_0}^{x} \Big(f\big(s, y(s)\big) - f\big(s, \widetilde{y}(s)\big)\Big)\,\mathrm{d}\,s$$

При этом, существует такой компакт $\overline{H} \subset G$, что для всякого $s \in [a, b]$ точки $\big(s, y(s)\big)$, $\big(s, \widetilde{y}(s)\big) \in \overline{H}$.
По условию теоремы в области $G$ для функции $f(x, y)$ выполняется локальное условие Липшица. А значит, по лемме о связи между локальным и глобальным условиями Липшица функция $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(\overline{H})$ и $L$ — глобальная константа Липшица. Поэтому

$$\|y(x) - \widetilde{y}(x)\| \leq \left|\int_{x_0}^{x} \left\|f\big(s, y(s)\big) - f\big(s, \widetilde{y}(s)\big)\right\|\,\mathrm{d}\,s\right| \leq L\left|\int_{x_0}^{x} \|y(s) - \widetilde{y}(s)\|\,\mathrm{d}\,s\right|$$

Применяя следствие из теоремы Гронуолла с $\mu = L$ заключаем, что $\|y(x) - \widetilde{y}(x)\| \overset{(a,b)}{\equiv} 0$. Тогда $y(x) - \widetilde{y}(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0$.

□

**Следствие.** $G$ является областью единственности.

## 27. Линейные системы, теоремы о существовании, единственности и продолжимости решений линейных систем

**Определение 20.** Система (40) называется *линейной*, если она имеет вид

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(x)y_1 + \dots + p_{1n}(x)y_n + q_1(x) \\ \dots \\ y_n' = p_{n1}(x)y_1 + \dots + p_{nn}(x)y_n + q_n(x) \end{cases} \tag{46}$$

или в векторной записи

$$y' = P(x)y + q(x)$$

где функции $p_{ij}(x)$ и $q_i(x) \in \mathcal{C}\big((a, b)\big)$.

**Другая формулировка.** Нормальная система является линейной, если $f(x, y) = P(x)y + q(x)$, а $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$.

**Теорема 23** (о существовании и единственности решений линейных систем)**.** Для любой точки $x_0 \in (a, b)$, для любого вектора $y^0 \in \mathbb{R}^n$ и для любого отрезка Пеано $P_h(x_0, y^)$ существует и единственно решение $ЗК_{(46)}(x_0, y^0)$, определённое на $P_h(x_0, y^0)$.

**Доказательство.** Поскольку функция $f(x,y) \in \mathcal{C}\big(G\big)$ и $f'_y(x,y) = P(x) \in \mathcal{C}\big(G\big)$, а значит, $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$, к системе (46) применима предыдущая теорема. $\square$

**Определение 21.** Система (40) называется *почти линейной*, если $f(x,y) \in \mathcal{C}(G)$, где область $G = (a,b) \times \mathbb{R}^n$, и существуют непрерывные и неотрицательные на $(a,b)$ функции $L(x), M(x)$ такие, что $\|f(x,y)\| \le L(x) + M(x)\|y\|$ для любой точки $(x,y) \in G$.

**Теорема 24** (о продолжимости решений почти линейных систем).
Любое решение почти линейной системы продолжимо на интервал $(a,b)$.

**Доказательство.** Рассмотрим произвольное решение почти линейной системы $y = \varphi(x)$, заданное на максимальном интервале существования $(\alpha,\beta)$. Для всякого $x_0 \in (\alpha,\beta)$ по интегральной формуле,

$$\varphi(x) \overset{(\alpha,\beta)}{=\!=\!=} \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(s,\varphi(s)\big)\,\mathrm{d}\,s$$

$$\implies \|\varphi(x_0)\| + \left|\int_{x_0}^{x} \big\|f\big(s,\varphi(s)\big)\big\|\,\mathrm{d}\,s\right| < \|\varphi(x_0)\| + \left|\int_{x_0}^{x} \Big(L(s) + M(s)\,\|\varphi(s)\|\Big)\,\mathrm{d}\,s\right|$$

Если $\beta < b$, то отрезок $[x_0,\beta] \subset (a,b)$, и в силу непрерывности функций $L$ и $M$ имеем:

$$L(x) \le L_0, \quad M(x) \le M_0 \qquad \forall x \in [x_0,\beta]$$

Поэтому

$$\|\varphi(x)\| \le \|\varphi(x_0)\| + L_0(\beta - x_0) + M_0\left|\int_{x_0}^{x} \|\varphi(s)\|\,\mathrm{d}\,s\right|$$

По лемме Гронуолла

$$\|\varphi(x)\| \le \Big(\|\varphi(x_0)\| + L_0(\beta - x_0)\Big)e^{M_0(\beta - x_0)} \quad \forall x \in [x_0,\beta],$$

что **противоречит** теореме о поведении интегральной кривой полного решения.
Аналогично рассматривается случай, когда $\alpha > a$. $\square$

**Теорема 25** (о продолжимости решений линейных систем). Любое решение линейной системы (46) продолжимо на интервал $(a,b)$.

**Доказательство.** Покажем, что линейная система является почти линейной. Положим

$$p_0(x) := \max_{i,j=\overline{1,n}} \{\ |p_{ij}(x)|\,\}, \qquad q_0 := \max_{i=\overline{1,n}} \{\ |q_i(x)|\,\}$$

Тогда функции $p_0(x), q_0(x) \in \mathcal{C}\big(a,b\big)$.
Оценим сверху компоненты правой части системы (46):

$$|f_i(x,y)| = |p_{i1}(x)y_1 + \cdots + p_{in}(x)y_n + q_i(x)| \le \sum_{j=1}^{n} |p_{ij}(x)|\cdot|y_j| + |q_i(x)| \le$$
$$\le \sum_{j=1}^{n} p_0(x)|y_j| + q_0(x) \le np_0(x)\max_{j=\overline{1,n}}|y_j| + q_0(x)$$

По определению нормы $\|f(x,y)\| \le np_0(x)\,\|y\| + q_0(x)$, т. е. система (46) почти линейна. $\square$

## 28. Малые возмущения начальных данных по параметру, рассуждение о сдвиге

Рассматриваем нормальную систему, зависящую от векторного параметра $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_n)$:

$$y' = f(x,y,\mu), \tag{47}$$

где вещественная функция $f(x,y,\mu)$ непрерывна и $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}$ в некоторой области $F \subset \mathbb{R}^{1+n+m}$.

Фактически, система (47) представляет собой семейство систем, каждая из которых отвечает своему значению вектора $\mu$.
Пусть функция $y = y(x, x_0, y^0, \mu)$, $\quad y(x_0, x_0, y^0, \mu) = y^0$ обозначает решение ЗК$_{(47)}$, заданное на множестве

$$D = \{\, (x, x_0, y^0, \mu) \mid x \in I(x_0, y^0, \mu), \quad (x_0, y^0, \mu) \in F \,\},$$

где $I$ — максимальный интервал существования решения.

Особое место среди систем занимает *порождающая* (*невозмущённая*) система

$$y' = f(x, y, \widehat{\mu}), \tag{48}$$

в которой $\mu$ — числовой вектор *расчётных* значений параметров. (47) можно трактовать как *возмущённую* систему.

Зафиксируем *расчётные* значения начальных данных $x_0 = \widehat{x}_0$, $y^0 = \widehat{y}^0$ так, чтобы точка $(\widehat{x}_0, \widehat{y}^0, \widehat{\mu}) \in F$.

Рассмотрим решение ЗК$_{(48)}$, определённое на $(\alpha, \beta)$ $\varphi(x) = y(x, \widehat{x}_0, \widehat{y}^0, \widehat{\mu})$, $\quad \varphi(\widehat{x}_0) = \widehat{y}^0$, и выберем произвольный отрезок $[a, b] : \widehat{x}_0 \in [a, b] \subset (\alpha, \beta)$.
Решение $y = \varphi(x)$ будем также называть *расчётным*.

Задача заключается в том, чтобы установить продолжимость решения $y(x, x_0, y^0, \mu)$ на $[a, b]$ и наличие его непрерывной зависимости от начальных данных и вектора параметров.

Введём следующие обозначения:

$$\overline{U}_d^{x,y} \coloneqq \{\, (x, y, \mu) \mid x \in [a, b], \quad \|\, y - \varphi(x)\| \le d, \quad \|\mu - \widehat{\mu}\| \le d \,\}, \tag{49}$$

это замкнутая трубчатая окрестность “радиуса” $d > 0$ графика функции $y = \varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$.

**Утверждение 4.** Существует такое $\sigma > 0$, что компакт $\overline{U}_\sigma^{x,y} \subset F$.

**Доказательство.** Пусть $\Gamma$ — график функции $y = \varphi(x)$ при $\mu = \widehat{\mu}$ и $x \in [a, b]$. Тогда, по четвёртой аксиоме отделимости, $\exists U : \overline{\Gamma} \subset U \subset \overline{U} \subset F$.
Отсюда $\overline{\Gamma} \cap \partial U = \emptyset$. $\square$

Будем рассматривать ситуацию, когда $y^0$ зависит от $\mu$, а $x_0$ — нет.
Итак, будем исследовать решение ЗК

$$y(x, \mu) = y\big(x, x_0, y^0(\mu), \mu\big), \quad y(x_0, \mu) = y^0(\mu)$$

системы (47) при $\big(x_0, y^0, (\mu), \mu\big) \in U_\delta^{x_0, y^0(\mu)}(\varphi, \widehat{\mu})$, где $\delta < \sigma$.
Будем предполагать, что

$$y^0(\mu) = y^0 + \psi(\mu), \quad \psi(\widehat{\mu}) = 0, \tag{50}$$

где функция $\psi$ непрерывна в *поликруге* $U_\sigma = \{\, \mu \mid \|\, \mu - \widehat{\mu}\| < \sigma \,\}$.

Таким образом, $\psi(\mu)$ является малым возмущением ветора начальных данных $y^0$ решения $y(x, x_0, y^0, \widehat{\mu})$ порождающей системы.

**Рассуждение о сдвиге**

- $\rightarrow$

  Замена $y = u + \psi(\mu)$ сводит систему (47) к системе

  $$u' = h(x, u, \mu), \tag{51}$$

  с $h(x, u, \mu) = f(x, u + \psi(\mu), \mu)$, в которой решением являвется функция $u(x, \mu) = y(x, x_0, y^0(\mu), \mu) - \psi(\mu)$. При этом $u(x_0, \mu) = y^0(\mu) - \psi(\mu) = y^0$. Поэтому $u(x, \mu) = u(x, x_0, u^0, \mu)$, где $u^0 = y^0$.

  Поскольку $\psi(\widehat{\mu}) = 0$, совпадают как порождающие системы, так и их решения:

  $$y(x, x_0, y^0, \widehat{\mu}) = u(x, x_0, y^0, \widehat{\mu})$$

  Обозначим через $F_*$ область, в которой правая часть системы (51) удовлетворяет локальному условию Липшица по $u$. Тогда при $\mu = \widehat{\mu}$ области $G_{\widehat{\mu}}^* = \{\, (x, y) \mid (x, u, \widehat{\mu}) \in F_* \,\}$ и $G_{\widehat{\mu}}$

  Зафиксируем любое $0 < \sigma_* < \frac{\sigma}{2}$, при котором $\overline{U}_{\sigma_*}^{x,y}(\varphi, \widehat{\mu}) \subset F_*$, и с учётом того, что $\psi(\widehat{\mu}) = 0$, справедливо неравенство $\max\limits_{\mu : \|\mu - \widehat{\mu}\| \le \sigma_*} \|\psi(u)\| \le \frac{\sigma}{2}$. совпадают.

Значит, если точка $(x,u,\mu) \in \overline{U}^{x,u}_{\sigma_*}(\varphi,\widehat{\mu})$, то точка $(x,y,\mu) \in \overline{U}^{x,y}_{\sigma}(\varphi,\widehat{\mu})$, где $u = u + \psi(\mu)$. В самом деле,

$$\|u-\varphi(x)\| \le \sigma_* \iff \|y-\varphi(\mu)-\varphi(x)\| \le \sigma_* \implies \|y-\varphi(x) \le \sigma_*\| + \|\varphi(\mu)\| \le \frac{\sigma}{2}+\frac{\sigma}{2} = \sigma$$

- $\circ$

  Допустим, уставновлено, что имеется такое $0 < \delta_* < \frac{\sigma_*}{2}$, что для любой точки $(x_0,u^0,\mu) \in U^{x_0,y^0}_{\delta_*}(\varphi,\widehat{\mu})$ решение $u(x,x_0,u^0,\mu)$ системы (51) определено при всех $x \in [a,b]$ и обладает рядом свойств, зависящим от предположений относительно правой части системы, на множестве $V_{\delta_*} = [a,b] \times U^{x_0,u^0}_{\delta_*}(\varphi,\widehat{\mu})$, при этом для любого $x \in [a,b]$ точка $\big(x,u(x,x_0,u^0,\mu)\mu\big) \in \widehat{U}^{x,u}_{\sigma_*}(\varphi,\widehat{\mu})$.

- $\leftarrow$

  Покажем, что аналогичными свойствами будет обладать решение $y\big(x,x_0,y^0(\mu)\mu\big)$ системы (47). Для этого зафиксируем $0 < \delta < \frac{\delta_*}{2}$, при котором $U^{x_0,y^0(\mu)}_{\delta}(\varphi,\mu) \subset F$ и $\max\limits_{\mu:\|\mu-\widehat{\mu}\|\le\delta} \|\psi(\mu)\| \le \frac{\delta_*}{2}$.

  Тогда если $(x_0,y^0(\mu),\mu) \in U^{x_0,y^0(\mu)}_{\delta}(\varphi,\widehat{\mu})$, то$(x_0,u^0,\mu) \in U^{x_0,u^0}_{\delta_*}(\varphi,\widehat{\mu})$, где $u^0 = y^0$. Действительно,

$$\big\|y^0(\mu)-\varphi(x_0)\big\| < \delta \iff \big\|u^0+\psi(\mu)-\varphi(x_0)\big\| < \delta \implies \big\|u^0-\varphi(x_0)\big\| < \delta + \|\psi(\mu)\| \le \frac{\delta_*}{2}+\frac{\delta_*}{2} = \delta_*$$

Учитывая, что $\delta < \delta_* < \sigma_* < \sigma$, заключаем:

1. решение $y\big(x,x_0,y^0(\mu),\mu\big) = u(x,x_0,u^0,\mu) + \psi(\mu)$ определено, непрерывно по совокупности аргументов на множестве $V^{x_0,y^0(\mu)}_{\delta}(\varphi,\widehat{\mu})$ и обладает теми же свойствами, что и решение $u(x,x_0,u^0,\mu)$ на $V^{x_0,u^0}_{\delta_*}(\varphi,\widehat{\mu})$;
2. точка $\big(x,y(x,x_0,y^0,y^0(\mu),\mu)\mu\big) \in \overline{U}^{x,y}_{\sigma}(\varphi,\widehat{\mu})$ для всякого $x \in [a,b]$, поскольку если $(x,u,\mu) \in \overline{U}^{x,u}_{\sigma_*}(\varphi,\widehat{\mu})$, то $(x,y,\mu) \in \overline{U}^{x,y}_{\sigma}(\varphi,\widehat{\mu})$, где $y = u + \psi(\mu)$.

## 29. Теорема о непрерывной зависимости решений от начальных данных и параметра

**Теорема 26** (о непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметра)**.** Пусть в системе (47) функция $f(x,y,\mu)$ определена, непрерывна и $f \in \mathrm{Lip}^{loc}_y(F)$, а $y = \varphi(x)$ — решение системы (48) на $[a,b]$.

Тогда для любого $\sigma > 0$, при котором $\overline{U}^{x,y}_{\sigma}(\varphi,\widehat{\mu}) \subset F$, найдётся такое $0 < \delta < \sigma$, что для произвольной точки $\big(x_0,y^0(\mu),\mu\big) \in U^{x_0,y^0(\mu)}_{\delta}(\varphi,\widehat{\mu})$, где $y^0(\mu)$ из (50), решение $y = y\big(x,x_0,y^0(\mu),\mu\big)$ системы (47) определено при всех $x \in [a,b]$, непрерывно по совокупности аргументов на множестве $V^{x_0,y^0(\mu)}_{\delta} = [a,b] \times U^{x_0,y^0(\mu)}_{\delta}(\varphi,\widehat{\mu})$ и точка $\Big(x,y\big(x,x_0,y^0(\mu),\mu\big),\mu\Big) \in \overline{U}^{x,y}_{\sigma}(\varphi,\widehat{\mu})$ для любого $x \in [a,b]$.

**Доказательство.** Пусть число $\sigma > 0$ такое, что окрестность $\overline{U}^{x,y}_{\sigma}(\varphi,\widehat{\mu})$ решения $y = \varphi(x)$ порождающей системы (48), определённого на $[a,b]$ лежит в области $F$.

Решение $y(x,\mu) = y\big(x,x_0,y^0(\mu),\mu\big)$ будем строить методом последовательных приближений Пикара. Но, перед этим, проведём рассуждение о сдвиге ($\rightarrow$), где выбрано такое $\sigma_*$, что компакт $\overline{U}^{x,y}_{\sigma^*}(\varphi,\widehat{\mu})$ содержится в области $F_*$ системы $u' = h(x,u,\mu)$, полученной при помощи замены $y = u + \psi(\mu)$.

- Пусть сначала $\delta_* = \frac{\sigma_*}{2}$. Построим решение $u(x,\mu) = u(x,x_0,y^0,\mu)$, у которого $x \in [a,b]$, ф $(x_0,u^0,\mu) \in U^{x_0,u^0}_{\delta_*}(\varphi,\widehat{\mu})$, методом последовательных приближений Пикара, при необходимости уменьшая $\delta_*$, то так, чтобы сохранилась его положительность.

  Нулевое пикаровское приближение выберем не постоянным, а лежащем в окрестности дуги интегральной кривой расчётного решения $u = \varphi(x)$, положив

$$u^{(0)}(x) = u^{(0)}(x,x_0,u^0) - u^0 - \varphi(x_0) + \varphi(x), \qquad x \in [a,b]$$

Тогда $u^{(0)}(x_0) = u^0$, и для любого $x \in [a,b]$ имеем:

1. $u^{(0)}(x) = u^0 + \int_{x_0}^{x} h\big(s, \varphi(s), \widehat{\mu}\big)\,\mathrm{d}\,s$;
2. $\|u^{(0)}(x) - \varphi(x)\| = \|u^0 - \varphi(x_0)\|$;
3. $\big(x, u^{(0)}(x), \mu\big) \in \overline{U}^{x,y}_{\sigma_*}(\varphi, \widehat{\mu})$.

Из вида $u^{(0)}(x, x_0, u^0)$, указанного в 1 вытекает, что нулевое пикаровское приближение непрерывно по каждому из аргументов $x_0, u^0$,, а по $x$ оно непрерывно дифференцируемо, что гарантирует непрерывность функции $u^{(0)}(x, x_0, u^0, \widehat{\mu})$ по совокупности аргументов. Кроме того, свойство 3, очевидно, вытекает из свойства 2, так как $\|u^0 - \varphi(x_0)\| < \delta_*$, $\|\mu - \widehat{\mu}\| < \delta_*$ в $U^{x_0,u^0}_{\delta_*}(\varphi, \widehat{\mu})$, а $\delta_* = \frac{\sigma_*}{2}$.

- Теперь для любого $k \geq 1$ введём $k$-е пикаровское приближение

$$u^{(k)}(x) = u^{(k)}(x, x_0, u^0, \mu) = u^0 + \int_{x_0}^{x} h\big(s, u^{(k-1)}(s), \mu\big)\,\mathrm{d}\,s, \tag{52}$$

определённое в некоторой окрестности точки $x_0$, и $u^{(k)}(x_0) = u^0$.

Пусть $L = L_{\sigma_*} \geq 1$ — глобальная константа Липшица по $u$ для функции $h(x,u,\mu)$ на компакте $\overline{U}^{x,u}_{\sigma_*}(\varphi, \widehat{\mu})$, а

$$\tau = \tau_{\sigma_*,L} = \frac{\sigma_* L}{2(e^{L(b-a)} - 1)}$$

Покажем **по индукции**, что существует такое $0 < \delta_*(\tau) < \frac{\sigma_*}{2}$, что для всякого $x \in [a,b]$:

1. функция $u^{(k)}(x, x_0, u^0, \mu)$ определна и непрерывна на множестве $V^{x_0,u^0}_{\delta_*} = [a,b] \times U^{x_0,u^0}_{\delta_*}(\varphi, \widehat{\mu})$;
2. $\|u^{(k)}(x) - u^{(k-1)}(x)\| \leq \frac{\tau}{L} \cdot \frac{(L|x-x_0|)^k}{k!}$;
3. $\big(x, u^{(k)}(x), \mu\big) \in \overline{U}^{x,u}_{\sigma_*}(\varphi, \widehat{\mu})$.

Как и раньше, 3 означает, что $\|u^{(k)}(x) - \varphi(x)\| \leq \sigma_*$ и $\|\mu - \widehat{\mu}\| \leq \sigma_*$.

**База:**

1. По свойству 3 нулевого приближения для любых $\delta_* \leq \frac{2\sigma_*}{2}$ и $x \in [a,b]$ функция $h\big(x, u^{(0)}(x), \mu\big)$ определена и непрерывна. Поэтому первое пикаровское приближение

$$u^{(1)}(x, x_0, u^0, \mu) = u^0 + \int_{x_0}^{x} h\big(s, u^{(0)}(s), \mu\big)\,\mathrm{d}\,s$$

определено для всех $x \in [a,b]$ и непрерывно на множестве $V^{x_0,u^0}_{\delta_*}$ как композиция непрерывных функций.

2. С учётом свойства 1 для всякого $x \in [a,b]$ имеем

$$\|u^{(1)}(x) - u^{(0)}(x)\| = \left\| \int_{x_0}^{x} h\big(s, u^{(0)}(s), \mu\big)\,\mathrm{d}\,s - \int_{x_0}^{x} h\big(s, \varphi(s), \widehat{\mu}\big)\,\mathrm{d}\,s \right\| \leq$$
$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} \|h\big(s, u^{(0)}(s), \mu\big) - h\big(s, \varphi(s)\widehat{\mu}\big)\|\,\mathrm{d}\,s \right|$$

Посольку функция $h(x,u,\mu)$ непрерывна в области $F_*$, она равномерно непрерывна на компакте $\overline{U}^{x,y}_{\sigma_*}(\varphi, \widehat{\mu})$, а аргументы $h$ под интегралом принадлежат этому компакту. Следовательно, взяв $\tau$ в качестве $\varepsilon$,

$$\exists\, 0 < \delta_*(\tau) < \frac{\sigma_*}{2}: \quad \left.\begin{array}{l} \|u^{(0)}(s) - \varphi(s)\| \leq \delta_* \\ \|\mu - \widehat{\mu}\| \leq \delta_* \end{array}\right\} \implies \big\|h\big(s, u^{(0)}, \mu\big) - h\big(s, \varphi(s), \widehat{\mu}\big)\big\| \leq \tau$$

В результате $\|u^{(1)}(x) - u^{(0)}(x)\| \leq \tau|x - x_0|$ для любого $x \in [a,b]$, что совпадает с 2 при $k = 1$.

$\square$

## 30. Теорема о дифференцируеости решений по начальным данным

Предположим, что функция $y\big(x, x_0, y^0(\mu), \mu\big)$ непрерывно дифференцируема по каждому из четырёх аргументов, а $y^0(\mu)$ — по $\mu$.

Будем обозначать частную производную по $x$ как $y'_x\big(x, x_0, y^0(\mu), \mu\big)$. Частную производную по $\mu$ будем обозначать $\frac{\partial}{\partial\mu} y\big(x, x_0, y^0(\mu), \mu\big)$, поскольку $\mu$ входит не в один аргумент. В результате

$$\frac{\partial}{\partial\mu} y = y'_{y_0} \cdot \big(y^0(\mu)\big)'_\mu + y'_\mu$$

Также будем предполагать, что функция $f$ непрерывно дифференцируема по $y$ и $\mu$.

**Обозначение.** $f(x, y, \mu) \in \mathcal{C}^{0,1,1}_{x,y,\mu}(F)$.

Введём обозначения для начальных данных, параметра и их расчётных значений:

$$\kappa = \big(x_0, y^0(\mu), \mu\big), \qquad \widehat{\kappa} = (\widehat{x}_0, \widehat{y}^0, \widehat{\mu})$$

**Теорема 27** (о дифференцируемости решения по начальным данным и параметру)**.** Пусть в системе (47) функция $f(x, y, \mu) \in \mathcal{C}^{0,1,1}_{x,y,\mu}(F)$, а $\varphi(x) = y(x, \widehat{\kappa})$ — решение системы (48) на $[a, b]$.

Тогда для любого $\sigma > 0$ такого, что $\overline{U}^{x,y}_\sigma(\varphi, \widehat{\mu}) \subset F$, найдётся такое $0 < \delta < \sigma$, что для любой точки $\kappa \in U^{x_0, y^0(\mu)}_\delta(\varphi, \widehat{\mu})$ решение $y = y(x, \kappa)$ системы (47) с $y^0(\mu)$ из (50), где $\psi(\mu) \in \mathcal{C}^1\big(K_\sigma(\widehat{\mu})\big)$, имеет непрерывные частные производные по каждому из аргументов в любой точке множества $V^{x_0, y^0(\mu)}_\delta = [a, b] \times U^{x_0, y^0(\mu)}_\delta(\varphi, \widehat{\mu})$, причём:

1. функция $\xi^{(j)}\big(x, x_0, \frac{\partial y^0(\mu)}{\partial P}\mu_j, \mu\big) = \frac{\partial y(x,\kappa)}{\partial \mu_j}, \quad j = \overline{1, m}$ — это решение ЗК ЛНС
$$u' = f'_y\Big(x, y\big(x, x_0, y^0(\mu), \mu\big), \mu\Big)u + f'_{\mu_j}\Big(x, y\big(x, x_0, y^0(\mu), \mu\big), \mu\Big); \tag{53}$$
2. функция $\eta^{(i)}(x, x_0, e^{(i)}, \mu) = y'_{u^0_i}(x, \kappa)$, где $e^{(i)} = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ — это решение ЗК ЛНС
$$u' = f'_y\Big(x, y\big(x, x_0, y^0(\mu), \mu\big), \mu\Big)u; \tag{54}$$
3. функция $\eta^{(0)}\Big(x, x_0, -f\big(x_0, y^0(\mu), \mu\big), \mu\Big) = y'_{x_0}(x, \kappa)$ также является решением ЗК$_{(54)}$.

**Определение 22.** Линейные системы (53) и (54) называются *системами в вариациях* соответственно по параметру и по начальным данным относительно решения $u\big(x, x_0, y^0(\mu), \mu\big)$.

## 31. Теорема о дифференцируемости решений по вектору параметров

## 32. Теорема о многократной дифференцируемости решения по начальным данным и параметру

**Теорема 28** (о многократной дифференцируемости решения по начальным данным и параметру)**.** Пусть в системе (47) $f(x, y, \mu) \in \mathcal{C}^{0,k,k}_{x,y,\mu}(F)$, $y(x, \kappa)$ — решение из теоремы о дифференцируемости решения по начальным данным и параметру с $y^0(\mu)$ из (50), причём $\psi(\mu) \in \mathcal{C}^k\big(K_\sigma(\widehat{\mu})\big)$.

Тогда $y(x, \kappa) \in \mathcal{C}^{1,k,k,k}_{x,x_0,y^0,\mu}\big(V^{x_0,y^0(\mu)}_\delta\big)$, где $V^{x_0,y^0(\mu)}_\delta = [a, b] \times U^{x_0,y^0(\mu)}_\delta(\psi, \widehat{\mu})$.

## 33. Теорема Ляпунова–Пуанкаре о разложении решения в ряд по степеням начальных данных и параметра

**Определение 23.** Функцию $f(x, y, \mu)$ будем называть равномерно аналитической по $y, \mu$ относительно $x$ в замкнутой трубчатой окрестности $\overline{U}_{\sigma}^{x,y}(\varphi, 0)$, если она представима в виде ряда

$$f(x, y, \mu) = \sum_{p,q} f^{(p,q)}(x)\big(y - \varphi(x)\big)^p \mu^q \tag{55}$$

с вещественными непреывными на отрезке $[a, b]$ коэффициентами $f^{(p,q)}$, $\quad f^{(0,0)} = \varphi'(x)$, который абсолютно сходится при $\|y - \varphi(x)\| \leq \sigma$, $\quad \|\mu\| \leq \sigma$ для вяского $x \in [a, b]$.

**Теорема 29** (Ляпунова–Пуанкаре)**.** Предволожим, что в системе (47) $f(x, y, \mu) \in \mathcal{C}(F)$, $\quad f(x, y, \mu) \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(F)$, $\quad (\widehat{x}_0, \widehat{y}^0, 0) \in F$, $\quad$ решение $\varphi(x) = u(\widehat{x}, \widehat{x}_0, \widehat{y}^0, 0)$, $\quad \varphi(\widehat{x}_0) = \widehat{y}^0$ системы (48) с $\widehat{\mu} = 0$ определено на $[a, b]$, и существует $\sigma > 0$ такое, что функция $f(x, y, \mu)$ является равномерно аналитической по $y, \mu$ относительно $x$ на компакте $\overline{U}_{\sigma}^{x,y}(\varphi, 0)$, т. е. справедливо разложение (55).

Тогда найдётся такое $\delta > 0$, что решение системы (47) $y\big(x, \widehat{x}_0, y^0(\mu), \mu\big)$ с $y^0(\mu) = y^0 + \psi(\mu)$ и $\psi$ из (57) будет функцией равномерно аналитической по $y^0, \mu$ относительно $x$ на $V_{\delta}^{y^0(\mu)} = [a, b] \times U_{\delta}^{y^0(\mu)}(\widehat{y}^0, 0)$, т. е. будет представимо в виде ряда

$$y\big(x, \widehat{x}_0, \widehat{y}^0(\mu), \mu\big) = \varphi(x) + \sum_{p,q:\ |p|+|q|\geq 1} y^{(p,q)}(x)(y^0 - \widehat{y}^0)^p \mu^q + \sum_{q:\ |q|\geq 1} \psi^{(q)} \mu^q \tag{56}$$

с вещественными, непрерывно дифференцируемыми на $[a, b]$ коэффициентами, который для любого $x \in [a, b]$ абсолютно сходится при $\|y^0 - \widehat{y}^0\| < \delta$, $\|\mu\| < \delta$.

При этом $y_1^{(e_1,0)}(\widehat{x}_0), \ldots, y_n^{(e_n,0)}(\widehat{x}_0) = 1$, а остальные $y_i^{(p,q)}(\widehat{x}_0)$ равны нулю. Ряд (56) можно почленно дифференцировать по $x$, и полученный после дифференцирования ряд равномерно относительно $x$ сходится на том же множестве $V_{\delta}^{y^0(\mu)}$.

## 34. Теорема о разложении решения в ряд по степеням малого параметра

Будем предполагать, что

$$\psi(\mu) = \sum_{q:|q|\geq 1} \psi^{(q)} \mu^q, \tag{57}$$

причём радиус сходимости ряда $\psi$ больше, чем $\sigma$.

**Теорема 30** (о разложении решения в ряд по степеням малого параметра)**.** Предположим, что для системы (47) выполняются условия теоремы Ляпунова–Пуанкаре.

Тогда найдётся такое $\delta > 0$, что решение $y\big(x, \widehat{x}_0, \widehat{y}_0(\mu), \mu\big)$, где $\widehat{y}^0(\mu) = \widehat{y}_0 + \psi(\mu)$ с $\psi$ из (57), является равномерно аналитической по $\mu$ относительно $x$ функцией на множестве

$$V_{\delta} = \{\ (x, \mu) \mid x \in [a, b],\ \ \|\ \mu\| < \delta\ \},$$

т. е. раскладывается на нём в абсолютно сходящийся степенной ряд

$$y\big(x, \widehat{x}_0, \widehat{y}^0(\mu), \mu\big) = \varphi(x) + \sum_{q:|q|\geq 1} y^{(q)}(x) \mu^q, \qquad y^{(q)}(\widehat{x}_0) = \psi^{(q)} \tag{58}$$

При этом вещественные коэффициенты $y^{(k)}(x) \in \mathcal{C}^1([a, b])$.

## 35. Теорема Коши об аналитичности решения по независимой переменной

**Определение 24.** Функцию $f(x,y)$ будем называть вещественно-аналитической в области $G \subset \mathbb{R}^{1+n}$, если для любой точки $(x_0, y^0) \in G$ существует $d(x_0, y^0) > 0$ такое, что $f$ раскладывается в степенной ряд

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p:|p|=0} f^{(k,p)} \cdot (x - x_0)^k (y - y_0)^p$$

с вещественными коэффициентами $f^{(k,p)}$, абсолютно сходящийся при $|x - x_0| < d$, $\|y - y^0\| < d$.

**Теорема 31** (Коши)**.** Пусть в системе (40) $f(x,y)$ — вещественно-аналитическая функция в области $G$.

Тогда для любой точки $(x_0, y^0) \in G$ существует такое $\rho(x_0, y^0) > 0$, что решение $y = y(x, x_0, y^0)$ системы (40) раскладывается в абсолютно сходящийся степенной ряд

$$y(x, x_0, y^0) = \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)} \cdot (x - x_0)^m, \qquad y^{(0)} = y^0 \tag{59}$$

с вещественными коэффициентами $y^{(k)}$ и радиусом сходимости $\rho$.

## 36. Теорема об аналитичности решения ЛНС по независимой переменной

**Теорема 32** (об аналитичности решения ЗК ЛНС)**.** Пусть в системе $y' = P(x)y + q(x)$ матрица $P(x)$ и вектор $q(x)$ — вещественно-аналитические функции на интервале $(a,b)$ и пусть отрезок $[x_0 - d, x_0 + d] \subset (a,b)$, $\quad d > 0$.

Тогда для любого $y^0 \in \mathbb{R}^n$ решение $y = y(x, x_0, y^0)$ системы раскладывается в абсолютно сходящийся степенной ряд (59) с радиусом сходимости $\rho \geq d$.