Оглавление

Глава 1

Вероятностное пространство

1.1. Основные определения

Определение 1. Результаты опытов или наблюдений будем называть *событиями.*

Обозначение. ω — исход, элементарное событие.

Обозначение. Ω — множество всех элементарных событий.

Определение 2. Если $A \cap B = \emptyset$, то говорим, что A и B *несовместны.*

Определение 3. Если $A \subset B$, то говорят, что появление события A *влечёт* появление события B.

Обозначение. σ-алгебру событий будем обозначать $\Im$.

Определение 4. Пусть $P : \Im$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \Im$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. $A_1, A_2, \ldots$ — не более чем счётный набор событий, $A_i \cap A_j = \emptyset$, то

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Будем говорить, что P является *вероятностной (счётно-аддитивной) мерой* или *вероятностью.*

Определение 5. Говорят, что $A_1, A_2, \ldots$ — *полная группа несовместных событий*, если их объединение представляет собой достоверное событие.

1.2. Свойства вероятностей

Свойства.

1. $\overline{A}$ — событие, дополнительное к событию A. Тогда $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. $0 \leq P(A) \leq 1$.
3. $P(\emptyset) = 0$.
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n+1} P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big)$$

5. $P(\bigcup A_i) \leq \sum P(A_i)$.
6. $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$.
7. $A_1 \subset A_2 \subset \dots, \quad A = \bigcup A_n$
$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$
8. $B_1 \supset B_2 \supset \dots, \quad B = \bigcap B_n$
$$P(B) = \lim_{n\to\infty} P(B_n)$$
9. $A_1, A_2, \dots$ — не более чем счётная полная группа событий
$$\sum P(A_n) = 1$$

Утверждение 1 (неравенства Бонферрони).

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum 1 \leq k \leq l \leq nP(A_kA_l) \leq P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

1.3. Условные вероятности

Определение 6. $A, B \in \Im, \quad P(B) > 0$
Условной вероятностью $P(A|B)$ называется отношение

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Утверждение 2. Условная вероятность является вероятностью.

Доказательство.

1. $$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \geq 0$$
2. $$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$
3. $$P\Big(\bigcup_k A_k \Bigm| B\Big) = \frac{P\left(B \cap \left(\bigcup_k A_k\right)\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_k A_k B\right)}{P(B)} = \frac{\sum_k P(A_k B)}{P(B)} = \sum_k P(A_k|B)$$

□

1.4. Формула полной вероятности

Теорема 1. $A_1, A_2, \dots$ — полная группа несовместных событий, $\quad P(A_i) > 0$

$$P(B) = \sum_i P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

Доказательство. Учитывая несовместность событий $BA_1, BA_2, \ldots$, получаем

$$P(B) = P(B \cap \Omega) = p\left(B \cap \left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right)\right) = P\left(\bigcup_{i\geq 1} BA_i\right) = \sum_{i \geq 1} P(BA_i) =$$
$$= \sum_{i\geq 1} \frac{P(BA_i)P(A_i)}{P(A_i)} = \sum_{i \geq 1} P(B|A_i)P(A_i)$$

□

Теорема 2 (формула Байеса). $A_1, A_2, \ldots$ — полная группа несовместных событий $P(A_i) > 0, \quad P(B) > 0$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_j P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$$

Доказательство.

$$\frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_j P(B|A_j)P(A_j)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_iB)P(A_i)}{P(A_i)P(B)} = P(A_i|B)$$

□

1.5. Независимость случайных событий

Определение 7. $P(B) \neq 0$
События A и B будем называть *независимыми*, если $P(A|B) = P(A)$.

Определение 8. События A и B будем называть *независимыми*, если при $P(A)P(B) \neq 0$ выполнены равенства

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B|A) = P(B)$$

Определение 9. События A и B называются *независимыми*, если $P(AB) = P(A)P(B)$.

Определение 10. События $A_1, A_2, \ldots$ *попарно независимы*, если для любых двух событий A_i и A_j выполняется соотношение

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)$$

Определение 11. Говорят, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *независимы в совокупности (взаимно независимы)*, если

$$\forall k \leq n \quad \forall 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n \quad P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$$

Теорема 3. $A_1, A_2, \ldots$ взаимно независимы.
Тогда взаимно независимы события $B_1, B_2, \ldots$, где B_i — это A_i или его дополнение.

1.6. Схемы испытаний Бернулли

Определение 12. Повторные независимые испытания называются *испытаниями Бернулли*, если каждое такое испытание имеет только два возможных исхода и вероятности соответствующих исходов остаются неизменными для всех испытаний.

Утверждение 3. Вероятность из n испытаний получить ровно m успехов равна

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Теорема 4 (локальная предельная). $0 < p < 1$

Соотношение

$$\frac{\sqrt{npq}P_n(m)}{\varphi\left(\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ — плотность нормального распределения,}$$

выполняется равномерно для значений m таких, что

$$-\infty < C_1 \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le C_2 < +\infty$$

Обозначение. μ_n — количество успехов в испытаниях Бернулли.

Обозначение. Определим *функцию распределения нормального закона*:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}\,t = \int_{-\infty}^{x}\varphi(t)\,\mathrm{d}\,t$$

Теорема 5 (интегральная предельная). $0 < p < 1$

Равномерно по всем значениям $-\infty \le a < b \le +\infty$ выполняется соотношение

$$P\left\{\, a \le \mu_n \le b \,\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Погрешность оценивается неравенством

$$\Delta_n \le \frac{c}{\sqrt{npq}}$$

c — абсолютная константа. Можно взять $c = 1$ или $c = 0.7655$.

Теорема 6. При большом n рассмотрим такую схему серий независимых событий:

	p
A_{11}	λ
A_{21} A_{22}	$\lambda/2$
A_{31} A_{32} A_{33}	$\lambda/3$
$\vdots$	$\vdots$
A_{n1} A_{n2} ...A_{nn}	λ/n

Для каждого фиксированного m справедливо

$$P_n(m) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$$

1.7. Полиномиальная схема

Определение 13. Пусть $P\left\{\, A_i \,\right\} = p_i, \quad p_1 + \cdots + p_r = 1.$

Вероятность того, что в n испытаниях событие A_i произойдёт m_i раз, равна:

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_r) = \frac{n!}{m_! m_2! \cdots m_r!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}, \quad m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$$

Глава 2

Случайные величины

2.1. Случайные величины и их распределения

Определение 14. $(\Omega, \Im, P)$
Говорим, что $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — *случайная величина*, если ξ измерима.

Определение 15. *Функцией распределения* случайной величины ξ будем называть функцию

$$F_\xi(x) = P_\xi\big((-\infty, x)\big) = P\{\,\xi < x\,\}$$

Замечание. $P_\xi\big([x, y)\big) = P\{\,x \le \xi \le y\,\} = F_\xi(y) - F_\xi(x)$

Свойства.

1. $0 \le F_\xi(x) \le 1$;
2. F_ξ — неубывающая функция;
3. F_ξ непрерывна слева во всех точках;
4. $F_\xi(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0, \quad F_\xi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$

Определение 16. Если для случайных величин функции распределения совпадают, то такие случайные величины называют *одинаково распределёнными.*

2.1.1. Типы вероятностных распределений

Дискретный закон распределения

Определение 17. Говорим, что ξ — случайная величина с *дискретным законом распределения*, если существует не более чем счётное множество точек $A \subset \mathbb{R}$ такое, что $P(\xi \in A) = 1$.

Примеры.

1. ξ — случайная величина с *вырожденным распределением* в точке c.

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le c, \\ 1, & x > c. \end{cases}$$

2. ξ — случайная величина с *распределением Бернулли.*

ξ принимает значения 0 и 1 с вероятностями $1-p$ и p.

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1-p, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

3. ξ имеет *биномиальное распределение* с параметрами n, p.

   Будем использовать обозначение $\xi \in B(n,p)$. ξ принимает значения 0, 1, ..., n с вероятностями

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

4. ξ распределена по *закону Пуассона* с параметром $\lambda > 0$.

   Обозначение: $\xi \in \Pi(\lambda)$. ξ принимает целые неотрицательные значения с вероятностями

$$P_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Абсолютно непрерывное распределение

Определение 18. Говорим, что ξ — случайная величина с *абсолютно непрерывным распределением*, если существует функция $p_\xi(x)$ такая, что для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}$

$$P(\xi \in B) = \int\limits_B p_\xi(x) \,\mathrm{d}\, x$$

Функцию p_ξ будем называть *плотностью распределения* случайной величины ξ.

Замечание. $p_\xi(x) = F'_\xi(x)$ почти всюду.

Свойства.

1. $p_\xi(x) \ge$ почти всюду;
2. $$\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x) \,\mathrm{d}\, x = 1$$

Примеры.

1. ξ имеет *равномерное распределение* на отрезке $[a,b]$ ($\xi \in U([a,b])$), если существует плотность распределения

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b], \\ \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b]. \end{cases}$$

$$F_\xi(x) = \frac{x-a}{b-a} \quad \text{при } a \le x \le b$$

2. ξ имеет *экспоненциальное распределение* с параметром $\lambda > 0$, если

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{e^{-\frac{x}{\lambda}}}{\lambda}, & x > 0. \end{cases}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x > 0. \end{cases}$$

3. ξ имеет *нормальное (гауссово)* распределение с параметрами a, σ^2 ($\xi \in N(a, \sigma^2)$), если

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Если $a = 0$, $\sigma^2 = 1$, то говорят, что ξ имеет *стандартное нормальное распределение.* При этом, обычно для плотности распределения и функции распределения используются обозначения $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$.

4. ξ имеет *распределение Коши*, если

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$F_\xi(x) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{\pi}$$

Сингулярная случайная величина

Определение 19. Говорим, что x — *точка роста* функции распределения $F(x)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad F(x+\varepsilon) > F(x-\varepsilon)$$

Определение 20. ξ — случайная величина с *сингулярным распределением*, если множество точек роста $F_\xi(x)$ имеет меру 0.

Семейство вероятностных распределений

Определение 21. ξ — случайная величина

К *семейству*, включающему эту величину, относим все величины η, получаемые линейным преобразованием

$$\eta = a + b\xi,$$

в котором a — *параметр сдвига*, $b > 0$ — *параметр масштаба.*

$$F_\eta(x) = F_\xi\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

$$p_\eta(x) = \frac{p_\xi\left(\frac{x-a}{b}\right)}{b}$$

2.2. Случайные векторы

Определение 22. $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^d$ — *случайный вектор*, если ξ измерима, т. е.

$$\forall B \in \mathcal{B}^d \quad \xi^{-1}(B) \in F$$

Определение 23. *Функция распределения* F_ξ d-мерного случайного вектора задаётся как

$$F_\xi(x_1, \ldots, x_d) = P\left\{\, \xi_1 < x_1, \ldots, \xi_d < x_d \,\right\}$$

Свойства.

1. $0 \le F_\xi(x_1, \ldots, x_d)$;
2. F_ξ непрерывна слева по каждой из координат;
3. $F_\xi(x_1, \ldots, x_d) \to 0$ если хотя бы одна из координат $x_k \to -\infty$;
4. $F_\xi(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_d) \to F_{(\xi_1, \ldots, x_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_d)}(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_d)$ если $x_k \to +\infty$;
5. $F_\xi(x_1, \ldots, x_d) \to 1$ если все координаты $x_i \to +\infty$;
6. $d = 2$
$$P\big((\xi_1, \xi_2) \in [a_1, b_1) \times [a_2, b_2)\big) = F_\xi(b_1, b_2) - F_\xi(a_1, b_2) - F_\xi(b_1, a_2) + F_\xi(a_1, a_2)$$

2.2.1. Случайные векторы с дискретным распределением

Определение 24. Случайный вектор ξ имеет d-мерное *дискретное распределение*, если существует не более чем счётное множество точек $A \subset \mathbb{R}^d$ такое, что $P(\xi \in A) = 1$.

Утверждение 4. Следующие утверждения равносильны:

1. $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ — случайный вектор с дискретным распределением;
2. величины ξ_k имеют дискретное распределение для всех $k = 1, 2, \dots, d$.

2.2.2. Случайные векторы с абсолютно непрерывным законом распределения

Определение 25. Случайный вектор ξ имеет d-мерное *абсолютно непрерывное распределение*, если существует функция $p_\xi(x_1, \dots, x_d)$ такая, что

$$\forall y_1, \dots, y_d \quad F_\xi(y_1, \dots, y_d) = \int_{-\infty}^{y_1} \cdots \int_{-\infty}^{y_d} p_\xi(x_1, \dots, x_d) \, \mathrm{d}\, x_1 \dots \mathrm{d}\, x_d$$

Функция $p_\xi(x_1, \dots, x_d)$ называется *плотностью распределения* случайного вектора.

Свойства.

1. $p_\xi(x_1, \dots, x_d) \geq 0$;
2. $$\iint\limits_{\mathbb{R}^d} p_\xi(x_1, \dots, x_d) \, \mathrm{d}\, x_1 \dots \mathrm{d}\, x_d = 1$$

Утверждение 5. Каждая компонента ξ_k случайного вектора с абсолютно непрерывным распределением представляет собой случайную величину с абсолютно непрерывным распределением.

2.3. Независимые случайные величины

Определение 26. Говорим, что $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — *независимые случайные величины*, если

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \quad F_{(\xi_1, \dots, \xi_n)}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{\xi_i}(x_i),$$

то есть

$$P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i < x_i)$$

Определение 27. Говорим, что $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — *независимые случайные величины*, если для любых борелевских множеств $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ справедливо

$$P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = \prod_{i=1}^{n} P(B_i)$$

1. Для дискретных случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ определение независимости сводится к проверке соотношений
   $$P\{\, \xi_1 = a_1, \dots, \xi_n = a_n \,\} = P\{\, \xi_1 = a_1 \,\} \cdots P\{\, \xi_n = a_n \,\}$$
   для всех значений, принимаемых этими случайными величинами.
2. Если случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ имеют абсолютно непрерывные распределения, то их независимость сводится к равенствам
   $$p_{(\xi_1, \dots, \xi_n)}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{\xi_i}(x_i)$$

2.4. Формулы свёртки

Пусть ξ и η — независимые случайные величины с функциями распределения F_ξ, F_η, а $\nu = \xi + \eta$. Найдём функцию распределения $H(x) = P\{\, \xi + \eta < x \,\}$.

$$H(x) = F_{(\xi+\eta)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\xi(x-y)\,\mathrm{d}\,F_\eta(y)$$

$$H(x) = F_{(\xi+\eta)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\eta(x-y)\,\mathrm{d}\,F_\xi(y)$$

Утверждение 6. Если величина ξ имеет плотность распределения $p_\xi(x)$, то

$$F_\nu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\eta(x-y)p_\xi(y)\,\mathrm{d}\,y$$

Утверждение 7. Если обе величины ξ, η имеют абсолютно непрерывные распределения, то их сумма ν также имеет абсолютно непрерывное распределение, и

$$p_\nu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x-y)p_\eta(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_{-\infty}^{\infty} p_\eta(x-y)p_\xi(y)\,\mathrm{d}\,y$$

Глава 3

Моменты случайных величин

3.1. Математические ожидания

Определение 28. *Математическим ожиданием* случайной величины ξ называется её усреднённое значение, т. е. среднее ожидаемое значение функции $\xi(\omega)$, которое выражается в виде интеграла по вероятностной мере

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega) P\{\, \mathrm{d}\,\omega \,\}$$

Если множество Ω состоит из конечного или счётного набора элементарных исходов, то

$$\mathbb{E}\xi = \sum \xi(\omega_i) P(\omega_i)$$

Для дискретного распределения

$$\mathbb{E}\xi = \sum_k x_k P\{\, \xi = x_k \,\}$$

Для абсолютно непрерывного распределения

$$\mathbb{E}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Если от величины ξ переходим к величине $\eta = g(\xi)$, то математическое ожидание можно выразить через распределение исходной величины:

$$\mathbb{E}\eta = \sum_k g(x_k) P\{\, \xi = x_k \,\}, \quad \text{дискретное распределение}$$

$$\mathbb{E}\eta = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_\xi(x)\,\mathrm{d}\,x, \quad \text{абсолютно непрерывное распределение}$$

Определение 29. Пусть $g(x) = x^n$.

$$\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}g(\xi) = \mathbb{E}\xi^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n\,\mathrm{d}\,F_\xi(x) = \begin{cases} \sum x_k^n P\{\, \xi = x_k \,\} \\ \int x^n p_\xi(x)\,\mathrm{d}\,x \end{cases}$$

$\mathbb{E}\xi^n$ называется *начальным моментом* случайной величины ξ порядка n.

Определение 30. Если возьмём $g(x) = (x - \mathbb{E}\xi)^n$, то получим $\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^n$ — *центральный момент* порядка n.

Определение 31. При $g(x) = |x|^n$ получаем $\mathbb{E}|\xi|^n$ — *абсолютный начальный момент* порядка n.

Определение 32. Если $g(x) = |x - \mathbb{E}\xi|^n$, то получаем $\mathbb{E}|\xi - \mathbb{E}\xi|^n$ — *абсолютный центральный момент* порядка n.

Определение 33. Второй центральный момент случайной величины $D\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$ называется *дисперсией* этой случайной величины.

3.1.1. Свойства математических ожиданий

Свойства.

1. Если математические ожидания ξ и η существуют, то $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$.
2. $\mathbb{E}(\alpha + \beta\xi) = \alpha + \beta\mathbb{E}\xi$.
3. $\mathbb{E}c = c$.
4. $P\{\, \alpha \le \xi \le \beta \,\} = 1 \implies \alpha \le \mathbb{E}\xi \le \beta$.
5. $\xi \le \eta \implies \mathbb{E}\xi \le \mathbb{E}\eta$.
6. $|\mathbb{E}\xi| \le \mathbb{E}|\xi|$ (т. к. $-|\xi| \le \xi \le |\xi|$).
7. Если $P\{\, \xi \ge 0 \,\} = 1$ и $\mathbb{E}\xi = 0$, то $P\{\, \xi = 0 \,\} = 1$.
8. Если ξ и η независимы, то $\xi\eta = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta$.

3.1.2. Свойства дисперсии

Свойства.

1. $D\xi \ge 0$.
2. Если $D\xi = 0$, то $P\{\, \xi = C \,\} = 1$ в некоторой точке C.
3. $D(\alpha\xi + \beta) = \alpha^2 D\xi$.
4. Если ξ и η независимы, то $D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta$.
5. $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\operatorname{cov}(\xi, \eta)$.
6. $D\xi \ge D|\xi|$.
7. $D\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\xi)^2$.

3.1.3. Вычисление математических ожиданий и дисперсий

1. *Вырожденное распределение*

$$P\{\, \xi = C \,\} = 1$$
$$\mathbb{E}\xi = C, \quad D\xi = 0$$

2. *Двухточечное распределение*

$$\xi = \begin{cases} 0 & \text{с вероятностью } q = 1 - p \\ 1 & \text{с вероятностью } p \end{cases}$$
$$\mathbb{E}\xi = p, \quad D\xi = p(1-p)$$
$$\eta = \begin{cases} a & \text{с вероятностью } q = 1 - p \\ b & \text{с вероятностью } p \end{cases}$$
$$D\eta = (b-a)^2 p(1-p)$$

3. *Биномиальное распределение* ($\xi \sim B(n,p)$)

   ξ принимает значения $0, 1, 2, \ldots, n$ с вероятностями

$$p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$
$$\mathbb{E}\xi = np, \quad D\xi = np(1-p)$$

4. *Пуассоновское распределение* ($\xi \sim \pi(\lambda)$)

$$P\{\,\xi = k\,\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\xi = \lambda, \quad D\xi = \lambda$$

5. *Геометрическое распределение* ($\xi \sim \mathrm{Geom}(p)$)

ξ принимает значения $0, 1, 2, \ldots$ с вероятностями

$$p_k = (1-p)p^k$$

$$\mathbb{E}\xi = \frac{p}{1-p}, \quad D\xi = \frac{p}{(1-p)^2}$$

6. *Равномерное распределение* ($\xi \sim U[a,b]$)

Плотность распределения имеет следующий вид:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\xi = \frac{b+a}{2}, \quad D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$$

7. *Экспоненциальное распределение* ($\xi \sim E(\lambda)$)

Плотность ξ имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\xi = \lambda, \quad D\xi = \lambda^2$$

8. *Распределение Коши*

$$p(x) = \frac{1}{\pi}(1+x^2)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\,\mathrm{d}\,x = \infty$$

Значит, математического ожидания и дисперсии ξ не существует. Более того, понятно, что и моментов более высокого порядка не существует.

9. *Нормальное распределение* ($\xi \sim N(a, \sigma^2)$)

$$p(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\xi = a, \quad D\xi = \sigma^2$$

3.2. Вероятностные неравенства

Лемма 1 (Чебышёва). $\xi \geq 0, \quad \exists \mathbb{E}\xi, \quad t > 0$

$$P\{\,\xi \geq t\,\} \leq \frac{\mathbb{E}\xi}{t}$$

Доказательство.

$$P\{\,\xi \geq t\,\} = \int_t^\infty \mathrm{d}\,F(x) \leq \frac{1}{t}\int_t^\infty x\,\mathrm{d}\,F(x) \leq \frac{1}{t}\int_0^\infty x\,\mathrm{d}\,F(x) = \frac{\mathbb{E}\xi}{t}$$

□

Замечание. Аналогично,
$$P\{\xi \geq t\} \leq \frac{\mathbb{E}\xi^2}{t^n}$$

Подставляя $\xi = (\xi - \xi)^2$ и $t = \varepsilon^2$, получаем следующий результат

Утверждение 8 (неравенство Чебышёва). $\exists \mathbb{E}\xi,\ D\xi, \quad \varepsilon > 0$
$$P\{|\xi - \mathbb{E}\xi| > \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

Утверждение 9 (неравенство Лярунова). $\gamma_n \coloneqq \mathbb{E}|\xi|^n$
$$\Longrightarrow \gamma_1 \leq \gamma_2^{\frac{1}{2}} \leq \gamma_3^{\frac{1}{3}} \leq \dots \leq \gamma_{m-1}^{\frac{1}{m-1}} \leq \gamma_m^{\frac{1}{m}} \leq \dots$$
$$\varphi(a) = (\mathbb{E}|\xi|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Тогда φ монотонно возрастает.

3.3. Смешанные моменты

Определение 34. Для n-мерного случайного вектора $\overline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ рассмотрим *математическое ожидание*
$$\mathbb{E}g(\xi_1, \dots, \xi_n) = \iiiint\limits_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n) F(\mathrm{d}\, x_1, \dots, \mathrm{d}\, x_n)$$

Для дискретных случайных векторов имеем
$$\mathbb{E}g(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum P\{\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n\} g(x_1, \dots, x_n)$$

Для абсолютно непрерывных случайных векторов
$$\mathbb{E}g(\xi_1, \dots, \xi_n) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n) p(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}\, x_1 \dots \mathrm{d}\, x_n$$

Пусть ξ, η — независимые случайные величины. Тогда
$$F_{\xi,\eta}(x, y) = F_\xi(x) F_\eta(y)$$

Утверждение 10. Если $g(x, y) = h(x) r(y)$, то
$$\mathbb{E}g(\xi, \eta) = \mathbb{E}\big(h(\xi) r(\eta)\big) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x) r(y) F_{\xi,\eta}(\mathrm{d}\, x, \mathrm{d}\, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x) F_\xi(\mathrm{d}\, x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} r(y) F_\eta(\mathrm{d}\, y) = \mathbb{E}h(\xi)\mathbb{E}r(\eta)$$

Определение 35. *Начальный смешанный момент* порядка $n + m$ определяется для двумерных дискретных и двумерных абсолютно непрерывных векторов следующими соотношениями:
$$\mathbb{E}\xi^n\eta^m = \sum_k \sum_l x_k^n y^- l^m P\{\xi = x_k,\ \eta = y_l\}$$
$$\mathbb{E}\xi^n\eta^m = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n y^m p_{\xi,\eta}(x, y)\, \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y$$

Определение 36. Если взять $g(x, y) = (x - \mathbb{E}\xi)^n (y - \mathbb{E}\eta)^m$, то математическое ожидание $\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^n (\eta - \eta)^m$ называется *центральным смешанным моментом* порядка $n + m$.

Определение 37. Центральный смешанный момент $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = (\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \eta)$ называется *ковариацией*.

3.3.1. Свойства ковариаций

Свойства.

1. $\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$.
2. $\operatorname{cov}(\xi, \xi) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 = D\xi$.
3. $\operatorname{cov}(\alpha\xi + \beta, \gamma\eta + \delta) = \alpha\gamma \operatorname{cov}(\xi, \eta)$.
4. Если ξ и η независимы, то $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$.
5. $D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta \pm 2 \operatorname{cov}(\xi, \eta)$.
6. $|\operatorname{cov}(\xi, \eta)| \leq \sqrt{D\xi D\eta}$.

Доказательство (6).

$$D\left(\frac{\xi}{\sqrt{D\xi}} + \frac{\eta}{\sqrt{D\eta}}\right) = 2 + 2\frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} \geq 0$$
$$D\left(\frac{\xi}{\sqrt{D\xi}} - \frac{\eta}{\sqrt{D\eta}}\right) = 2 - 2\frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} \geq 0$$

□

3.3.2. Коэффициент корреляции

Пусть ξ, η — невырожденные случайные величины, у которых существуют дисперсии. Рассмотрим их центрированные и нормированные варианты

$$\widehat{\xi} = \frac{\xi - \xi}{\sqrt{D\xi}}, \quad \widehat{\eta} = \frac{\eta - \mathbb{E}\eta}{\sqrt{D\eta}}$$

Имеем равенства

$$\mathbb{E}\widehat{\xi} = \mathbb{E}\widehat{\eta} = 0, \quad D\widehat{\xi} = D\widehat{\eta} = 1$$

Определение 38. *Коэффициент корреляции* ρ между ξ и η задаётся равенством

$$\rho(\xi, \eta) = \operatorname{cov}(\widehat{\xi}, \widehat{\eta}) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$$

3.3.3. Свойства коэффициента корреляции

Свойства.

1. Если ξ, η независимы, то $\rho(\xi, \eta) = 0$. В общем случае, если $\rho(\xi, \eta) = 0$, то говорим, что ξ, η — *ортогональные (некоррелированные)* случайные величины.
2. $|\rho| \leq 1$.
3. Если $|\rho(\xi, \eta)| = 1$, то $\eta = \alpha\xi + \beta$, причём $\operatorname{sign}(\rho) = \operatorname{sign}(\alpha)$.
4. $\rho(\alpha\xi + \beta, \delta\eta + \gamma) = \operatorname{sign}(\alpha\delta)\rho(\xi, \eta)$.

3.4. Производящие функции

Определение 39. $\{ a_n \in \mathbb{R} \}_{k=1}^{\infty}$

$$A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$$

Если ряд сходится на интервале $[-s_0, s_0]$, $s_0 > 0$, то функция $A(s)$ называется *производящей функцией* последовательности $\{ a_n \}$.

Рассмотрим в качестве $\{ a_n \}$ распределения вероятностей. Пусть случайная величина ξ принимает значения $0, 1, \dots$ с вероятностями $p_n = P\{ \xi = n \}$.

Построим производящую функцию для последовательности $\{ p_n \}$:

$$P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$$

Ряд сходится абсолютно при $-1 \leq s \leq 1$. $P(s)$ — производящая функция ξ. Её можно представить в виде

$$P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n = \mathbb{E} s^{\xi}$$

Примеры.

1. Биномиальное распределение $\xi \sim B(n, p)$.

   Случайная величина принимает значения $0, 1, \dots, n$ с вероятностями

   $$p_m = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$$

   Её производящая функция имеет вид

   $$P(s) = \sum_{m=0}^{n} C_n^M p^m (1-p)^{n-m} s^m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m (ps)^m (1-p)^{n-m} = (1-p+ps)^n$$

2. Пуассоновское распределение $\xi \sim \pi(\lambda)$.

   Случайная величина принимает значения $0, 1, \dots$ с вероятностями

   $$p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

   $$P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda s)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}$$

3. Геометрическое распределение

   $$p_n = (1-p)p^n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad 0 < p < 1$$

   $$P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)(ps)^n = \frac{1-p}{1-ps}$$

3.4.1. Свойства производящих функций

Свойства.

1. $P(1) = 1$.

2. $|P(s)| \leq 1, \quad |s| \leq 1$.

3. Если ξ и η независимы, и $\nu = \xi + \eta$, то

   $$P_{\nu}(s) = \mathbb{E} s^{\nu} = \mathbb{E} s^{\xi} \cdot \mathbb{E} s^{\eta} = P_{\xi}(s) P_{\eta}(s)$$

4. $0 \leq 1$

   $$P_{\xi}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n \geq 0$$

$$P^{(k)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)p_n s^{n-k}$$

$$0 \le P^{(k)}(s) \le \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)s^{n-k}$$

5. Если известна производящая функция, то можно восстановить вероятности:

$$P^{(k)}(0) = k!p_k$$

$$p_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}, \quad p_0 = P(0)$$

6. $P'(1) = \mathbb{E}\xi = \sum kp_k$

   Наряду с вероятностями $p_k = P\{\, \xi = k \,\}$ рассмотрим вероятности $q_n = P\{\, \xi > n \,\}$.

$$(s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty} p_k\Big)s^n = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \sum_{n=0}^{k-1} s^n = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cdot \frac{1-s^k}{1-s} =$$

$$= \frac{1}{1-s}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} p_k - \sum_{k=1}^{\infty} p_k s^k\Big) = \frac{1}{1-s}\big(1-P(s)\big)$$

   При этом,

$$Q(s) = \frac{1-P(s)}{1-s}$$

   Переходя к пределу по s, получаем

$$\lim_{s\to 1} Q(s) = P'(1) = \mathbb{E}\xi$$

   Отсюда, в частности,

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\, \xi > n \,\}$$

3.5. Факториальные моменты

Определение 40. *Факториальным моментом* порядка k случайной величины ξ называется величина

$$\mu_k = \mathbb{E}\big(\xi(\xi-1)(\xi-2)\cdots(\xi-k+1)\big)$$

По начальным моментам однозначно находятся факториальные моменты:

$$\mu_1 = \xi = \alpha_1$$

$$\mu_2 = \mathbb{E}\xi(\xi-1) = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\mu_3 = \mathbb{E}\xi(\xi-1)(\xi-2) = \alpha_3 - 3\alpha_2 + 2\alpha_1$$

$$P^{(k)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)p_n s^{n-k}, \quad 0 \le s < 1$$

Так как $P(s)$ и её производные — монотонные непрерывные функции,

$$\exists \lim_{s\to 1^-} P^{(k)}(s) = P^{(k)}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)p_n = \mu_k$$

Будем говорить, что существует *конечный факториальный момент*, если существует конечный левый предел $P^{(k)}(s)$ при $s \to 1^-$.

Примеры.

1. $\xi \sim B(n, p)$
$$P(s) = (1 - p + ps)^n$$
$$\mu_k = \begin{cases} P^{(k)}(1) = n(n-1)\cdots(n-k+1)p^n, & k \leq n, \\ 0, & k > n \end{cases}$$

2. $\xi \sim \pi(\lambda)$
$$P(s) = e^{\lambda(s-1)}$$
$$\mu_k = P^{(k)}(1) = \lambda^k$$

3. Геометрическое распределение
$$P(s) = \frac{1-p}{1-ps}$$
$$\mu_k = P^{(k)}(1) = \frac{(1-p)p^k k!}{(1-p)^{k+1}} = p^k k!(1-p)^{-k} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \cdot k!$$