Оглавление

Глава 1

Линейные функционалы

1.1. Продолжение линейных функционалов

1.1.1. Продолжение линейного функционала в комплексном линейном пространстве

Теорема 1 (Боненблюст—Собчик)**.** X линейно над $\mathbb{C}$, p — полунорма, L — подпространство X, $f \in \mathscr{L}in(L, \mathbb{C})$, $|f(x)| \overset{L}{\le} p(x)$

$$\exists g \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{C}) : \quad \begin{cases} g\big|_L = f, \\ |g(x)| \overset{X}{\le} p(x) \end{cases}$$

Доказательство (овеществление)**.** X линейно и над $\mathbb{R}$, т. е.

$$\left.\begin{matrix} a, b \in \mathbb{R} \\ x, y \in X \end{matrix}\right\} \implies ax + by \in X$$

Также, L — подпространство и в вещественном смысле.

$$f(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x), \quad u(x), v(x) \in \mathbb{R}$$

Проверим, что $u, v \in \mathscr{L}in(L, \mathbb{R})$. Пусть $x, y \in L$.

$$f(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x), \quad f(y) = u(y) + \mathrm{i}v(y)$$

$$f(x + y) = u(x + y) + \mathrm{i}v(x + y)$$

Сложим первые два равенства:

$$f(x + y) = \big(u(x) + u(y)\big) + \mathrm{i}\big(v(x) + v(y)\big)$$

Вещественные и мнимые части равны:

$$u(x + y) = u(x) + u(y), \quad v(x + y) = v(x) + v(y)$$

Возьмём $x \in X$, $a \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x)$$

$$f(ax) = u(ax) + \mathrm{i}v(ax)$$

$$f(ax) = af(x) = au(x) + \mathrm{i}av(x) \implies \begin{cases} u(ax) = au(x) \\ v(ax) = av(x) \end{cases}$$

$$\implies u, v \in \mathscr{L}in(L, \mathbb{R})$$

$$f \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{C}) \implies f(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}f(x) \implies u(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}v(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}\big(u(x) + \mathrm{i}v(x)\big) \implies u(\mathrm{i}x) = -v(x)$$

Применим теорему Хана—Банаха к u, а v определим из этого тождества.

$$u(x) \le |f(x)| \le p(x) \quad \forall x \in L \xRightarrow[\text{т. Хана—Банаха}]{}$$

$$\implies \exists \varphi \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{R}) : \begin{cases} \varphi\big|_L = u, \\ \varphi(x) \overset{X}{\le} p(x) \end{cases} \xRightarrow[p\,—\,\text{полунорма}]{} |\varphi(x)| \overset{L}{\le} p(x)$$

$$x \in X \quad \psi(x) \coloneqq -\varphi(\mathrm{i}x) \implies \psi \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{R}) \tag{1.1}$$

$$g(x) \coloneqq \varphi(x) + \mathrm{i}\psi(x) \implies g \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{R}), \quad g(x) \overset{L}{=} f(x)$$

$$g(\mathrm{i}x) = \varphi(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}\psi(\mathrm{i}x)\mathrm{i}\big(-\mathrm{i}\varphi(\mathrm{i}x) + \psi(\mathrm{i}x)\big) \underset{(1.1)}{=\!=} \mathrm{i}\big(\varphi(x) + \mathrm{i}\psi(x)\big) \implies g \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{C})$$

Проверим подчинение.

$$x \in X, \ g(x) \in \mathbb{C} \quad g(x) = re^{\mathrm{i}\theta}, \quad r \ge 0, \ \theta \in \mathbb{R}$$

$$\implies |g(x)| = r = g\big(xe^{-\mathrm{i}\theta}\big) = \varphi\big(xe^{-\mathrm{i}\theta}\big) + \mathrm{i}\psi\big(xe^{-\mathrm{i}\theta}\big)$$

Слева вещественное число, справа — комплексное, значит, мнимая часть равна нулю:

$$|g(x)| = \varphi\big(xe^{-\mathrm{i}\theta}\big) \le p\big(xe^{-\mathrm{i}\theta}\big) \underset{p\,—\,\text{полунорма}}{=\!=\!=} p(x)$$

□

1.1.2. Продолжение линейного функционала в нормированном пространстве

Теорема 2. $(X, \|\cdot\|)$ над $\mathbb{K}$, $\quad L$ — подпространство X в алгебраическом смысле, $\quad f \in L^*$

$$\exists g \in X^* : \begin{cases} g\big|_L = f, \\ \|g\|_{X^*} = \|f\|_{L^*}. \end{cases}$$

Доказательство. Обозначим $M = \|f\|_{L^*}$.

$$p(x) \coloneqq M \cdot \|x\| \implies p\,—\,\text{норма на } X$$

Возьмём $x \in L$.

$$|f(x)| \le \|f\|_{L^*}\|x\| = M\|x\| = p(x) \implies f \text{ подчинён } p$$

Применяем теорему Хана—Банаха или Бонеблюста—Собчика:

$$\exists g \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{K}) : \begin{cases} g\big|_L = f, \\ |g(x)| \overset{X}{\le} p(x) \end{cases}$$

$$\implies |g(x)| \overset{X}{\le} M \cdot \|x\| \implies \|g\|_{X^*} \implies g \in X^*$$

$$\|g\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \le 1}} |g(x)| \ge \sup_{\substack{x \in L \\ \|x\| \ge 1}} |g(x)| = \|f\|_{L^*}$$

□

Следствие (о достаточном множестве линейных функционалов). $(X, \|\cdot\|)$ над $\mathbb{K}$, $\quad x_0 \in X$

1.
$$\exists g \in X^* : \begin{cases} \|g\| = 1, \\ g(x_0) = \|x_0\|; \end{cases}$$

2. $\|x_0\| = \max\{|h(x_0)| \mid \|h\|_{X^*} \le 1\}$.

Доказательство.

- $x_0 \neq 0$

  Рассмотрим $L = \{\, \alpha x_0 \,\}_{\alpha \in \mathbb{K}}$. Определим $f : L \to \mathbb{K} : \quad f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$.
  Понятно, что $f \in \mathscr{L}in(L, \mathbb{K}), \quad f(x_0) = \|x_0\|, \quad |f(\alpha x_0)| = |\alpha| \|x_0\|$.

  $$\implies \|f\|_{L^*} = 1$$

  По теореме

  $$\exists g \in X^* : \quad \begin{cases} \|g\|_{X^*} = 1, \\ g(x_0) = \|x_0\|. \end{cases}$$

  Рассмотрим $h \in X^* : \quad \|h\| \leq 1$.

  $$|h(x_0)| \leq \|h\| \|x_0\| \leq \|x_0\| \implies \sup_{\|h\| \leq 1} |h(x_0)| \leq \|x_0\|$$

  Но $\exists g : \quad \begin{cases} \|g\| = 1, \\ |g(x_0)| = \|x_0\|. \end{cases}$

- $x_0 = 0$

  Возьмём $g \in X^* : \quad \|g\| = 1$.

  $$g(x_0) = 0$$

□

Замечание. Теперь имеем две похожие формулы:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$$

$$\|x\| = \max_{\|f\|_{X^*} \leq 1} |f(x)|$$

Следствие (расстояние до подпространства). $(X, \|\cdot\|), \quad L$ — замкнутое подпространство $X, \quad x_0 \in X \setminus L, \quad d := \rho(x_0, L)$

1. $$\exists g \in X^* : \quad \begin{cases} \|g\| = 1, \\ g(x_0) = d, \\ g\big|_L = 0; \end{cases}$$

2. $d = \min\{ |h(x_0)| \mid \|h\| \leq 1, \ h\big|_L = 0 \}$.

Доказательство. $M := \mathscr{L}in(x_0, L) = \{\, \alpha x_0 + y \mid y \in L \,\}$
Определим $f : M \to \mathbb{K} : \quad f(\alpha x_0 + y) = \alpha$.

$$\implies f(y) = 0 \quad \forall y \in L$$

$$f(x_0) = 1$$

Понятно, что $f \in \mathscr{L}in(M, \mathbb{K})$.
Воспользуемся теоремой о норме линейного функционала:

$$\|f\|_{M^*} = \frac{1}{d}$$

$$f_1 := df \implies \|f_1\| = 1, \quad f_1(x_0) = d$$

$$\exists g \in X^* : \quad \begin{cases} \|g\| = 1, \\ g\big|_M = f_1 \end{cases} \implies g\big|_L = 0, \quad g(x_0) = d$$

Возьмём $h \in X*: \quad \|h\| \le 1,\ h\big|_L = 0.$

$$|h(x_0)| = |h(x_0 - y)| \le \|h\| \cdot \|x_0 - y\| \le \|x_0 - y\| \quad \forall y \in L$$

$$\implies |h(x_0)| \le d \implies \sup_{\substack{\|h\| \le 1 \\ h|_L = 0}} |h(x_0)| \le d$$

$$\exists g: \quad \begin{cases} g(x_0) = d, \\ g\big|_L = 0, \\ \|g\| \le 1. \end{cases}$$

$$\implies d = \max_{\substack{\|h\| \le 1 \\ h|_L = 0}} |h(x_0)|$$

□

Замечание. Если $L = \{ 0 \}$, то получим предыдущее следствие.

Следствие (критерий полноты семейства элементов в нормированном пространстве).
$(X, \|\cdot\|), \quad \{ x_\alpha \in X \}_{\alpha \in A}$
$\{ x_\alpha \}$ — полная система элементов **тогда и только тогда**, когда

$$\Big(f \in X^* \quad f(x_\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in A\Big) \implies f = \mathbb{O}$$

Доказательство. $L := \overline{\mathscr{L} \{ x_\alpha \}}_{\alpha \in A}$

- $\implies$

  $\{ x_\alpha \}$ — полное, $\quad f \in X^*, \quad f(x_\alpha) = 0$

  $$x = \sum_{k=1}^{n} c_k x_{\alpha_k} \implies f(x) = 0$$

  То есть, $\forall x \in \mathscr{L} \{ x_\alpha \} \quad f(x) = 0$.
  Возьмём $x \in X$.

  $$\exists \{ x_n \in \mathscr{L} \{ x_\alpha \} \}_{n=1}^{\infty}: \quad \lim x_n = x$$

  f непрерывна $\implies f(x) = \lim f(x) = 0 \implies f = \mathbb{O}$.

- $\impliedby$

  Пусть $L \subsetneq X$, т. е. $\exists x_0 \neq 0 \in X \setminus L$. По первому следствию

  $$\exists g \in X^*: \quad \begin{cases} \|g\| = 1, \\ g(x_0) = \|x_0\| \end{cases} \implies g \neq \mathbb{O}$$

  При этом, $g\big|_L = 0 \implies g(x_\alpha) = 0$ — $\lightning$.

□

Теорема 3. $(X, \|\cdot\|)$
Если X^* сепарабельно, то X сепарабельно.

Доказательство. X^* сепарабельно $\iff \exists \{ f_n \}_{n=1}^{\infty}: \quad f_n$ плотны в X^*, т. е.

$$\forall f \in X^* \quad \exists \{ f_{n_k} \}_{k=1}^{\infty}: \quad \lim \|f - f_{n_k}\| = 0$$

Пусть $f \in X^*$.

$$\|f\| = \sup_{\|x\| = 1} |f(x)| \implies \exists x: \begin{cases} \|x\| = 1, \\ \|f\| \le 2|f(x)| \end{cases}$$

Пусть теперь $f \neq \mathbb{O}$.

$$\exists x_n : \quad \|x_n\| = 1, \quad \|f_n\| \leq 2|f_n(x_n)|$$

Проверим, что $\{ x_n \}$ полна в X (по следствию 3). Пусть $f \in X^*, \quad f(x_n) = 0 \quad \forall n.$

$$\exists f_{n_k} \in X^* : \quad \lim \|f - f_{n_k}\| = 0$$

$$\frac{1}{2}\|f_{n_k}\| \leq |f_{n_k}(x_{n_k})| = |\underbrace{f(x_{n_k})}_{0} - f_{n_k}(x_{n_k})| \leq \|f - f_{n_k}\| \cdot \underbrace{\|x_{n_k}\|}_{1}$$

$$\implies \lim \|f_{n_k}\| = 0 \implies f = \mathbb{O} \implies \{ x_n \} \text{ полна}$$

$\square$