Оглавление

Глава 1

Теория меры

1.1. Ряды Фурье

Определение 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}), \quad f(x + 2\pi) = f(x) \quad \forall x, \quad f \in \mathscr{L}([0, 2\pi])$

Функции f сопоставляются *коэффициенты Фурье* и *ряд Фурье*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[0,2\pi]} f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Примечание. Мы не пишем $\mathrm{d}\,x$, чтобы подчеркнуть, что это интеграл Лебега.

Примечание. По поводу равенства — это отдельный разговор.

Рассмотрим частичную сумму

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(y) \big(\cos ky \cdot \cos kx + \sin ky \cdot \sin kx\big) \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1} \big(\cos ky \cdot \cos kx + \sin ky \cdot \sin kx\big)\Big) \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(y - x)\Big) \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

Сумму вычислим отдельно:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt, \qquad D_n(2\pi l) = n + \frac{1}{2}$$

Будем считать, что $t \neq \pi n$. Тогда $\sin \frac{t}{2} \neq 0$.

$$\sin \frac{t}{2} D_n(t) = \sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{t}{2} \cdot \cos kt$$

При этом,

$$\sin \frac{t}{2} \cdot \cos kt = \frac{1}{2} \Big(\sin(k + \frac{1}{2})t - \sin(k - \frac{1}{2})t\Big)$$

Тогда

$$\sin\frac{t}{2}D_n(t)=\sin\frac{t}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\Big(\sin(k+\frac{1}{2})t-\sin(k-\frac{1}{2})t\Big)$$

$$D_n(t)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

Пусть $y-x=t$.
Теперь

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(y)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(y-x)}{\sin\frac{y-x}{2}}\,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \tag{1.1}$$

Утверждение 1. $\varphi\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}),\quad \varphi(x)=\varphi(x+2\pi)\quad\forall x,\quad \varphi(x)\in\mathscr{L}([0,2\pi])$

$$\implies \forall a\in\mathbb{R}\quad \varphi\in\mathscr{L}([a,a+2\pi])$$

$$\int\limits_{[0,2\pi]}\varphi\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}=\int\limits_{[a,a+2\pi]}\varphi\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

Применим это утверждение:

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_x^{x+2\pi}f(y)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(y-x)}{\sin\frac{y-x}{2}}\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}\,t=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}(t)$$

Лемма 1 (Римана—Лебега). $E\subset\mathbb{R},\quad E\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}),\quad \psi$ измерима на $E\quad \varphi\in\mathscr{L}(E)$

$$\implies \int\limits_E\cos Ax\psi(x)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}\xrightarrow[|A|\to\infty]{}$$

$$\int\limits_E\sin Ax\psi(x)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}\xrightarrow[|A|\to\infty]{}$$

1.1.1. Признак Дини

Теорема 1. $f(x)=f(x+2\pi),\quad f\in\mathscr{L}([0,2\pi]),\quad x\in(-\pi,\pi),\quad \varphi(t)=\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\in\mathscr{L}(-\varepsilon,\varepsilon),\quad 0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$

$$\implies S_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(x) \tag{1.2}$$

Доказательство.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(t)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\Big)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt)\,\mathrm{d}\,t=1 \tag{1.3}$$

□

Отсюда

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x+t)-f(x))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\varepsilon}\dots+\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\dots+\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\dots$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\varepsilon}\frac{f(x+t)-f(x)}{\sin\frac{t}{2}}\cdot\sin(n+\frac{1}{2})t\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

$$|\sin\frac{t}{2}|\geq\frac{2}{\pi}\cdot\frac{|t|}{2}=\frac{|t|}{\pi}\geq\frac{\varepsilon}{\pi}\qquad\implies\quad\frac{f(x+t)-f(x)}{2\sin\frac{t}{2}}\in\mathscr{L}(-\pi,-\varepsilon),\quad\in\mathscr{L}(\varepsilon,\pi)$$

Теперь

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\varepsilon}\frac{f(x+t)-f(x)}{\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$frac12\pi\int_{\varepsilon}^{\pi}\dots\to 0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\Big(f(x+t)-f(x)\Big)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}\,\mathrm{m} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{f(x+t)-f(x)}{\sin\frac{t}{2}}\cdot\sin(n+\frac{1}{2})t\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\Big(f(x+t)-f(x)\Big)\Big(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}-\frac{2}{t}\Big)\sin(n+\frac{1}{2})t\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

Напомним, что

$$\frac{1}{\sin\tau}\cdot\frac{1}{\tau}=\frac{\tau-\sin\tau}{\tau\cdot\sin\tau}=\frac{-\frac{\tau^3}{\tau}+\dots}{\tau\sin\tau}\in\mathcal{C}\Big([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\Big)$$

$$\implies (1.3)$$

1.1.2. Равенство Парсеваля

Теорема 2. $f^2\in\mathscr{L}([0,2\pi])$

$$\implies \int f^2\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}=2\pi a_0^2+\pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

1.1.3. Теорема о единственности рядов Фурье

Теорема 3. f, g измеримы на $\mathbb{R}$, $\quad f(x)=f(x+2\pi),\ g(x)=g(x+2\pi),\quad f,g\in\mathscr{L}(0,2\pi)$

$$a_0(f)=a_0(g),\quad a_n(f)=a_n(g),\quad b_n(f)=b_n(g)\quad \forall n\geq 1$$

$$\implies f\sim g$$

Напоминание. $f\sim g \iff E=\{\,x\in\mathbb{R}\mid f(x)=g(x)\,\}\implies \mathrm{m}\,E=0$

1.2. Преобразование Фурье

Рассматриваем функции $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$.

Определение 2. $u\in\mathscr{L}(\mathbb{R}),\quad v\in\mathscr{L}(\mathbb{R}),\quad f=u+iv$

Напоминание.

$$\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}\overset{\text{def}}{=}\int_{\mathbb{R}} u\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}+i\int_{\mathbb{R}} v\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

Будем говорить, что f *суммируема* на всей оси, если u и v суммируемы на всей оси.

Определение 3. $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R})$
Её *преобразованием Фурье* называется

$$\widehat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-xt}\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}(x)$$

Примечание. *Нормировка* $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ не общепринята, однако она будет удобна в дальнейших преобразованиях.

Определение 4. $\varphi\in\mathscr{L}(\mathbb{R})$

Её *обратным преобразованием Фурье* называется

$$\widetilde{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{ixt} \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}(t)$$

1.2.1. Равенство Планшереля

Теорема 4. $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}), \quad |f|^2 \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$

$$\implies |\widehat{f}|^2 \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f|^2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{f}|^2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

Утверждение 2. $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}), \quad \widehat{f} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}), \quad |f|^2, |\widehat{f}|^2 \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$

Для почти всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо

$$\widetilde{(\widehat{f})}(x) = f(x)$$

Примечание. Требование $f, \widehat{f} \in \mathscr{L}$ избыточно, если более обще определить преобразование Фурье.

$$\widehat{\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Следующие формулы верны для широкого класса функций, который получается, если обосновать все шаги.

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}(x)$$

$$\widehat{f}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (-ix) e^{-itx} \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}(x) = \left(\widehat{-ixf(x)}\right)(t)$$

По лемме Римана—Лебега $\widehat{f}(t) \xrightarrow[|t|\to\infty]{} 0$.

Рассмотрим преобразование Фурье от производной.

$$\widehat{(f')}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-itx} \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-itx} \,\mathrm{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \underbrace{\left(f(x) e^{-itA} - f(-A) e^{itA}\right)}_{0} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-it) f(x) e^{-itx} \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} it \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} \,\mathrm{d}\,x = it\widehat{f}(t)$$