Оглавление

Глава 1

Линейные функционалы

1.1. Принцип равномерной ограниченности

Лемма 1. $(X, \|\cdot\|),\ (Y, \|\cdot\|), \quad U \in \mathscr{L}in(X, Y)$

$$\exists a \in X\ \exists \varepsilon > 0\ \exists R > 0 : \quad U\big(\mathtt{B}_\varepsilon(a)\big) \subset \overline{\mathtt{B}_R(0)} \implies \begin{cases} U \in \mathscr{B}(X, Y), \\ \|U\| \le \frac{2R}{\varepsilon} \end{cases}$$

Доказательство. Возьмём $z \in X : \quad \|z\| < \varepsilon$.

$$a + z \in \mathtt{B}_\varepsilon(a) \implies U(a + z) \subset \overline{B_R(0)} \implies \begin{cases} \|U(a + z)\| \le R, \\ \|U(a)\| \le R \end{cases} \xRightarrow[z = (a+z) - a]{} \\ \implies \|Uz\| \le \|U(a + z)\| + \|U(a)\| \le 2R$$

Возьмём $x \in X : \quad \|x\| < 1$.

$$z = \varepsilon x \implies \|\varepsilon x\| < \varepsilon \implies \|U(\varepsilon x)\| \le 2R \implies \|Ux\| \le \frac{2R}{\varepsilon} \xRightarrow[\|U\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ux\|]{} \|U\| \le \frac{2R}{\varepsilon}$$

□

Теорема 1. X — банахово, $\quad (Y, \|\cdot\|), \quad \{\, U_\alpha \in \mathscr{B}(X, Y) \,\}_{\alpha \in A}, \quad \forall x \quad \sup\limits_{\alpha \in A} \|U_\alpha x\| < +\infty$

$$\sup_{\alpha \in A} \|U_\alpha\| < +\infty$$

Доказательство. Нужно доказать, что $\sup\limits_{\|x\| \le 1} \sup\limits_{\alpha} \|U_\alpha x\| < +\infty$.

$$Y_n := \{\, y \mid \|y\| \le n \,\} \subset Y$$

$U_\alpha^{-1}(Y_n)$ замкнуто, т. к. U_α непрерывен.

$$E_n = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha^{-1}(Y_n)$$

E_n замкнуты.
Пусть $x \in X$.

$$\exists n \in \mathbb{N} : \quad \sup_{\alpha \in A} \|U_\alpha x\| < n \implies x \in U_\alpha^{-1}(Y_n) \xRightarrow[\forall \alpha \in A]{} x \in E_n \implies X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

Применим теорему Бэра о категориях:

$$\exists n_0 : \quad \operatorname{Int} E_{n_0} \ne \emptyset$$

То есть,

$$\exists \mathrm{B}_\varepsilon(a) \subset E_{n_0} \implies \mathrm{B}_\varepsilon(a) \in U_\alpha^{-1}(Y_{n_0}) \quad \forall \alpha \in A \implies U_\alpha\big(\mathrm{B}_\varepsilon(a)\big) \subset Y_{n_0} \xRightarrow[\text{лемма}]{} \|U_\alpha\| \leq \frac{2n_0}{\varepsilon} \quad \forall \alpha \in A$$

$\square$

Следствие (Принцип фиксации особенности). X — банахово, $(Y, \|\cdot\|)$, $\{\, U_\alpha \in \mathscr{B}(X, Y) \,\}$, $\sup\limits_{\alpha \in A} \|U_\alpha\| = +\infty$

$$\exists x_0 \in X : \quad \sup_{\alpha \in A} \|U_\alpha x_0\| = +\infty$$

Определение 1. $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$, $\{\, U_n \in \mathscr{L}in(X, Y) \,\}_{n=1}^\infty$, $\forall x \in X \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} U_n x =: Ux$

$U = \text{s-}\lim U_n$ — *сильный (поточечный) предел* U_n.

Свойства.

1. $U_n \in \mathscr{L}in(X, Y)$
$$U = \text{s-}\lim U_n \implies U \in \mathscr{L}in(X, Y)$$
2. $U_n, U \in \mathscr{B}(X, Y)$
$$\lim \|U - U_n\| = 0 \implies Ux = \text{s-}\lim U_n x$$

Доказательство. Очевидно.

$x \in X$

$$\|Ux - U_n x\| \leq \underbrace{\|U - U_n\|}_{\to 0} \cdot \|x\| \implies \lim U_n x = Ux$$

$\square$

Замечание. Если $U = \text{s-}\lim U_n$, $U, U_n \in \mathscr{B}(X, Y)$, то **не обязательно** $\lim \|U - U_n\| = 0$.

Пример. $X = l^1$

$$x = \{\, x_n \,\}_{n=1}^\infty \in l^1$$

$$f_n(x) := x_n, \quad \|f_n(x)\| = |x_n| \leq \|x_n\|_1 \implies \|f_n\| \leq 1 \implies f_n \in (l^1)^*$$

Пусть $e_n = (0, \ldots, 0, \underset{n}{1}, 0, \ldots, 0)$.

$$f_n(e_n) = 1 \implies \|f_n\| \geq 1$$

Найдём сильный предел:

$$\lim x_n = 0 \implies \lim f_n(x) = 0 \quad \forall x \in l^1 \implies \mathbb{O} = \text{s-}\lim f_n$$

$$\|f - \mathbb{O}\| = 1, \quad \lim \|f_n - \mathbb{O}\| = 1 \neq 0$$

Следствие. X — банахово, $(Y, \|\cdot\|)$, $\{\, U_n \,\}_{n=1}^\infty$, $U_n \in \mathscr{B}(X, Y)$, $U = \text{s-}\lim U_n$

$$U \in \mathscr{B}(X, Y), \quad \|U\| \leq \underline{\lim} \|U_n\|$$

Доказательство.

$$\exists \lim U_n x \implies \sup_{n \in \mathbb{N}} \|U_n x\| < +\infty \xRightarrow[\text{теорема}]{} \exists M > 0 : \quad \|U_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b := \underline{\lim} \|U_n\| \in \mathbb{R}, \quad b \leq M$$

$$\exists \{\, n_k \,\} : \quad b = \lim_{k\to\infty} \|U_{n_k}\| \implies Ux = \lim U_{n_k} x \quad \forall x \in X$$

$$\|Ux\| = \lim_{k\to\infty} \|U_{n_k} x\| \leq \lim \|U_{n_k}\| \cdot \|x\| = b\|x\| \implies \|U\| \leq b$$

$\square$

Замечание. $U = \text{s-lim}\, U_n$
Возможно строгое неравенство (в примере так и было).

1.1.1. Критерий сильной сходимости

Теорема 2 (Банах—Штейнгауз)**.** X, Y — банаховы, $\{\, U_n \in \mathscr{B}(X, Y) \,\}_{n=1}^{\infty}$
Существует сильный предел U_n **тогда и только тогда**, когда

1. $\exists M > 0 : \quad \|U_n\| \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
2. $\{\, U_n x \,\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна для $\forall x \in E \subset X$, где E — полное в X, т. е. $\overline{\mathscr{L}\{\, E \,\}} = X$.

Доказательство.

- $\Longrightarrow$
  1. уже доказано;
  2. очевидно.
- $\Longleftarrow$

  Проверим, что $\forall x \in X \quad \{\, U_n x \,\}$ фундаментальна.

  Обозначим $L = \mathscr{L}\{\, E \,\}$. Возьмём $x \in L$.

$$x = \sum_{k=1}^{m} c_k x_k, \quad x_k \in E$$

  Пусть $p > q \in \mathbb{N}$.

$$\|U_p x - U_q x\| \le \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \underbrace{\|U_p x_k - U_q x_k\|}_{\to 0} \xrightarrow[p,q \to \infty]{} 0$$

  $\Longrightarrow \{\, U_n x \,\}$ фундаментальна для $x \in L$.

  Возьмём произвольный $x \in X$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in L : \quad \|x - z\| < \varepsilon$$

  Воспользуемся тем, что $\{\, U_n z \,\}$ фундаментальна:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n > m \ge N \quad \|U_n z - U_m z\| < \varepsilon$$

$$\|Unx - U_m x\| \le \underbrace{\|U_n x - U_n z\|}_{\le \|U_m\| \cdot \|x - z\| \le M \|x - z\| < M\varepsilon} + \underbrace{\|U_n z - U_m z\|}_{< \varepsilon} + \underbrace{\|U_m z - U_m x\|}_{< M\varepsilon} < \varepsilon(2M + 1)$$

  $\Longrightarrow \{\, U_n x \,\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна для $\forall x \in X$.

$$\xRightarrow[Y \text{ — банахово}]{} \exists \lim U_n x =: U \quad \forall x \in X, \quad U = \text{s-lim}\, U_n$$

$\square$

Замечание. $\Longrightarrow$ верно для банахова X и нормированного Y.
$\Longleftarrow$ верно для нормированного X и банахова Y.

Теорема 3 (Банах—Штейнгауз)**.** X — банахово, $(Y, \|\cdot\|)$, $\{\, U_n \in \mathscr{B}(X, Y) \,\}_{n=1}^{\infty}$, $U \in \mathscr{B}(X, Y)$
$U = \text{s-lim}\, U_n$ **тогда и только тогда**, когда

1. $\exists M > 0 : \quad \|U_n\| \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
2. $\exists \lim U_n x \quad \forall x \in E \subset X$, где E — полное в X.

Доказательство.

- $\Longrightarrow$ — уже доказано.
- $L \coloneqq \mathscr{L}\{\,E\,\}, \quad x \in L$

$$x = \sum_{k=1}^{m} ckx_k, \quad x_k \in E$$

$$\exists \lim U_n x_k \quad \forall x_k \implies \exists \lim U_n x$$

Проверим, что $\forall x \in X \quad \exists \lim U_n x$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in L: \quad \|x - z\| < \varepsilon$$

$$\exists N: \quad \forall n \geq N \quad \|Uz - U_n z\| < \varepsilon$$

$$\|Ux - U_n x\| \leq \underbrace{\|Ux - U_z\|}_{\leq \|U\| \cdot \|x - z\| < \|U\| \cdot \varepsilon} + \underbrace{\|Uz - U_n z\|}_{< \varepsilon} + \underbrace{\|U_n z - U_n x\|}_{\|U_n\| \cdot \|x - z\| < M\varepsilon} < \varepsilon(\|U\| + 1 + M)$$

$$\implies \exists U_n x = Ux$$

$\square$

1.2. Обратные операторы

Когда существует непрерывный обратный оператор?

1.2.1. Обратимость оператора, близкого к тождественному

Теорема 4. X — банахово, $\quad I$ — тождественный, $\quad A \in \mathscr{B}(X), \quad \|A\| < 1$

$$\exists (I - A)^{-1}, \quad \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$