Содержание

Уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной

Рассматриваем уравнение

$$\frac{\mathrm{d}\, y(x)}{\mathrm{d}\, x} = f\big(x, y(x)\big), \qquad \text{или } y' = f(x,y) \tag{1}$$

1. Продолжимость решения на границу и за границу; теорема о продолжимости решения за границу

Определение 1. Пусть $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (1) на $\langle a, b \rangle$. Если этот промежуток произвольным образом сузить, то на новом промежутке функция $y = \varphi(x)$ останется решением, которое называют *сужением* исходного решения

Определение 2. Решение уравнения (1), заданное на промежутке $\langle a, b)$ *продолжимо вправо в точку* b или *на границу*, если найдётся такое решение $y = \widetilde{\varphi}(x)$, определённое на промежутке $\langle a, b]$, что сужение $\widetilde{\varphi}(x)$ на $\langle a, b)$ совпадает с $\varphi(x)$

Определение 3. Решение уравнения (1), заданное на промежутке $\langle a, b \rangle$ *продолжимо вправо за точку* b или *за границу*, если найдутся такие $\widetilde{b} > b$ и решение $y = \widetilde{\varphi}(x)$, определённое на промежутке $\left\langle a, \widetilde{b} \right\rangle$, что сужение $\widetilde{\varphi}(x)$ на $\langle a, b \rangle$ совпадает с $\varphi(x)$

Теорема 1. $\varphi(x)$ — решение уравнения (1) на промежутке $\langle a, b)$, $\quad b < +\infty$
Для того чтобы это решение было продолжимо вправо в точку b необходимо и достаточно, чтобы существовали последовательность $\{\, x_k \,\}_{k=1}^{\infty}$ и число $\eta \in \mathbb{R}^1$ такие, что

$$\forall k \quad \begin{cases} x_k \in \langle a, b) \\ \Big(x_k, \varphi(x_k)\Big) \xrightarrow[k\to\infty]{} (b, \eta) \in \widetilde{G} \end{cases}$$

2. Продолжимость решения на границу и за границу; леммы о продолжимости решения за границу отрезка и интервала

Лемма 1 (о продолжимости решения за границу отрезка)**.** Пусть решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1) определено на промежутке $\langle a, b]$ и точка $\big(b, \varphi(b)\big) \in G$
Тогда это решение продолжимо вправо за точку b на полуотрезок Пеано, построенный для точки $\big(b, \varphi(b)\big)$

Лемма 2 (о продолжимости решения за границу интервала)**.** Пусть решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1) определено на промежутке $\langle a, b)$, существует число $\eta = \lim\limits_{x \to b^-} \varphi(x)$ и точка $(b, \eta) \in G$
Тогда это решение продолжимо вправо за точку b

3. Теорема о поведении интегральной кривой полного внутреннего решения

Определение 4. Решение называется *полным*, *максимально продолженным*, или *непродолжимым* в случае, если его нельзя продолжить ни влево, ни вправо.

Определение 5. Внутреннее (граничное) решение называется *полным*, если его нельзя продолжить ни влево, ни вправо так, чтобы оно осталось внутренним (граничным)

Определение 6. Промежуток, на котором определено полное решение, будем называть *максимальным интервалом существования* и обозначим $I_{\max}$, а если для полного решения была поставлена задача Коши с начальными данными x_0, y_0, то $I(x_0, y_0)$

Определение 7. График полного решения будем называть *интегральной кривой* уравнения (1)
Дуга интегральной кривой — это график решения, заданного на любом промежутке $\langle a, b\rangle \subsetneq I_{\max}$

Теорема 2 (о поведении интегральной кривой полного внутреннего решения)**.** Предположим, что внутреннее решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1) определено на промежутке $\langle a, \beta)$ и не продолжимо вправо. Тогда для любого компакта $\overline{H} \subset G$ найдётся такое число $\delta \in \langle a, \beta)$, что для всякого $x \in (\delta, \beta)$ точка $\big(x, \varphi(x)\big) \in G \setminus \overline{H}$

Другая формулировка. При стремлении аргумента полного внутреннего решения к границе максимального интервала существования дуга интегральной кривой покидает любой компакт, лежащий в области G, и никогда в него не возвращается

4. Ломаные Эйлера; лемма о ломаных Эйлера в роли ε-решения

Определение 8. Точка $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ называется точкой *неединственности*, если существуют такие решения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ задачи Коши уравнения (1) с начальными данными x_0, y_0, определённые на промежутке $\langle a, b\rangle$, и такая последовательность $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$, $x_k \in \langle a, b\rangle$, что $\varphi_1(x_k) \neq \varphi_2(x_k) \quad (k = 1, 2, \dots)$
В противном случае точка (x_0, y_0) называется точкой единственности

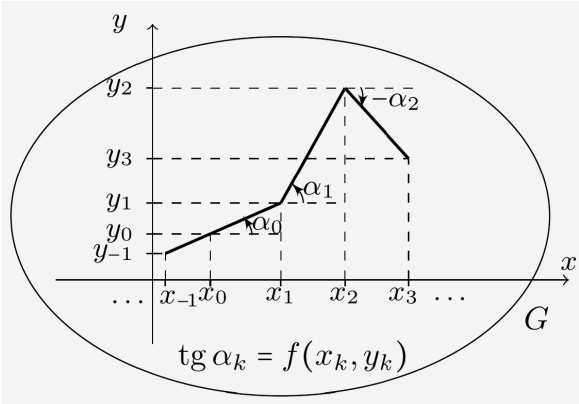
Определение 9. Точку $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ будем называть *точкой единственности* в следующих случаях:

1. задача Коши уравнения (1) с начальными данными x_0, y_0 не имеет решений
2. для любых двух решений $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ этой задачи Коши, определённых на некотором промежутке $\langle a, b\rangle$, найдётся интервал $(\alpha, \beta) \ni x_0$ такой, что
$$\forall x \in (\alpha, \beta) \cap \langle a, b\rangle \quad \varphi_1(x) = \varphi_2(x)$$

Определение 10. *Общим решением* уравнения (1) на некотором связном множестве A^*, лежащем в области единственности G°, называется функция $y = \varphi(x, C)$, определённая и непрерывная по совокупности аргументов на множестве $Q_{A^*} = \{\, (x, C) \mid x \in \langle a(C), b(C)\rangle\,, \quad C \in \langle C_1, C_2\rangle \,\}$, если выполняются следующие два условия:

1. для любой точки $(x_0, y_0) \in A^*$ уравнение $y_0 = \varphi(x_0, C)$ имеет единственное решение $C = C_0$
2. функция $y = \varphi(x, C_0)$ — это решение задачи Коши уравнения (1) с начальными данными x_0, y_0, определённое на промежутке $\langle a(C_0), b(C_0)\rangle$

Выберем в области G произвольную точку (x_0, y_0) и построим в ней отрезок поля направлений столь малой длины, что он целиком лежит в G, начинаясь в какой-то точке (x_{-1}, y_{-1}) и заканчиваясь в точке (x_1, y_1)
Проведём вправо через точку (x_1, y_1) и влево через точку (x_{-1}, y_{-1}) полуотрезки поля, лежащие в G и заканчивающиеся в точках (x_2, y_2) и (x_{-2}, y_{-2}) соответственно, и так далее
График полученной таким образом непрерывной кусочно-линейной функции $y = \psi(x)$ называется *ломаной*



Эйлера
Итак, установлено, что ломаная Эйлера лежит в области G, проходит через точку (x_0, y_0) и абсциссы её угловых точек равны x_j $(j = \overline{-N, N})$

Определение 11. *Рангом дробления* ломаной Эйлера назовём число, равное

$$\max_{j=\overline{1-N,N}} \{\, x_j - x_{j-1} \,\}$$

Формула, рекуррентно задающая ломаную Эйлера $y = \psi(x)$, имеет вид: $\psi(x_0) = y_0$ и далее при $j = 0, 1, \dots, N-1$ для любого $x \in (x_j, x_{j+1}]$ или при $j = 0, -1, \dots, 1-N$ для любого $x \in [x_{j-1}, x_j)$

$$\psi(x) = \psi(x_j) + f\big(x_j, \psi(x_j)\big)(x - x_j) \tag{2}$$

В частности, при $j = 0$ отрезок ломаной Эйлера определён для любого $x \in [x_{-1}, x_1]$ и, делясь на два полуотрезка, проходит через точку (x_0, y_0) под углом, тангенс которого равен $f(x_0, y_0)$
Понятно, что для всякого $j = \overline{0, N-1}$ производная $\psi'(x) = f\big(x_j, \psi(x_j)\big)$ при $x \in (x_j, x_{j+1})$.

Доопределим $\psi'(x)$ в точках разрыва как левостороннюю производную при $x > x_0$ и как правостороннюю производную при $x < x_0$, положив

$$\psi'(x_j) = \psi'_{\mp}(x_j) \lim_{x \to x_j^{\mp 0}} \frac{\psi(x) - \psi(x_j)}{x - x_j} \qquad (j = \pm 1 \dots, \pm N)$$

А при $j = 0$ существует полная производная $\psi'(x_0) = f(x_0, y_0)$
Таким образом, для любого $x \in (x_j, x_{j+1}]$ $(j = 0, 1, \dots, N-1)$ или для любого $x \in [x_{j-1}, x_j)$ $(j = 0, -1, \dots, 1-N)$, дифференцируя равенство (2) по x, получаем

$$\psi'(x) = f\big(x_j, \psi(x_j)\big), \qquad j \in \{\, 1-N, \dots, N-1 \,\} \tag{3}$$

Определение 12. Для всякого $\varepsilon > 0$ непрерывная и кусочно-гладкая на отрезке $[a, b]$ функция $y = \psi(x)$ называется ε-решением уравнения (1) на $[a, b]$, если для любого $x \in [a, b]$ точка $\big(x, \psi(x)\big) \in G$ и

$$\big|\psi'(x) - f\big(x, \psi(x)\big)\big| \le \varepsilon \tag{4}$$

Лемма 3 (о ломаных Эйлера в роли ε-решения)**.** Для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ и для любого отрезка Пеано $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ имеем:

1. Для любого $\delta > 0$ на $\overline{P_h}$ можно построить ломаную Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления, не превосходящим δ, график которой лежит в прямоугольнике $\overline{R}$.

2. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что всякая ломаная Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления, не превосходящим δ, является ε-решением уравнения (1) на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$.

5. Лемма Асколи—Арцела

Лемма 4. Из любой ограниченной и равностепенно непрерывной на $[a, b]$ последовательности функций можно выделить равномерно сходящуюся на $[a, b]$ подпоследовательность.

6. Ломаные Эйлера; теорема Пеано о существовании внутреннего решения

Теорема 3. Пусть правая часть уравнения (1) непрерывна в области G.

Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ и для любого отрезка Пеано $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ существует по крайней мере одно решение ЗК$_{(1)}(x_0, y_0)$, определённое на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

7. Теорема о существовании решения для одного из случаев U_1^+, O_1^+, $B_{1<}^+$, $B_{1=}^+$

Для упрощения обозначений и формул, используемых в дальнейшем при решении граничной задачи Коши, НУО будем считать, что задача всегда ставится в начале координат и функция f там равна нулю, т. е. уравнение (1) имеет вид

$$y' = f_0(x, y), \tag{5}$$

где функция f_0 определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G} = G \cup \widehat{G}$, точка $O = (0, 0) \in \widetilde{G}$, $f_0(0, 0) = 0$ и поставлена граничная задача Коши с начальными данными $0, 0$.

Определение 13. Функцию $y = b_{a,u}^+(x)$ заданную на отрезке $[0, a]$ будем называть *верхнеграничной*, если для неё выполняются следующие пять условий:

1. $b_{a,u}^+(x) \in \mathcal{C}^1\big([0, a]\big)$;
2. $b_{a,u}^+(0) = 0$;
3. ${b_{a,u}^+}'(0) \geq 0$;
4. $b_{a,u}^+$ вогнута на $[0, a]$, если ${b_{a,u}^+}'(0) = 0$;
5. *правая верхнеграничная кривая* $\gamma_{a,u}^+ = \big\{\, x \in [0, a], \quad y = b_{a,u}^+(x) \,\big\} \subset \widehat{G}$.

Аналогично вводится правая нижнеграничная функция $y = b_{a,l}^+(x)$, и правая нижнеграничная кривая $\gamma_{a,l}^+$.

Введём две ключевые константы:

$$\tau_u = \frac{{b_{a,u}^+}'(0)}{2}, \qquad \tau_u = 1, \text{ если } {b_{a,u}^+}'(0) = +\infty$$

$$\tau_l = -\frac{{b_{a,l}^+}'(0)}{2}, \qquad \tau_l = -1, \text{ если } {b_{a,l}^+}'(0) = -\infty$$

НУО будем считать, что выполняются условия:

$$\begin{cases} b_{a,u}^+(a) \leq a & \text{при } \tau_u = 0 \\ \forall x \in [0, a] \quad {b_{a,u}^+}'(x) \geq \tau_u & \text{при } \tau_u > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -b_{a,l}^+(a) \leq a & \text{при } \tau_l = 0 \\ \forall x \in [0, a] \quad -{b_{a,l}^+}'(x) \geq \tau_l & \text{при } \tau_l > 0 \end{cases}$$

В результате $\gamma_{a,u}^+$ — гладкая кривая из $\widehat{G}$, параметризованная неубывающей функцией $b_{a,u}^+(x)$. Она расположена в первой четверти и содержит точку O. $\gamma_{a,l}^+$ — гладкая кривая из $\widehat{G}$, параметризованная невозрастающей функцией $b_{a,l}^+(x)$. Она расположена в четвёртой четверти и содержит точку O.

Для всякого $c > 0$ рассмотрим правую *c-окрестность* точки O:

$$N_c^+ := \{\, (x, y) \mid x \in (0, c], \quad |y| \leq c \,\}$$

В прямоугольнике N_c^+ длина верхней стороны выбирается так, чтобы каждая “выходящая” из точки O правая граничная кривая, при наличии хотя бы одной, имела пересечение с одной из его сторон. При этом “поведение” граничных кривых после первого попадания на границу N_c^+ интереса не представляет. Любое последующее уменьшение c ситуацию не меняет, разве что отсекаются части граничных кривых, попавших в прямоугольник снаружи.

В частности, неравенства $b^+_{a,u}(a) \le a$ или $-b^+_{a,l}(a) \le a$ при всех $c \le a$ гарантируют пересечение правых граничных кривых γ^+_a именно с боковой стороной прямоугольника N^+_c.
Всегда в дальнейшем, "обрезая" при необходимости кривые γ^+_a, будем считать, что правый конец $\big(a, b^+_a(a)\big)$ любой из них — это первая точка выхода граничной кривой на границу прямоугольника N^+_c
Выделим для уравнения (5) четыре варианта расположения граничных кривых в малой окрестности точки O при $x > 0$:

Определение 14. Будем говорить, что

1. реализуется случай (W^+), если
$$\exists c_W > 0 : \quad W^+_{c_W} \cap \widehat{G} = \emptyset, \qquad W^+_{c_W} = N^+_{c_W}$$
2. реализуется случай (U^+), если
$$\exists c_U > 0 : \quad U^+_{c_U} \cap \widehat{G} = \gamma^+_{a,u} \setminus \{\, O \,\}$$
$$U^+_{c_U} \coloneqq \left\{ \, (x,y) \;\middle|\; \Big(x \in (0,a], \quad -c_u \le y \le b^+_{a,u}(x)\Big) \cup \Big(x \in (a, c_U], \quad y \le c_U\Big) \right\}$$
3. реализуется случай (O^+), если
$$\exists c_O > 0 : \quad O^+_{c_O} \cap \widehat{G} = \gamma^+_{a,l} \setminus \{\, O \,\}$$
$$O^+_{c_O} \coloneqq \left\{ \, (x,y) \;\middle|\; \Big(x \in (0,a], \quad b^+_{a,l}(x) \le y \le c_O\Big) \cup \Big(x \in (a, c_O], \quad |y| \le c_O\Big) \right\}$$
4. реализуется случай (B^+), если
$$\exists c_B > 0 : B^+_{c_B} \cap \widehat{G} = \big(\gamma^+_{a,u} \cup \gamma^+_{a,l}\big) \setminus \{\, O \,\}, \qquad B^+_{c_B} \coloneqq U^+_{c_B} \cap O^+_{c_B}$$

В случае (X^+) или (X^+_{c*}) имеет место одна из двух возможностей:

1. $X^+_{c*} \cap G \ne \emptyset$, что равносильно тому, что X^+_{c*} без входящих в него граничных кривых лежит в G
2. $X^+_{c*} \cap G = \emptyset$

В результате случай (X^+) в зависимости от расположения множества X_{c*} распадается на два подслучая, которые будем обозначать (X^+_1) и (X^+_2)
А дополнительный индекс $>, =, <$, при его наличии в обозначении любого из шести возникших случаев (кроме (W^+_1) и (W^+_2)), будет уточнять знак производной соответсвующих правых граничных функций в нуле
В итоге, получаются случаи:

$\boldsymbol{U^+_1}$: $(U^+_{c_U} \setminus \gamma^+_{a,u}) \subset G$, два подслучая:

- $\boldsymbol{U^{+,>}_1}$: ${b^+_{a,u}}'(0) > 0$
- $\boldsymbol{U^{+,=}_1}$: ${b^+_{a,u}}'(0) = 0$

$\boldsymbol{U^+_2}$: $U^+_{c_U} \cap G = \emptyset$, подслучаи те же

$\boldsymbol{O^+_1}$: $(O^+_{c_O} \setminus \gamma^+_{a,l}) \subset G$, два подслучая:

- $\boldsymbol{O^+_{1,<}}$: ${b^+_{a,l}}'(0) < 0$
- $\boldsymbol{O^+_{1,=}}$: ${b^+_{a,l}}'(0) = 0$

$\boldsymbol{O^+_2}$: $O^+_{c_O} \cap G = \emptyset$, подслучаи те же

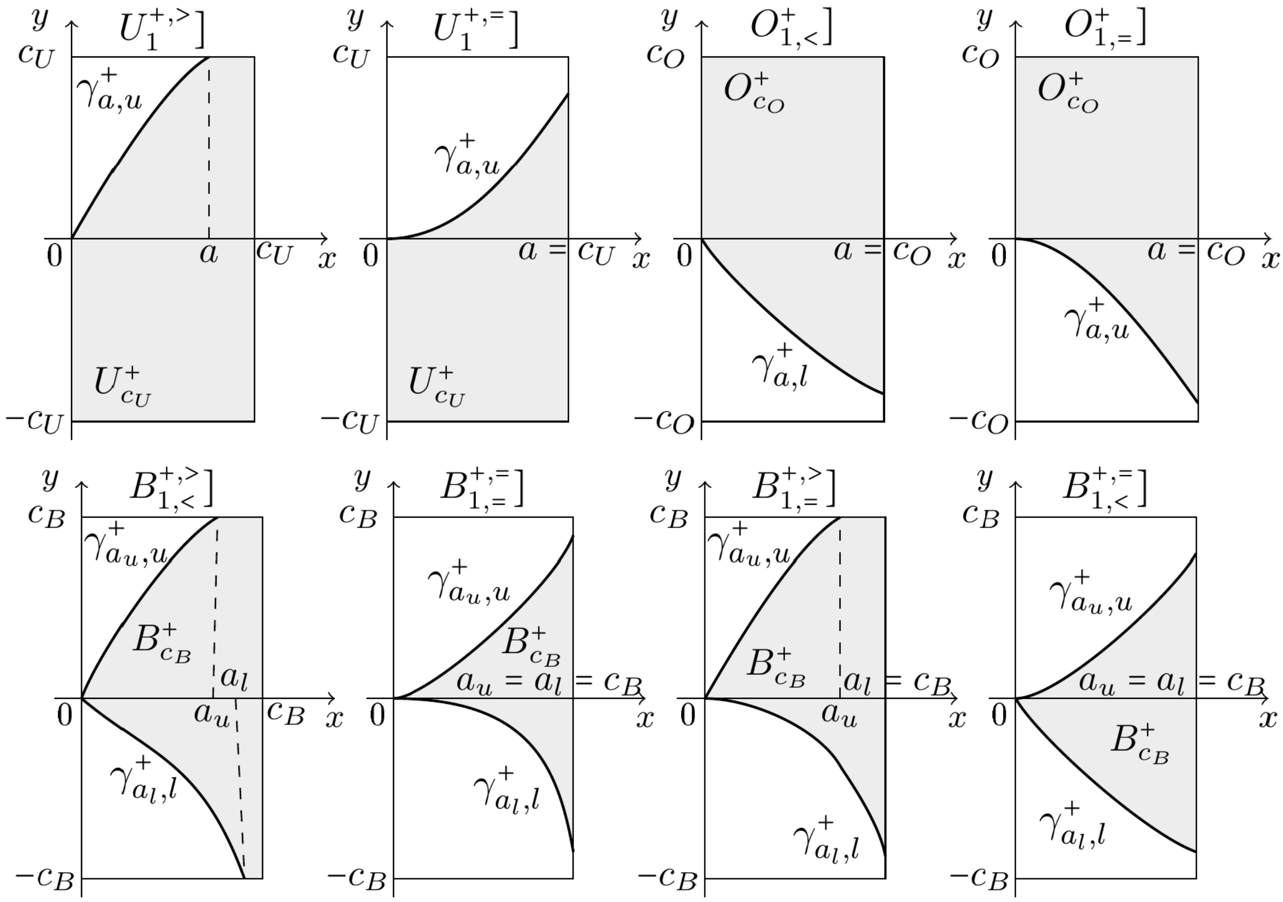
$\boldsymbol{B^+_1}$: $\Big(B^+_{c_B} \setminus (\gamma^+_{a,u} \cup \gamma^+_{a,l})\Big) \subset G$, четыре подслучая:

- $B^{+,>}_{1,<}$: ${b^+_{a,u}}'(0) > 0, \quad {b^+_{a,l}}'(0) < 0$
- $B^{+,=}_{1,=}$: ${b^+_{a,u}}'(0) = 0, \quad {b^+_{a,l}}'(0) = 0$

$B^{+,>}_{1,=}$: ${b^+_{a,u}}'(0) > 0, \quad {b^+_{a,l}}'(0) = 0$

$B^{+,=}_{1,<}$: ${b^+_{a,u}}'(0) = 0, \quad {b^+_{a,l}}'(0) < 0$

$\boldsymbol{B_2^+}$: $B^+_{c_B} \cap G = \emptyset$, подслучаи те же



Введём ограничения на функцию f_0 в случаях $U_1^{+,=}$, $O^+_{1,=}$, $B^{+,=}_{1,=}$, $B^{+,>}_{1,=}$ и $B^{+,=}_{1,<}$:

$$\forall x \in (0, a] \quad \begin{cases} f_0\big(x, b^+_{a,u}(x)\big) \le {b^+_{a,u}}'(x), & \text{если } {b^+_{a,u}}'(0) = 0, \\ f_0\big(x_0, b^+_{a,l}(x)\big) \ge {b^+_{a,l}}'(x), & \text{если } {b^+_{a,l}}'(0) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 4 (о существовании решения граничной задачи Коши). Предположим, что в уравнении (5) функция f_0 определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}$.

Тогда в каждом из случаев $(N_1^+), (U_1^{+,>}), (O^+_{1,<}), (B^{+,>}_{1,<})$ и в каждом из случаев $(U_1^{+,=}), (O^+_{1,=})$, $(B^{+,=}_{1,=})$, $(B^{+,>}_{1,=}), (B^{+,=}_{1,<})$ при условиях (6) на любом правом граничном отрезке Пеано существует по крайней мере одно решение граничной задачи Коши с начальными данными $(0, 0)$

Теорема 5 (об отсутствии решений граничной задачи Коши). В каждом из случаев $(U_2^{+,>})$, $(O^+_{2,<})$, $(B^{+,>}_{2,<})$, (N_2^+) граничная задача Коши с начальными данными $(0, 0)$ не имеет решений в правой полуплоскости

8. Лемма о продолжимости решений на отрезок Пеано; лемма о верхнем и нижнем решениях

Лемма 5 (о продолжимости решений на отрезок Пеано). Пусть $y = \varphi(x)$ — это решение внутренней задачи Коши с начальными данными x_0, y_0, определённое на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$.
Тогда любое другое решение уравнения (1) $y = \psi(x)$ этой же задачи Коши, определённое на проме-

жутке $\langle a,b\rangle \subsetneq [x_0-h, x_0+h]$, продолжимо на $\overline{P_h}(x_0,y_0)$

Пусть $(x_0,y_0)\in G$, $\overline{P_h}(x_0,y_0)$ — некий отрезок Пеано и $\{\,\chi_k(x)\,\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность решений ЗК(x_0,y_0) уравнения (1), определённых на $[x_0-h, x_0+h]$

Утверждение 1. Для любых $k\in\mathbb{N}$, $x\in[x_0-h,x_0+h]$ функции

$$\chi_k^l(x) \coloneqq \min\{\,\chi_1(x),\dots,\chi_k(x)\,\}, \qquad \chi_k^u(x) \coloneqq \max\{\,\chi_1(x),\dots,\chi_k(x)\,\}$$

также являются решениями поставленной задачи на $\overline{P_h}(x_0,y_0)$

Лемма 6 (о нижнем и верхнем решениях)**.** Существуют решения ЗК(x_0,y_0) $y=\chi^l(x)$ и $y=\chi^u(x)$ уравнения (1) такие, что

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad \forall x\in[x_0-h,x_0+h]\quad \begin{cases}\chi^l(x)\le\chi_k^l(x)\\ \chi^u(x)\ge\chi_k^u(x)\end{cases}$$

9. Теорема о локальной единственности решения внутренней задачи Коши

Теорема 6. Пусть $(x_0,y_0)\in G$ — это точка единственности.

Тогда решение ЗК(x_0,y_0) уравнения (1) является локально единственным

10. Лемма Гронуолла

Лемма 7. Пусть функция $h(x)\in\mathcal{C}\big(\langle a,b\rangle\big)$ и существуют такие $x_0\in\langle a,b\rangle$, $\lambda\ge 0$, $\mu>0$, что

$$\forall x\in\langle a,b\rangle\quad 0\le h(x)\le\lambda+\mu\left|\int_{x_0}^{x} h(s)\,\mathrm{d}\,s\right|$$

Тогда для любого $x\in\langle a,b\rangle$ справедливо неравенство

$$h(x)\le\lambda e^{\mu|x-x_0|}$$

11. Условия Липшица; теорема о множестве единственности

Определение 15. Функция $f(x,y)$ удовлетворяет *условию Липшица* по y *глобально* на множестве $D\subset\mathbb{R}^2$, если

$$\exists L>0:\quad \forall (x,y_1),(x,y_2)\in D\quad |f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2| \tag{7}$$

Обозначение. $f\in \mathrm{Lip}_y^{gl}(D)$

Определение 16. Функция $f(x,y)$ удовлетворяет *условию Липшица* по y *локально* на множестве $\widetilde{G}$, если для любой точки $(x_0,y_0)\in\widetilde{G}$ найдётся замкнутая c-окрестность $\overline{B}_c(x_0,y_0)$ такая, что функция f удовлетворяет условию Липшица по y глобально на множестве $U_c=\widetilde{G}\cap\widetilde{B}_c(x_0,y_0)$

Обозначение. $y\in\mathrm{Lip}_y^{loc}(\widetilde{G})$

Теорема 7 (о множестве единственности)**.** Пусть в уравнении (1) функция $f(x,y)$ определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}$ и удовлетворяет условию Липшица по y локально на множестве $\widetilde{G^\circ}=G^\circ\cup\widehat{G^\circ}$.

Тогда $\widetilde{G^\circ}$ — множество единственности для уравнения (1)

Теорема 8 (о множестве единственности; слабая). Предположим, что в уравнении (1) функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}$, функция $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ определена и непрерывна в области $G^\circ \subset G$.

Тогда множество $\widetilde{G^\circ} = G^\circ \cup \widehat{G^\circ}$, является множеством единственности для уравнения (1), если при этом для любой точки $(x_0, y_0) \in \widehat{G^\circ}$ найдётся $\overline{B}_c(x_0, y_0)$ такая, что множество $\widetilde{G^\circ} \cap \overline{B}_c(x_0, y_0)$ выпукло по y

12. Теорема Осгуда

Теорема 9. Пусть в уравнении (1) функция $f(x, y)$ непрерывна в области G и

$$\forall\ (x, y_1), (x, y_2) \in G \quad |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \le h\big(|y_2 - y_1|\big)$$

где функция $h(s)$ определена, непрерывна и положительна для всякого $s \in (0, +\infty)$ и

$$\int_\varepsilon^a h^{-1}(s)\,\mathrm{d}\,s \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \infty, \qquad a > \varepsilon > 0$$

Тогда G — это область единственности для уравнения (1)

13. Область существования общего решения, лемма о поведении в ней решений, формула общего решения

Опишем множество A^*, в котором можно построить общее решение, поскольку гарантировать его существование во всей области единственности G° нельзя, какой бы малой она ни была
В этом параграфе в роли A^* будет выступать вводимый ниже компакт $\overline{A}$

Алгоритм (построения $\overline{A}$). Пусть G° — область единственности для уравнения (1)
Возьмём любую точку $(x_0^*, y_0^*) \in G^\circ$
Поскольку G° является открытым множеством, существует такое $\delta > 0$, что $\overline{B}_{2\delta}(x_0^*, y_0^*) \subset G^\circ$
Пусть числа y_1, y_2 таковы, что

$$\begin{cases} 0 < y_0^* - y_1 < \delta \\ 0 < y_2 - y_0^* < \delta \end{cases}$$

и найдётся отрезок $[a, b] \ni x_0^*$ такой, что графики решений ЗК(x_0^*, y_1) $y = \varphi_1(x)$ и ЗК(x_0^*, y_2) $y = \varphi_2(x)$ лежат в $\overline{B}_c$ при $x \in [a, b]$. Тогда в $\overline{B}_\delta$ содержится компакт

$$\overline{A} = \{\, (x, y) \mid a \le x \le b, \quad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \,\}$$

Лемма 8. Для любой точки $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ решение ЗК$_{(1)}(x_0, y_0)$ $y = \varphi(x)$ продолжимо на отрезок $[a, b]$

Для любой точки $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ обозначим через $y = y(x, x_0, y_0)$ решение ЗК$_{(1)}(x_0, y_0)$
Тогда $y(x_0, x_0, y_0) = y_0$, и по лемме о поведении решений на компакте решение $y = (x, x_0, y_0)$ определено для всякого $x \in [a, b]$
Для произвольной точки $\zeta \in [a, b]$ рассмотрим функцию

$$\varphi(x, C) = y(x, \zeta, C), \qquad (\zeta, C) \in \overline{A}$$

на прямоугольнике $\overline{Q} = \overline{Q}_{\overline{A}} \coloneqq \{\, (x, C) \mid a \le x \le b, \quad \varphi_1(\zeta) \le C \le \varphi_2(\zeta) \,\}$, который является частным случаем множества Q_{A^*} из определения общего решения.

В самом деле, $\varphi_1(\zeta) \le C \le \varphi_2(\zeta)$ по построению $\overline{A}$. А по лемме решение $y = y(x, \zeta, C)$ определено для любого $x \in [a, b]$ и при $x = \zeta$ по определению решения ЗК $\varphi(\zeta, C) = y(\zeta, \zeta, C) = C$

Теорема 10. Введённая функция $y = \varphi(x, C)$ является общим решением уравнения (1) на компакте $\overline{A}$, построенном в окрестности произвольной точки из области единственности G°

14. Формула общего решения, теорема о дифференцируемости общего решения

Определение 17. Общее решение $y = \varphi(x, C)$ будем называть *общим решением в форме Коши* или *классическим общим решением* уравнения первого порядка (1)

Теорема 11. Пусть на компакте $\overline{A}$ при некотором $\zeta \in [a, b]$ задано общее решение $y = \varphi(x, C)$, и в уравнении (1) $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема по y в некоторой окрестности $\overline{A}$

$$\Longrightarrow \quad \forall (x, C) \in \overline{Q}: \quad \frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial x} = \exp\left(\int_{\zeta}^{x} \frac{\partial f\big(t, \varphi(t, C)\big)}{\partial y} \,\mathrm{d}\, t\right)$$

Уравнения первого порядка в симметричной форме

Уравнение первого порядка в симметричной форме имеет вид

$$M(x, y)\,\mathrm{d}\, x + N(x, y)\,\mathrm{d}\, y = 0, \tag{8}$$

где функции M и N определены и непрерывны на связном множестве $\widetilde{B} = B \cup \widehat{B} \cup \mathcal{B}$.

15. Определение интеграла, теорема о характеристическом свойстве интеграла

Определение 18. Непрерывную в области $B \subset \mathbb{R}^2$ функцию $U(x, y)$ будем называть допустимой, если для любой точки $(x_0, y_0) \in B$ найдётся такая непрерывная функция $y = \xi(x)$ или $x = \eta(y)$, определённая на интервале (α, β), содержащем точку x_0 или y_0, что:

1. $y_0 = \xi(x_0)$ или $x_0 = \eta(y_0)$
2. точка $\big(x, \xi(x)\big) \in B$ для любого $x \in (\alpha, \beta)$ или
   точка $\big(\eta(y), y\big) \in B$ для любого $y \in (\alpha, \beta)$
3. $y = \xi(x)$ или $x = \eta(y)$ — единственное решение уравнения $U(x, y) = U(x_0, y_0)$.

Определение 19. Допустимая функция $U(x, y)$ называется *интегралом* уравнения (8) в области единственности B°, если для любой точки $(x_0, y_0) \in B^{\circ}$ единственная функция $y = \xi(x)$ или $x = \eta(y)$ из определения допустимой функции — это решение $\text{ЗК}_{(8)}(x_0, y_0)$ на (α, β).

Теорема 12 (о характеристическом свойстве интеграла)**.** Для того чтобы допустимая функция $U(x, y)$ была интегралом уравнения в симметричной форме (8) в области единственности B°, **необходимо и достаточно**, чтобы $U(x, y)$ обращалась в постоянную вдоль любого решения (8), т. е. чтобы:

- $U\big(x, \varphi(x)\big) \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} C$ для любого решения $y = \varphi(x)$, определённого на $\langle a, b\rangle$
- $U\big(\psi(y), y\big) \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} C$ для любого решения $x = \varphi(y)$, определённого на $\langle a, b\rangle$

16. Определение гладкого интеграла, теорема о характеристическом свойстве гладкого интеграла

Определение 20. Гладкую функцию $U(x, y)$ будем называть гладкой допустимой в области B, если $U_x'^2 + U_y'^2 > 0$ для любой точки $(x, y) \in B$

Определение 21. Интеграл $U(x,y)$ уравнения (8) будем называть гладким, если U — гладкая допустимая функция

Теорема 13 (о характеристическом свойстве гладкого интеграла)**.** Для того чтобы гладкая допустимая функция $U(x,y)$ была гладким интегралом уравнения (8) в области единственности B°, **необходимо и достаточно**, чтобы выполнялось тождество

$$N(x,y)U'_x(x,y) - M(x,y)U'_y(x,y) \overset{B^\circ}{\equiv} 0$$

Следствие. Гладкая допустимая функция $U(x,y)$ есть гладкий интеграл уравнения (1) $y' = f(x,y)$ в области единственности G° **тогда и только тогда**, когда верно тождество

$$U'_x(x,y) + f(x,y)U'_y(x,y) \overset{G^\circ}{\equiv} 0$$

17. Теоремы о существовании гладкого интеграла и о связи между интегралами

Определение 22. $U(x,y)$ — интеграл уравнения (8) в области единственности B°
Тогда равенство $U(x,y) = C$ называется *общим интегралом* уравнения (8)

Теорема 14 (о существовании гладкого интеграла)**.** В уравнении (8) функции $M(x,y),\ N(x,y) \in \mathcal{C}^1(B)$
Тогда для любой точки (x_0, y_0) из области B существует её окрестность $A \subset B$, в которой уравнение (8) имеет гладкий интеграл $U(x,y)$

Теорема 15 (о связи между интегралами)**.** $U(x,y)$ — интеграл уравнения (8) в некоторой области A.
Тогда:

1. если $U_1(x,y)$ — ещё один интеграл в A, то $\exists \Phi(x): \quad U_1(x,y) \overset{A}{\equiv} \Phi\big(U(x,y)\big)$;
2. если функция $\Phi\big(U(x,y)\big)$ допустима, то $U_1(x,y) \overset{A}{\equiv} \Phi\big(U(x,y)\big)$ — это интеграл уравнения (8) в области A.

18. Теорема об интеграле уравнения с разделяющимися переменными

Определение 23. Уравнением с разделяющимися переменными в симметрической форме будем называть уравнение (8) вида

$$g_1(x)h_2(y)\,\mathrm{d}\,x + g_2(x)h_1(y)\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{9}$$

в котором $g_1(x),\ g_2(x) \in \mathcal{C}\big(\langle a, b\rangle\big), \quad h_1(y),\ h_2(y) \in \mathcal{C}\big(\langle c, d\rangle\big)$, причём

$$(a,b) \setminus (g_1^\circ \cup g_2^\circ) = \bigcup_{k=1}^{k_*}(a_k, b_k), \qquad (c,d) \setminus (h_1^\circ \cup h_2^\circ) = \bigcup_{l=1}^{l_*}(c_l, d_l)$$

$$\forall x \in (a,b) \quad g_1^2(x) + g_2^2(x) \neq 0, \qquad \forall y \in (c,d) \quad h_1^2(y) + h_2^2(y) \neq 0,$$

где $g_i^\circ = \{\, x \in \langle a,b\rangle \mid g_i(x) = 0 \,\}$, $\ h_i^\circ = \{\, y \in \langle c,d\rangle \mid h_i(y) = 0 \,\}$ — замкнутые множества нулей функций g и h

Теорема 16 (об интеграле уравнения с разделяющимися переменными)**.** Любая область B_{kl}, для которой выполнено

$$\forall (x,y) \in B_{kl} \quad g_2(x) \neq 0, \quad h_2(y) \neq 0, \quad g_1^2(x) + h_1^2(x) \neq 0,$$

является областью единственности уравнения (9), и в ней функция $U(x,y)$ является гладким интегралом уравнения (9).

19. Теорема об интеграле уравнения в полных дифференциалах; теорема об уравнении в полных дифференциалах, локальная

Определение 24. Уравнение (8) называется *уравнением в полных дифференциалах* в области B, если существует функция $U(x, y) \in \mathcal{C}^1(B)$ такая, что для всякой точки $(x, y) \in B$,

$$U'_x(x, y) = M(x, y), \qquad U'_y(x, y) = N(x, y)$$

Теорема 17 (об интеграле УПД). $U(x, y)$ — это гладкий интеграл УПД в B

Теорема 18 (об УПД; локальная). Предположим, что для уравнения (8) выполняются условия:

1. прямоугольник $R = \{\, (x, y) \mid x \in (a, b), \quad y \in (c, d) \,\} \subset B$;
2. в B существуют и непрерывны частные производные M'_y, N'_y;
3. верно тождество $M'_y(x, y) - N'_x(x, y) \equiv 0$;

Тогда (8) — УПД в R, и для любых $x_0, x \in (a, b), \quad y_0, y \in (c, d)$ его интегралами являются функции

$$U_1(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(s, y_0)\,\mathrm{d}\,s + \int_{y_0}^{y} N(x, s)\,\mathrm{d}\,s$$

$$U_2(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(s, y)\,\mathrm{d}\,s + \int_{y_0}^{y} N(x_0, s)\,\mathrm{d}\,s$$

20. Теоремы о существовании и нахождении интегрирующего множителя, решение линейного уравнения при помощи интегрирующего множителя

Определение 25. Функция $\mu(x, y)$, определённая, непрерывная и не обращающаяся в ноль в области B, называется *интегрирующим множителем* дифференциального уравнения (8), если уравнение

$$\mu(x, y)M(x, y)\,\mathrm{d}\,x + \mu(x, y)N(x, y)\,\mathrm{d}\,y = 0$$

является УПД в B.

Теорема 19 (о существовании интегрирующего множителя). Если в области единственности $B^\circ \subset B$ уравнение (8) имеет гладкий интеграл, тогда в B° существует интегрирующий множитель.

Теорема 20 (о нахождении интегрирующего множителя). Пусть нашлась такая $\omega(x, y) \in \mathcal{C}^1(B)$, что

$$\frac{M'_y(x, y) - N'_x(x, y)}{\omega'_x(x, y)N(x, y) - \omega'_y(x, y)M(x, y)} = \psi(\omega)$$

Тогда уравнение (8) имеет интегрирующий множитель $\mu(\omega) = e^{\int \psi(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega}$.

Нормальные системы ОДУ

Нормальная система дифференциальных уравнений порядка n имеет вид

$$y'_1 = f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots y'_n = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \tag{10}$$

21. Лемма о связи между локальным и глобальным условиями Липшица, достаточные условия для выполнения локального условия Липшица

Определение 26. Функция $f(x,y)$ удовлетворяет *условию Липшица глобально* по y на множестве $B \subset G$, если найдётся такая константа $L = L_B > 0$, что

$$\forall (x,\widetilde{y}),(x,\widehat{y}) \in B \quad \|f(x,\widehat{y}) - f(x,\widetilde{y})\| \le L\,\|\widehat{y} - \widetilde{y}\| \tag{11}$$

Обозначение. $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(B)$

Определение 27. Функция $f(x,y)$ удовлетворяет *условию Липшица локально* по y в области G, если для любой точки $(x_\circ, y^\circ) \in G$ существуют окрестность $V(x_\circ, y^\circ) \subset G$ и константа Липшица $L = L_V > 0$ такие, что для любых двух точек $(x,\widetilde{y}),(x,\widehat{y}) \in V(x_\circ,y^\circ)$ выполняется неравенство (11).

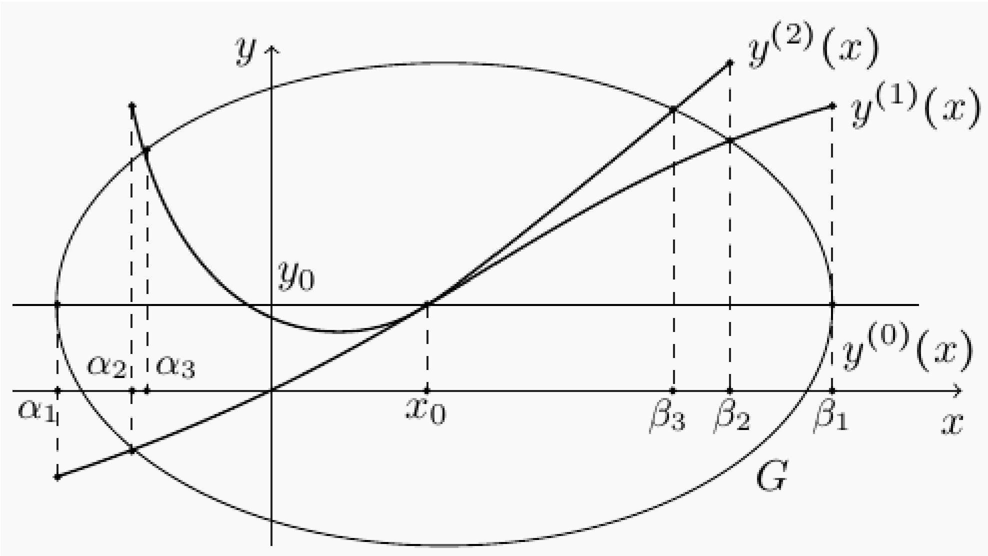
Обозначение. $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$

Лемма 9 (о связи между локальным и глобальным условиями Липшица)**.** Если $f(x,y) \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$, то для любого компакта $\overline{H} \subset G$ выполнено $f(x,y) \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(\overline{H})$

Лемма 10 (о достаточном условии локальной липшицевости)**.** Если вектор-функция $f(x,y)$ непрерывна вместе со своими частными производными по $y_1,\ldots,y_n$ в области G, то она удовлетворяет условию Липшица по y локально в G.

22. Теорема Пикара

Зафиксируем произвольную точку $(x_\circ, y^\circ) \in G$.



В качестве нулевого приближения возьмём функцию $y^{(0)}(x) \equiv y^\circ$. Очевидно, что она определена для любого $x \in \mathbb{R}$, но возможно не при всех значениях аргумента точка $\big(x, y^{(0)}(x)\big)$ окажется в области G. Однако существует интервал (α_1, β_1) такой, что $x_\circ \in (\alpha_1,\beta_1)$ и для всякого $x \in (\alpha_1,\beta_1)$ точка $\big(x, y^{(0)}(x)\big) \in G$, а значит, функция $f\big(x, y^{(0)}(x)\big)$ определена и непрерывна на (α_1,β_1).

Теперь в качестве первого пикаровского приближения можно выбрать функцию

$$y^{(1)}(x) \coloneqq y^\circ + \int_{x_0}^{x} f\big(s, y^{(0)}(s)\big)\,\mathrm{d}\,s,$$

и оно определено и непрерывно как композиция непрерывных функций на (α_1, β_1).

Но, опять-таки, возможно не при всех x точка $\big(x, y^{(1)}(x)\big)$ попадёт в область G. В этом случае (α_1, β_1) придётся уменьшить.

Существует интервал $(\alpha_2, \beta_2) \subset (\alpha_1, \beta_1)$ такой, что $x_0 \in (\alpha_2, \beta_2)$ и для всякого $x \in (\alpha_2, \beta_2)$ точка $\big(x, y^{(1)}(x)\big) \in G$, а значит, функция $f\big(x, y^{(1)}(x)\big)$ определена и непрерывна на (α_2, β_2). И так далее.

...

Предположим, что пикаровское приближение $y^{(k)}(x)$ определено и непрерывно на некотором интервале $(\alpha_k, \beta_k) \ni x_\circ$, и $y^{(k)}(x_\circ) = y^\circ$. Тогда существует такой интервал $(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}) \subset (\alpha_k, \beta_k)$, что $x_\circ \in (\alpha_{k+1}, \beta_{k+1})$ и для всякого $x \in (\alpha_{k+1}, \beta_{k+1})$ точка $\big(x, y^{(k)}(x)\big) \in G$.

Введём $(k+1)$-е приближение по Пикару:

$$y^{(k+1)}(x) = y^\circ + \int_{x_0}^{x} f\big(s, y^{(k)}(s)\big)\,\mathrm{d}\,s. \tag{12}$$

Оно определено и непрерывно на интервале $(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1})$.

Таким образом каждое пикаровское приближение определено в некоторой окрестности точки $x_\circ$ и $y^{(k)}(x_\circ) = y^\circ$ при любом $k \geq 0$.

Теорема 21 (Пикара)**.** $f(x,y) \in \mathcal{C}\big(G\big)$, $\quad f(x,y) \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$

Для любой точки $(x_\circ, y^\circ) \in G$ последовательные приближения Пикара $y^{(k)}(x)$ $(k = 0, 1, \dots)$ с начальными данными $x_\circ, y^\circ$ определены на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$, причём существует такой компакт $\overline{H} \subset G$, что для любых $k \geq 0$ и $x \in [\alpha, \beta]$ точка $\big(x, y^{(k)}(x)\big) \in \overline{H}$.

Тогда функции $y^{(k)}(x)$ равномерно относительно $[\alpha, \beta]$ стремятся при $k \to \infty$ к предельной функции $y(x)$, являющейся решением ЗК$_{(10)}(x_\circ, y^\circ)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$.

23. Теорема о существовании и единственности решений нормальной системы

Теорема 22. Пусть в системе (10) $f(x,y)$ непрерывна и $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$.

Тогда для любой точки $(x_0, y^0) \in G$ и для любого отрезка Пеано $P_h(x_0, y^0)$ на этом отрезке существует и единственно решение ЗК(x_0, y^0).

Следствие. G является областью единственности.

24. Линейные системы, теоремы о существовании, единственности и продолжимости решений линейных систем

Определение 28. Система (10) называется *линейной*, если она имеет вид

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(x)y_1 + \dots + p_{1n}(x)y_n + q_1(x) \\ \dots \\ y_n' = p_{n1}(x)y_1 + \dots + p_{nn}(x)y_n + q_n(x) \end{cases} \tag{13}$$

или в векторной записи

$$y' = P(x)y + q(x)$$

где функции $p_{ij}(x)$ и $q_i(x) \in \mathcal{C}\big((a,b)\big)$.

Другая формулировка. Нормальная система является *линейной*, если $f(x,y) = P(x)y + q(x)$, а $G = (a,b) \times \mathbb{R}^n$.

Определение 29. Линейная система (13) называется *однородной (ЛОС)*, если в ней $q(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0$. В противном случае система называется *неоднородной (ЛНС)*.

Функция $q(x)$ — это *неоднородность* системы (13).

Определение 30. Линейная система (13) называется *вещественной*, если коэффициенты $p_{ij}(x)$, $q_i(x)$ принимают только вещественные значения.

Теорема 23 (о существовании и единственности решений линейных систем)**.** Для любой точки $x_0 \in (a, b)$, для любого вектора $y^0 \in \mathbb{R}^n$ и для любого отрезка Пеано $P_h(x_0, y^)$ существует и единственно решение $\text{ЗК}_{(13)}(x_0, y^0)$, определённое на $P_h(x_0, y^0)$.

Определение 31. Система (10) называется *почти линейной*, если $f(x, y) \in \mathcal{C}\big(G\big)$, где $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$, и существуют непрерывные и неотрицательные на (a, b) функции $L(x)$, $M(x)$ такие, что $\|f(x, y)\| \leq L(x) + M(x)\,\|y\|$ для любой точки $(x, y) \in G$.

Теорема 24 (о продолжимости решений почти линейных систем)**.** Любое решение почти линейной системы продолжимо на интервал (a, b).

Теорема 25 (о продолжимости решений линейных систем)**.** Любое решение линейной системы (13) продолжимо на интервал (a, b).

25. Малые возмещуния начальных данных по параметру, рассуждение о сдвиге

Рассмотрим нормальную систему (10), зависящую от параметра $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$:

$$y' = f(x, y, \mu), \tag{14}$$

где вещественная функция $f(x, y, \mu)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y локально в некоторой области $F \subset \mathbb{R}^{1+n+m}$.

По теореме о существовании и единственности решения для любого $\widetilde{\mu}$ множество

$$G_{\widetilde{\mu}} = \{\, (x, y) \mid (x, y, \widetilde{\mu}) \in F \,\}\,,$$

если оно не пусто, является областью единственности для нормальной системы вида (10) $y' = f(x, y, \widetilde{\mu})$.

Фактически система (14) представляет собой семейство систем, каждая из которых отвечает своему значению вектора μ. Понятно, что не может идти и речи о нахождении общего решения системы (14), поскольку даже приближённое интегрирование осуществимо только для дискретных значений параметра.

Пусть функция $y = y(x, x_0, y^0, \mu)$, $\quad y(x_0, x_0, y^0, \mu) = y^0$ обозначает решение $\text{ЗК}_{(14)}$, заданное на множестве

$$D = \big\{\, (x, x_0, y^0, \mu) \mid x \in I(x_0, y^0, \mu), \quad (x_0, y^0, \mu) \in F \,\big\}\,,$$

где I — максимальный интервал существования решения.

Множество D является областью.

Особое место среди систем (14) занимает т. н. *порождающая* (*невозмущённая*) система

$$y' = f(x, y, \widehat{\mu}), \tag{15}$$

в которой $\widehat{\mu}$ — числовой вектор *расчётных* значений параметров, например, средних или наиболее вероятных. (14) можно трактовать как *возмущённую* систему.

Зафиксируем расчётные значения начальных данных $x_0 = \widehat{x}_0$, $y^0 = \widehat{y}^0$ так, чтобы $(\widehat{x}_0, \widehat{y}^0, \widehat{\mu}) \in F$.

Рассмотрим решение ЗК $\varphi(x) = y(x, \widehat{x}_0, \widehat{y}^0, \widehat{\mu})$, $\quad \varphi(\widehat{x}_0) = \widehat{y}^0$ системы (15) на максимальном интервале существования (α, β), и выберем произвольный отрезок $[a, b] : \widehat{x}_0 \in [a, b] \subset (\alpha, \beta)$.

Решение $y = \varphi(x)$ при $x \in [a, b]$ будем также называть расчётным. Оно описывает расчётное (модельное) движение материальной точки в пространственно-временном континууме. Это решение предполагается известным.

Понятно, что реальное движение материальной точки, описываемое решением $y(x, x_0, y^0, \mu)$ возмущённой системы (14) с начальными данными $x_0 \in [a, b]$, y^0, по норме близким к $\varphi(x_0)$, и вектором параметров μ, близким к $\widehat{\mu}$, будет определено в некоторой окрестности точки x_0 и будет отличаться от расчётного движения. Вопрос в том, можно ли это решение продолжить на весь отрезок $[a, b]$, и насколько велико окажется отличие.

Введём следующие обозначения:

$$\overline{U}_d^{x,y}(\varphi, \widehat{\mu}) \coloneqq \{\, (x, y, \mu) \mid x \in [a, b], \quad \|\, y - \varphi(x)\| \leq d, \quad \|\mu - \widehat{\mu}\| \leq d \,\} \tag{16}$$

Это — замкнутая трубчатая окрестность “радиуса” $d > 0$ графика функции $y = \varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$. Верхние индексы U служат для указания, какие переменные, кроме μ, в ней используются.

Существует такое $\sigma > 0$, что компакт $\overline{U}_\sigma^{x,y}(\varphi, \widehat{\mu}) \subset F$.

Все последующие рассуждения будут проводиться на множестве $\overline{U}_\sigma^{x,y}(\varphi, \widehat{\mu})$.

Будем рассматривать случай, когда y^0 зависит от μ, а x_0 не зависит.

Итак, будем исследовать решение ЗК

$$y(x, \mu) = y\big(x, x_0, y^0(\mu), \mu\big), \qquad y(x_0, \mu) = y^0(\mu)$$

системы (14) при $\big(x_0, y^0(\mu), \mu\big) \in U_\delta^{x_0, y^0(\mu)}(\varphi, \widehat{\mu})$, где константа $\delta < \sigma$, а

$$U_\delta^{x_0, y^0(\mu)}(\varphi, \widehat{\mu}) = \left\{ \big(x_0, y^0(\mu), \mu\big) \mid x_0 \in [a, b], \quad \| \, y^0(\mu) - \varphi(x_0)\| < d, \quad \|\mu - \widehat{\mu}\| < d \right\}$$

Будем предполагать, что

$$y^0(\mu) = y^0 + \psi(\mu), \qquad \psi(\widehat{\mu}) = 0, \tag{17}$$

где функция ψ непрерывна в поликруге $U_\sigma(\widehat{\mu}) = \{ \, \mu : \| \, \mu - \widehat{\mu}\| < \sigma \, \}$.

Дальше что-то совсем непонятное.

26. Теорема о непрерывной зависимости решений от начальных данных и параметра

Теорема 26. Пусть в системе (14) функция $f(x, y, \mu)$ определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y локально в области F, а $y = \varphi(x)$ — решение системы (15) на $[a, b]$.

Тогда для любого $\sigma > 0$, при котором $\overline{U}_\sigma^{x,y} \subset F$, найдётся такое $0 < \delta < \sigma$, что для произвольной точки $\big(x_0, y^0(\mu), \mu\big) \in U_\delta^{x_0, y^0(\mu)}(\varphi, \widehat{\mu})$, где $y^0(\mu)$ из (17), решение $y = y\big(x, x_0, y^0(\mu), \mu\big)$ системы (14) определено при всех $x \in [a, b]$, непрерывно по совокупности аргументов на множестве $V_\delta^{x_0, y^0(\mu)} = [a, b] \times U_\delta^{x_0, y^0(\mu)}(\varphi, \widehat{\mu})$ и точка $\Big(x, y\big(x, x_0, y^0(\mu), \mu\big), \mu\Big) \in \overline{U}_\delta^{x,y}(\varphi, \widehat{\mu})$ для любого $x \in [a, b]$.

27. Теорема о дифференцируемости решений по начальным данным и вектору параметров

Рассмотрим *системы в вариациях* по параметру и по начальным данным:

$$u' = f'_y\big(x, y(x, \kappa), \mu\big)u + f'_{\mu_j}\big(x, y(x, \kappa), \mu\big) \tag{18}$$

$$v' = f'_y\big(x, y(x, \kappa), \mu\big)v \tag{19}$$

Теорема 27. Пусть в системе (14) функция $f(x, y, \mu) \in \mathcal{C}^{0,1,1}_{x,y,\mu}(F)$, а $\varphi(x) = y(x, \widehat{\kappa})$ — решение системы (15) на $[a, b]$.

$$\Longrightarrow \ \forall \sigma > 0 : \overline{U}_\delta^{x,y}(\varphi, \widehat{\mu}) \subset F \quad \exists 0 < \delta < \sigma : \quad \forall \kappa \in U_\delta^{x_0, y^0(\mu)}(\varphi, \widehat{\mu})$$

решение $y = y(x, \kappa)$ системы (14) с $y^0(\mu)$ из (17), где $\psi(\mu) \in \mathcal{C}^1(\widehat{\mu} - \sigma, \widehat{\mu} + \sigma)$ имеет непрерывные частные производные по каждому из параметров в любой точке множества $V_\delta^{x_0, y^0(\mu)} = [a, b] \times U_\delta^{x_0, y^0(\mu)}(\varphi, \widehat{\mu})$.

1. $u^{(j)}(x, \mu) = \frac{\partial y(x, \kappa)}{\partial \mu_j}$ является решением ЗК$_{(18)}(x_0, {y^0_{\mu_j}}')$;
2. $v^{(i)}(x, \mu) = y'_{y^0_i}(x, \kappa)$ является решением ЗК$_{(19)}(x_0, e_i)$;
3. $v^{(0)}(x, \kappa) = y'_{x_0}(x, \kappa)$ является решением ЗК$_{(19)}(x_0, -f(x_0, y^0, \mu))$.

28. Теорема о многократной дифференцируемости решения по начальным данным и параметру

Теорема 28. Пусть в системе (14) $f(x,y,\mu) \in \mathcal{C}^{0,k,k}_{x,y,\mu}(F)$, $y(x,\kappa)$ — решение из предыдущей теоремы.

Тогда $y(x,\kappa) \in \mathcal{C}^{1,k,k,k}_{x,x_0,y^0,\mu}\big(V_\delta^{x_0,y^0(\mu)}\big)$.

29. Теорема Ляпунова—Пуанкаре о разложении решения в ряд по степеням начальных данных и параметра

Определение 32. Вещественную функцию $f(x,y,\mu)$ будем называть равномерно аналитической по y,μ относительно x в замкнутой трубчатой окрестности $\overline{U}_\delta^{x,y}(\varphi,0)$, если она представима в виде ряда

$$f(x,y,\mu) = \sum_{p,q:|p|,|q|\geq 0} f^{(p,q)}(x)\big(y-\varphi(x)\big)^p\mu^q$$

с вещественными непрерывными на $[a,b]$ коэффициентами $f^{(p,q)}$, который для всякого $x\in[a,b]$ абсолютно сходится при $\|y-\varphi(x)\|\leq\sigma$, $\|\mu\|\leq\sigma$.

Теорема 29. Пусть в системе (14) $f(x,y,\mu)\in\mathcal{C}(F)$, $f\in\mathrm{Lip}_y^{loc}(F)$, точка $(\widehat{x}_0,\widehat{y}^0,0)\in F$, решение $\varphi(x)=y(x,\widehat{x}_0,\widehat{y}^0,0)$ системы (15) с $\widehat{u}=0$ определено на $[a,b]$, и существует такое $\sigma>0$, что $f(x,y,\mu)$ — функция, равномерно аналитическая по y,μ относительно x на компакте $\overline{U}_\sigma^{x,y}(\varphi,0)$.

Тогда найдётся такое $\delta>0$, что решение системы (14) $y\big(x,\widehat{x}_0,y^0(\mu),\mu\big)$ с $y^0(\mu)=y^0+\psi(\mu)$ будет функцией равномерно аналитической по y^0,μ относительно x на $V_\delta^{y^0(\mu)}=[a,b]\times U_\delta^{y^0(\mu)}(\widehat{y}^0,0)$.

30. Теорема о разложении решения в ряд по степеням малого параметра

Теорема 30. Пусть для системы (14) выполняются условия теоремы Ляпунова—Пуанкаре.

Тогда найдётся такое $\delta>0$, что решение $y\big(x,\widehat{x}_0,\widehat{y}^0(\mu),\mu\big)$, где $\widehat{y}^0(\mu)=\widehat{y}^0+\psi(\mu)$, является равномерно относительно x аналитической по μ функцией на множестве $V_\delta=\{\,(x,\mu)\mid x\in[a,b],\ \|\mu\|<\delta\,\}$.

31. Теорема Коши об аналитичности решения нормальной системы по независимой переменной

Вещественная аналитичность функции f означает, что

$$\forall (x_0,y^0)\in G\quad \exists r=r_{x_0,y^0}>0:\quad f(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p:|p|=0}^{\infty} f^{(m,p)}(x-x_0)^m(y-y^0)^p$$

Зафиксируем константу $d\in(0,r_{x_0,y^0})$ и введём

$$\rho=d\Big(1-\frac{1}{e^{(n+1)M}}\Big),$$

где $M=\max\{\,|f_1|_d,\dots,|f_n|_d\,\}$, а $|f_i|_d=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p:|p|=0}^{\infty}\big|f_i^{(m,p)}\big|d^{m+|p|}$.

Теорема 31. Пусть в системе (10) $f(x,y)$ вещественно-аналитична в области G.

Тогда для любой точки $(x_0,y^0)\in G$ решение ЗК $y=y(x,x_0,y^0)$ раскладывается в сходящийся при $|x-x_0|<\rho$ степенной ряд

$$y(x,x_0,y^0)=y^0+\sum_{k=1}^{\infty}y^{(k)}(x-x_0)^k$$

32. Теорема об аналитичности решения ЛНС по независимой переменной

Теорема 32. Пусть в системе (13) элементы $p_{ij}(x)$ матрицы P и компоненты $q_i(x)$ вектора q вещественно-аналитичны на (a,b).

Тогда для любого $y^0 \in \mathbb{R}^n$ решение ЗК $y = y(x, x_0, y^0)$ раскладывается в сходящийся при $|x-x_0| < r$ степенной ряд из предыдущей теоремы.

Линейные уравнения высокого порядка

Рассмотрим *линейное дифференциальное уравнение* порядка n $(n \geq 2)$, разрешённое относительно старшей производной

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x), \tag{20}$$

в котором функции $p_j(x), q(x) \quad (j = \overline{1,n})$ определены и непрерывны на некотором интервале (a,b) и принимают на нём вещественные значения.

33. ЛОУ порядка n, существование ФСР, общее решение, овеществление ФСР

Определение 33. Линейное уравнение (20) называется *однородным*, если функция $q(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0$.

В противном случае (20) — *неоднородное*, при этом функция $q(x)$ называется *неоднородностью*.

Далее будем рассматривать линейное однородное уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{21}$$

Определение 34. *Фундаментальной системой решений* ЛОУ называются любые n ЛНЗ на (a,b) решений этого уравнения.

Теорема 33. Фундаментальная система решений ЛОУ существует.

Теорема 34 (об общем решении ЛОУ)**.** Если $\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)$ — фундаментальная система решений на (a,b).

Тогда

$$\psi(x, C_1, \dots, C-n) = C_1\psi_1(x) + \dots + C_n\psi_n(x)$$

является общим решением ЛОУ в области $G = (a,b) \times \mathbb{R}^n$.

Пусть $y(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x)$ — решение уравнения (21), тогда $u(x), v(x)$ — также решения ЛОУ.

Лемма 11 (об овеществлении ФСР)**.** Предположим, что набор функций

$$\Theta_1 = \{\, \varphi_1(x), \overline{\varphi}_1(x), \varphi_l(x), \overline{\varphi}_l(x), \varphi_{2l+1}(x), \dots, \varphi_n(x) \,\}, \quad 1 \leq l \leq \frac{n}{2},$$

где $\varphi_j = u_j + \mathrm{i}v_j$, а $\varphi_{2l+1}, \dots, \varphi_n$ вещественны, образует ФСР ЛОУ (21).

Тогда набор $\Theta_2 = \{\, u_1(x), v_1(x), \dots, u_l(x), v_l(x), \varphi_{2l+1}(x), \dots, \varphi_n(x) \,\}$ является вещественной ФСР.

34. Построение ЛОУ по фундаментальной системе решений, его единственность

Теорема 35. Пусть $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — набор из n раз гладких на (a,b) функций и построенный по ним определитель Вронского $W(x) \neq 0$ для любого $x \in (a,b)$.

Тогда существует и единственно ЛОУ, для которого $\varphi_1(x), \varphi_n(x)$ — фундаментальная система решений на (a,b).

35. Формула Лиувилля для ЛОУ

Дифференцирование определителя. Если матрица $\Phi(x) = \{\,\varphi ij(x)\,\}_{i,j=1}^{n}$, то

$$|\Phi(x)|' = \begin{bmatrix} \varphi_{11}' & \cdots & \varphi_{1n}' \\ \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21}' & \cdots & \varphi_{2n}' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}' & \cdots & \varphi_{nn}' \end{bmatrix}$$

Следовательно,

$$W'(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n)} & \cdots & \varphi_n^{(n)} \end{bmatrix} = -r_1(x),$$

в силу того, что все определители, кроме последнего, имеют по две одинаковые строки.

В итоге получили ЛОУ первого порядка $W'(x) = -p_1(x)W(x)$. Разделяя переменные и интегрируя по s, имеем

$$-\int_{x_0}^{x} p_1(s)\,\mathrm{d}\,s = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\,W(s)}{W(s)} = \ln\frac{W(x)}{W(x_0)},$$

откуда получаем *формулу Лиувилля*:

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(s)\,\mathrm{d}\,s}$$

Таким образом, определитель Вронского зависит только от коэффициента $p_1(x)$.

36. Структура общего решения ЛНУ, метод вариации произвольной постоянной

Рассматриваем ЛНУ (20) порядка n:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x), \qquad \text{или } Ly = q$$

Сделаем "сдвигающую" замену $y = z + \psi(x)$.

$$L(z+\psi) = q \iff Lz + L\psi = q \iff Lz = 0$$

Пусть $z = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ — общее решение ЛОУ $Lz = 0$. Это значит, что $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ — общее решение ЛОУ (21) $Ly = 0$. Подставляя его в замену, устанавливаем, что функция

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n) + \psi(x)$$

является общим решением ЛНУ (20), т. е. общее решение ЛНУ есть сумма общего решения ЛОУ и частного решения ЛНУ.

Теорема 36 (о нахождении частного решения ЛНУ)**.** Предположим, что набор $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — это фундаментальная система решений ЛОУ на интервале (a, b).

Тогда частное решение $y = \psi(x)$ ЛНУ может быть найдено в виде квадратур от $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, коэффициентов $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ и неоднородности $q(x)$.

37. ФСР для ЛОУ с постоянными коэффициентами, примеры

ЛОУ постоянными коэффициентами $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ имеет вид

$$L^c y = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0, \quad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \tag{22}$$

и любое его решение продолжимо на всю вещественную ось.

Подставим в уравнение функцию $y = e^{\lambda x}$ с произвольным показателем λ. Чтобы $e^{\lambda x}$ оказалось решением, должно выполняться тождество

$$L^c e^{\lambda x} = (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n)e^{\lambda x} \equiv 0 \tag{23}$$

Определение 35. Функция $g(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$ называется *характеристическим многочленом* линейного однородного уравнения (22). Его нули называются *характеристическими числами.*

Теорема 37 (о ФСР ЛОУ с постоянными коэффициентами)**.** Пусть характеристическое уравнение ЛОУ (22) имеет корни $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ кратностей $k_1, \dots, k_m$.

Тогда ФСР уравнения (22) имеет вид

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_m x}, \dots, x^{k_m-1}e^{\lambda_m x}$$

Пример. Рассмотрим ЛОУ второго порядка

$$y'' + \beta^2 y = 0$$

$$\chi = \lambda^2 + \beta^2, \quad \lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\beta$$

ФСР образуют $e^{\mathrm{i}\beta x}, e^{-\mathrm{i}\beta x}$, вещественную ФСР — $\cos\beta x,\ \sin\beta x$.

Общее вещественное решение имеет вид

$$y = C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x$$

38. Метод неопределённых коэффициентов для ЛНУ с постоянными коэффициентами

Метод неопределённых коэффициентов можно применять только в том случае, когда неоднородность q имеет специальный вид: $q(x) = p(x)e^{\lambda x}$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, а $p(x)$ — многочлен, возможно, с комплексными коэффициентами. Итак, рассмотрим ЛНУ с постоянными коэффициентами

$$L^c y = p(x)e^{\lambda x}, \quad p(x) = \sum_{t=0}^{l} p_t x^t \tag{24}$$

Определение 36. Говорят, что в ЛНУ (24) имеет место *резонанс кратности* k_j, если $\lambda = \lambda_j$ $(j = \overline{1,m})$, где λ_j — это нуль характеристического многочлена оператора L^c кратности k_j.

Резонанс отсутствует, если $\lambda \neq \lambda_j$ для любого $j = \overline{1,m}$.

Теорема 38 (о построении решения ЛНУ методом неопределённых коэффициентов)**.** Пусть показатель λ из правой части (24) совпадает с корнем характеристического уравнения кратности k $(k = \overline{0,n})$.

Тогда существует и единственно частное решение ЛНУ (24)

$$\psi(x) = x^k r(x)e^{\lambda x}, \quad r(x) = \sum_{s=0}^{l} r_s x^s, \quad (r_l \neq 0)$$

Линейные системы

Рассмотрим вещественную ЛОС

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(x)y_1 + \dots + p_{1n}(x)y_n, \\ \dots, \\ y_n' = p_{n1}(x)y_1 + \dots + p_{nn}(x)y_n, \end{cases} \qquad \text{или } y' = P(x)y, \tag{25}$$

где матрица $P = \{\, p_{ij}(x)\,\}_{i,j=1}^{n}$ непрерывна на (a,b).

39. ЛОС: линейная зависимость и независимость решений, связь с ОВ

Теорема 39 (о ЛЗ решений ЛОС). Пусть $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(k)}(x)$ — решения системы (25) и имеется точка $x_0 \in (a, b)$, в которой векторы $\varphi^{(1)}(x_0), \ldots, \varphi^{(k)}(x_0)$ ЛЗ.

Тогда функции $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(k)}(x)$ ЛЗ на (a, b).

Теорема 40. Решения ЛОС $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ ЛЗ на (a, b) **тогда и только тогда**, когда построенный на них $W(x)$ равен нулю хотя бы в одной точке $x_0 \in (a, b)$.

40. ЛОС: фундаментальная система решений, общее решение, овеществление ФСР

Определение 37. *Фундаментальной системой решений* называют любые n ЛНЗ на (a, b) решений $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ системы (25).

Составленную из ФСР матрицу $\Phi(x) = \left\{ \varphi_i^{(j)}(x) \right\}_{i,j=1}^{n}$ называют *фундаментальной матрицей.*

Утверждение 2. ФСР ЛОС существует.

Определение 38. ФМ $\Phi(x)$ называется *нормированной в точке* $x_0 \in (a, b)$, если $\Phi(x_0) = E$.

Теорема 41 (об общем решении ЛОС). Пусть $\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ — ФСР.

Тогда непрерывная функция $\varphi(x, c_1, \ldots, c_n) = c_1\varphi^{(1)}(x) + \cdots + c_n\varphi^{(n)}(x)$ является общим решением ЛОС в области $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$.

Лемма 12 (об овеществлении ФСР ЛОС). Пусть набор функций

$$\left\{ \varphi^{(1)}(x), \overline{\varphi}^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(l)}(x), \overline{\varphi}^{(l)}(x), \varphi^{(2l+1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x) \right\}, \quad 1 \le l \le \frac{n}{2},$$

где $\varphi^{(j)} = u^{(j)} + \mathrm{i}v^{(j)}, \quad \varphi^{(2l+1)}, \ldots, \varphi^{(n)} \in \mathbb{R}$ образует ФСР ЛОС.

Тогда набор функций

$$\left\{ u^{(1)}(x), v^{(1)}(x), \ldots, u^{(l)}(x), v^{(l)}(x), \varphi^{(2l+1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x) \right\}$$

является вещественной ФСР.

41. Формула Лиувилля для ЛОС

$$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} \operatorname{Tr} P(s)\, \mathrm{d}\, s},$$

где $\operatorname{Tr} P$ — след матрицы P (сумма элементов на главной диагонали).

Таким образом, $W(x)$ зависит только от диагональных элементов матрицы системы.

42. Матричные уравнения, теорема о связи между фундаментальными матрицами

Дифференцирование матриц. $\Phi(x) = \{ \varphi_{ij}(x) \}_{i,j=1}^{n} \quad \Longrightarrow \quad \Phi'(x) = \{ \varphi'_{ij}(x) \}_{i,j=1}^{n}$

Матрица $\Phi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\Theta' = P(x)\Theta, \tag{26}$$

где $\Theta(x)$ — матрица размерности $n \times n$.

Определение 39. Матрица $\Phi(x)$, которая удовлетворяет уравнению (26), называется *матричным решением* системы (25).

Теорема 42 (о связи между фундаментальными матрицами ЛОС). Допустим, что $\Phi(x)$ — фундаментальная матрица системы (25).

1. для любой постоянной квадратной матрицы C матрица $\Psi(x) = \Phi(x)C$ является решением уравнения (26); при этом, если $|C| \neq 0$, то $\Psi(x)$ — фундаментальная матрица;
2. для любого матричного решения $\Psi(x)$ системы (26) существует такая постоянная квадратная матрица C, что $\Psi(x) = \Phi(x)C$, при этом если $\Psi(x)$ — ФМ, то матрица C — неособая.

43. Матричные степенные ряды, теорема об аналитических функциях от матриц

Рассмотрим бесконечную последовательность матриц $\{ A_k \}_{k=1}^{\infty}$, в которой $a_K = \left\{ a_{ij}^{(k)} \right\}_{i,j=1}^{n}$, а элементы $a_{ij}^{(k)} \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$).

Определение 40. Матричная последовательность $\{ A_k \}_{k=1}^{\infty}$ *имеет матричный предел* $A = \{ a_{ij} \}_{i,j=1}^{n}$, если $a_{ij}^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} a_{ij}$ для любых $i, j = \overline{1, n}$.

Пусть степенной ряд $\mathcal{F}_z = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ скалярного аргумента z абсолютно сходится при $|z| < \rho$, где ρ — радиус сходимости $\mathcal{F}_z$.

Рассмотрим степенной ряд от матрицы A:

$$\mathcal{F}_A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots$$

Тогда матрица $S_m(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k$ — это его m-я частичная сумма.

Определение 41. Матричный степенной ряд $\mathcal{F}_A$ *сходится*, если сходится последовательность его частичных сумм, т. е. существует $\lim\limits_{m\to\infty} S_m(A) = F(A)$, называемый *суммой ряда* $\mathcal{F}_A$.

Теорема 43 (об аналитических функциях от матриц). Пусть степенной ряд $\mathcal{F}_z = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ абсолютно сходится при $|z| < \rho$, A — произвольная постоянная матрица $n \times n$, имеющая с. ч. $\lambda_1, \dot{;} \lambda_n$.

Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) такого, что $|\lambda_k x| < \rho$ при $k = \overline{1, n}$ матричный степенной ряд $\mathcal{F}_{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (Ax)^k$ сходится и его сумма $F(Ax) = SF(Jx)S^{-1}$, где $J = S^{-1}AS$ — жорданова форма матрицы A.

Матрица $F(Jx)$ является верхнетреугольной, её главная диагональ образована значениями функции F от собственных чисел матрицы Jx.

44. Общее решение ЛОС с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ЛОС порядка n с постоянными коэффициентами

$$y' = Ay, \tag{27}$$

где вектор $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $A = \{ a_{ij} \}_{i,j=1}^{n}$ — постоянная матрица.

Теорема 44. Матрица e^{Ax} является ФМ для системы (27).

Следствие. Общее решение ЛОС (27) имеет вид $\varphi(x, C) = Ce^{Ax}$.

45. Структура фундаментальной матрицы ЛОС с постоянными коэффициентами

Пусть J — жорданова форма матрицы A. Тогда $J = S^{-1}AS,\ A = SJS^{-1}$.

Учитывая свойства степенных рядов, имеем $e^{Ax}S = Se^{Jx}$.

Рассмотрим матрицу $\Phi(x) = \big(\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\big) = Se^{Jx}$, в которой $S = \big(s^{(1)}, \ldots, s^{(n)}\big)$, $s^{(j)}$ — постоянные векторы.

$$\big(\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\big) = \big(s^{(1)}, \ldots, s^{(n)}\big) \cdot \begin{pmatrix} e^{J_0 x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_1 x} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & e^{J_q x} \end{pmatrix},$$

где, как было установлено,

$$e^{J_0 x} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1^0 x} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2^0 x} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & e^{\lambda_{r_0}^0 x} \end{pmatrix}, \quad e^{J_1 x} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1^* x} & xe^{\lambda_1^* x} & \cdots & \frac{x^{r_1-1}}{(r_1-1)!}e^{\lambda_1^* x} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & xe^{\lambda_1^* x} \\ 0 & \cdots & \cdots & e^{\lambda_1^* x} \end{pmatrix}, \ldots$$

Отсюда

$$\varphi^{(1)}(x) = s^{(1)}e^{\lambda_1^0 x}, \quad \ldots, \quad \varphi^{(r_0)}(x) = s^{(r_0)}e^{\lambda_{r_0}^0 x}$$
$$\varphi^{(r_0+1)}(x) = s^{(r_0+1)}e^{\lambda_1^* x}, \quad \varphi^{(r_0+2)}(x) = \big(s^{(r_0+1)}x + s^{(r_0+2)}\big)e^{\lambda_1^* x}, \quad \ldots$$

То есть любой элемент ФМ $\Phi = Se^{Jx}$ имеет вид

$$\varphi_i^{(j)}(x) = p_{ij}(x)e^{\lambda_k x},$$

где $p_{ij}(x)$ — многочлен степени, не превосходящей $n-1$, а λ_k — одно из с. ч. матрицы A.

Из равенства $AS = SJ$ получаем

$$As^{(1)} = \lambda_1^0 s^{(1)}, \quad \ldots, \quad As^{(r_0)} = \lambda_{r_0}^0 s^{(r_0)}, \quad As^{(r_0+1)} = \lambda_1^* s^{(r_0+1)}, \quad \ldots$$

46. Оценка нормы фундаментальной матрицы на положительной полуоси

Введём *норму матрицы* $A = \{\, a_{ij} \,\}_{i,j=1}^n$ следующим образом:

$$\|A\| = \max_{i,j=\overline{1,n}} \{\, |\, a_{ij}| \,\}$$

Теорема 45 (об оценке нормы фундаментальной матрицы).
Пусть $\lambda_* = \max\{\, \Re\lambda_1, \ldots, \Re\lambda_n \,\}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — с. ч. матрицы A системы (27).

Тогда для любого $\lambda_0 > \lambda_*$ и для любой фундаментальной матрицы $\Phi(x)$ этой системы

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \exists K > 0: \quad \forall x \in [x_0, +\infty) \quad \|\Phi(x)\| \le Ke^{\lambda_0 x}$$

Следствие. Если все с. ч. матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \|\Phi(x)\| = 0$, где Φ — произвольная ФМ системы (27).

47. Теория Флоке: матрица монодромии, структура фундаментальной матрицы

Рассмотрим ЛОС с периодическими коэффициентами

$$y' = Q(x)y, \tag{28}$$

где $Q(x)$ — это ω-периодическая непрерывная на $\mathbb{R}$ матрица.

Пусть $\Phi(x)$ — ФМ системы (28). Положим $\Psi(x) = \Phi(x+\omega)$ и подставим её в систему (28):

$$\Psi'(x) = \frac{\mathrm{d}\,\Phi(x+\omega)}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\,\Phi(x+\omega)}{\mathrm{d}(x+\omega)} = Q(x+\omega)\Phi(x+\omega) = Q(x)\Psi(x)$$

Определение 42. Постоянная матрица M с $|M| \neq 0$, удовлетворяющая уравнению $\Phi(x+\omega) = \Phi(x)M$ называется *матрицей монодромии* ФМ $\Phi(x)$.

Теорема 46. Любая ФМ $\Phi(x)$ системы (28) может быть записана в виде

$$\Phi(x) = D(x)e^{Rx},$$

где $D(x)$ — ω-периодическая, а R — постоянная матрица.

48. Теория Флоке: мультипликаторы, их характеристическое свойство

Утверждение 3. Если $\Phi(x), \Phi_1(x)$ — произвольные фундаментальные матрицы системы (28), связанные соотношением $\Phi_1(x) = \Phi(x)S$, то их матрицы монодромии M, M_1 подобны, причём $M_1 = S^{-1}MS$.

Определение 43. С. ч. $\mu_1, \ldots, \mu_n$ любой матрицы монодромии ЛОС (28) называются *мультипликаторами.*

Теорема 47 (о характеристическом свойстве мельтупликаторов). Число μ является мультипликатором системы (28) **тогда и только тогда**, когда существует нетривиальное решение $y = \varphi(x)$ системы (28) такое, что $\varphi(x+\omega) \equiv \mu\varphi(x)$.

Следствие. Система (28) имеет периодическое решение **тогда и только тогда**, когда хотя бы один из мультипликаторов равен единице.

49. Теория Флоке: структура фундаментальной матрицы, приводимость системы

Определение 44. С. ч. матрицы R называются *характеристическими показателями* ЛОС (28).

Пусть $\Phi_1(x) = \big(\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\big)$, $D_1(x) = \big(d^{(1)}(x), \ldots, d^{(n)}(x)\big)$, причём все векторы $d^{(j)}(x)$ — ω-периодические.

Тогда из равенства $\big(\varphi^{(1)}(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\big) = \big(d^{(1)}(x), \ldots, d^{(n)}(x)\big) \cdot e^{Jx}$ получаем

$$\varphi^{(1)} = d^{(1)}e^{\lambda_1^0 x}, \quad \ldots, \quad \varphi^{(r_0)} = d^{(r_0)}e^{\lambda_{r_0}^0 x}, \quad \ldots$$

То есть любой элемент ФМ $\Phi_1(x) = D(x)Se^{Jx}$ имеет вид $\varphi_i^{(j)}(x) = p_{ij}(x)e^{\lambda_k x}$, где $p_{ij}(x)$ — многочлен степени, не превосходящей $n-1$, с коэффициентами, являющимися ω-периодическими функциями x, а λ_k — один из характеристических показателей системы.

Определение 45. ЛОС с непрерывными коэффициентами называется *приводимой*, если существует линейная неособая замена, преобразующая её в систему с постоянными коэффициентами.

50. ЛНС: общее решение, метод вариации, формула Коши

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$y' = P(x)y + q(x), \tag{29}$$

в которой матрица P и неоднородность q непрерывны на (a,b).

Пусть $y = \psi(x)$ — какое-то частное решение системы (29), т. е. $\psi'(x) \overset{(a,b)}{\equiv} P(x)\psi(x) + q(x)$.
Сделаем замену $y = z + \psi(x)$. Дифференцируя её по x, получаем $z' + \psi'(x) = P(x)\psi(x) + q(x)$ или

$$z' = P(x)z \tag{30}$$

Пусть $\Phi(x)$ — ФМ системы (30). Тогда общее решение ЛНС имеет вид

$$y = \Phi(x)c + \psi(x)$$

Теорема 48 (о нахождении частного решения ЛНС)**.** Пусть $\Phi(x) = \big(\varphi^{(1)}(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\big)$ — фундаментальная матрица ЛОС (30).

Тогда частное решение ЛНС (29) может быть найдено в квадратурах от функций $\varphi_i^{(j)}, p_{ij}, q_i$.

Рассмотрим систему

$$y' = Ay + q(x), \tag{31}$$

в которой матрица A постоянна, а неоднородность $q \in \mathcal{C}(a, b)$.

Для любых начальных данных $x_0 \in (a, b)$ и $y^0 \in \mathbb{R}^n$ *формула Коши* задаёт решение ЗК(x_0, y^0) на (a, b):

$$y(x, x_0, y^0) = e^{A(x-x_0)}y^0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-s)}q(s)\,\mathrm{d}\,s, \quad c = e^{-Ax_0}y^0 \tag{32}$$

51. Периодические решения ЛНС с периодическими коэффициентами

Рассмотрим систему

$$y' = Q(x)y + q(x), \tag{33}$$

в которой матрица $Q(x)$ и неоднородность $q(x)$ являются ω-периодическими и непрерывны на $\mathbb{R}$.

Теорема 49 (о периодичсеском решении периодической ЛНС)**.**

$$y(x) = \Phi_0(x)\big(E - \Phi_0(x)\big)^{-1}\int_0^{\omega} \Phi_0(\omega)\Phi_0^{-1}(s)q(s)\,\mathrm{d}\,s + \int_0^{x} \Phi_0(x)\Phi_0^{-1}(s)q(s)\,\mathrm{d}\,s, \quad \Phi_0(0) = E, \quad x \in \mathbb{R}$$

52. Периодические решения ЛНС с постоянной матрицей и периодической неоднородностью

Рассмотрим систему

$$y' = Ay + q(x), \tag{34}$$

в которой $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ и является ω-периодической функцией.

Утверждение 4. Система (34), с. ч. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы A которой удовлетворяют условию $\dfrac{\lambda_k\omega}{2\pi\mathrm{i}} \notin \mathbb{Z}$, имеет **единственное** ω-периодическое решение $y = \psi(x)$, где

$$\psi(x) = e^{Ax}(E - e^{A\omega})^{-1}\int_0^{\omega} e^{A(\omega-s)}q(s)\,\mathrm{d}\,s + \int_0^{x} e^{A(x-s)}q(s)\,\mathrm{d}\,s,$$

или

$$\psi(x) = (E - e^{A\omega})^{-1}\int_{x-\omega}^{x} e^{A(x-s)}q(s)\,\mathrm{d}\,s$$

Автономные системы

Определение 46. Нормальная система называется *автономной*, если её правая часть не зависит от независимой переменной x, т. е. система имеет вид $y' = f(y)$.

Рассмотрим автономную систему

$$\dot{x} = X(x) \tag{35}$$

53. Инвариантность решений относительно сдвигов по времени; теорема о единственности для траекторий

Лемма 13 (об инвариантности решений относительно сдвигов по времени)**.** Пусть $x = \varphi(t, t_0, p)$ — решение системы (35) на $I_max = (\alpha, \beta)$.

Тогда для любого $\tau \in \mathbb{R}$ функция $\psi(t) = \varphi(t + \tau, t_0, p)$ является решением системы (35) при всех $t \in (\alpha - \tau, \beta - \tau)$.

Теорема 50. Если две траектории автономной системы (35) имеют одну общую точку, то они совпадают.

54. Групповое свойство решений; система для траекторий

Утверждение 5. Пусть $x = \varphi(t, t_0, p)$ — решение системы (35) на максимальном интервале существования (α, β).

Тогда

$$\forall \tau \in \mathbb{R} \quad \varphi(t + \tau, t_0 + \tau, p) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} \varphi(t, t_0, p)$$

Обозначение. $\varphi(t, p) = \varphi(t, 0, p)$

Теорема 51 (о системе для траекторий)**.** Для любой обыкновенной точки $p \in D$ автономной системы (35) с $X_1(p) \neq 0$ найдётся окрестность U_p, в которой траектории системы (35) совпадают с интегральными кривыми нормальной системы порядка $n - 1$

$$\frac{\mathrm{d}\, x_2}{\mathrm{d}\, x_1} = \frac{X_2(x_1, \ldots, x_n)}{X_1(x_1, \ldots, x_n)}, \quad \ldots, \quad \frac{\mathrm{d}\, x_n}{\mathrm{d}\, x_1} = \frac{X_n(x_1, \ldots, x_n)}{X_1(x_1, \ldots, x_n)} \tag{36}$$

Определение 47. Система (36) называется *системой для траекторий* автономной системы (35).

55. Особая точка, цикл; теорема о типах траекторий автономных систем

Определение 48. Если движение $x = \varphi(t, p)$ таково, что $\varphi(t, p) = p$ при $t \in \mathbb{R}$, то точка p, являющаяся траекторией этого движения, называется *точкой покоя*, или *особой точкой*, или *положением равновесия* системы.

Утверждение 6. Точка $p \in D$ является точкой покоя **тогда и только тогда**, когда в системе (35) $X(p) = 0$.

Определение 49. Если существует число $\omega > 0$ такое, что для любого $t \in \mathbb{R}$ движение $\varphi(t, p) = \varphi(t + \omega, p)$, то замкнутая кривая l, являющаяся траекторией этого движения, называется *циклом*.

Теорема 52. Траектории автономных систем бывают трёх типов:

1. точка покоя p;
2. цикл l (простая замкнутая кривая);
3. незамкнутая траектория L без самопересечений.

56. Предельные множества, теорема о свойствах предельных множеств траекторий

Определение 50. Пусть в системе (35) движение $x = \varphi(t - t_0, p)$ определено при всех $t \le t_0$.

Точка $q \in D$ называется *α-предельной точкой* траектории, порождённой этим движением, если найдётся последовательность моментов времени t_k такая, что $t_k \to -\infty$ и $\varphi(t_k - t_0, p) \xrightarrow[k\to\infty]{} q$.

Определение 51. Пусть в системе (35) движение $x = \varphi(t - t_0, p)$ определено при всех $t \ge t_0$.

Точка $q \in D$ называется *ω-предельной точкой* траектории, порождённой этим движением, если найдётся последовательность моментов времени t_k такая, что $t_k \to +\infty$ и $\varphi(t_k - t_0, p) \xrightarrow[k\to\infty]{} q$.

Определение 52. *A-предельным множеством* траектории движения $x = \varphi(t - t_0, p)$ называется множество α-предельных точек этой траектории, а множество ω-предельных точек — Ω-предельным множеством.

Теорема 53. Ω-предельное множество любой траектории системы (35) замкнуто и инвариантно.

Аналогичная теорема справедлива для A-предельных множеств.

57. Устойчивость траекторий по Лагранжу; теорема о свойствах предельных множеств траекторий, устойчивых по Лагранжу

Определение 53. Траектория движения $x = \varphi(t - t_0, p)$ системы (35), определённого на $I_{\max} = (\alpha, \beta)$, называется *положительно устойчивой по Лагранжу*, если в фазовом пространстве найдётся такой компакт $\overline{H}^+ \subset D$, что $\varphi(t - t_0, p) \in \overline{H}^+$ для любого $t \in [t_0, \beta)$, и называется *отрицательно устойчивой по Лагранжу*, если найдётся компакт $\overline{H} \subset D$ такой, что $\varphi(t - t_0, p) \in \overline{H}^-$ для любого $t \in (\alpha, t_0]$.

Теорема 54. Ω-предельное множество любой положительно устойчивой по Лагранжу траектории системы (35) ну пусто, компактно и связно.

Аналогичная теорема справедлива для A-предельных множеств.

58. Классификация Пункаре; узлы, седло

Рассмотрим автономную систему

$$\dot{y} = Ay, \tag{37}$$

где $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, A — двумерная вещественная постоянная матрица, $|A| \ne 0$.

Известно, что существует постоянная неособая матрица S такая, что линейная замена $y = Sz$ сводит (37) к системе

$$\dot{z} = Jz, \tag{38}$$

где $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, а $J = S^{-1}AS$ — жорданова форма матрицы A. Такую замену называют *центроаффинной.*

Пусть собственные числа λ_1, λ_2 вещественны и различны. Тогда система (38) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 \\ \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 \end{cases}$$

Интегрируя каждое из уравнений, находим общее решение:

$$z_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad z_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \tag{39}$$

Пусть $c_1^2 + c_2^2 \ne 0$. Возможны два случая:

1. $\lambda_1 \lambda_2 > 0, \quad \lambda_1 \ne \lambda_2$

   Пусть, например $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Тогда в (39) с ростом времени $z_k(t) \to 0$, а с убыванием — $|z_k(t)| \to \infty$.

   (a) Если $c_1 = 0$, то решения $z_1(t) \equiv 0$, $z_2(t) = \pm c^{-2} e^{\lambda_2 t}$ задают две траектории, являющиеся положительной и отрицательной полуосями ординат.

(b) При $c_2 = 0$ имеем две траектории, являющиеся положительной и отрицательной полуосями абсцисс. Их параметризуют движения $z_1(t) = \pm c^{-2} e^{\lambda_1 t},\ z_2(t) \equiv 0$.

(c) При $c_1, c_2 \neq 0$, избавляясь от t, получаем $(c_1^{-1} z_1)^{\lambda_2} = (c_2^{-1} z_2)^{\lambda_1}$.

   i. Если $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, уравнение для траекторий можно записать в виде $z_2 = c^{-1} |z_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$. Тогда для каждого $c_0 > 0$, фиксируя $|c| = c_0$, из уравнения для траекторий получаем четыре траектории: две параболы, движение по которым происходит в направлении начала координат.

   ii. Если $|\lambda_2| < |\lambda_1|$, то те же четыре траектории являются “лежачими” параболами.

Полученный фазовый портрет и особая точка называются *узел.*

2. $\lambda_1 \lambda_2 < 0$

   Пусть, например, $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Тогда в (39) с ростом времени $|z_1(t)| \to \infty,\ z_2(t) \to 0$.

   (a) при $c_1 = 0$ траекториями являются полуоси ординат;

   (b) при $c_2 = 0$ траектории — полуоси абсцисс;

   (c) при $c_1, c_2 \neq 0$ траектории — гиперболы.

   Полученный фазовый портрет и особая точка называются *седло.*

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$, то

$$J = \begin{pmatrix} \mu & \sigma \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \sigma \in \{ 0, 1 \}$$

1. при $\sigma = 1$ имеем *вырожденный узел*;

2. при $\sigma = 0$ имеем *дикритический узел.*

59. Классификация Пуанкаре; фокус, центр

Пусть $\lambda_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$. Поскольку исходная система вещественна, то $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$. Система (38) имеет вид

$$\dot{z} = Jz, \quad J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda}_1 \end{pmatrix}, \quad \text{или} \begin{cases} \dot{z}_1 = (\alpha + \mathrm{i}\beta) z_1 \\ \dot{z}_2 = (\alpha - \mathrm{i}\beta) z_2 \end{cases} \tag{40}$$

1. $\alpha \neq 0$

   Пусть, например, $\alpha < 0,\ \beta > 0$. Тогда с ростом времени полярный угол $\varphi(t)$ любого решения монотонно возрастает, а радиус-вектор $r(t)$ стремится к нулю.

   Полученный фазовый портрет и особая точка называются *фокус.*

2. $\alpha = 0,\ \beta > 0$

   С ростом времени полярный угол $\varphi(t)$ любого движения монотонно возрастает, а радиус-вектор $r(t) \equiv r_0$. Таким образом, траектории представляют собой семейство концентрических окружностей.

   Полученный фазовый портрет и особая точка называются *центр.*

Теория устойчивости движения по Ляпунову

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{41}$$

в которой $x = (x_1, \ldots, x_n)$, функция $f = (f_1, \ldots, f_n)$ определена, непрерывна и удовлетворяет локальному условию Липшица по x в области $G = (c, +\infty) \times D$, а D — это область фазового пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 54. Выбранное движение $x = \varphi(t)$ системы (41), определённое на промежутке $[t_0, +\infty)$, называется *невозмущённым.* Остальные движения $x = x(t, x^0)$ — *возмущённые.* При этом $\|x^0 - \varphi(t_0)\|$ называется *возмущением.*

Определение 55. Невозмущённое движение $x = \varphi(t)$, определённое на промежутке $[t_0, +\infty)$, называется *устойчивым по Ляпунову*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta \in (0, \varepsilon]$, что для любого $x^0 : \|x^0 - \varphi(t_0)\| < \delta$ решение $x = x(t, x^0)$ определено на промежутке $[t_0, +\infty)$ и для всякого $t \in [t_0, +\infty)$ выполняется неравенство $\|x(t, x^0) - \varphi(t)\| < \varepsilon$.

Определение 56. Невозмущённое движение $x = \varphi(t)$ называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво по Ляпунову и существует $\delta_0 > 0$ такое, что для любого x^0, при котором возмущение $\|x^0 - \varphi(t_0)\| < \delta_0$, для решения $x = x(t, x^0)$ выполняется условие $\|x(t, x^0) - \varphi(t)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Определение 57. *Областью притяжения* асимптотически устойчивого движения $x = \varphi(t)$ называется множество точек $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ фазового пространства таких, что если x^0 — точка из этого множества, то $x(t, x^0) \xrightarrow[t\to\infty]{} \varphi(t)$.

Определение 58. Асимптотически устойчивое движение называется *устойчивым в целом*, если его область притяжения совпадает со всем фазовым пространством.

60. Теорема об устойчивости линейных систем; устойчивость ЛС с постоянными и периодическими коэффициентами

Рассмотрим систему

$$\dot{y} = P(t)y, \tag{42}$$

где матрица $P(t)$ определена и непрерывна на $(c, +\infty)$.

Теорема 55. ЛОС (42) устойчива по Ляпунову **тогда и только тогда**, когда у неё имеется фундаментальная матрица, ограниченная на промежутке $[t_0, +\infty)$.

Если $P(t) = A$ — постоянная, то ФМ $\Phi(t) = e^{At}$. Если $P(t) = Q(t)$ — ω-периодическая, то ФМ $\Phi(t) = D(t)e^{Rt}$.

Разобьём множество векторов с. ч. $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ матриц A и R на три непересекающихся множества:

1. Если $\lambda \in M_1 = \{\, \lambda \mid \Re\lambda_k < 0 \,\}$, то найдётся число λ_0 такое, что $\Re\lambda_k < \lambda_0 < 0$. Поэтому по теореме об оценке нормы ФМ для любой ФМ $\Phi(t)$ и для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдётся $K > 0$ такое, что $\|\Phi(t)\| \le Ke^{\lambda_0 t}$ для всякого $t \in [t_0, +\infty)$.

   Из теоремы об устойчивости линейных систем вытекает устойчивость систем (42), а также асимптотическая устойчивость таких систем.

2. Если $\lambda \in M_2 = \{\, \lambda \mid \exists k_* : \quad \Re\lambda_{k_*} > 0 \,\}$, то из структуры ФМ вытекает, что одним из её столбцов является решение $y(t) = s(t)e^{\lambda_* t}$, причём $\Re\lambda_{k_*} > 0$. Поэтому всегда найдётся такая последовательность $t_k \to +\infty$, что $\|y(t_k)\| \to +\infty$, а значит, фундаментальная матрица не ограничена и линейная система неустойчива.

3. Если $\lambda \in M_3 = \{\, \lambda \mid \Re\lambda_k \le 0, \quad \exists k_0 : \quad \Re\lambda_{k_0} = 0 \,\}$, то система имеет решение $y(t) = s(t)e^{\lambda_{k_0} t} = s(t)\big(\cos(|\lambda_{k_0} t|) + \mathrm{i}\sin(|\lambda_{k_0} t)\big)$. Поэтому если векторный полином $s(t)$ имеет ненулевую степень, то $y(t)$ не ограничено и линейная система неустойчива. А если в ФМ нулевую степень имеют все полиномы $s(t)$, то ФМ ограничена и ЛОС устойчива, но не асимптотически устойчива.

61. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению

Теорема 56. $\dot{y} = Ay + Y(t, y), \qquad Y \in \mathcal{C}(G_0), \quad Y \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G_0), \quad G_0 = (c, +\infty) \times D_0$

$$D_0 = \{\, y \mid |\, \|y\| < c_0 \,\}, \quad \exists t_0 > c : \quad \frac{\|Y(t, y)\|}{\|y\|} \underset{t\in[t_0,\infty)}{\overset{\|y\|\to 0}{\rightrightarrows}} 0$$

Решение $y(t) = 0, \quad t \in [t_0, +\infty)$ асимптотически устойчиво, если $\Re\lambda_1, \ldots, \Re\lambda_n < 0$, и неустойчиво, если $\exists k_* : \quad \Re\lambda_{k_*} > 0$.

62. Лемма о поведении положительно определённой функции Ляпунова

Рассмотрим систему размерности n, имеющую решение $y(t) = 0$ при $t \in [t_0, +\infty)$:

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f \in \mathcal{C}(G), \quad f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G), \quad G = G_\tau^a = \{\, (t,x) \mid t \in (\tau, +\infty), \ \| x\| < a\,\}, \quad f(t,0) \overset{t>\tau}{=\!=\!=} 0 \quad (43)$$

Определение 59. *Функцией Ляпунова* называется любая непрерывная функция $V(t,x) : G \to \mathbb{R}$, если $V(t,0) \overset{t>\tau}{=\!=\!=} 0$.

Определение 60. Функция Ляпунова называется *знакопостоянной*, если существуют такие τ, a, что V не меняет знак в области G_τ^a.

Она *положительна*, если $V(t,x) \geq 0$, и *отрицательна*, если $V(t,x) \leq 0$.

Определение 61. Функция Ляпунова $V(t,x)$ называется *стационарной*, если она не зависит от t, т. е. $V(t,x) \equiv W(x)$ и $W(0) = 0$.

Определение 62. Стационарная функция Ляпунова $W(x)$ называется *положительно определённой*, если существует такое число $a > 0$, что $W(x) > 0$ для всякого $x \neq 0$, $\|x\| < a$.

Определение 63. Функция Ляпунова $V(t,x)$ называется *положительно определённой*, если существует положительно определённая стационарная функция Ляпунова $W_1(x)$ такая, что $V(t,x) \geq W_1(x) > 0$ при $x \neq 0$ в некоторой области G_τ^a, и называется *отрицательно определённой*, если функция $-V(t,x)$ положительно определена.

Определение 64. Функция Ляпунова $V(t,x)$ допускает *бесконечно малый высший предел*, если найдётся такая положительно определённая функция Ляпунова $W_2(x)$, что $|V(t,x)| \leq W_2(x)$ в некоторой области G_τ^a.

Определение 65. Пусть $W(x)$ — стационарная положительно определённая функция Ляпунова.

Замкнутое множество $W(x) = C$ называется *поверхностью уровня*, а при $n = 2$ — *линией уровня*.

Лемма 14 (о поведении положительно определённой функции Ляпунова)**.** Пусть функция Ляпунова $V(t,x)$ положительно определена в области G_τ^a, функция $x(t)$ непрерывна и $\|x(t)\| \leq a_1 < a_1$ при любом $t \in [t_0, +\infty)$.

1. если $V\big(t, x(t)\big) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, то $\|x(t)\| \to 0$;
2. если $V(t,x)$ допускает бесконечно малый высший предел и $\|x(t)\| \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, то $V\big(t,x(t)\big) \to 0$.

63. Теорема Ляпунова об устойчивости, исследование уравнения $\ddot{x} + g(x) = 0$

Будем предполагать, что функция Ляпунова $V \in \mathcal{C}^1(G_\tau^a)$, и на множестве таких функций введём линейный дифференциальный оператор $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D}V = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial f}, \qquad \text{или } \mathcal{D}v(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x)$$

Теорема 57. Пусть в области G_τ^a существует положительно определённая функция Ляпунова $V(t,x)$, у которой $\mathcal{D}V(t,x)$ отрицательна.

Тогда в системе (43) невозмущённое движение устойчиво по Ляпунову.

Следствие. Если система (43) имеет в области G положительно определённый интеграл $U(t,x)$ и $U(t,0) \equiv 0$, то невозмущённое движение $x(t) \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову.

Пример. Рассмотрим уравнение
$$\ddot{x} + g(x) = 0, \tag{44}$$
где функция $g(x)$ определна, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица при $|x| < a$, $g(0) = 0$, $xg(x) > 0$.

Уравнение имеет решение $x(t) \equiv 0$ и при $g(x) = \sin x$ описывает колебания математического маятника.

Сделаем замену $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$, получая автономную систему
$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -g(x_1) \tag{45}$$
Решение $x = 0$ уравнения (44) устойчиво по Ляпунову, асимптотически устойчиво или неустойчиво одновременно с тривиальным решением системы (45).

Рассмотрим функцию Ляпунова
$$W(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} g(s)\,\mathrm{d}\,s + \frac{1}{2}x_2^2$$
Эта функция стационарна и положительно определена, поскольку $x_1 g(x_1) > 0$ при $x \neq 0$.
$$\mathcal{D}w = g(x_1)\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \equiv 0$$
Следовательно, $W(x_1, x_2)$ — интеграл, который определяет полную энергию системы (45), тождество $\mathcal{D}W \equiv 0$ означает закон сохранения энергии.

Положение равновесия $x(t) = 0$ устойчиво, но не асимптотически устойчиво.

64. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости, исследование уравнения $\ddot{x} + h(x)\dot{x} + g(x) = 0$

Теорема 58. Пусть в области G_τ^a существует положительно определённая функция Ляпунова $V(t,x)$, допускающая бесконечно малый выскший предел, а её производная в силу системы $\mathcal{D}V(t,x)$ отрицательно определена.

Тогда невозмущённое движение $x(t) \equiv 0$ системы (43) асимптотически устойчиво.

Пример. Рассмотрим уравнение
$$\ddot{x} + h(x)\dot{x} + g(x) = 0, \tag{46}$$
где функции $g(x), h(x)$ определены, непрерывны и удовлетворяют локальному условию Липшица при $|x| < a$, $g(0) = 0$, $xg(x) > 0$ при $x \neq 0$, $h(x) > 0$ при $0 < |x| < a$. Сделаем замену $x = x_1$, $\dot{x} = x_2$, получая автономную систему
$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -g(x) - h(x_1)x_2 \tag{47}$$
Возьмём стационарную положительно определённую функцию Ляпунова из предыдущего примера:
$$W(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} g(s)\,\mathrm{d}\,s + \frac{1}{2}x_2^2$$
По определению она допускает БМВП.

Продифференцируем W в силу системы (47):
$$\mathcal{D}W(x_1, x_2) = g(x_1)x_2 + x_2\big(-g(x_1) - h(x_1)x_2\big) = -h(x_1)x_2^2 \leq 0$$
Поскольку $\mathcal{D}W(x_1, 0) \equiv 0$, производная $\mathcal{D}W$ не является отрицательно определённой, и применить теорему нельзя.

65. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости для автономных систем, исследование уравнения $\ddot{x} + h(x)\dot{x} + g(x) = 0$

Если система автономна, то она имеет вид

$$\dot{x} = f(x), \qquad f \in \mathcal{C}(D), \quad f \in \mathrm{Lip}_x^{loc}(D), \quad f(0) = 0, \quad D = D_{-\infty}^{a} = \{\, x \mid \|\, x\| < a \,\} \tag{48}$$

Теорема 59. Пусть система (48) в области D обладает положительно определённой функцией Ляпунова $W(x)$, у которой $\mathcal{D}W(x) \leq 0$, а множество $M^a = \{\, x \mid 0 < \|\, x\| < a,\ \mathcal{D}W(x) = 0 \,\}$ не содержит целых траекторий.

Тогда невозмущённое движение $x(t) \equiv 0$ этой системы асимптотически устойчиво.

Пример (продолжение). Итак, $\mathcal{D}W = -h(x_1)x_2^2 \xlongequal{x_2=0,\ |x_1|\leq a_1} 0$.

Во втором уравнении системы (47) имеем $0 = -g(x_1) \neq 0$ при $x_1 \neq 0$. Следовательно, $x_2 \equiv 0$ не является решением (47), и множество M не содержит целых траекторий, отличных от точки покоя $x_1 = x_2 = 0$.

Теперь по теореме тривиальное решение системы (47) асимптотически устойчиво.

66. Теорема Ляпунова об устойчивости в целом для автономных систем, исследование уравнения $\ddot{x} + h(x)\dot{x} + g(x) = 0$

Определение 66. Стационарная функция Ляпунова $W(x)$ называется *бесконечно большой*, если

$$W(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} \infty$$

Теорема 60. Пусть у автономной системы (48) в области $D^\infty = \mathbb{R}^n$ существует положительно определённая ББ функция Ляпунова $W(x)$ с $\mathcal{D}W(x) \leq 0$, а множество $M = \{\, x \mid x \neq 0,\ \mathcal{D}W(x) = 0 \,\}$ не содержит целых траекторий.

Тогда невозмущённое движение $x(t) \equiv 0$ системы устойчиво в целом.

Пример (продолжение). Предположим дополнительно, что в уравнении (46)

$$\int_0^{x_1} g(s)\,\mathrm{d}\,s \xrightarrow[|x_1|\to\infty]{} \infty$$

Это условие выполняется, например, для любой функции $g(x) \geq \frac{1}{x}$ при $x > 0$.

Тогда стационарная положительно определённая функция Ляпунова

$$W(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} g(s)\,\mathrm{d}\,s + \frac{1}{2}x_2^2$$

будет ББ.

Следовательно, по теореме невозмущённое движение $x = 0$ уравнения (46) устойчиво в целом.

Теория нормальных форм Пуанкаре

67. Формальная и аналитическая эквивалентность систем, нормализация линейной части системы

Рассмотрим автономную систему порядка n, правая часть которой является формальным или абсолютно сходящимся векторным степенным рядом в окрестности некоторой точки покоя. НУО считаем, что точка покоя смещена в начало координат и в правой части выделены линейные члены:

$$\dot{x} = Ax + X(x), \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\,x_1}{\mathrm{d}\,t} \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}\,x_n}{\mathrm{d}\,t} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \sum_{p:|p|=2}^{\infty} X^{(p)} x^p \tag{49}$$

Упрощение системы осуществляется при помощи обратимой замены, сохраняющей равновесие в нуле:

$$x = Sy + f(y), \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad |S| \neq 0, \quad f_i = \sum_{p:|p|=2}^{\infty} f_i^{(p)} y^p \tag{50}$$

Пусть эта замена преобразует систему (49) в систему

$$\dot{y} = By + Y(y) \tag{51}$$

Утверждение 7. Пусть система (49) сходится.

1. если замена (50) сходится, то система (51) сходится;
2. если система (51) расходится, то замена (50) расходится.

Определение 67. Системы (49) и (51) называются *формально эквивалентными*, если существует формальная замена переменных (50), которая преобразует (49) в (51). Если при этом ряды X и f сходятся, то системы называются *аналитически эквивалентными*.

Удобнее всего разбить замену (50) в композицию двух замен: линейной

$$x = Sz, \qquad J = S^{-1}AS \tag{52}$$

и почти тождественной

$$z = y + h(y), \qquad h = \sum_{p:|p|=2}^{\infty} h^{(p)} y^p \tag{53}$$

Тогда в замене (50) $f(y) = Sh(y)$.

Делаем линейную замену и дифференцируем (52) по t в силу системы (49):

$$\dot{z} = Jz + Z(z), \qquad Z(z) = S^{-1}X(Sz)$$

Введём числа $\sigma_1 = 0$, $\sigma_j = 0$, если $\lambda_{j-1} \neq \lambda_j$:

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i + \sigma_i z_{i-1} + Z_i(z), \qquad Z_i = \sum_{p:|p|=2}^{\infty} Z_i^{(p)} z^p \tag{54}$$

68. Почти тождественная замена, вывод связующей системы

Запишем замену (53) в координатах:

$$z_i = y_i + h_i(y), \qquad h \in \Phi_2 \tag{55}$$

Предположим, что она преобразует систему (54) в систему

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + \sigma_i y_{i-1} + Y_i(y), \qquad Y_i = \sum_{p:|p|=2}^{\infty} Y_i^{(p)} y^p \tag{56}$$

Продифференцируем замену по t в силу системы (56):

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial[}{\partial y}_j]h_i \lambda_j y_j - \lambda_i h_i + Y_i \equiv Z_i(y+h) + \sigma_i h_{i-1} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial[}{\partial y}_j]h_i(\sigma_j y_{j-1} + Y_j)$$

Приравняем коэффициенты, стоящие при всех ЛНЗ мономах y^p:

$$\frac{\partial[}{\partial y_j}]h_i = \sum_{p:|p|=2}^{\infty} p_j h_i^{(p)} y^{p-e_j} = \sum_{p:|p|=1}^{\infty} (p_j+1) h_i^{(p+e_j)} y^p$$

$$\frac{\partial[}{\partial y_j}]h_i yj-1 = \sum_{p:|p|=1}^{\infty} (p_j+1) h_i^{(p+e_j)} y^{p+e_{j-1}} = \sum_{p:|p|=2}^{\infty} (p_j+1) h_i^{(p-e_{j-1}+e_j)} y^p$$

Просуммируем полученные произведения по всем возможным векторам q:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \lambda_j h_i^{(p)} - \lambda_i h_i^{(p)} + Y_i^{(p)} = \{\ Z_i(u+h)\ \}^{(p)} + \sigma_i h_{i-1}^{(p)} - \sum_{j=1}^{n} \sigma_j (p_j+1) h_i^{(p-e_{j-1}+e_j)} - \\ - \sum_{j=1}^{n} \sum_{|q|=2}^{|p|-1} (p_j - q_j + 1) h_i^{(p-q+e_j)} Y_j^{(q)} \qquad (57)$$

Запись $\{\ Z - i(y+h)\ \}^{(p)}$ означает, что после переразложения ряда $Z_i(u+h)$ по степеням y из него выделены члены, стоящие при y^p.

Полученные равенства будем называть *связующей системой.*

69. Рекуррентность связующей системы

Векторы коэффициентов будем сравнивать лексикографически.

Определение 68. Будем говорить, что коэффициент $\alpha_j^{(q)}$ *предшествует* коэффициенту $\alpha_i^{(p)}$, если пара (q,j) предшествует паре (p,i).

Покажем, что в правой части системы (57) стоят коэффициенты $h_j^{(q)}$ и $Y_j^{(q)}$, предшествующие коэффициентам $h_i^{(p)}$ и $Y_i^{(p)}$ из левой части, то есть связующая система является рекуррентной.

- В первом и четвёртом слагаемых правой части равенств содержатся $h_j^{(q)}$ и $Y_j^{(q)}$ с $|q| < |p|$, поскольку разложения рядов Z, Y, h начинаются не ниже, чем со второго порядка.
- В третьем слагаемом правой части $|p - e_{j-1} - +e_j| = |p|$, но $(j-1)$-я компонента верхнего индекса у коэффициента ряда h_i на единицу меньше компоненты p_j вектора p.
- Во втором слагаемом правой части верхний индекс у коэффициента ряда h равен p, как и в левой част, но нижний индекс на единицу меньше.

70. Резонансные и нерезонансные объекты, теорема о формальной эквивалентности систем

Введём в рассмотрение величины

$$\delta_{pi}(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} p_j \lambda_j - \lambda_i = (p,\lambda) - \lambda_i = (p - e_i, \lambda)$$

Связующую систему (57) можно теперь записать в виде

$$\delta_{pi} h_i^{(p)} + Y_i^{(p)} = \widetilde{Y}_i^{(p)}, \qquad (58)$$

где через $\widetilde{Y}^{(p)}$ обозначена уже известная правая часть системы (57).

Определение 69. Пара индексов (p,i) — *резонансная*, если она удовлетворяет уравнению

$$\delta_{pi} = 0$$

Иначе — *нерезонансная.*

Определение 70. $f(z) \in \Phi_1$

Коэффициенты $f_i^{(p)}$ и члены $f_i^{(p)} z^p$, у которых пара (p, i) резонансна, а также векторный ряд $f^0 = f_\lambda^0(z)$ с компонентами $f_i^0 = \sum_{p:\delta_{pi}=0} f_i^{(p)} z^p$ будем называть *резонансными*.

Остальные коэффициенты и члены ряда f, а также ряд $f_\lambda^*(z)$ с компонентами $f_i^* = \sum_{p:\delta_{pi}\neq 0} f_i^{(p)} z^p$ — *нерезонансные*.

Теорема 61 (о формальной эквивалентности автономных систем)**.** Пусть формальная замена (55) сводит систему (54) к системе (56).

Тогда коэффициенты рядов Z, Y, h удовлетворяют алгебраической связующей системе (58).

Если заранее зафиксировать произвольным образом ряд h^0 в замене (55) и нерезонансный ряд Y^* в системе (56), то нерезонансная часть h^* ряда h и резонансная часть Y^0 ряда Y определяются однозначно из уравнений

$$h_i^{(p)} = \delta_{pi}^{-1}\big(\widetilde{Y}_i^{(p)} - Y_i^{(p)}\big), \qquad Y_i^{(p)} = \widetilde{Y}_i^{(p)} \qquad \text{(пара } (p,i) \text{ — нерезонансная)}$$

71. Нормальная форма системы, существование, лемма о единственности младших членов

Определение 71. Система (56) находится в *нормальной форме*, если все её нерезонансные коэффициенты равны нулю, т. е. ряд $Y = Y^0$.

Определение 72. Замена (55), преобразующая систему (54) в НФ (56), называется *нормализующей заменой*.

Нормализующая замена, в которой резонансный ряд $h^0 \equiv 0$, называется *стандартной*.

Теорема 62 (о существовании нормализующей замены)**.** Для любой системы (54) существует нормализующая замена (55). Существует и единственна нормализующая замена с любыми заданными резонансными членами, в том числе, стандартная.

Лемма 15 (о единственности младших членов НФ)**.** В НФ (56), полученной из системы (54), первый (в смысле введённой упорядоченности) член $Y_{\check{i}}^{(\check{p})} \check{y}^{\check{p}}$ определяется однозначно.

Если матрица J диагональна, т. е. $\sigma_2 = \cdots = \sigma_n = 0$, то все члены порядка $|\check{p}|$ определяются однозначно.

Следствие. Никакая нелинейная НФ не может оказаться формально эквивалентной линейной НФ.

72. НФ с периодическими возмущениями: определение и вывод связующей системы

Рассмотрим систему, в которой возмущение является периодической функцией времени:

$$\dot{x} = Ax + X(t, x), \qquad X = \sum_{p:|p|=2}^{\infty} X^{(p)}(t) x^p \tag{59}$$

Сделаем линейную замену $x = Sz$:

$$\dot{z} = Jz + Z(t, z), \qquad \text{или } \dot{z}_i = \lambda_i z_i + \sigma_i z_{i-1} + Z_i(t, z) \tag{60}$$

Сделаем формальную почти тождественную замену

$$z_i = y_i + h_i(t, y) \tag{61}$$

Получим систему

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + \sigma_i y_{i-1} + Y_i(t, y) \tag{62}$$

Продифференцируем по t в силу этой системы:

$$\dot{h}_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial y_j} \lambda_j y_j - \lambda_i h_i + Y_i \equiv Z_i(y+h) + \sigma_i h_{i-1} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial y_j}(\sigma_j y_{j-1} + Y_j)$$

Приравнивая коэффициенты, получаем связующую систему:

$$\dot{h}_i^{(p)}(t) + \delta_{pi} h_i^{(p)}(t) = \widetilde{Y}_i^{(p)}(t) - Y_i^{(p)}(t) \tag{63}$$

73. НФ с периодическими возмущениями: определение и условие автономности

Определение 73. Пару (p, i) будем называть *m_ω-резонансной*, если

$$\delta_{pi} + \frac{2\pi \mathrm{i} m}{\omega} = 0 \tag{64}$$

В противном случае пара (p, i) — *нерезонансная*.

- Если пара (p, i) — нерезонансная, то ЛНУ (63) имеет единственное ω-периодическое решение

$$h_i^{(p)}(t) = \left(q - e^{\delta_{pi}\omega}\right)^{-1} \int_{t-\omega}^{t} e^{\delta_{pi}(t-s)} \widetilde{Y}_i^{(p)}(s)\, \mathrm{d}\, s \tag{65}$$

- Если пара (p, i) — резонансная, то получаем ω-периодическое решение

$$h_i^{(p)}(t, t_0, y_0) = e^{\frac{2\pi \mathrm{i} m(t-t_0)}{\omega}} y_0 + e^{\frac{2\pi \mathrm{i} m t}{\omega}} \int_{t_0}^{t} \check{Y}_i^{(p)}(s)\, \mathrm{d}\, s \tag{66}$$

Определение 74. Коэффициенты $h_i^{(p)}(t)$ и члены $h_i^{(p)}(t) y^p$ у которых пара (p, i) m_ω-резонансна при некотором $m \in \mathbb{Z}$, будем называть *m_ω-резонансными*.

Остальные коэффициенты и члены ряда буем называть *нерезонансными*.

Определение 75. Систему (62) будем называть *нормальной формой*, если все её нерезонансные коэффициенты равны нулю, то есть

$$y_i(t, y) = \sum_{p^{(m)}} Y_i^{(p^{(m)})}(t) y^{p^{(m)}},$$

где $p^{(m)}$ удовлетворяет равенству (64), а $Y_i^{(p^{(m)})}(t) = a_i^{(m)} e^{\frac{2\pi \mathrm{i} m t}{\omega}}$.

Определение 76. Замену (61), преобразующую систему (60) в систему (62) будем называть *нормализующей.*

Нормализующая замена называется *стандартной*, если для всех её m_ω-резонансных коэффициентов $h_i^{(p)}(t, t_0, y_0)$ выбраны нулевые начальные данные t_0, y_0.

Теорема 63. Композиция линейной замены (52) и формальной почти тождественной нормализующей замены (61) с ω-периодическими нерезонансными коэффициентами из (65) и m_ω-резонансными коэффициентами из (66) приводит систему (59) к нормальной форме (62).

При этом существует и единственна стандартная нормализующая замена (61).

Следствие. Пусть с. ч. $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матрицы A системы (59) таковы, что m_ω-резонансные пары с $m \neq 0$ отсутствуют, т. е. выполняется условие

$$\forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{\, 0 \,\} \quad p_1^{(m)} \lambda_1 + \cdots + p_n^{(m)} \lambda_n - \lambda_i + \frac{2\pi \mathrm{i} m}{\omega} \neq 0$$

Тогда НФ системы (59) с периодической возмущённой частью автономна и совпадает с НФ (56) системы (49).

74. Структура нормальной формы в критическом случае двух чисто мнимых собственных чисел

Рассмотрим вещественную двумерную систему

$$\dot{x} = Ax + X(x), \quad \text{или} \begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + X_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + X_2(x_1, x_2), \end{cases} \tag{67}$$

в которой матрица A имеет с. ч. $\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}\beta$.

Существует линейная неособая замена $x = Sz$, которая преобразует систему (67) в систему

$$\dot{z} = Jz + Z(z), \quad \text{или} \begin{cases} \dot{z}_1 = \mathrm{i}\beta z_1 + Z_1(z_1, z_2), \\ \dot{z}_2 = -\mathrm{i}\beta z_2 + Z_2(z_1, z_2) \end{cases} \tag{68}$$

При этом можно выбрать матрицу $S = (s, \overline{s})$, тогда будет выполнено $z_2 = \overline{z}_1$.

Рассмотрим матрицу $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Можно доказать, что $\overline{Z(z)} = DZ(z)$.

Таким образом, в системе второе уравнение является сопряжённым к первому и его можно не выписывать.

Сделаем вещественную замену вида $x = SCu$:

$$\dot{u} = J_R u + U(u), \quad \text{или} \begin{cases} \dot{u}_1 = -\beta u_2 + U_1(u_1, u_2), \\ \dot{u}_2 = \beta u_1 + U_2(u_1, u_2) \end{cases}$$

Снова рассмотрим систему (68). Она является НФ, если в ней

$$Z_1 = \sum_{r=1}^{\infty} Z_1^{(r+1,r)} z_1^{r+1} z_2^r, \qquad Z_2 = \sum_{r=1}^{\infty} Z_2^{(r,r+1)} z_1^r z_2^{r+1}$$

Предположим, что для этой НФ выполняются условия вещественности:

$$z_2 = \overline{z}_1, \quad Z_2(z_1, z_2) = \overline{Z_1(z_1, z_2)}$$

При этих условиях второе уравнение системы становится сопряжённым к первому. Поэтому

$$Z_2^{(r,r+1)} = \overline{Z_1^{(r+1,r)}}$$

В итоге в критическом случае НФ при наличии условий вещественности имеет вид

$$\dot{z}_1 = \mathrm{i}\beta z_1 + Z_1^0(z_1, z_2) \tag{69}$$

Такую НФ будем называть *вещественной НФ.*

75. Нормализующая замена, вывод связующей системы, лемма о преобразовании НФ в НФ

Приведём систему (68) с условиями вещественности к НФ (69).

Покажем, что нормализующая почти тождественная замена вида

$$y_1 = z_1 + h_1(z_1, z_2), \quad y_2 = z_2 + \overline{h}_1(z_2, z_1) \tag{70}$$

сводит (68) к НФ (69).

Дифференцируя по t первое уравнение замены в силу системы (69), получаем

$$\mathrm{i}\beta h_1 + Y_1(z_1 + h_1, z_2 + \overline{h}_1) = Z_1^0 + \frac{\partial h_1}{\partial z_1}(\mathrm{i}\beta z_1 + Z_1^0) + \frac{\partial h_1}{\partial y_2}(-\mathrm{i}\beta z_2 + \overline{Z}_1^0)$$

Приравняем коэффициенты при мономах $z_1^{p_1} z_2^{p_2}$:

$$\mathrm{i}\beta(p_1 - p_2 - 1)h_1^{(p_1,p_2)} + \{\ Z_1^0(z_1, z_2)\ \}^{(p_1,p_2)} = \{\ Y_1(z + h)\ \}^{(p_1,p_2)} - \Phi_1^{(p_1,p_2)}$$

$$\Phi_1^{(p_1,p_2)} = \sum_{r=1}^{\frac{|p|}{2}-1} h_1^{(p_1-r,p_2-r)}\Big((p_1-r)Z_1^{(r+1,r)} + (p_2-r)\overline{Z_1^{(r+1,r)}}\Big) =$$

$$= \sum_{r=1}^{\frac{|p|}{2}-1} h_1^{(p_1-r,p_2-r)}\big((p_1+p_2-2r)\Re Z_1^{(r+1,r)} + \mathrm{i}(p_1-p_2)\Im Z_1^{(r+1,r)}\big),$$

и второе уравнение системы является комплексно сопряжённым к первому.

Лемма 16 (о преобразовании НФ в НФ). Нормализующая замена (70), которая преобразует вещественную НФ в вещественную НФ, может иметь только резонансные члены.

76. Алгебраический и трансцендентный случаи, их инвариантность; лемма о вторичной нормализации

Множество всех вещественных НФ $\dot{y}_1 = \mathrm{i}\beta y_1 + Y_1^0(y_1,y_2)$ разобьём на два непересекающихся подмножества.

Определение 77. Для НФ (69) имеет место *алгебраический случай*, если

$$\exists p_0 \geq 1: \quad \Re Y_1^{(r+1,r)} = 0, \quad \Re Y_1^{(p_0+1,p_0)} = a \neq 0$$

Если такого числа p_0 не существует, то имеет место *трансцендентный случай*.

В трансцендентном случае будем считать $p_0 = +\infty$. Обозначим через $q_0 \in \mathbb{N}$ первое число такое, что $\Im Y_1^{(q_0+1,q_0)} = b$.

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1\big(\mathrm{i}\beta + Y_1(y_1,y_2)\big), \\ \dot{y}_2 = y_2\big(-\mathrm{i}\beta + \overline{Y}_1(y_1y_2)\big) \end{cases} \tag{71}$$

Согласно лемме о преобразовании НФ в НФ любая замена вида

$$\begin{cases} y_1 = \theta\big(1 + f_1(\theta_1\theta_2)\big), \\ y_2 = \theta_2\big(1 + \overline{f}_1(\theta_1\theta_2)\big) \end{cases} \tag{72}$$

преобразует эту НФ в НФ

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_1\big(\mathrm{i}\beta + \Theta_1(\theta_1\theta_2)\big), \\ \dot{\theta}_2 = \theta_2\big(-\mathrm{i}\beta + \overline{\Theta}_1(\theta_1\theta_2)\big) \end{cases} \tag{73}$$

Лемма 17 (о вторичной нормализации). Пусть в НФ $q - 0 \leq p_0 + 1$.

1. в НФ, полученной из (71) произвольной заменой (72), $\Im\Theta_1^{(q_0)} = b$, $\Re\Theta_1^{(r)} = 0$;
2. существует и единственна замена (72) с $\Im f_1^{(1)}, \ldots, \Im f_1^{(p_0-q_0)} = 0$ такая, что $\Im\Theta_1^{(r)} = 0$ при $r = \overline{q_0+1,\ p_0-1}$.

Теорема 64 (об инвариантности констант в алгебраическом и трансцендентном случаях). Пусть нормализующие замены (70) и

$$z_1 = \theta_1 + \xi_1(\theta_1,\theta_2), \quad z_2 = \theta_2 + \overline{\xi}_1(\theta_2,\theta_1)$$

преобразуют систему (68) с произвольным образом зафиксированными резонансными рядами h_1^0 и ξ_1^0 соответственно в НФ (71) и (73).

Тогда эти НФ относятся либо к алгебраическому случаю с одинаковыми константами p_0 и a, либо к трансцендентному случаю с одинаковыми константами q_0 и b.

77. Теорема о вторичной нормализации

Теорема 65. Существует замена

$$y_1 = \theta_1\bigl(1 + f_1(\theta_1\theta_2)\bigr), \quad y_2 = \theta_2\bigl(1 + f_1(\theta_1\theta_2)\bigr), \qquad f_1 = \sum_{s=1}^{\infty} f_1^{(s)}(\theta_1\theta_2)^s,$$

преобразующая НФ (71) в НФ (73)

$$\dot\theta_1 = \theta_1\bigl(\mathrm{i}\beta + \Theta_1(\theta_1\theta_2)\bigr), \quad \dot\theta_2 = \theta_2\bigl(-\mathrm{i}\beta + \overline{\Theta}_1(\theta_1\theta_2)\bigr), \qquad \Theta_1 = \sum_{r=r_0}^{\infty} \Theta_1^{(r)}(\theta_1\theta_2)^r,$$

у которой

- в трансцендентном случае
$$\Theta_1 = \mathrm{i}b(\theta_1\theta_2)^{q_0}$$
- в алгебраическом случае
$$\Theta_1 = a(\theta_1\theta_2)^{p_0} + \breve{a}(\theta_1\theta_2)^{2p_0} + \mathrm{i}\sum_{k=q_0}^{p_0} b_1^{(k)}(\theta_1\theta_2)^k$$

78. Теорема о сходимости нормализующей замены в трансцендентном случае

Теорема 66. В трансцендентном случае вещественная аналитическая в нуле система (67) аналитически эквивалентна своей нормальной форме.