Оглавление

Глава 1

Линейные функционалы

1.1. Эрмитово-сопряжённый оператор

1.1.1. Теорема о ядре и образе оператора и его сопряжённого

Теорема 1. H — гильбертово, $\quad T \in \mathscr{B}(H), \quad Y$ — инвариантное подпространство для T

$$Y^\perp \text{ — инвариантное подпространство для } T^*$$

Доказательство. $z \in Y^\perp, \quad y \in Y$

$$(y, T^*z) = (Ty, z) \underset{\substack{Ty \in Y \\ z \in Y^\perp}}{=\!=\!=} 0 \implies T^*z \in Y^\perp \implies T^*(Y^\perp) \subset Y^\perp$$

□

Определение 1. H — гильбертово, $\quad T \in \mathscr{B}(H)$
T называется *самосопряжённым*, если $T = T^*$, то есть $(Tx, y) = (x, Ty) \quad \forall x \in H$.

Следствие. H — гильбертово, $\quad T \in \mathscr{B}(H), \quad T$ — самосопряжённый
Если $Y \subset H$ инвариантно для T, то $Y^\perp$ тоже инвариантно.

Пример. $M = \overline{M} \subset H, \quad M$ — подпространство

$$P \text{ — ортопроектор на } M \implies P = P^*$$

1.2. Спектр оператора

Определение 2. X — банахово, $T \in \mathscr{B}(X), \quad I$ — тождественный оператор, $\quad \lambda \in \mathbb{C}$
Будем говорить, что λ — *регулярная точка*, если $V(\lambda) := \lambda I - T$ — биекция.
По теореме Банаха об обратном операторе,

$$V^{-1}(\lambda) \in \mathscr{B}(X)$$

$$R(\lambda, T) = R(\lambda) = V^{-1}(\lambda)$$

R называется *резольвентой.*

Примечание (касательно терминологии)**.** Рассмотрим уравнение

$$\lambda x - Tx = h,$$

где h — дано, x — неизвестные.
Если $\forall h \in X \exists\, x \in X : \quad \lambda x - Tx = h$, то уравнение разрешимо. То есть, $x = R(\lambda)h$.

Определение 3. Множество всех регулярных точек называется *рещольвентным множеством*:

$$\rho(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda — \text{регулярная} \}$$

Определение 4. Множество всех остальных точек назовём *спектром* T:

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$$

Определение 5 (части спектра).

1. $\sigma_p(T)$ — *точечный спектр*

$$\sigma_p(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda T - I \text{ не инъекция} \}$$

Для линейного оператора это означает, что $X_\lambda = \operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{ 0 \}$.

$$u \neq 0 \in X \implies Tu = \lambda u$$

u — собственный вектор T, соответствующий с. ч. λ. X_λ — собственное подпространство.

2. $\sigma_c(T)$ — *непрерывный спектр*

$$\sigma_c(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Ker}(\lambda I - T) = \{ 0 \}, \quad \overline{V(\lambda)(X)} = X \right\}$$

(т. е. образ $V(\lambda)$ всюду плотен в X).

3. $\sigma_r(T)$ — *остаточный спектр*

$$\sigma_r(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Ker}(\lambda I - T) = \{ 0 \}, \quad \overline{V(\lambda)(X)} \subsetneq X \right\} = \sigma \setminus (\sigma_p \cup \sigma_c)$$

Замечание. В конечномерном случае $\sigma = \sigma_p$.

1.2.1. Свойства резольвенты

Свойства. X — банахово, $\quad T \in \mathscr{B}(H)$

1. $\lambda, \mu \in \rho(T)$

$$\implies R(\lambda)R(\mu) = R(\mu)R(\lambda)$$

2. *Тождество Гильберта*: $\lambda, \mu \in \rho(T)$

$$\implies R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)$$

3. $\rho(T)$ открыто в $\mathbb{C}$
Кроме того, если $\mu \in \rho(T)$, то

$$|\lambda - \mu| < \frac{1}{\|R(\mu)\|} \implies \lambda \in \rho(T)$$

4. $\lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| > \|T\|$

$$\implies \lambda \in \rho(T)$$

5. $R(\lambda)$ — непрерывная функция, т. е. если $\mu \in \rho(T)$, то

$$\lim_{\lambda \to \mu} R(\lambda) = R(\mu), \qquad \lim_{\lambda \to \infty} R(\lambda) = 0$$

6. $F \in \big(\mathscr{B}(X)\big)^*, \quad \lambda \in \rho(T), \quad g(\lambda) := F\big(R(\lambda)\big)$

$$\implies g(\lambda) \text{ аналитична в } \rho(T), \qquad \lim_{\lambda \to \infty} g(\lambda) = 0$$

Доказательство.

1. $\lambda, \mu \in \rho(T)$

$$V(\lambda)V(\mu) = (\lambda I - T)(\mu I - T) = V(\mu)V(\lambda)$$

$$\exists \big(V(\lambda)\big)^{-1},\ \big(V(\mu)\big)^{-1}, \quad R(\lambda) = \big(V(\lambda)\big)^{-1}, \quad R(\mu) = \big(V(\mu)\big)^{-1}$$

$$\implies \big(V(\mu)\big)^{-1}\big(V(\lambda)\big)^{-1} = \big(V(\lambda)\big)^{-1}\big(V(\mu)\big)^{-1}$$

2. $\lambda, \mu \in \rho(T)$

$$V(\lambda) - V(\mu) = (\lambda I - T) - (\mu I - T) = (\lambda - \mu)I$$

Если $A, B \in \mathscr{B}(X), \quad \exists A^{-1}, B^{-1}$, то

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}$$

Возьмём $A = V(\lambda),\ B = V(\mu)$.

$$R(\lambda) - R(\mu) = R(\lambda)\big((\mu - \lambda)I\big)R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)$$

3. Известно, что $\mathrm{In}(X)$ (множество обратимых операторов) открыто:

$$\exists A^{-1} \quad \|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \implies \exists B^{-1}$$

$$\mu \in \rho(T), \quad A = V(\mu) \implies \exists R(\mu) = \big(V(\mu)\big)^{-1}$$

$$V(\lambda) - V(\mu) = (\lambda - \mu)I \implies \|V(\lambda) - V(\mu)\| = |\lambda - \mu|$$

$$|\lambda - \mu| < \frac{1}{\|R(\mu)\|} \implies \|V(\lambda) - V(\mu)\| < \frac{1}{\|R(\mu)\|} \implies \exists \big(V(\lambda)\big)^{-1} \implies \lambda \in \rho(T)$$

4. $\lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| > \|T\|$

Рассмотрим оператор

$$\Big\|\frac{1}{\lambda}T\Big\| < 1 \xRightarrow[\text{т. об обр. опер., близкого к тожд.}]{} \exists \Big(I - \frac{1}{\lambda}T\Big)^{-1} \implies$$

$$\implies V(\lambda) = \lambda I - T = \lambda\Big(I - \frac{1}{\lambda}T\Big) \implies \exists R(\lambda) = \big(V(\lambda)\big)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\Big(I - \frac{1}{\lambda}T\Big)^{-1}$$

5. $\mu \in \rho(T)$

$$\lim_{\lambda \to \mu}\big(V(\mu) - V(\lambda)\big) = \lim_{\lambda \to \mu}(\mu - \lambda)I = 0$$

По теореме об открытости $\mathrm{In}(A)$,

$$\varphi : A \to A^{-1}, \quad A \in \mathrm{In}(X) \implies \varphi \text{ непрерывно}$$

$$\left.\begin{matrix} \varphi\big(V(\lambda)\big) = V(\lambda) \\ \lim\limits_{\lambda \to \mu} V(\lambda) = V(\mu) \end{matrix}\right\} \implies \lim_{\lambda \to \mu} R(\lambda) = R(\mu)$$

Пусть $|\lambda| > \|T\|$.

$$\lim_{\lambda \to \infty}\Big(I - \frac{1}{\lambda}T\Big) = I$$

$$R(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\Big(I - \frac{1}{\lambda}T\Big)^{-1}$$

По непрерывности,

$$\lim\Big(I - \frac{1}{\lambda}T\Big)^{-1} = I \implies \lim R(\lambda) = 0$$

6. $\mu \in \rho(T), \quad \lambda$ из некоторой окрестности μ

$$\frac{R(\lambda) - R(\mu)}{\lambda - \mu} \xlongequal[\text{т-во Гильберта}]{} \frac{(\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)}{\lambda - \mu)} = -R(\lambda)R(\mu) \implies \exists \lim_{\lambda \to \mu} \frac{R(\lambda) - R(\mu)}{\lambda - \mu} = -\big(R(\mu)\big)^2$$

Возьмём $F \in \big(\mathscr{B}(X)\big)^*, \quad F : \mathscr{B}(X) \to \mathbb{C}$. Рассмотрим функцию $g(\lambda) = F\big(R(\lambda)\big)$ при $\lambda \in \rho(T)$.

$$\lim_{\lambda \to \mu} \frac{g(\lambda) - g(\mu)}{\lambda - \mu} = \lim_{\lambda \to \mu} \frac{F\big(R(\lambda)\big) - F\big(R(\mu)\big)}{\lambda - \mu} \xlongequal[\text{лин. } F]{} \lim F\left(\frac{R(\lambda) - R(\mu)}{\lambda - \mu}\right) \xlongequal[\text{непр. } F]{} -F\Big(\big(R(\mu)\big)^2\Big)$$

То есть, $\exists g'(\mu) \quad \forall \mu \in \rho(T)$.

$$\lim_{\mu \to \infty} R(\mu) = 0 \xRightarrow[\text{непр. } F]{} \lim_{\mu \to \infty} F\Big(\big(R(\mu)\big)^2\Big) = 0$$

□

1.2.2. Компактность и непустота спектра

Следствие. X — банахово, $\quad T \in \mathscr{B}(X)$

$$\sigma(T) \text{ — компакт}, \quad \sigma(T) \neq \emptyset$$

Доказательство.

1. Компактность

$$\rho(T) \text{ открыто} \implies \sigma(T) \text{ замкнуто}$$

$$|\lambda| > \|T\| \implies \lambda \in \rho(T)$$

Значит,

$$\lambda \in \sigma(T) \implies |\lambda| \le \|T\|$$

То есть,

$$\sigma(T) \subset \{\, \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \le \|T\| \,\} \implies \sigma(T) \text{ ограничено} \implies \sigma(T) \text{ — компакт}$$

2. Непустота

Пусть $\sigma(T)$ пусто. Тогда $\rho(T) = \mathbb{C}$, то есть

$$\forall F \in \big(\mathscr{B}(X)\big)^* \quad g(\lambda) = F\big(R(\lambda)\big) \text{ — аналитическая в } \mathbb{C} \text{ (целая)}$$

$$V(0) = -T \implies \exists T^{-1} \in \mathscr{B}(X) \xRightarrow[\text{сл. из т. Хана–Банаха}]{} \exists F \in \big(\mathscr{B}(X)\big) : \quad g(0) \neq 0$$

Выберем $g(\lambda) = F\big(R(\lambda)\big)$.

Таким образом, $g(z)$ — целая, g ограничена. Значит, по теореме Лиувилля, $g \equiv \text{const}$ — $\lightning$ с $\lim\limits_{g \to 0} = 0$.

□

Пример. $Ix = x$

$$\sigma(I) = \{\, 1 \,\} = \sigma_p(I)$$

$$(\lambda I - I) = (\lambda - 1)I \implies R(\lambda) = \frac{1}{\lambda - 1} I \quad \forall \lambda \neq 1$$

1.2.3. Спектр и резольвента сопряжённого оператора

Теорема 2.

1. X — банахово, $\quad T \in \mathscr{B}(X)$

$$\Longrightarrow \ \sigma(T^*) = \sigma(T)$$

Если $\lambda \in \rho(T)$, то

$$\big(R(\lambda, T)\big)^* = R(\lambda, T^*)$$

2. H — гильбертово, $T \in \mathscr{B}(H)$, T — эрмитово-сопряжённый

$$\Longrightarrow \ \sigma(T^*) = \{\ \lambda \mid \overline{\lambda} \in \sigma(T)\ \}$$

Если $\lambda \in \rho(T)$, то

$$R(\lambda, T^*) = \big(R(\overline{\lambda}, T)\big)^*$$

Доказательство.

1. X — банахово, $\lambda \in \rho(T)$

$$V(\lambda) = \lambda I - T \implies \big(V(\lambda)\big)^* = \lambda I - T^*$$

$$\Big(\big(V(\lambda)\big)^{-1}\Big)^* = \Big(\big(V(\lambda)\big)^*\Big)^{-1}$$

2. X — гильбертово

$$\big(V(\lambda)\big)^* = \overline{\lambda} I - T^*$$

□