

Оглавление

1	Пространства	2
1.1	Сепарабельные пространства	2
1.2	Нигде не плотные множества	3
1.2.1	Теорема Бэра о категориях	3
1.3	Полные системы элементов	4
1.4	Полные и плотные множества в $L^p(T, \mathcal{U}, \mu)$	5
1.4.1	Небольшое напоминание	5

Глава 1

Пространства

1.1. Сепарабельные пространства

Следствие. l^p , $1 \leq p < +\infty$, C_0 сепарабельны.

Доказательство. F — пространство финитных последовательностей.

$$\overline{(F, \|\cdot\|_p)}^{\|\cdot\|_p} = l^p, \quad 1 \leq p < +\infty$$

$E = \{ (x_1, \dots, x_n, 0, \dots) \mid x_j \in Q, h \in \mathbb{N} \}$ — счётное всюду плотное в l^p .

$$\overline{(F, \|\cdot\|_\infty)}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0 \implies C_0 \text{ сепарабельно.}$$

□

Замечание.

$$T = \left\{ x = \{x_j\}_{j=1}^\infty \mid x_j \in Q \right\} \implies \overline{T}^{\|\cdot\|_p} = l_p, \quad 1 \leq p \leq +\infty$$

Но T не счётно (это следует из того, что $2^{\mathbb{N}}$ равнomoщно $[0, 1]$).

Утверждение 1. $C \subset l^\infty$ сепарабельно.

Доказательство. Упражнение.

□

Теорема 1. l^∞ не сепарабельно.

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbb{N}$. Рассмотрим $x_j^A = \begin{cases} 1, & j \in A \\ 0, & j \notin A \end{cases}$. Тогда $x^A = \{x_j^A\}_{j=1}^\infty$.

Заметим, что множество таких последовательностей $\{x^A\}_{A \subset \mathbb{N}}$ не счётно:
Пусть $A, C \subset \mathbb{N}$, $A \neq C$.

$$x_j^A - x_j^C = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

Поскольку $A \neq C$, $\|x^A - x^C\|_\infty = 1$.

$$\implies B_{\frac{1}{2}}(x^A) \cap B_{\frac{1}{2}}(x^C) = \emptyset$$

Пусть E всюду плотно в l^∞ . Тогда в каждом таком шарике должен быть его представитель:

$$\forall A \subset \mathbb{N} \quad \exists e_A \in E \cap B_{\frac{1}{2}}(x^A)$$

При этом, $A \neq C \implies e_A \neq e_C$.

$\{e_A\}_{A \subset \mathbb{N}} \subset E$, $\{e_A\}_{A \subset \mathbb{N}}$ не счётно $\implies E$ не счётно.

□

Теорема 2. (X, ρ) — метрическое пространство, сепарабельно, $Y \subset X$.

Тогда Y сепарабельно.

Доказательство. Пусть $E = \{x_n\}_{n=1}^\infty$, $\overline{E} = X$.

$$\rho(x_n, Y) = \inf_{y \in Y} \rho(x_n, y)$$

$$\exists \{y_{n,k}\}_{k=1}^\infty : \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_{n,k}) = \rho(x_n, Y)$$

Рассмотрим $F = \{y_{n,k}\}_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}}$ — счётное. Проверим, что F всюду плотно в Y .

Пусть $y \in Y$, $\varepsilon > 0$, $y \in X$.

$$\begin{aligned} &\exists x_n : \rho(x_n, y) < \varepsilon \\ \implies &\rho(x_n, Y) < \varepsilon \implies \exists y_{nk} : \rho(x_n, y_{nk}) < \varepsilon \\ \implies &\rho(y, y_{nk}) \stackrel{\Delta}{\leq} \rho(y, x_n) + \rho(x_n, y_{nk}) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

□

Следствие. X — бесконечное множество.

Тогда $m(X)$ не сепарабельно.

Доказательство.

$$m(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C}) \mid \sup_{x \in X} |f(x)| < +\infty \right\}$$

X — бесконечное $\implies \exists \{a_j\}_{j=1}^\infty$, $a_j \in X$, $a_j \neq a_k$.

$$\text{Рассмотрим } L = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) \in m(X), \quad f(x) \stackrel{x \neq a_j}{=} 0 \right\}.$$

$$f \in L \quad \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |f(a_j)|$$

$$L \xrightarrow{\Phi} l^\infty : \quad f \in L \quad f \rightarrow \{f(a_j)\}_{j=1}^\infty$$

Φ — изометрия $\implies L \subset m(X)$. l^∞ не сепарабельно $\implies L$ не сепарабельно. Значит, $m(X)$ не сепарабельно. □

1.2. Нигде не плотные множества

Опять некоторый способ рассуждать о том, какие множества большие, а какие — маленькие.

Определение 1. (X, ρ) — метрическое пространство, $A \subset X$.

A нигде не плотно, если A не плотно ни в одном шаре:

$$\begin{aligned} &\forall B_r(x) : x \in X, r > 0 \quad \exists B_{r_1}(x_1) \subset B_r(x) : \quad B_{r_1}(x_1) \cap A = \emptyset \\ \iff &\text{Int}(\overline{A}) = \emptyset \\ \iff &\forall D_r(x) \quad \exists D_{r_1}(x_1) \subset D_r(x) : \quad D_{r_1}(x_1) \cap A = \emptyset \end{aligned}$$

Определение 2. (X, ρ) , $M \subset X$ — множество первой категории, если

$$M = \bigcup_{j=1}^\infty M_j, \quad M_j \text{ нигде не плотно}$$

Все остальные множества называются *множествами второй категории*.

1.2.1. Теорема Бэра о категориях

Теорема 3. (X, ρ) — полное.

Тогда X — множество второй категории.

Доказательство. Пусть M_j — нигде не плотные, $j \in \mathbb{N}$, $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$, $M_j \subset X$. Докажем, что $\exists x \in X \setminus M$. Воспользуемся теоремой о вложенных шарах.

Возьмём $D_0 = D_{r_0}(x_0)$, $r_0 = 1$. M_1 нигде не плотно $\Rightarrow \exists D_1 = D_{r_1}(x_1) \subset D_0 : D_1 \cap M_1 = \emptyset$. При этом, можно взять $r_1 < 1$ (если при большем r_1 не пересекалось, то и не начнёт).

M_2 нигде не плотно $\Rightarrow \exists D_2 = D_{r_2}(x_2) \subset D_1 : D_2 \cap M_2 = \emptyset$, $r_2 < \frac{1}{2}$.

...

$$\exists D_{n+1} = D_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset D_n : D_{n+1} \cap M_{n+1} = \emptyset, r_{n+1} < \frac{1}{n+1}$$

X — полное $\xrightarrow[\text{т. о вложенных шарах}]{} \exists a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$, т. к. $\lim r_n = 0$.

$$a \in X, D_n \cap M_n = \emptyset \Rightarrow a \notin M_n \quad \forall n \Rightarrow a \notin M$$

□

1.3. Полные системы элементов

Определение 3.

1. X — линейное пространство, $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $x_\alpha \in X$.

$$\mathcal{L}\{x_\alpha\} = \left\{ x = \sum_{j=1}^n c_j x_{\alpha_j} \right\}$$

$\mathcal{L}\{x_\alpha\}$ будем называть *линейной оболочкой* X .

2. $(X, \|\cdot\|)$.

Будем говорить, что $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — *полная система элементов*, если $\overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}} = X$, то есть линейная оболочка всюду плотна в X .

Примеры.

1. $C[a, b]$, $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$

$$\mathcal{L}\{x^n\}_{n \geq 0} = \mathcal{P} = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \right\}, \quad \overline{\mathcal{P}} = C[a, b]$$

$\Rightarrow \{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ — полное семейство.

2. l^p , $1 \leq p < +\infty$, $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полное семейство в l^p и в C_0 .

$\mathcal{L}\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = F$ — финитные последовательности $\Rightarrow \overline{\mathcal{L}\{e_n\}}^{\|\cdot\|_p} = l^p$, $1 \leq p < +\infty$

$$\overline{\mathcal{L}\{e_n\}}^{\|\cdot\|_{\infty}} = C_0$$

Утверждение 2. $(X, \|\cdot\|)$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — счётное полное семейство.

Тогда $(X, \|\cdot\|)$ сепарабельно.

Доказательство. Пусть X над \mathbb{R} .

Рассмотрим $E = \mathcal{L}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — всюду плотно, но не счётно.

Возьмём $H = \left\{ x = \sum_{j=1}^n c_j x_j \mid c_j \in \mathbb{Q} \right\}$ — счётно, $E \subset H$, $\overline{E} = X$.

□

Следствие. $C[a, b]$ сепарабельно.

1.4. Полные и плотные множества в $L^p(T, \mathcal{U}, \mu)$

$$e \in \mathcal{U}, \quad \chi_e(t) = \begin{cases} 1, & t \in e \\ 0, & t \notin e \end{cases}, \quad \forall e \in \mathcal{U} \quad \chi_e \in L^\infty.$$

Пусть $1 \leq p < +\infty$.

$$\chi_e \in L^p \iff \int_T (\chi_e(x))^p d\mu = \int_e \chi_e(x) d\mu = \mu(e) < \infty$$

1.4.1. Небольшое напоминание

Теорема 4 (Лебега, о предельном переходе). $\{h_n(x)\}$ — измеримые, $h_n(x) \geq 0 \quad \forall n, x$
 $h_n(x) \leq \Phi(x), \quad \int_T \Phi(x) d\mu < +\infty, \quad h_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(x)$ (все утверждения п. в.).

$$\implies \int_T F(x) d\mu < +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_T h_n(x) d\mu = \int_T F(x) d\mu$$

Теорема 5. (T, \mathcal{U}, μ) — пространство с мерой.

1. $\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{U}}$ — полное семейство в L^∞ ;
2. $\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{U}, \mu e < +\infty}$ — полное семейство в L^p , $1 \leq p \leq +\infty$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — измеримая, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in T$. Возьмём $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} e_k &:= \left\{ x \in T \mid \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n^2 - 1 \right\}, \quad e_{n^2} := \{x \in T \mid n \leq f(x)\} \\ &\implies T = \bigcup_{k=0}^{n^2} e_k \\ g_n(x) &:= \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n} \chi_{e_k} \\ g_n(x) \leq f(x) &< g_n(x) + \frac{1}{n}, \quad x \in \bigcup_{k=0}^{n^2-1} e_k \end{aligned}$$

1. $p = \infty$

Если $n > \|f\|_\infty$, то $e_{n^2} = \{x \mid f(x) > n\} \implies \mu(e_{n^2}) = 0 \implies |f(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ п. в. на T .

$$g_n \in \mathscr{L}\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{U}} \implies f \in \overline{\mathscr{L}\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{U}}}$$

2. $1 \leq p < +\infty$

$$\begin{aligned} |f(x) - g_n(x)|^p &\leq (f(x))^p, \quad \int_T (f(x))^p d\mu < +\infty \\ \forall x \in T \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) &= f(x) \implies |f(x) - g_n(x)|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ п. в. } x \\ \left(\int_T |f - g_n|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} &\rightarrow 0 \implies f \in \overline{\mathscr{L}\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{U}, \mu e < +\infty}} \end{aligned}$$

Для $f \in L^p$ можно написать $f = f_+ - f_-$.

□