

Оглавление

1	Мера Лебега	2
1.1	Продолжение чего-то	2
1.2	Дальнейшие свойства интеграла Лебега	3
1.3	Приложения интеграла Лебега	5
1.4	Пространства $\mathcal{L}^p(E)$	5

Глава 1

Мера Лебега

1.1. Продолжение чего-то

Видимо, ещё конспекты потерялись. **TODO:** Надо поискать в конспектах Якова(?). Тут не хватает реально большого куска.

Свойства.

1,2. ...

1. $0 \leq f \leq +\infty$, f измерима. Пусть $f_0 \in B(f)$. Тогда по предыдущему пункту

$$I_A(f_0) = \int_A f_0 \, d\mathbf{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f_0 \, d\mathbf{m} \leq \sum \varphi(A_n),$$

если в этом пункте имеем в виду $\varphi(A) = \int_A f \, d\mathbf{m}$

$$\implies \varphi(A) = \sup \{ I_A(f_0) \mid f_0 \in B(f) \} \leq \sum \varphi(A_n) \quad (1.1)$$

Поскольку $f \in \mathcal{L}(E)$, то $\varphi(A) < +\infty$, $\varphi(A_n) < +\infty$.

Возьмём $\forall N$ и фиксируем $\varepsilon > 0$. Напомним, что f определяется на всём множестве E .

Выберем f_1, \dots, f_N — простые функции, $f_j \in B(f)$, удовлетворяющие условию

$$I_{A_j}(f_j) > \int_{A_j} f \, d\mathbf{m} - \frac{\varepsilon}{N}, \quad j = 1, \dots, N \quad (1.2)$$

Определим функцию $f_0 : E \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f_0(x) = \begin{cases} f_j(x), & j \geq 2, \quad x \in A, \\ f_1(x), & x \in E \setminus \bigcup_{n=2}^N A_n \end{cases}$$

Тогда $f_0 \in B(f)$, $\bigcup_{n=1}^N A_n \subset A$ и по предыдущему пункту и (1.2)

$$\varphi(A) \geq \varphi\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) \geq I_{\bigcup_{n=1}^N A_n}(f_0) = \sum_{n=1}^N I_{A_n}(f_0) = \sum I_{A_n}(f_n) > \sum \left(\varphi(A_n) - \frac{\varepsilon}{N}\right) = \sum \varphi(A_n) - \varepsilon$$

В силу произвольности N и $\varepsilon > 0$

$$\implies \varphi(A) \geq \sum \varphi(A_n)$$

$\xRightarrow{(1.1)} (??)$ для $f(x) \in \mathcal{L}(E)$, $f(x) \geq 0$, а тогда и для $\forall f \in \mathcal{L}(E)$.

Доказательство.

1. ...

2. ...

Тогда

$$\varphi(A) = \int_A \sum_{j=1}^N c_j x_{F_j} d m = I_A \left(\sum_{j=1}^N c_j x_{F_j} \right) = \sum_{j=1}^N c_j m(F_j \cap A)$$

$$\varphi(A_n) = I_{A_n} \left(\sum c_j x_{F_j} \right) = \sum c_j m(F_j \cap A_n)$$

□

Из последнего свойства $\int_E f d m = 0$, если $m E = 0$. Получаем важное следствие:

Следствие. Пусть $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E)$ и $m \{ x \in E \mid f_1(x) \neq f_2(x) \} = 0$. Тогда

$$\int_E f_1 d m = \int_E f_2 d m$$

Доказательство. Пусть $F = \{ x \in E \mid f_1(x) \neq f_2(x) \}$, тогда

$$\int_E f_1 d m = \int_{E \setminus F} f_1 d m + \int_F f_1 d m = \int_{E \setminus F} f_1 d m = \int_{E \setminus F} f_2 d m = \int_{E \setminus F} f_2 d m + \int_F f_2 d m = \int_E f_2 d m$$

□

Определение 1. Пусть функции f_1, f_2 измеримы на E .

Говорят, что f_1 эквивалентна f_2 , пишут $f_1 \sim f_2$, если $m \{ x \in E \mid f_1(x) \neq f_2(x) \} = 0$.

Примечание. Иногда говорят, что функции равны почти всюду.

Теорема 1. Пусть $f \in \mathcal{L}(E)$, тогда $|f| \in \mathcal{L}(E)$ и

$$\left(\int_E f d m \right) \leq \int_E |f| d m$$

Доказательство. Пусть $E_+ = \{ x \in E \mid f(x) \geq 0 \}$, $E_- = \{ x \in E \mid f(x) < 0 \}$.

Тогда $\int_E f d m = \int_{E_+} f d m + \int_{E_-} f d m = \int_E f^+ d m - \int_E f^- d m$,

$$\int_E |f| d m = \int_{E_+} f d m + \int_{E_-} (-f) d m = \int_{E_+} f^+ d m + \int_{E_-} f^- d m = \int_E f^+ d m + \int_E f^- d m$$

□

1.2. Дальнейшие свойства интеграла Лебега

Первых, видимо, не было.

Свойства.

1. Пусть $\exists c < \infty$ такая, что $|f(x)| \leq c$, $x \in E$, f измерима на E и $m E < +\infty$.

Тогда $f \in \mathcal{L}(E)$.

2. Если f измерима, $m E < \infty$, $a \leq f(x) \leq b$, $x \in E$, то

$$a m E \leq \int_E f d m \leq b m E$$

3. Если $f, g \in \mathcal{L}(E)$ и $f(x) \leq g(x)$, $x \in E$, то

$$\int_E f \, d\mathbf{m} \leq \int_E g \, d\mathbf{m}$$

4. $f \in \mathcal{L}(E)$, $c \in \mathbb{R}$

$$\implies \begin{cases} cf \in \mathcal{L}(E), \\ \int_E cf \, d\mathbf{m} = c \int_E f \, d\mathbf{m} \end{cases}$$

5. Если $\mathbf{m} E = 0$, f измерима, то

$$\lim_E \mathbf{m} = 0$$

6. Если $f \in \mathcal{L}(E)$, $F \subset E$, F измеримо, то $f \in \mathcal{L}(F)$.

В частности, если $E = E_0 \cup S$, $E_0 \cap S = \emptyset$, $\mathbf{m} S = 0$, то

$$\int_E f \, d\mathbf{m} = \int_{E_0} f \, d\mathbf{m} + \int_S f \, d\mathbf{m} = \int_{E_0} f \, d\mathbf{m},$$

поскольку $\int_S f \, d\mathbf{m} = 0$.

Отсюда следует важное свойство интеграла Лебега:

7. Пусть $f \sim h$, $f \in \mathcal{L}(E)$. Тогда

$$\int_E f \, d\mathbf{m} = \int_E h \, d\mathbf{m}$$

8. Пусть $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Тогда $f + g \in \mathcal{L}(E)$ и

$$\int_E (f + g) \, d\mathbf{m} = \int_E f \, d\mathbf{m} + \int_E g \, d\mathbf{m}$$

Доказательство.

1. Следует из того, что $f \in \mathcal{L}(E) \iff |f| \in \mathcal{L}(E)$ для любой простой функции $s : 0 \leq s(x) \leq |f(x)|$ справедливо $s(x) \leq c$, поэтому

$$\int_E s \, d\mathbf{m} \leq \int_E c \, d\mathbf{m} = c \mathbf{m} E, \quad \int_E |f| \, d\mathbf{m} \leq c \mathbf{m} E$$

2. Аналогично.

3. Без доказательства.

4. Докажем для $f(x) \geq 0$, $x \in E$, $c > 0$. Пусть $s \in \mathcal{A}(F)$, т. е. s — простая функция, $0 \leq s(x) \leq f(x) \quad \forall x \in E$.

Тогда $cs \in \mathcal{A}(cf)$,

$$\int_E cs \, d\mathbf{m} = \sum_{j=1}^n ca_j \mathbf{m} F_j = c \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{m} F_j = c \int_E s \, d\mathbf{m},$$

если $s(x) = \sum a_j \chi_{F_j}(x)$, $F_j \cap F_k = \emptyset$.

Переходя к супремуму, получаем нужное свойство.

5. Если $F_j \subset E$, то $0 \leq \mathbf{m} F_j \leq \mathbf{m} E = 0$, для любой простой функции $s \in \mathcal{A}(|f|)$ имеем $0 \leq s(x) \leq |f(x)|$, $s(x) = 0$, $\int_E s \, d\mathbf{m} = 0$, поэтому $\int_E |f| \, d\mathbf{m} = 0$

$$0 \leq \int_E f^+ \, d\mathbf{m} \leq \int_E |f| \, d\mathbf{m} = 0, \quad 0 \leq \int_E f^- \, d\mathbf{m} \leq \int_E |f| \, d\mathbf{m} = 0$$

$$\int_E d\mathbf{m} = \int_E f^+ d\mathbf{m} - \int_E f^- d\mathbf{m} = 0$$

6. Для $\forall s \in \mathcal{A}(|f|)$ на множестве F положим

$$s_0(x) = \begin{cases} s(x), & x \in F, \\ 0, & x \in E \setminus F \end{cases}$$

$$\int_E s_0 d\mathbf{m} = \int_F s d\mathbf{m} \leq \int_E |f| d\mathbf{m}$$

$$\int_F |f| d\mathbf{m} \leq \int_E |f| d\mathbf{m}, \quad |f| \in \mathcal{L}(F)$$

7. Пусть $E_0 = \{x \in E \mid f(x) = g(x)\}$, $S = E \setminus E_0$. Тогда $\mathbf{m} S = 0$,

$$\int_E f d\mathbf{m} = \int_{E_0} f d\mathbf{m}, \quad \int_E g d\mathbf{m} = \int_{E_0} g d\mathbf{m}$$

□

1.3. Приложения интеграла Лебега

Теорема 2 (связь интеграла Римана и интеграла Лебега). Пусть функция f интегрируема по Риману на промежутке (a, b) .

Тогда она измерима по Лебегу на множестве $E = (a, b)$, суммируема, и справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\mathbf{m}$$

Без доказательства.

□

При этом, существуют функции, не интегрируемые по Риману, но интегрируемые по Лебегу. Например, функция Дирихле:

$$f_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a, b) \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in (a, b) \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\mathbf{m} \mathbb{Q} = 0$, поэтому $f_0 \sim 0$ на (a, b)

$$\int_{(a,b)} f_0 d\mathbf{m} = \int_{(a,b)} 0 d\mathbf{m} = 0$$

1.4. Пространства $\mathcal{L}^p(E)$