Оглавление

Глава 1

Линейные пространства

1.1. Линейные операторы в нормированных пространствах

1.1.1. Вычисление нормы непрерывного оператора

Примеры.

1. $Y = \mathcal{C}[0,1], \quad X = \mathcal{C}^{(1)}[0,1] = \{\, f \mid f' \in \mathcal{C}[0,1] \,\}$

$$\|f\|_X = \|f\|_{\mathcal{C}^{(1)}} = \max\{\, \|f\|_\infty, \|f'\|_\infty \,\}$$

$$\mathcal{D}(f) = f'$$

Проверим, что $\mathcal{D} \in \mathscr{B}(X,Y)$, $\|\mathcal{D}\|_{\mathscr{B}(X,Y)} = 1$.

- Возьмём $f \in X$.

$$\mathcal{D}(f) \in Y, \quad \mathcal{D} \in \mathscr{L}in(X,Y)$$

$$\|\mathcal{D}(f)\| = \max_{[0,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty \le \max\{\, \|f\|_\infty, \|f'\|_\infty \,\}$$

$$\Longrightarrow \mathcal{D} \in \mathscr{B}(X,Y), \quad \|D\| \le 1$$

- Пусть $f(x) = x \in X = \mathcal{C}[0,1]^{(1)}$

$$\|f\|_\infty = 1, \quad \|f'\| = 1$$

$$\Longrightarrow \|\mathcal{D}(f)\| = 1, \quad \|f\|_X = \max\{\, \|f\|_\infty, \|f'\|_\infty \,\} = 1$$

$$\Longrightarrow \|\mathcal{D}(f)\| = \sup_{\|g\|=1} \|\mathcal{D}(g)\| \ge \|\mathcal{D}(x)\|_\infty = 1 \Longrightarrow \|\mathcal{D}\| = 1$$

1.1.2. Вложение пространств l^p, $1 \le p \le +\infty$

Теорема 1. $1 \le p_1 < p_2 \le \infty, \quad x = \{\, x_n \,\}_{n=1}^\infty \in l^{p_1}, \quad Ax = x$

$$\Longrightarrow A \in \mathscr{B}(l^{p_1}, l^{p_2}), \quad \|A\|_{\mathscr{B}(l^{p_1}, l^{p_2})} = 1$$

A называется *оператором вложения.*

Доказательство. Пусть $x = \{\, x_n \,\}_{n=1}^\infty \in l^{p_1}, \quad \|x\|_{p_1} = 1$, т. е.

$$\left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} = 1$$

- $p_2 < +\infty$

$$\frac{p_2}{p_1} > 1, \quad |x_n| \le 1 \quad \forall n \Longrightarrow |x_n|^{p_2} \le |x_n|^{p_1} \Longrightarrow \|x\|_{p_2} = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}} \le \|x\|_{p_1} = 1$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_{p_1}=1} \|Ax\|_{p_2} \le 1$$

$$\implies A \in \mathscr{B}(l^{p_1}, l^{p_2})$$

- $p_2 = +\infty$

$$x \in l^{p_1},\ \|x\|_{p_1} = 1 \implies |x_n| \le 1 \implies \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \le 1 \implies \|A\|_{\mathscr{B}(l^{p_1}, l^{p_2})} \le 1$$

Возьмём $e = (1, 0, 0, \dots)$.

$$\|e\|_p = 1 \quad \forall p$$

$$\|Ae\|_{p_2} = \|e\|_{p_1} \implies \|A\| \ge 1, \quad \|A\|_{\mathscr{B}(l^{p_1}, l^{p_2})} = 1$$

□

1.1.3. Вложение пространств $\mathrm{L}^p(\mu)$ на конечной мере

Теорема 2. $(T, \mathcal{U}, \mu)$, $\quad \mu(T) < +\infty$, $\quad 1 \le p_1 < p_2 \le +\infty$, $\quad f \in \mathrm{L}^{p_2}(\mu)$, $\quad Af = f$

$$\implies A \in \mathscr{B}(\mathrm{L}^{p_2}, \mathrm{L}^{p_1}), \quad \|A\|_{\mathscr{B}(\mathrm{L}^{p_2}, \mathrm{L}^{p_1})} = \Big(\mu(T)\Big)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}$$

Доказательство.

- $p_2 = +\infty$

  Пусть $f \in \mathrm{L}^\infty(T, \mu)$, т. е.

$$|f(x)| \le \|f\|_\infty \text{ п. в. по } \mu$$

$$\|Af\|_{p_1} = \Big(\int\limits_T |f(x)|^{p_1} \,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{p_1}} \le \|f\|_\infty \Big(\int\limits_T \mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{p_1}} = \|f\|_\infty \Big(\mu(T)\Big)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\implies A \in \mathscr{B}(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^{p_1}), \quad \|A\| \le \Big(\mu(T)\Big)^{\frac{1}{p_1}}$$

- $p_2 < +\infty$

  Пусть $f \in \mathrm{L}^{p_2}$

$$\|Af\|_{p_1} = \Big(\int\limits_T |f|^{p_1} \,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{p_1}} \underset{\substack{\text{нер-во Гёльдера} \\ p=\frac{p_2}{p_1}>1 \\ g=1,\ f=|f|^{p_1}}}{\le} \left(\Big(\int\limits_T (|f|^{p_1})^{\frac{p_2}{p_1}} \,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{p_1}{p_2}} \Big(\int\limits_T \mathrm{d}\,\mu\Big)^{1-\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} =$$

$$= \|f\|_{p_2} \cdot \Big(\mu(T)\Big)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \implies A \in \mathscr{B}(\mathrm{L}^{p_2}, \mathrm{L}^{p_1}), \quad \|A\| \le (\mu(T))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}$$

- $f = \chi_T(x) \in \mathrm{L}^p, \quad 1 \le p \le +\infty$

$$\|\chi_T\|_{\mathrm{L}^p} = \Big(\int\limits_T \chi_T(x) \,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{p}} = (\mu(T))^{\frac{1}{p}}$$

$$\|A\|_{\mathscr{B}(\mathrm{L}^{p_2}, \mathrm{L}^{p_1})} = \sup_{\substack{g\in \mathrm{L}^{p_2} \\ g \ne \mathbb{O}_n}} \frac{\|Ag\|_{p_2}}{\|g\|_{p_2}} = \sup \frac{\|g\|_{p_1}}{\|g\|_{p_2}} \ge \frac{\|\chi_T\|_{p_1}}{\|\chi_T\|_{p_2}} = (\mu(T))^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}$$

□

Замечание. Если $\mu(T) = +\infty$, то всё возможно.

Пример. $T = [0, +\infty)$, $\quad \lambda$ — мера Лебега.
Докажем, что $\mathrm{L}^1 \not\subset \mathrm{L}^2$, $\quad \mathrm{L}^2 \not\subset L^1$.

Возьмём $f(x) = \frac{1}{1+x}$

$$f \notin \mathrm{L}^1, \quad f \in \mathrm{L}^2 \quad \implies L^1 \not\subset L^2$$

Возьмём $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}$.

$$g \in \mathrm{L}^1, \quad f \notin \mathrm{L}^2 \quad \implies \mathrm{L}^1 \not\subset \mathrm{L}^2$$

1.1.4. Полнота пространства ограниченных операторов, действующих из нормированного пространства в банахово

Теорема 3. $(X, \|\cdot\|)$, $\quad (Y, \|\cdot\|)$ — банахово.
Тогда $\mathscr{B}(X,Y)$ — банахово.

Доказательство. $\{ A_n \}_{n=1}^{\infty}$, $\quad A_n \in \mathscr{B}(X,Y)$, $\quad \{ A_n \}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n, m > N \quad \|A_n - A_m\| < \varepsilon$$

Зафиксируем $x \in X$. Проверим, что $\{ A_n x \}$ фундаментальна.

$$\|A_n x - A_m x\| < \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \|x\| \implies \{ A_n x \}_{n=1}^{\infty} \text{ фундаментальна в } Y \xRightarrow[Y \text{ банахово}]{} \exists \lim_{n\to\infty} A_n x$$

Положим

$$Ax \coloneqq \lim_{n\to\infty} A_n x$$

$$A_n \in \mathscr{L}in(X,Y) \implies A \in \mathscr{L}in(X,Y)$$

Уже знаем, что $\|A_n x - A_m x\| < \varepsilon \|x\|$. Зафиксируем m и перейдём к пределу по n:

$$\|Ax - A_m x\| \le \varepsilon \|x\| \implies A - A_m \in \mathscr{B}(X,Y), \quad \|A - A_m\| \le \varepsilon \implies A \in \mathscr{B}(X,Y), \quad \lim_{m\to\infty} \|A - A_m\| = 0$$

□

1.2. Линейные непрерывные функционалы

Определение 1. $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное над полем K ($\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$).
X^* называется *сопряжённым пространством*, если

$$X^* = \mathscr{B}(X, K)$$

То есть X^* — множество линейных непрерывных функционалов.

$$f \in X^* \quad \|f\|_{X^*} = \inf \{ C > 0 \mid \ |f(x)| \le C\|x\| \}$$

Следствие. $(X, \|\cdot\|) \implies X^*$ — банахово.

Доказательство. $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ — полные. Можно воспользоваться теор. 3. □

Следствие. $f \in X^*$

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)| = \sup_{\|x\| < 1} |f(x)| = \sup_{\|x\| = 1} |f(x)| = \sup_{x \ne 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

Примеры.

1. l^p, $\quad$ зафиксируем $i \in \mathbb{N}$

$$x = \{ x_n \}_{n=1}^{\infty} \in l^p, \quad f(x) \coloneqq x_i$$

Докажем, что $f \in (l^p)^*$, $\quad \|f\|_{(l^p)^*} = 1$.

$$|f(x)| = |x_i| \le \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < +\infty$$

$$|x_i| < \sup_{n \ge 1} |x_n| = \|x\|_\infty, \quad p = +\infty$$

$$\implies f \in (l^p)^* \implies \|f\|_{(l^p)^*} \le 1$$

Возьмём $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$.

$$\|e_i\|_p = 1, \quad |f(e_i)| = 1 \implies \|f\|_{(l^p)^*} \ge 1$$

2. $X = \mathcal{C}(K)$, $\quad K$ — компакт, $\quad x_0 \in K$ — фиксирована.

$$G : \mathcal{C}(K) \to \mathbb{C} : \quad f \in \mathcal{C}(k) \quad G(f) = f(x_0) \text{ — \textit{функционал значения в точке}}$$

Докажем, что $G \in \big(\mathcal{C}(K)\big)^*$, $\quad \|G\| = 1$.

$$f \in \mathcal{C}(K) \quad |G(f)| = |f(x_0)| \le \max_{x \in K} |f(x)| = \|f\|_{\mathcal{C}(K)}$$

$$\implies G \in \big(\mathcal{C}(K)\big)^*, \quad \|G\|_{\big(\mathcal{C}(K)\big)^*} \le 1$$

Пусть $f(x) = \chi_K$.

$$\chi_K(x) \in \mathcal{C}(K), \quad \|\chi_K\|_\infty = 1, \quad |G(\chi_K)| = |\chi_K(x_0)| = 1 \implies \|G\| \ge 1$$

1.2.1. Норма интегрального функционала в $\mathcal{C}[a, b]$

Теорема 4. $\varphi(x) \in [a, b]$, $\quad \varphi(x)$ фиксирована, $\quad f \in \mathcal{C}[a, b]$.

$$G(f) := \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) \,\mathrm{d}\, x$$

$$\implies G \in \big(C[a, b]\big)^*, \quad \|G\| = \int_a^b |\varphi(x)| \,\mathrm{d}\, x$$

Доказательство.

- $f \in \mathcal{C}[a, b]$

$$|G(f)| = \Big|\int_a^b \varphi(x) \cdot f(x) \,\mathrm{d}\, x\Big| \le \int_a^b |f(x)| \cdot |\varphi(x)| \,\mathrm{d}\, x \le \|f\|_\infty \cdot \int_a^b |\varphi(x)| \,\mathrm{d}\, x \quad \forall x \implies$$

$$\implies G \in \big(\mathcal{C}[a, b]\big)^*, \quad \|G\| \le \int_a^b |\varphi(x)| \,\mathrm{d}\, x$$

- $\varphi(x) \overset{[a,b]}{>} 0$

Пусть $f(x) = \chi_{[a,b]}$.

$$\|\chi_{[a,b]} = 1$$

$$|G(\chi_{[a,b]})| = \Big|\int_a^b \varphi(x) \,\mathrm{d}\, x\Big| \underset{\varphi(x) > 0}{=\!=\!=} \int_a^b \varphi(x) \,\mathrm{d}\, x$$

- $\varphi(x) \overset{[a,b]}{\le} 0$

$$|G(\chi_{[a,b]})| = \Big|\int_a^b \varphi(x) \,\mathrm{d}\, x\Big| = \int_a^b |\varphi(x)| \,\mathrm{d}\, x$$

- φ — произвольная

$$g(x) \coloneqq \operatorname{sign}\varphi(x)$$

$$\int_a^b g\varphi = \int_a^b |\varphi(x)| \operatorname{d}x$$

$\square$