Типы уравнений первого порядка

Содержание

Уравнения, разрешённые относительно производной

I. Уравение с разделёнными переменными

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{g(x)} + \frac{\mathrm{d}\,y}{h(y)} = 0$$

$$U(x,y)=\int\frac{\mathrm{d}\,x}{g(x)}+\int\frac{\mathrm{d}\,y}{h(y)}+C$$

II. Уравнение с разделяющимися переменными

$$g_1(x)h_2(y)\,\mathrm{d}\,x+g_2(x)h_1(y)\,\mathrm{d}\,y=0$$

!!!

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)}\,\mathrm{d}\,x+\frac{h_1(y)}{h_2(y)}\,\mathrm{d}\,y=0$$

$$\left[\begin{array}{lll} g_2(x)=0 & \iff & x\equiv x_1,x_2,\dots \\ h_2(y)=0 & \iff & y\equiv y_1,y_2,\dots \end{array}\right.$$

Это решения (т. к. $\mathrm{d}\,x$ и $g_2(x)$ одновременно обратятся в 0)

III. Линейное уравнение

$$y'+p(x)y=\underbrace{q(x)}_{\text{неоднородность}},\qquad p(x),q(x)\in\mathcal{C}\big(\langle a,b\rangle\big)$$

- Если $q(x)\equiv 0$, то уравнение $y'+p(x)y=0$ называется линейным однородным (ЛОУ)
- Иначе $y'+p(x)y=q(x)$ – линейным неоднородным (ЛНУ)

$$\underset{\substack{\text{общее неоднородное}\\\text{(все реш. ЛНУ)}}}{y_{\text{ОН}}(x,C)}=\underset{\substack{\text{общее однор.}\\\text{(все реш. ЛОУ)}}}{y_{\text{ОО}}(x,C)}+\underset{\substack{\text{частное неоднор.}\\\text{(какое-то решение ЛНУ)}}}{y_{\text{ЧН}}(x,C)}$$

Алгоритм.

1. Ищем $y_{\text{ОО}}$:

$$y_{\text{ОО}}=Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}$$

> **Примечание.** Сюда, при допуске $C=0$, входит $y\equiv 0,\quad x\in\mathbb{R}$, “потерянное” при выводе этой формулы

2. Ищем $y_{\text{ЧН}}$:
Будем искать в виде

$$y_{\text{ЧН}}=C(x)\cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}$$

> **Замечание.** Эту формулу обязательно надо записать

Подставим это в ЛНУ:

$$\underbrace{C'(x)\cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}+\cancel{C(x)\cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}\cdot\big(-p(x)\big)}}_{y'_{\text{ЧН}}\text{ как производная произведения}}\cancel{+p(x)\underbrace{C(x)e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}}_{y_{\text{ЧН}}}}\equiv q(x)$$

> **Контрольная точка.** Второй и третий член **должны** сократиться

$$C'(x)=e^{\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}q(x)$$

$$C(x)=\int e^{\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}q(x)\,\mathrm{d}\,x+\underset{(C_2)}{0}$$

Подставляем в формулу для $y_{\text{ЧН}}$:

$$y_{\text{ЧН}}=\int e^{\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}q(x)\,\mathrm{d}\,x\cdot e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x}$$

Замечание. Если $p(x)$ можно проинтегрировать (т. е. $\int p(x)\,\mathrm{d}\,x = \xi(x) + C_1$), нужно вместо C_1 записать какую-то конкретную константу (читайте: ноль). Мы ведь искали **частное** решение, а не континуум

3. Ищем $y_{\text{ОН}}$:

$$y_{\text{ОН}} = y_{\text{ОО}} + y_{\text{ЧН}} = Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} + e^{-\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} \cdot \int e^{\int p(x)\,\mathrm{d}\,x} q(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Замечание. Неберущийся неопределённый интеграл нужно записывать в виде интеграла с переменным верхним пределом, в нижнем пределе которого стоит выбранная числовая константа

$$y_{\text{ОН}} = e^{-P(x)}\left(C + \int_{x_0}^{x} e^{P(s)} q(s)\,\mathrm{d}\,s\right), \qquad P(x) = \int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}\,t$$

Замечание. Не стоит здесь пользоваться готовой формулой. Нужно идти по алгоритму

IV. Уравнение Бернулли

$$y' + p(x)y + r(x)y^{\tau} = 0, \qquad p(x), r(x) \in \mathcal{C}\big(\langle a, b\rangle\big)$$

Замечание.

- При $\tau > 0$ уравнение имеет тривиальное решение $y \equiv 0, \quad x \in (a, b)$
- При $\tau = 0, 1$ – это не уравнение Бернулли, а линейное

Стандартная замена:

$$u = y^{1-\tau}, \qquad u' = (1-\tau)y^{-\tau}y'$$

Замечание. Здесь прямая замена не нужна – просто делим на y^{τ}

Получаем уравнение:

$$(1-\tau)^{-1}u' + p(x)u + r(x) = 0$$

V. Уравнение Риккати

$$y' + p(x)y + r(x)y^2 = q(x)$$

Иногда решается:

1. Если известно какое-то частное решение:
   Пусть $y = \eta(x)$ – решение уравнения на некотором промежутке, то есть

   $$\eta'(x) \equiv q(x) - p(x)\eta(x) - r(x)\eta^2(x), \qquad \text{на } \langle a, b\rangle$$

   Замена $y = z + \eta(x)$ преобразует наше уравнение в уравнение Бернулли

   $$z' - \Big(p(x) + 2r(x)\Big)z + r(x)z^2 = 0$$

2. Если $r(x) \neq 0$ на $\langle a, b\rangle$ и $r(x) \in \mathcal{C}^1\big(\langle a, b\rangle\big)$:
   Уравнение приводится к виду

   $$u' + au^2 = s(x), \qquad a \neq 0$$

   при помощи композиции двух замен:

(a) Линейная замена

$$y = \gamma(x)z, \qquad y' = \gamma' z + \gamma z', \qquad z = y\gamma^{-1}$$

позволяет сделать коэффициент при квадратичном члене ненулевой константой

(b) Сдвигающая замена

$$z = u + \delta(x), \qquad z' = u' + \delta' x', \qquad u = z - \delta$$

позволяет аннулировать линейный член, сохраняя коэффициент при z^2 неизменным

3. Если уравнение имеет вид

$$u' = au^2 + cx^\sigma, \qquad \sigma \neq 0, -2$$

Оно называется специальным уравнением Риккати

> **Замечание.** При $\sigma = 0$ – это уравнение с разделяющимися переменными, а при $\sigma = -2$ – обобщённо-однородное
> В последнем случае замена
>
> $$u = x^{-1}v^{-1}$$
>
> сводит уравнение к уравнению с разделяющимися переменными
>
> $$xv' = -(cv^2 + v - a)$$

Специальное уравнение Риккати интегрируется в квадратурах **тогда и только тогда**, когда

$$k = \frac{\sigma}{2\sigma + 4} \in \mathbb{Z} \quad (k \neq 0), \qquad \text{то есть} \quad \sigma = \frac{4k}{1 - 2k} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

> **Алгоритм.**
>
> (a) Сделаем замену обеих переменных:
>
> $$\begin{cases} x = t^{1/2 - k} = t^{\frac{1}{\sigma+2}}, & t = x^{\frac{2}{1-2k}} > 0 \\ u = z(t)t^{k - 1/2} = zt^{-\frac{1}{\sigma+2}}, & z = ux \end{cases}$$
>
> $$\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}(zt^{k-\frac{1}{2}})}{\mathrm{d}\,t} \cdot \frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,x} = \frac{t^{k-\frac{1}{2}}\dot{z} + (k - 1/2)t^{k-3/2}z}{(1/2 - k)t^{-1/2 - k}} = \frac{t^{2k}}{1/2 - k}\dot{z} - t^{2k-1}z$$
>
> Получаем уравнение
>
> $$t\dot{z} + \left(k - \frac{1}{2}\right)z + a_0 z^2 = c_0 t, \qquad a_0 \coloneqq \left(\frac{1}{2} - k\right)a, \quad c_0 \coloneqq \left(\frac{1}{2} - k\right)c$$
>
> Это уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными, если коэффициент при линейном члене равен $-1/2$
>
> (b) "Обнуляем" k:
> В зависимости от знака k используется одна из замен, сохраняющих структуру уравнения и позволяющих уменьшать $|k|$ на 1:
>
> - $k > 0$:
>
> $$z = a^{-1} + tv_1^{-1}, \qquad \dot{z} = v_1^{-1} - tv_1^{-2}\dot{v}_1, \qquad v_1 = t(x - a^{-1})^{-1}$$
>
> - $k < 0$:
>
> $$z = t(v_1 + d)^{-1}, \qquad \dot{z} = (v_1 + d)^{-1} - t(v_1 + d)^{-2}\dot{v}_1, \qquad v_1 = tz^{-1} - d$$
>
> $$d \coloneqq \left(\frac{1}{2} + k\right)\left(\frac{1}{2} - k\right)^{-1} c^{-1}$$
>
> В результате нескольких таких замен придём к уравнению
>
> $$t\dot{v}_k + \left(-\frac{1}{2}\right)v_k + a_k v_k^2 = c_k t$$

(c) Завершающая замена

$$v_k = t^{1/2}w, \qquad \dot{v_k} = \frac{t^{-1/2}w}{2} - t^{1/2}\dot{w}, \qquad w = t^{-1/2}v_k$$

приводит уравнение к уравнению с разделяющимися переменными

$$t^{1/2}\dot{w} = a_k w^2 - c_k$$

VI. Однородное уравнение

Определение 1. $h(x,y)$ называется однородной функцией степени k, если $h(sx,sy) = s^k h(x,y)$

Уравнения

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{и} \qquad M(x,y)\,\mathrm{d}\,x + N(x,y)\,\mathrm{d}\,y, \qquad M,N \text{ – однородные порядка } k$$

называются однородными (порядка 0)
То есть, уравнение однородное, если каждое его слагаемое имеет одну и ту же суммарную степень по x и y
Стандартная замена:

$$y(x) = u(x)x, \qquad \left[\begin{array}{l} y' = u'x + u \\ \mathrm{d}\,y = u\,\mathrm{d}\,x + x\,\mathrm{d}\,u \end{array}\right., \qquad u = x^{-1}y$$

Контрольная точка. После замены **каждое** слагаемое должно содержать x^k

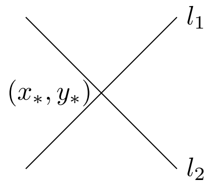
Сокращаем на x^k, группируем слагаемые при $\mathrm{d}\,x$ и $\mathrm{d}\,y$ – получаем уравнение с разделяющимися переменными

VII. Дробно-линейное уравнение

$$y' = \left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

Числитель и значенатель задают прямые, пусть $l_1 = a_1x + b_1y + c_1, \quad l_2 = a_2x + b_2y + c_2$
Возможны два случая:

- $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$



Пусть (x_*, y_*) – решение системы

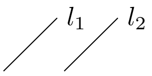
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

или, что то е самое, точка пересечения прямых l_1 и l_2
После сдвига начала координат в точку (x_*, y_*) прямые не будут иметь свободных членов
Итак, после замены

$$u = x - x_*, \qquad v = y - y_*, \qquad \mathrm{d}\,u = \mathrm{d}\,x, \qquad \mathrm{d}\,v = \mathrm{d}\,y$$

или $y'(x) = v'(u)$ получаем однородное уравнение

$$v' = h\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right)$$



- $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$
  Тогда $b_1 \neq 0$ и $\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{a_2}{a_1} = k$
  В этом случае замена
  $$u = a_1 x + b_1 y, \qquad y = \frac{1}{b_1}(u - a_1 x), \qquad y' = \frac{1}{b_1}(u' - a_1)$$
  сразу приводит уравнение к уравнению с разделяющимися переменными:
  $$u' = b_1 h\left(\frac{u + c_1}{ku + c_2}\right) + a_1$$

VIII. Обощённо-однородное уравнение

Определение 2. Уравнение называется обощённо-однородным, если каждое его слагаемое имеет один и тот же суммарный порядок по x и y при условии, что $x, \mathrm{d}\,x$ имеют порядок 1, а $y, \mathrm{d}\,y$ – порядок $m \neq 0$

Тогда $y' = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}$ имеет порядок $m - 1$
Аргументы входящих в уравнение функций типа логарифма или тригонометрических должны иметь нулевой порядок
Таким образом, чтобы установить, является ли уравнение обобщённо-однородным, надо приравнять порядки всех слагаемых, получая систему многих уравнений с одной неизвестной m. Если повезёт, такое число m найдётся. Тогда замена
$$y = z^m, \qquad y' = mz^{m-1}z', \qquad z = y^{1/m}$$
сведёт уравнение к однородному, но не всегда:

Проблема Проблема возникает, когда y может принимать значения разных знаков (ОДЗ этого не запрещает), и отсутсвует инвариантность относительно замены $y = -\widetilde{y}$

В таком случае надо отдельно проверить $y(x) \equiv 0$
Дальше возможно три случая:

- Общий:
  Замена
  $$y = (xu)^m, \qquad y' = m(xu)^{m-1}(u + xu'), \qquad u = x^{-1}y^{1/m}$$
  приведёт к уравнению с разделяющимися переменными (но придётся решить два раза для разных знаков y)

- Если $\exists\, q \in \mathbb{Z} : m = 2q$
  Делаем замену
  $$y = x^{2q}u, \qquad y' = 2qx^{2q-1}u + x^{2q}u', \qquad u = x^{-2q}y$$
  Она не фиксирует знак y, так что не придётся решать уравнение второй раз
  Также получаем сразу уравнение с разделяющимися переменными

- Если $\exists\, q \in \mathbb{Z} : m = (2q)^{-1}$, при этом x тоже меняет знак, и отсутсвует инвариантность относительно замены $x = -\widetilde{x}$
  Надо сделать замену
  $$y = |x|^{\frac{1}{2q}}u, \qquad y' = \sigma\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,|x|} = \sigma\left((2q)^{-1}|x|^{\frac{1}{2q}-1}u + |x|^{\frac{1}{2q}}u'\right), \quad \text{где } u' = \frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,|x|}, \qquad u = |x|^{-\frac{1}{2q}}y$$
  где $\sigma = \operatorname{sign} x$
  Получается уравнение с разделяющимися переменными и параметром σ

Контрольная точка. В ответе не должно остаться σ (т. е. каждая σ должна "найти" свой $|x|$)

> **Примечание.** $\sigma|x| = x$

IX. Уравнение в полных дифференциалах

$$M(x,y)\,\mathrm{d}\,x + N(x,y)\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{1}$$

Определение 3. Уравнение (1) называется уравнением в полных дифференциалах (УПД), если

$$\exists U(x,y) \in \mathcal{C}^1(B) : \quad \begin{cases} U'_x = M \\ U'_y = N \end{cases}$$

Если нашлась такая U, то $U(x,y) \equiv C$ – ответ

Утверждение 1. Уравнение (1) является УПД **тогда и только тогда**, когда

$$M'_y - N'_x \equiv 0 \quad \text{локально} \tag{2}$$

Проверяем (2)

Ищем U:

$$\begin{aligned} U'_x = M \implies & \quad U(x,y) = \int M(x,y)\,\mathrm{d}\,x + C(y) \\ U'_y = N \implies & \quad \left(\int M(x,y)\,\mathrm{d}\,x\right)'_y + C'(y) = N(x,y) \\ C(y) = & \int N(x,y)\,\mathrm{d}\,y + \int \left(\int M(x,y)\,\mathrm{d}\,x\right)'_y \mathrm{d}\,y + 0 \end{aligned} \tag{3}$$

или

$$\begin{aligned} U'_y = N \implies & \quad U(x,y) = \int N(x,y)\,\mathrm{d}\,y + C(x) \\ U'_x = M \implies & \quad \left(\int N(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right)'_x + C'(x) = M(x,y) \\ C(y) = & \int M(x,y)\,\mathrm{d}\,x + \int \left(\int N(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right)'_x \mathrm{d}\,x + 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Подставляем $C(y)$ в первое выражение, получаем $U(x,y)$

Контрольная точка. В (3) и (4) **не** должно остаться x

> **Замечание.** Может оказаться, что $C' \equiv 0$. Тогда можно считать, что $C(y) \equiv 0$ (нужна ведь произвольная константа)

X. Поиск интегрирующего множителя

$$M(x,y)\,\mathrm{d}\,x + N(x,y)\,\mathrm{d}\,y = 0$$

Если это не УПД, то есть $M'_y - N'_x \not\equiv 0$, то можно попытаться найти интегрирующий множитель
Это будет $\mu(x,y) \in \mathcal{C}^1(B^0)$, такая что

$$\mu M\,\mathrm{d}\,x + \mu N\,\mathrm{d}\,y = 0$$

станет УПД, то есть

$$N\mu'_x - M\mu'_y = (M'_y - N'_x)\mu$$

Это уравнение мат. физики. Его можно попытаться решить:
Пусть μ – функция от ω:

$$\mu(\omega) = \mu\Big(\omega(x, y)\Big), \qquad \mu'_x = \frac{\mathrm{d}\,\mu}{\mathrm{d}\,\omega}\omega'_x, \qquad \mu'_y = \frac{\mathrm{d}\,\mu}{\mathrm{d}\,\omega}\omega'_y$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\mu}{\mathrm{d}\,\omega} = \frac{\overbrace{M'_y - N'_x}^{A}}{N\omega'_x - N\omega'_y} \cdot \mu(\omega)$$

Нужно подобрать ω так, чтобы A зависело от ω
Если подобрали, то

$$\frac{\mathrm{d}\,\mu}{\mathrm{d}\,\omega} = A(\omega)\mu$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\mu(\omega) = 1 \cdot e^{\int A(\omega)\ \mathrm{d}\,\omega}$$

Как выбрать ω:

- $\omega = x$
$$A(x) \stackrel{?}{=} \frac{M'_y - N'_x}{N}$$
- $\omega = y$
$$A(y) \stackrel{?}{=} \frac{M'_y - N'_x}{-M}$$
- $\omega = x^\alpha y^\beta$ или $\omega = x^\alpha \pm y^\beta$
Подставляем, например, $\alpha = 1$, и подбираем β так, чтобы привелись подобные

Уравнения, не разрешённые относительно производной

$$F(x, y, y') = 0, \qquad D \in \mathcal{C}\big(W\big), \qquad W \text{ связно}$$

Варианты решения:

1. Свести к
$$y' = f_k(x, y), \qquad k = 1, 2, ...$$
k может быть сколько угодно – конечное число (например, если уравнение содержало y'^2), счётно (например, $\sin y'$) или континуум
Каждое из них решаем как обычно

2. Свести к
   (a) $y = g(x, y')$
   Положим $p = y'$, тогда $\mathrm{d}\,y = p\,\mathrm{d}\,x$. Подставим:
$$y = g(x, p) \tag{5}$$
   Берём дифференциалы от левой и правой частей:
$$\Big(g'_x(x, p) - p\Big)\,\mathrm{d}\,x + g'_p(x, p)\,\mathrm{d}\,p = 0$$
   Как правило, левая часть раскладывается на множители:
$$\chi(x, p)\Big(M(x, p)\,\mathrm{d}\,x + N(x, p)\,\mathrm{d}\,p\Big) = 0 \tag{6}$$
   где равенство $\chi(x, p) = 0$ задаёт особые решения в неявном виде, а уравнение в симметричной форме $M\,\mathrm{d}\,x + N\,\mathrm{d}\,p = 0$ предстоит решить

> **Совет** На этом моменте надо забыть, что $p = y'$ – исходное уравнение мы уже проинтегрировали

Если (6) решается только относительно:

p. Решения будут иметь вид

$$\left[\begin{array}{ll} p = \varphi(x, C) & \\ p = \varphi_k(x), & k = 0, 1, \ldots \end{array}\right.$$

где $\varphi_0(x)$ – решение уравнения $\chi(x, p) = 0$, а φ_k – решения, не попавшие в формулу $p = \varphi(x, C)$

Подставим в (5):

$$\left[\begin{array}{l} y = g\Big(x, \varphi(x, C)\Big) \\ y = g\Big(x, \varphi_k(x)\Big) \end{array}\right.$$

x. Аналогично:

$$\left[\begin{array}{l} x = \psi(p, C) \\ x = \psi_k(p) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \psi(p, C) \\ y = g\big(\psi(p, C), p\big) \end{cases} \\ \begin{cases} x = \psi_k(p) \\ y = g\big(\psi_k(p), p\big) \end{cases} \end{array}\right.$$

Если уравнение можно решить и относительно x, и относительно p, то надо решать относительно p

> **Решение ЗК** Если сразу подставить начальные данные x_0, y_0 в формулу общего решения, записанного в параметрическом виде, то придётся решать двумерную систему относительно p и C
>
> Лучше сначала найти значения p, отвечающие выбранным начальным данным. Для этого надо подставить x_0, y_0 в равенство (5) и найти $p_1, p_2, \ldots$ – корни полученного уравнения, после чего для всякого m из уравнения $x_0 = \psi(p_m, C)$ найти константы C_m
>
> > **Контрольная точка.** Сожно проверить выполнение равенства:
> >
> > $$y_0 = g\Big(\psi(p_m, C_m), p_m\Big)$$

(b) $x = h(y, y')$

Положим $y' = p$, $\quad \mathrm{d}\, x = p^{-1} \,\mathrm{d}\, y$

!!!

Дифференцируем равентво $x = h(y, p)$:

$$\Big(h'_y(y, p) - p^{-1}\Big) \,\mathrm{d}\, y + h'_p(y, p) \,\mathrm{d}\, p = 0$$

Надо проверить, будет ли функция $y(x) = C$ при каких-либо C решением

3. Если $F(x, y') = 0$ или $F(y, y') = 0$, то ищем $\xi(t), \mu(t)$ такие, что

$$F\Big(\xi(t), \mu(t)\Big) \overset{t}{\equiv} 0$$

Если нашлись, то уравнение можно проинтегрировать в общем виде:

(a) Если $F(y, y') = 0$ и допускает параметризацию аргументов y и $y' = p$ ($\mathrm{d}\, y = p \,\mathrm{d}\, x$) функциями t:

$$y = \varphi(t), \qquad p = \psi(t), \qquad F\Big(\varphi(t), \psi(t)\Big) \equiv 0$$

Интегрируя равенство $y = \varphi(t)$, поулчаем:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\, y = p \,\mathrm{d}\, x = \psi(t) \,\mathrm{d}\, x \\ \mathrm{d}\, y = \varphi'(t) \,\mathrm{d}\, t \end{cases}$$

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} \,\mathrm{d}\, t + C, \qquad y = \varphi(t)$$

(b) Если $F(x, y') = 0$ – аналогично

Уравнения высокого пордяка

XI. Общий случай

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}), \qquad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Существует 4 способа понизить порядок:

1. Нет первых нескольких производных:

   $$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}), \qquad 1 \leq k \leq n$$

   (если $k = 1$, то нет y)
   Замена:

   $$z = y^{(k)}, \qquad z' = y^{(k+1)}, \qquad \dots\dots\dots$$

   Порядок понижается на k:

   $$f(x, z, z', \dots, z^{(n-k)})$$

   $$z = z(x, C_1, \dots, C_{n-k}), \qquad y^{(k)} = z(y, C_1, \dots, C_{n-k})$$

2. Нет x:

   $$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

   y становится независимой переменной:

   $$y'(x) = p(y)$$

   Обязательно пишем ОДЗ на замену: $y \overset{?}{\equiv} C$

   $$y''(x) = \frac{\mathrm{d}\, y'(x)}{\mathrm{d}\, x} = \frac{\mathrm{d}\, p(y)}{\mathrm{d}\, y} \cdot \frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} = p'(y) \cdot p(y)$$

   $$y'''(x) = \dots\dots\dots\dots = \Big(p''(y)p(y) + p'^2(y)\Big) \cdot p(y)$$

   Получаем уравнение на порядок ниже:

   $$\widetilde{F}(y, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0$$

   $$p = p(y, C_1, \dots, C_{n-1}), \qquad y' = p(y, C_1, \dots, C_{n-1})$$

   !!!

   $$p^{-1}(y, C_1, \dots, C_{n-1}) \,\mathrm{d}\, y = \mathrm{d}\, x \qquad\qquad p(y, C_1, \dots, C_{n-1}) = 0$$

3. Однородное относительно $y, y', \dots, y^{(n)}$ порядка k (x не влияет):
   Замена $y' = z(x)y$

   $$y'' = z'y + zy' = (z' + z^2)y, \qquad y''' = \dots\dots = (z'' + 3zz' + z^3)y$$

   $$\widetilde{F}(x, z, \dots, z^{(n-1)}) = 0, \qquad z = z(x, C_1, \dots, C_{n-1})$$

   Получаем ЛОУ:

   $$y' = z(x, C_1, \dots, C_{n-1})y$$

!!!

$y \equiv 0$

$$\ln \frac{y}{C_n} = \int z \,\mathrm{d}\, x$$
$$y = C_n^{\sigma}, \qquad \sigma = 1, -1$$

4. ООУ относительно всех переменных:
   Каждое слагаемое имеет суммарный порядок s, если счиать, что x имеет порядок 1, $\quad y$ имеет порядок m, $\quad y'$ имеет порядок $m-1$, и т. д.
   Замена:
   $$x = e^t > 0, \qquad y = u(t)e^{mt}$$
   Смотрим инвариантность. Если нет, то смотрим на порядок выше — там скорее всего будет
   Возвратная замена:
   $$t = \ln x, \qquad u(t) = yx^{-m}$$
   $$y' = (\dot{u} + mu)e^{(m-1)t}, \qquad y'' = \Big(\ddot{u} + (2m-1)\dot{u} + m(m-1)u\Big)e^{(m-2)t}$$
   $$\widetilde{F}(\overset{(n)}{u}, \dots) = 0$$

   Контрольная точка. Всё делится на e^{st}

   Получаем случай 2

XII. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\underbrace{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_n y}_{L(y)} = 0$$

Его *характеристическое уравнение*:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n \equiv 0$$

Нам нужны n различных вещественных ЛНЗ решений φ_i.

Характеристическое уравнение имеет n корней. Однако, некоторые из них могут совпасть:

1. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\quad \beta > 0$ — пара комплексно-сопряжённых корней. Тогда существует 2 вещественных ЛНЗ решения:
   $$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad e^{\alpha x}\sin\beta x$$
2. λ — корень кратности k. Тогда существует k ЛНЗ решений:
   $$e^{\lambda x}, \quad xe^{\lambda x}, \quad \dots, \quad x^{k-1}e^{\lambda x}$$
3. $\{\,\lambda_i\,\}$ — различные вещественные ЛНЗ корни. Тогда $\varphi_i = e^{\lambda_i x}$.

Имея n различных ЛНЗ вещественных корней, можем выписать решение ЛОУ:

$$y = C_1\varphi_1 + \dots + C_n\varphi_n$$

XIII. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$Ly = q(x)$$

Метод вариации

$phi_1(x), \ldots, phi_n(x)$ — фундаментальная система решений ЛОУ. Будем искать решение ЛНУ в виде

$$y_{\text{чн}} = y_{\text{оо}} + \psi(x), \qquad \psi(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + \cdots + C_n(x)\varphi_n(x)$$

Находим $C_i(x)$ из системы

$$\begin{cases} C_1'\varphi_1 + \cdots + C_n'\varphi_n = 0 \\ C_1\varphi_1' + \cdots + C_n'\varphi_n' = 0 \\ \ldots \\ C_1'\varphi_1^{(n-2)} + \cdots + C_n'\varphi_n^{(n-2)} = 0 \\ C_1'\varphi_1^{(n-1)} + \cdots + C_n'\psi[n-1]\varphi_n \equiv q(x) \end{cases}$$

Метод неопределённых коэффициентов

Можно применить, если

$$q(x) = e^{\alpha x}\big(P_k(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x\big)$$

Находим *характеристическое число* $\lambda_0 = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $\quad m = \max\{\,k, l\,\}$, $\quad s$ — кратность λ_0 как корня характеристического уравнения. Частное решение будет иметь вид

$$\psi(x) = x^s e^{\alpha x}\big(\widetilde{P}_m(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_m\sin\beta x\big)$$

При этом, неоднородность делим на части, к некоторым применяем метод неопределённых коэффициентов, к оставшемуся — вариацию.

XIV. Уравнение Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = q(x)$$

Делаем замену $x = e^t > 0$, $\quad y(x) = y(t)$.

$$y' = \dot{y}e^{-t}, \quad y'' = (\ddot{y} - \dot{y})e^{-2t}$$

Если x может принимать отрицательные значения, действуем по-другому:

1. Если $q(x)$ — чётная функция, то можно сделать ту же замену, но в ответе вместо x написать $|x|$.
2. Если $q(x)$ — нечётная функция, то введём обозначение: $x = \sigma|x|$. Тогда замена $|x| = e^t$, $\quad t = \ln|x|$ приведёт уравнение к такому же, но с параметром σ.

   > **Контрольная точка.** В ответе σ не останется, так как она умножится на $|x|$.

3. Иначе придётся сделать дополнительную замену $x = -e^t$.

Системы ОДУ

TODO: Системы