

Оглавление

1	Пространства	2
1.1	Компакты в метрических пространствах	2
1.1.1	Свойства вполне ограниченных множеств	3
1.1.2	Лемма о разбиении	3
1.1.3	Теорема Хаусдорфа	4
1.2	Относительно компактные множества в $\mathcal{C}(K)$	5

Глава 1

Пространства

1.1. Компакты в метрических пространствах

Замечание. Если A вполне ограничено, то A ограничено.

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 1$.

$$\exists F = \{x_j\}_{j=1}^n - 1\text{-сеть, т. е. } A \subset \bigcup_{j=1}^n B_1(x_j) \implies A \text{ ограничено}$$

□

Примеры.

1. $A \subset \mathbb{R}^n$ (или \mathbb{C}^n)

Докажем, что если A ограничено, то A вполне ограничено.

A ограничено $\implies \exists M > 0 : \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in A \quad |x_j| \leq M$. Пусть $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_j| \leq M\}$.

$$Q = \bigcup_{j=1}^N Q_j, \quad \text{diam } Q_j < \varepsilon, \quad F = \{\text{вершины } Q_j\}$$

$\implies F - \varepsilon\text{-сеть.}$

2. l^2

$$D = \left\{ x = \{x_j\}_{j=1}^\infty \mid \|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 1 \right\}$$

D ограничено. Проверим, что оно **не** вполне ограничено.

Рассмотрим $e_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0)$.

$$\|e_j - e_i\|_2 = \sqrt{2}$$

Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

$$B_{\frac{1}{2}}(e_j) \cap B_{\frac{1}{2}}(e_i) = \emptyset$$

$F - \frac{1}{2}\text{-сеть для } D$.

$$\implies \forall j \quad \exists f_j \in F \cap B_{\frac{1}{2}}(e_j)$$

$f \neq f_i \implies \{f_j\}_{j=1}^\infty \subset F \implies F$ бесконечно — \nsubseteq (бесконечной ε -сети не бывает).

3. l^2

$$\Pi = \left\{ x = \{x_j\}_{j=1}^\infty \mid |x_j| \leq \frac{1}{2^j} \right\} - \text{гильбертов кирпич}$$

(в \mathbb{R}^3 так устроены кирпичи). Проверим, что Π вполне ограничено.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^j} \right)^{\frac{1}{2}} \right) < \varepsilon$$

$$\Pi^* = \left\{ x = (x_1, \dots, x_N, 0, \dots) \mid |x_j| \leq \frac{1}{2^j} \right\}$$

Можно считать, что $\Pi^* \subset \mathbb{R}^N$ (если отбросить нулевые координаты). Тогда $\mathbb{R}^N \subset l^2 \implies \exists F$ — конечная ε -сеть, $F \subset \mathbb{R}^N$.

Проверим, что F — 2ε -сеть для Π . Возьмём $x \in \Pi$.

$$x = (x_1, \dots, x_N, x_{N+1}, \dots) = \underbrace{(x_1, \dots, x_N, 0, \dots)}_y + \underbrace{(0, \dots, 0, x_{N+1})}_z$$

$$\|z\|_2 = \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \text{ в силу выбора } N$$

$$\exists f \in F : \|y - f\|_2 < \varepsilon \text{ т. к. } y \in \Pi^*$$

$$\|x - f\|_2 = \|(y - f) + z\|_2 \stackrel{\Delta}{\leq} \|y - f\| + \|z\| < 2\varepsilon$$

1.1.1. Свойства вполне ограниченных множеств

Свойства. (X, ρ)

1. $A \subset X$, A вполне ограничено $\implies \overline{A}$ вполне ограничено.
2. $A \subset Y \subset X$, A вполне ограничено в X $\implies A$ вполне ограничено в Y .
3. A вполне ограничено $\implies A$ сепарабельно.

Доказательство.

1. Пусть $\varepsilon > 0$, F — конечная ε -сеть для A .

Проверим, что F — 2ε -сеть для \overline{A} . Возьмём $x \in \overline{A}$. Пусть $x \in \overline{A} \implies \exists y \in A$; $\rho(x, y) < \varepsilon$.

$$\exists f \in F : \rho(y, f) < \varepsilon \implies \rho(x, f) \stackrel{\Delta}{\leq} \rho(x, y) + \rho(y, f) < 2\varepsilon$$

2. Пусть $\varepsilon > 0 \implies \exists \{x_j\}_{j=1}^n$ — ε -сеть для A , т. е. $A \subset \bigcup_{j=1}^n B_\varepsilon(x_j)$.

Пусть $y_j \in A \cap B_\varepsilon(x_j)$ (если $A \cap B_\varepsilon(x_j) = \emptyset$, то забудем об этом j).

$$E = \{y_j\}_{j=1}^n — 2\varepsilon\text{-сеть для } A, \quad E \subset A \subset Y$$

Возьмём $x \in A$.

$$\exists x_j : \rho(x, x_j) < \varepsilon, \quad \rho(x_j, y_j) < \varepsilon \implies \rho(x, y_j) \leq \rho(x, x_j) + \rho(x_j, y_j) < 2\varepsilon$$

3. Пусть F_n — конечная $\frac{1}{n}$ -сеть. Пусть $E = \bigcup F_n \implies E$ всюду плотно в $A \implies A$ сепарабельно.

□

1.1.2. Лемма о разбиении

Лемма 1. (X, ρ) , $\varepsilon > 0$, $A \subset X$, \exists конченая ε -сеть для A .

$$\implies A = \bigcup_{j=1}^n C_j, \quad C_j \cap C_i = \emptyset, \quad C_j \neq \emptyset, \quad \operatorname{diam} C_j \leq 2\varepsilon$$

$$(\text{diam } B = \sup_{x,y \in B} \rho(x,y))$$

Доказательство.

$$\exists \{x_j\}_{j=1}^n : A \subset \bigcup_{j=1}^n B_\varepsilon(x_j)$$

$$C_1 := A \cap B_\varepsilon(x_1)$$

$$C_2 := (A \cap B_\varepsilon(x_2)) \setminus C_1$$

...

$$C_j = (A \cap B_\varepsilon(x_j)) \setminus (C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{j-1})$$

Пустые C_j не рассматриваем. \square

1.1.3. Теорема Хаусдорфа

Теорема 1 (описание компактных множеств в терминах вполне ограниченности). $(X, \rho), A \subset X$

$$A \text{ — компакт} \iff \begin{cases} (A, \rho) \text{ — полное} \\ A \text{ вполне ограничено} \end{cases}$$

Доказательство.

• \implies

— Проверим полноту.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна в A . Т. к. A — компакт,

$$\exists \{x_{n_j}\}_{j=1}^\infty : \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = a, a \in A$$

По одному из свойств фундаментальных последовательностей, $\lim x_n = a \implies (A, \rho)$ — полное.

— Проверим вполне ограниченность.

Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$A \subset \bigcup_{x \in A} B_\varepsilon(x)$$

A — компакт $\implies \exists \{x_j\}_{j=1}^n, x_j \in A : A \subset \bigcup_{j=1}^n B_\varepsilon(x_j) \implies \{x_j\}_{j=1}^n$ — ε -сеть.

• \Leftarrow

Возьмём $\{x_n\}_{n=1}^\infty, x_n \in A$. Докажем, что $\exists \{x_{n_j}\} : \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = A$.

Возьмём $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$. Воспользуемся леммой о разбиении:

$$\exists \text{ конечная } \frac{1}{2}\text{-сеть} \implies \exists \left\{ C_j^{(1)} \right\}_{j=1}^{N_1} : A = \bigcup_{j=1}^{N_1} C_j^{(1)}, \text{ diam } C_j^{(1)} \leq 1$$

Существует $C_{j_1}^{(1)}$, содержащая бесконечное число элементов $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Обозначим $A_1 = C_{j_1}^{(1)}$.

Возьмём $\varepsilon_2 = \frac{1}{3}$, \exists конечная ε_2 -сеть.

$$A_1 = \bigcup_{j=1}^{N_2} C_j^{(2)}, \text{ diam } C_j^{(2)} \leq 2\varepsilon_2 = \frac{2}{3}$$

Среди них есть $C_{j_2}^{(2)}$, содержащий бесконечное число элементов $\{x_n\}$. Обозначим $A_2 = C_{j_2}^{(2)}$.

Получим $\{A_m\}_{m=1}^\infty$, каждое из которых содержит бесконечное число элементов $\{x_n\}$.

$$A_{m+1} \subset A_m, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \text{diam } A_m = 0$$

Пусть $x_{n_1} \in A_1$.

$$\exists n_2 > n_1 : x_{n_2} \in A_2, \dots, \exists n > n_{m-1} : x_{n_m} \in A_m$$

$$\Rightarrow \forall j > m \quad x_{n_j} \in A_m \Rightarrow \rho(x_{n_j}, x_{n_m}) \leq \text{diam } A_m \Rightarrow \{x_{n_m}\} \text{ фундаментальна}$$

$$A - \text{полное} \Rightarrow \exists \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_m} = a \in A \Rightarrow A - \text{компакт.}$$

□

Следствие. (X, ρ) , $A \subset X$, A относительно компактно.

Тогда A вполне ограничено.

Доказательство. A относительно компактно $\Rightarrow \overline{A}$ компактно $\xrightarrow{\text{теорема}} \overline{A}$ вполне ограничено $\Rightarrow A$ вполне ограничено. □

Следствие. (X, ρ) — полное, A вполне ограничено.

Тогда A относительно компактно.

Доказательство. (X, ρ) — полное $\Rightarrow \overline{A}$ — полное $\xrightarrow{\text{теорема, } A \text{ вполне ограничено}} \overline{A}$ — компакт $\Rightarrow A$ относительно компактно. □

Следствие. (X, ρ) — полное, $A \subset X$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ относительно компактная } \varepsilon\text{-сеть для } A$$

$$\Rightarrow A \text{ относительно компактно (и вполне ограничено)}$$

Доказательство. Возьмём $\varepsilon > 0$. Пусть H_ε — относительно компактная ε -сеть для A .

$$\begin{aligned} \Rightarrow H_\varepsilon \text{ вполне ограничено} &\Rightarrow \exists F \text{ — конечная } \varepsilon\text{-сеть для } H_\varepsilon \Rightarrow \\ &\Rightarrow F \text{ — } \varepsilon\text{-сеть для } A \Rightarrow A \text{ вполне ограничено} \Leftrightarrow A \text{ относительно компактно} \end{aligned}$$

□

1.2. Относительно компактные множества в $\mathcal{C}(K)$

(K, ρ) — метрический компакт, $\mathcal{C}(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{C} \text{ (или } \mathbb{R}) \mid f \text{ непрерывна}\}$

Определение 1. $\Phi \subset \mathcal{C}(K)$.

Φ равностепенно непрерывно, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x, y \in K : \rho(x, y) < \delta \quad \forall f \in \Phi \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Теорема 2 (Асколи-Арцела). $\Phi \subset \mathcal{C}(K)$.

Φ относительно компактно тогда и только тогда, когда

1. Φ ограничено в $\mathcal{C}(K)$;
2. Φ равностепенно непрерывно.

Доказательство. $\mathcal{C}(K)$ — полное. Значит,

$$\Phi \text{ относительно компактно} \iff \Phi \text{ вполне ограничено}$$

• \Rightarrow

Φ вполне ограничено $\implies \Phi$ ограничено, т. е.

$$\exists M > 0 : \forall f \in \Phi \quad \forall x \in K \quad |f(x)| \leq M$$

□