

Оглавление

1 Пространства	2
1.1 Метрические пространства	2
1.2 Банаховы пространства	2
1.2.1 Основные понятия	2
1.2.2 Критерий полноты	3
1.3 Пространство ограниченных функций	4
1.4 Пространства с sup-нормой	5

Глава 1

Пространства

1.1. Метрические пространства

Следствие. (X, ρ) , $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная

$$\implies \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty : \sum_{k=1}^\infty \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < +\infty$$

Доказательство. Следует из свойства 3 фундаментальных последовательностей □

Теорема 1 (о замкнутом подпространстве). (X, ρ) , $Y \subset X$ (Y называется *подпространством*)

1. (X, ρ) — полное, Y замкнуто.

Тогда (Y, ρ) полно.

2. (Y, ρ) — полное.

Тогда Y замкнуто.

Доказательство.

1. Пусть $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна в Y . Тогда она фундаментальна и в X , а X полно. Значит, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \in X$. Так как Y замкнуто, $a \in Y \implies (Y, \rho)$ — полно.

2. Пусть $\{y_n\}_{n=1}^\infty$, $y_n \in Y$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$. Проверим, что $a \in Y$.

$\{y_n\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна $\implies \exists \lim y_n \in Y$ (т. к. Y — полно). □

1.2. Банаховы пространства

1.2.1. Основные понятия

Определение 1. X — линейное пространство над полем K ($K = \mathbb{R}$ или \mathbb{C}).

$p : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *полунормой*, если

1. полуаддитивность: $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$;
2. однородность: $p(\lambda x) = |\lambda|p(x) \quad \forall \lambda \in K, x \in X$.

Свойства. (X, p) , p — полунорма, \mathcal{O}_n — ноль пространства X

1. $p(\mathcal{O}_n) = 0$;
2. $p(x) \geq 0 \quad \forall x \in X$.

Доказательство.

$$1. p(\mathbb{O}_n) = p(0 \cdot \mathbb{O}_n) \xlongequal{\text{однородность}} 0 \cdot p(\mathbb{O}_n) = 0.$$

2. Пусть $x \in X$

$$0 = p(\mathbb{O}_n) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x) \implies p(x) \geq 0$$

□

Определение 2. X — линейное пространство над \mathbb{R} или \mathbb{C} .

$p : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *нормой*, если

1. p — полуформа;
2. $p(x) = 0 \iff x = \mathbb{O}_n$.

Обозначение. $\|x\|$ — норма, $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство.

Определим метрику, порождённую нормой: $\rho(x, y) := \|x - y\|$.

Определение 3. $(X, \|\cdot\|)$ называется *банаховым*, если оно полное.

1.2.2. Критерий полноты

Определение 4.

1. X — линейное пространство над K .

$L \subset X$ называется *подпространством* (в алгебраическом смысле), если оно является линейным пространством, т. е.

$$\left. \begin{array}{l} x, y \in L \\ \alpha, \beta \in K \end{array} \right\} \implies \alpha x + \beta y \in L$$

2. $(X, \|\cdot\|)$

$L \subset X$ называется (замкнутым) подпространством, если

- (a) L — подпространство в алгебраическом смысле;
- (b) L замкнуто.

Определение 5. $(X, \|\cdot\|)$, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$S_n := \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

Говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится, если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in X$. Тогда $S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$.

Говорят, что ряд $\sum x_k$ сходится абсолютно, если $\sum \|x_k\|$ сходится.

Теорема 2 (критерий полноты нормированного пространства). $(X, \|\cdot\|)$ — полное тогда и только тогда, когда из абсолютной сходимости ряда следует его сходимость.

Доказательство.

- $\implies (X \text{ — полное})$

Возьмём $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ сходится. Применим к этому ряду критерий Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N, p \in \mathbb{N} : \quad \|x_{n+1}\| + \dots + \|x_{n+p}\| < \varepsilon$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

Требуется доказать, что S_n образуют фундаментальную последовательность. Для этого оценим норму разности:

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=1}^p x_{n+k} \right\| \stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{k=1}^p \|x_{n+k}\| < \varepsilon$$

- \Leftarrow (абсолютно сходящийся ряд сходится)

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна. Нужно доказать, что у неё есть предел.

Воспользуемся следствием из начала лекции:

$$\begin{aligned} \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty : \quad & \sum_{k=1}^\infty \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < +\infty \\ \implies & \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^\infty \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < +\infty \end{aligned}$$

Рассмотрим ряд без нормы:

$$\begin{aligned} \exists S = x_{n_1} + \sum_{k=1}^\infty (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \\ S_m = x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \cdots + (x_{n_m} - x_{n_{m-1}}) = x_{n_m} \end{aligned}$$

При этом,

$$\exists \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S \implies \exists \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_m} = S \xrightarrow[\text{св-во фунд, посл. 2}]{} \lim x_n = S$$

□

1.3. Пространство ограниченных функций

Определение 6. X — множество.

$m(X)$ — пространство ограниченных функций:

$$m(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C}) \mid \sup_{x \in X} |f(x)| < +\infty \right\}$$

Норма на таком пространстве называется *равномерной, чебышёвской или sup-нормой*:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Теорема 3. $m(X)$ — банахово пространство.

Доказательство.

1. Проверим, что $\|f\|_\infty$ удовлетворяет аксиомам нормы:

$$\|f\|_\infty = 0 \iff \sup_{x \in X} |f(x)| = 0 \iff f(x) \equiv 0 \iff f = \mathbb{O}_n$$

$$\lambda \in K, \quad \|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in X} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$$

Пусть $f, g \in m(X)$, x фиксирован. Тогда $f(x), g(x)$ — числа.

$$\|f\|_\infty + \|g\|_\infty \geq \implies |f(x)| + |g(x)| \stackrel{\Delta}{\geq} |f(x) + g(x)| \quad \forall x \in X$$

В силу произвольности x ,

$$\implies \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| = \|f + g\|_\infty$$

2. Проверим полноту.

Возьмём фундаментальную последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ (в смысле нормы $\|\cdot\|_\infty$).

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m > N \quad \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad (1.1)$$

Зафиксируем $x \in X$.

$$(1.1) \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Из полноты K следует, что $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Обозначим $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ (*помочечный*).

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \text{ при фиксированном } x, \quad n, m > N$$

Перейдём к пределу по n :

$$|f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X, \quad m > N$$

Воспользуемся произвольностью x :

$$\|f - f_m\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \implies (f - f_m) \in m(X)$$

$$f = (f - f_m) + f_m$$

В силу линейности $m(X)$ это означает, что $f \in m(X)$, $\|f - f_m\|_\infty < \varepsilon$ при $m > N$

$$\implies \lim_{m \rightarrow \infty} f = f \text{ в пространстве } m(X)$$

□

Примечание. Почему молодёжь ностальгирует по советской власти?

Замечание. Сходимость по норме в $m(X)$ совпадает с равномерной сходимостью.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| \right) = 0 \iff f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f$$

1.4. Пространства с sup-нормой

Определение 7. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $l_n^\infty = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ или $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$, где

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{R}\}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

При этом, $l_n^\infty = m(X)$, где $X = \{1, 2, \dots, n\}$, $f(j) = x_j$. Значит, l_n^∞ — банахово пространство.

Определение 8. l^∞ — пространство ограниченных последовательностей, т. е.

$$l^\infty = \left\{ x = \{x_j\}_{j=1}^\infty \mid x_j \in \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C}, \sup_j |x_j| < +\infty \right\}$$

$$l^\infty = m(X), \quad X = \mathbb{N} \implies l^\infty \text{ — банахово}$$

Определение 9.

$$C = \left\{ x = \{x_j\}_{j=1}^\infty \mid \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_j = x_0 \right\}$$

$$C_0 = \left\{ x = \{x_j\}_{j=1}^\infty \mid \exists \lim x_j = 0 \right\}$$

Утверждение 1. Пространства C замкнуты.