Содержание

Часть I
ТФКП

1. Криволинейные интегралы от комплекснозначных функций — определения и свойства

Определение 1. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}([a,b]) \subset \mathbb{R}^2, \qquad u, v \in \mathcal{C}\big(\Gamma\big), \qquad u : \Gamma \to \mathbb{R}, \quad v : \Gamma \to \mathbb{R}$
$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \in \mathcal{C}\big(\Gamma\big)$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x := \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} u(x,y)\,\mathrm{d}\,x + i\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} v(x,y)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y := \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} u(x,y)\,\mathrm{d}\,y + i\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} v(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

Свойства.

1. $\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f + g\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f\,\mathrm{d}\,x + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} g\,\mathrm{d}\,x, \qquad \dots \mathrm{d}\,y$

2. $c \in \mathbb{C}$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} cf\,\mathrm{d}\,x = c\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f\,\mathrm{d}\,x, \qquad \dots \mathrm{d}\,y$$

3. $\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\,x = -\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\,x, \qquad \dots \mathrm{d}\,y$

4. $\mathtt{T} = \{\, t_\nu \,\}_{\nu=0}^{m}, \quad a = t_0 < \dots < t_m = b, \qquad \mathtt{P} = \{\, \tau_\nu \,\}_{\nu=1}^{m}, \quad \tau_\nu \in [t_{\nu-1}, t_\nu]$

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \qquad x(t_\nu) =: x_\nu, \quad y(t_\nu) =: y_\nu, \qquad M(\tau_\nu) = \begin{bmatrix} x(\tau_\nu) \\ y(\tau_\nu) \end{bmatrix}$$

$$\mathtt{S}_x(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \coloneqq \sum_{\nu=1}^{m} f\big(M(\tau_\nu)\big)(x_\nu - x_{\nu-1})$$

$$\mathtt{S}_y(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \coloneqq \sum_{\nu=1}^{m} f\big(M(\tau_\nu)\big)(y_\nu - y_{\nu-1})$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall \mathtt{P} \quad t_\nu - t_{\nu-1} < \delta, \quad \nu = 1, \dots, m \quad \Longrightarrow \left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\,x - \mathtt{S}_x \right| < \varepsilon, \quad \left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\,y - \mathtt{S}_y \right| < \varepsilon$$

То есть, последовательность сумм Римана сходится к интегралу.

Доказательство.

1. Очевидно.

2. $c = a + bi, \qquad f = u + iv$

$$cf = au - bv + i(av + bu)$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} cf \,\mathrm{d}\,x = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} (au - bv) \,\mathrm{d}\,x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} (av + bu) \,\mathrm{d}\,x = a \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} u \,\mathrm{d}\,x - b \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} v \,\mathrm{d}\,x + i\bigg(a \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} v \,\mathrm{d}\,x + b \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} u \,\mathrm{d}\,x \bigg) =$$

$$= a\bigg(\int u \,\mathrm{d}\,x + i \int v \,\mathrm{d}\,x \bigg) + b\bigg(-\int v \,\mathrm{d}\,x + i \int u \,\mathrm{d}\,x \bigg) = a \int f \,\mathrm{d}\,x + bi \int f \,\mathrm{d}\,x = c \int f \,\mathrm{d}\,x$$

3. Очевидно.

4. Следует из аналогичной теоремы для вещественных криволинейных интегралов второго рода.

$\square$

2. Криволинейные интегралы от комплекснозначных функций и криволинейные интегралы первого рода

Определение 2 (криволинейный интеграл второго рода).

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(z) \,\mathrm{d}\,z \coloneqq \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(z) \,\mathrm{d}\,x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(z) \,\mathrm{d}\,y$$

Свойства.

1. $\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} (f + g) \,\mathrm{d}\,z = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\,z + \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} g \,\mathrm{d}\,z$

2. $\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} cf \,\mathrm{d}\,z = c \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\,z$

3. $\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\,z = -\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\,z$

4. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} : z(t), \quad t \in [a, b], \qquad f : \overset{\curvearrowright}{\Gamma} \to \mathbb{C}, \qquad \mathtt{T} = \{\, t_\nu \,\}_{\nu=0}^{m}, \qquad \mathtt{P} = \{\, \tau_\nu \,\}_{\nu=1}^{m}$

$$z_\nu \coloneqq z(t_\nu) = x(t_\nu) + iy(t_\nu), \qquad x_\nu \coloneqq x(t_\nu), \quad y_\nu \coloneqq y(t_\nu), \qquad \widehat{z}_\nu \coloneqq z(\tau_\nu)$$

$$\mathtt{S}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \coloneqq \sum_{\nu=1}^{m} f(\widehat{z}_\nu)(z_\nu - z_{\nu-1})$$

$f \in \mathcal{C}\big(\Gamma\big)$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall \mathtt{T} : t_\nu - t_{\nu-1} < \delta, \quad \nu = 1, \dots, m \quad \forall \mathtt{P} \quad \left| \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, z - \mathtt{S}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \right| < \varepsilon$$

5. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} : [a, b] \to \mathbb{C}, \qquad z(a) = A, \quad z(b) = B, \qquad c \in \mathbb{C}$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} c \,\mathrm{d}\, z = c(B - A)$$

6. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} \subset \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{C}\big(\Gamma\big), \qquad c \in \overset{\curvearrowright}{\Gamma}, \qquad \overset{\curvearrowright}{\Gamma} = \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1 \cup \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_2, \qquad \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1 \cap \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_2 = \{\, c \,\}$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(z) \,\mathrm{d}\, z = \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1} f(z) \,\mathrm{d}\, z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_2} f(z) \,\mathrm{d}\, z$$

7. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} \subset \mathbb{C}, \qquad f : \Gamma \to \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{C}\big(\Gamma\big), \qquad \Gamma \leftrightarrow \Gamma^*$

$$\left| \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(z) \,\mathrm{d}\, z \right| \le \int\limits_{\Gamma^*} |f^*(M)| \,\mathrm{d}\, l(M)$$

В дальнейшем мы будем такой интеграл обозначать $\int\limits_{\Gamma} |f(z)| \,|\mathrm{d}\, z|$.

8. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} \subset \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{C}\big(\Gamma\big), \qquad \theta \in (0, 2\pi)$

$$\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_\theta \coloneqq e^{i\theta} \overset{\curvearrowright}{\Gamma}$$

То есть,

$$\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_\theta = \big\{\, z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i\theta}\zeta, \quad \zeta \in \Gamma \,\big\}$$

$$f_\theta(z) \coloneqq f\big(e^{-i\theta} z\big), \quad z \in \Gamma_\theta$$

$$\implies \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(\zeta) \,\mathrm{d}\, \zeta = e^{-i\theta} \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_\theta} f_\theta(z) \,\mathrm{d}\, z$$

Доказательство.

1. Очевидно.

2. $c = a + bi$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} cf \,\mathrm{d}\, z \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} cf \,\mathrm{d}\, x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} cf \,\mathrm{d}\, y = c \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, x + ic \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, y = c\Bigg(\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, y \Bigg) \overset{\text{def}}{=} c \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, z$$

3. $\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, z = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, y = -\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, x - \mathfrak{i} \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, y = -\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f \,\mathrm{d}\, z$

4. $\mathtt{S}(f,\mathtt{T},\mathtt{P}) = \mathtt{S}_x(f,\mathtt{T},\mathtt{P}) + i\mathtt{S}_y(f,\mathtt{T},\mathtt{P})$
   Воспользуемся аналогичным свойством для $\mathtt{S}_x, \mathtt{S}_y$. Пусть

$$\left|\int f\,\mathrm{d}\,y - \mathtt{S}_x\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \left|\int f\,\mathrm{d}\,y - \mathtt{S}_y\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left|\int f\,\mathrm{d}\,z - \mathtt{S}\right| = \left|(\ldots x) + i(\ldots y)\right| \le |\ldots x| + |\ldots y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

5. Применим св-во 4. Рассмотрим любые $\mathtt{T}, \mathtt{P}$.
   Рассмотрим интегральную сумму

$$\mathtt{S}(c,\mathtt{T},\mathtt{P}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{m} c(z_\nu - z_{\nu-1}) = c\sum(z_\nu - z_{\nu-1}) = c(B-A)$$

6. Докажем для случая, когда Γ — гладкая кривая.

$$\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}([a,b]) : [a,b] \to \mathbb{C} \quad \iff \quad \overset{\curvearrowleft}{\Gamma}^*([a,b])$$

$$t \in [a,b], \qquad \Gamma^* : M(t), \qquad M(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}^*} f\big(M(t)\big)\,\mathrm{d}\,x + i\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}^*} f\big(M(t)\big)\,\mathrm{d}\,y = \int_a^b f^*\big(M(t)\big)x'(t)\,\mathrm{d}\,t + i\int_a^b f^*\big(M(t)\big)y'(t)\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \int_a^b f^*\big(M(t)\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b f\big(z(t)\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big)\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \int_a^{t_0} f\big(z(t)\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big)\,\mathrm{d}\,t + \int_{t_0}^b f\big(z(t)\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big)\,\mathrm{d}\,t$$

   Прочитывая эти равенства теперь в обратном порядке, получаем, что это равно

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z + \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_2} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

   Случай для кусочно-гладких кривых доказывается аналогично.

7. $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}([a,b]) \to \mathbb{C}, \qquad \mathtt{T} = \{\, t_j \,\}_{j=0}^n, \qquad \mathtt{P} = \{\, \tau_j \,\}_{,=1}^n \qquad z_j = z(t_j), \qquad z_j' = z(\tau_j)$

$$\mathtt{S}(f,\mathtt{T},\mathtt{P}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} f(z_j')(z_j - z_{j-1})$$

$$|\mathtt{S}| \le \sum_{j=1}^{n} |f(z_j')|z_j - z_{j-1}|$$

   Перейдём к плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$z(t) = x(t) + iy(t), \qquad M_j = \begin{bmatrix} x(t_j) \\ y(t_j) \end{bmatrix}, \qquad x_j(t) = x(t_j), \quad y_j = y(t_j)$$

$$M_j' = \begin{bmatrix} x(\tau_j) \\ y(\tau_j) \end{bmatrix}, \qquad x_j' = x(\tau_j), \quad y_j' = y(\tau_j)$$

$$\|\mathrm{dist}(M_j, M_{j-1})\| = |z_j - z_{j-1}|$$

$$\|\operatorname{dist}(M_{j-1}\ M_j)\| \le l\Gamma^*(M_{j-1}, M_j) \quad\Longrightarrow\quad \sum_{j=1}^{n} |f(z'_j)|\cdot|z - z_{j-1}| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{n} |f^*(M'_j)|\cdot l\Gamma(M_{j-1}, M_j) =: \mathtt{S}^*(|f|, \mathtt{T}, \mathtt{P})$$

$$|\mathtt{S}| \le \mathtt{S}^*$$

Перейдём к пределу:

$$\left|\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \le \int_{\Gamma} |f(z)|\,|\,\mathrm{d}\,z|$$

8. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}([a,b]) : [a,b] \to \mathbb{C}, \qquad \mathtt{T} = \{\, t_j \,\}_{,=0}^{n} \quad \mathtt{P} = \{\, \tau_j \,\}_{j=1}^{n}, \qquad z_j = z(t_j), \quad z'_j = z(\tau_j)$

$$\mathtt{S}_{\Gamma}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} f(z'_j)(z_j - z_{j-1}) = e^{-i\theta} \sum_{j=1}^{n} f\Big(e^{-i\theta}(e^{i\theta})\Big)(e^{i\theta} z_j - e^{i\theta} z_{j-1}) =$$

$$= e^{-i\theta} \sum_{j=1}^{n} f_\theta(e^{i\theta} z'_j)(e^{i\theta} z_j - e^{i\theta} z_{j-1}) = e^{-i\theta} \mathtt{S}_{\Gamma_\theta}(f_\theta, \mathtt{T}, \mathtt{P})$$

□

По индукции из свойства 6 получаем следующее утверждение:

Свойство. $c_1, \dots, c_n \in \overset{\curvearrowright}{\Gamma}$

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{j=1}^{n+1} \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma_j}} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

3. Теорема Коши для прямоугольника

Теорема 1. $G \subset \mathbb{C}, \qquad f \in A(G), \qquad Q = \{\, z = x + iy \mid a \le x \le b, \quad p \le y \le q \,\} \subset G$

$$\Longrightarrow \int_{\overset{\curvearrowright}{\partial Q}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$$

Примечание. Здесь ориентация роли не играет.

Доказательство. Обозначим

$$A = a + pi, \qquad B = b + pi, \qquad C = b + qi, \qquad D = a + qi$$

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\partial Q}} \dots = \int_{\overrightarrow{AB}} + \int_{\overrightarrow{BC}} + \int_{\overrightarrow{CD}} + \int_{\overrightarrow{DA}} = \left(\int_{\overrightarrow{AB}} - \int_{\overrightarrow{DC}}\right) + \left(\int_{\overrightarrow{BC}} - \int_{\overrightarrow{AD}}\right)$$

Рассмотрим параметризацию AB:

$$\overrightarrow{AB} = \{\, t + pi \mid t \in [a,b] \,\}$$

$$\int_{\overrightarrow{AB}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_a^b f(t + pi)\,\mathrm{d}\,t$$

Аналогично,

$$\overrightarrow{DC} = \{\, t + qi \,\}, \qquad \overrightarrow{BC} = \{\, b + it \,\}, \qquad \overrightarrow{AD} = a + ti$$

$$\int\limits_{\overrightarrow{DC}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_a^b f(t+qi)\,\mathrm{d}\,t, \qquad \int\limits_{\overrightarrow{BC}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = i\int_p^q f(b+ti)\,\mathrm{d}\,t, \qquad \int\limits_{\overrightarrow{AD}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = i\int_p^q f(a+ti)\,\mathrm{d}\,t$$

Всё это означает, что

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial Q}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \left(\int_a^b f(t+pi)\,\mathrm{d}\,t - \int_a^b f(t+qi)\,\mathrm{d}\,t\right) + \left(i\int_p^q f(b+ti)\,\mathrm{d}\,t - i\int_p^q f(a+ti)\,\mathrm{d}\,t\right) \tag{1}$$

Перейдём к плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$\int_a^b f^*(t,q)\,\mathrm{d}\,t - \int_a^b f^*(t,p)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b \Big(f^*(x,q) - f^*(x,p)\Big)\,\mathrm{d}\,x$$

$f^* \in \mathcal{C}^1\big(G^*\big)$, значит, можно применить формулу Ньютона—Лейбница:

$$= \int_a^b \left(\int_p^q f_y^{*\prime}(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,x$$

Аналогично,

$$\int_p^q f^*(b,y) - f^*(a,y)\,\mathrm{d}\,y = \int_p^q \left(\int_a^b f_x^{*\prime}(x,y)\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,y$$

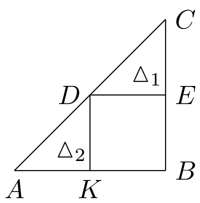
Подставляя последние две выкладки в (1), получаем

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial Q}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = -\int_a^b\int_p^q f_y^{*\prime}(x,y)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x + i\int_p^q\int_a^b f_x^{*\prime}(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y =$$

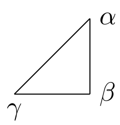
$$= \int_a^b\int_p^q -f_y^{*\prime} + if_x^{*\prime}\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x = 2i\int_a^b\int_p^q \frac{1}{2}\Big(f_x^{*\prime} + if_x^{*\prime}\Big)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x \overset{\text{def}}{=} 2i\int_a^b\int_p^q \underbrace{f_{\overline{z}}'}_{0}\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x = 0$$

$\square$

4. Теорема Коши для прямоугольного треугольника



(a) Прямоугольный треугольник



(b) Прямоугольный треугольничек

Теорема 2. Рассматриваем треугольник ABC (рис. 1a).

$$f \in \mathcal{A}(G), \qquad A = a + pi, \quad B = b + pi, \quad c = b + qi, \qquad a < b, \quad p < q, \qquad \triangle\, ABC \subset G$$

$$I := \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\triangle ABC}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$$

Доказательство. Рассмотрим точки:

$$D = \frac{a+b}{2} + i\frac{p+q}{2}, \qquad K = \frac{a+b}{2} + pi, \qquad E = b + i\frac{p+q}{2}$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\triangle ABC}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\square}} + \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\triangle_1}} + \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\triangle_2}}$$

При этом,

$$\int\limits_{\overrightarrow{ED}} + \int\limits_{\overrightarrow{DE}} = 0, \qquad \int\limits_{\overrightarrow{DK}} + \int\limits_{\overrightarrow{KD}} = 0$$

К каждому из треугольников можно применить такое же рассуждение, а к прямоугольникам — теорему Коши для прямоугольника. Получаем

$$I = \sum_{k=1}^{2^n} I_{n_k} \tag{2}$$

$$I_{n_k} = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\triangle_{n_k}}} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

Рассмотрим какой-то из шагов (треугольник обозначим $\alpha\beta\gamma$, рис. 1b):

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\triangle\alpha\beta\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\triangle\alpha\beta\gamma}} f(z) - f(\alpha)\,\mathrm{d}\,z + f(\alpha) \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\triangle\alpha\beta\gamma}} 1\,\mathrm{d}\,z$$

Второй интеграл равен 0 (по св-ву 5 криволинейных интегралов). Значит, это равно

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\triangle\alpha\beta\gamma}} f(z) - f(\alpha)\,\mathrm{d}\,z$$

По св-ву 7 криволинейных интегралов, это означает, что

$$\left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\triangle\alpha\beta\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}\,z \right| \le \int\limits_{\partial\triangle\alpha\beta\gamma} |f(z) - f(\alpha)|\,|\mathrm{d}\,z| \tag{3}$$

Применим теорему Кантора:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0: \quad \forall\alpha \in [A, C], \quad z \in \partial\triangle\alpha\beta\gamma \quad |f(z) - f(\alpha)| < \varepsilon$$

Выберем n так, что

$$z^{-n} \cdot |C - A| < \delta$$

Тогда

$$\int\limits_{\partial\triangle\alpha\beta\gamma} |f(z) - f(\alpha)|\,|\mathrm{d}\,z| < \varepsilon \int\limits_{\partial\triangle\alpha\beta\gamma} |\mathrm{d}\,z| \underset{\text{из геом. сообр.}}{<} 3\varepsilon|\gamma - \alpha| = 3\varepsilon \cdot |C - A| \cdot 2^{-n}$$

$$\underset{(3)}{\Longrightarrow} \forall k \quad |I_{n_k}| < 3\varepsilon|C - A| \cdot 2^{-n}$$

$$\underset{(2)}{\Longrightarrow} |I| \le \sum_{k=1}^{2^n} |I_{n_k} < 3\varepsilon|C - A| \cdot 2^{-n} \cdot 2^n = 3\varepsilon|C - A|$$

$$\Longrightarrow |I| = 0$$

□

Если треугольник перевернуть относительно оси ординат, результат не изменится.

Замечание. Аналитичность f использовалась для прямоугольника.

5. Теорема Коши для произвольного треугольника

(a) (b)

Теорема 3. Рассматриваем треугольник ABC (рис. 2a)

$$A = a + pi, \quad B = b + pi, \quad C = d + qi, \qquad a < d < l, \qquad q > p$$

$$\underbrace{\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial}\triangle ADC}}_{0} + \underbrace{\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial}\triangle DBC}}_{0} = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial}\triangle ABC} = 0$$

Теорема 4. Рассматриваем треугольник ABC (рис. 2b). Считаем, что наибольшая сторона — это AB.
Возьмём θ так, что $e^{i\theta} \cdot \triangle\, ABC$ повёрнут “правильно”.

$$f_\theta(z) \coloneqq f(e^{-i\theta} z), \qquad f_\theta \in A(G_\theta)$$

Получаем треугольник $A_1B_1C_1$ из предыдущей теоремы.
Дальше пользуемся свойством 8 криволинейных интегралов.

6. Теорема Коши для многоугольника

Теорема 5. Имеется некая конечносвязная многоугольная область D, ограниченная многоугольниками $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$.

$$\partial D = \bigcup_{\nu=1}^{k} \Gamma_\nu$$

Пусть есть область G такая, что $G \supset \overline{D}$ и функция $f \in \mathcal{A}(G)$. Рассмотрим

$$\overset{\curvearrowleft}{\partial}\, D = \bigcup_{\nu=1}^{k} \overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_\nu,$$

при этом, каждая кривая Γ_ν положительно ориентированна относительно области D.

$$\implies \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial}\, D} f(z)\, \mathrm{d}\, z = 0$$

Доказательство. Применим теорему о триангуляции конечносвязной многоугольной области:

$$\exists \{\, \Delta_k \,\}_{k=1}^{N}, \quad \Delta_k \text{ — откр.:} \qquad \begin{cases} \Delta_k \cap \Delta_l = \emptyset, \quad k \neq l \\ \overline{\Delta}_k \cap \overline{\Delta}_l = \begin{cases} \emptyset \\ \text{общая вершина} \\ \text{общая сторона} \end{cases} \\ \bigcup_{k=1}^{N} \overline{\Delta}_k = \overline{D} \end{cases}$$

Рассмотрим

$$\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial}\Delta_k} f(z)\, \mathrm{d}\, z$$

Каждый из них представим в виде суммы интегралов по трём сторонам. В результате:

1. каждый внутренний отрезок мы пройдём дважды в разных направлениях;
2. все "внутренние" границы (многоугольники) проходятся полностью в отрицательном (относительно внешнего многоугольника) направлении;
3. остаётся только "внешняя" граница.

$$\sum = 0$$

□

7. Лемма об оценке интеграла

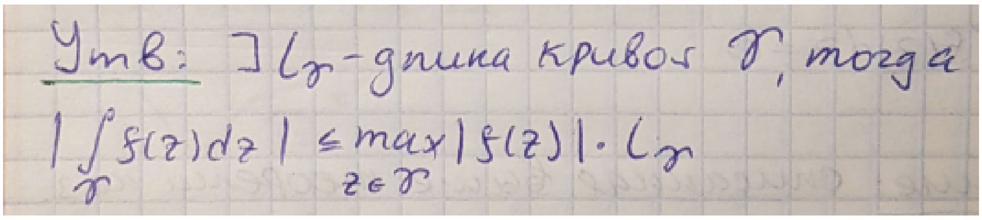


Рис. 3: Лемма из конспектов прошлых лет.

Примечание. Эту лемму я найти не смог, так что исхожу из предположения, что она отдельно не выделялась и спрятана в следующей теореме. Также, предполагаю, что на рис. 3 приведена эта лемма[a]. Возможно, лемма об оценке интеграла — это вообще другое.

[a] Источник. Низкий поклон этим людям.

Лемма 1.

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \le \max_{z\in\Gamma}|f(z)|\cdot l\Gamma$$

Доказательство. По свойству 7 криволинейных интегралов,

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \le \int_{\Gamma}|f(z)|\,|\mathrm{d}\,z| \le \int_{\Gamma}\max|f(z)|\,|\mathrm{d}\,z| \underset{\text{св-во } 6}{\le} \max|f(z)|\cdot l\Gamma$$

□

8. Теорема Коши для области с кусочно-гладкими границами

Теорема 6. $G\subset\mathbb{C}$, $\overline{D}\subset G$, $\partial D = \bigcup_{k=1}^m \Gamma_k$, Γ_k кусочно-гладкие, $f\in\mathcal{A}(G)$

$$\int_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0$$

Доказательство. Пусть $\Gamma_k : [a,b]\to\mathbb{C}$.

$$\exists\delta_0>0:\quad \forall\zeta\in\partial D\quad \overline{\mathtt{B}}(\zeta) = \{\, z \mid |z-\zeta|\le\delta_0 \,\}\subset G$$

$$T_{\delta_0} := \bigcup_{\zeta\in\partial D}\overline{\mathtt{B}_{\delta_0}(\zeta)}$$

Утверждение 1. T_{δ_0} — компакт.

Доказательство. Упражнение. $\square$

Значит, по теореме Кантора,
$f \in \mathcal{C}\big(T_{\delta_0}\big) \implies f$ равномерно непрерывна на T_{δ_0}. То есть,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists 0 < \delta_1 \le \delta_0 : \quad \forall z_1, z_2 \in T_{\delta_0} : |z_1 - z_2| < \delta_1 \quad |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon \tag{4}$$

Обозначим $\mathtt{P}_k = \{\, t_{kj} \,\}_{j=0}^{N_k}, \quad t_{k0} = a_k, \quad t_{kN_k} = b_k, \quad k = 1, \ldots, m$.
Выберем его так, чтобы

$$\forall t \in [t_{kj}, t_{k\ j+1}] \quad |\Gamma(t) - \Gamma(t_{kj})| < \delta_1$$

Такое разбиение можно выбрать в силу равномерной непрерывности.

Обозначим многоугольник $S_k = \{\, \Gamma(t_{kj}) \,\}_{j=0}^{M_k}$.

Обозначим $\widetilde{D}$ так, что $\partial \widetilde{D} = \bigcup_{k=1}^{m} S_k$. По определению $\widetilde{D} \subset G$. Применим к $\widetilde{D}$ аналогичную теорему для многоугольников:

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\, \widetilde{D}}} f(z) \, \mathrm{d}\, z = 0 \quad \implies \quad \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\, \widetilde{D}}} f(z) \, \mathrm{d}\, z = 0 \quad \implies \quad \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\, D}} f(z) \, \mathrm{d}\, z = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\, D}} f(z) \, \mathrm{d}\, z + \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial\, \widetilde{D}}} f(z) \, \mathrm{d}\, z \tag{5}$$

Рассмотрим некоторую кривую Γ_k (ориентация согласована с общей ориентацией границы).
Обозначим $\Gamma(t_{kj}) =: z_{kj}, \quad 0 \le j \le N_k$.

Рассмотрим случай, когда $k = 1$ (остальные — аналогично). Это внешняя кривая. Т. к. кривая замкнутая, $z_{k0} = z_{kN_k}$.

Рассмотрим точки $z_{1j}, z_{1\ j+1}, z_{1\ j+2}$. Они обходятся в положительном направлении. Но, если рассматривать многоугольник S_1, то на нём эти же точки обходятся в противоположном направлении.

Обозначим $\overset{\curvearrowleft}{\gamma}_{1j} \coloneqq \Gamma([t_{1j}, t_{1\ j+1}])$. По одному из свойств,

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_1} f(z) \, \mathrm{d}\, z = \sum_{j=0}^{N_1-1} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma}_{1j}} f(z) \, \mathrm{d}\, z$$

Обозначим σ_{1j} — отрезок с концами $z_{1j}, z_{1\ j+1}$. Тогда

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{S_1}} f(z) \, \mathrm{d}\, z = \sum_{j=0}^{N_1-1} \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\sigma}_{1j}} f(z) \, \mathrm{d}\, z$$

Из последних двух выражений получаем, что

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_1} f(z) \, \mathrm{d}\, z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{S_1}} f(z) \, \mathrm{d}\, z = \sum_{j=0}^{N_1-1} \left(\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma}_{1j}} f(z) \, \mathrm{d}\, z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\sigma}_{1j}} f(z) \, \mathrm{d}\, z \right) \tag{6}$$

Возьмём $c \in \mathbb{C}$.

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma}_{1j}} c \, \mathrm{d}\, z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\sigma}_{1j}} c \, \mathrm{d}\, z = c(z_{1\ j+1} - z_{1j}) + c(z_{1j} - z_{1\ j+1}) = 0 \quad \forall c$$

Пусть теперь $c = -f(z_{1j})$

$$(6) = \sum_{j=0}^{N_1-1} \left(\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma}_{1j}} (f(z) - f(z_{1j})) \, \mathrm{d}\, z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\sigma}_{1j}} (f(z) - f(z_{1j})) \, \mathrm{d}\, z \right) \tag{7}$$

При $z \in \gamma_{1j}$ и $z \in \sigma_{1j}$ можно применить лемму:

$$\Bigl| \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\gamma_{1j}}} f(z) - f(z_{1j})\,\mathrm{d}\,z \Bigr| \le \varepsilon \cdot l\gamma_{1j}, \qquad \Bigl| \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\sigma_{1j}}} f(z) - f(z_1)\,\mathrm{d}\,z \Bigr| \le \varepsilon \cdot l\sigma_{1j}$$

$$\Longrightarrow \Bigl| \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\gamma_{1j}}} f(z)\ \mathrm{d}\,z + \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\sigma_{1j}}} f(z)\ \mathrm{d}\,z \Bigr| < 2\varepsilon \cdot l\ \gamma_{1j}$$

$$\underset{(7)}{\Longrightarrow} \Bigl| \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\Gamma_1}} f(z)\ \mathrm{d}\,z + \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{S_1}} f(z)\ \mathrm{d}\,z \Bigr| < 2\varepsilon \sum_{j=0}^{N_1-1} l\ \gamma_{1j} = 2\varepsilon l \Gamma_1$$

При остальных k — аналогично.

$$\underset{(5)}{\Longrightarrow} \Bigl| \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\partial\, D}} f(z)\ \mathrm{d}\,z \Bigr| < 2\varepsilon \sum l\Gamma_k \qquad \Longrightarrow \qquad \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\partial\, D}} f(z)\ \mathrm{d}\,z = 0$$

$\square$

9. Формула Коши для функции, аналитической в круге

Теорема 7. $G \subset \mathbb{C}$, $\quad D = \mathtt{B}_r(z_0)$, $\quad \overline{D} \subset G$, $\quad f \in \mathcal{A}(G)$, $\quad z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\partial\, D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta \tag{8}$$

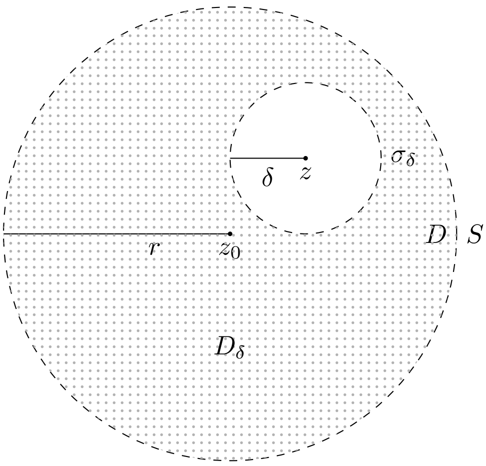


Рис. 4: Картинка к доказательству

Доказательство. Возьмём $\delta > 0$ так, чтобы $\delta < r - |z - z_0|$.
Рассмотрим $\mathtt{B}_\delta = \{\, \zeta \mid |\, \zeta - z| < \delta \,\}$. Понятно, что $\overline{\mathtt{B}}_\delta \subset D$.

Рассмотрим

$$\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

Она аналитична в $D \setminus \{\, z \,\}$.

Рассмотрим область $D_\delta = D \setminus \overline{\mathtt{B}}_\delta$.

$$\overline{D}_\delta \subset G \setminus \{\, z \,\}$$

По теореме Коши,

$$\int\limits_{\circlearrowleft \partial D_\delta} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta = 0 \tag{9}$$

Обозначим $S = \{\,\zeta \mid |\,\zeta - z_0| = r\,\}, \quad \sigma_\delta = \{\,\zeta \mid |\,\zeta - z| = \delta\,\}$.

$$(9) \implies \int\limits_{\circlearrowleft S} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta + \int\limits_{\circlearrowright \sigma_\delta} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta = 0 \quad\iff\quad \int\limits_{\circlearrowleft S} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta = -\int\limits_{\circlearrowright \sigma_\delta} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta = \int\limits_{\circlearrowleft \sigma_\delta} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta$$

$$\int\limits_{\circlearrowleft \sigma_\delta} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = f(z)\int\limits_{\circlearrowleft \sigma_\delta} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta \tag{10}$$

$$\circlearrowleft \sigma_\delta = \{\,\zeta \mid \zeta = z + \delta e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi]\,\}$$

$$\left(\delta e^{i\theta}\right)'_\theta = i\delta e^{i\theta}$$

$$\int\limits_{\circlearrowleft \sigma_\delta} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{(\delta e^{i\theta})'}{\delta e^{i\theta}}\,\mathrm{d}\,\theta = 2\pi i$$

$$\underset{(10)}{\implies} \int\limits_{\circlearrowleft \sigma_\delta} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = 2\pi i f(z) \tag{11}$$

В силу непрерывности

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall \zeta \in \sigma_\delta \quad |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$$

$$\left|\int\limits_{\circlearrowleft \sigma_\delta} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta\right| \le \int\limits_{\sigma_\delta} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|}\,|\,\mathrm{d}\,\zeta| \le \int\limits_{\sigma_\delta} \frac{\varepsilon}{\delta}\,|\,\mathrm{d}\,\zeta| = \frac{\varepsilon}{\delta}\cdot 2\pi\delta = 2\pi\varepsilon$$

$$\left|\int\limits_{\circlearrowleft S} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta - 2\pi i f(z)\right| \underset{(11)}{=\!=} \left|\int\limits_{\circlearrowleft \sigma_\delta} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta\right| \le 2\pi\varepsilon$$

$$\implies \int\limits_{\circlearrowleft S} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta - 2\pi i f(z) = 0$$

□

10. Бесконечная гладкость аналитической функции

Замечание (о предстоящем рассуждении).

$$f'_z = \frac{1}{2}(f'_x - i f'_y), \qquad f'_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(f'_x + i f'_y) = 0$$

$$f' = f'_z = f'_z + f'_{\overline{z}} = f'_x, \qquad f' = f'_z = f'_z - f'_{\overline{z}} = i f'_y$$

$$f'_y = i f'$$

$$z^\alpha, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$z^\alpha \overset{\text{def}}{=} e^{\alpha \ln z}$$

$z^n, \quad n \in \mathbb{N}$ определено при $z \in \mathbb{C}$
z^{-n} определено при $z \in \mathbb{C} \setminus \{\,0\,\}$

$$(z^n)' = n z^{n-1}$$

$$(z^{-n})' = -n z^{-n-1}$$

$$\Big((z-a)^{-n}\Big)' = -n(z-a)^{-n-1}$$

$$\Big((z-a)^{-n}\Big)'_x = -n(z-a)^{-n-1}, \qquad \Big((z-a)^{-n}\Big)'_y = -in(z-a)^{-n-1}$$

$$\left(\frac{1}{z-a}\right)'_x = -\frac{1}{(z-a)^2}, \qquad \left(\frac{1}{z-a}\right)'_y = -i\frac{1}{(z-a)^2}$$

$$\implies \left(\frac{1}{a-z}\right)'_x = \frac{1}{(a-z)^2}, \qquad \left(\frac{1}{a-z}\right)'_y = \frac{i}{(a-z)^2}$$

$$\left(\frac{1}{a-z}\right)''_{xx} = \left(\frac{1}{(a-z)^2}\right)'_x = \frac{2}{(a-z)^3}, \qquad \left(\frac{1}{a-z}\right)''_{xy} = i\left(\frac{1}{(a-z)^2}\right) = \frac{2i}{(a-z)^3}$$

$$\left(\frac{1}{a-z}\right)''_{yy} = i\left(\frac{1}{(a-z)^2}\right)'_y = \frac{2i^2}{(a-z)^3}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\left(\frac{1}{a-z}\right)_{\underbrace{x\dots x}_{m}\underbrace{y\dots y}_{n}} = \frac{(m+n)!i^n}{(a-z)^{m+n+1}} \tag{12}$$

Теорема 8. $D \subset \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{A}(D) \qquad \implies \qquad f \in \mathcal{C}^\infty\big(D\big)$

Доказательство.

1. $D = \{\, z \mid |\, z-a| < R \,\}$

   Выберем $0 < \rho < R$ и $\rho < r < R$. Обозначим $S = \{\, z \mid |\, z-a| = r \,\}$. Применим формулу Коши:

   $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{S} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta$$

   При этом, $S = \big\{\, z = a + re^{i\theta} \,\big\}$. Значит,

   $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})}{a+re^{i\theta}-z} ire^{i\theta}\,\mathrm{d}\,\theta$$

   При этом, $z = x + iy$.

   > **Утверждение 2.** Теоремы о непрерывности интегралов от параметра и о производной интеграла от параметра остаются справедливыми, если функции комплекснозначные, а параметров несколько.

   Применим их и воспользуемся формулой (12):

   $$\Big(f(z)\Big)^{(m+n)}_{\underbrace{x\dots x}_{m}\underbrace{y\dots y}_{n}} = (m+n)!i^n \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})ir}{(a+re^{i\theta}-z)^{m+n+1}}\,\mathrm{d}\,\theta =$$

   $$= (m+n)!i^n \cdot \frac{1}{2\pi i}\oint_{S} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{m+n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta$$

   $$\implies \big(f(z)\big)^{(m+n)}_{\underbrace{x\dots x}_{m}\underbrace{y\dots y}_{n}} \in \mathcal{C}\big(\{\, z \mid |\, z-a| \le \rho \,\}\big)$$

   В силу произвольности ρ это означает, что $f \in \mathcal{C}^{m+n}\big(\{\, z \mid |\, z-a| < R \,\}\big)$.
   Значит, $f \in \mathcal{C}^\infty\big(|z-a| < R\big)$.

2. Произвольная область $D \subset \mathbb{C}$

Возьмём $a \in D$

$$\exists R: \quad \{\, z \mid |z-a| < R \,\} \subset D$$

По только что доказанному $f \in \mathcal{C}^\infty\big(\{\, z \mid |z-a| < R \,\}\big)$.

Поскольку класс $\mathcal{C}^\infty$ определяется локально, теорема доказана.

$\square$

11. Аналитичность производной аналитичной функции

Теорема 9. $D \subset \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{A}(D) \qquad \Longrightarrow \qquad f' \in A(D)$

Доказательство. $f' = f'_x$

У f были все производные, а значит, и у f'_x есть все производные, то есть $f' \in \mathcal{C}^\infty\big(D\big)$.

1. Рассмотрим $D = \{\, z \mid |z-a| < R \,\}, \quad 0 < \rho < r < R$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\circlearrowleft S} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\,\zeta$$

$$f'(z) = f'_x(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\circlearrowleft S} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \,\mathrm{d}\,\zeta$$

Применим формулу (12):

$$\left.\begin{aligned} \big(f'_x(z)\big)'_x &= 2 \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\circlearrowleft S} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} \,\mathrm{d}\,\zeta \\ \big(f'_x(z)\big)'_y &= 2i \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\circlearrowleft S} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} \,\mathrm{d}\,\zeta \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (f'_x)'_{\overline{z}} = 0$$

$$\Longrightarrow \big(f'(z)\big)'_{\overline{z}} \equiv 0 \quad \text{при } |z-a| < \rho$$

В силу произвольности ρ

$$\big(f'(z)\big)'_{\overline{z}} = 0 \quad \text{при } |z-a| < R$$

2. Пусть теперь D — произвольная область

$$\exists R: \quad \{\, z \mid |z-a| < R \,\} \subset D$$

$\square$

$$f \in \mathcal{A}(z \mid |z-a| < R), \qquad \rho < r < R, \qquad f'_x = f'$$

Но f' тоже аналитична.

$$(f')'_x = (f')'$$

Это называется *второй комплексной производной*:

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int\limits_{\circlearrowleft S} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} \,\mathrm{d}\,\zeta$$

12. Формула Коши для $f^{(n)}$

Вычислим третью производную по той же формуле:

$$f'''(z) = (f'')'(z) = (f'')'_x(z) = \frac{2}{2\pi i} \int\limits_S f(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z)^3}\right)'_x \mathrm{d}\,\zeta = \frac{2 \cdot 3}{2\pi i} \int\limits_S \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^4} \,\mathrm{d}\,\zeta$$

Утверждение 3.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_S \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \,\mathrm{d}\,\zeta$$

Доказательство. Доказывать будем по **индукции**. **База** уже доказана. **Переход**:

$$f^{(n+1)}(z) = \left(f^{(n)}\right)'(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_S f(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}}\right)' \mathrm{d}\,\zeta = \frac{n! \cdot (n+1)}{2\pi i} \int\limits_S \frac{f(z)}{(\zeta - z)^{n+2}} \,\mathrm{d}\,\zeta =$$

$$= \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int\limits_S \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+2}} \,\mathrm{d}\,\zeta$$

□

13. Разложение $f \in A\big(\mathtt{D}_r(a)\big)$ в ряд

Теорема 10. $f \in \mathcal{A}(D)$

$$\implies f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

где ряд сходится в D и $\forall \rho_1 < \rho < R$ ряд сходится равномерно на $\overline{D}_\rho = \{\, z \mid |\, z - z_0| \le \rho \,\}$.

Доказательство. $S = \{\, z \mid |\, z - z_0| = R \,\}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_S \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\,\zeta$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$$

Обозначим $q(\zeta, z) = \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$.

$$|q| = \frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} \le \frac{\rho}{R} =: q_0 < 1$$

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |q^n| \le \sum_{n=1}^{\infty} q_0^n = \frac{q_0}{1 - q_0}$$

Значит, $1 + \sum q^n(z, \zeta)$ равномерно сходится при $\zeta \in S_r,\ z \in \overline{D}_\rho$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_r} f(\zeta) \frac{1}{\zeta - z_0} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n\right) \mathrm{d}\,\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \,\mathrm{d}\,\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}\,\zeta = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Обозначим $M = \max\limits_{z \in S} |f(z)|$.

$$|c_n| = \left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_S \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \,\mathrm{d}\,\zeta\right| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{n+1}} \,|\mathrm{d}\,\zeta| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \frac{M}{R^{n+1}} \,|\mathrm{d}\,\zeta| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \frac{M}{R^{n+1}} = \frac{M}{R^n}$$

$$\Longrightarrow |z-z_0|^n \cdot |c_n| \le \rho^n \cdot \frac{M}{R^n} = Mq_0^n$$

$\square$

14. Разложение элементарных функций в степенной ряд

Мы уже выяснили, что аналитические функции раскладываются в ряд Тейлора:

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Будем рассматривать $z_0 = 0$.

1. $e^z \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$

$$e^0 = 1, \qquad \left(e^z\right)^{(n)}\big|_{z=0} = (e^z)^{(n)}_{\underbrace{x\ldots x}_{n}}\big|_{z=0} = e^{x(n)}\big|_{x=0} = 1$$

$$e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

2. $\cos z = 1 + \sum \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$

3. $\sin z = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-1}$

4. $\log(1+z)$ аналитична при $|z| < 1$ и на $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$.

   В этой области достаточно рассмотреть функцию $\log(1+x)$.

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$$

5. $r \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \cup \{ 0 \})$

$$(1+z)^r = e^{r\log(1+z)}$$

   Она аналитична при $|z| < 1$. Рассмотрим $(1+x)^r$.

$$(1+z)^r = e^{r\log(1+z)} = 1 + rz + \frac{r(r-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}z^n + \cdots$$

6. $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$(1+z)^\alpha = e^{\alpha\log(1+z)} \in \mathcal{A}(|z| < 1)$$

   Здесь нельзя сослаться на вещественный случай — $(1+x)^\alpha \in \mathbb{C}$.

$$1^\alpha = 1$$

$$\Big((1+z)^\alpha\Big) = \Big(e^{\alpha\log(1+z)}\Big)' = (e^w)'\big|_{w=\alpha\log(1+z)} \cdot \big(\alpha\log(1+z)\big)' = e^{\alpha\log(1+z)} \cdot \frac{\alpha}{1+z} =$$
$$= \alpha e^{\alpha\log(1+z)} e^{-\log(1+z)} = \alpha e^{(\alpha-1)\log(1+z)} = \alpha(1+z)^{\alpha-1}$$

$$\Big((1+z)^\alpha\Big)'' = \alpha(\alpha-1)(1+z)^{\alpha-2}$$

$$\Big((1+z)^\alpha\Big)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n}$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n + \cdots$$

15. Теорема единственности для аналитических функций с производными

Теорема 11. $D \subset \mathbb{C}$ — область, $f \in \mathcal{A}(D)$, $z_0 \in D$, $f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \forall n \geq 1$, $f(z_0) = 0$

$$\implies f(z) \overset{D}{\equiv} 0$$

Доказательство. Пусть

$$E = \left\{ \zeta \in D \mid f(\zeta) = 0, \quad f^{(n)}(\zeta) = 0 \quad \forall n \geq 1 \right\} \tag{13}$$

По условию $z_0 \in E \implies E \neq \emptyset$.

1. Докажем, что E *относительно замкнуто* в D, то есть

   Утверждение 4. $\{\zeta_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\zeta_m \neq \zeta_l$, $\zeta_m \in E \quad \forall m$, $\zeta_m \xrightarrow[m\to\infty]{} z_*$, $z_* \in D$

   $$\implies z_* \in E$$

   По условию, $f \in \mathcal{C}(D)$.

   $$\xRightarrow[\zeta_m \to z_*]{} f(\zeta_m) \to f(z_*) \tag{14}$$

   $$\zeta_m \in E \quad \forall m \quad \xRightarrow[(14)]{} 0 \to f(z_*) \implies f(z_*) = 0$$

   $$f^{(n)} \in \mathcal{A}(D) \implies f^{(n)} \in \mathcal{C}(D)$$
   $$\implies f^{(n)}(\zeta_m) \to f^{(n)}(z_*)$$
   $$\implies 0 \to f^{(n)}(z_*) \implies f^{(n)}(z_*) = 0$$
   $$\implies z_* \in E$$

2. Докажем, что множество E *относительно открыто* в D, то есть

   Утверждение 5. $z_* \in E \implies \exists \delta > 0: \quad \mathtt{B}_\delta(z_*) \subset E$, $\mathtt{B}_\delta(z_*) = \{\zeta \mid |\zeta - z_*| < \delta\}$

   $$z_* \in E \implies \exists \delta > 0: \quad \mathtt{B}_\delta(z_*) \subset D$$
   $$\implies f \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_\delta(z_*)\big)$$
   $$\implies \forall z \in \mathtt{B}_\delta(z_*) \quad f(z) = f(z_*) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_*)}{n!}(z - z_*)^n$$
   $$\xRightarrow[(13)]{} f(z) = 0 + \sum 0 = 0 \quad \forall z \in \mathtt{B}_\delta(z_*)$$
   $$\implies f^{(n)}(z_*) \equiv 0, \quad z \in \mathtt{B}_\delta(z_*), \quad n \geq 1$$

По теореме из топологии, E пусто или $E = D$. Мы уже проверили, что E не пусто. □

Замечание. В метрических пространствах утв. 4 эквивалентно замкнутости E. Это не какое-то особое свойство.

16. Теорема единственности для аналитических функций со значениями функции

Примечание. Эта теорема была после теоремы о структуре аналитической функции в окрестности её нуля, так что в доказательстве используется та теорема.

Теорема 12. $D \subset \mathbb{C}$, $E \subset D$, z_0 — т. сг. E, $z_0 \in D$, $f \in \mathcal{A}(D)$, $f(z) \overset{E}{\equiv} 0$

$$\implies f(z) \overset{D}{\equiv} 0$$

Доказательство.

$$f(z) \xrightarrow[z\to z_0]{z\in E} f(z_0)$$

$$0 \to f(z_0)$$

То есть, $f(z_0) = 0$. **Пусть** $f(z) \not\equiv 0$. Тогда

$$\exists \varphi(z) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists \delta > 0 : \quad \begin{cases} f(z) = (z - z_0)^{n_0}\varphi(z) \\ |z - z_0| < \delta \quad \implies \quad \varphi(z) \neq 0 \end{cases}$$

$$\implies \text{ если } |z - z_0| < \delta, \quad f(z) = 0 \implies z = z_0 \tag{15}$$

$$z_0 \text{ — т. сг. } E \implies \exists z_1 \in E : \quad |z_1 - z_0| < \delta$$

$$z_1 \in E \implies f(z_1) = 0 \tag{16}$$

(15) и (16) противоречивы. □

Следствие. $f \in \mathcal{A}(D), \quad g \in \mathcal{A}(D), \quad \forall z \in E \quad f(z) = g(z)$

$$\implies f(z) \overset{D}{\equiv} g(z)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(z) = g(z) - f(z)$. В силу аналитичности f и g получаем $h(z) \in \mathcal{A}(D)$.

$$h(z) = 0 \quad \forall z \in E \implies h(z) \equiv 0$$

□

17. Структура аналитической функции в окрестности её нуля

Теорема 13. $D \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{A}(D), \quad f \not\equiv 0, \quad a \in D, \quad f(a) = 0$

$$\implies \exists n \in \mathbb{N} : \quad f(z) = (z-a)^n v(z)$$

$$\text{где } v \in \mathcal{A}(D) \quad \text{и} \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall z \in \mathtt{B}_\delta(a) \quad v(z) \neq 0$$

Доказательство. Рассмотрим $f^{(m)}(a)$. По теореме единственности с производными

$$\exists m : f^{(m)}(a) \neq 0$$

Возьмём $n = \min\left\{\, m \mid f^{(m)}(a) \neq 0 \,\right\}$. Пусть $\delta_1 > 0$ такое, что $\mathtt{B}_{\delta_1}(a) \subset D$. Тогда $f \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_{\delta_1}(a)\big)$.

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a)^{n+1} + \cdots$$

$$\implies f(z) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a)^{n+1} + \cdots = (z-a)^n\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a) + \cdots\right)$$

Возьмём $z \neq a, \quad z \in \mathtt{B}_{\delta_1}(a), \quad (z-a)^n \neq 0$. Тогда

$$\frac{f(z)}{(z-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a) + \cdots$$

Обозначим

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a) + \frac{f^{(n+2)}(a)}{(n+2)!}(z-a)^2 + \cdots = v(z)$$

$v(z)$ — степенной ряд, сходящийся в $\mathtt{B}_{\delta_1}(a)$.

$$\implies v \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_{\delta_1}(a)\big)$$

Если $z \neq a$, положим $v(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^n}$.

$$\Longrightarrow \quad v \in \mathcal{A}(D \setminus \{ a \})$$

Если $z \in \mathtt{B}_{\delta_1}(a)$ и $z \neq a$, то

$$v(z) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a) + \cdots$$

$$\Longrightarrow \quad f \in \mathcal{A}\Big((D \setminus \{ a \}) \cup \mathtt{B}_{\delta_1}(a) \Big) = \mathcal{A}(D)$$

Обозначим

$$c_1 = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad c_2 = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}, \quad \ldots, \quad c_{k+1} = \frac{f^{(n+k)}(a)}{(n+k)!}, \quad \ldots$$

$$v(z) = c_1 + c_2(z-a) + \cdots + c_k(z-a)^{k-1} + \cdots$$

$$z \in \mathtt{B}_{\delta_1}(a), \qquad c_1 \neq 0, \quad c_1 = v(a), \qquad v \in \mathcal{C}\big(\mathtt{B}_{\delta_1}(a)\big), \qquad v(a) \neq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \exists 0 < \delta \leq \delta_1 : \quad v(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathtt{B}_{\delta}(a)$$

При этом, $f(z) = (z-a)^n v(z)$. □

18. Аналитическое продолжение вдоль пути

Определение 3. $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}, \qquad D_1 \cap D_2 =: G \neq \emptyset, \qquad f_1 \in \mathcal{A}(D_1), \quad f_2 \in \mathcal{A}(D_2)$

$$\forall z \in G \quad f_1(z) = f_2(z)$$

Говорят, что функция f_1 *аналитически продолжена* в область D_2 функцией f_2.

Теорема 14. Пусть имеется два аналитических продолжения функции f_1 в область D_2: f_2 и $\widetilde{f}_2$.

$$\Longrightarrow \quad \widetilde{f}_2(z) \overset{D_2}{=\!=\!=} f_2(z)$$

Доказательство. Следует из следствия к теореме единственности со значением. □

Определение 4. *Путём* $\Gamma(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$ называется непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ в $\mathbb{C}$.

Замечание. Нет требований к инъективности или сюръективности.

Определение 5. $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \qquad r_0, r_1, \ldots, r_n > 0$
Рассматриваем круги $\mathtt{B}_{r_k}\big(\Gamma(t_k)\big)$. Будем называть их *системой кругов*, если выполнено

$$\mathtt{B}_{r_k}\big(\Gamma(t_k)\big) \cap \mathtt{B}_{r_{k-1}}\big(\Gamma(t_{k-1})\big) \neq \emptyset, \qquad k = 1, \ldots, n$$

Определение 6. Пусть имеется путь $\Gamma(t)$ и система кругов, связанных им.

$$f \in \mathcal{A}\Big(\mathtt{B}_{r_0}\big(\Gamma(t_0)\big)\Big)$$

Будем говорить, что функция f *аналитически продолжена вдоль пути* $\Gamma(t)$ *в круг* $\mathtt{B}_{r_n}\big(\Gamma(t_n)\big) = \mathtt{B}_{r_n}\big(\Gamma(b)\big)$, если функция f аналитически продолжается из круга r_0 в круг r_1, далее из него в круг r_2, и так далее до круга r_n.

Теорема 15. Аналитическое продолжение вдоль пути единственно.

Доказательство. Следует из единственности аналитического продолжения в область. □

19. Функции, продолжимые по любому пути

Определение 7. $D \subset \mathbb{C}, \qquad B = \mathtt{B}_r(z_0) \subset D, \qquad f \in \mathcal{A}(B)$

Будем говорить, что функция f *продолжима из круга B по любому пути в области D*, если

$$\forall \Gamma(t) : [a,b] \to D : \ \Gamma(a) = z_0 \quad f \text{ аналитически продолжается вдоль этого пути,}$$

причём в качестве первого круга мы берём круг B.

20. Функция $\log z$

Пример. $D = \mathbb{C} \setminus \{\, 0 \,\}, \qquad B = \mathtt{B}_1(1)$

Рассмотрим функцию $f(z) = \log z, \quad z \in B$.

$$\log z = \ln|z| + i \arg z, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

Зададим $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$.

Рассмотрим теперь любой круг $\widetilde{B}$. Хотим задать Arg так, чтобы он был в этом круге непрерывен. Положим $\log z \coloneqq \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$ при $z \in \widetilde{B}$. Эта функция аналитична в $\widetilde{B}$.

21. Теорема о монодромии

Определение 8. Область называется *односвязной*, если любой замкнутый путь можно непрерывно деформировать в точку, оставаясь в этой области.

Теорема 16. D — односвязная область, $\qquad B = \{\, z \mid |z - z_0| < r \,\} \subset D, \qquad f \in \mathcal{A}(B), \qquad f$ продолжима в D по любому пути.

Тогда f аналитична в D, то есть

$$\exists F \in \mathcal{A}(D) : \quad F(z) \overset{B}{\equiv} f(z)$$

Доказательство. Можно взять путь, который (вместе с кругами) полностью покроет D. По определению, вдоль этого пути функция будет аналитична. □

22. Ряд Лорана

Определение 9. $0 \le r \le R \le +\infty$

$$D_{r,R}(a) = \{\, z \mid r < |\, z - a| < R \,\}$$

Будем называть $D_{r,R}$ *кольцом*.

Теорема 17. $f \in \mathcal{A}\big(D_{r,R}(a)\big)$

$$\implies \exists c_n \in \mathbb{C} : \quad \forall z \in D_{r,R}(a) \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где ряды сходятся.

Если $r < r_1 < R_1 < R$, то каждый из рядов сходится равномерно и абсолютно при $z \in \overline{D_{r_1,R_1}(a)}$.

Эта формула называется разложением функции в *ряд Лорана*.

Доказательство.

$$f \in \mathcal{A}\Big(D_{r,R}(a)\Big), \qquad r_1 < r_2 < R_2 < R_1, \qquad r < r_1 < R_1 < R$$

Введём $S_\rho = \{\, z \mid |\, z - a| = \rho \,\}$. Пусть $z \in \overline{D}_{r,R}(a)$.

Возьмём $\varepsilon < \min\{\, r_2 - r_1, R_1 - R_2 \,\}$.
Обозначим $\sigma_\varepsilon = \{\, \zeta \mid |\,\zeta - z| = \varepsilon \,\}$.
Рассмотрим функцию

$$\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \qquad \varphi \in \mathcal{A}\Big(D_{r,R}(a) \setminus \{\, z \,\}\Big)$$

$$G_\varepsilon = D_{r_1,R_1}(a) \setminus \{\, \zeta \mid |\,\zeta - z| \le \varepsilon \,\}$$

$$\int\limits_{\partial G_\varepsilon} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta = 0 \quad \iff \quad \int\limits_{S_{R_1}} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta - \int\limits_{S_{r_1}} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta - \int\limits_{\sigma_\varepsilon} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta = 0$$

$$\implies \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta \tag{17}$$

$$\{\, \zeta \mid |\,\zeta - z| \le \varepsilon \,\} \subset D_{r,R}(a)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = f(z) \tag{18}$$

$$(17), (18) \implies f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta \tag{19}$$

- Рассмотрим S_{R_1}

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}}$$

Обозначим $q_1(z, \zeta) = \frac{z-a}{\zeta-a}$.

$$|q_1(z,\zeta)| \le \frac{R_2}{R_1} = Q_1 < 1$$

$$\implies \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}}\,\mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n\mathrm{d}\,\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}(z-a)^n \int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta \tag{20}$$

Обозначим $c_n(R_1) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta$.

$$(20) \implies \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = c_0(R_1) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(R_1)(z-a)^n$$

- Рассмотрим S_{r_1}

$$-\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = -\frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{\frac{\zeta-a}{z-a} - 1} = \frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta-a}{z-a}}$$

Аналогично,

$$c_{-n-1}(r_1) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{r_1}} f(\zeta)(\zeta - a)^n\,\mathrm{d}\,\zeta \tag{21}$$

$$\implies -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(r_1)(z-a)^{-n}$$

Воспользуемся леммой:

$$\iff -\int\limits_{S_{\rho_1}} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta + \int\limits_{S_{\rho_2}} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta = 0 \iff \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{\rho_0}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta \overset{\text{def}}{=} c_n \tag{22}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{r_1}} f(\zeta)(\zeta-a)^n\,\mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{\rho_0}} f(\zeta)(\zeta-a)^n\,\mathrm{d}\,\zeta \overset{\text{def}}{=} c_{-n-1} \tag{23}$$

$$(19),(22),(23) \implies f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

□

Лемма 2. $r < \rho_1 < \rho_2 < R, \qquad m \in \mathbb{Z}$

$$\implies \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{\rho_1}} f(\zeta)(\zeta-a)^m\,\mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{\rho_2}} f(\zeta)(\zeta-a)^m\,\mathrm{d}\,\zeta$$

Доказательство. Возьмём $\varphi(\zeta) = f(\zeta)(\zeta-a)^m \quad \in \mathcal{A}\big(D_{r,R}(a)\big)$

По теореме Коши,

$$\int\limits_{\partial D_{\rho_1,\rho_2}(a)} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta = 0$$

При этом, $\partial D_{\rho_1,\rho_2} = S_{\rho_1} \cup S_{\rho_2}$. □

23. Классификация особых точек аналитических функций; характеристика устранимой особой точки

Определение 10. $f \in \mathcal{A}\big(D_{0,R}(a)\big)$

Говорят, что a — *особая точка* функции f.

Доказано, что

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{24}$$

Говорят, что

1. a — *устранимая особая точка*, если $c_{-n} = 0 \quad \forall n \geq 1$;
2. функция f имеет в a *полюс*, если

$$\exists n_0 \geq 1: \quad c_{-n_0} \neq 0, \quad c_{-n} = 0 \quad \forall n > n_0$$

3. a — *существенная особая точка*, если

$$\exists \{\, n_k \,\}_{k=1}^{\infty}: \quad c_{-n_k} \neq 0$$

Теорема 18. Чтобы точка a была устранимой особой точкой, **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\exists 0 < r < R, \quad \exists M: \quad |f(z)| \leq M \quad \forall z \in D_{0,r}(a) \tag{25}$$

Доказательство.

1. Необходимость

   Из условия на устранимую особую точку и (24) следует, что f раскладывается в степенной ряд, а значит, $f(z) \in \mathcal{A}\big(\mathrm{B}_R(a)\big)$ (по последней теореме предыдущего семестра).

2. Достаточность

Возьмём $0 < \varepsilon < r$ и $\varepsilon < |z-a| < r$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta$$

$$\left| -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta \right| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_\varepsilon} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|}\,|\,\mathrm{d}\,\zeta|$$

$$|\zeta - z| \ge |z-a| - |\zeta - a| = |z-a| - \varepsilon \ge \frac{1}{2}|z-a|$$

$$\underset{(25)}{\Longrightarrow} \left| -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta \right| \le \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{\frac{1}{2}|z-a|}\cdot 2\pi\varepsilon = \frac{2M\varepsilon}{|z-a|}$$

$$f(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_r} \frac{f(\varepsilon)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\,\mathrm{d}\,\zeta$$

□

24. Характеристика полюса

Теорема 19. Для того, чтобы a была полюсом **необходимо и достаточно**, чтобы

$$|f(z)| \xrightarrow[z\to a]{} +\infty \tag{26}$$

Доказательство.

1. Достаточность

$$f(z) = \sum_{n=1}^{n_0} c_{-n}(z-a)^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(z-a)^n$$

$$\Longrightarrow f(z) = (z-a)^{-n_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{n_0-n} + c_0(z-a)^{n_0} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^{n+n_0}\right) =$$
$$= (z-a)^{-n_0}\Big(c_{-n_0} + c_{-n_0+1}(z-a) + \ldots\Big)$$

$$\exists \delta_0 > 0 : \quad |c_{-n_0} + c_{-n_0+1}(z-a) + \ldots| \ge \frac{1}{2}|c_{-n_0}| \quad \text{при } |z-a| < \delta_0$$

$$\Longrightarrow |f(z)| \ge |z-a|^{-n_0}\cdot\frac{|c_{n_0}|}{2} \xrightarrow[z\to a]{} +\infty$$

2. Необходимость

$$(26) \Longrightarrow \exists \delta_1 : \quad |f(z)| > 1 \quad \text{при } |z-a| < \delta_1$$

$$\Longrightarrow f(z) \ne 0 \quad \text{при } z \in D_{0,\delta_1}(a) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(z) := \frac{1}{f(z)} \in \mathcal{A}\big(D_{0,\delta_1}(a)\big)$$

Понятно, что $\varphi(z) \not\equiv 0$

$$(26) \Longrightarrow |\varphi(z)| \xrightarrow[z\to 0]{} 0$$

Пусть $|\varphi(z)| < 1$

$$\Longrightarrow \varphi \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_{\delta_1}(a)\big) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(a) = 0$$

$$\Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \exists h \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_{\delta_1}(a)\big) : \quad \varphi(z) = (z-a)^{n_0}h(z), \quad h(z) \ne 0, \quad z \in \mathtt{B}_{\delta_2}(a)$$

$$\Longrightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^{n_0}}\cdot\frac{1}{h(z)}$$

$$\Longrightarrow g(z) = \frac{1}{h(z)} \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_{\delta_2}(a)\big)$$

$$\Longrightarrow g(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(a-a)^2 + \dots$$

$$\Longrightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^{n_0}}\Big(c_0 + c_1(z-a) + \dots\Big) = c_0(z-a)^{-n_0} + c_1(z-a)^{-n_0+1} + \dots$$

□

25. Характеристика существенно особой точки

Теорема 20. $f \in \mathcal{A}\big(D_{0,R}(a)\big)$

Для того, чтобы a была существенной особой точкой f, **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\exists\,\{\,z_n\,\}_{n=1}^{\infty},\ z_n \neq a,\ z_n \to a, \quad \exists\,\{\,\zeta_n\,\}_{n=1}^{\infty},\ \zeta_n \neq a,\ \zeta_n \to a, \quad \exists M: \quad \begin{cases} |f(z_n)| \le M & \forall n,\\ |f(\zeta_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \end{cases}$$

Доказательство.

- Пусть $\nexists\,\{\,\zeta_n\,\}:\ \zeta_n \to a,\ |f(\zeta_n)| \to +\infty.$

$$\Longrightarrow \exists M_1, \quad \exists \delta_0 > 0: \quad \forall z \in D_{0,\delta_0}(a) \quad |f(z)| \le M_1$$

Тогда a — устранимая особая точка по характеристическому свойству устранимой особой точки.

- Пусть $\exists\,\{\,\zeta_n\,\},\ \zeta_n \to a,\ |f(\zeta_n)| \to +\infty.$
  - Если бы выполнялось $|f(z_n)| \xrightarrow[z\to a]{} +\infty$, то по характеристике полюса, a — полюс f.
  - Если неверно, что $|f(z_n)| \to +\infty$, то

$$\exists M, \quad \exists\,\{\,z_n\,\},\ z_n \to a: \quad |f(z_n)| \le M$$

Итак, при наличии последовательностей $\{\,z_n\,\}$ и $\{\,\zeta_n\,\}$ a не устранимая особая точка и не полюс.

□

26. Определение вычета; формулы для вычисления вычетов

Определение 11. $f \in \mathcal{A}(D_{0,R}(a)), \qquad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \qquad z \in D_{0,R}(a)$

Коэффициент c_{-1} называется *вычетом* функции f в точке a.

Обозначение. $c_{-1} = \operatorname{res}_f a, \qquad c_{-1} = \operatorname{res} f$

В соответствии с формулой (21) из доказательства теоремы о разложении в ряд Лорана

$$\operatorname{res}_f a = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho} f(z)\,\mathrm{d}\,z, \qquad 0 < \rho < R, \quad \gamma_\rho = \{\,z \mid |\,z-a| = \rho\,\}$$

Утверждение 6. $\varphi, \psi \in \mathcal{A}\big(D_{0,r}(a)\big), \qquad \psi(a) = 0, \quad \psi'(a) \neq 0, \qquad f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$

$$\Longrightarrow \operatorname{res}_f a = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$$

Доказательство. Выберем $r_a > 0$ так, чтобы при $z \in D_{0,r}(a) \setminus \{\,a\,\}$ выполнялось $\psi(z) \neq 0$. Пусть $v(z) = \frac{\psi(z)}{z-a}$.

Поскольку $\psi(z) = \psi(a) + \psi'(a)(z-a) + \dots$, то

$$\psi(a) = 0 \Longrightarrow v(z) = \psi'(a) + \frac{1}{2}\psi''(a)(z-a) + \dots, \qquad v \in \mathcal{A}\big(D_R(a)\big)$$

Пусть $g(z)=\frac{\varphi(z)}{v(z)}$, $\quad g\in\mathcal{A}\big(D_{0,r_0}(0)\big)$, поскольку $v(z)\neq 0$, $z\in D_{r_a}(a)$.

$$f(z)=\frac{g(z)}{z-a}=\frac{1}{z-a}\big(g(a)+g'(a)(z-a)+\cdots\big)=\frac{g(a)}{z-a}+g'(a)+\frac{1}{2}g''(a)\cdot(z-a)+\cdots$$

$$\Longrightarrow \operatorname{res}_f a=g(a)=\frac{\varphi(a)}{v(a)}$$

При этом,

$$\psi(z)=(z-a)v(z),\qquad \psi'(z)=v(z)+(z-a)v'(z),\qquad \psi'(a)=v(a)$$

□

Утверждение 7. $\varphi(a)\in\mathcal{A}\big(D_R(a)\big),\qquad n\geq 2,\qquad f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$

$$\Longrightarrow \operatorname{res}_f a=\frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(a)$$

Доказательство.

$$\varphi(z)=\varphi(a)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k,\qquad z\in D_R(a)$$

$$f(z)=\frac{\varphi(a)}{(z-a)^n}+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^{k-n}+\frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{z-a}+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^{k-n}$$

□

27. Теорема о вычетах

Теорема 21. Ω — область, $\quad E\subset\Omega,\quad \overline{G}\subset\Omega,\quad E\subset G,\quad f\in\mathcal{A}(\Omega\setminus E)$
$\Gamma=\partial G$ состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых.

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(z)\,\mathrm{d}\,z=\sum_{a\in E}\operatorname{res}_f a$$

Доказательство. Для $\forall a\in E$ выберем $R_a>0$ так, чтобы $\{\,z\mid |\,z-a|<R_a\,\}\cap E=\{\,a\,\}$.
Пусть $\rho_a\leq\frac{1}{3}R_a$ и $\overline{D}_{\rho_a}(a)\subset G$. Тогда для $a_1,a_2\in E$, $\ a_1\neq a_2$ имеем

$$\overline{D}_{\rho_{a_1}}(a)\cap\overline{D}_{\rho_{a_2}}(a)\neq\emptyset$$

Пусть $U=G\setminus\bigcup_{a\in E}\overline{D}_{\rho_a}(a)$. Тогда $f\in\mathcal{A}\big(\Omega\setminus\bigcup_{a\in E}\overline{D}_{\rho_a}(a)\big)$, поэтому по теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U} f(z)\,\mathrm{d}\,z=0$$

Обозначим через $\gamma(a)$ окружность $\{\,z\mid |\,z-a|=\rho_a\,\}$. Тогда $\overset{\curvearrowleft}{\partial}U=\overset{\curvearrowleft}{\partial}G\cup\bigcup_{a\in E}\overset{\curvearrowright}{\gamma}(a)$, поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\partial}G} f(z)\,\mathrm{d}\,z+\sum_{a\in E}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\gamma}(a)} f(z)\,\mathrm{d}\,z=0\qquad\Longrightarrow\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} f(z)\,\mathrm{d}\,z=$$

$$=-\sum_{a\in E}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\gamma}(a)} f(z)\,\mathrm{d}\,z=\sum_{a\in E}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma}(a)} f(z)\,\mathrm{d}\,z=\sum_{a\in E}\operatorname{res}_f a$$

□

Часть II

Теория меры

Все утверждения, приведённые здесь без доказательств, легко проверяются в случае $\mathbb{R}$ при помощи картинок.

Мера в нашем случае всегда будет обозначать меру Лебега.

28. Кольцо и σ-кольцо множеств; промежутки в $\mathbb{R}^m$ и их мера; элементарные множества и их меры

Определение 12. Имеется некоторое непустое множество множеств $\mathscr{R}$. Будем называть его *кольцом*, если

1. $A \in \mathscr{R},\ B \in \mathscr{R} \implies A \cup B \in \mathscr{R}$;
2. $A \in \mathscr{R},\ B \in \mathscr{R} \implies A \setminus B \in \mathscr{R}$.

В частности, $\emptyset \in \mathscr{R},\ A \cap B \in \mathscr{R}$.

Определение 13. $\mathscr{R}$ называется *σ-кольцом*, если

$$\{ A_n \}_{n=1}^{\infty}, \quad A_n \in \mathscr{R} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$$

Можно проверить, что

$$A_1 \setminus \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) \right) = \cap_{n=1}^{\infty} A_n \quad \implies \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$$

Определение 14. $A \in \mathbb{R}^{m \geq 2},\ B \in \mathbb{R}^m, \quad A = (a_1, \dots, a_m),\ B = (b_1, \dots, b_m), \quad a_j \leq b_j$.

Будем обозначать $\langle a, b \rangle$, где $\langle$ — это (или [, а $\rangle$ — это) или]. $\langle A, B \rangle$ будем также называть *промежутком* в $\mathbb{R}^m$.

Определение 15. *Мерой* промежутка будем называть

$$\operatorname{m} \langle A, B \rangle = \prod_{j=1}^{m} (b_j - a_j)$$

Определение 16. *Элементарным множеством* будем называть конечное объединение промежутков:

$$I = \bigcup_{k=1}^{N} \langle A_k, B_k \rangle$$

Обозначение. $\mathscr{E}$ — множество всех элементарных множеств.

Утверждение 8. $I \in \mathscr{E}$. Тогда I можно представить в виде объединения промежутков, таких что

$$\langle A_k, B_k \rangle \cap \langle A_l, B_l \rangle = \emptyset \quad \forall k \neq l$$

Определение 17. *Мерой* элементарного множества будем называть

$$\operatorname{m} I = \sum_{k=1}^{N} \operatorname{m} \left(\langle A_k, B_k \rangle \right)$$

Утверждение 9. Определение меры элементарного множества **корректно**, то есть, мера не зависит от способа разбиения.

Определение 18. Промежуток будем называть *открытым*, если все символы $\langle$ и $\rangle$ обозначают $($ и $)$.

Определение 19. Элементарное множество будем называть *открытым*, если $I = \bigcup (a_k, b_k)$.

29. Внешняя мера $\mathrm{m}^* E$ множества E

Пусть имеется некоторое множество $E \subset \mathbb{R}^m$. Обозначим через $U(E)$ множество наборов

$$U(E) = \{ \{ A_n \}_{n=1}^{\infty} \}, \qquad A_n \text{ — открытое элементарное множество},$$

таких, что $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Определение 20. *Внешней мерой* множества E называется

$$\mathrm{m}^* E = \inf_{\{ A_n \}_{n=1}^{\infty} \in U(E)} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}\, A_n \quad \leq +\infty$$

Если ряд расходится, приписываем внешней мере значение ∞.

Понятно, что m^* определена для любого множества. Также очевидно, что $\mathrm{m}^* \emptyset = 0$.

30. Свойства внешней меры

Свойства.

1. $\mathrm{m}^* E \geq 0$;
2. $E_1 \subset E_2 \implies \mathrm{m}^* E_1 \leq \mathrm{m}^* E_2$;
3. $I \in \mathscr{E} \implies \mathrm{m}^* I = \mathrm{m}\, I$;
4. $$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \implies \mathrm{m}^* E \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^* E_n.$$

Доказательство.

1. Очевидно.
2. $U(E_2) \subset U(E_1)$.
3. Очевидно.
4. Будем считать, что $\mathrm{m}^* E_n < \infty \quad \forall n$.
   Выберем $\forall \varepsilon > 0$, $\{ A_{n_k} \}_{k=1}^{\infty}$, $\quad A_{n_k} \in \mathscr{E}$, $\quad \{ A_{n_k} \} \subset U(E_n)$ такие, что

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}\, A_{n_k} < \mathrm{m}^* E_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{27}$$

   Тогда

   $$\{ A_{n_k} \}_{n=1}^{\infty}{}_{k=1}^{\infty} \in U(E)$$
   $$\implies \mathrm{m}^* E \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}\, A_{n_k} \right)$$

   (т. к. внешняя мера — это инфимум)

Применим теперь (27):

$$\sum\sum \mathrm{m}\, A_{n_k} \le \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{m}^* E_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^* E_n + \varepsilon$$

□

31. Функция $\mathrm{d}(A, B)$ и её свойства

Определим неотрицательное число

$$\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{m}^*(A \triangle B) \ge 0$$

Понятно, что $A \triangle \emptyset = A$, поэтому $\mathrm{d}(A, \emptyset) = \mathrm{m}^* A$.

Свойства.

1. $\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(B, A)$;
2. $\mathrm{d}(A, B) \le \mathrm{d}(A, C) + \mathrm{d}(C, B)$;
3. $\mathrm{d}(A_1 \cup A_2,\ B_1 \cup B_2) \le \mathrm{d}(A_1, B_1) + \mathrm{d}(A_2, B_2)$;
4. $\mathrm{d}(A_1 \cap A_2,\ B_1 \cap B_2) \le \mathrm{d}(A_1, B_1) + \mathrm{d}(A_2, B_2)$;
5. $\mathrm{d}(A_1 \setminus A_2,\ B_1 \setminus B_2) \le \mathrm{d}(A_1, B_1) + \mathrm{d}(A_2, B_2)$.

Доказательство. Все свойства основаны на теоретико-множественных соображениях. Например, 2 основано на включении

$$A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$$

Далее нужно воспользоваться свойством 4 внешней меры. □

Утверждение 10. $|\mathrm{m}^* A - \mathrm{m}^* B| \le \mathrm{d}(A, B)$

Доказательство. Пусть $\mathrm{m}^* A < \mathrm{m}^* B$. Тогда

$$\mathrm{m}^* B = d(B, \emptyset) \le \mathrm{d}(B, A) + \mathrm{d}(A, \emptyset) = \mathrm{d}(B, A) + \mathrm{m}^* A$$

□

32. Определение $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_F$

Определение 21. Будем говорить, что множество $A \subset \mathbb{R}^m$ *конечно-измеримо (по Лебегу)*, если

$$\exists \{\, A_n \,\}_{n=1}^{\infty}, \quad A_n \in \mathscr{E}: \quad \mathrm{d}(A_n, A) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Обозначение. $\mathfrak{M}_F$ — множество всех конечно-измеримых множеств.

Понятно, что $\mathscr{E} \subset \mathfrak{M}_F$.

Определение 22. Множество $B \subset \mathbb{R}^m$ будем называть *измеримым (по Лебегу)*, если

$$\exists \{\, A_n \,\}_{n=1}^{\infty}, \quad A_n \in \mathfrak{M}_F: \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Понятно, что $\mathfrak{M}_F \subset \mathfrak{M}$.

Замечание. В множестве $\mathbb{R}^m$ **не все** подмножества измеримы: $2^{R^m} \ne \mathfrak{M}$ (в отличие от внешней меры).

Для $B \in \mathfrak{M}$ будем рассматривать $\mathrm{m}^* B$.

33. $\mathfrak{M}$ — σ-кольцо

Теорема 22. Совокупность всех измеримых множеств является σ-кольцом.

Внешняя мера, определённая на $\mathfrak{M}$ обладает свойством *счётной аддитивности* (σ-*аддитивности*):

$$\{\, B_n \,\}_{n=1}^{\infty}, \quad B_n \in \mathfrak{M}, \quad B_n \cap B_k = \emptyset \quad \Longrightarrow \mathrm{m}^* \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^* B_n$$

Доказывать теорему не будем. Докажем, что $\mathfrak{M}_{\mathbf{F}}$ является кольцом, и внешняя мера на нём аддитивна.

Доказательство ($\mathfrak{M}_F$ — кольцо). Пусть есть $A \in \mathfrak{M}_F$ и $B \in \mathfrak{M}_F$. Тогда

$$\exists\, A_n \in \mathscr{E}: \quad \mathrm{d}(A_n, A) \to 0$$

$$\exists\, B_n \in \mathscr{E}: \quad \mathrm{d}(B_n, B) \to 0$$

Тогда, по одному из свойств d,

$$\mathrm{d}(A_n \cup B_n,\ A \cup B) \le \mathrm{d}(A_n, A) + \mathrm{d}(B_n, B) \to 0$$

$$\mathrm{d}(A_n \setminus B_n,\ A \setminus B) \le \mathrm{d}(A_n, A) + \mathrm{d}(B_n, B) \to 0$$

При этом, $A_n \cup B_n \in \mathscr{E}, \quad A_n \setminus B_n \in \mathscr{E}$.

$$\Longrightarrow A \cup B \in \mathfrak{M}_F, \quad A \setminus B \in \mathfrak{M}_F$$

□

34. m^* счётно-аддитивна на $\mathfrak{M}$

Теорема 23. Совокупность всех измеримых множеств является σ-кольцом.

Внешняя мера, определённая на $\mathfrak{M}$ обладает свойством *счётной аддитивности* (σ-*аддитивности*):

$$\{\, B_n \,\}_{n=1}^{\infty}, \quad B_n \in \mathfrak{M}, \quad B_n \cap B_k = \emptyset \quad \Longrightarrow \mathrm{m}^* \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^* B_n$$

Доказывать теорему не будем. Докажем, что $\mathfrak{M}_{\mathbf{F}}$ является кольцом, и внешняя мера на нём аддитивна.

Утверждение 11. $A, B \in \mathscr{E}$

$$\mathrm{m}(A \cup B) + \mathrm{m}(A \cap B) = \mathrm{m}\, A + \mathrm{m}\, B$$

Доказательство (аддитивность внешней меры). Пусть $A, B \in \mathfrak{M}_F, \quad A \cap B = \emptyset$. Тогда

$$\exists\, \{\, A_n \,\}, \{\, B_n \,\}: \quad \mathrm{d}(A_n, A) \to 0, \quad \mathrm{d}(B_n, B) \to 0$$

В соотношении 11 можно поставить внешнюю меру вместо меры:

$$\mathrm{m}^*(A_n \cup B_n) + \mathrm{m}^*(A_n \cap B_n) = \mathrm{m}^* A_n + \mathrm{m}^* B_n$$

$$|\, \mathrm{m}^*(A_n \cup B_n) - \mathrm{m}^*(A \cup B)| \le \mathrm{d}(A_n \cup B_n, A \cup B) \to 0$$

$$\Longrightarrow \mathrm{m}^*(A_n \cup B_n) \to \mathrm{m}^*(A \cup B)$$

$$\mathrm{m}^*(A_n \cap B_n) \to \mathrm{m}^*(A \cap B) = 0$$

$$\mathrm{m}^* A_n \to \mathrm{m}^* A, \qquad \mathrm{m}^* B_n \to \mathrm{m}^* B$$

Значит,

$$\mathrm{m}^*(A \cup B) = \mathrm{m}^* A + \mathrm{m}^* B$$

□

Теперь для $E \in \mathfrak{M}$ будем полагать $\mathrm{m}\, E = \mathrm{m}^* E$. Это — *мера Лебега*.

35. Простые функции; аппроксимация простыми функциями

Определение 23. $E \subset \mathbb{R}^m, \quad E \neq \emptyset.$
Характеристической функцией множества E называется функция $K_E(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$K_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Определение 24. *Простой функцией* $f_0 : E \to \mathbb{R}$ будем называть функцию, множество значений которой конечно.

Если $c_1, \dots, c_n$ — все различные значения функции $f_0, \quad E_j = \{ x \in E \mid f_0(x) = c_j \}$, то $E_j \cap E_k = \emptyset$, $\bigcup E_j = E$. Полагая $\chi_{E_j}(x) = K_{E_j}(x)\big|_E$, имеем соотношение

$$f_0(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}(x) \tag{28}$$

Теорема 24. $f : E \to \mathbb{R}$

1. Тогда существует последовательность простых функций, определённых на E таких, что
$$\forall x \in E \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$
2. Если множество E измеримо по Лебегу и функция f измерима, то все функции f_n можно выбрать измеримыми.
3. Если $f(x) \geq 0, \quad x \in E$, то можно выбрать функции $f_n(x)$, которые при $\forall x$ монотонно возрастают по n.

Доказательство.

1. Пусть $f(x) \geq 0 \quad \forall x$.
Положим для $n = 1, 2, \dots, \quad i = 1, \dots, n \cdot 2^n$
$$E_{ni} = \left\{ x \in E \mid \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}$$
$$E_{n0} = \{ x \in E \mid f(x) \geq n \}$$
Далее пусть $\chi_{E_{ni}}(x) = K_{E_{ni}}(x)\big|_E, \qquad i = 0, 1, \dots, n \cdot 2^n$, и пусть
$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{ni}}(x) + n\chi_{E_{n0}}(x) \tag{29}$$
Тогда для $x \in \bigcup E_{ni}$ имеем
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n}$$
Для $\forall x \in E$ возьмём $N > f(x)$, тогда $\forall n > N \quad f_n(x) \to f(x)$.
2. Если f измерима, то множества $E_{n\ i}$ измеримы из (29) следует измеримость f_n.
3. Монотонность f_n также следует из (29).
4. Для произвольной функции f положим $f = f^+ - f^-$ и (29) применим к f^+ и f^-.

$\square$

Замечание. Пусть $E_j \subset E$, не предполагаем условия $E_j \cap E_k = \emptyset, \quad E = \bigcup E_j$, числа c_j не обязательно различны,

$$f_1(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}(x) \tag{30}$$

Тогда f_1 — простая функция, которую можно записать в виде (28) с какими-то множествами E_l' и числами c_l'.

36. Примеры измеримых по Лебегу множеств

Примеры.

1. Любое элементарное множество A измеримо.
2. $\mathbb{R}^m$ измеримо.
3. Открытые множества измеримы.
4. Замкнутые множества измеримы.

Доказательство.

1. По определению.
2. $\mathbb{R}^m = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, где $a_n = (-n, \ldots, -n),\ b_n = (n, \ldots, n)$.
3. Пусть $\mathbb{Q}^m$ — множество всех точек с рациональными координатами в $\mathbb{R}^m$, $\quad G \subset \mathbb{R}^m$ открыто, $G \neq \emptyset$.
   Для любой точки $M \in G \cap \mathbb{Q}^m$ выберем максимальный промежуток $\big(a(M), b(M)\big)$ со следующими свойствами:
   - $a(M) = \big(a_1(M), \ldots, a_m(M)\big)$;
   - $b(M) = \big(b_1(M), \ldots, b_m(M)\big)$;
   - если $M = (M_1, \ldots, M_m)$, то $a_j(M) = M_j - \delta(M)$;
   - $b_j = M_j + \delta(M)$;
   - $\big(a(M), b(M)\big) \subset G$.

   Тогда
   $$G = \bigcup_{M \in G \cap \mathbb{Q}^m} \big(a(M), b(M)\big)$$
4. Если $F \subset \mathbb{R}^m$ замкнуто, то $F = \mathbb{R}^m \setminus \big(\mathbb{R}^m \setminus F\big)$, множество $\mathbb{R}^m \setminus F$ открыто.

□

37. Измеримые функции; теорема о множествах Лебега

Определение 25. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ измеримо, $E \neq \emptyset$, $\quad f : E \to \mathbb{R} \cup \{\, -\infty, +\infty \,\}$, $\quad a \in \mathbb{R}$.
Множествами Лебега будем называть множества

$$E_{<a}(f) = \{\, M \in E \mid f(M) < a \,\}, \quad E_{\le a}(f) = \{\, M \in E \mid f(M) \le a \,\}$$
$$E_{>a}(f) = \{\, M \in E \mid f(M) > a \,\}, \quad E_{\ge a}(f) = \{\, M \in E \mid f(M) \ge a \,\}$$

Определение 26. Будем говорить, что функция $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $\quad E \subset \mathfrak{M}$ *измерима по Лебегу*, если $\forall a \in \mathbb{R}$ имеем
$$E_{<a}(f), E_{\le a}(f), E_{>a}(f), E_{\ge a} \in \mathfrak{M}$$

Теорема 25. Для того, чтобы при $\forall a \in \mathbb{R}$ были измеримы множества Лебега, **необходимо и достаточно**, чтобы при $\forall a \in \mathbb{R}$ было измеримо какое-то из них.

Доказательство. Имеем следующие соотношения:

$$E_{\geq a} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in E \mid f(x) > a - \frac{1}{n} \right\}, \qquad E_{<a} = E \setminus E_{\geq a}$$

$$E_{\leq a} = \bigcap x \in E \mid f(x) < a + \frac{1}{n}, \qquad E_{>a} = E \setminus E_{\leq a}$$

Поскольку $\mathfrak{M}$ — кольцо, $E \in \mathfrak{M}$,

$$E_{>a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a \implies E_{\geq a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a$$

$$E_{\geq a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a \implies E_{<a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a$$

$$E_{<a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a \implies E_{\leq a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a$$

$$E_{\leq a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a \implies E_{>a} \in \mathfrak{M} \quad \forall a$$

□

38. Измеримость $|f|$

Свойство. f измерима $\implies$ $|f|$ измерима.

Доказательство. $E_{<a}(|f|) = E_{<a}(f) \cap E_{>-a}(f)$. □

39. Измеримость $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)$, $\sup\limits_n f_n(x)$

Свойство. Пусть f_n измерима на E. Тогда

$$g_+(x) := \sup_{n\geq 1} f_n(x), \quad h_+(x) := \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$$

измеримы.

Доказательство. Имеем соотношение

$$E_{>a}(g_+) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{>a}(f_n)$$

Положим $g_m = \sup\limits_{n\geq m} f_n(x)$, тогда g_m измеримы и $h(x) = \inf\limits_m g_m(x)$. □

40. Измеримость $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)$, $\inf\limits_n f_n(x)$

Свойство. Пусть f_n измерима на E. Тогда

$$g_-(x) := \inf_{n\geq 1} f_n(x), \quad h_-(x) := \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$$

измеримы.

Доказательство. Имеем соотношение

$$E_{<a}(g_-) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{<a}(f_n)$$

Положим $g_m(x) = \inf\limits_{n\geq m} f_n(x)$, тогда g_m измеримы и $h(x) = \sup\limits_m g_m(x)$. □

41. Измеримость f^+, f^-

Свойство. Положим $f^+(x) = \max\{\, f(x), 0\,\}$, $\quad f^-(x) = -\min\{\, f(x), 0\,\}$.
Тогда f^+, f^- измеримы.

Доказательство. Пусть f, g измеримы.
Положим $f_{2n-1}(x) = f(x)$, $\quad f_{2n}(x) = g(x)$, тогда

$$\sup_{n\geq 1} f_n(x) = \max\{\, f(x), g(x)\,\}, \quad \inf_{n\geq 1} f_n(x) = \min\{\, f(x), g(x)\,\}$$

То есть, $\max\{\, f(x), g(x)\,\}$ и $\min\{\, (x), g(x)\,\}$ измеримы.
Если $c \in \mathbb{R}$, $\quad f$ измерима, то и cf измерима:

- если $c > 0$, то $E_{>ca}(cf) = E_{>a}(f)$;
- если $c < 0$, то $E_{>ca}(cf) = E_{<a}(f)$;
- если $c = 0$, то $0 \cdot f \equiv f$.

$\square$

42. Измеримость $\lim f_n(x)$

Свойство. Пусть $f_n(x)$ измеримы $\forall n$ и $\forall x \in E \quad \exists f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}$.
Тогда f измерима.

Доказательство. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. $\square$

43. Измеримость $f_n + g_n$, $f_n g_n$

Свойство. Пусть $F(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$, $\quad f(x), g(x)$ измеримы.
Тогда $h(x) \coloneqq F\big(f(x), g(x)\big)$ измерима.

Доказательство. Пусть $G_a = \big\{\, (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid F(u,v) > a\,\big\}$.
Тогда $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2) \implies G_a$ открыто в $\mathbb{R}^2$.
Пусть $G_a \neq \emptyset$. Тогда можно представить $G_a = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, где $a_n = (u_n^-, v_n^-)$, $\ b_n = (u_n^+, v_n^+)$.
Теперь

$$\big\{\, x \in E \mid u_n^- < f(x) < u_n^+ \,\big\} = E_{>u_n^-}(f) \cap E_{<u_n^+}(f), \quad \big\{\, x \in E \mid v_n^- < g(x) < v_n^+ \,\big\} = E_{>v_n}(g) \cap E_{<v_n^+}(g),$$

поэтому

$$\begin{aligned}\big\{\, x \in E \mid \big(f(x), g(x)\big) \in (a_n, b_n)\,\big\} = \big\{\, x \in E \mid u_n^- < f(x) < u_n^+ \,\big\} \cap \big\{\, x \in E \mid v_n^- < g(x) < v_n^+ \,\big\} = \\ = E_{>u_n^-}(f) \cap E_{<u_n^+}(f) \cap E_{>v_n^-}(g) \cap E_{<v_n^+}(g)\end{aligned}$$

$$E_{>a}(h) = \big\{\, x \in E \mid \big(f(x), g(x)\big) \in G_a\,\big\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big\{\, x \in E \mid \big(f(x), g(x)\big) \in (a_n, b_n)\,\big\}$$

Это доказывает свойство. $\square$

В частности, $F_1(u,v) = u + v \in (\mathbb{R}^2)$ и $F_2(u,v) = uv \in (\mathbb{R}^2)$.

44. Определение $I_E(f)$ и его свойства

Определение 27. Пусть E, E_j измеримы, $E = \bigcup E_j$, $c_{j_0} = 0$, если $\mathrm{m}\, E_{j_0} = +\infty$. Положим

$$I_E\Big(\sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}\Big) := \sum_{j=1}^{n} c_j \,\mathrm{m}\, E_j \tag{31}$$

В этой формуле считаем, что $0 \cdot +\infty = 0$.

Свойства. f — простая функция, записанная в виде (30).

1. $a \le f(x) \le b$, $\mathrm{m}\, E < +\infty$
$$\implies a \,\mathrm{m}\, E \le I_E(f) \le b \,\mathrm{m}\, E$$
2. Если $f(x) \le g(x)$, $x \in E$, то $I_E(f) \le I_E(g)$.
3. Если $c \in \mathbb{R}$, то $I_E(cf) = cI_E(f)$.
4. Если $\mathrm{m}\, E = 0$, то $I_E(f) = 0$.
5. $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, $F_1 \cup F_2 = E$
$$I_{F_1}(f) + I_{F_2}(f) = I_E(f)$$

Доказательство (5). Пусть $f(x) = \sum c_j \chi_{E_j}$, пусть $E'_j = E_j \cap F_1$, $E''_j = E_j \cap F_2$.
Тогда $\mathrm{m}\, E'_j + \mathrm{m}\, E''_j = \mathrm{m}\, E_j$,

$$I_{F_1}(f) = \sum c_j \,\mathrm{m}\, E'_j, \qquad I_{F_2}(f) = \sum c_j \,\mathrm{m}\, E''_j, \qquad I_E(f) = \sum c_j \,\mathrm{m}\, E_j$$

Отсюда следует свойство. □

45. Определение интеграла Лебега для $f(x) \ge 0$

Определение 28.
$E \subset \mathbb{R}^m$ измеримо, $E \ne \emptyset$, $f : E \to \mathbb{R} \cup \{ +\infty \}$, $f(x) \ge 0$ $\forall x \in E$, f измерима.
Через $\mathtt{B}(f)$ обозначим множество всех простых функций $f_0 : E \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

- $f_0(x) \ge 0$;
- f_0 измерима;
- $f_0(x) \le f(x)$ $\forall x \in E$.

Интегралом Лебега назовём следующую величину

$$\int_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} := \sup \{ I_E(f_0) \mid f_0 \in \mathtt{B}(f) \} \tag{32}$$

Определение 29. Если $\int_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} < +\infty$, то функцию f называют *суммируемой* на множестве E.

Обозначение. $f \in \mathscr{L}(E)$

46. Определение интеграла Лебега для функции любого знака

Определение 30. Если $f : E \to \mathbb{R} \cup \{ -\infty, +\infty \}$ может принимать значения разных знаков, считаем $f = f^+ - f^-$ и называем f *суммируемой*, если $f^+ \in \mathscr{L}(E)$ и $f^- \in \mathscr{L}(E)$. Тогда полагаем

$$\int_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} := \int_E f^+ \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} - \int_E f^- \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \tag{33}$$

47. Счётная аддитивность функции $\int\limits_A f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$: характеристическая функция, простая функция f

Теорема 26. $f \in \mathscr{L}(E), \quad A \in \mathfrak{M}, \quad A \subset E, \quad \varphi(A) = \int\limits_A f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$.

Тогда φ счётно-аддитивна на $\mathfrak{M}$, суженном на E.

Доказательство. Требуется установить равенство

$$\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n), \qquad \text{если } A_n \subset E, \quad A_n \cap A_k = \emptyset \tag{34}$$

1. Пусть $f(x) = \chi_F(x), \quad F \subset E$, тогда

$$\varphi(A) = \int\limits_A \chi_F(x) \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = I_E(\chi_{F \cap A}) = \mathrm{m}(F \cap A)$$

$$\varphi(A_n) = I_E(\chi_{F \cap A_n}) = \mathrm{m}(F \cap A_n)$$

   В силу счётной аддитивности меры Лебега имеем $\mathrm{m}(F \cap A) = \sum \mathrm{m}(F \cap A_n)$, откуда следует (34).

2. $f(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{F_j}(x)$.

$$\varphi(A) = \int\limits_A \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{F_j} \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = I_A\big(\sum c_j \chi_{F_j}\big) = \sum c_j \,\mathrm{m}(F_j \cap A)$$

$$\varphi(A_n) = I_{A_n}\big(\sum c_j \chi_{F_j}\big) = \sum c_j \,\mathrm{m}(F_j \cap A_n)$$

   Отсюда следует (34).

□

48. Счётная аддитивность $\int\limits_A f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$: $f(x) \geq 0$

Теорема 27. $f \in \mathscr{L}(E), \quad A \in \mathfrak{M}, \quad A \subset E, \quad \varphi(A) = \int\limits_A f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$.

Тогда φ счётно-аддитивна на $\mathfrak{M}$, суженном на E.

Доказательство ($0 \leq f(x) \leq +\infty, \quad f$ измерима)**.** Пусть $f_0 \in \mathtt{B}(f)$. Тогда, по пункту 2,

$$I_A(f_0) = \int\limits_A f_0 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f_0 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \leq \sum \varphi(A_n)$$

$$\Longrightarrow \varphi(A) = \sup\{\, I_A(f_0) \mid f_0 \in \mathtt{B}(f) \,\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

Поскольку $f \in \mathscr{L}(E)$, то $\varphi(A) < +\infty, \quad \varphi(A_n) < +\infty$.
Возьмём $\forall N$ и зафиксируем $\varepsilon > 0$.
Выберем $f_1, \ldots, f_N$ — простые функции, $f_j \in \mathtt{B}(f)$, удовлетворяющие условию

$$I_{A_j}(f_j) > \int\limits_{A_j} f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} - \frac{\varepsilon}{N}, \quad j = 1, \ldots, N$$

Определим функцию $f_0 : E \to \mathbb{R}$:

$$f_0(x) = \begin{cases} f_j(x), & j \geq 2, \quad x \in A_j, \\ f_1(x), & x \in E \setminus \bigcup_{n=2}^N A_n \end{cases}$$

Тогда $f_0 \in \mathtt{B}(f)$, $\quad \bigcup_{n=1}^N A_n \subset A$ и по пункту 2

$$\varphi(A) \geq \varphi\Big(\bigcup_{n=1}^N A_n\Big) \geq I_{\bigcup A_n}(f_0) = \sum_{n=1}^N I_{A_n}(f_0) = \sum_{n=1}^N I_{A_n}(f_n) > \sum\Big(\varphi(A_n) - \frac{\varepsilon}{N}\Big) = \sum \varphi(A_n) - \varepsilon$$

В силу произвольности N и $\varepsilon > 0$

$$\implies \varphi(A) \geq \sum_{n=1}^\infty \varphi(A_n)$$

□

49. Счётная аддитивность $\int\limits_A f \, \mathrm{d}\,\mathrm{m}$: $f(x) \in \mathscr{L}(E)$

Из (33) следует, что достаточно установить (34) для $f(x) \geq 0, \quad x \in E$.

50. Следствие для $f \sim g$

Поскольку из свойства 4 следует, что $\int\limits_E f \, \mathrm{d}\,\mathrm{m} = 0$, если $\mathrm{m}\, E = 0$, то из теоремы получаем важное следствие.

Следствие. Пусть $f_1, f_2 \in \mathscr{L}(E), \quad \mathrm{m}\,\{\, x \in E \mid f_1(x) \neq f_2(x) \,\} = 0$. Тогда

$$\int\limits_E f_1 \, \mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_E f_2 \, \mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

Доказательство. Пусть $F = \{\, x \in E \mid f_1(x) \neq f_2(x) \,\}$, тогда

$$\int\limits_E f_1 \, \mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E \setminus F} f_1 \, \mathrm{d}\,\mathrm{m} + \int\limits_F f_1 \, \mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E \setminus F} f_1 \, \mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E \setminus F} f_2 \, \mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E \setminus F} f_2 \, \mathrm{d}\,\mathrm{m} + \int\limits_F f_2 \, \mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_E f_2 \, \mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

□

51. $\Big|\int\limits_E f \, \mathrm{d}\,\mathrm{m}\Big| \leq \int\limits_E |f| \, \mathrm{d}\,\mathrm{m}$

Теорема 28. Пусть $f \in \mathscr{L}(E)$, тогда $|f| \in \mathscr{L}(E)$ и

$$\Big|\int\limits_E f \, \mathrm{d}\,\mathrm{m}\Big| \leq \int\limits_E |f| \, \mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

Доказательство. Пусть $E_+ = \{\, x \in E \mid f(x) \geq 0 \,\}, \quad E_- = \{\, x \in E \mid f(x) < 0 \,\}$.
Тогда $\int\limits_E f \, \mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E_+} f \, \mathrm{d}\,\mathrm{m} + \int\limits_{E_-} f \, \mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_E f^+ \, \mathrm{d}\,\mathrm{m} - \int\limits_E f^- \, \mathrm{d}\,\mathrm{m}$,

$$\int\limits_E |f| \, \mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E_+} + \int\limits_{E_-} = \int\limits_{E_+} f^+ \, \mathrm{d}\,\mathrm{m} + \int\limits_{E_-} f^- \, \mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_E f^+ \, \mathrm{d}\,\mathrm{m} + \int\limits_E f^- \, \mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

□

52. Дальнейшие свойства интеграла Лебега

Свойства.

1. Пусть $\exists\, c < \infty$ такая, что $|f(x)| \le c, \quad x \in E, \quad f$ измерима на E и $\mathrm{m}\, E < +\infty$. Тогда $f \in \mathscr{L}(E)$.
2. Если f измерима, $\mathrm{m}\, E < \infty, \quad a \le f(x) \le b, \quad x \in E$, то
$$a\,\mathrm{m}\,E \le \int\limits_E f \,\mathrm{d}\, m \le b\,\mathrm{m}\,E$$
3. Если $f, g \in \mathscr{L}(E)$ и $f(x) \le g(x), \quad x \in E$, то
$$\int\limits_E f \,\mathrm{d\,m} \le \int\limits_E g \,\mathrm{d\,m}$$
4. $f \in \mathscr{L}(E), \quad c \in \mathbb{R}$
$$\implies \begin{cases} cf \in \mathscr{L}(E), \\ \int\limits_E cf \,\mathrm{d\,m} = c \int\limits_E f \,\mathrm{d\,m} \end{cases}$$
5. Если $\mathrm{m}\, E = 0, \quad f$ измерима, то
$$\int\limits_E f \,\mathrm{d\,m} = 0$$
6. Если $f \in \mathscr{L}(E), \quad F \subset E, \quad F$ измеримо, то $f \in \mathscr{L}(F)$.
7. Пусть $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Тогда $f + g \in \mathscr{L}(E)$ и
$$\int\limits_E (f+g) \,\mathrm{d\,m} = \int\limits_E f \,\mathrm{d\,m} + \int\limits_E g \,\mathrm{d\,m}$$

Доказательство.

1. $f \in \mathscr{L}(E) \iff |f| \in \mathscr{L}(E)$ и для любой простой функции $s: \ 0 \le s(x) \le |f(x)|$ справедливо $s(x) \le c$, поэтому
$$\int\limits_E s \,\mathrm{d\,m} \le \int\limits_E c \,\mathrm{d\,m} = c\,\mathrm{m}\,E, \qquad \int |f| \,\mathrm{d\,m} \le c\,\mathrm{m}\,E$$
2. Аналогично.
3. Без доказательства.
4. Докажем для $f(x) \ge 0, \quad x \in E, \quad c > 0$. Пусть $s \in \mathtt{B}(F)$
Тогда $cs \in \mathtt{B}(cf)$,
$$\int\limits_E cs \,\mathrm{d\,m} = \sum_{j=1}^{n} c a_j \,\mathrm{m}\, F_j = c \sum_{j=1}^{n} a_j \,\mathrm{m}\, F_j = c \int\limits_E s \,\mathrm{d\,m},$$
если $s(x) = \sum a_j \chi F_j(x), \quad F_j \cap F_k = \emptyset$.
Переходя к супремуму, получаем нужное свойство.
5. Для любой простой функции $s \in \mathtt{B}(|f|)$ имеем
$$I_E(s) = 0 \implies \int\limits_E |f| \,\mathrm{d\,m} = 0 \implies \int\limits_E f \,\mathrm{d\,m} = 0$$

6. Для $\forall s \in \mathtt{B}(|f|)$ на множестве F положим $s_0(x) = \begin{cases} s(x), & x \in F \\ 0 \end{cases}$. Тогда

$$\int\limits_E s_0 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_F s \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \leq \int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

$$\int\limits_F |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \leq \int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

□

53. Интеграл Римана и интеграл Лебега

Теорема 29. Пусть функция f интегрируема по Риману на промежутке (a, b).
Тогда она измерима по Лебегу на множестве (a, b), суммируема, и справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x = \int\limits_{(a,b)} f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

54. Теорема Фубини

Теорема 30. Имеется некое множество $E \subset \mathbb{R}^{m+n}, \quad m, n \geq 1, \quad E \subset \mathfrak{M}_{m+n}$

$$M \in \mathbb{R}^{m+n}, \quad M = (X, Y), \quad X \in \mathbb{R}^m, \ Y \in \mathbb{R}^n$$

Определим множества

$$E(X, \cdot) = \{\, Y \in \mathbb{R}^n \mid (X, Y) \in E \,\}, \qquad E(\cdot, Y) = \{\, X \in \mathbb{R}^m \mid (X, Y) \in E \,\}$$

Тогда

1. - Для m-п. в. $X \qquad E(X, \cdot) \in \mathfrak{M}_n$.
   - Для n-п. в. $Y \qquad E(\cdot, Y) \in \mathfrak{M}_m$
2. Пусть μ_k — мера Лебега в $\mathbb{R}^k$. Тогда

$$\mu_{m+n} E = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mu_n E(X, \cdot) \,\mathrm{d}\,\mu_m(X) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mu_m E(\cdot, Y) \,\mathrm{d}\,\mu_n(Y)$$

3. $f : E \to \mathbb{R}$

$$\forall X \in \mathbb{R}^m \quad f_X : E(X, \cdot) \to \mathbb{R} : \quad f_X(Y) = f(X, Y)$$
$$\forall Y \in \mathbb{R}^n \quad f_Y : E(\cdot, Y) \to \mathbb{R} : \quad f_Y(X) = f(X, Y)$$

Для m-п. в. $X \qquad f_X$ измерима по Y на $E(X, \cdot)$.
Для n-п. в. $Y \qquad f_Y$ измерима по X на $E(\cdot, Y)$.

4. $f \in \mathscr{L}(E)$. Тогда
   - для m-п. в. $X \qquad f_X \in \mathscr{L}\big(E(X, \cdot)\big)$;
   - для n-п. в. $Y \qquad f_Y \in \mathscr{L}\big(E(\cdot, Y)\big)$;
   -

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mu_{m+n} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \Big(\int\limits_{E(X,\cdot)} f_X \,\mathrm{d}\,\mu_n \Big) \,\mathrm{d}\,\mu_m(X) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{E(\cdot,Y)} f_Y \,\mathrm{d}\,\mu_m \Big) \,\mathrm{d}\,\mu_n(Y),$$

55. Параметризованная поверхность в $\mathbb{R}^m$; измеримые множества на параметризованной поверхности

Определение 31. $D \subset \mathbb{R}^n$ открыто, связно, $\quad m > n$.
$\mathcal{C}^1$-поверхностью будем называть отображение $F : D \to \mathbb{R}^m$ такое, что $F \in \mathcal{C}^1(D)$, т. е.

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}, \quad f_k \in \mathcal{C}^1(D),$$

F — биекция, $\quad \operatorname{rank} \mathcal{D}F(X) = n \quad \forall X \in D$.

Определение 32. $S = F(D), \quad E \subset S$
Будем говорить, что E *S-измеримо*, если $F^{-1}(E) \subset \mathfrak{M}_n$

56. Определение $\mu_S(E)$ для параметризованной поверхности S

Определение 33. Определим *S-меру*:

$$\mu_S E := \int\limits_{F^{-1}(E)} \sqrt{\det\Big(\big(\mathcal{D}F(X)\big)^T \mathcal{D}F(X)\Big)} \,\mathrm{d}\,\mu_n(X)$$

Определение 34. $F : S \to \mathbb{R}$
Будем говорить, что f *S-измерима*, если $\varphi(X) = f\big(F(X)\big)$ измерима на $F^{-1}(E)$.

57. Кусочно-гладкие поверхности S; $\mu_S(E)$

Определение 35. *Кусочно-гладкой* поверхностью будем называть $S = \bigcup_{k=1}^N S_k$, где S_k — $\mathcal{C}^1$-поверхность, при этом $S_k \cap S_l = \emptyset$ или $\mu_{S_k}(S_k \cap S_l) = 0$.

Определение 36. $E \subset S$
Будем говорить, что E *S-измеримо*, если $E \cap S_k \quad S_k$-измеримо $\forall k$

$$\mu_S E = \sum_{k=1}^N \mu_{S_k}(E \cap S_k)$$

Определение 37. $f : E \to \mathbb{R}$
Будем говорить, что f *S-измерима*, если $f\big|_{S_k}$ S_k-измерима $\forall k$.

58. $\int\limits_S f \,\mathrm{d}\,\mu_S$

Определение 38. $f \in \mathscr{L}_S(E)$

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mu_S := \int\limits_{F^{-1}(E)} f\big(F(X)\big)\sqrt{\det\Big(\big(\mathcal{D}F(X)\big)^T \mathcal{D}F(X)\Big)} \,\mathrm{d}\,\mu_n(X)$$

Определение 39. $f \in \mathscr{L}_S(E) \iff f\big|_{S_k} \in \mathscr{L}_{S_k}(E \cap S_k)$

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mu_S = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{E\cap S_k} f\big|_{S_k} \,\mathrm{d}\,\mu_{S_k}$$

59. Параметризованная ориентированная поверхность в $\mathbb{R}^3$

Определение 40. $D \subset \mathbb{R}^2$ — область, $\quad F : D \to \mathbb{R}^3$ — $\mathcal{C}^1$-поверхность в $\mathbb{R}^3$

$$S = F(D), \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad X \in D, \quad T_1(X) = \begin{bmatrix} f'_{1\ x_1}(X) \\ f'_{2\ x_1}(X) \\ f'_{3\ x_1}(X) \end{bmatrix}, \quad T_2(X) = \begin{bmatrix} f'_{1\ x_2}(X) \\ f'_{2\ x_2}(X) \\ f'_{3\ x_2}(X) \end{bmatrix}$$

Рассмотрим ориентацию $\overset{\circlearrowleft}{S} \quad \big(T_1(X), T_2(X)\big)$.

60. $\int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{S}} f(M)\,\mathrm{d}\,x_i \wedge \mathrm{d}\,x_j$ для параметризованной и кусочно-гладкой ориентированной поверхности в $\mathbb{R}^3$

Определение 41.

$$f \in \mathscr{L}_S(E), \quad E \subset S, \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}$$

$$\int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{S}} f(Y)\,\mathrm{d}\,y_i \wedge \mathrm{d}\,y_j := \int\limits_{F^{-1}(S)} f\big(F(X)\big) \begin{vmatrix} f'_{i\ x_1}(X) & f'_{i\ x_2}(X) \\ f'_{j\ x_1}(X) & f'_{j\ x_2}(X) \end{vmatrix} \mathrm{d}\,\mu_2(X)$$

Определение 42. $\overset{\circlearrowleft}{S} = \bigcup_{k=1}^{N} \overset{\circlearrowleft}{S}_k$ — *ориентированная кусочно-гладкая* поверхность в $\mathbb{R}^3$, $\quad E \subset S$.

$$\int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{S}} f(Y)\,\mathrm{d}\,y_i \wedge \mathrm{d}\,y_j := \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{S}} f\big|_{S_k} \,\mathrm{d}\,y_i \wedge \mathrm{d}\,y_j$$

61. Формула Гаусса—Остроградского

Теорема 31. $V \subset \mathbb{R}^3$ ограничено, связно, $\quad \partial V = \bigcup_{k=1}^{N} \overline{S}_k, \quad S_k \cap S_l = \emptyset$
$\overset{\circlearrowleft}{S}_k, \quad Y \in S_k \quad \big(T_1(Y), T_2(Y)\big), \quad T_1(Y) \times T_2(Y)$ направлен вне V, $\quad \varphi \in \mathcal{C}(\overline{V}), \quad \varphi'_{y_i} \in \mathcal{C}(\overline{V})$

$$\sigma = \begin{cases} 1, & (i, j, k) \text{ — чётная,} \\ -1, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\partial V}} \varphi(Y)\,\mathrm{d}\,y_j \wedge \mathrm{d}\,y_k = \sigma \int\limits_V \varphi'_{y_i}(Y)\,\mathrm{d}\,\mu_3(Y)$$

62. Формула Грина

Теорема 32. $D \subset \mathbb{R}^2$ — область, $\quad f \in \mathcal{C}(\overline{D}), \quad f'_{x_1} \in \mathcal{C}(\overline{D}), \quad g \in \mathcal{C}(\overline{D}), \quad g'_{x_2} \in \mathcal{C}(\overline{D}), \quad M = (x_1, x_2)$.

Тогда

$$\int\limits_{\circlearrowleft \partial D} f(M)\,\mathrm{d}\,x_2 = \int\limits_D f'_{x_1}(M)\,\mathrm{d}\,\mu_2(M), \qquad \int\limits_{\circlearrowleft \partial D} g(M)\,\mathrm{d}\,x_1 = -\int\limits_D g'_{x_2}(M)\,\mathrm{d}\,\mu_2(M)$$

63. Коэффициенты Фурье; формула для частичной суммы ряда Фурье

Определение 43. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}), \quad f(x+2\pi)=f(x) \quad \forall x, \quad f\in\mathscr{L}([0,2\pi])$

Функции f сопоставляются *коэффициенты Фурье* и *ряд Фурье*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

Рассмотрим частичную сумму

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\big(\cos ky\cdot\cos kx + \sin ky\cdot\sin kx\big)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}\big(\cos ky\cdot\cos kx + \sin ky\cdot\sin kx\big)\Big)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\Big(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(y-x)\Big)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

Сумму вычислим отдельно:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt, \qquad D_n(2\pi l) = n + \frac{1}{2}$$

Будем считать, что $t \neq \pi n$. Тогда $\sin\frac{t}{2} \neq 0$.

$$\sin\frac{t}{2}D_n(t) = \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{t}{2}\cdot\cos kt$$

При этом,

$$\sin\frac{t}{2}\cdot\cos kt = \frac{1}{2}\Big(\sin(k+\frac{1}{2})t - \sin(k-\frac{1}{2})t\Big)$$

Тогда

$$\sin\frac{t}{2}D_n(t) = \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\Big(\sin(k+\frac{1}{2})t - \sin(k-\frac{1}{2})t\Big) = \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\Big(\sin\frac{3t}{2} - \sin\frac{t}{2} + \sin\frac{5t}{2} - \dots + \sin(n+\frac{1}{2})t\Big)$$

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

Пусть $y - x = t$.

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(y-x)}{\sin\frac{y-x}{2}}\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

Утверждение 12. $\varphi\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}), \quad \varphi(x)=\varphi(x+2\pi) \quad \forall x, \quad \varphi(x)\in\mathscr{L}([0,2\pi])$

$$\Longrightarrow \forall a\in\mathbb{R} \quad \varphi\in\mathscr{L}([a,a+2\pi]), \qquad \int\limits_{[0,2\pi]}\varphi\,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{[a,a+2\pi]}\varphi\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

Применим это утверждение:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_x^{x+2\pi} f(y)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(y-x)}{\sin\frac{y-x}{2}}\,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}\,t =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}(t)$$

64. Лемма Римана—Лебега

Лемма 3. $E \subset \mathbb{R}, \quad E \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}), \quad \psi$ измерима на $E, \quad \psi \in \mathscr{L}(E)$

$$\implies \int\limits_E \cos Ax\psi(x)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \xrightarrow[|A|\to\infty]{} 0$$

$$\int\limits_E \sin Ax\psi(x)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \xrightarrow[|A|\to\infty]{} 0$$

65. Признак Дини сходимости ряда Фурье

Теорема 33. $f(x) = f(x+2\pi), \quad f \in \mathscr{L}([0,2\pi]), \quad x \in (-\pi,\pi)$

$$\varphi(t) = \frac{f(x+t)-f(x)}{t} \in \mathscr{L}(-\varepsilon,\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$$

$$\implies S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

Доказательство.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\Big)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\Big)\,\mathrm{d}\,t = 1$$

Отсюда

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m} - f(x)\cdot 1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x+t)-f(x)\big)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}\,\mathrm{m} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\varepsilon}\dots + \frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\dots + \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\dots$$

Рассмотрим первый интеграл:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\varepsilon}\frac{f(x+t)-f(x)}{\sin\frac{t}{2}}\cdot\sin(n+\frac{1}{2})t\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

$$\big|\sin\frac{t}{2}\big| \geq \frac{2}{\pi}\cdot\frac{|t|}{2} = \frac{|t|}{\pi} \geq \frac{\varepsilon}{\pi} \qquad \implies \qquad \frac{f(x+t)-f(x)}{2\sin\frac{t}{2}} \in \mathscr{L}(-\pi,-\varepsilon), \quad \in \mathscr{L}(\varepsilon,\pi)$$

Теперь

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\varepsilon}\frac{f(x+t)-f(x)}{\sin\frac{t}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi}\dots \to 0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\Big(f(x+t)-f(x)\Big)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\underbrace{\frac{f(x+t)-f(x)}{t}}_{\varphi}\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\Big(f(x+t)-f(x)\Big)\Big(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}-\frac{2}{t}\Big)\sin(n+\frac{1}{2})t\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

Напомним, что

$$\frac{1}{\sin\tau}-\frac{1}{\tau}=\frac{\tau-\sin\tau}{\tau\sin\tau}=\frac{-\frac{\tau^3}{\tau}+\dots}{\tau\sin\tau}\in\mathcal{C}\Big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big]$$

□

66. Равенство Парсеваля

Теорема 34. $f^2\in\mathscr{L}[0,2\pi]$

$$\Longrightarrow\int_0^{2\pi}f^2\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}=2\pi a_0^2+\pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

67. Теорема о единственности ряда Фурье

Теорема 35. f,g измеримы на $\mathbb{R}$, $\quad f(x)=f(x+2\pi),\ g(x)=g(x+2\pi),\quad f,g\in\mathscr{L}(0,2\pi)$

$$a_0(f)=a_0(g),\quad a_n(f)=a_n(g),\quad b_n(f)=b_n(g)\quad\forall n\ge1$$

$$\Longrightarrow f\sim g$$

68. Преобразование Фурье; пример

Рассматриваем функции $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$.

Определение 44. $f=u+iv$
Будем говорить, что f *суммируема* на всей оси, если u и v суммируемы на всей оси.

Определение 45. $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R})$
Её *преобразованием Фурье* называется

$$\widehat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}f(x)e^{-ixt}\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}(x)$$

Определение 46. $\varphi\in\mathscr{L}(\mathbb{R})$
Её *обратным преобразованием Фурье* называется

$$\widetilde{\varphi}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}(t)$$

$$\widehat{\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$$

69. $\widehat{(f')}$; $\widehat{f}'$

Следующие формулы верны для широкого класса функций, который получается, если обосновать все шаги.

$$\widehat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-itx}\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}(x)$$

$$\widehat{f}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (-ix) e^{-itx} \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}(x) = \big(\widehat{-ixf(x)}\big)(t)$$

Рассмотрим преобразование Фурье от производной.

$$\widehat{(f')}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-itx} \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-itx} \,\mathrm{d}\,x =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{A \to \infty} \underbrace{\Big(f(x) e^{-itA} - f(-A) e^{itA}\Big)}_{0} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-it) f(x) e^{-itx} \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} it \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} \,\mathrm{d}\,x = it\widehat{f}(t)$$

70. Равенство Планшереля

Теорема 36. $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}), \quad |f|^2 \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$

$$\implies |\widehat{f}|^2 \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f|^2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{\mathbb{R}} |\widehat{f}|^2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

71. $\widetilde{\widehat{f}}$

Утверждение 13. $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}), \quad \widehat{f} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}), \quad |f|^2, |\widehat{f}|^2 \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$

Для почти всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо
$$\widetilde{(\widehat{f})}(x) = f(x)$$

Примечание. Требование $f, \widehat{f} \in \mathscr{L}$ избыточно, если более обще определить преобразование Фурье.