Оглавление

Глава 1

ТФКП

1.1. Криволинейные интегралы от комплекснозначных функций

Определение 1. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}([a,b]) \subset \mathbb{R}^2, \qquad u, v \in \mathcal{C}(\Gamma), \qquad u : \Gamma \to \mathbb{R}, \quad v : \Gamma \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) \quad \in \mathcal{C}(\Gamma)$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x \coloneqq \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} u(x,y)\,\mathrm{d}\,x + i\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} v(x,y)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y \coloneqq \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} u(x,y)\,\mathrm{d}\,y + i\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} v(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

Свойства.

1. $\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f + g\,\mathrm{d}\,x = \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f\,\mathrm{d}\,x + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} g\,\mathrm{d}\,x, \qquad$ аналогично для $\mathrm{d}\,y$

2. $c \in \mathbb{C}$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} cf\,\mathrm{d}\,x = c\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f\,\mathrm{d}\,x, \qquad \ldots\mathrm{d}\,y$$

3. $\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f\,\mathrm{d}\,x = -\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f\,\mathrm{d}\,x, \qquad \ldots\mathrm{d}\,y$

4. $\mathtt{T} = \{\,t_\nu\,\}_{\nu=0}^{m}, \quad a = t_0 < \cdots < t_m = b, \qquad \mathtt{P} = \{\,\tau_\nu\,\}_{\nu=1}^{m}, \quad \tau_\nu \in [t_{\nu-1}, t_\nu]$

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \qquad x(t_\nu) =: x_\nu, \quad x(t_\nu) =: y_\nu, \qquad M(\tau_\nu) = \begin{bmatrix} x(\tau_\nu) \\ y(\tau_\nu) \end{bmatrix}$$

$$\mathtt{S}_x(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \coloneqq \sum_{\nu=1}^{m} f\big(M(\tau_\nu)\big)(x_\nu - x_{\nu-1})$$

$$\mathtt{S}_y(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \coloneqq \sum_{\nu=1}^{m} f\big(M(\tau_\nu)\big)(y_\nu - y_{\nu-1})$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall \mathtt{P} \quad t_\nu - t_{\nu-1} < \delta, \quad \nu = 1, \ldots, m \quad \Longrightarrow \left|\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f\,\mathrm{d}\,x - \mathtt{S}_x\right| < \varepsilon, \quad \left|\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f\,\mathrm{d}\,y - \mathtt{S}_y\right| < \varepsilon$$

Доказательство.

1. Очевидно.

2. $c = a + bi, \qquad f = u + iv$

$$cf = au - bv + i(av + bu)$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} cf \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} (au - bv) \,\mathrm{d}x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} (av + bu) \,\mathrm{d}x = a \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} u \,\mathrm{d}x - b \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} v \,\mathrm{d}x + i\Big(a \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} v \,\mathrm{d}x + b \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} u \,\mathrm{d}x\Big) =$$

$$= a\Big(\int u \,\mathrm{d}x + i \int v \,\mathrm{d}x\Big) + b\Big(-\int v \,\mathrm{d}x + i \int u \,\mathrm{d}x\Big) = a \int f \,\mathrm{d}x + bi \int f \,\mathrm{d}x = c \int f \,\mathrm{d}x$$

3. Очевидно.
4. Следует из аналогичной теоремы для вещественных криволинейных интегралов второго рода.

$\square$

Сопоставим комплексной кривой кривую на вещественной плоскости:

$$\Gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Gamma^* : [a, b] \to \mathbb{R}^2$$

$$\Gamma(t) = x(t) + iy(t) \qquad \Gamma^*(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Ориентацией Γ будем по определению считать ориентацию Γ^*.

$$M := \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(z) \,\mathrm{d}x := \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma^*}} f(M) \,\mathrm{d}x, \qquad \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(z) \,\mathrm{d}y := \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma^*}} f(M) \,\mathrm{d}y$$

Считаем, что

$$f(x + iy) = f^*\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$$

Далее звёздочку ставить не будем.

1.2. Теорема Жордана

Теорема 1. $\Gamma \to \mathbb{R}^2$ — замкнутая.

Тогда она делит плоскость на две области: внутреннюю G и внешнюю Ω, то есть $\mathbb{R}^2 = G \cup \Omega \cup \Gamma$ и

1. любые две точки, лежащие в G, можно соединить кривой, лежащей в G;
2. любые две точки, лежащие в Ω, можно соединить кривой, лежащей в Ω;
3. если соединить любые две точки, одна из G, другая из Ω, кривой l, то l пересекает Γ.

То есть, G и Ω линейно связны, а $G \cup \Omega$ линейно **не**связно.

Без доказательства. $\square$

$\Gamma(t) := \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \qquad t \in [a, b]$

Возьмём точку t_0. Пусть $\exists\, x'(t_0), y'(t_0)$

$$\Big(x'(t_0)\Big)^2 + \Big(y'(t_0)\Big)^2 > 0$$

$$\vec{v}(t_0) = \begin{bmatrix} -y'(t_0) \\ x'(t_0) \end{bmatrix}, \qquad M(t_0) := \begin{bmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{bmatrix}$$

Определение 2. Будем говорить, что Γ ориентированна *положительно*, если

$$\exists \varepsilon > 0 : \quad M(t_0) + \varepsilon \vec{v}(t_0) \in G$$

Тогда это свойство (при другом ε) будет выполняться для любого t, в котором Γ дифференцируема.

Определение 3. Говорят, что Γ ориентирована *отрицательно*, если

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \quad M(t_0) + \varepsilon \Gamma(t_0) \in \Omega$$

Замечание. Это соответствует положительному и отрицательному направлениям на окружности.

1.3. Криволинейный интеграл второго рода по комплекснозначной кривой

Определение 4.

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(z)\, \mathrm{d}\, z := \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(z)\, \mathrm{d}\, x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(z)\, \mathrm{d}\, y$$

Свойства.

1. $\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} (f+g)\, \mathrm{d}\, z = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f\, \mathrm{d}\, z + \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} g\, \mathrm{d}\, z$

2. $\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} cf\, \mathrm{d}\, z = c \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f\, \mathrm{d}\, z$

3. $\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f\, \mathrm{d}\, z = -\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f\, \mathrm{d}\, l(M)$

4. $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma} : z(t), \quad t \in [a,b], \qquad f : \overset{\curvearrowleft}{\Gamma} \to \mathbb{C}, \qquad \mathtt{T} = \{\, t_\nu \,\}_{\nu=0}^{m}, \qquad \mathtt{P} = \{\, \tau_\nu \,\}_{\nu=1}^{m}$

$$z_\nu := z(t_\nu) = x(t_\nu) + iy(t_\nu), \qquad x_\nu := x(t_\nu), \quad y_\nu := y(t_\nu), \qquad \widehat{z}_\nu := z(\tau_\nu)$$

$$\mathtt{S}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) := \sum_{\nu=1}^{m} f(\widehat{z}_\nu)(z_\nu - z_{\nu-1})$$

$f \in \mathcal{C}\big(\Gamma\big)$

Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \quad \forall \mathtt{T} : t_\nu - t_{\nu-1} < \delta, \quad \nu = 1, \dots, m \quad \forall \mathtt{P} \quad \left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f\, \mathrm{d}\, z - \mathtt{S}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \right| < \varepsilon$$

5. $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma} : [a,b] \to \mathbb{C}, \qquad z(a) = A, \quad z(b) = B, \qquad c \in \mathbb{C}$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} c\, \mathrm{d}\, z = c(B - A)$$

Доказательство.

1. Очевидно.

2. $c = a + bi$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} cf\, \mathrm{d}\, z \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} cf\, \mathrm{d}\, x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} cf\, \mathrm{d}\, y = c \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f\, \mathrm{d}\, x + ic \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f\, \mathrm{d}\, y = c\Bigg(\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f\, \mathrm{d}\, x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f\, \mathrm{d}\, y \Bigg) \overset{\text{def}}{=} c \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f\, \mathrm{d}\, z$$

3. $\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f\, \mathrm{d}\, z = \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f\, \mathrm{d}\, x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f\, \mathrm{d}\, y = \dots$

4. $\mathtt{S}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) = \mathtt{S}_x(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) + i\mathtt{S}_y(f, \mathtt{T}, \mathtt{P})$
   Воспользуемся аналогичным свойством для $\mathtt{S}_x, \mathtt{S}_y$. Пусть

$$\left|\int f \, \mathrm{d}\, y - \mathtt{S}_x\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \left|\int f \, \mathrm{d}\, y - \mathtt{S}_y\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left|\int f \, \mathrm{d}\, z - \mathtt{S}\right| = \left|(\ldots x) + i(\ldots y)\right| \le |\ldots x| + |\ldots y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

5. Применим св-во 4. Рассмотрим любые $\mathtt{T}, \mathtt{P}$.
   Рассмотрим интегральную сумму

$$\mathtt{S}(c, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{m} c(z_\nu - z_{\nu-1}) = c \sum (z_\nu - z_{\nu-1}) = c(B - A)$$

□