

Оглавление

1 Уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной	2
1.1 Основные понятия и результаты	2
1.1.1 Объект изучения	2
1.1.2 Решения дифференциального уравнения	2
1.1.3 Задача Коши	3
1.1.4 О существовании решения внутренней задачи Коши	4
1.1.5 Продолжимость решения	4
1.1.6 Полное решение, интегральная кривая	7
1.1.7 Вопросы, связанные с единственностью решения	8
1.1.8 Достаточные условия единственности	10
1.1.9 Частные и особые решения	10
1.1.10 Понятие общего решения	10
1.1.11 Поле направлений и метод изоклин	10
1.2 Существование решения внутренней задачи Коши	11
1.2.1 Ломаные Эйлера	11
1.2.2 Лемма об ε -решении	12
1.2.3 Лемма Арцела-Асколи	13
1.2.4 Теорема о существовании решения ВЗК	15
1.3 Существование решения граничной задачи Коши	17
1.3.1 Граничные кривые и порождаемые ими множества	17
1.3.2 Граничный треугольник и граничный отрезок Пеано	22
1.3.3 Теоремы о существовании или отсутствии решений ГЗК	23
1.4 Единственность решения задачи Коши	25
1.4.1 Теорема о локальной единственности решения внутренней задачи Коши	25
1.4.2 Лемма Гронуолла	29
1.4.3 Условия Липшица	29
1.4.4 Теоремы о глобальной единственности решений	30
1.5 Существование общего решения	33
1.5.1 Область существования общего решения	33
1.5.2 Формула общего решения	35
2 Уравнения первого порядка в симметричной форме	39
2.1 Существование и единственность решения	39
2.1.1 Объект изучения	39
2.1.2 Решение уравнения в симметричной форме	39
2.1.3 Интегральные кривые	40
2.1.4 Существование и единственность решения	41
2.2 Интеграл уравнения в симметричной форме	43
2.2.1 Определение интеграла	43
2.2.2 Характеристической свойство интеграла	43
2.2.3 Характеристическое свойство гладкого интеграла	45

Глава 1

Уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной

1.1. Основные понятия и результаты

1.1.1. Объект изучения

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешённое относительно производной:

$$\frac{dy(x)}{dx}, \quad \text{или в краткой записи } y' = f(x, y) \quad (1.1)$$

где x – это независимая переменная, $y = y(x)$ – искомая функция, а $f(x, y)$, если не оговорено иное, – вещественная функция, определённая и непрерывная на множестве $\tilde{G} = G \cup \widehat{G}$, где:

- $G \subset \mathbb{R}^2$ – область
- $\widehat{G} \subseteq \partial G$ – (возможно пустое) множество, на котором $f(x, y)$ непрерывна или может быть доопределена с сохранением непрерывности

Напоминание. Область – связное открытое множество

Обозначение. $G^* := \partial G \setminus \widehat{G}$

1.1.2. Решения дифференциального уравнения

Обозначение. Символ \langle подразумевает одну из скобок: (или [, а символ \rangle – скобку) или]

На вещественной оси рассмотрим непустое связное множество, не являющееся точкой. Это будет промежуток $\langle a, b \rangle$

Определение 1. Функция $y = \varphi(x)$, заданная на промежутке $\langle a, b \rangle$ называется решением дифференциального уравнения (??), если для любого $x \in \langle a, b \rangle$ выполняются следующие три условия:

1. функция $\varphi(x)$ дифференцируема
2. точка $(x, \varphi(x)) \in \tilde{G}$
3. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$

Замечание. График решения по определению не может состоять из одной точки

Замечание. Первые два условия являются вспомогательными и позволяют записать третье

Замечание. Любое решение является функцией не просто дифференцируемой а гладкой, т. е. $\varphi(x) \in C^1(\langle a, b \rangle)$

Доказательство. Функция $\varphi(x)$ дифференцируема (по условию 1). Значит, она непрерывна в любой точке $x \in \langle a, b \rangle$

Значит, правая часть тождества из условия 3 непрерывна (как композиция непрерывных функций)

Значит, и левая часть непрерывна

При этом, если решение задано на отрезке $[a, b]$, то на его концах существуют и непрерывны односторонние производные \square

Определение 2. Поскольку решение – гладкая функция, то через любую точку $(x, \varphi(x))$ плоскости можно провести касательную под таким углом $\alpha(x)$ с осью абсцисс, что $\operatorname{tg} \alpha(x) = f(x, \varphi(x)) = \varphi'(x)$ Поэтому графики решений, имеющие общую точку соприкасаются в ней (“пересекаются под нулевым углом”)

Определение 3. Решение $y = \varphi(x)$ уравнения (??), заданное на промежутке $\langle a, b \rangle$ будем называть:

- внутренним, если $(x, \varphi(x)) \in G$ для любого $x \in \langle a, b \rangle$
- граничным, если $(x, \varphi(x)) \in \tilde{G}$ для любого $x \in \langle a, b \rangle$
- смешанным, если найдутся такие $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$, что точка $(x_1, \varphi(x_1)) \in G$, а точка $(x_2, \varphi(x_2)) \in \tilde{G}$

Лемма 1 (о записи решения в интегральном виде). Для того чтобы определённая на промежутке $\langle a, b \rangle$ функция $y = \varphi(x)$ была решением дифференциального уравнения (??), необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(x)$ была непрерывна на $\langle a, b \rangle$, её график лежал в \tilde{G} и при некотором $x_0 \in \langle a, b \rangle$ выполнялось тождество

$$\varphi(x) \stackrel{\langle a, b \rangle}{=} \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) \, ds \quad (1.2)$$

Доказательство.

- Необходимость

Пусть функция $y = \varphi(x)$ на $\langle a, b \rangle$ является решением уравнения (??)

Тогда, по определению, справедливо тождество $f(x, \varphi(x)) \stackrel{\langle a, b \rangle}{=} \varphi'(x)$

Интегрируя его при любом фиксированном $x_0 \in \langle a, b \rangle$ по s от x до x_0 и перенося $\varphi(x_0)$ в правую

часть, получаем тождество (??):

$$\int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) \, ds \stackrel{\langle a, b \rangle}{=} \int_{x_0}^x \varphi'(s) \, ds = \varphi(x) - \varphi(x_0)$$

- Достаточность

Пусть непрерывная на промежутке $\langle a, b \rangle$ функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет тождеству (??)

Тогда $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на $\langle a, b \rangle$ (поскольку по (??) она равна интегралу с переменным верхним пределом от композиции непрерывных функций)

Дифференцируя (??), заключаем, что выполняется и третье условие из определения решения

\square

1.1.3. Задача Коши

Задача. Для любой точки $(x_0, y_0) \in \tilde{G}$ задача Коши с начальными данными x_0, y_0 заключается в том, чтобы найти все решения $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1), заданные на промежутках $\langle a, b \rangle \ni x_0$, в том числе внутренние, граничные или смешанные, такие что $\varphi(x_0) = y_0$

При этом говорят, что задача Коши поставлена в точке (x_0, y_0) , а найденные решения – это решения поставленной задачи Коши

Определение 4. Решение задачи Коши уравнения (??) с начальными данными x_0, y_0 существует, если существует такое решение $y = \varphi(x)$, определённое на промежутке $\langle a, b \rangle \ni x_0$, что $\varphi(x_0) = y_0$

Определение 5. Внутреннее (граничное, смешанное) решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 существует, если точка $(x_0, y_0) \in G(\tilde{G}, \tilde{G})$ и найдутся промежуток $\langle a, b \rangle \ni x_0$ и определённое на нём внутреннее (граничное, смешанное) решение $y = \varphi(x)$ такие, что $\varphi(x_0) = y_0$

Определение 6. Задачу Коши, поставленную в точке $(x_0, y_0) \in \tilde{G}$ будем называть

- внутренней, если $(x_0, y_0) \in G$
- граничной, если $(x_0, y_0) \in \tilde{G}$

1.1.4. О существовании решения внутренней задачи Коши

Напоминание. Компакт в \mathbb{R}^n – замкнутое ограниченное множество

Алгоритм (Пeano). Очевидно, что для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ найдутся такие константы $a, b > 0$, что прямоугольник

$$\bar{R} = \{ (x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \}$$

являющийся компактом, лежит в области G

Сразу исключим из рассмотрения простейший случай, когда $f(x, y) \equiv 0$ на \bar{R} , в котором уравнение (??) имеет решение $y(x) \equiv y_0$ при $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$

По второй теореме Вейерштрасса, $f(x, y)$ достигает своего максимума на \bar{R} . Положим

$$M := \max_{(x,y) \in \bar{R}} |f(x, y)| > 0, \quad h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \quad (h > 0)$$

Определение 7. Отрезок $\overline{P_h}(x_0, y_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$ называется отрезком Пеано, постоенным для точки $(x_0, y_0) \in G$

Отрезки $\overline{P_h^+}(x_0, y_0) = [x_0, x_0 + h]$ и $\overline{P_h^-} = [x_0 - h, x_0]$ называются соответственно правым и левым отрезками Пеано

Теорема 1 (Пеано, о существовании внутреннего решения). Пусть правая часть уравнения (??) непрерывна в области G .

Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ и для любого отрезка Пеано $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ существует по крайней мере одно решение задачи Коши уравнения (??) с начальными данными x_0, y_0 , определённое на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

Доказательство. Будет доказано в §2 □

1.1.5. Продолжимость решения

Определение 8. Пусть $y = \varphi(x)$ – решение уравнения (??) на $\langle a, b \rangle$. Если этот промежуток произвольным образом сузить, то на новом промежутке функция $y = \varphi(x)$ останется решением, которое называют сужением исходного решения

Определение 9. Решение уравнения (??), заданное на промежутке $\langle a, b \rangle$ продолжимо вправо в точку b или на границу, если найдётся такое решение $y = \tilde{\varphi}(x)$, определённое на промежутке $\langle a, b \rangle$, что сужение $\tilde{\varphi}(x)$ на $\langle a, b \rangle$ совпадает с $\varphi(x)$

Определение 10. Решение уравнения (??), заданное на промежутке $\langle a, b \rangle$ продолжимо вправо за точку b или за границу, если найдутся такие $\tilde{b} > b$ и решение $y = \tilde{\varphi}(x)$, определённое на промежутке $\langle a, \tilde{b} \rangle$, что сужение $\tilde{\varphi}(x)$ на $\langle a, b \rangle$ совпадает с $\varphi(x)$

Теорема 2 (о продолжимости решения на границу). $\varphi(x)$ – решение уравнения (??) на промежутке (a, b) , $b < +\infty$

Для того чтобы это решение было продолжимо вправо в точку b необходимо и достаточно, чтобы существовали последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и число $\eta \in \mathbb{R}^1$ такие, что

$$\forall k \quad \begin{cases} x_k \in (a, b) \\ (x_k, \varphi(x_k)) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} (b, \eta) \in \tilde{G} \end{cases} \quad (1.3)$$

Аналогично формулируется условие для продолжимости влево

Утверждение 1. В силу того, что функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на множестве \tilde{G} , найдутся такие $c > 0$ и $M \geq 1$, что

$$\forall (x, y) \in \tilde{G} \cap \overline{B_c}(b, \eta) \quad |f(x, y)| \leq M$$

Согласно (??) $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) \, ds$ для любых $x_0, x \in (a, b)$

В этом тождестве можно перейти к пределу при $x \rightarrow b^-$, получая равенство $\eta = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) \, ds$, так как по условию точка $(b, \eta) \in \tilde{G}$, а значит, функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в этой точке

В результате функция

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in (a, b) \\ \eta & x = b \end{cases}$$

по определению является продолжением решения $y = \varphi(x)$ на $(a, b]$

- Необходимость

Допустим, что на промежутке $(a, b]$ существует решение $y = \tilde{\varphi}(x)$ такое, что $\tilde{\varphi}(x) \equiv \varphi(x)$ на (a, b) . Поскольку $\tilde{\varphi}(x)$ непрерывна, то $\tilde{\varphi}(x) = \eta = \lim_{x \rightarrow b^-} \tilde{\varphi}(x)$

Но тогда $\eta = \lim_{x \rightarrow b^-} \varphi(x)$ и требуемая последовательность точек x_k существует, причём по определению решения точка $(b, \eta) \in \tilde{G}$

□

Лемма 2 (о продолжимости решения за границу отрезка). Пусть решение $y = \varphi(x)$ уравнения (??) определено на промежутке $\langle a, b]$ и точка $(b, \varphi(b)) \in G$. Тогда это решение продолжимо вправо за точку b на полуотрезок Пеано, построенный для точки $(b, \varphi(b))$.

Доказательство. По теореме Пеано (теор. ??) на отрезке Пеано $\overline{P_h}(b, \varphi(b))$ существует внутреннее решение $y = \psi(x)$ задачи Коши с начальными данными $(b, \varphi(b))$. Тогда функция $y = \tilde{\varphi}(x)$, где

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \langle a, b] \\ \psi(x), & x \in [b, b+h] \end{cases}$$

по определению является решением уравнения (??) на $\langle a, b+h]$.

В самом деле, в точке b производная функции $\tilde{\varphi}(x)$ существует, так как

$$\tilde{\varphi}'_-(b) = \varphi'_-(b) = f(b, \varphi(b)) = \psi'_+(b) = \tilde{\psi}'_+(b)$$

А выполнение других условий из определения решения для $\tilde{\varphi}(x)$ очевидно. \square

Следствие. Если решение $y = \varphi(x)$ уравнения (??) определено на промежутке $\langle a, b]$ и не продолжимо вправо за точку b , то $(b, \varphi(b)) \in \widehat{G}$.

А если оно определено на промежутке $[a, b]$ и не продолжимо влево за точку a , то $(a, \varphi(a)) \in \widehat{G}$.

Утверждение о продолжимости решения, определённого на промежутке $[a, b]$, влево за точку a формулируется аналогично.

Доказательство. Предположение противного противоречит лемме. \square

Лемма 3 (о продолжимости решения на границу интервала). Пусть решение $y = \varphi(x)$ уравнения (??) определено на промежутке $\langle a, b)$, существует число $\eta = \lim_{x \rightarrow b^-} \varphi(x)$ и точка $(b, \eta) \in G$.

Тогда это решение продолжимо вправо за точку b .

Из теоремы о продолжимости решения на границу и последней леммы вытекает следующее утверждение:

Определение 11. Решение называется полным, или максимально продолженным, или непродолжимым в случае, если его нельзя продолжить ни влево, ни вправо, или что то же самое, когда оно не является сужением никакого другого решения.

Утверждение о продолжимости решения, заданного на (a, b) , влево за точку a формулируется аналогично.

1.1.6. Полное решение, интегральная кривая

Определение 12. Внутреннее (границочное) решение называется полным, если его нельзя продолжить ни влево, ни вправо так, чтобы оно осталось внутренним (границным).

Определение 13. Промежуток, на котором определено полное решение, будем называть максимальным интервалом существования и обозначим I_{\max} , а если для полного решения была поставлена задача Коши с начальными данными x_0, y_0 , то $I(x_0, y_0)$.

Утверждение 2. Максимальный интервал существования любого внутреннего решения – это интервал.

Из леммы о продолжимости решения за границу отрезка с очевидностью вытекает следующий факт:

Теорема 3 (о существовании полного решения). Любое решение уравнения (??) может быть продолжено до полного решения.

Другая формулировка. Любое решение уравнения (??), не являющееся полным, является сужением некоторого полного решения.

Доказательство. Приведено в дополнении 1₄

□

Определение 14. График полного решения будем называть интегральной кривой уравнения (??) Дуга интегральной кривой – это график решения, заданного на любом промежутке $\langle a, b \rangle \subset I_{\max}$

Теорема 4 (о поведении интегральной кривой полного внутреннего решения). Предположим, что внутреннее решение $y = \varphi(x)$ уравнения (??) определено на промежутке $\langle a, \beta \rangle$ и не продолжимо вправо. Тогда для любого компакта $\bar{H} \subset G$ найдётся такое число $\delta \in \langle a, \beta \rangle$, что для всякого $x \in (\delta, \beta)$ точка $(x, \varphi(x)) \in G \setminus \bar{H}$

Таким образом, интегральные кривые уравнения (1.1) лежат в \tilde{G} , не могут иметь вертикальных касательных и не могут пересекаться под ненулевым углом, т. е. могут только соприкасаться

Другая формулировка. При стремлении аргумента полного внутреннего решения к границе максимального интервала существования дуги интегральной кривой покидает любой компакт, лежащий в области G , и никогда в него не возвращается

Доказательство. Переходя в условиях теоремы на язык последовательностей, докажем, что для любого компакта $\bar{H} \subset G$ и для любой последовательности $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \beta$, $x_k \in \langle a, \beta \rangle$ существует $K > 0$ такое, что $(x_k, \varphi(x_k)) \in G \setminus \bar{H}$ при всех $k > K$

Рассуждая от противного, допустим, что существуют компакт $\bar{H}_* \subset G$ и последовательность $x_k \rightarrow \beta$, $x_k \in \langle a, \beta \rangle$ такие, что $(x_k, \varphi(x_k)) \in \bar{H}_*$ для $k = 1, 2, \dots$

Отсюда сразу же вытекает, что $\beta < +\infty$, так как в противном случае найдётся такой индекс k^* , что точка $(x_{k^*}, \varphi(x_{k^*}))$ будет лежать вне компакта в силу его ограниченности

НУО считаем, что последовательность x_k – сходящаяся (иначе перейдём к сходящейся подпоследовательности)

Пусть $(\beta, \eta) = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, \varphi(x_k))$

Тогда предельная точка (β, η) также принадлежит компакту \bar{H}_* , а значит, выполняются условия теоремы о продолжимости решения (теор. ??), согласно которой решение $y = \varphi(x)$ продолжимо на промежуток $\langle a, \beta \rangle$ – с условием теоремы □

Определение 15. Точка $(x_0, y_0) \in \tilde{G}$ называется точкой неединственности, если существуют такие решения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ задачи Коши уравнения (??) с начальными данными x_0, y_0 , определённые на промежутке $\langle a, b \rangle$, и такая последовательность $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0$, $x_k \in \langle a, b \rangle$, что $\varphi_1(x_k) \neq \varphi_2(x_k)$ ($k = 1, 2, \dots$)

В противном случае точка (x_0, y_0) называется точкой единственности

Аналогичный результат имеет место для внутреннего решения, определённого на (α, b) и непродолжимого влево

1.1.7. Вопросы, связанные с единственностью решения

Замечание. Любая точка граничного множества \tilde{G} , в которой решение задачи Коши отсутствует, по определению будет точкой единственности

Определение 16. Точка $(x_0, y_0) \in \tilde{G}$ называется точкой неединственности, если найдутся такие решения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ задачи Коши уравнения (??) с начальными данными x_0, y_0 , определённые на $\langle a, b \rangle$, что

$$\forall (\alpha, \beta) \ni x_0 \quad \exists x^* \in (\alpha, \beta) \cap \langle a, b \rangle : \quad \varphi_1(x^*) \neq \varphi_2(x^*)$$

Утверждение 3. Определения точки неединственности равносильны

Доказательство.

- опр. ?? \Rightarrow опр. ??

Из опр. ?? вытекает, что для всякого интервала $(\alpha, \beta) \ni x_0$ найдётся такой индекс k^* , что $x_{k^*} \in (\alpha, \beta)$, поэтому в опр. ?? $x^* = x_{k^*}$

- опр. ?? \Rightarrow опр. ??

Можно выбрать последовательность интервалов (α_k, β_k) , которая с ростом k стягивается в точку x_0 . Тогда по опр. ?? для всякого k найдётся $x_k^* \in (\alpha_k, \beta_k) \cap \langle a, b \rangle$, что $\varphi_1(x_k^*) \neq \varphi_2(x_k^*)$, т. е. x_k^* – последовательность из опр. ??

□

Определение 17. Точку $(x_0, y_0) \in \tilde{G}$ будем называть точкой единственности в следующих случаях:

1. задача Коши уравнения (??) с начальными данными x_0, y_0 не имеет решений
2. для любых двух решений $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ этой задачи Коши, определённых на некотором промежутке $\langle a, b \rangle$, найдётся интервал $(\alpha, \beta) \ni x_0$ такой, что

$$\forall x \in (\alpha, \beta) \cap \langle a, b \rangle \quad \varphi_1(x) = \varphi_2(x)$$

Отрицая опр. ??, получаем “прямое” определение точки единственности:

Примечание. Здесь надо иметь в виду следующее:

- Если $(x_0, y_0) \in G$:
 - Случай 1 не может возникнуть
 - По теореме Пеано (теор. ??) все решения задачи Коши определены на отрезке Пеано $[x_0 - h, x_0 + h]$ ($h > 0$)
Поэтому в определении точки единственности для любых двух решений достаточно требовать наличия интервала $(\alpha, \beta) \ni x_0$, на котором они совпадают
- Если $(x_0, y_0) \in \tilde{G}$ и, например, решение нельзя продолжить за точку x_0 вправо, то в определении для любых двух решений задач Коши при их наличии надо потребовать существования промежутка $(\alpha, x_0]$, на котором они совпадают

Определение 18. Решение задачи Коши уравнения (??), поставленной в точке $(x_0, y_0) \in \tilde{G}$ называется:

- неединственным, если (x_0, y_0) – точка неединственности
- единственным в точке, если оно существует и (x_0, y_0) – точка единственности

Определение 19. Решение внутренней задачи Коши уравнения (??), поставленной в точке (x_0, y_0) называется локально единственным, если существует интервал $(\alpha, \beta) \ni x_0$ такой, что все решения этой задачи продолжимы на (α, β) и для любых двух её решений $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, при необходимости произвольным образом продолженных на (α, β) , имеем $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$ на (α, β)

Теорема 5 (о локальной единственности решения внутренней задачи Коши). Пусть $(x_0, y_0) \in G$ – это точка единственности

Тогда решение задачи Коши уравнения (??) с начальными данными x_0, y_0 является локально единственным

Доказательство. Будет доказано в §4, п. 1⁰

□

Следствие. Из этой теоремы вытекает, что для внутренней задачи Коши понятия единственности решения в точке и локальной единственности равносильны

Определение 20. Будем говорить, что решение задачи Коши $y = \varphi(x)$, поставленное в точке $(x_0, y_0) \in \tilde{G}$ и определённое на промежутке $\langle a, b \rangle \ni x_0$, единствено на этом промежутке, или, просто, единствено, если для любого $x \in \langle a, b \rangle$ точка $(x, \varphi(x))$ является точкой локальной единственности

1.1.8. Достаточные условия единственности

Определение 21. Область $G^0 \subset G$ будем называть областью единственности для уравнения (??), если каждая точка G^0 является точкой единственности. Множество $\widetilde{G}^0 = G^0 \cup \widehat{G}^0$, в котором \widehat{G}^0 – это множество граничных точек G^0 , являющихся точками единственности, будем называть множеством единственности

Теорема 6 (о единственности; слабая). Пусть в уравнении (??) функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области G , а частная производная $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ определена и непрерывна в области $G^0 \subset G$. Тогда G^0 является областью единственности

Доказательство. Эта теорема является следствием более сильных теорем о единственности, которые будут сформулированы и доказаны в §4, п. 4⁰, причём не только для области G , а для всего множества G . □

Определение 22. Решение уравнения (??), заданное на промежутке $\langle a, b \rangle$, будем называть частным (особым), если его график состоит только из точек единственности (неединственности) и это решение является полным в том смысле, что не может быть продолжено ни влево, ни вправо так, чтобы его график состоял только из точек единственности (неединственности). В этом случае промежуток $\langle a, b \rangle$ будем называть максимальным интервалом существования частного (особого) решения

1.1.9. Частные и особые решения

Определение 23. Общим решением уравнения (??) на некотором связном множестве A^* , лежащем в области единственности G^0 , называется функция $y = \varphi(x, C)$, определённая и непрерывная по совокупности аргументов на множестве $Q_{A^*} = \{(x, C) \mid x \in \langle a(C), b(C) \rangle, C \in \langle C_1, C_2 \rangle\}$, если выполняются следующие два условия:

1. для любой точки $(x_0, y_0) \in A^*$ уравнение $y_0 = \varphi(x_0, C)$ имеет единственное решение $C = C_0$
2. функция $y = \varphi(x, C_0)$ – это решение задачи Коши уравнения (??) с начальными данными x_0, y_0 , определённое на промежутке $\langle a(C_0), b(C_0) \rangle$

1.1.10. Понятие общего решения

Теорема 7 (о существовании общего решения). Для произвольной точки (x_0^*, y_0^*) из области единственности G^0 уравнения (??) найдётся связное множество $A^* : (x_0^*, y_0^*) \in A^* \subset G^0$, на котором существует общее решение

Доказательство. Приведено в §5 □

Определение 24. Отрезок произвольной длины с центром в точке $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ и тангенсом угла наклона, равным $f(x_0, y_0)$, будем называть отрезком поля направлений, построенным в точке (x_0, y_0) . Само множество \widetilde{G} , заполненное отрезками поля направлений будем называть полем направлений, индуцированным уравнением (??)

1.1.11. Поле направлений и метод изоклин

Определение 25. Изоклиной уравнения (??) называется любая кривая, расположенная во множестве \widetilde{G} , в каждой точке которой направление поля имеет один и тот же угол наклона

Кривая, лежащая в \widetilde{G} , является интегральной тогда и только тогда, когда она гладкая и в каждой точке направление касательной к ней совпадает с направлением поля в этой точке

Замечание. Все изоклины задаются уравнением $f(x, y) = k$, где k – любое вещественное число из области значений $f(x, y)$

Определение 26. Рангом дробления ломаной Эйлера назовём число, равное

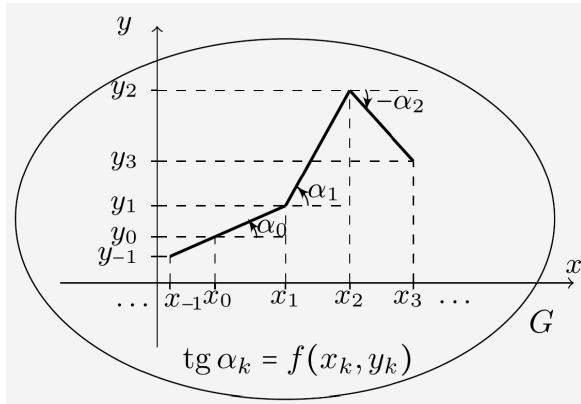
$$\max_{j=1-N, N} \{ x_j - x_{j-1} \}$$

Метод изоклинов заключается в том, чтобы, нарисовав достаточно большое число изоклинов и отрезков поля на них, начертить характерные интегральные кривые, которые, опадая на очередную изоклину, должны касатьсяся отрезков поля направлений, построенных на ней

1.2. Существование решения внутренней задачи Коши

В этом параграфе будет доказана теорема Пеано о существовании решения внутренней задачи Коши уравнения (1.1) $y' = f(x, y)$ (теор. ??), т. е. будет рассматриваться задача Коши, поставленная в любой внутренней точке \tilde{G} , и строиться решение этой задачи, график которого лежит в области G .
Будем строить решение при помощи “метода ломанных Эйлера”

1.2.1. Ломанные Эйлера



Выберем в области G произвольную точку (x_0, y_0) и построим в ней отрезок поля направлений столь малой длины, что он целиком лежит в G , начинаясь в какой-то точке (x_{-1}, y_{-1}) и заканчиваясь в точке (x_1, y_1) .

Проведём вправо через точку (x_1, y_1) и влево через точку (x_{-1}, y_{-1}) полуотрезки поля, лежащие в G и заканчивающиеся в точках (x_2, y_2) и (x_{-2}, y_{-2}) соответственно, и так далее.

Этот процесс можно продолжать любое конечное число шагов N , поскольку область G – открытое множество.

График полученной таким образом непрерывной кусочно-линейной функции $y = \psi(x)$ называется ломаной Эйлера.
Итак, установлено, что ломаная Эйлера лежит в области

G , проходит через точку (x_0, y_0) и абсциссы её угловых точек равны x_j ($j = \overline{-N, N}$)

Определение 27. Для всякого $\varepsilon > 0$ непрерывная и кусочно-гладкая на отрезке $[a, b]$ функция $y = \psi(x)$ называется ε -решением уравнения (??) на $[a, b]$, если для любого $x \in [a, b]$ точка $(x, \psi(x)) \in G$ и

$$|\psi'(x) - f(x, \psi(x))| \leq \varepsilon \quad (1.8)$$

Формула, рекуррентно задающая ломаную Эйлера $y = \psi(x)$, имеет вид: $\psi(x_0) = y_0$ и далее при $j = 0, 1, \dots, N-1$ для любого $x \in (x_j, x_{j+1}]$ или при $j = 0, -1, \dots, 1-N$ для любого $x \in [x_{j-1}, x_j)$

$$\psi(x) = \psi(x_j) + f(x_j, \psi(x_j))(x - x_j) \quad (1.6)$$

В частности, при $j = 0$ отрезок ломаной Эйлера определён для любого $x \in [x_{-1}, x_1]$ и, делясь на два полуотрезка, проходит через точку (x_0, y_0) под углом, тангенс которого равен $f(x_0, y_0)$.

Из формулы (1.6) вытекает, что для всякого $j = 0, N-1$ производная $\psi'(x) = f(x_j, \psi(x_j))$ при $x \in (x_j, x_{j+1})$, а в точке x_{j+1} она не определена, как и в точках x_{j-1} при $j \leq 0$.

Доопределим $\psi'(x)$ в точках разрыва как левостороннюю производную при $x > x_0$ и как правостороннюю производную при $x < x_0$, положив

$$\psi'(x_j) = \psi'_+(x_j) \lim_{x \rightarrow x_j^+} \frac{\psi(x) - \psi(x_j)}{x - x_j} \quad (j = \pm 1, \dots, \pm N)$$

А при $j = 0$ существует полная производная $\psi'(x_0) = f(x_0, y_0)$.

Таким образом, для любого $x \in (x_j, x_{j+1}]$ ($j = 0, 1, \dots, N-1$) или для любого $x \in [x_{j-1}, x_j)$ ($j = 0, -1, \dots, 1-N$), дифференцируя равенство (1.6) по x , получаем

$$\psi'(x) = f(x_j, \psi(x_j)), \quad j \in \{1-N, \dots, N-1\} \quad (1.7)$$

1.2.2. Лемма об ε -решении

Покажем, что на некотором промежутке всегда можно построить функцию, график которой проходит через заданную точку области G , такую, что при подстановке этой функции в уравнение (1.1) окажется, что разность между левой и правой частями уравнения по модулю не превосходит любого сколь угодно малого наперёд заданного положительного числа

Лемма 4 (о ломаных Эйлера в роли ε -решения). Для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ и для любого отрезка Пеано $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ имеем:

1. Для любого $\delta > 0$ на $\overline{P_h}$ можно построить ломаную Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления, не превосходящим δ , график которой лежит в прямоугольнике \overline{R} из определения отрезка Пеано
2. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что всякая ломаная Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления, не превосходящим δ , является ε -решением уравнения (??) на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

Доказательство.

1. Для произвольной точки (x_0, y_0) из G построим прямоугольник $\overline{R} \subset G$ с центром в (x_0, y_0) и два лежащих в нём равнобедренных треугольника $\overline{T^-}, \overline{T^+}$ с общей вершиной в точке (y_0, x_0) и основаниями, параллельными осям ординат, как это было сделано при построении отрезка Пеано. При этом зафиксируются константы a, b, M, h

Выберем $\delta_* < \delta$ так, чтобы число $\frac{h}{\delta_*} =: N \in \mathbb{N}$

Положим $x_{j+1} := x_j + \delta_*$ ($j = \overline{0, N-1}$), тогда $x_N = x_0 + h$

Для всякого $x > x_0$ будем последовательно строить отрезки ломаной Эйлера $y = \psi(x)$ с узлами в точках x_j

Для любого $j = 0, \dots, N$ это сделать возможно, так как модуль тангенса угла наклона каждого отрезка равен $|f(x_j, \psi(x_j))|$, а тангенсы углов наклона боковых сторон треугольника $\overline{T^+}$ по построению равны $\pm M$, где $M = \max |f(x, y)|$ на компакте \overline{R}

Поэтому любой отрезок ломаной Эйлера, начиная с первого, не может пересечь боковую стенку $\overline{T^+}$, а значит, содержится в нём

В результате для всех $x \in [x_0, x_0 + h]$ точка $(x, \psi(x)) \in \overline{T^+}$ и требуемая ломаная Эйлера построена на $[x_0, x_0 + h]$

Для левого полуотрезка Пеано всё аналогично

2. Зафиксируем теперь произвольное положительное число ε

Функция $f(x, y)$ непрерывна на компакте \overline{R} , следовательно, по теореме Кантора f равномерно непрерывна на нём. По определению это значит, что существует такое $\delta_1 > 0$, что для любых двух точек (x', y') и (x'', y'') из прямоугольника \overline{R} таких, что $|x' - x''| \leq \delta_1$ и $|y' - y''| < \delta_1$, выполняется неравенство $|f(x', y') - f(x'', y'')| \leq \varepsilon$

Положим $\delta := \min \{ \delta_1, \frac{\delta_1}{M} \}$ и покажем, что для любой ломаной Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления меньшим, чем δ на отрезке Пеано $\overline{P_h}(x_0, y_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$, справедливо неравенство (??):

Возьмём любую точку x из отрезка Пеано, например справа от x_0

Найдётся индекс $j \in \{0, \dots, N-1\}$ такой, что $x \in (x_j, x_{j+1}]$, т. е. x_j – ближайшая к x левая угловая точка ломаной Эйлера

Согласно (??)

$$\psi'(x) - f(x, \psi(x)) = f(x_j, \psi(x_j)) - f(x, \psi(x))$$

Оценим близость аргументов функции f :

По выбору δ и j имеем

$$|x - x_j| \leq \delta \leq \delta_1, \quad |\psi(x) - \psi(x_j)| \stackrel{(??)}{=} |f(x_j, \psi(x_j))| \cdot |x - x_j| \leq M\delta \stackrel{\text{def } \delta}{\leq} \delta_1$$

Поэтому из равномерной непрерывности функции f вытекает, что

$$|f(x_j, \psi(x_j)) - f(x, \psi(x))| \leq \varepsilon$$

А значит, неравенство (??) из определения ε -решения выполняется на отрезке Пеано

□

Определение 28. Каждая из функций последовательности $\{ h_n(x) \}_{n=1}^{\infty}$ ограничена на $[a, b]$, если

$$\forall n \geq 1 \quad \exists K_n > 0 : \quad \forall x \in [a, b] \quad |h_n(x)| \leq K_n$$

1.2.3. Лемма Арцела-Асколи

Пусть последовательность функций $\{ h_n(x) \}_{n=1}^{\infty}$ задана на $[a, b]$

Определение 29. Последовательность $\{ h_n(x) \}_{n=1}^{\infty}$ **равномерно** ограничена на отрезке $[a, b]$, если

$$\exists K > 0 : \quad \forall n \geq 1 \quad \forall x \in [a, b] \quad |h_n(x)| \leq K$$

Определение 30. Каждая из функций последовательности $\{ h_n(x) \}_{n=1}^{\infty}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, значит, согласно теореме Кантора, равномерно непрерывна на $[a, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \geq 1 \quad \exists \delta_n > 0 : \quad \forall x', x'' \in [a, b] \quad \left(|x' - x''| \leq \delta_n \implies |h_n(x') - h_n(x'')| \leq \varepsilon \right)$$

Определение 31. Последовательность $\{ h_n(x) \}_{n=1}^{\infty}$ **равностепенно** непрерывна на отрезке $[a, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall n \geq 1 \quad \forall x', x'' \in [a, b] \quad \left(|x' - x''| \leq \delta \implies |h_n(x') - h_n(x'')| \leq \varepsilon \right)$$

Определение 32. Последовательность функций $\{ h_n(x) \}_{n=1}^{\infty}$ поточечно сходится к некоторой функции $h(x)$ на отрезке $[a, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \exists N_x > 0 : \quad \forall i, j \geq N_x \quad |h_i(x) - h_j(x)| \leq \varepsilon$$

Определение 33. Последовательность $\{ h_n(x) \}_{n=1}^{\infty}$ **равномерно** сходится к некоторой функции $h(x)$ на отрезке $[a, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0 : \quad \forall i, j \geq N \quad \forall x \in [a, b] \quad |h_i(x) - h_j(x)| \leq \varepsilon$$

Замечание. В определениях ?? и ?? слова “равномерно” и “равностепенно” означают, что константы K, δ не зависят от выбора n , а в ?? – что номер N не зависит от выбора x

Обозначение. Для любого $x \in [a, b]$ поточечная сходимость обозначается $h_n(x) \rightarrow h(x)$

Обозначение. Равномерная относительно $[a, b]$ сходимость обозначается $h_n(x) \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{[a, b]} h(x)$

Лемма 5 (Арцела-Асколи; о существовании равномерно сходящейся подпоследовательности). Из любой ограниченной и равностепенно непрерывной на $[a, b]$ последовательности функций $\{ h_n \}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить равномерно сходящуюся на $[a, b]$ подпоследовательность

Доказательство. Рациональные числа образуют счётное всюду плотное множество на любом промежутке вещественной прямой

Счётность множества рациональных чисел, расположенных на отрезке $[a, b]$ означает, что их можно перенумеровать: r_1, r_2, \dots

В точке r_1 числовая последовательность $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ по предположению сходится, поэтому из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, т. е. существует такая последовательность натуральных чисел

$$n^{(1)} = \left\{ n_i^{(1)} \right\}_{i=1}^{\infty}, \quad n_i^{(1)} < n_{i+1}^{(1)}$$

что последовательность значений $\left\{ h_{n_i^{(1)}}(r_1) \right\}_{i=1}^{\infty}$ сходится

В точке r_2 последовательность $\left\{ h_{n_i}^{(1)}(r_2) \right\}_{i=1}^{\infty}$ также ограничена, и из неё можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, т. е. у последовательности индексов $n^{(1)}$ имеется такая подпоследовательность индексов $n^{(2)} = \left\{ n_i^{(2)} \right\}_{i=1}^{\infty}$, что последовательность значений $\left\{ h_{n_i^{(2)}}(r_2) \right\}_{i=1}^{\infty}$ тоже сходится. При этом она сходится и в точке r_1 как подпоследовательность сходящейся последовательности

Продолжаем этот процесс

Введём последовательность индексов $\left\{ n_i^{(i)} \right\}_{i=1}^{\infty}$ ($n_i^{(i)} < n_{i+1}^{(i)}$), где $n_i^{(i)}$ – i -й член подпоследовательности $n^{(i)}$

Функциональная подпоследовательность $\left\{ h_{n_i}^{(i)}(x) \right\}_{i=1}^{\infty}$ сходится во всех рациональных точках $[a, b]$, поскольку в любой рациональной точке r_k последовательность $\left\{ h_{n_i^{(k)}}(x) \right\}_{i=1}^{\infty}$ сходится по построению, а любая другая с меньшим верхним индексом является её подпоследовательностью

Покажем, что $\{h_{i_*}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, где $i_* = n_i^{(i)}$ является искомой подпоследовательностью:

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$

По условию леммы последовательность $\{h_{i_*}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна, следовательно, по выбранному ε найдётся такое число $\delta > 0$, что

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \forall x', x'' \in [a, b] : \quad \left(|x' - x''| < \delta \implies |h_{i_*}(x') - h_{i_*}(x'')| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right)$$

По построению последовательность функций $\{h_{i_*}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ сходится поточечно во всех рациональных точках r_k из $[a, b]$

Поэтому по выбранному ε для любого $k \in \mathbb{N}$ найдётся такой номер $N_{r_k} > 0$, что $|h_{i_*}(r_k) - h_{j_*}(r_k)| \leq \varepsilon/3$ для любых $i_*, j_* > N_{r_k}$

Последовательность индексов N_{r_1}, N_{r_2}, \dots – счётная, поэтому она может стремиться к бесконечности. Перейти к конечной подпоследовательности позволяет использование появившейся из определения равностепенной непрерывности универсальной константы δ и плотности множества рациональных чисел:

Разобьём отрезок $[a, b]$ на непересекающиеся промежутки, длина которых не превосходит δ . Пусть их окажется l штук

Множество рациональных чисел всюду плотно, поэтому в каждом промежутке можно выбрать по рациональному числу: r_1^*, \dots, r_l^*

Пусть $N = \max \{N_{r_1^*}, \dots, N_{r_l^*}\}$, где константы N_r взяты из определения поточечной сходимости последовательности $\{h_{i_*}(x)\}_{i=1}^{\infty}$

Возьмём произвольное число $x \in [a, b]$. Предположим, что оно попало в промежуток с номером p . Тогда для любых $i_*, j_* > N$ получаем:

$$|h_{i_*}(x) - h_{j_*}(x)| \stackrel{\Delta}{\leq} |h_{i_*}(x) - h_{i_*}(r_p^*)| + |h_{i_*}(r_p^*) - h_{j_*}(r_p^*)| + |h_{j_*}(r_p^*) - h_{j_*}(x)| \leq \varepsilon$$

так как $|x - r_p^*| \leq \delta$ и верна оценка из определения равномерной сходимости

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое N , что для любых $i_*, j_* \geq N$ и $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $|h_{i_*}(x) - h_{j_*}(x)| \leq \varepsilon$ \square

Замечание. При выполнении условий леммы Арцела-Асколи она позволяет “объявить о рождении” функции $h(x)$, определённой на отрезке $[a, b]$ и предельной для некоторой последовательности функций $h_n(x)$

При этом, по теореме Стокса-Зайделя предельная функция непрерывна на $[a, b]$

Примечание. Теорема Стокса-Зайделя – некоторое обобщение формулы Ньютона-Лейбница

Теорема 8. Пеано; о существовании внутреннего решения Пусть правая часть уравнения (??) непрерывна в области G

Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ и для любого отрезка Пеано $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ существует по крайней мере одно решение задачи Коши уравнения (??) с начальными данными x_0, y_0 , определённое на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

1.2.4. Теорема о существовании решения ВЗК

Докажем теорему ??:

Утверждение 4. Поэтому можно осуществить предельный переход под знаком интеграла:

$$\int_{x_0}^x f(s, \psi_{i_*}(s)) \, ds \xrightarrow{i_* \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) \, ds$$

Кроме того, $f(s, \psi_{i_*}(s)) \xrightarrow[i_* \rightarrow \infty]{s \in \overline{P_h}} f(s, \varphi(s))$, поскольку любая точка $(s, \psi_{i_*}(s)) \in \overline{R}$ и $f(x, y)$ по теореме

Кантора равномерно непрерывна на \overline{R}

Переходя в обеих частях равенств (??) к пределу при $i_* \rightarrow \infty$, получаем тождество (??):

$$\varphi(x) \stackrel{[x_0-h, x_0+h]}{\equiv} \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x f(s, \varphi(s)) \, ds$$

Поэтому, согласно лемме о записи решения в интегральном виде, предельная функция $y = \varphi(x)$ является решением ВЗК(x_0, y_0) уравнения (??) на отрезке Пеано $[x_0 - h, x_0 + h]$ \square

Замечание. Теорема Пеано не даёт информации о количестве решений, проходящих через заданную точку области G

Замечание. Для точек неединственности существуют решения, которые нельзя приблизить ломаными Эйлера

Доказательство (НУО). В самом деле, пусть для уравнения (??) $y' = f(x, y)$ задача Коши поставлена в точке $(x_0, y_0) \in \widehat{G}$. Тогда замена

$$x = u + x_0, \quad y = v + y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

сводит уравнение (??) к уравнению $v' = f_0(u, v)$, в котором

$$f_0(u, v) = f\left(u + x_0, v + f(x_0, y_0)u + y_0\right)$$

При этом для $x = x_0, y = y_0$ получаем:

$$u = u_0 = 0, \quad v = v_0 = 0, \quad f_0(0, 0) = 0$$

□

Определение 34. Функцию $y = b_{a,u}^+(x)$ заданную на отрезке $[0, a]$ будем называть верхнеграничной, если для неё выполняются следующие пять условий:

1. $b_{a,u}^+(x) \in C^1([0, a])$
2. $b_{a,u}^+(0) = 0$
3. $b_{a,u}^+'(0) \geq 0$
4. $b_{a,u}^+$ вогнута на $[0, a]$, если $b_{a,u}^+'(0) = 0$
5. Правая верхнеграничная кривая $\gamma_{a,u}^+ = \{x \in [0, a], y = b_{a,u}^+(x)\} \subset \widehat{G}$

1.3. Существование решения граничной задачи Коши

В этом параграфе будут указаны условия, при которых существует решение ГЗК уравнения (1.1), поставленной в произвольной точке $(x_0, y_0) \in \widehat{G} \subset \partial G$, и условия, при которых такое решение отсутствует. Поставленная задача решается путём выделения тех случаев, в которых возможно построение аналогов треугольника и отрезка Пеано, с последующим применением метода ломаных Эйлера.

Для упрощения обозначений и формул, используемых в дальнейшем при решении граничной задачи Коши, НУО будем считать, что задача всегда ставится в начале координат и функция f там равна нулю, т. е. уравнение (1.1) имеет вид

$$y' = f_0(x, y) \tag{1.10}$$

где функция f_0 определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G} = G \cup \widehat{G}$, точка $O = (0, 0) \in \widetilde{G}$, $f_0(0, 0) = 0$ и поставлена граничная задача Коши с начальными данными $0, 0$

Примечание. Условие ?? допускает случай, когда $b_{a,u}^+'(0) = +\infty$

В условии ?? вогнутость понимается в нестрогом смысле, т. е. допускается тождество $b_{a,u}^+(x) \equiv 0$

1.3.1. Граничные кривые и порождаемые ими множества

Ключевую роль для существования или отсутствия решения ГЗК уравнения (1.10) будет играть структура граничного множества в \widehat{G} в малой окрестности точки O и значения функции f_0 на нём, а также расположение всего множества \widetilde{G} по отношению к оси абсцисс

Определение 35. Будем говорить, что

1. реализуется случай (W^+) , если

$$\exists c_W > 0 : \quad W_{c_W}^+ \cap \widehat{G} = \emptyset, \quad W_{c_W}^+ = N_{c_W}^+$$

2. реализуется случай (U^+) , если

$$\exists c_U > 0 : \quad U_{c_U}^+ \cap \widehat{G} = \gamma_{a,u}^+ \setminus \{ O \}$$

$$U_{c_U}^+ := \left\{ (x, y) \mid \left(x \in (0, a], \quad -c_u \leq y \leq b_{a,u}^+(x) \right) \cup \left(x \in (a, c_U], \quad y \leq c_U \right) \right\}$$

3. реализуется случай (O^+) , если

$$\exists c_O > 0 : \quad O_{c_O}^+ \cap \widehat{G} = \gamma_{a,l}^+ \setminus \{ O \}$$

$$O_{c_O}^+ := \left\{ (x, y) \mid \left(x \in (0, a], \quad b_{a,l}^+(x) \leq y \leq c_O \right) \cup \left(x \in (a, c_O], \quad |y| \leq c_O \right) \right\}$$

4. реализуется случай (B^+) , если

$$\exists c_B > 0 : B_{c_B}^+ \cap \widehat{G} = (\gamma_{a,u}^+ \cup \gamma_{a,l}^+) \setminus \{ O \}, \quad B_{c_B}^+ := U_{c_B}^+ \cap O_{c_B}^+$$

Замечание. Прямоугольник N_c^+ может содержать более одной нижнеграничной и более одной нижнеграничной кривой. Но наличие или отсутствие граничных кривых в N_c^+ вне множества X_c^+ не влияет на существование решения ГЗК(x_0, y_0)

Замечание. При наличии в N_c^+ единственной граничной кривой, дежащей на оси абсцисс, будем считать, что имеет место случай $(U_1^{+,=})$ с $b_{a,u}^+ \equiv 0$, а не $(O_{2,=}^+)$ с $b_{a,l}^+ \equiv 0$. То же касается случаев $(O_{1,=}^+)$ и $(U_2^{+,=})$

Аналогично вводится правая нижнеграничная функция $y = b_{a,l}^+(x)$, и правая нижнеграничная кривая $\gamma_{a,l}^+$ – график $b_{a,l}^+(x)$. Только в условии ?? предполагаем, что $b_{a,l}^+'(0) \leq 0$, и допускаем случай, когда $b_{a,l}^+'(0) = -\infty$, а в условии ?? предполагаем, что $b_{a,l}^+(x)$ выпукла

Введём две ключевые константы:

$$\tau_u = \frac{b_{a,u}^+'(0)}{2}, \quad \tau_u = 1, \text{ если } b_{a,u}^+'() = +\infty$$

$$\tau_l = -\frac{b_{a,l}^+'(0)}{2}, \quad \tau_l = -1, \text{ если } b_{a,l}^+'(0) = -\infty$$

НУО будем считать, что выполняются условия:

$$\begin{cases} b_{a,u}^+(a) \leq a & \text{при } \tau_u = 0 \\ \forall x \in [0, a] \quad b_{a,u}^+'(x) \geq \tau_u & \text{при } \tau_u > 0 \\ -b_{a,l}^+(a) \leq a & \text{при } \tau_l = 0 \\ \forall x \in [0, a] \quad -b_{a,l}^+'(x) \geq \tau_l & \text{при } \tau_l > 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

поскольку непосредственно из определения вытекает, что для любой правой граничной функции $b_a^+(x)$ функция $b_{\tilde{a}}^+(x)$, являющаяся её сужением на произвольный отрезок $[a, \tilde{a}]$ с $\tilde{a} < a$, остаётся правой граничной.

В результате $\gamma_{a,u}^+$ – гладкая кривая из \tilde{G} , параметризованная неубывающей с учётом (1.11) функцией $b_{a,u}^+(x)$. Она расположена в первой четверти и содержит точку O . $\gamma_{a,l}^+$ – гладкая кривая из \tilde{G} , параметризованная невозрастающей функцией $b_{a,l}^+(x)$. Она расположена в четвёртой четверти и содержит точку O . Для всякого $c > 0$ рассмотрим правую c -окрестность (это не окрестность – она не открыта) точки O :

$$N_c^+ := \{ (x, y) \mid x \in (0, c], \quad |y| \leq c \}$$

В прямоугольнике N_c^+ длина верхней стороны выбирается так, чтобы каждая “выходящая” из точки O правая граничная кривая, при наличии хотя бы одной, имела пересечение с одной из его сторон. При этом “поведение” граничных кривых после первого попадания на границу N_c^+ интереса не представляет.

Любое последующее уменьшение c ситуацию не меняет, разве что отсекаются части граничных кривых, попавших в прямоугольник снаружи.

В частности, неравенства $b_{a,u}^+(a) \leq a$ или $-b_{a,l}^+(a) \leq a$ из (1.11) при всех $c \leq a$ гарантируют пересечение правых граничных кривых γ_a^+ именно с боковой стороной прямоугольника N_c^+ .

Всегда в дальнейшем, “обрезая” при необходимости кривые γ_a^+ , будем считать, что правый конец $(a, b_a^+(a))$ любой из них – это первая точка выхода граничной кривой на границу прямоугольника N_c^+ .

Выделим для уравнения (1.10) четыре варианта расположения граничных кривых в малой окрестности точки O при $x > 0$:

Примечание. На рисунке описанная ситуация возникает в случае $(U_1^{+,=})$

Действительно, каким бы малым ни выбрать τ в формуле ??, всегда найдётся константа $c \leq \min \{ c_I, \delta_\tau \}$ такая, что в прямоугольнике $N_{\tilde{c}}^+$ с $\tilde{c} = \min \{ c_U, \delta_\tau \}$ часть правой верхнеграничной кривой $\gamma_{\tilde{c},u}^+$, примыкающая к точке O , будет лежать под верхней боковой стороной прямоугольника T_b^+ , имеющей угол наклона $\arctg \tau$. Поэтому ломаная Эйлера, которая не может покидать \tilde{G} , попадая в какой-то точке $(x_*, b_{\tilde{c},u}^+(x_*))$ ($x_* < \tilde{c}$) на $\gamma_{\tilde{c},u}^+$, не сможет быть продолжена вправо, если вы этой точке отрезок поля направлений будет иметь угол наклона, не превосходящий $\arctg \tau$, но больший угла наклона касательной к $\gamma_{\tilde{c},u}^+$

Теорема 9 (о существовании решения граничной задачи Коши). Предположим, что в уравнении (??) функция f_0 определена и непрерывна на множестве \tilde{G} . Тогда в каждом из случаев $(N_1^+), (U_1^{+,>}), (O_1^{+,>}), (B_1^{+,>})$ и в каждом из случаев $(U_1^{+,=}), (O_1^{+,<}), (B_1^{+,<}), (B_1^{+,<})$ при условиях (??) на любом правом граничном отрезке Пеано существует по крайней мере одно решение граничной задачи Коши с начальными данными $(0, 0)$

Обозначение. (X^+) и (X_{c*}^+) будут обозначать далее, что реализуется любой из четырёх описанных выше случаев на соответствующем множестве

В случае (X^+) или (X_{c*}^+) имеет место одна из двух возможностей:

1. $X_{c*}^+ \cap G \neq \emptyset$, что равносильно тому, что X_{c*}^+ без входящих в него граничных кривых лежит в G
2. $X_{c*}^+ \cap G = \emptyset$

В результате случай (X^+) в зависимости от расположения множества X_{c*} распадается на два подслучаи, которые будем обозначать (X_1^+) и (X_2^+)

А дополнительный индекс $>, =, <$, при его наличии в обозначении любого из шести возникших случаев (кроме (W_1^+) и (W_2^+)), будет уточнять знак производной соответствующих правых граничных функций в нуле

В итоге, получаются случаи:

U_1^+ : $(U_{c_U}^+ \setminus \gamma_{a,u}^+) \subset G$, два подслучаи:

$$U_1^{+,>}: b_{a,u}'(0) > 0$$

$$U_1^{+,<}: b_{a,u}'(0) = 0$$

U_2^+ : $U_{c_U}^+ \cap G = \emptyset$, подслучаи те же

O_1^+ : $(O_{co}^+ \setminus \gamma_{a,l}^+) \subset G$, два подслучаи:

$$O_1^{+,<}: b_{a,l}'(0) < 0$$

$$O_1^{+,<}: b_{a,l}'(0) = 0$$

O_2^+ : $O_{co}^+ \cap G = \emptyset$, подслучаи те же

B_1^+ : $\left(B_{c_B}^+ \setminus (\gamma_{a,u}^+ \cup \gamma_{a,l}^+) \right) \subset G$, четыре подслучаи:

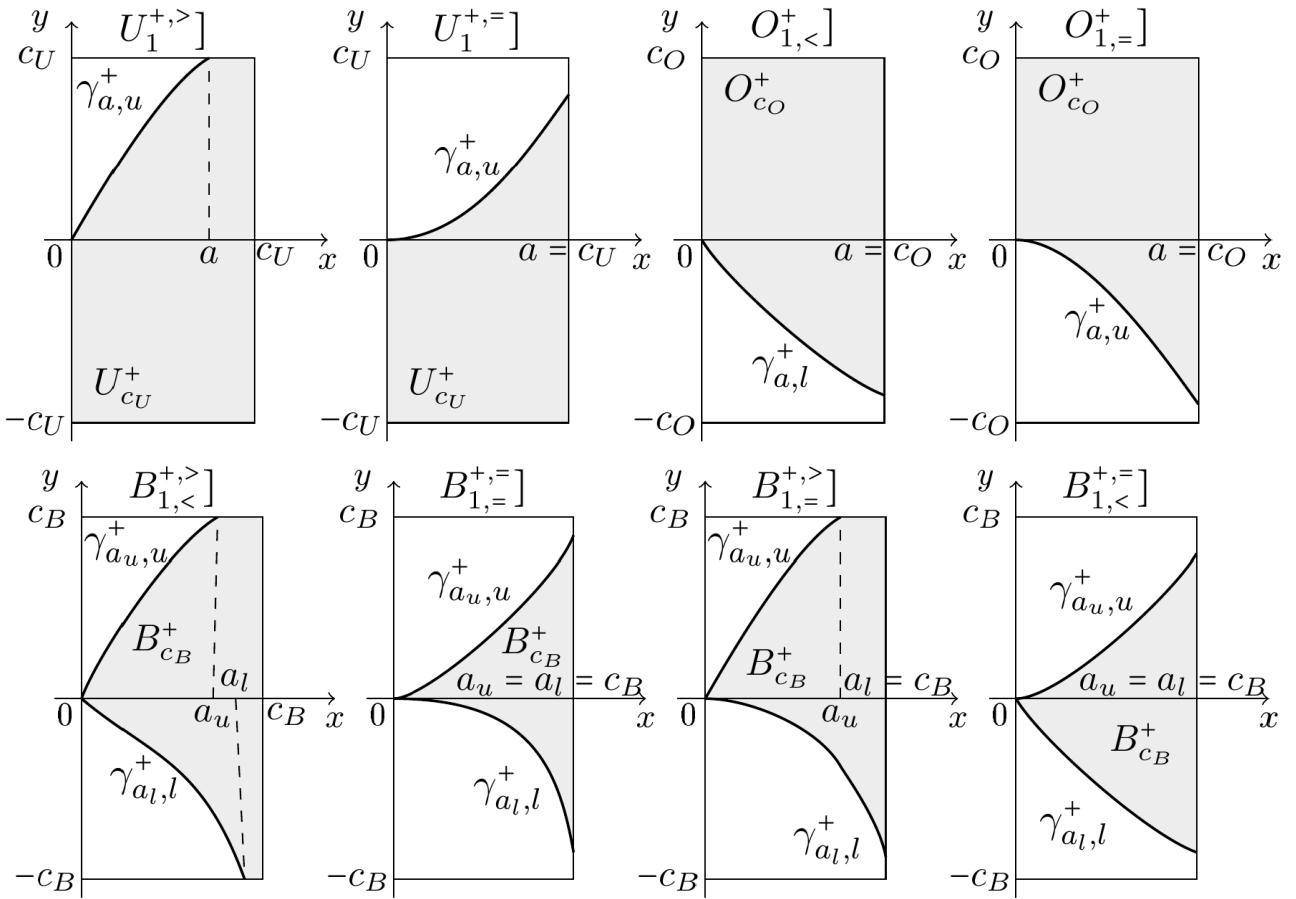
$$B_{1,<}^{+,>}: b_{a,u}'(0) > 0, \quad b_{a,l}'(0) < 0$$

$$B_{1,<}^{+,<}: b_{a,u}'(0) = 0, \quad b_{a,l}'(0) = 0$$

$$B_{1,<}^{+,>}: b_{a,u}'(0) > 0, \quad b_{a,l}'(0) = 0$$

$$B_{1,<}^{+,<}: b_{a,u}'(0) = 0, \quad b_{a,l}'(0) < 0$$

B_2^+ : $B_{c_B}^+ \cap G = \emptyset$, подслучаи те же



Доказательство. Рассмотрим, например, случай $(B_{1,=}^{+,>})$

Согласно (??) (первые два неравенства) правая верхнеграничная функция $b_{a,u}^+(x)$, параметризующая кривую $\gamma_{a,u}^+'(x) \geq \tau_u$ для любого $x \in (0, a_u]$. А у правой нижнеграничной привой $\gamma_{a_l,l}^+$ константа $a_l = c_O$ в силу (??) (последние два неравенства)

Пусть $c_* := \min \{ c_U, c_O \}$, тогда множество $B_{c_*}^+ \setminus (\gamma_{a_u,u}^+ \cup \gamma_{a_l,l}^+) \subset G$

Далее, для τ_u найдётся (см. (??)) такая δ_{τ_u} , что $|f_0(x, y)| \leq \tau_u$ в любой точке δ_{τ_u} -окрестности начала координат, принадлежащей \tilde{G}

Положим $\tilde{c} := \min \{ c_*, \delta_{\tau_u} \}$, тогда на множестве $B_{\tilde{c}}^+$ для функции $|f_0|$ справедлива та же оценка

Построим теперь лежащий в $B_{\tilde{c}}^+$ криволинейный треугольник $\overline{T_b^+}$, как это было сделано при описании случая $(B_{1,=}^{+,>})$. Его высота $h^+ = \tilde{a}$

Поскольку отрезок оси абсцисс $[0, h^+]$ лежит в \tilde{G} и является отрезком поля направлений в точке $O \in \tilde{G}$, из точки O вправо можно начать строить ломаную Эйлера с произвольным рангом дробления

Ломаная Эйлера не может покинуть $\overline{T_b^+}$ через верхнюю боковую сторону, лежащую на прямой $y = \tau_u x$, так как в любой её точке $|f_0(x, y)| \leq \tau_u$. Аналогично при попадании ломаной Эйлера при $x = x_* > 0$ на нижнюю боковую сторону, являющуюся частью правой нижнеграничной кривой $\gamma_{a_l,l}^+$, по условию (??) (второе неравенство) $f_0(x_*, b_{a_l,l}^+(x_*)) \geq b_{a_l,l}^{+'}(x_*)$, а значит, при $x > x_*$ следующий отрезок ломаной будет либо лежать на $\gamma_{a_l,l}^+$, либо внутри треугольника в силу выпуклости $\gamma_{a_l,l}^+$. Поэтому ломаная Эйлера с произвольным выбранным рангом дробления может быть продолжена на весь правый граничный отрезок Пеано $[0, h^+]$

Дальше дословно повторяется доказательство теоремы Пеано (теор. ??)

Аналогичные рассуждения проводятся и в остальных случаях \square

Теорема 10 (о существовании решения граничной задачи Коши). Пусть в уравнении (??) функция f_0 определена и непрерывна на множестве \tilde{G} и имеет место один из вариантов из условия (??), тогда на отрезке $[0, a]$ существует по крайней мере одно решение ГЗК($0, 0$)

1.3.2. Границный треугольник и граничный отрезок Пеано

Для доказательства существования решения ГЗК ($O = (0, 0) \in \widehat{G}$), график которого расположен, скажем, в правой полуплоскости, в первую очередь следует выделить так называемый правый граничный отрезок Пеано $\overline{P_h}^+(O) = [0, h^+] (h^+ > 0)$. А для этого необходимо построить правый граничный треугольник T_b^+ , во многом аналогичный треугольнику \overline{T}^+ из определения отрезка Пеано для внутренней задачи Коши, высота которого как раз и задаёт константу h^+ . Осуществить это удаётся в случаях $(N_1^+), (U_1^+), (O_1^+), (B_1^+)$ при дополнительных предположениях о поведении функции f_0 на тех граничных кривых, которые в нуле имеют нулевую производную

При построении будет использоваться непрерывность функции $f_0(xy)$ в граничной точке O , где по условию f_0 равна нулю, означающая, что

$$\forall \tau > 0 \quad \exists \delta_\tau > 0 : \quad \forall (x, y) \in \overline{V}_{\delta_\tau} \cap \widetilde{G} \quad |f_0(x, y)| \leq \tau, \quad \overline{V}_{\delta_\tau} := \{ (x, y) \mid |x| \leq \delta_\tau, \quad |y| \leq \delta_\tau \} \quad (1.12)$$

В простейшем случае (W_1^+), когда весь прямоугольник $N_{c_W}^+$ лежит в G (границные кривые в c_W -окрестности точки O могут быть расположены только на оси ординат или в левой полуплоскости), правый треугольник \overline{T}_b^+ и правый отрезок Пеано $[0, h^+]$ строятся стандартно:

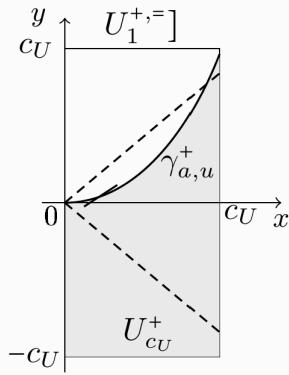
Выберем, например, $\tau = 1$. Тогда, согласно (1.12) найдётся $\delta_1 > 0$ такое, что $|f_0(x, y)| \leq 1$ на множестве $\overline{V}_{\delta_1} \cap \widetilde{G}$

Положим $\tilde{c} := \min \{ c_W, \delta_1 \}$

Построим в прямоугольнике $N_{\tilde{c}}^+$, не содержащем граничных кривых, с добавленной к нему точкой O , прямоугольный равнобедренный треугольник \overline{T}_b^+ с вершинами в точках $(0, 0), (\tilde{c}, \tilde{c}), (\tilde{c}, -\tilde{c})$. Тогда длина его высоты h^+ равна \tilde{c} , а его боковые стороны имеют углы наклона, равные $\pm \frac{\pi}{4}$, поэтому любая ломаная Эйлера, “выпущенная” из начала координат, в силу выбора $\tau = 1$ в (1.12) будет продолжима до точки (h^+, y_*) , лежащей на основании \overline{T}_b^+ , совпадающем в данном случае с правой стороной $N_{\tilde{c}}^+$

Похожие построения будут проведены для случаев $(U_1^{+,>}), (O_1^{+,<}), (B_1^{+,<})$

В остальных пяти случаях из-за того, что в каждом производная хотя бы одной из граничных функций в нуле равна нулю, может оказаться, что не все ломанные Эйлера могут быть продолжены до основания любого “классического” правого треугольника Пеано. Дело в том, что часть граничной кривой вблизи точки O такой граничной функции будет обязательно лежать внутри треугольника со сколь угодно малым углом при вершине O . Поэтому может найтись точка на этой части границы, в которой модуль угла наклона касательной будет меньше значения функции f_0 в этой точке, а значит, при попадании ломаной в эту точку её продолжение вправо должно будет покинуть множество \widetilde{G} , что невозможно



Доказательство. Без доказательства □

Для устранения этой проблемы во всех точках кривых $\gamma_{a,u}^+$ и $\gamma_{a,l}^+$ введём ограничения на функцию f_0 в случаях $(U_1^{+,=}), (O_1^{+,<}), (B_1^{+,<}), (B_1^{+,>})$ и $(B_1^{+,<})$:

$$\forall x \in (0, a] \quad \begin{cases} f_0(x, b_{a,u}^+(x)) \leq b_{a,u}'(x), & \text{если } b_{a,u}'(0) = 0 \\ f_0(x, b_{a,l}^+(x)) \geq b_{a,l}'(x), & \text{если } b_{a,l}'(0) = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

означающие, что в любой точке $\gamma_{a,u}^+$ и $\gamma_{a,l}^+$ правый полуотрезок поля направлений уравнения (1.10) направлен внутрь или по границе области G

Построим отрезок Пеано в восьми случаях (X_1^+):

$U_1^{+,>}$. Пусть $\tilde{c} = \min \{ c_U, \delta_{\tau_u} \}$, где τ_u из (1.11), а δ_{τ_u} задана в (1.12).

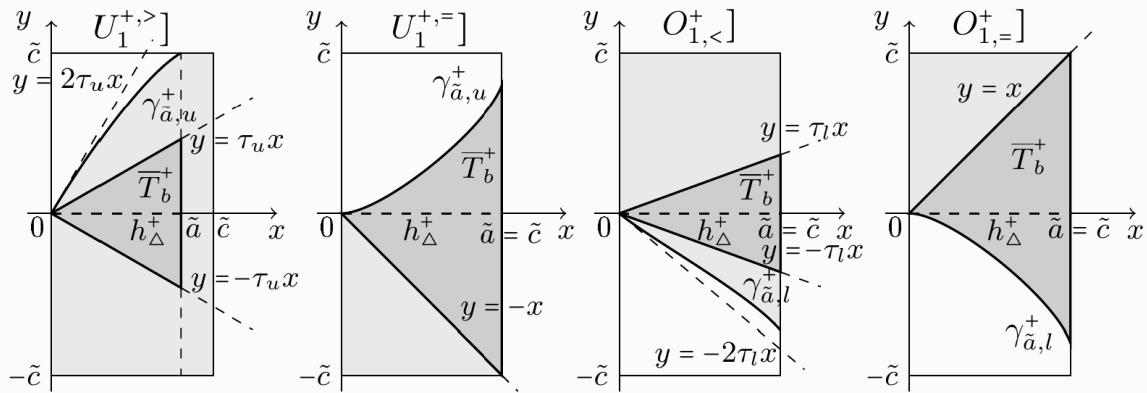
Тогда $U_{\tilde{c}}^+ \setminus \gamma_{\tilde{a},u}^+ \subset G$, где \tilde{a} – точка пересечения $\gamma_{a,u}^+$ с верхней или боковой ($\tilde{a} = \tilde{c}$) границей $N_{\tilde{c}}^+$,

$|f_0(x, y)| \leq \tau_u$ при $(x, y) \in U_{\tilde{c}}^+$ и $h^+ = \tilde{a}$

Геометрически надо из точки O провести лучи с тангенсами углов наклона, равными $\pm\tau$, до пересечения с вертикальной прямой $x \equiv \tilde{a}$. В полученном равнобедренном треугольнике $\overline{T_b^+}$ высота $h_\Delta^+ = \tilde{a}$. При этом $\overline{T_b^+} \setminus \{O\} \subset U_{\tilde{c}}^+$ (и расположен под кривой $\gamma_{\tilde{a}, u}^+$) в силу выбора \tilde{a} , так как согласно (1.11) верно неравенство $b_{\tilde{a}, u}^+(x) \geq \tau_u x$ при $x \in [0, \tilde{a}]$

$U_1^{+,=}$. Пусть в (1.12) $\tau = 1$, $\tilde{c} = \min \{c_U, \delta_1\}$. Тогда $U_{\tilde{c}}^+ \setminus \gamma_{\tilde{a}, u}^+ \subset G$, причём $\tilde{a} = \tilde{c}$, так как правый конец $\gamma_{\tilde{a}, u}^+$ с учётом (1.11) заканчивается на боковой стороне $N_{\tilde{c}}^+$, $|f_0(x, y)| \leq 1$ при $(x, y) \in U_{\tilde{c}}^+$ и $h^+ = \tilde{c}$. Геометрически надо соединить точки O и $(\tilde{c}, -\tilde{c})$. Тогда полученный отрезок вместе с кривой $\gamma_{\tilde{a}, u}^+$ и отрезком боковой стороны $N_{\tilde{c}}^+$ образует криволинейный треугольник $\overline{T_b^+}$ с высотой $h_\Delta^+ = \tilde{c}$, при этом $\overline{T_b^+} \setminus O \subset U_{\tilde{c}}^+$

$O_{1,<}^+, O_{1,=}^+$. Аналогично, только на рисунке для случая $(O_{1,<}^+)$ кривая $\gamma_{\tilde{a}, l}^+$, над которой расположен треугольник $\overline{T_b^+}$, пересекается не с нижней, а с боковой стороной прямоугольника $N_{\tilde{c}-}$



$B_{1,<}^{+,>}$. Пусть $\tilde{c} = \min \{c_B, \delta_{\tilde{\tau}}\}$, где $\tilde{\tau} = \min \{\tau_u, \tau_l\}$ (см. (1.11)). Тогда $B_{\tilde{c}+} \setminus (\gamma_{a_u, u}^+ \cup \gamma_{a_l, l}^+) \subset \gamma$, $|f_0(x, y)| \leq \tilde{\tau}$ при $(x, y) \in B_{\tilde{c}}^+$ и $h^+ = \tilde{a} = \min \{a_u, a_l\}$

Геометрически надо из точки O провести лучи с тангенсами углов наклона $\pm\tilde{\tau}$ до пересечения с вертикальной прямой $x \equiv \tilde{a}$. В полученном треугольнике $\overline{T_b^+}$ высота $h_\Delta^+ = \tilde{a}$. При этом $\overline{T_b^+} \setminus O \subset B_{\tilde{c}}^+$ в силу выбора \tilde{a}

$B_{1,=}^{+,=}$. По определению множества $B_{c_B}^+$ и условию (1.11) правые концы кривых $\gamma_{a_u, u}^+, \gamma_{a_l, l}^+$ лежат на боковой стороне прямоугольника $N_{\tilde{c}}^+$ с $\tilde{c} = c_B$, поэтому $a_u = a_l = \tilde{c}$, $B_{\tilde{c}}^+ \setminus (\gamma_{a_u, u}^+ \cup \gamma_{a_l, l}^+) \subset G$ и $h^+ = \tilde{c}$

Геометрически само множество $B_{\tilde{c}}^+$ образует криволинейный треугольник $\overline{T_b^+}$ с высотой $h_\Delta^+ = \tilde{c}$

$B_{1,=}^{+,>}$. Пусть $\tilde{c} = \min \{c_B, c_O, \delta_{\tau_u}\}$, где τ_u из (1.11), а δ_{τ_u} – из (1.12). Тогда $B_{\tilde{c}+} \setminus (\gamma_{\tilde{a}, u}^+ \cup \gamma_{\tilde{c}, l}^+) \subset G$, $|f_0(x, y)| \leq \tau_u$ при $(x, y) \in B_{\tilde{c}}^+$ и $h^+ = \tilde{a}$

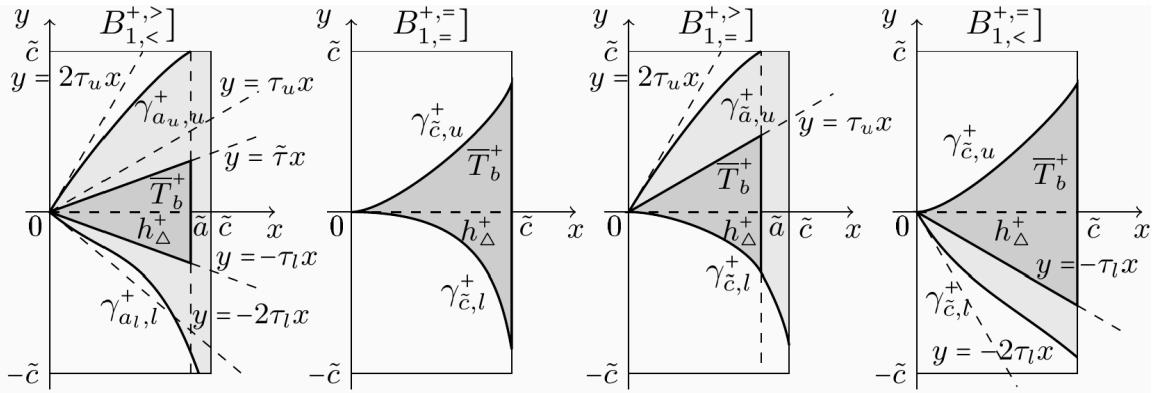
Геометрически надо из точки O провести луч с тангенсом угла наклона, равным τ_u , до пересечения с прямой $x \equiv \tilde{a}$, где \tilde{a} – точка пересечения $\gamma_{\tilde{a}, u}^+$ с верхней или боковой ($\tilde{a} = \tilde{c}$) границей $N_{\tilde{c}}^+$. Третьей стороной криволинейного треугольника $\overline{T_b^+}$ является кривая $\gamma_{\tilde{a}, l}^+$. При этом в треугольнике высота $h_\Delta^+ = \tilde{a}$ и $\overline{T_b^+} \setminus O \subset B_{\tilde{c}}^+$ в силу выбора \tilde{a}

$B_{1,<}^{+,=}$. Аналогично

1.3.3. Теоремы о существовании или отсутствии решений ГЗК

Теорема 11 (об отсутствии решений граничной задачи Коши). В каждом из случаев $(U_2^{+,>})$, $(O_{2,<}^+)$,

$(B_{2,<}^{+,>})$, (N_2^+) граничная задача Коши с начальными данными $(0, 0)$ не имеет решений в правой полу-плоскости



Доказательство. Допустим, что в каждом случае из условия теоремы на некотором отрезке $[0, a]$ существует решение $y = \varphi(x)$ задачи Коши уравнения (??) с начальными данными $(0, 0)$, т. е. $\varphi(0) = 0$. Тогда $\varphi'(0) = f_0(0, \varphi(0)) = 0$. Но график любого решения должен лежать в \tilde{G} , а значит, располагаться не ниже правой верхнеграничной кривой, у которой в точке O тангенс угла наклона согласно (??) равен $2\tau_u > 0$, или не выше правой нижнеграничной кривой, имеющей в точке O тангенс угла наклона, равный $-2\tau_l < 0$. Поэтому $\varphi'(0) \neq 0$. \square

Рассмотренные в теореме ?? девять случаев не исчерпывают все ситуации, в которых можно доказать существование решения ГЗК уравнения (1.10). Это удаётся сделать ещё в ряде случаев, но уже другим методом.

Все новые случаи предполагают наличие двух граничных функций, которые будем обозначать $b_a^{+,u}$ и $b_a^{+,l}$, а их графики $\gamma_a^{+,u}$ и $\gamma_a^{+,l}$. Например, $\gamma_a^{+,l}$ – это нижняя верхнеграничная кривая. При этом в определении граничных функций можно отказаться от условия о выпуклости, требуя от них только отсутствия общих точек, кроме точки O .

Для функций $b_a^{+,*}(x)$ ($*$ – это u или l) положим $\tau^* := \frac{b_a^{+,*'}(0)}{2}$

Будем использовать два варианта сравнительного поведения правых граничных функций $b_a^{+,*}(x)$ и функции $f_0(x, b_a^{+,*})$ на отрезке $[0, a]$:

$$\begin{cases} f_0(x, b_a^{+,*}(x)) \leq b_a^{+,*}(x), & f_0(x, b_a^{+,*}(x)) \leq b_a^{+,*}(x) \\ f_0(x, b_a^{+,*}(x)) \geq b_a^{+,*}(x), & f_0(x, b_a^{+,*}(x)) \geq b_a^{+,*}(x), \quad \tau^u \cdot \tau^l = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Иными словами, в первом варианте построенные на обеих границах отрезки поля направлений направлены (с увеличением x) по границе или внутрь области G , лежащей между граничными кривыми, а во втором варианте – наружу. Кроме того, во втором варианте требуется, чтобы хотя бы одна граничных кривых имела в начале координат горизонтальную касательную

Замечание. Теоремы, подобные приведённым, можно сформулировать для левой полуплоскости

Лемма 6 (о продолжимости решений на отрезок Пеано). Пусть $y = \varphi(x)$ – это решение внутренней задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 , определённое на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$.

Тогда любое другое решение уравнения (??) $y = \psi(x)$ этой же задачи Коши, определённое на промежутке $\langle a, b \rangle \subsetneq [x_0 - h, x_0 + h]$, продолжимо на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

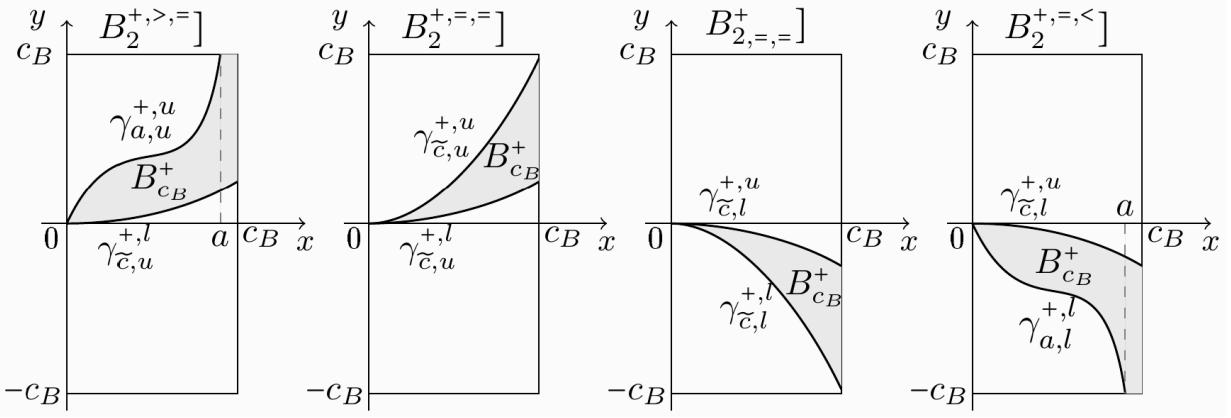
Перечислим и опишем новые случаи в привычных обозначениях:

Во-первых, ими являются три знакомых случая $(B_{1,=}^{+})$, $(B_{1,>}^{+})$, $(B_{1,<}^{+})$, но с иным поведением отрезков поля направлений на граничных кривых

Следующие два случая – подслучаи (U_2^{+}) , где стало существенно наличие второй верхнеграничной кривой и расположение области G между кривыми. Обозначим их $(B_2^{+,>,+})$, $(B_2^{+,-,+})$ по аналогии со случаем $(B_{1,=}^{+})$

Последние два случая, обозначаемые $(B_{2,=,=})$ и $(B_{2,<,=})$ относятся к (O_2^{+})

Изучим теперь нигде пока не рассмотренные случаи $(U_2^{+,>})$, $(O_2^{+,<})$, $(B_2^{+,>})$ и вырожденный случай (N_2^{+}) : $\exists c > 0 : G \cap N_c^+ = \emptyset$, в котором отсутствуют граничные кривые, имеющие в точке O горизонтальную касательную:



Доказательство. Докажем, например, продолжимость решения $y = \psi(x)$ с $\psi(x_0) = y_0$ на правый полуотрезок Пеано:

Если $\langle a, b \rangle = \langle a, b \rangle$ (т. е. $b \leq x_0 + h$), то график решения $y = \psi(x)$ при $x \in [x_0, b]$ лежит в треугольнике $\overline{T^+}$, построенном для решения $y = \varphi(x)$. Поэтому у любой последовательности $x_k \in [x_0, b]$ и $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b$ точки $(x+k, \psi(x_k)) \in \overline{T^+} \subset \overline{R}$, а значит, найдётся сходящаяся последовательность $(x_{k_l}, \psi(x_{k_l}))$. Её предел – точка $(b, \eta) \in \overline{T^+}$.

Следовательно, по теореме о продолжимости решения (теор. ??) $y = \psi(x)$ продолжимо на $[x_0, b]$, хотя могло быть там сразу и задано

- Если теперь $b = x_0 + h$, то лемма доказана
- Пусть $b < x_0 + h$. Построим равнобедренный треугольник $\overline{T_1^+}$ с вершиной в точке (b, η) , боковыми сторонами, имеющими тангенсы углов наклона $\pm M$, и основанием, лежащим на основании треугольника $\overline{T^+}$ с абсциссой $x_0 + h$. Тогда $\overline{T_1^+} \subset \overline{T^+}$ и по теореме Пеано (теор. ??) на $[b, x_0 + h]$ существует решение задачи Коши с начальными данными (b, η) , продолжающее $\psi(x)$ до точки $x_0 + h$ включительно

□

Утверждение 5. Для любых $k \in \mathbb{N}$, $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ функции

$$\chi_k^l(x) := \min \{ \chi_1(x), \dots, \chi_k(x) \}, \quad \chi_k^u(x) := \max \{ \chi_1(x), \dots, \chi_k(x) \}$$

также являются решениями поставленной задачи на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

Доказательство. Действительно, эти функции удовлетворяют всем трём условиям из определения решения, поскольку для любого $x_* \in [x_0 - h, x_0 + h]$ найдётся такой индекс $1 \leq j \leq k$, что, например, $\chi_k^l(x_*) = \chi_j(x_*)$, и если $\chi_j(x_*) = \chi_m(x_*)$, то $\chi'_j(x_*) = \chi'_m(x_*) = f(x_*, \chi_k^l(x_*))$ □

1.4. Единственность решения задачи Коши

1.4.1. Теорема о локальной единственности решения внутренней задачи Коши

В этом разделе будет доказана теорема ?? (о локальной единственности решения внутренней задачи Коши)

Лемма 7 (о нижнем и верхнем решениях). Существуют решения ЗК(x_0, y_0) $y = \chi^l(x)$ и $y = \chi^u(x)$ уравнения (??) такие, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [x_0 - h, x_0 + h] : \quad \begin{cases} \chi^l(x) \leq \chi_k^l(x) \\ \chi^u(x) \geq \chi_k^u(x) \end{cases} \quad (1.15)$$

Доказательство. Рассмотрим, например, последовательность решений $\{x_k^l(x)\}_{k=1}^\infty$ на отрезке $[x_0, x_0 + h]$. Поскольку все их графики лежат в треугольнике $\overline{T^+}$, полученном при построении отрезка Пеано, эта последовательность равномерно ограничена и равностепенно ограничена (см. док-во теоремы Пеано). Следовательно, по лемме Арцела-Асколи из неё можно выделить равномерно на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ сходящуюся подпоследовательность, предел которой тоже будет решением уравнения (??) на отрезке Пеано

Но последовательность $\chi_k^l(x)$ монотонно убывает, поэтому она сама будет сходиться к нижнему решению $y = \chi^l(x)$, для которого, очевидно, будет верно неравенство (??)

Рассуждения для отрезка аналогичны так же, как и доказательство сходимости функции $\chi_k^u(x)$ к верхнему решению $y = \chi^u(x)$ \square

Теорема 12 (о локальной единственности решения внутренней ЗК). Пусть $(x_0, y_0) \in G$ – это точка единственности.

Тогда решение ЗК (x_0, y_0) уравнения (??) является локально единственным

По лемме для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ и для любого $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ любое решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными x_0, y_0 продолжим на $[x_0 - h, x_0 + h]$. Поэтому, НУО будем считать, что все решения поставленной ЗК определены на выбранном отрезке $\overline{P_h}(x_0, y_0)$. В частности, в определении локальной единственности решения (опр. ??) в качестве (α, β) можно будет выбрать любой интервал из $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

Пусть $(x_0, y_0) \in G$, $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ – некий отрезок Пеано и $\{\chi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность решений ЗК (x_0, y_0) уравнения (1.1), определённых на $[x_0 - h, x_0 + h]$

Доказательство. От противного

Построим какой-нибудь отрезок Пеано $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ и допустим, что для любого интревала (α, β) такого, что $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset [x_0 - h, x_0 + h]$, существуют такие решения ЗК $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, не совпадающие на (α, β)

Тогда для всякого $k = 1, 2, \dots$ найдутся решения $y = \varphi_k(x)$ и $y = \psi_k(x)$ ЗК, определённые на отрезке Пеано, такие, что

$$\exists x_k \in \left(x_0 - \frac{h}{k}, x_0 + \frac{h}{k} \right) : \quad \varphi_k(x_k) < \psi_k(x_k)$$

Согласно утверждению ?? функция $\varphi_k^l = \min \{ \varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x) \}$ и функция $\psi_k^u(x)$, удовлетворяющие неравенства типа (??)

В результате $x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x_0$ и справедливы неравенства

$$\forall k = 1, 2, \dots \quad \varphi^l(x_k) \leq \varphi_k(x_k) < \psi_k(x_k) \leq \psi^u(x_k)$$

означающие, что (x_0, y_0) – точка единственности – $\not\models$

□

Лемма 8 (Гронуолла; об интегральной оценке функции сверху). Пусть функция $h(x) \in \mathcal{C}(\langle a, b \rangle)$ и существуют такие $x_0 \in \langle a, b \rangle$, $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$, что

$$\forall x \in \langle a, b \rangle \quad 0 \leq h(x) \leq \lambda + \mu \left| \int_{x_0}^x h(s) \, ds \right| \quad (1.16)$$

Тогда для любого $x \in \langle a, b \rangle$ справедливо неравенство

$$h(x) \leq \lambda e^{\mu|x-x_0|} \quad (1.17)$$

Доказательство.

- Предположим, что $x \geq x_0$

Введём в рассмотрение функцию $g(x) = \int_{x_0}^x h(s) \, ds$

$$\Rightarrow g(x_0) = 0, \quad g(x) \geq 0, \quad g(x) \in C^1([x_0, b]), \quad g'(x) = h(x) \geq 0$$

Подставим $g(x)$ в (??):

$$g'(x) \leq \lambda + \mu g(x) \Rightarrow g'(x) - \mu g(x) \leq \lambda \Rightarrow e^{-\mu(x-x_0)}(g'(x) - \mu g(x)) \leq \lambda e^{-\mu(x-x_0)}$$

При этом,

$$\left(g(x)e^{-\mu(x-x_0)} \right)' = g'(x)e^{-\mu(x-x_0)} - \mu e^{-\mu(x-x_0)}g(x) = e^{-\mu(x-x_0)}(g'(x) - \mu g(x))$$

Отсюда

$$\left(g(x)e^{-\mu(x-x_0)} \right)' \leq \lambda$$

Проинтегрируем по s от x_0 до x :

$$g(x)e^{-\mu(x-x_0)} - \underbrace{g(x_0)}_0 \leq \lambda \int_{x_0}^x e^{-\mu(s-x_0)} \, ds = -\frac{\lambda}{\mu}(e^{-\mu(x-x_0)} - 1)$$

Умножим на $e^{\mu(x-x_0)}$:

$$g(x) \leq \frac{\lambda}{\mu}(e^{\mu(x-x_0)} - 1)$$

Подставим в (??):

$$h(x) \leq \lambda + \mu g(x) \leq \lambda e^{\mu(x-x_0)}$$

Таким образом, неравенство доказано для всех $x \in [x_0, b]$

- Если $x \leq x_0$, то в (??)

$$h(x) \leq \lambda - \mu \int_{x_0}^x h(s) \, ds, \quad g(x) \leq 0$$

Дальнейшее доказательство аналогично

□

Следствие. Если $\lambda = 0$, то есть

$$0 \leq h(x) \leq \mu \left| \int_{x_0}^x h(s) \, ds \right|$$

то $h(x) \stackrel{(a,b)}{\equiv} 0$

Определение 36. Функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y глобально на множестве $D \subset \mathbb{R}^2$, если

$$\exists L > 0 : \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (1.18)$$

Определение 37. Функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y локально на множестве \tilde{G} , если для любой точки $(x_0, y_0) \in \tilde{G}$ найдётся замкнутая c -окрестность $\bar{B}_c(x_0, y_0)$ такая, что функция f удовлетворяет условию Липшица по y глобально на множестве $U_c = \tilde{G} \cap \bar{B}_c(x_0, y_0)$

1.4.2. Лемма Гронуолла

Теорема 13 (о множестве единственности). Пусть в уравнении (??) функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на множестве \tilde{G} и удовлетворяет условию Липшица по y локально на множестве $\tilde{G}^0 = G^0 \cup \widehat{G}^0$, где $G^0 \subset G$ – область, а $\widehat{G}^0 \subset \partial G^0 \cap \tilde{G}$.

Тогда \widetilde{G}^0 – множество единственности для уравнения (??)

Утверждение 6. Тогда, уменьшая $\langle a, b \rangle$ при необходимости можно добиться, чтобы график решения лежал в U_c

Доказательство. Действительно, очевидно, что с уменьшением $\langle a, b \rangle$ график решения попадает в $\bar{B}_c(x_0, y_0)$. А ситуация, когда при $x < x_0$ и (или) $x > x_0$ график, оставаясь в \tilde{G} , не принадлежит \widehat{G}^0 , преодолевается за счёт выбора константы $c_1 > c$ такой, что в $\bar{B}_{c_1}(x_0, y_0)$ будет выполняться глобальное условие Липшица с константой, скажем, $L_1 := L + 1$. В результате с учётом непрерывности функции $f(x, y)$ область \widehat{G}^0 увеличится, включив в себя дугу интегральной кривой в малой окрестности точки (x_0, y_0) \square

1.4.3. Условия Липшица

Бывает, что требование дифференцируемости функции оказывается чрезмерным. Тогда его заменяют “локальным условием Липшица”, которое не допускает более чем линейного роста функции по этой переменной в малой окрестности каждой точки из некоторого множества

Доказательство. Возьмём любую точку (x_0, y_0) из множества \widetilde{G}^0 и покажем, что она является точкой единственности.

Поскольку $f \in \text{Lip}_y^{loc}(\widetilde{G}^0)$, найдутся $\overline{B}_c(x_0, y_0)$ и $L > 0$ такие, что $f \in \text{Lip}_y^{gl}(U_c)$ с константой L , где $U_c = \widetilde{G}^0 \cap \overline{B}_c(x_0, y_0)$

- Если $(x_0, y_0) \in G^0$, то найдётся $c > 0$ такое, что $U_c = \overline{B}_c(x_0, y_0)$, решение ЗК(x_0, y_0) существует на некотором интервале $(a, b) \ni x_0$ и для любого решения этой задачи, уменьшая при необходимости (a, b) , можно добиться, чтобы его график лежал в U_c
- Пусть $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}^0$
 - Если решение ЗК(x_0, y_0) отсутствует, то (x_0, y_0) – это точка единственности по определению
 - Пусть решение существует на некотором промежутке (a, b) таком, что $x_0 \in (a, b) \subset [x_0 - c, x_0 + c]$

[TIKZPICTURE OPTIMIZED AWAY BECAUSE IT DOES NOT CONTRIBUTE TO EXPORTED PDF]
[TIKZPICTURE OPTIMIZED AWAY BECAUSE IT DOES NOT CONTRIBUTE TO EXPORTED PDF]

Рассмотрим любые два решения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ ЗК(x_0, y_0), которые определены по крайней мере на некотором общем промежутке (α, β) таком, что $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset [x_0 - c, x_0 + c]$

Как установлено выше, уменьшая при необходимости (α, β) , можно добиться, чтобы для всякого $x \in (\alpha, \beta)$ точки $(x, \varphi_1(x)), (x, \varphi_2(x)) \in U_c$

По лемме о записи решения в интегральном виде $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ удовлетворяют тождеству (??) на (α, β) , т. е. для любого $x \in (\alpha, \beta)$ справедливо

$$\varphi_j(x) = \varphi_j(x_0) + \int_{x_0}^x f(s, \varphi_j(s)) \, ds, \quad j = 1, 2$$

Поэтому

$$\varphi_2(x) - \varphi_1(x) = \int_{x_0}^x \left(f(s, \varphi_2(s)) - f(s, \varphi_1(s)) \right) \, ds$$

точки $(s, \varphi_j(s)) \in U_c$ и для них выполнено неравенство (??). Тогда

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, \varphi_2(s)) - f(s, \varphi_1(s))| \, ds \right| \leq \left| \int_{x_0}^x L |\varphi_2(s) - \varphi_1(s)| \, ds \right|$$

К последнему неравенству можно применить следствие к лемме Гронуолла (лемма ??), где $h(x) = |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)|$, $\lambda = 0$, $\mu = L$

Тогда $|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \underset{(\alpha, \beta)}{\equiv} 0$, т. е. решения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ ЗК(x_0, y_0) совпадают в каждой точке $(\alpha, \beta) \ni x_0$. Поэтому по определению (x_0, y_0) – это точка единственности \square

Обозначение. $f \in \text{Lip}_y^{gl}(D)$

Частный случай Предположим, что в уравнении (??) функция $f(x, y)$ непрерывна в области G и удовлетворяет условию Липшица по y локально в области $G^0 \subset G$.

Тогда G^0 – это область единственности

Обозначение. $y \in \text{Lip}_y^{loc}(\widetilde{G})$

1.4.4. Теоремы о глобальной единственности решений

Теорема 14 (о множестве единственности; слабая). Предположим, что в уравнении (??) функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на множестве \widetilde{G} , функция $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ определена и непрерывна в области $G^0 \subset G$.

Тогда множество $\widetilde{G}^0 = G^0 \cup \widehat{G}^0$, где $\widehat{G}^0 \subset \partial G^0 \cap \widehat{G}$ и состоит из точек, в которых $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ может быть доопределена по непрерывности, является множеством единственности для уравнения (??), если при этом для любой точки $(x_0, y_0) \in \widehat{G}^0$ найдётся $\overline{B}_c(x_0, y_0)$ такая, что множество $\widetilde{G}^0 \cap \overline{B}_c(x_0, y_0)$ выпукло по y

Примечание. В последнем предположении теоремы говорится о произвольной точке границы множества $\widetilde{G^0}$, поскольку для любой точки из области G^0 требуемое условие выполняется автоматически

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $(x_0, y_0) \in \widetilde{G^0}$. Поскольку функция $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывна в точке (x_0, y_0) , существует такое δ , что $0 < \delta \leq c$, где c берётся из формулировки теоремы, и для любой точки $(x, y) \in U_\delta := G^0 \cap \overline{B}_\delta(x_0, y_0)$ верно неравенство

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right| \leq 1$$

Таким образом, установлено, что U_δ выпукло по y и

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq L := \left| \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right| + 1 \quad \forall (x, y) \in U_\delta$$

По теореме Лагранжа для любых двух точек $(x, y_1), (x, y_2) \in U_\delta$, $y_1 < y_2$,

$$\exists y^*(x) \in (y_1, y_2) : f(x, y_2) - f(x, y_1) = \frac{\partial f(x, y^*(x))}{\partial y} (y_2 - y_1)$$

Здесь точка $(x, y^*(x)) \in U_\delta$, так как множество U_δ выпукло по y . Поэтому в U_δ верно неравенство

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L |y_2 - y_1|$$

означающее, что $f \in \text{Lip}_y^{gl}(U_\delta)$. Тогда по определению выполнено локальное условие Липшица, а значит, по теореме о единственности $\widetilde{G^0}$ – это множество единственности \square

Теорема 15 (Осгуда; о единственности в области; сильная). Пусть в уравнении (??) функция $f(x, y)$ непрерывна в области G и

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in G \quad |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq h(|y_2 - y_1|) \quad (1.19)$$

где функция $h(s)$ определена, непрерывна и положительна для всякого $s \in (0, +\infty)$ и

$$\int_{\varepsilon}^a h^{-1}(s) \, ds \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \infty, \quad a > \varepsilon > 0$$

Тогда G – это область единственности для уравнения (??)

Доказательство. Без доказательства \square

Замечание. В качестве $h(s)$ можно выбрать линейную функцию Ls . Тогда неравенство (??) окажется глобальным условием Липшица, а теорема о единственности будет вытекать из теоремы Осгуда

Алгоритм (построения \overline{A}). Пусть G^0 – область единственности для уравнения (??)
Возьмём любую точку $(x_0^*, y_0^*) \in G^0$

Поскольку G^0 является открытым множеством, существует такое $\delta > 0$, что $\overline{B}_{2\delta}(x_0^*, y_0^*) \subset G^0$
Пусть числа y_1, y_2 таковы, что

$$\begin{cases} 0 < y_0^* - y_1 < \delta \\ 0 < y_2 - y_0^* < \delta \end{cases}$$

и найдётся отрезок $[a, b] \ni x_0^*$ такой, что графики решений $\mathcal{ZK}(x_0^*, y_1) y = \varphi_1(x)$ и $\mathcal{ZK}(x_0^*, y_2) y = \varphi_2(x)$ лежат в \overline{B}_c при $x \in [a, b]$. Тогда в \overline{B}_δ содержится компакт

$$\overline{A} = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \} \quad (1.20)$$

Лемма 9 (о поведении решений на компакте \overline{A}). Для любой точки $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ решение $\mathcal{ZK}(x_0, y_0) y = \varphi(x)$ продолжимо на отрезок $[a, b]$

Доказательство. Для любой точки $(x_0^*, y_0^*) \in G^0$ построим компакт \bar{A} вида (??), тогда $\bar{A} \subset \bar{B}_\delta \subset \bar{B}_{2\delta} \subset G^0$

Возьмём произвольную точку $(x_0, y_0) \in \bar{A}$. Тогда прямоугольник

$$\bar{R} := \{ (x, y) \mid |x - x_0| \leq \delta, |y - y_0| \leq \delta \} \subset \bar{B}_{2\delta}$$

Пусть $M := \max_{\bar{B}_{2\delta}} |f(x, y)| > 0$ (при $M = 0$ лемма очевидна)

Положим $h := \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{M} \right\}$. Тогда $P_h(x_0, y_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$ – отрезок Пеано, построенный для произвольной точки $(x_0, y_0) \in \bar{A}$

Следовательно, по теореме Пеано решение ЗК (x_0, y_0) $y = \varphi(x)$ определено на отрезке Пеано $[x_0 - h, x_0 + h]$, длина которого неизменна для всех точек $(x_0, y_0) \in \bar{A}$

- Рассмотрим функцию $\varphi(x)$ при $x > x_0$:

Не только гладкость функции f по y , но и локальное условие Липшица не является необходимым:

– Если $x_0 + h < b$, то $\varphi_1(x_0 + h) \leq \varphi(x_0 + h) \leq \varphi_2(x_0 + h)$, а значит, точка $x_0 + h, (\varphi_1(x_0 + h), \varphi(x_0 + h))$ является конечным числом шагов будет продолжено вправо до точки b включительно

* Если $x_0 + 2h \geq b$, то лемма доказана

* Иначе сделаем очередное продолжение решения вправо на длину h

В результате за конечное число шагов будет продолжено вправо до точки b включительно

- Аналогично $y = \varphi(x)$ можно продолжить влево до точки a

□

Теорема 16 (о существовании общего решения). Введённая в формуле (??) функция $y = \varphi(x, C)$ является общим решением уравнения (??) на компакте \bar{A} из (??), построенном в окрестности произвольной точки из области единственности G^0

Доказательство. Покажем, что функция $y = \varphi(x, C)$ удовлетворяет определению общего решения уравнения (??):

1. Возьмём произвольную точку $(x_0, y_0) \in \bar{A}$ и рассмотрим уравнение $y_0 = \varphi(x_0, C)$ или согласно (??) уравнение

$$y_0 = y(x_0, \zeta, C) \quad (1.22)$$

Наличие у него решения $C = C_0$ фактически означает, что “выпущенное” из точки $(\zeta, C_0) \in \bar{A}$ решение уравнения (??) в момент x_0 попадает в точку $(x_0, y_0) \in \bar{A}$

Покажем, что решение уравнения (??) существует и единственno:

“Выпустим” из точки (x_0, y_0) решение $y = y(x, x_0, y_0)$, которое по лемме ?? определено на всём отрезке $[a, b]$ и, в частности, при $x = \zeta \in [a, b]$ по определению (??)

Пусть $C_0 = y(\zeta, x_0, y_0)$. Тогда (ζ, C) – это точка единственности, так как принадлежит графику решения $y = y(x, x_0, y_0)$

Поэтому решение ЗК (ζ, C) $y = u(x, \zeta, C_0)$ с начальными данными ζ, C_0 по лемме о поведении решений на компакте \bar{A} (лемма ??) продолжимо на $[a, b]$ и совпадает с решением $y = y(x, x_0, y_0)$

Следовательно, $y_0 = y(x_0, \zeta, C)$, т. е. график функции $y = y(x, \zeta, C_0)$ проходит через точку (x_0, y_0) . Другими словами, дуга интегральной кривой, проходящая через точки (x_0, y_0) , (ζ, C_0) , имеет на отрезке $[a, b]$ две параметризации $y = y(x, x_0, y_0)$ и $y = (x, \zeta, C_0)$

Итак, установлено, что уравнение (??) имеет единственное решение $C = C_0 = y(\zeta, x_0, y_0)$, т. е. $y_0 = y(x_0, \zeta, y(\zeta, x_0, y_0))$

2. Функция $y = \varphi(x, C_0)$ является решением ЗК (x_0, y_0) , поскольку согласно (??) и (??) $\varphi(x_0, C_0) = y(x_0, \zeta, C_0) = y_0$
3. Осталось доказать, что функция $y = \varphi(x, C)$ из (??) непрерывна на компакте \bar{Q} по совокупности переменных:

- Поскольку для всякого $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ функция $y = \varphi(x, C)$ – это решение уравнения (??), она непрерывна по x при $x \in [a, b]$

- Покажем, что для всякого $x \in [a, b]$ функция $y = \varphi(x, C)$ непрерывна по C при $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$:

Допуская **противное**, предположим, что найдутся $\tilde{\varepsilon} > 0$, $\tilde{x} \in [a, b]$ и последовательность $C_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \tilde{C}$, $C_k \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ такие, что $|\varphi(\tilde{x}, C_k) - \varphi(\tilde{x}, \tilde{C})| \geq \tilde{\varepsilon}$ при всех $k \geq 1$. Это значит,

что при $x = \tilde{x}$ функция $\varphi(\tilde{x}, C)$ терпит разрыв в точке $\tilde{C} \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$, поскольку любой компакт, в частности отрезок $[\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$, содержит все свои предельные точки. В этом случае, кстати, $\tilde{x} \neq \zeta$, так как по определению $\varphi(\zeta, C_k) = C_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \tilde{C} = \varphi(\zeta, \tilde{C})$

Выпуская из точек $(\zeta, C_k) \in \bar{A}$ дуги интегральных кривых, получаем последовательность решений $y = y(x, \zeta, C_k) = \varphi(x, C_k)$. Поскольку из любой сходящейся последовательности можно выдвинуть монотонную подпоследовательность, НУО считаем, что последовательность C_k монотонно возрастает, т. е. $C_k < C_{k+1} < \tilde{C}$ для любого $k \geq 1$

В области G^0 интегральные кривые не имеют общих точек, поэтому последовательность $\varphi(\tilde{x}, C_k)$ тоже монотонно возрастает и ограничена, так как $\varphi(\tilde{x}, C_k) \leq \varphi(\tilde{x}, \tilde{C}) - \tilde{\varepsilon}$ по предположению. Но любая ограниченная монотонная последовательность имеет предел

Пусть $\tilde{y} = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(\tilde{x}, C_k)$, тогда $\tilde{y} \leq \varphi(\tilde{x}, \tilde{C}) - \tilde{\varepsilon}$

1.5. Существование общего решения

В этом параграфе будет доказана теорема о существовании общего решения (теор. ??)

1.5.1. Область существования общего решения

Опишем множество A^* , в котором можно построить общее решение, поскольку гарантировать его существование во всей области единственности G^0 нельзя, какой бы малой она ни была
В этом параграфе в роли A^* будет выступать вводимый ниже компакт \bar{A}

Выберем произвольную точку y^* из интервала $(\tilde{y}, \varphi(\tilde{x}, \tilde{C}))$

Рассмотрим определённое на $[a, b]$ решение ЗК \tilde{x}, y^* , обозначаемое $y = y(x, \tilde{x}, y^*)$

Пусть $C^* = y(\zeta, \tilde{x}, y^*)$. Тогда $C^* < \tilde{C}$, так как $y^* < \varphi(\tilde{x}, \tilde{C}) = y(\tilde{y}, \zeta, \tilde{C})$

Дугу интегральной кривой решения $y = y(x, \tilde{x}, y^*)$ на $[a, b]$, как было установлено, параметризует также решение с начальными данными ζ, C^* , имеющее согласно формуле (??) вид $y = \varphi(x, C^*)$, причём $\varphi(\tilde{x}, C^*) = y^*$

Однако существует индекс k^* такой, что член C^{k^*} сходящейся к \tilde{C} последовательности C_k будет больше, чем C^*

В результате получилось так, что дуги интегральных кривых решений $y = \varphi(x, C_{k^*})$ и $y = \varphi(x, C^*)$ пересекаются в некоторой точке x^* , лежащей между ζ и \tilde{x} , поскольку $\varphi(\zeta, C_{k^*}) = C_{k^*} > C^* = \varphi(\zeta, C^*)$, а $\varphi(\tilde{x}, C_{k^*}) < \tilde{y} < y^* = y(\tilde{x}, \zeta, C^*) = \varphi(\tilde{x}, C^*) - \frac{\varepsilon}{2}$ с тем, что G – область единственности

Итак, доказано, что функция $y = \varphi(x, C)$ непрерывна по каждой из переменных в прямоугольнике \bar{Q} . Но этого недостаточно для её непрерывности по совокупности переменных

Воспользуемся ещё одним свойством функции φ :

Поскольку $y = \varphi(x, C)$ при любой константе $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ есть решение уравнения (??), то $\frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial x} \equiv f(x, \varphi(x, C))$ на $[a, b]$

Но $(x, \varphi(x, C)) \in \bar{A}$, когда точка $(x, C) \in \bar{Q}$, а на компакте \bar{A} выполняется неравенство $|f(x, y)| \leq M$. Следовательно, функция $|\frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial x}|$ ограничена на $[a, b]$

С учётом теоремы Лагранжа заключаем, что для любой константы $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ и для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ найдётся такое $x_C \in (x_1, x_2)$, что $\varphi(x_2, C) - \varphi(x_1, C) = \frac{\partial \varphi(x_C, C)}{\partial x}(x_2 - x_1)$

Этого достаточно, чтобы непрерывность функции $y = \varphi(x, C)$ по x на $[a, b]$, равномерная относительно $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ в силу признака Вейрштрасса с $\delta = \varepsilon/M$, стала очевидной

Последнее свойство функции φ наряду с её поточечной непрерывностью по C гранатирует непрерывность $\varphi(x, C)$ по совокупности переменных в прямоугольнике \bar{Q}

Действительно, возьмём произвольную точку $(x_0, C_0) \in \bar{Q}$ и покажем, что функция $\varphi(x, C)$ непрерывна в этой точке:

Для этого зафиксируем любое число $\varepsilon > 0$. Тогда в силу непрерывности функции φ по C найдётся такое $\delta_{x_0} > 0$, что

$$\forall C \quad \left(|C - C_0| < \delta_{x_0} \implies |\varphi(x_0, C) - \varphi(x_0, C_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

А из равномерной непрерывности $\varphi(x, C)$ по x относительно C вытекает, что

$$\exists \delta_0 > 0 : \quad \forall C \in [x\varphi_1(\zeta), x\varphi_2(\zeta)] \quad \forall x \quad \left(|x - x_0| < \delta_0 \implies |\varphi(x, C) - \varphi(x_0, C)| < \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

Выберем число $\delta := \min \{ \delta_{x_0}, \delta_0 \}$, тогда для любой точки (x, C) получаем:

$$\|(x, C) - (x_0, C_0)\| := \max \{ |x - x_0|, |C - C_0| \} < \delta$$

Следовательно,

$$|\varphi(x, C) - \varphi(x_0, C_0)| \stackrel{\Delta}{\leq} |\varphi(x, C) - \varphi(x_0, C)| + |\varphi(x_0, C) - \varphi(x_0, C_0)| = \varepsilon$$

□

Определение 38. Общее решение $y = \varphi(x, C)$, определённое формулой (??), будем называть общим решением в форме Коши или классическим общим решением уравнения первого порядка (??)

При этом A (то же самое, со строгими неравенствами) – это область, так как по построению $\varphi_1(x_0^*) = y_1 < y_2 = \varphi_2(x_0^*)$, а значит, $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ для всякого $x \in [a, b]$, поскольку в области единственности G^0 дуги интегральных кривых не могут соприкасаться и разбивать A на несвязные подмножества

Теорема 17 (о дифференцируемости общего решения). Пусть на компакте \bar{A} из (??) при некотором $\zeta \in [a, b]$ формула (??) задаёт общее решение $y = \varphi(x, C)$, и в уравнении (??) $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема по y в некоторой окрестности \bar{A}

$$\Rightarrow \forall (x, C) \in \bar{Q} : \frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial x} = \exp \left(\int_{\zeta}^x \frac{\partial f(t, \varphi(t, C))}{\partial y} dt \right) \quad (1.23)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольным образом константу $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$, после чего для всякого $x \in [a, b]$ положим $\Delta\varphi = \varphi(x, C + \Delta C) - \varphi(x, C)$, где ΔC – приращение аргумента C . Поскольку при фиксированной C функция $y = \varphi(x, C)$ является решением уравнения (??), справедлива цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta\varphi)}{dx} &= f\left(x, \varphi(x, C + \Delta C)\right) - f\left(x, \varphi(x, C)\right) = \int_0^1 d\left(f(x, \varphi(x,) + \Delta\varphi \cdot s)\right) = \\ &= \int_0^1 \frac{d f\left(x, \varphi(x, C) + \Delta\varphi \cdot s\right)}{ds} ds = p(x, \Delta C) \Delta\varphi, \quad p(x, \Delta C) := \int_0^1 \frac{\partial f\left(x, \varphi(x, C) + \Delta\varphi \cdot s\right)}{\partial y} ds \end{aligned}$$

- Пусть $\Delta C \neq 0$, тогда, поделив первое и последнее выражение в цепочке на ΔC , убеждаемся, что функция $\psi(x, \Delta C) := \frac{\Delta\varphi}{\Delta C}$ является решением ЗК($\zeta, 1$) линейного однородного уравнения $\frac{du}{dx} = p(x, \Delta C)u$, так как

$$\psi(\zeta, \Delta C) = \frac{\varphi(\zeta, C + \Delta C) - \varphi(\zeta, C)}{\Delta C} \stackrel{(??)}{=} \frac{C + \Delta C - C}{\Delta C} = 1$$

$$\text{Следовательно, } \psi(x, \Delta C) = \exp \left(\int_{\zeta}^x p(t, \Delta C) dt \right)$$

- Но $p(x, \Delta C)$ существует и при $\Delta C = 0$:

$$p(x, 0) = \frac{\partial f\left(x, \varphi(x, C)\right)}{\partial y}$$

Поэтому

$$\frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial C} = \lim_{\Delta C \rightarrow 0} \psi(x, \Delta C) = \exp \left(\lim_{\Delta C \rightarrow 0} \int_{\zeta}^x p(t, \Delta C) dt \right)$$

В результате частная производная общего решения $y = \varphi(x, C)$ по C существует, непрерывна и вычисляется по формуле (??) \square

1.5.2. Формула общего решения

Для любой точки $(x_0, y_0) \in \bar{A}$ обозначим через $y = y(x, x_0, y_0)$ решение ЗК_(1.1)(x_0, y_0)

Тогда $y(x_0, x_0, y_0) = y_0$, и по лемме о поведении решений на компакте (лемма ??) решение $y = (x, x_0, y_0)$ определено для всякого $x \in [a, b]$

Для произвольной точки $\zeta \in [a, b]$ рассмотрим функцию

$$\varphi(xC) = y(x, \zeta, C), \quad (\zeta, C) \in \bar{A} \quad (1.21)$$

на прямоугольнике $\bar{Q} = \bar{Q}_{\bar{A}} := \{ (x, C) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(\zeta) \leq C \leq \varphi_2(\zeta) \}$, который является частным случаем множества Q_{A^*} из определения общего решения (опр. ??)

В самом деле, $\varphi_1(\zeta) \leq C \leq \varphi_2(\zeta)$ по построению \bar{A} . А по лемме решение $y = y(x, \zeta, C)$ определено для любого $x \in [a, b]$ и при $x = \zeta$ по определению решения ЗК $\varphi(\zeta, C) = y(\zeta, \zeta, C) = C$

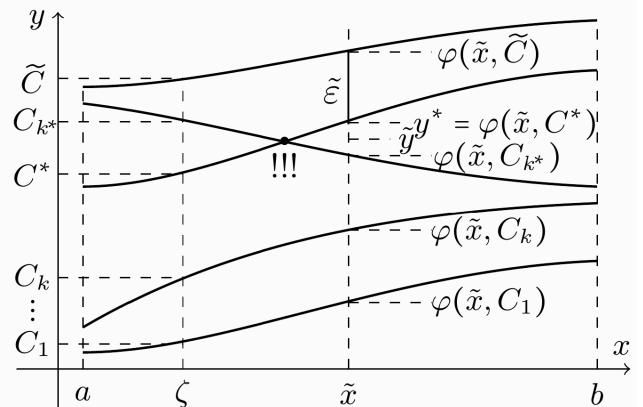
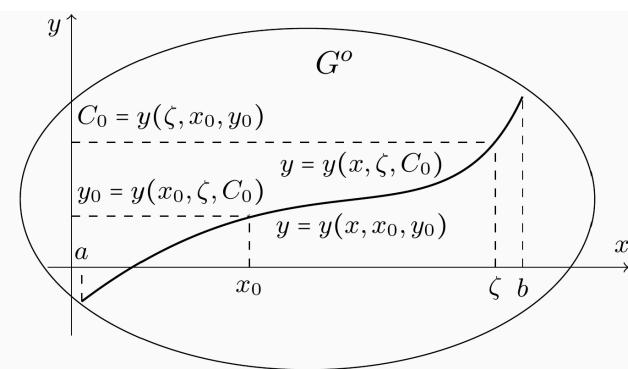
Замечание. В теореме доказано, что если в уравнении (??) правая часть непрерывно дифференцируема по y , то решение $y = y(x, x_0, y_0)$, рассматриваемое как функция трёх переменных, имеет непрерывную положительную производную по y_0

Определение 39. Точки из множества \check{B} будем называть особыми, а точки из множества $B \cup \widehat{B}$ – обычновенными или неособенными

Определение 40. Решением уравнения (??) называется определённая на некотором промежутке $\langle a, b \rangle$ функция $y = \varphi(x)$ или функция $x = \psi(y)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. функция $\varphi(x)$ или $\psi(y)$ дифференцируема на $\langle a, b \rangle$
2. точка $(x, \varphi(x)) \in \tilde{B} \setminus \check{B}$ для любого $x \in \langle a, b \rangle$ или
точка $(\psi(y), y) \in \tilde{B} \setminus \check{B}$ для любого $y \in \langle a, b \rangle$
3. $M(x, \varphi(x)) + N(x, \varphi(x))\varphi'(x) \equiv 0$ на $\langle a, b \rangle$ или
 $M(\psi(y), y)\psi'(y) + N(\psi(y), y) \equiv 0$ на $\langle a, b \rangle$

При этом решения уравнения (??) подразделяются на внутренние, граничные и смешанные в соответствии с аналогичным подразделением решений уравнения (???)



Замечание. По определению график любого решения состоит только из обычновенных точек

Замечание. По аналогии с уравнением (??) для уравнения (??) вводится понятие полного решения, в котором максимальный интервал указывается либо для решения $y = \varphi(x)$, графика которого лежит в \tilde{B}_N , либо для решения $x = \psi(y)$ с графиком из \tilde{B}_M

Определение 41. Точка $(x_0, y_0) \in \tilde{B} \setminus \check{B}$ называется точкой неединственности уравнения (??), если хотя бы для одного из уравнений (??), (??) она окажется точкой неединственности. В противном случае точка (x_0, y_0) – это точка единственности

Замечание. Решения уравнения (??) могут быть частными или особыми точками так же, как это происходит с решениями уравнения, разрешённого относительно производной

Определение 42. Интегральной кривой уравнения (??) на множестве $\tilde{B} \setminus \check{B}$ назовём любую гладкую кривую, лежащую в этом множестве, направление касательной к которой в каждой точке совпадает с направлением поля в этой точке

Глава 2

Уравнения первого порядка в симметричной форме

2.1. Существование и единственность решения

2.1.1. Объект изучения

Уравнение первого порядка в симметрической форме имеет вид

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (2.1)$$

и в нём вещественные функции M и N определены и непрерывны на связном множестве $\tilde{B} = B \cup \hat{B} \cup \check{B}$, где B – это область в \mathbb{R}^2 , в которой

$$M^2(x, y) + N^2(x, y) \neq 0 \quad (2.2)$$

а множества \hat{B}, \check{B} , возможно пустые, состоят из граничных точек области B , причём для точек из множества \hat{B} условие (2.2) выполняется, а для точек из множества \check{B} – нет

Таким образом, ни в одной из точек множеств B и \hat{B} функции M и N могут одновременно обратиться в нуль, а для любой точки $(x, y) \in \check{B}$ справедливы равенства $M(x, y) = N(x, y) = 0$

Кроме того, в каждой точке граничного множества $B^* = \partial B \setminus (\hat{B} \cup \check{B})$ хотя бы одна из функций M или N не определена или разрывна

Замечание. В дальнейшем уравнение (??) будет рассматриваться только в области B , в которой по определению рассматриваются только особые точки

В результате по определению все решения будут внутренними и их максимальные интервалы существования всегда будут интервалами

Уравнение (2.2) будет рассматриваться и решаться на множестве обыкновенных точек, поскольку в особых точках оно фактически вырождается

2.1.2. Решение уравнения в симметричной форме

Выделим замкнутые множества нулей функций M и N :

$$\overline{M^0} := \left\{ (x, y) \in \tilde{B} \mid M(x, y) = 0 \right\}, \quad \overline{N^0} := \left\{ (x, y) \in \tilde{B} \mid N(x, y) = 0 \right\}$$

Обозначим через $\widetilde{B_N}$ и $\widetilde{B_M}$ произвольные компоненты связности соответственно множества $\frac{\tilde{B}}{\overline{N^0}}$, на котором

$N(x, y) \neq 0$ и множества $\frac{\tilde{B}}{\overline{M^0}}$, на котором $M(x, y) \neq 0$. Введём также множество $\widetilde{B}_{MN} = \widetilde{B}_M \cap \widetilde{B}_N$

Очевидно, что все три разновидности введённых множеств могут иметь общие границы и состоят из обыкновенных точек

Уравнение (2.1) на любом из множеств \widetilde{B}_N равносильно уравнению, разрешённому относительно производной

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \quad (2.3)$$

на множествах \tilde{B}_M оно равносильно ерёвнному уравнению

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)} \quad (2.4)$$

а на любом из множеств \tilde{B}_{MN} уравнение в симметричной форме (2.1) равносильно каждому из уравнений (2.3), (2.4)

Но на любом подмножестве множества \tilde{B}_N , содержащем хотя бы одну точку из $\overline{M^0}$, можно перейти только к уравнению (2.3). Аналогично обстоит дело в случае, когда $\tilde{B}_M \cap \overline{N^0} \neq \emptyset$

Это приводит к вынужденному обобщению понятия решения:

Теорема 18 (о существовании решения). Пусть в уравнении (??) функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывны в области B

Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in B$ и для любого отрезка Пеано $P_h(x_0, y_0)$, построенного для одного из уравнений (??), (??), определённого в некоторой окрестности $B_c(x_0, y_0) \subset B$, существует по крайней мере одно решение ЗК(??)(x_0, y_0), заданное на $P_h(x_0, y_0)$

Теорема 19 (о единственности в области; слабая). Пусть в уравнении (??) функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывны в области B , а в области $B^0 \subset B$ верно хотя бы одно из двух условий:

- $N(x, y) \neq 0$, существуют и непрерывны частные производные $M'_y(x, y), N'_y(x, y)$
- $M(x, y) \neq 0$, существуют и непрерывны частные производные $M'_x(x, y), N'_x(x, y)$

Тогда B^0 – это область единственности

Доказательство. Действительно, при выполнении первого условия, например, в области B^0 уравнение (??) равносильно уравнению (??) с $F = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$, и частная производная $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{M \frac{\partial N}{\partial y} - N \frac{\partial M}{\partial y}}{N^2}$ непрерывна, а значит, верна слабая теорема о единственности (теор. ??) \square

Следствие. Область B будет областью единственности, если найдётся открытое покрытие её областями, для каждой из которых выполняется хотя бы одно из приведённых в формулировке теоремы условий

Определение 43. Непрерывную в области $B \subset \mathbb{R}^2$ функцию $U(x, y)$ будем называть допустимой, если для любой точки $(x_0, y_0) \in B$ найдётся такая непрерывная функция $y = \xi(x)$ или $x = \eta(y)$, определённая на интервале (α, β) , содержащем точку x_0 или y_0 , что:

1. $y_0 = \xi(x_0)$ или $x_0 = \eta(y_0)$
2. точка $(x, \xi(x)) \in B$ для любого $x \in (\alpha, \beta)$ или
точка $(\eta(y), y) \in B$ для любого $y \in (\alpha, \beta)$
3. $y = \xi(x)$ или $x = \eta(y)$ – единственное решение уравнения

$$U(x, y) = U(x_0, y_0) \quad (2.5)$$

2.1.3. Интегральные кривые

Уравнение в симметричной форме позволяет обобщить понятие интегральной кривой. Действительно, через каждую точку множества $\tilde{B} \setminus \check{B}$, используя одно из разрешённых уравнений, можно провести отрезок поля, построив, тем самым, поле направлений уравнения (2.1)

Наличие поля направлений позволяет сохранить геометрическое определение интегральной кривой, а именно

Замечание. Условие 3 означает, что выполняется по крайней мере одно из тождеств:

$$\begin{cases} U(x, \xi(x)) \stackrel{(\alpha, \beta)}{\equiv} U(x_0, y_0) \\ U(\eta(y), y) \stackrel{(\alpha, \beta)}{\equiv} U(x_0, y_0) \end{cases}$$

В результате локально интегральная кривая задаётся или функцией $y = \varphi(x)$, или $x = \psi(y)$

2.1.4. Существование и единственность решения

Поскольку уравнение (2.1) в некоторой окрестности любой неособой точки сводится к одному из разрежённых уравнений, то все локальные определения и теоремы из главы 1 остаются верными

Определение 44. Допустимая функция $U(x, y)$ называется интегралом уравнения (??) в области единственности B^0 , если для любой точки $(x_0, y_0) \in B^0$ единственная функция $y = \xi(x)$ или $x = \eta(y)$ из определения допустимой функции – это решение ЗК_(??)(x_0, y_0) на (α, β) , т. е. удовлетворяет тождеству З₁ или З₂ из определения решения

Примечание. В математике часто характеристическим свойством называют другое определение того же объекта

Теорема 20 (о характеристическом свойстве интеграла). Для того чтобы допустимая функция $U(x, y)$ была интегралом уравнения в симметричной форме (??) в области единственности B^0 , **необходимо и достаточно**, чтобы $U(x, y)$ обращалась в постоянную вдоль любого решения (??), т. е. чтобы:

- $U(x, \varphi(x)) \stackrel{(a,b)}{\equiv} C$ для любого решения $y = \varphi(x)$, определённого на $\langle a, b \rangle$
- $U(\psi(y), y) \stackrel{(a,b)}{\equiv} C$ для любого решения $x = \varphi(y)$, определённого на $\langle a, b \rangle$

Доказательство.

- Необходимость:

Пусть $U(x, y)$ – интеграл уравнения (??) в области единственности B^0 , и пусть, например, $y = \varphi(x)$ – какое-либо решение уравнения (??), определённое на промежутке $\langle a, b \rangle$.
НУО¹ будем считать, что $\langle a, b \rangle = (a, b)$.

Возьмём произвольную точку $x_0 \in (a, b)$ и положим $y_0 := \varphi(x_0)$.

Точка $(x_0, y_0) \in B^0$, поэтому по определению допустимой функции уравнение (??) $U(x, y) = U(x_0, y_0)$ однозначно разрешимо или относительно x , или относительно y :

- Пусть (??) однозначно разрешимо относительно y , т. е. существует такая единственная функция $y = \xi(x)$, заданная на некотором $(\alpha, \beta) \ni x_0$, что $U(x, \xi(x)) \stackrel{(\alpha, \beta)}{\equiv} U(x_0, y_0)$

Эта функция по определению интеграла является решением ЗК(??)(x_0, y_0)
Поскольку B^0 – область единственности, $\varphi(x) \stackrel{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})}{\equiv} \xi(x)$, где $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = (a, b) \cap (\alpha, \beta)$. Следовательно,

$$U(x, \varphi(x)) \stackrel{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})}{\equiv} U(x_0, y_0) \quad (2.6)$$

- Пусть (??) однозначно разрешимо относительно x , т. е. на некотором интервале $(\alpha, \beta) \ni y_0$ существует единственная функция $x = \eta(y)$ такая, что $\eta(y_0) = x_0$ и $U(\eta(y), y) \equiv U(x_0, y_0)$ на (α, β)

Тогда по определению интеграла $x = \eta(y)$ на (α, β) является решением ЗК(??)(y_0, x_0), а значит, единственное решение этой ЗК имеет два представления: $y = \varphi(x)$ и $x = \eta(y)$. Поэтому дуга интегральной кривой такого решения в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) , не имея вертикальных и горизонтальных касательных, может быть параметризована как функцией $y = \varphi(x)$, так и функцией $x = \eta(y)$

Иными словами, существуют такие интервалы (\tilde{a}, \tilde{b}) и $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, что

$$x_0 \in (\tilde{a}, \tilde{b}) \subset (a, b), \quad y_0 \in (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \subset (\alpha, \beta), \quad y \stackrel{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})}{\equiv} \varphi(\eta(y)), \quad x \stackrel{(\tilde{a}, \tilde{b})}{\equiv} \eta(\varphi(x))$$

Поэтому справедлива доказывающая (??) цепочка равенств:

$$U(x, \varphi(x)) \stackrel{(\tilde{a}, \tilde{b})}{\equiv} U\left(\eta(\varphi(x)), \varphi(x)\right) \stackrel{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})}{\equiv} U(\eta(y), y) \stackrel{(\tilde{a}, \tilde{b})}{\equiv} U(x_0, y_0)$$

- Осталось показать, что (??) выполняется на всём интервале (a, b) :

Допустим, что $\tilde{\beta} < b$ и найдутся такие $x_1, x_2 \in [\tilde{\beta}, b]$, $(x_1 < x_2)$, что $U(x, \varphi(x)) \stackrel{(\tilde{\alpha}, x_1]}{\equiv} U(x_0, y_0)$, $U(x, \varphi(x)) \neq U(x_0, y_0)$ для любого $x \in (x_1, x_2)$

При $y_1 = \varphi(x_1)$ в последнем тождестве $U(x_1, y_1) = U(x_0, y_0)$. По определению решения точка $(x_1, y_1) \in B^0$, поэтому для неё верны все рассуждения, касающиеся точки (x_0, y_0)

Пусть $y = \xi_1(x)$ – единственное на (α_1, β_1) , $(x_! \in (\alpha_1, \beta_1) \subset (x_0, x_2))$ решение уравнения $U(x, y) = U(x_1, y_1)$, т. е. $U(x, \xi_1(x)) \equiv U(x_1, y_1)$ на (α_1, β_1) , и оно же по определению интеграла является единственным решением ЗК(x_1, y_1). Тогда $\xi_1(x) \equiv \varphi(x)$ на (α_1, β_1) , и

$$U(x, \varphi(x)) \stackrel{[\alpha_1, \beta_1]}{\equiv} U(x_1, y_1) = U(x_0, y_0) - \frac{1}{2}$$

Ситуация с точками $x_1, x_2 \in (a, \tilde{\alpha}]$ рассматривается аналогично

- Достаточность:

Пусть допустимая функция $U(x, y)$ обращается в постоянную на любом решении уравнения (??). Покажем, что в таком случае $U(x, y)$ – интеграл этого уравнения в области единственности B^0

Возьмём произвольную точку $(x_0, y_0) \in B^0$. Тогда существует единственное решение ЗК(x_0, y_0) вида $y = \varphi(x)$ на $(a, b) \ni x_0$, или $x = \psi(y)$ на $(a, b) \ni y_0$

Пусть, например, $x = \psi(y)$ является решением уравнения (??). Тогда по условию теоремы $U(\psi(y), y) \equiv U(x_0, y_0)$ на (a, b)

Если функция $U(x, y)$, будучи допустимой, однозначно разрешима относительно x , т. е. на некотором $(\alpha, \beta) \ni y_0$ существует и единственная функция $x = \eta(y)$ такая, что $U(\eta(y), y) \equiv U(x_0, y_0)$ на (α, β) , то $\psi(y) \equiv \eta(y)$ на $(a, b) \cap (\alpha, \beta)$. А если уравнение (??) однозначно разрешимо относительно y , то можно показать, как и при доказательстве необходимости, что функция $y = \xi(x)$ – решение уравнения (??), поскольку является обратной к решению $x = \psi(y)$

В результате допустимая функция $U(x, y)$ – это интеграл уравнения (??) в области единственности B^0

□

Действительно, если $\langle a, b \rangle = [a, b]$, то по лемме о продолжимости решения, решение может быть продолжено на интервал $(a_1, b_1) \supset [a, b]$

2.2. Интеграл уравнения в симметричной форме

2.2.1. Определение интеграла

Интегральные кривые уравнения в симметричной форме по определению могут иметь любые касательные. Параметризуют их непрерывные неявные функции $U(x, y) = 0$. Именно в таком виде будем искать решение уравнения (2.1), называя их при этом интегралами. Аналог общего решения будем называть общим интегралом

Определение 45. Гладкую функцию $U(x, y)$ будем называть гладкой допустимой в области B , если $U'_x'^2 + U'_y'^2 > 0$ для любой точки $(x, y) \in B$

Определение 46. Интеграл $U(x, y)$ уравнения (??) будем называть гладким, если U – гладкая допустимая функция

В дальнейшем будем всегда предполагать, что B – это область единственности, так как общий интеграл может быть построен только в области единственности

Теорема 21 (о характеристическом свойстве гладкого интеграла). Для того чтобы гладкая допустимая функция $U(x, y)$ была гладким интегралом уравнения (??) в области единственности B^0 , **необходимо и достаточно**, чтобы выполнялось тождество

$$N(x, y)U'_x(x, y) - M(x, y)U'_y(x, y) \stackrel{B^0}{\equiv} 0 \quad (2.7)$$

2.2.2. Характеристической свойство интеграла

Доказательство.

- Необходимость

Пусть $U(x, y)$ – это гладкий интеграл уравнения (??). Возьмём любую точку $(x_0, y_0) \in B^0$. Тогда $M^2(x_0, y_0) + N^2(x_0, y_0) \neq 0$. Пусть, например, $N(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда $(x_0, y_0) \in B_N^0$, где B_N^0 – некая компонента связности открытого множества $B^0 \setminus \bar{N}_0$ (см. п. ??), в которой $N(x, y) \neq 0$ и уравнение (??) равносильно уравнению (??). Пусть $y = \varphi(x)$ – решение ЗК_{(??),(??)} (x_0, y_0) , определённое на некотором интервале $(a, b) \ni x_0$. Тогда по определению решения

$$\varphi'(x) \equiv -\frac{M(x, \varphi(x))}{N(x, \varphi(x))} \quad \text{на } (a, b)$$

По теореме о характеристическом свойстве интегала имеем:

$$U(x, \varphi(x)) \stackrel{(a,b)}{\equiv} U(x_0, y_0)$$

Продифференцируем по x :

$$U'_x(x, \varphi(x)) + U'_y(x, \varphi(x))\varphi'(x) \stackrel{(a,b)}{\equiv} 0$$

Подставляя $\varphi'(x)$ и домножая на N , получаем:

$$N(x, \varphi(x))U'_x(x, \varphi(x)) - M(x, \varphi(x))U'_y(x, \varphi(x)) \stackrel{(a,b)}{\equiv} 0$$

Положим $x = x_0$, тогда $\varphi(x_0) = y_0$, и для любой точки $(x_0, y_0) \in B^0$ получаем равенство (??)

- Достаточность

Пусть в B^0 выполняется тождество (??). Возьмём любую точку $(x_0, y_0) \in B^0$, и пусть, например, $U'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда $U'_y(x, y) \neq 0$ в некоторой окрестности $V(x_0, y_0)$ и в ней уравнение (??) $U(x, y) = U(x_0, y_0)$ однозначно разрешимо относительно y , т. е. существует и единственная функция $y = \xi(x)$, определённая на некотором интервале $(\alpha, \beta) \ni x_0$ такая, что $\xi(x_0) = y_0$, $\xi \in C^1((\alpha, \beta))$ и $U(x, \xi(x)) \equiv U(x_0, y_0)$ на (α, β) . Дифференцируя последнее тождество, получаем

$$U'_x(x, \xi(x)) + U'_y(x, \xi(x))\xi'(x) \stackrel{(\alpha, \beta)}{\equiv} 0, \quad (x, \xi(x)) \in V$$

□

2.2.3. Характеристическое свойство гладкого интеграла