Содержание

Часть I

Многомерный анализ

1. Норма линейного оператора $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$; $\|cA\|$; $\|AX\|_n \le c\,\|X\|_m \implies \dots$

Определение 1. $A : \mathbb{R}^{m\ge 1} \to \mathbb{R}^{n\ge 1}$

$$\|A\| := \sup_{\substack{X\in\mathbb{R}^m\\ \|X\|_m\le 1}} \|AX\|_n$$

Свойства.

1. $c \in \mathbb{R}$
$$\|cA\| = |c|\cdot\|A\|$$
2. $c > 0, \qquad \forall X \in \mathbb{R}^m \quad \|AX\|_n \le c\cdot\|X\|_m$
$$\implies \|A\| \le c \tag{1}$$

Доказательство.

1. $$\|cA\| = \sup_{\substack{X\in\mathbb{R}^m\\ \|X\|_m\le 1}} \|(cA)X\|_n \xlongequal[\text{линейность}]{} \sup\|c(AX)\|_n = \sup|c|\cdot\|AX\|_n = |c|\sup\|AX\|_n = |c|\cdot\|A\|$$
2. Возьмём $\forall X \in \mathbb{R}^m$, такое, что $\|X\|_m \le 1$
$$\|AX\|_n \le c\cdot\|X\|_m \overset{\text{def}}{\le} c \quad \overset{\text{def sup}}{\iff} \quad \sup_{\|X\|\le 1}\|AX\|_n \le c$$

□

2. $\|A+B\| \le \dots$; $\|AX\| \le \|A\|\cdot\|X\|$

Свойства.

1. $A, B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$
$$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$$
2. $$\|AX\| \le \|A\|\cdot\|X\| \quad \forall X \in \mathbb{R}^m \tag{2}$$

Доказательство.

1. $$\|A+B\| = \sup\|(A+B)X\|_n \xlongequal[\text{линейность}]{} \sup\|AX+BX\| \le \sup(\|AX\|+\|BX\|) \le$$
$$\le \sup\|AX\| + \sup\|BX\| \xlongequal{\text{def }\|A\|,\|B\|} \|A\| + \|B\|$$
2. • Если $X = \mathbb{O}_m$, то это очевидно

- Пусть $X \neq \mathbb{O}_m$
  Тогда $t := \|X\|_m > 0$
  Рассмотрим $Y := \frac{1}{t} X$

$$\|Y\|_m = \left\| \frac{1}{t} X \right\| \underset{t>0}{=} \frac{1}{t} \|X\| \xlongequal{\text{def } t} 1$$

$$\|AY\|_n \leq \sup_{\substack{U \in \mathbb{R}^m \\ \|U\| \leq 1}} \|AU\|_n = \|A\|$$

$$X = tY \implies \|AX\|_n = \|A(tY)\|_n = t \cdot \|AY\| \leq t\,\|A\| \underset{t>0}{\leq} \|A\|$$

$\square$

3. $\|BA\| \leq \ldots$; $\|A\| \leq (\ldots)^{\frac{1}{2}}$

Свойства.

1. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & . & a_{1m} \\ . & . & . \\ a_{n1} & . & a_{nm} \end{bmatrix}$

$$\implies \|A\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 \right)^{1/2} \tag{3}$$

2. $\mathbb{R}^{n \geq 1}, \mathbb{R}^{m \geq 1}, \mathbb{R}^{k \geq 1}, \qquad A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k, \qquad BA : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$

$$\implies \|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

Доказательство.

1. Пусть

$$X := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \qquad \|X\|_m \leq 1$$

Тогда

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m \end{bmatrix} \tag{4}$$

Напоминание. Неравенство КБШ:

$$|(A, X)| \leq |a_1| \cdot |x_1| + \cdots + |a_n| \cdot |x_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \|Y\| \cdot \|X\|$$

$$\|AX\|_n^2 \underset{(4)}{=\!=} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right)^2 \underset{\text{КБШ}}{\leq} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 \right) \Bigg(\underbrace{\sum_{j=1}^{m} x_j^2}_{\overset{\text{def}}{\leq 1}} \Bigg) \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2$$

2. Возьмём $X \in \mathbb{R}^m$, такой, что $\|X\|_m \leq 1$
   Пусть $Y = AX \in \mathbb{R}^n$
   Тогда $BA(X) \xlongequal{\text{def } BA} B(AX) \xlongequal{\text{def } X} BY$

$$\|BA(X)\|_k = \|BY\|_k \underset{\text{св-во (2)}}{\leq} \|B\| \cdot \|Y\|_n \tag{5}$$

$$\|Y\|_n \xlongequal{\text{def } Y} \|AX\|_n \underset{\text{св-во (2)}}{\leq} \|A\| \cdot \|X\|_m \underset{\|X\| \leq 1}{\leq} \|A\| \tag{6}$$

$$(5),(6) \implies \|BA(X)\|_k \le \underbrace{\|B\| \cdot \|A\|}_{:=c_0}$$

Применяя свойство (1), получаем нужное утверждение.

□

4. Определение частных производных второго и последующих порядков; теорема о смешанных производных в $\mathbb{R}^2$

Определение 2. $\Omega \subset \mathbb{R}^{n \ge 2}$ — открытое, $\Omega \ne \emptyset$, $\quad f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\quad 1 \le i \le n$, $\quad \exists f'_{x_i}(X) \quad \forall X \in \Omega$
$X_0 \in \Omega$, $\quad 1 \le j \le n$
Получается новая функция $f'_{x_i} : \Omega \to \mathbb{R}$
Пусть $\exists (f'_{x_i})'_{x_j}(X_0)$
Говорят, что существует частная производная второго порядка

$$f''_{x_i x_j}(X_0) \coloneqq (f'_{x_i})'_{x_j}(X_0)$$

Определение 3. Пусть $\forall X \in \Omega \quad \exists f''_{x_i x_j}(X)$
Рассмотрим $1 \le k \le n$ и $X_0 \in \Omega$
Пусть $\exists (f''_{x_i x_j})'_{x_k}(X_0)$
Будем говорить, что существует частная производная третьего порядка

$$f'''_{x_i x_j x_k}(X_0) = (f''_{x_i x_j})'_{x_k}(X_0)$$

$$\dots\dots$$

Пусть для $l \ge 3$ определено понятие $f^{(l)}_{\underbrace{x_i x_j \dots x_s}_{l}}(X_0)$

Пусть $\forall X \in \Omega \exists f^{(l)}_{x_i \dots x_s}(X)$
Возьмём $1 \le t \le n$
Предположим, что $\exists (f^{(l)}_{x_i, \dots, x_s})'_{x_t}(X_0)$
Такую частную производную будем назвывать частной производной порядка $l+1$

$$f^{(l+1)}_{x_i \dots x_s, x_t}(X_0) \coloneqq (f^{(l)}_{x_i \dots x_s})'_{x_t}(X_0)$$

Обозначение. Исторически более распространено обозначение

$$\frac{\partial^l f(x)}{\partial x_s, \dots, \partial x_i}$$

В знаменателе x_j расположены в обратном порядке, т. к.

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i} \right)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Теорема 1 (о смешанных производных). $G = B_r(x_1^0, x_2^0)$, $\quad X_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$, $\quad f : G \to \mathbb{R}$, $\quad f \in \mathcal{C}(G)$
$\forall X \in G \quad \exists f'_{x_1}(X),\ f'_{x_2}(X) \in \mathcal{C}(G)$, $\quad \forall X \in G \quad \exists f''_{x_1 x_2}(X),\ f''_{x_2 x_1}(X)$ непрерывные в X_0

$$\implies f''_{x_1 x_2}(X_0) = f''_{x_2 x_1}(X_0)$$

Доказательство. Возьмём $0 < h < \frac{r}{\sqrt{2}}$
Тогда $(x_1^0 + h, x_2^0 + h) \in G$
Рассмотрим функцию

$$g(h) \coloneqq \frac{f(x_1^0 + h, x_2^0 + h) - f(x_1^0 + h, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0 - h) + f(x_1^0, x_2^0)}{h^2}$$

Определим

$$\varphi(x_2) \coloneqq \frac{f(x_1^0+h, x_2) - f(x_1^0, x_2)}{h}, \qquad x_2 \in [x_2^0, x_2^0+h]$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{\varphi(x_2^0+h) - \varphi(x_2^0)}{h} \xlongequal{\text{def } \varphi} \frac{f(x_1^0+h, x_2^0+h) - f(x_1^0, x_2^0+h) - f(x_1^0+h, x_2^0) + f(x_1^0, x_2^0)}{h^2} = g(h) \tag{7}$$

$$\forall x_2 \in [x_2^0, x_2^0+h] \quad \exists\, \varphi'(x_2) \xlongequal{\text{def } \varphi} \frac{f'_{x_2}(x_1^0+h, x_2) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2)}{h} \tag{8}$$

Применим к φ теорему Лагранжа:

$$\exists\, 0 < h_2 < h : \varphi(x_2^0+h) - \varphi(x_2^0) = \varphi'(x_2^0+h_2)\cdot h \implies$$
$$\implies \frac{\varphi(x_2^0+h) - \varphi(x_2^0)}{h} = \varphi'(x_2^0+h_2) \underset{(8)}{=} \frac{f'_{x_2}(x_1^0+h_2, x_2^0+h_2) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0+h_2)}{h} \tag{9}$$

Рассмотрим отдельно выражение $f'_{x_2}(x_1^0+h, x_2^0+h_2) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0+h_2)$
Рассмотрим функцию $l(x_1) \coloneqq f'_{x_2}(x_1, x_2^0+h_2)$
По условию, наложенному на первые производные, она непрерывна при $x \in [x_1^0, x_1^0+h]$
По условию,

$$\forall x_1 \in [x_1^0, x_1^0+h] \quad \exists\, l'(x_1) = f''_{x_2x_1}(x_1, x_2^0+h_2) \tag{10}$$

Применим теорему Лагранжа к l:

$$\exists\, 0 < h_1 < h : l(x_1^0+h) - l(x_1^0) = l'(x_1^0+h_1)\cdot h \implies$$
$$\implies \frac{l(x_1^0+h) - l(x_1^0)}{h} \overset{\text{def}}{=} \frac{f'_{x_2}(x_1^0+h, x_2^0+h_2) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0+h_2)}{h} =$$
$$= l'(x_1^0+h_1) \underset{(10)}{=} f''_{x_2x_1}(x_1^0+h_1, x_2^0+h_2) \tag{11}$$

$$g(h) \underset{(7)}{=} \frac{\varphi(x_2^0+h) - \varphi(x_2^0)}{h} \underset{(9)}{=} \frac{f'_{x_2}(x_1^0+h, x_2^0+h_2) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0+h_2)}{h} \underset{(11)}{=}$$
$$= f''_{x_2x_1}(x_1^0+h_1, x_2^0+h_2), \qquad 0 < h_1, h_2 < h \tag{12}$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(x_1) \coloneqq \frac{f(x_1, x_2^0+h) - f(x_1, x_2^0)}{h}$$

$$\frac{\psi(x_1^0+h) - \psi(x_1^0)}{h} = \frac{f(x_1^0+h, x_2^0+h) - f(x_1^0+h, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0+h) + f(x_1^0, x_2^0)}{h^2} = g(h) \tag{13}$$

$$\forall x_1 \in [x_1^0, x_1^0+h] \quad \exists\, \psi'(x_1) = \frac{f'_{x_1}(x_1, x_2^0+h) - f'_{x_1}(x_1, x_2^0)}{h} \tag{14}$$

По теореме Лагранжа,

$$\exists\, 0 < \overline{h_1}, \overline{h_2} < h : \frac{\psi(x_1^0+h) - \psi(x_1^0)}{h} = \psi'(x_1+\overline{h_1}) \underset{(14)}{=} \frac{f'_{x_1^0}(x_1^0+\overline{h_1}, x_2^0+h) - f'_{x_1}(x_1^0+\overline{h_1}, x_2^0)}{h} =$$
$$= f''_{x_1x_2}(x_1^0+\overline{h_1}, x_2^0+\overline{h_2}) \tag{15}$$

$$g(h) \underset{(13)}{=} \frac{\psi(x_1^0+h) - \psi(x_1^0)}{h} \underset{(15)}{=} f''_{x_1x_2}(x_1^0+\overline{h_1}, x_2^0+\overline{h_2})$$
$$\underset{(12)}{\implies} f''_{x_2x_1}(x_1^0+h_1, x_2^0+h_2) = f''_{x_1x_2}(x_1^0+\overline{h_1}, x_2^0+\overline{h_2}) \tag{16}$$

Устремим h к нулю справа и слева
По условию теоремы,

$$f''_{x_2x_1}(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2) \xrightarrow[h\to+0]{} f''_{x_2x_1}(x_1^0, x_2^0)$$

$$f''_{x_1x_2}(x_1^0 + \overline{h_1}, x_2^0 + \overline{h_2}) \xrightarrow[h\to-0]{} f''_{x_1x_2}(x_1^0, x_2^0)$$

По соотношению (16), это одна и та же функция, а значит, она имеет единственный предел. □

5. Теорема о смешанных производных для функций на множествах $E \subset \mathbb{R}^{n\geq 2}$

Следствие (для $n > 2$). $X_0 \in \mathbb{R}^{n\geq 3}$, $\quad X_0 = (x_1^0, ..., x_i^0, ..., x_j^0, ..., x_n^0)$
$f : B_r(X_0) \to \mathbb{R}$, $\quad f \in \mathcal{C}\big(B_r(X_0)\big)$, $\quad \forall X \in B_r(X_0) \quad \exists\, f'_{x_i}(X), f'_{x_j}(X) \in \mathcal{C}\big(B_r(X_0)\big)$
$\forall X \in B_r(X_0) \quad \exists\, f''_{x_ix_j}(X), f''_{x_jx_i}(X)$ — непр. в X_0

$$\implies f''_{x_ix_j}(X_0) = f''_{x_jx_i}(X_0)$$

Доказательство.

$$F(x_i, x_j) \coloneqq f(x_1^0, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n^0)$$

$$f''_{x_ix_j}(X_i, x_j) = f''_{x_ix_j}(x_1^0, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n^0)$$

□

Утверждение 1. $\Omega \subset \mathbb{R}^{n\geq 2}$, $\quad i \neq j$, $\quad f \in \mathcal{C}(\Omega)$, $\quad \forall X \in \Omega \quad f'_{x_i}(X), f'_{x_j}(X) \in \mathcal{C}(\Omega)$
$\forall X \in \Omega \quad \exists\, f''_{x_ix_j}(X), f''_{x_jx_i}(X) \in \mathcal{C}(\Omega)$
По следствию,

$$\forall X \in \Omega \quad f''_{x_ix_j}(X) = f''_{x_jx_i}(X)$$

Утверждение 2. $\Omega \subset \mathbb{R}^{n\geq 2}$, $\quad i \neq j$, $\quad k$
Рассмотрим $f'''_{x_ix_jx_k}(X)$, $\quad f'''_{x_jx_ix_k}(X)$, $\quad f'''_{x_ix_kx_j}(X)$
Пусть они все непрерывны на Ω
Все производные первого и второго порядков существуют и непрерывны на Ω
Тогда, по следствию

$$f''_{x_ix_j} = f''_{x_jx_i} \implies (f''_{x_ix_j})'_{x_k} = (f''_{x_jx_i})'_{x_k}$$

$$(f'_{x_i})''_{x_kx_j} = (f'_{x_i})''_{x_jx_k}$$

Тем самым мы доказали, что у такой функции все частные производные третьего порядка совпадают

6. Определение классов $\mathcal{C}^r(E)$; теорема о частных производных функций из $\mathcal{C}^r(E)$

7. Классы гладкости

Определение 4. $r \in \mathbb{N}$, $\quad E \subset \mathbb{R}^{n\geq 2}$, $\quad E$ открыто, $\quad f \in \mathcal{C}(E)$

$$\forall x_1, ..., x_n \quad \forall X \in E \quad \exists\, f'_{x_j}(X)$$

- $f'_{x_j}(X) \in \mathcal{C}(E) \implies f \in \mathcal{C}^1(E)$
- Пусть $f \in \mathcal{C}^1(E)$

$$\forall 1 \leq k \leq r \quad \forall x_{i_1}, ..., x_{i_k} \quad \forall X \in E \quad \exists\, f^{(k)}_{x_{i_1}...x_{i_k}}(X) \in \mathcal{C}(E)$$

Тогда говорят, что $f \in \mathcal{C}^r(E)$

Теорема 2. $r \geq 2$, $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$, E открытое, $f \in \mathcal{C}^r\big(E\big)$, $i_1, ..., i_r$, $j_1, ..., j_r$

$$\forall X \in E \quad f^{(r)}_{x_{i_1}...x_{i_r}}(X) = f^{(r)}_{x_{j_1}...x_{j_r}}(X)$$

Доказательство. Докажем **по индукции**

- **База.** $r = 2$ — доказано в утв. 1.
- **Переход.** Пусть $f \in \mathcal{C}^{r+1}\big(E\big)$
  $j_k \neq j_{k+1}$
  Рассмотрим частные производные:

$$f^{(r+1)}_{x_{j_1}...\boldsymbol{x_{j_k}}\boldsymbol{x_{j_{k+1}}}...x_{j_{r+1}}}(X), \qquad f^{(r+1)}_{x_{j_1}...\boldsymbol{x_{j_{k+1}}}\boldsymbol{x_{j_k}}...x_{j_{r+1}}}(X)$$

Обозначим $g(X) \coloneqq f^{(k-1)}_{x_{j_1}...x_{j_{k-1}}}(X)$

$$f^{(k+1)}_{x_{j_1}...x_{j_{k-1}}x_{j_k}x_{j_{k+1}}}(X) = g''_{x_{j_k}x_{j_{k+1}}}(X) \tag{17}$$

$$f^{(k+1)}_{x_{j_1}...x_{j_{k+1}}x_{j_k}}(X) = g''_{x_{j_{x+1}}x_{j_k}}(X) \tag{18}$$

По следствию к теореме о смешанных производных, получаем

$$(17), (18) \implies g_{x_{j_k}x_{j_{k+1}}} = g''_{x_{j_{k+1}}x_{j_k}}(X) \tag{19}$$

$$(17) \implies f^{(r+1)}_{x_{j_1}...x_{j_k}x_{j_{k+1}}...x_{j_{r+1}}}(X) = g^{(r-k+2)}_{x_{j_k}x_{j_{k+1}}...x_{j_{r+1}}} \quad \forall X \in E \tag{20}$$

$$(18) \implies f^{(r+1)}_{x_{j_1}...x_{j_{k+1}}x_{j_k}...x_{j_{r+1}}}(X) = g^{(r-k+2)}_{x_{j_{k+1}}x_{j_k}...x_{j_{r+1}}} \quad \forall X \in E \tag{21}$$

$$(19), (20), (21) \implies f^{(r+1)}_{x_{j_1}...x_{j_k}x_{j_{k+1}}...x_{j_{r+1}}}(X) = f^{(r+1)}_{x_{j_1}...x_{j_{k+1}}x_{j_k}...x_{j_{r+1}}}(X) \quad \forall X \in E \tag{22}$$

$i_1, ..., i_n$, $j_k = i_1$, j_k — минимальный
Рассмотрим две ситуации:

  - $k = 1$

$$i_1, ..., i_{r+1}$$

$$i_1, j_2, ..., j_{r+1}$$

    Тогда индексы $i_2, ..., i_{r+1}$ и $j_2, ..., j_{r+1}$ получаются друг из друга перестановкой. А тогда, по индукции,

$$f^{(r+1)}_{x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{r+1}}}(X) = \Big(f'_{x_{i_1}}\Big)^{(r)}_{x_{i_2}...x_{i_{r+1}}} \underset{\text{инд. предполож.}}{=} \Big(f'_{x_{i_1}}\Big)^{(r)}_{x_{j_2}...x_{j_{r+1}}}(X) = f^{(r+1)}_{x_{j_1}x_{j_2}...x_{j_{r+1}}}(X)$$

  - $k > 1$
    Тогда $j_1, ..., j_{k-1} \neq i_1$
    Тогда,

$$(22) \implies f^{(r+1)}_{...x_{j_{k-1}}x_{j_k}} = f^{(r+1)}_{...x_{j_k}x_{j_{k-1}}} = f^{(r+1)}_{...x_{j_k}x_{j_{k-2}}x_{j_{k-1}}} = \dots\dots\dots = f^{(r+1)}_{x_{j_k}x_{j_2}...}$$

    Теперь можно применить первый случай.

□

8. Теорема о производных сложной функции специального вида

Теорема 3. $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$ — открытое, $f \in \mathcal{C}^{r \geq 1}\big(E\big)$, $Y \in E$, $\underset{H \neq \mathbb{O}_n}{H \in \mathbb{R}^n}$, $t \in (-a, a)$

$Y + tH \in E \quad \forall t \in (-a, a)$

$$g(t) \coloneqq f(Y + tH) \tag{23}$$

$$\implies g^{(r)}(0) = \sum_{|\alpha|=r} C_r^\alpha \partial^\alpha f(Y) H^\alpha \tag{24}$$

Доказательство. Докажем **по индукции**:

- **База.** $r = 1$
  То есть, $|\alpha| = 1$
  Если $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, то $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1, \qquad \alpha_i \in \mathbb{Z}, \quad \alpha_i \geq 0$
  Значит,

$$\exists\, \nu : \begin{cases} \alpha_\nu = 1 \\ \alpha_j = 0, \quad j \neq \nu \end{cases}$$

$$\alpha = (0, ..., \underset{\nu}{1}, ..., 0) \coloneqq e_\nu, \qquad 1 \leq \nu \leq n$$

$$C_1^{e_\nu} = \frac{1!}{0! \cdot \dots \cdot 1! \cdot \dots \cdot 0} = 1 \tag{25}$$

$$\partial^{e_\nu} f(X) = f'_{x_\nu}(X) \tag{26}$$

Если $H = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$, то

$$H^{e_\nu} = h_\nu \tag{27}$$

$$(24), (25), (26), (27) \implies g'(0) = \sum_{\nu=1}^n f'_{x_\nu}(Y) h_\nu \tag{28}$$

По условию, $f \in \mathcal{C}^1\big(E\big)$, а значит, применяя теорему о достаточном условии дифференцируемости, f дифф. в $X \quad \forall X \in E$
Рассмотрим отображение

$$\Psi : (-a, a) \to \mathbb{R}^n, \qquad \Psi(t) = Y + tH$$

$$g(t) \overset{\text{def}}{=} f(\Psi(t)), \qquad f : E \to \mathbb{R}^1$$

То есть, $g : (-a, a) \to \mathbb{R}^1$ и можно применить теорему о дифференцируемости суперпозиции дифференцируемых отображений:

$$\mathcal{D}g(t) = \mathcal{D}f(V)\big|_{V = Y + tH} \cdot \mathcal{D}\Psi(t) \tag{29}$$

Матрица Якоби для отображения $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — матрица 1×1:

$$\mathcal{D}g(t) = g'(t) \tag{30}$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, значит, её матрица Якоби — это вектор-строка:

$$\mathcal{D}f(V)\big|_{V = Y + tH} = \Big(f'_{x_1}(Y + tH), ..., f'_{x_n}(Y + tH)\Big) \tag{31}$$

$$\mathcal{D}\Psi(t) = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$(29), (30), (31), (32) \implies g'(t) = \sum_{\nu=1}^n f'_{x_\nu}(Y + tH) h_\nu, \qquad t \in (-a, a) \tag{33}$$

Подставляя $t = 0$, получаем (28)

- **Переход.**
  $f \in \mathcal{C}^{r+1}\big(E\big)$
  Рассмотрим мультииндекс $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n), \qquad |\beta| = r+1$

$$\beta = (0, ..., \beta_{i_1}, 0, ..., \beta_{i_l}, ..., 0), \qquad \beta_{i_k} \neq 0, \qquad 1 \leq k \leq l$$

То есть, некоторые члены не равны нулю, остальные — нули
Пусть

$$\alpha^{(1)} = (0, ..., 0, \beta_{i_1} - 1, \beta_{i_2}, ..., \beta_{i_l}, ..., 0)$$
$$\alpha^{(2)} = (0, ..., \beta_{i_1}, 0, ..., \beta_{i_2} - 1, ..., \beta_{i_l}, ..., 0)$$
$$\dots\dots$$
$$\alpha^{(l)} = (0, ..., \beta_{i_1}, 0, ..., \beta_{i_2}, ..., \beta_{i_l} - 1, ..., 0)$$

$|\alpha| = r, \qquad \alpha + e_\nu = \beta$ для некоторого ν.
$\nu \in \{\, i_1, ..., i_l \,\}$ (иначе на месте одного из нулей была бы 1).
По индукционному предположению,

$$g^{(r)}(Y + tH) = \sum_{|\alpha| = r} C_r^{(\alpha)} \partial^\alpha f(Y + tH) H^\alpha \tag{34}$$

$$\xRightarrow[(33)]{} g^{(r+1)}(Y + tH) = \sum_{|\alpha| = r} C_r^\alpha H^\alpha \bigg(\underbrace{\partial^\alpha f(Y + tH)}_{\in \mathcal{C}^1 \left(E\right)} \bigg)' \tag{35}$$

Воспользуемся базой индукции для f_α:

$$(35) = \sum_{|\alpha| = r} C_r^\alpha H^\alpha \bigg(\sum_{\nu=1}^{n} (\partial^\alpha f x_\nu)'(Y + tH) h_\nu \bigg) = \sum_{|\alpha| = 1} \sum_{\nu=1}^{n} C_r^\alpha H^\alpha h_\nu \bigg(\partial^\alpha f(Y + tH) \bigg)'_{x_\nu} \tag{36}$$

$$\alpha = (l_1, ..., l_\nu, ..., l_n)$$

$$\bigg(\partial^\alpha f(X) \bigg)'_{x_\nu} \overset{\text{def}}{=} f^{(r+1)}_{\underbrace{x_1 ... x_1}_{l_1} ... \underbrace{x_\nu ... x_\nu}_{l_\nu} ... \underbrace{x_n ... x_n}_{l_n} \boldsymbol{x_\nu}}(X) \xlongequal[\text{т. о классах } \mathcal{C}^r]{}$$
$$= f^{(r+1)}_{\underbrace{x_1 ... x_1}_{l_1} ... \underbrace{x_\nu ... x_\nu}_{l_\nu \boldsymbol{+1}} ... \underbrace{x_n ... x_n}_{l_n}}(X) \overset{\text{def}}{=} \partial^{\alpha + e_\nu} f(X) \tag{37}$$

$$H^\alpha h_\nu = h_1^{e_1} ... h_\nu^{e_\nu} ... h_n^{e_n} \boldsymbol{h_\nu} = h_1^{e_1} ... h_\nu^{e_\nu \boldsymbol{+1}} ... h_n^{e_n} = H^{\alpha + e_\nu} \tag{38}$$

$$(36) \underset{(34),(37)}{=} \sum_{|\alpha| = r} \sum_{\nu=1}^{n} C_r^\alpha H^{\alpha + e_\nu} \partial^{\alpha + e_\nu} f(Y + tH) \tag{39}$$

При этом, $\alpha + e_\nu = \beta, \qquad |\beta| = r + 1$

$$(39) = \sum_{|\beta| = r+1} \partial^\beta f(Y + tH) H^\beta \sum_{\alpha, \nu : \alpha + e_\nu = \beta} C_r^\alpha \tag{40}$$

$$\alpha^{(\mu)} \coloneqq (0, ..., \beta_{i_1}, 0, ..., \beta_{i_\mu} - 1, 0, ..., \beta_{i_l}, 0, ...)$$
$$\alpha^{(\mu)} + e_{i_\mu} = \beta, \qquad 1 \leq \mu \leq l$$

$$\Longrightarrow \sum_{\alpha+e_\nu=\beta} C_r^\alpha = \sum_{\mu=1}^{l} C_r^{\alpha^{(\mu)}} \overset{\text{def}}{=} \sum_{\mu=1}^{l} \frac{r!}{\beta_{i_1}!...(\beta_{i_\mu}-1)!...\beta_{i_l}!} = \frac{r!}{\beta_{i_1}!...\beta_{i_l}!}\sum_{\mu=1}^{l}\beta_{i_\mu} \overset{\text{def}}{=}$$

$$= \frac{r!}{\beta!}|\beta| = \frac{r!}{\beta!}(r+1) = \frac{(r+1)!}{\beta!} = C_{r+1}^\beta$$

$$\Longrightarrow (40) = g^{(r+1)}(t) = \sum_{|\beta|=r+1} \partial^\beta f(Y+tH)H^\beta C_{r+1}^\beta$$

□

9. Формула Тейлора для функции нескольких переменных с остатком в форме Лагранжа

Теорема 4. $E \subset \mathbb{R}^{n\geq 2}$ — открытое, $X_0 \in E$, $\mathtt{B}_\delta(X_0) \subset E$, $f \in \mathcal{C}^{r+1}\big(\mathtt{B}_\delta\big)$
$H \in \mathbb{R}^n$, $\|H\| < \delta$

$$\Longrightarrow \exists\, 0<c<1 : f(X_0+H) = f(X_0) + \sum_{k=1}^{r}\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(X_0)H^\alpha + \sum_{|\alpha|=r+1}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(X_0+cH)H^\alpha$$

Доказательство. Рассмотрим $g(t) \coloneqq f(X_0+tH)$

$$g(1) = f(X_0+H), \qquad g(0) = f(X_0)$$

$$g \in \mathcal{C}^{r+1}\big((-a,a)\big), \qquad a > 1$$

так как $\|H\| < \delta \Longrightarrow$ для некоторого $a > 1$ $\quad \|aH\| = a\,\|H\| < \delta$
Для функции g можно применить теорему Лагранжа для одной переменной:

$$g(1) = g(0) + \sum_{k=1}^{r}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}\cdot 1^k + \frac{1}{(r+1)!}g^{(r+1)}(c)\cdot 1^{r+1} =$$

$$= g(0) + \sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k!}g^{(k)}(0) + \frac{1}{(r+1)!}g^{(r+1)}(c) \xlongequal[\text{формула для k-й производной}]{}$$

$$= f(X_0) + \sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k!}\sum_{|\alpha|=k}C_k^\alpha\partial^\alpha f(X_0)H^\alpha + \frac{1}{(r+1)!}\sum_{|\alpha|=r+1}C_{r+1}^\alpha\partial^\alpha f(X_0+cH)H^\alpha =$$

$$= f(X_0) + \sum_{k=1}^{r}\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(X_0)H^\alpha + \sum_{|\alpha|=r+1}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(X_0+cH)H^\alpha$$

□

10. Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остатком в форме Пеано

Теорема 5. $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^{n\geq 2}$, $X_0 \in \omega \subset E$, $f \in \mathcal{C}^{r\geq 1}(\omega)$

$$\Longrightarrow f(X_0+H) = f(X_0) + \sum_{k=1}^{r}\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(X_0)H^\alpha + \rho(H) \tag{41}$$

где

$$\frac{\rho(H)}{\|H\|^r} \xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{} 0 \tag{42}$$

Доказательство.

- $r = 1$
  По достаточному условию дифференцируемости, f дифф. в X_0, что, по определению, означает, что
  $$f(X_0 + H) = f(X_0) + \sum_{\nu=1}^{n} f'_{x_\nu}(X_0)h_\nu + \rho(H), \qquad \frac{\rho(H)}{\|H\|} \xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{} 0, \qquad H = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$
  Перепишем эту сумму, используя мультииндексы. Возьмём $\alpha : |\alpha| = 1$, то есть $\alpha = (0, ..., \underset{\nu}{1}, ..., 0)$
  $$C_1^\alpha = \frac{0!...1!...0!}{1!} = 1$$
  $$\sum_{n=1}^{n} f'_{x_\nu}(X_0)h_\nu = \sum_{|\alpha|=1} C_1^\alpha \partial^\alpha f(X_0)H^\alpha$$
  Значит, ранее введённое определение дифференцируемости соотносится с обозначениями через мультииндексы.

- $r \geq 2$
  Применим к функции f формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа для $r - 1$:
  $$\exists c \in (0,1) : f(X_0 + H) =$$
  $$= f(X_0) + \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(X_0)H^\alpha + \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(X_0 + cH)H^\alpha \underset{\pm\sum \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(X_0)H^\alpha}{=}$$
  $$= f(X_0) + \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(X_0)H^\alpha + \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(X_0)H^\alpha + \underbrace{\sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!}\Big(\partial^\alpha f(X_0 + cH) - \partial^\alpha f(X_0)\Big)H^\alpha}_{\rho(h)} \tag{43}$$
  Получили соотношение (41). Осталось доказать (42).
  $$f \in \mathcal{C}^r(\omega) \overset{\text{def } \mathcal{C}}{\Longrightarrow} \partial^\alpha f(X_0 + H) - \partial^\alpha f(X_0) \xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{} 0 \qquad \forall\alpha : |\alpha| = r \tag{44}$$
  $$H^\alpha \xlongequal{\text{def } x^\alpha} h_1^{\alpha_1}...h_n^{\alpha_n} \implies |H^\alpha| \leq \|H\|^{\alpha_1} ... \|H\|^{\alpha_n} = \|H\|^{|\alpha|} = \|H\|^r \implies \frac{|H^\alpha|}{\|H\|^r} \leq 1 \tag{45}$$
  $$\left|\frac{\rho(H)}{\|H\|^r}\right| \underset{(43)}{=\!=} \left|\frac{\Big(\partial^\alpha f(X_0 + H) - \partial^\alpha f(X_0)\Big)H^\alpha}{\|H\|^r}\right| \underset{(45)}{\leq} \Big|\partial^\alpha f(X_0 + cH) - \partial^\alpha f(X_0)\Big| \xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{(44)} 0$$
  □

11. Дифференциалы функции порядка ≥ 2; их вид

Будем иметь дело с некоторым открытым $\Omega \subset \mathbb{R}^{n\geq 1}$

Определение 5. $f \in \mathcal{C}^1(\omega), \qquad X \in \omega, \qquad H \in \mathbb{R}^n, \qquad H = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$
$$\mathrm{d}^1 f(X, H) := \mathrm{d}\, f(X, H) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(X)h_k$$
$$......$$

Пусть для некоторого $r \geq 1$ для функции $f \in \mathcal{C}^r\big(\omega\big)$ для любых X и ω определена функция

$$\mathrm{d}^r f(X,H) = \sum_{|\alpha|=r} A_{r,\alpha} \partial^\alpha f(X) H^\alpha, \qquad A_{r,\alpha} \text{ — некоторые } \textbf{определённые} \text{ коэффициенты}$$

$$A_{1,\alpha} = 1 \quad \forall \alpha : |\alpha| = 1$$

Пусть $f \in \mathcal{C}^r\big(\omega\big)$. Определим дифференциал порядка $r+1$:

$$\mathrm{d}^{r+1} f(X,H) \coloneqq \sum_{|\alpha|=r} A_{r,\alpha}\, \mathrm{d}\Big(\partial^\alpha f(X,H)\Big) H^\alpha = \sum_{|\alpha|=r+1} A_{r+1,\alpha} \partial^\alpha f(X) H^\alpha$$

12. Вычисление второго дифференциала; положительно и отрицательно определённые квадратичные формы, их свойства; неопределённые формы

Пример (переход от дифференциала пордяка 1 к дифференциалу порядка 2). Воспользуемся тем, что $C_1^\alpha = 1 \quad \forall \alpha : |\alpha| = 1$
Выпишем дифференциал перого порядка:

$$\mathrm{d}^1 f(X,H) = \sum_{k=1}^n f'_{x_k}(X) h_k$$

$$\mathrm{d}^2 f(X,H) \xlongequal{\text{def } \mathrm{d}^{r+1}} \sum_{k=1}^n \mathrm{d}\Big(f'_{x_k}(X), H\Big) h_k \xlongequal{\text{def d}} \sum_{k=1}^n \Big(\sum_{l=1}^n f''_{x_k x_l}(X) h_l\Big) h_k =$$
$$= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n f''_{x_k x_l}(X) h_l h_k \xlongequal[f''_{x_k x_l} = f''_{x_l x_k}]{} \sum_{k=1}^n f''_{x_k x_k}(X) h_k^2 + 2 \sum_{k<l} f''_{x_k x_l}(X) h_k h_l \tag{46}$$

Возьмём $\alpha : |\alpha| = 2$:

- $\alpha = (0, ..., \underset{k}{2}, ..., 0)$
$$\partial^\alpha f(X) = f''_{x_k x_l}$$
$$C_2^\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{2!}{0!...2!...0!} = 1$$
- $\alpha = (0, ..., \underset{k}{1}, ..., \underset{l}{1}, ..., 0)$
$$\partial^\alpha f = f''_{x_k x_l}$$
$$C_2^\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{2!}{0!...1!...1!...0!} = 2$$

Теперь можно записать, что
$$(46) = \sum_{|\alpha|=2} C_2^\alpha \partial^\alpha f(X) H^\alpha$$

То есть, $A_{2,\alpha} = C_2^\alpha$

Теорема 6. $A_{r,\alpha} = C_r^\alpha$

Доказательство. Будем доказывать **индукцией** по r:

- **База.** $r = 1, 2$ — только что проверили
- **Переход.** Пусть это верно для $r \geq 2$. Докажем для $r+1$:

По **предположению индукции**,

$$\mathrm{d}^{r+1} f(X,H) \xlongequal{\text{def } \mathrm{d}^{r+1}} \sum_{|\alpha|=1} C_r^\alpha \,\mathrm{d}\Big(\partial^\alpha f(X), H\Big) H^\alpha = \sum_{|\alpha|=r} C_r^\alpha \left(\sum_{\nu=1}^{n} (\partial^\alpha f)'_{x_\nu}(X) h_\nu\right) H^\alpha \tag{47}$$

В доказательстве формулы для производной порядка r (в предыдущей лекции, формулы с (36) до конца доказательства) было доказано, что

$$(47) = \sum_{|\alpha|=r+1} C_{r+1}^\alpha \partial^\alpha f(X) H^\alpha$$

□

Утверждения. Теперь можно переписать формулы Тейлора:

1. с остатком в форме Лагранжа:

$$f(X_0+H) = f(X_0) + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} \,\mathrm{d}^k f(X_0, H) + \frac{1}{(r+1)!} \,\mathrm{d}^{r+1} f(X_0 + cH, H)$$

2. с остатком в форме Пеано:

$$f(X_0+H) = f(X_0) + \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!} \,\mathrm{d}^k f(X_0, H) + \rho(H)$$

$$\frac{\rho(H)}{\|H\|^r} \xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{} 0$$

Пример. Применим формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа при $r=2$:

$$f(X_0+H) = f(X_0) + \mathrm{d} f(X_0,H) + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(X_0,H) + \rho(H), \qquad \frac{\rho(H)}{\|H\|^2} \xrightarrow[H\to\mathbb{O}_n]{} 0$$

Перепишем через двойные суммы (как мы это делали при переходе к дифференциалу порядка 2):

$$f(X_0+H) = f(X_0) + \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(X_0) h_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} f''_{x_k x_l}(X_0) h_k h_l + \rho(H)$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$A(H) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl} h_k h_l, \qquad a_{kl} = \frac{1}{2} f''_{x_k x_l}(X_0), \quad a_{kl} = a_{lk}$$

Напоминание (классификация квадратичных форм)**.** Квадратичная форма называется:

1. положительно определённой, если $\forall H \neq \mathbb{O}_n \quad A(H) > 0$
2. отрицательно определённой, если $\forall H \neq \mathbb{O}_n \quad A(H) < 0$
3. неопределённой, если $\exists\, H_1, H_2 \neq \mathbb{O}_n \quad A(H_1) > 0, \quad A(H_2) < 0$

Теорема 7. Если квадратичная форма A положительно определена, то

$$\exists\, m_1 > 0 \quad A(H) \geq m_1 \|H\|^2 \tag{48}$$

Если квадратичная форма отрицательно определена, то

$$\exists\, m_2 > 0 \quad A(H) \leq -m_2 \|H\|^2$$

Доказательство. Достаточно доказать (48), т. к. для полож. определённой B, форма $-B(H)$ отрицательно определена

Рассмотрим единичную сферу $S \coloneqq \{ H \in \mathbb{R}^n \mid \|H\| = 1 \}$
S — компакт в пространстве $\mathbb{R}^n$

Очевидно, что. $A(H) \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^n\big)$

Значит, по второй теореме Вейерштрасса, A достигает своего минимального значения, т. е.

$$\exists\, H_0 \in S : \forall H \in S \quad A(H) \geq A(H_0)$$

Обозначим $m_1 \coloneqq A(H_0)$
Т. к. квадратичная форма положительно определена, $m_1 > 0$
Рассмотрим $\forall H \neq \mathbb{O}_n$
Пусть $t \coloneqq \|H\| > 0$ (т. к. $H \neq \mathbb{O}_n$)
Зафиксируем $H^* = \frac{1}{t} H$

$$\|H*\| = \left\| \frac{1}{t} H \right\| = \frac{1}{t} \|H\| = \frac{t}{t} = 1$$

То есть, $H^* \in S$
Тогда, в силу выбора H_0, получаем, что $A(H^*) \geq m_1$

> **Замечание.** Легко заметить, что константа из квадратичной формы выносится в квадрате:
>
> $$A(tH) = t^2 A(H) \tag{49}$$

$$A(H^*) \xlongequal{\text{def } H^*} A\left(\frac{1}{t} H\right) \xlongequal[(49)]{} \frac{1}{t^2} A(H) \geq m_1$$

$$A(H) \geq m_1 t^2 \xlongequal{\text{def } t} m_1 \|H\|^2$$

□

13. Достаточное условие наличия или отсутствия локального экстремума функции

Теорема 8. $\omega \subset \mathbb{R}^n$ — открытое, $X_0 \in \omega$, $f \in \mathcal{C}^2\big(\omega\big)$
Выполнено необходимое условие локального экстремума, то есть $f'_{x_j}(X_0) = 0, \quad 1 \leq j \leq n$

> **Замечание.** $\implies \mathrm{d}\, f(X_0, H) = 0 \quad \forall H$

1. если $\mathrm{d}^2\, f(X_0, H)$ положтельно определён, то X_0 — строгий локальный минимум
2. если $\mathrm{d}^2\, f(X_0, H)$ отрицательно определён, то X_0 — строгий локальный максимум
3. если $\mathrm{d}^2\, f(X_0, H)$ неопределён, то нет локального экстремума

Доказательство.

1. Вспомним формулу Тейлора с остатком в форме Пеано:

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \mathrm{d}\, f(X_0, H) + \frac{1}{2}\, \mathrm{d}^2\, f(X_0, H) + \rho(H)$$

$$\text{где } \frac{\rho(H)}{\|H\|^2} \xrightarrow[H \to \mathbb{O}_n]{} 0 \tag{50}$$

Перепишем, применив замечание:

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \frac{1}{2}\, \mathrm{d}^2\, f(X_0, H) + \rho(H) \tag{51}$$

Т. к. второй дифференциал положительно определён, то, по предыдущей теореме,

$$\exists\, m_1 > 0 : \mathrm{d}^2\, f(X_0, H) \geq m_1 \|H\|^2 \tag{52}$$

Соотношение (50) означает, что

$$\exists\,\delta>0:\forall 0<\|H\|<\delta\quad \left|\frac{\rho(H)}{\|H\|^2}\right|<\frac{m_1}{4}\qquad\Longleftrightarrow\ |\rho(H)|<\frac{m_1}{4}\|H\|^2 \tag{53}$$

СНова применим формулу Тейлора с остатком в форме Пеано:

$$f(X_0+H)\underset{T}{=\!=}f(X_0)+\frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(X_0,H)+\rho(H)\geq f(X_0)+\frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(X_0,H)-|\rho(H)|\underset{(52),(53)}{>}$$
$$>f(X_0)+\frac{m_1}{2}\|H\|^2-\frac{m_1}{4}\|H\|^2=f(X_0)+\frac{m_1}{4}\|H\|^2>f(X_0)$$

2. Аналогично.

3. $\mathrm{d}^2 f(X_0,H)$ неопределён означает, что

$$A(H_1)>0,\qquad A(H_2)<0$$

Рассмотрим $H_1^*=\frac{1}{\|H_1\|}H_1$. Очевидно, что $H_1^*\in S$

$$A(H_1^*)=A\left(\frac{1}{\|H_1\|^2}H_1\right)\underset{(49)}{=\!=}\frac{1}{\|H\|^2}A(H_1):=p_1>0$$

Рассмотрим $H_2^*=\frac{1}{\|H_2\|}H_2$. Очевидно, что $H_2^*\in S$

$$A(H_2^*)=A\left(\frac{1}{\|H_2\|^2}H_2\right)\underset{(49)}{=\!=}\frac{1}{\|H_2\|^2}A(H_2):=-p_2>0$$

Возьмём $t>0$

$$A(tH_2^*)\underset{(49)}{=\!=}t^2A(H_2^*)\overset{\text{def }p_2}{=\!=}-p_2t^2 \tag{54}$$

$$A(tH_1^*)\underset{(49)}{=\!=}t^2A(H_1^*)\overset{\text{def }p_1}{=\!=}p_1t^2 \tag{55}$$

Это было верно для любой квадратичной формы. Вернёмся к $A(H)=\mathrm{d}^2 f(X_0,H)$
Выберем $\delta_1>0$, такое что

$$\forall\ 0<\|H\|<\delta_1\quad |\rho(H)|<\frac{1}{4}\min\{\,p_1,p_2\,\}\cdot\|H\|^2 \tag{56}$$

Пусть $0<t<\delta_1$

$$\|tH_1^*\|=\|tH_2^*\|=t$$

Рассмотрим

$$f(X_0+tH_1^*)=f(X_0)+\frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2 f(X_0,tH_1^*)+\rho(tH_1^*)\geq$$
$$\geq f(X_0)+\frac{1}{2}t^2\,\mathrm{d}^2 f(X_0,H_1^*)-|\rho(tH_1^*)|\underset{(55),(56)}{>}$$
$$>f(X_0)+\frac{1}{2}p_1t^2-\frac{1}{4}p_1t^2=f(X_0)+\frac{1}{4}p_1t^2>f(X_0)$$

При этом, $X_0+tH_1^*$ лежит в любой окрестности X_0
Рассмотрим

$$f(X_0+H_2^*)\underset{(54),(56)}{\leq}f(X_0)-\frac{p_2}{2}t^2+|\rho(H)|<f(X_0)-\frac{p_2}{2}t^2+\frac{p_2}{4}t^2=f(X_0)-\frac{p_2}{4}t^2<f(X_0)$$

При этом, $X_0+tH_2^*$ тоже лежит в любой окрестности X_0
Значит, локального экстремума нет (по определению локального экстремума).

$\square$

14. Неравенство Лагранжа для вектор функции

Утверждение 3. $F : (a,b) \to \mathbb{R}^{n \geq 2}$, $\quad F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$, $\quad t_0 \in (a,b)$, $\quad F$ диффер. в $t_\circ$

$$\mathcal{D}F(t_0) = \begin{bmatrix} f_1'(t_0) \\ \vdots \\ f_n'(t_0) \end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{(как линейного отображения)}}{\|\mathcal{D}F(t_0)\|} = \sup_{\substack{|h| \leq 1 \\ h \in \mathbb{R}}} \|\mathcal{D}F(t_0)h\|_n = \sup \|h\mathcal{D}F(t_0)\|_n = \sup |h| \, \|\mathcal{D}F(t_0)\|_n =$$

$$= \|\mathcal{D}F(t_0)\|_n = \left\| \begin{bmatrix} f_1'(t_0) \\ \vdots \\ f_n'(t_0) \end{bmatrix} \right\|_n$$

Теорема 9 (Лагранжа). $F : [a,b] \to \mathbb{R}^{n \geq 2}$, $\quad F \in \mathcal{C}\big([a,b]\big)$, $\quad \forall t \in (a,b) \quad F$ дифф. в t

Напоминание. $F \in \mathcal{C}\big([a,b]\big) \iff f_j \in \mathcal{C}\big([a,b]\big) \quad j = 1, ..., n$

$$\implies \exists c \in (a,b) : \|F(b) - F(a)\|_n \leq \|\mathcal{D}F(c)\|_n \, (b-a) \tag{57}$$

Доказательство. Возьмём

$$\varphi(t) := F(t)^T \Big(F(b) - F(a)\Big) = f_1(t)\Big(f_1(b) - f_1(a)\Big) + \dots + f_n(t)\Big(f_n(b) - f_n(a)\Big)$$

Будем считать, что $F(b) \neq F(a)$ (иначе — очевидно).
По напоминанию из условия теоремы, $\varphi \in \mathcal{C}\big([a,b]\big)$. Значит, $\forall t \in (a,b) \quad \exists \varphi'(t)$

$$\varphi'(t) = f_1'(t)\Big(f_1(b) - f_1(a)\Big) + \dots + f_n'(t)\Big(f_n(b) - f_n(a)\Big) \tag{58}$$

К φ можно применить теорему Лагранжа из первого семестра:

$$\exists c \in (a,b) : \quad \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b-a) \tag{59}$$

$$\varphi(b) - \varphi(a) \xlongequal{\text{def } \varphi} \bigg(f_1(b)\Big(f_1(b) - f_1(a)\Big) + \dots\bigg) - \bigg(f_1(a)\Big(f_1(b) - f_1(a)\Big) + \dots\bigg) =$$
$$= \Big(f_1(b) - f_1(a)\Big)^2 + \dots + \Big(f_n(b) - f_n(a)\Big)^2 = \|F(b) - F(a)\|_n^2 \tag{60}$$

Применим к (58) неравенство КБШ:

$$|\varphi'(c)| \leq \bigg(\Big(f_1'(c)\Big)^2 + \dots + \Big(f_n'(c)\Big)^2\bigg)^{\frac{1}{2}} \cdot \bigg(\Big(f_1(b) - f_1(a)\Big)^2 + \dots + \Big(f_n(b) - f_n(a)\Big)^2\bigg)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \|\mathcal{D}F(c)\| \cdot \|F(b) - F(a)\|$$

$$\underset{(60)}{\implies} \|F(b) - F(a)\|^2 \leq \|\mathcal{D}F(c)\| \cdot \|F(b) - F(a)\| \implies (57)$$

$\square$

15. Теорема об обратимости линейного оператора, близкого по норме разности к обратимому оператору

Вспомним две теоремы из алгебры:

Напоминание. A обратима $\iff$ $\det A \neq 0$

Напоминание. A обратима $\iff$ $AX \neq \mathbb{O}_n \quad \forall X \neq \mathbb{O}_n$

Теорема 10. $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{n \geq 2} \to \mathbb{R}^n$ — линейное, т. е. $\mathcal{A}(X) = AX, \quad X \in \mathbb{R}^n, \qquad A$ обратима

$$\left\|A^{-1}\right\| = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha > 0, \qquad \|B - A\| = \beta, \quad 0 < \beta < \alpha$$

Тогда B обратима и

$$\left\|A^{-1} - B^{-1}\right\| \leq \frac{\beta}{\alpha(\beta - \alpha)}$$

Доказательство.

- Докажем, что B обратима:
  Возьмём $X \in \mathbb{R}^n$

$$X = IX = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) \implies \|X\| = \left\|A^{-1}(AX)\right\| \leq$$
$$\leq \left\|A^{-1}\right\| \|AX\| \xlongequal{\text{def } \alpha} \frac{1}{\alpha} \|AX\| \implies \|AX\| \geq \alpha \|X\| \tag{61}$$

$$BX = AX + (BX - AX) \implies \|BX\| \overset{\triangle}{\geq} \|AX\| - \|BX - AX\| \tag{62}$$

$$\|BX - AX\| = \|(B - A)X\| \leq \|B - A\| \, \|X\|_n \tag{63}$$

$$\|BX\|_n \underset{(62)}{\geq} \underbrace{\alpha \|X\|}_{(61)} - \underbrace{\|B - A\| \, \|X\|}_{(63)} \xlongequal{\text{def } \beta} \underbrace{(\alpha - \beta)}_{>0} \|X\| \tag{64}$$

  Это означает, что B обратима (по второй теореме из алгебры)

- Докажем соотношение для $\left\|A^{-1} - B^{-1}\right\|$:
  Возьмём $\forall \, Y \neq \mathbb{O}_n$ и $X := B^{-1}Y$

$$\left\|B(B^{-1}Y)\right\| \xlongequal{\text{def } Y} \|BX\| \underset{(64)}{\geq} (\alpha - \beta) \|X\| \xlongequal{\text{def } X} (\alpha - \beta) \left\|B^{-1}Y\right\| \tag{65}$$

$$B(B^{-1}Y) \underset{\text{асс.}}{=\!=} (BB^{-1})Y = IY = Y$$

$$(65) \implies \left\|B^{-1}Y\right\| \leq \frac{1}{\alpha - \beta} \|Y\| \implies \left\|B^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\alpha - \beta} \tag{66}$$

$$A(A^{-1} - B^{-1})B \underset{\text{асс.}}{=\!=} \Big(A(A^{-1} - B^{-1})\Big)B \underset{\text{дистр.}}{=\!=} (AA^{-1} - AB^{-1})B = (I - AB^{-1})B \underset{\text{дистр.}}{=\!=}$$
$$= IB - (AB^{-1})B \underset{\text{асс.}}{=\!=} B - A(B^{-1}B) = B - AI = B - A$$

$$\implies \underbrace{(A^{-1}A)}_{=I}(A^{-1} - B^{-1})\underbrace{(BB^{-1})}_{=I} = A^{-1}(B - A)B^{-1} \implies A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1} \tag{67}$$

$$\left\|A^{-1} - B^{-1}\right\| \underset{(67)}{\leq} \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|B - A\| \cdot \left\|B^{-1}\right\| \underset{\substack{(66) \\ \text{def}\,\alpha,\beta}}{\leq} \frac{1}{\alpha} \cdot \beta \cdot \frac{1}{\alpha - \beta}$$

□

16. Теорема об обратимом отображении: выбор множества U

Теорема 11. $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$, E открыто, $X_0 \in E$, $F : E \to \mathbb{R}^1$
$\boldsymbol{F \in \mathcal{C}^1(E)}$, $Y_0 = F(X_0)$, $\boldsymbol{\mathcal{D}F(X_0)}$ **обратима**

$$\implies \exists U \text{ — окрестность } X_0, \ V \text{ — окрестность } Y_0 : \begin{cases} F\big|_U \text{ обратимо} \\ F(U) = V \\ \Phi = \left(F\big|_U\right)^{-1} \implies \Phi \in \mathcal{C}^1(V) \end{cases}$$

Доказательство (определение множества U). Обозначим $A \coloneqq \mathcal{D}F(X_0)$. По условию, она обратима

Положим $\lambda \coloneqq \dfrac{1}{4\,\|A^{-1}\|}$

Обозначим $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$

$$\mathcal{D}F(X) = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(X) & \dots & f'_{1x_n}(X) \\ . & . & . \\ f'_{1x_1}(X) & \dots & f'_{nx_n}(X) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{D}F(X) - \mathcal{D}F(X_0) = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(X) - f'_{1x_1}(X_0) & \dots & f'_{1x_n}(X) - f'_{1x_n}(X_0) \\ . & . & . \\ f'_{nx_1}(X) - f'_{nx_1}(X_0) & \dots & f'_{nx_n}(X) - f'_{nx_n}(X_0) \end{bmatrix}$$

По свойству (3) нормы матрицы,

$$\|\mathcal{D}F(X) - A\| \xlongequal{\text{def } A} \|\mathcal{D}F(X) - \mathcal{D}F(X_0)\| \leq \left(\sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \left(f'_{ix_j}(X) - f'_{ix_j}(X_0) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\underset{F \in \mathcal{C}^1}{\Longrightarrow} \|\mathcal{D}F(X) - \mathcal{D}F(X_0)\| \xrightarrow[X \to X_0]{} 0$$

$$\implies \exists r > 0 : \quad \forall X \in \mathtt{B}_r(X_0) \quad \|\mathcal{D}F(X) - A\| < 2\lambda \tag{68}$$

Положим $U \coloneqq \mathtt{B}_r(X_0)$ □

17. Теорема об обратимом отображении: взаимная однозначность $F\big|_U$

Теорема 12. $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$, E открыто, $X_0 \in E$, $F : E \to \mathbb{R}^1$
$\boldsymbol{F \in \mathcal{C}^1(E)}$, $Y_0 = F(X_0)$, $\boldsymbol{\mathcal{D}F(X_0)}$ **обратима**

$$\implies \exists U \text{ — окрестность } X_0, \ V \text{ — окрестность } Y_0 : \begin{cases} F\big|_U \text{ обратимо} \\ F(U) = V \\ \Phi = \left(F\big|_U\right)^{-1} \implies \Phi \in \mathcal{C}^1(V) \end{cases}$$

Утверждение 4 (о выпуклости шара). $X_1, X_2 \in U$, $0 < t < 1$

$$\implies tX_1 + (1-t)X_2 \in U$$

(см. рис. 1)

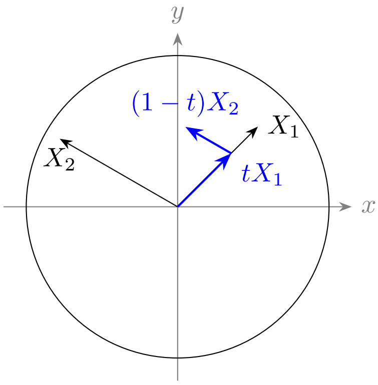


Рис. 1: Выпуклость шара

Доказательство.

$$\|tX_1 + (1-t)X_2 - X_0\| = \|t(X_1 - X_0) + (1-t)(X_2 - X_0)\| \overset{\triangle}{\le}$$
$$\le \|t(X_1 - X_0)\| + \|(1-t)(X_2 - X_0)\| < t \cdot r + (1-t) \cdot r = r$$

□

Следствие. $X \in U, \qquad X + H \in U, \qquad 0 < t < 1$

$$\implies X + tH \in U$$

Доказательство. $X_1 \coloneqq X + H, \qquad X_2 \coloneqq X$

$$tx_1 + (1-t)X_2 = tX + tH + (1-t)X = X + tH$$

□

Доказательство (Инъективность F).

TODO: А где сюръективность?

Далее будем рассматривать F только на U (т. е. будем писать $F \coloneqq F\big|_U$)
Возьмём $X \in U$ и $H \neq \mathbb{O}_n$, такие что $X + H \in U$
Докажем, что $F(X+H) - F(X) \overset{?}{\neq} \mathbb{O}_n$. Это и будет означать инъективность
Возьмём $t \in [0,1]$ и $P(t) \coloneqq F(X + tH) - tAH$
Это вектор-функция $P : [0,1] \to \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{D}P(t) \xlongequal{\text{def } P} \mathcal{D}\Big(F(X + tH)\Big) - \mathcal{D}(tAH)$$

Положим $q(t) \coloneqq X + tH$
Теперь можно переписать последнее соотношение:

$$\mathcal{D}P(t) = \mathcal{D}\Big(F\big(q(t)\big)\Big) - \mathcal{D}(tAH) \tag{69}$$

Напоминание. Мы уже доказали, что для $Y \in \mathbb{R}^n$ и отображения $t \mapsto tY$ выполнено $\mathcal{D}(tY) = Y$

$$\mathcal{D}(tAH) = AH, \qquad \mathcal{D}q(t) = H$$
$$\mathcal{D}F\Big(q(t)\Big) = \mathcal{D}F\Big(q(t)\Big)\mathcal{D}q(t) = \mathcal{D}F(X + tH)H$$

Подставим это в (69):

$$\mathcal{D}P(t) = \mathcal{D}F(X + tH)H - AH \tag{70}$$

$$\lambda \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{4\left\|A^{-1}\right\|} \implies \left\|A^{-1}\right\| = \frac{1}{4\lambda}$$

Возьмём $H \neq \mathbb{O}_n$

$$H = (A^{-1}A)H = A^{-1}AH \implies \|H\| = \left\|A^{-1}(AH)\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|AH\| = \frac{1}{4\lambda}\|AH\| \implies$$
$$\implies \|AH\| \geq 4\lambda\|H\| \quad (71)$$

$$P(1) - P(0) \xlongequal{\text{def } P} F(X+H) - AH - F(X) = F(X+H) - F(X) - AH \quad (72)$$

Применим к P теорему Лагранжа для вектор-функции:

$$\exists\, c \in [0,1] : \|P(1) - P(0)\| \leq \|\mathcal{D}P(c)\| \cdot (1-0) = \|\mathcal{D}P(c)\| \underset{(70)}{=} \left\|\Big(\mathcal{D}F(X+cH) - A\Big)H\right\| \leq$$
$$\leq \left\|\mathcal{D}F\underbrace{(X+cH)}_{\in U} - A\right\| \|H\| \underset{(68)}{<} 2\lambda\|H\| \underset{(71)}{\leq} \frac{1}{2}\|AH\| \quad (73)$$

$$\|F(X+H) - F(X) - AH\| \underset{(72)}{=\!=} \|P(1) - P(0)\| \underset{(73)}{<} \frac{1}{2}\|AH\| \quad (74)$$

$$\|F(X+H) - F(X)\| = \left\|AH + \Big(F(X+H) - F(X) - AH\Big)\right\| \geq$$
$$\geq \|AH\| - \|F(X+H) - F(X) - AH\| \underset{(74)}{>} \|AH\| - \frac{1}{2}\|AH\| = \frac{1}{2}\|AH\| \underset{(71)}{\geq} 2\lambda\|H\| > 0 \quad (75)$$

$\square$

18. Теорема об обратимом отображении: отображение F открыто

Теорема 13. $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$, E открыто, $X_0 \in E$, $F : E \to \mathbb{R}^1$
$\boldsymbol{F \in \mathcal{C}^1(E)}$, $Y_0 = F(X_0)$, $\boldsymbol{\mathcal{D}F(X_0)}$ **обратима**

$$\implies \exists\, U \text{ — окрестность } X_0,\ V \text{ — окрестность } Y_0 : \begin{cases} F\big|_U \text{ обратимо} \\ F(U) = V \\ \Phi = \left(F\big|_U\right)^{-1} \implies \Phi \in \mathcal{C}^1(V) \end{cases}$$

Лемма 1. $U = B_r(X_0)$, $X_1 \in U$, $0 < \rho < r - \|X_0 - X_1\|$, $S = \mathtt{B}_\rho(X_1)$

> **Замечание.** В силу последних двух условий, $S \subset U$.

$Y_1 = F(X_1)$

$$\implies \mathtt{B}_{\lambda\rho}(Y_1) \subset F(S) \quad (76)$$

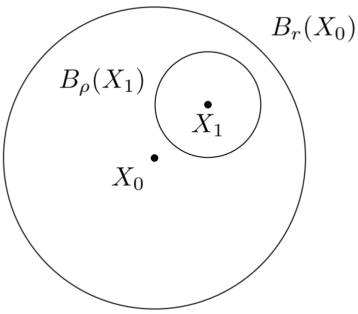


Рис. 2: Здесь $r = 2$, $\|X_0 - X_1\| = 1$, $\rho = 0.7$

Доказательство. $X \in U, \qquad X+H \in U$

$$\|F(X+H)-F(X)\| \geq 2\lambda \|H\| \tag{77}$$

(по соотношению (75) из второго шага доказательства)

$$(77) \iff \|F(X_2)-F(X_3)\| \geq 2\lambda \|X_2 - X_3\| \qquad \forall X_2, X_3 \in U \tag{78}$$

По условию, $Y_1 \in F(S)$ (т. к. это образ X_1)
Возьмём $Y \neq Y_1, \quad Y \in B_{\lambda\rho}(Y_1)$
S — открытый шар
Рассмотрим функцию $k(X) \coloneqq \|F(X)-Y\|, \qquad X \in \overline{S}$
$\overline{S}$ — замкнутый шар, а значит, компакт. Поэтому $k \in \mathcal{C}(\overline{S})$
По второй теореме Вейерштрасса, k достигает минимального значения:

$$\exists\, X_* \in \overline{S} : k(X_*) \leq k(X) \quad \forall X \in \overline{S} \tag{79}$$

Утверждение 5. X_* не принадлежит границе $\overline{S}$ (т. е. $X_* \in S$)

Доказательство. Действительно, если $\|X_0 - X_1\| = \rho$ (т. е. X_0 лежит на границе $\overline{S}$), то

$$\implies \|F(X_0)-F(X_1)\| \underset{(78)}{\geq} 2\lambda \|X_1 - X_0\| = 2\lambda\rho$$

По определению, $F(X_1) = Y_1$. Подставим:

$$\|F(X_0) - Y_1\| \geq 2\lambda\rho \tag{80}$$

При этом, $Y \in B_{\rho\lambda}(Y_1)$. Значит,

$$\|Y - Y_1\| < \lambda\rho \tag{81}$$

$$\|F(X_0)-Y\| \overset{\triangle}{\geq} \|F(X_0)-Y_1\| - \|Y_1 - Y\| \underset{(80),(81)}{>} 2\lambda\rho - \lambda\rho = \lambda\rho$$

В обозначениях k можно записать:

$$\left.\begin{aligned} k(X_0) &\xlongequal{\text{def } k} \|F(X_0)-Y\| > \lambda\rho \\ k(X_1) &\xlongequal{\text{def } k} \|Y_1 - Y\| < \lambda\rho \end{aligned}\right\} \implies k(X_1) < k(X_0) \tag{82}$$

Взяли точку на границе диска (на сфере). Получили, что значение функции на границе строго больше, чем значение в центре. Значит, минимум (X_*) не может лежать на границе, т. е.

$$X_* \in S \tag{83}$$

□

Рассмотрим функцию $l(X) \coloneqq k^2(X)$
Понятно, что её минимум совпадёт с минимумом k:

$$(79) \implies l(X_*) \leq l(X) \quad \forall X \in \overline{S} \tag{84}$$

$$l(X) \xlongequal{\text{def } k} \|F(X)-Y\|^2 \tag{85}$$

Пусть

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

В этих обозначениях,

$$(85) \implies l(X) = \sum_{i=1}^{l} \Big(f_i(X) - y_i \Big)^2 \tag{86}$$

По условию теоремы, F, а значит и его координатные функции гладкие ($\in \mathcal{C}^1$, т. е. имеют непрерывные частные производные). Нетрудно заметить, что

$$l \in \mathcal{C}^1(U) \tag{87}$$

Вспомним необходимое условие локального экстремума (из второго семестра):

Напоминание. Если функция имеет частный экстремум и она дифференцируема в этой точке, то все частные производные в этой точке равны нулю

Его можно применять только к внутренним точкам (именно для этого мы и проверяли, что $X_* \in S$)

$$(83), (84), (87) \implies l'_{x_j}(X_*) = 0 \qquad j = 1, .., n \tag{88}$$

Из соотношения (86) понятно, как выглядят частные производные:

$$l'_{x_j}(X_*) \underset{(86)}{=\!=} \sum_{i=1}^{n} 2\Big(f_i(X_*) - y_i \Big) f'_{ix_j}(X_*) \underset{(88)}{=\!=} 0 \qquad j = 1, ..., n$$

Поделим на 2:

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(f_i(X_*) - y_i \Big) f'_{ix_j}(X_*) = 0 \qquad j = 1, ..., n \tag{89}$$

Заметим, что здесь фигурирует матрица Якоби. Чтобы её записать, введём обозначение:

$$A \coloneqq \Big(f_1(X_*) - y_1,\ \ldots\ldots, f_n(X_*) - y_n \Big)$$

Очевидно, что.

$$A = \Big(F(X_*) - Y \Big)^T \tag{90}$$

Имеется n равенств. В них фигурируют элементы матрицы Якоби:

Утверждение 6.

$$(89) \iff A\mathcal{D}F(X_*) = \mathbb{O}_n^T \tag{91}$$

Доказательство.

$$\mathcal{D}F(X_*) = \begin{pmatrix} f'_{1x_1}(X_*) & \ldots & f'_{1x_n}(X_*) \\ . & . & . \\ f'_{nx_1}(X_*) & \ldots & f'_{nx_n}(X_*) \end{pmatrix}$$

$$A\mathcal{D}F(X_*) = \left[\Big(f_1(X_*) - y_1 \Big) f'_{1x_1}(X_*) + \cdots + \Big(f_n(X_*) - y_n \Big) f'_{nx_1}(X_*),\ \ldots\ldots \right] =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} \Big(f_i(X_*) - y_i \Big) f_{ix_1}(X_*),\ \ldots\ldots \right] = (89)$$

$\square$

Утверждение 7.

$$\det \mathcal{D}F(X) \neq 0 \qquad \forall X \in U \tag{92}$$

Доказательство. Вспомним соотношение из теоремы об отображении, близком к обратимому:

$$\|A\| = \frac{1}{\alpha}, \quad \|A - B\| = \beta < \alpha \qquad \Longrightarrow \left\|B^{-1}\right\| \le \frac{1}{2\alpha}$$

Применим это к $\alpha = 4\lambda, \quad \beta = 2\lambda$:

$$\|\mathcal{D}F(X) - \mathcal{D}F(X_0)\| < 2\lambda$$

$$\|\mathcal{D}F(X_0)\| = \frac{1}{4\lambda}$$

Отсюда следует, что $\mathcal{D}F(X_0)$ обратима и для неё выполняется неравенство:

$$\left\|\Big(\mathcal{D}F(X)\Big)^{-1}\right\| \le \frac{1}{2\lambda}$$

Это значит, что она она неособенна ($\det \neq 0$) □

(92) позволяет нам взять обратную матрицу к $\mathcal{D}F(X_*)$:

$$\left.\begin{aligned} \Big(A\mathcal{D}F(X_*)\Big)\Big(\mathcal{D}F(X_*)\Big)^{-1} &\underset{(91)}{=\!=} \mathbb{O}_n^T\Big(\mathcal{D}F(X_*)\Big)^{-1} = \mathbb{O}_n^T \\ \Big(A\mathcal{D}F(X_*)\Big)\Big(\mathcal{D}F(X_*)\Big)^{-1} &\underset{\text{acc.}}{=\!=} A\Big(\mathcal{D}F(X_*)\Big)\Big(\mathcal{D}F(X_*)\Big)^{-1} = AI = A \end{aligned}\right\} \Longrightarrow A = \mathbb{O}_n^T$$

При этом, $A \underset{(90)}{=\!=} \Big(F(X_*) - Y\Big)^T$, то есть $F(X_*) - Y = \mathbb{O}_n$
Значит, $F(X_*) = Y$ и $Y \in F(S)$ □

Определение 6. $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — открытое, $\qquad M : \Lambda \to \mathbb{R}^n$
Будем говорить, что M — открытое отображение, если

$$\underset{\omega\text{ — откр.}}{\forall\, \omega \subset \Lambda} \quad M(\omega) \text{ открытое}$$

(то есть, открытые отображения переводятся в открытые)

Приведём определение непрерывного отображения, которое используется в топологии (частный его случай для евклидова пространства):

Определение 7. $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ — открытое, $\qquad M : \Lambda \to \mathbb{R}^n$
M непрерывно, если прообраз любого открытого множества открыт

Примечание. Пустое множество открыто. Если прообраза у какого-то множества нет, то считаем, что прообраз пуст (а значит, открыт)

Утверждение 8. Приведённое определение непрерывности эквивалентно определению непрерывности, приведённому во втором семестре

Доказательство (F открыто)**.** Применяем лемму
Докажем, что F — открытое отображение:

- По условию, $V = F(U)$. Докажем, что V — открытое множество:
  Возьмём $Y_1 \in F(U)$. Тогда $\exists\, X_1 \in U : F(X_1) = Y_1$
  Возьмём $0 < \rho < r - \|X_1 - X_0\|$
  Пусть $S := B_\rho(X_1)$
  Тогда, по шагу 3,

$$B_{\lambda\rho}(Y_1) \subset F\Big(B_\rho(X_1)\Big) \subset V = F(U)$$

Это и есть определение открытого множества

$$\implies V - \text{откр.}$$

- Возьмём $\omega \in U$ — открытое. Нужно доказать, что $F(\omega)$ открыто:
  Возьмём $Y_2 \in F(\omega)$
  Тогда $\exists\, X_2 : F(X_2) = Y_2$
  Поскольку $X_2 \in \omega$,
  $$\exists\, \rho_1 > 0 : B_{\rho_1}(X_2) \subset \omega \subset U$$
  Снова применяем шаг 3:
  $$B_{\lambda\rho_1}(Y_2) \subset F\Big(B_{\rho_1}(X_2)\Big) \subset F(\omega)$$
  Получили, что некоторый открытый шар полностью содержится в $F(\omega)$. Это и есть то, что требовалось доказать

□

19. Теорема об обратимом отображении: отображение Φ дифференцируемо $\forall y \in V$

Теорема 14. $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$, E открыто, $X_0 \in E$, $F : E \to \mathbb{R}^1$
$\boldsymbol{F \in \mathcal{C}^1(E)}$, $Y_0 = F(X_0)$, $\boldsymbol{\mathcal{D}F(X_0)}$ **обратима**

$$\implies \exists\, U - \text{окрестность } X_0,\ V - \text{окрестность } Y_0 : \begin{cases} F\big|_U \text{ обратимо} \\ F(U) = V \\ \Phi = \left(F\big|_U\right)^{-1} \end{cases} \implies \Phi \in \mathcal{C}^1(V)$$

Доказательство (непрерывность Φ). На втором шаге мы выяснили, что $F\big|_U$ — биекция. Для любой биекции можно определить обратное отображение:

$$\exists\, \Phi : V \to \mathbb{R}^n : \begin{cases} \Phi(V) = U \\ F\Big(\Phi(Y)\Big) = Y \quad \forall Y \in V \\ \Phi\Big(F(X)\Big) = X \quad \forall X \in V \end{cases}$$

Проверим, что $\Phi \in \mathcal{C}(V)$:
По определнию из топологии, нужно доказать, что $\forall \omega \subset U$ — откр. прообраз ω открыт
Напишем определение прообраза ω при Φ:

$$\omega^{-1} = \{\, Y \in V : \Phi(Y) \in \omega \,\}$$

Если F — биекция, то и Φ — биекция:

$$\Phi(Y) \in \omega \underset{\text{биективность } \Phi}{\Longleftrightarrow} F\Big(\Phi(Y)\Big) \in F(\omega) \iff Y \in F(\omega)$$

Теперь можно переписать определение прообраза:

$$\omega^{-1} = \{\, Y : Y \in F(\omega) \,\}$$

По шагу 4, $F(\omega)$ открыто (как образ открытого при открытом отображении)

Φ дифференцируема в Y $\quad \forall Y \in V$
Зафиксируем K такое, что $Y + K \in V$, $\quad K \neq \mathbb{O}_n$

Обозначим $\Phi(Y) \coloneqq X, \qquad \Phi(Y+K) \coloneqq X+H$
Это эквивалентно тому, что $Y = F(X), \qquad Y+K = F(X+H)$

$$K = Y + K - Y = F(X+H) - F(X) \tag{93}$$

На основании шага 5,

$$K \xrightarrow[H \to \mathbb{O}_n]{} \mathbb{O}_n, \qquad H \xrightarrow[K \to \mathbb{O}_n]{} \mathbb{O}_n$$

Также, по соотношению (75) из шага 2, $\|F(X+H) - F(X)\| \geq 2\lambda \|H\|$, то есть

$$\|K\| \geq 2\lambda \|H\| \tag{94}$$

Напоминание. По условию, $\mathcal{D}F(X)$ обратима и

$$\left\| \Big(\mathcal{D}F(X)\Big)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{2\lambda} \tag{95}$$

(это мы выяснили в лемме, при доказательстве соотношения (92))

Обозначим $B \coloneqq \Big(\mathcal{D}F(X)\Big)^{-1}$

$$K = (93) = \mathcal{D}F(X)H + t(H) \tag{96}$$

$$\text{где } \frac{1}{\|H\|} t(H) \xrightarrow[H \to \mathbb{O}_n]{} \mathbb{O}_n$$

Домножим (96) на B слева:

$$BK = B\Big(\mathcal{D}F(X)H\Big) + Bt(H) \overset{\text{def } B}{=\!=} IH + Bt(H) = H + Bt(H)$$

$$\implies BK - Bt(H) = H \underset{(93)}{=\!=} \Phi(Y+K) - \Phi(Y) \tag{97}$$

В силу биективности F и Φ,

$$K \neq \mathbb{O}_n \iff H \neq \mathbb{O}_n$$

$$\text{Значит, можно делить на } \|H\| \tag{98}$$

$$\frac{\|Bt(H)\|_n}{\|K\|_n} \leq \frac{\|B\| \cdot \|t(H)\|_n}{\|K\|_n} \underset{(95)}{\leq} \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{\|t(H)\|_n}{\|K\|_n} \underset{(98)}{=\!=} \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{\|t(H)\|}{\|H\|} \cdot \frac{\|H\|}{\|K\|} \underset{(94)}{\leq} \frac{1}{4\lambda^2} \frac{\|t(H)\|}{\|H\|} \xrightarrow[K \to \mathbb{O}_n]{} 0 \tag{99}$$

$$(97), (99) \implies \Phi \text{ дифф. в } Y$$

Напоминание. Дифф. Φ означает, что

$$\Phi(Y+K) - \Phi(Y) = \mathcal{D}\Phi(Y)K + r(K), \qquad \frac{\|r(K)\|}{\|K\|} \xrightarrow[K \to \mathbb{O}_n]{} 0$$

(важно, что матрица Якоби единственна)

Значит, кроме дифференцируемости, мы установили, что

$$(97) \implies \mathcal{D}F(Y) = \Big(\mathcal{D}F(X)\Big)^{-1}, \qquad X = \Phi(Y) \tag{100}$$

□

20. Теорема об обратимом отображении: $\Phi \in \mathcal{C}^1\big(V\big)$

Теорема 15. $E \subset \mathbb{R}^{n\geq 2}$, $\quad E$ открыто, $\quad X_0 \in E$, $\quad F : E \to \mathbb{R}^1$
$\boldsymbol{F \in \mathcal{C}^1(E)}$, $\quad Y_0 = F(X_0)$, $\quad$ **$\boldsymbol{\mathcal{D}F(X_0)}$ обратима**

$$\implies \exists\, U \text{ — окрестность } X_0,\ V \text{ — окрестность } Y_0 : \begin{cases} F\big|_U \text{ обратимо} \\ F(U) = V \\ \Phi = \left(F\big|_U\right)^{-1} \end{cases} \implies \Phi \in \mathcal{C}^1(V)$$

Доказательство (Φ гладкое)**.** Пользуясь формулой (100), запишем матрицу Якоби Φ в следующем виде:

$$\mathcal{D}\Phi(Y) = \Big(\mathcal{D}F\big(\Phi(Y)\big)\Big)^{-1} \tag{101}$$

Из курса алгебры знаем, что обратимы только неособенные матрицы:

$$\det \mathcal{D}F(X) \neq 0 \quad \forall X \in U$$

Матрица Якоби состоит из частных производных. Все они непрерывны по условию. Значит,

$$\det \mathcal{D}F(X) \in \mathcal{C}\big(U\big)$$

Два последних выражения означают, что

$$\frac{1}{\det \mathcal{D}F(X)} \in \mathcal{C}\big(U\big)$$

В силу предыдущего шага,

$$\implies \frac{1}{\det \mathcal{D}F\Big(\Phi(Y)\Big)} \in \mathcal{C}\big(V\big) \tag{102}$$

Алгебраические дополнения состоят из сумм и произведений частных производных в точке Y. Значит, они (дополнения) непрерывны, а значит

$$(101), (102) \implies \mathcal{D}F(Y) \in \mathcal{C}\big(V\big) \iff \Phi \in \mathcal{C}^1\big(V\big)$$

□

21. Теорема об открытом отображении

Теорема 16. $G \subset \mathbb{R}^n$ — открыто, $\quad F : G \to \mathbb{R}^n$, $\quad F \in \mathcal{C}^1\big(G\big)$, $\quad \det \mathcal{D}F(X) \neq 0 \quad \forall X \in G$
Тогда F открыто

Доказательство. Пусть $\omega \subset G$ — открыто
Пусть $S = F(\omega)$
Нужно доказать, что S открыто
Возьмём $\forall Y \in S$
Поскольку S — это образ ω,

$$\exists\, X \in \omega : F(X) = Y \qquad (X \text{ не обязательно единственный — берём любой})$$

Поскольку ω открыто,

$$\exists\, r_0 > 0 : B_{r_0}(X) \subset \omega$$

Определим λ такое, что

$$\left\| \Big(\mathcal{D}F(X)\Big)^{-1} \right\| = \frac{1}{4\lambda}$$

Возьмём r, такое что

$$\forall X_1 \in \underbrace{B_r(X)}_{\subset G} \quad \|\mathcal{D}F(X_1) - \mathcal{D}F(X)\| < 2\lambda$$

Возьмём $0 < \rho < \min(r, r_0)$
Если мы проведём для $B_\rho(X)$ рассуждения из шага 4, то получим, что

$$F\Big(B_\rho(X)\Big) \supset B_{\lambda\rho}\Big(F(X)\Big) = B_{\lambda\rho}(Y)$$

Понятно, что $B_\rho(X) \subset \omega$
Таким образом, $B_{\lambda\rho}(Y) \subset F(\omega)$
В силу произвольности Y, это означает, что S открыто $\square$

22. Теорема о неявной функции (отображении): линейный вариант

Рассматриваем пространства $\mathbb{R}^{n\geq 1}$, $\mathbb{R}^{m\geq 1}$, $\mathbb{R}^{n+m}$.
Введём обозначения:

$$X \coloneqq \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad Y \coloneqq \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad Z \coloneqq \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Введём обозначение для матриц:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ . & . & . \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}, \qquad [AB] \coloneqq \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & b_{1n} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

Пусть $\det A \neq 0$ и пусть выполнено

$$[AB]\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \mathbb{O}_n \tag{103}$$

То есть, $AX + BY = \mathbb{O}_n$

$$\underset{\det A \neq 0}{\Longrightarrow} X = -(A^{-1}B)Y \tag{104}$$

Положим $C \coloneqq -A^{-1}B$ и пусть $C(Y) = CY$

$$(103), (104) \implies [AB]\begin{bmatrix} C(Y) \\ Y \end{bmatrix} = \mathbb{O}_n$$

Таким образом, найдено линейное отображение $C : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее этому условию.
Говорят, что равенство (103) задаёт X как *неявную функцию от* Y, в данном случае равную $C(Y)$.

23. Общий случай теоремы о неявной функции (отображении)

Теорема 17. $\mathbb{R}^{n\geq 1}$, $\qquad \mathbb{R}^{m\geq 1}$, $\qquad \mathbb{R}^{n+m}$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \subset \mathbb{R}^n, \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \subset \mathbb{R}^m, \qquad Z = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \\ y_1 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix} \eqqcolon \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

$$E \subset \mathbb{R}^{n+m} \text{ – откр.}, \qquad F : E \to \mathbb{R}^n, \qquad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{F \in \mathcal{C}^1(E)}$$

$Z_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \in E$ такая, что $\boldsymbol{F(Z_0)=\mathbb{O}_n}$, $\quad f_j(Z) = f_j\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right)$, $\quad \det \boldsymbol{\mathcal{D}F(Z_0) \neq 0}$

$$\implies \exists \underset{\text{окрестность}}{W(Y_0)} \subset \mathbb{R}^n, \quad \exists! g : W \to \mathbb{R}^n : \begin{cases} g \in \mathcal{C}^1(W) \\ g(Y_0) = X_0 \\ \forall\, Y \in W & \begin{cases} \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix} \in E \\ F\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right) = \mathbb{O}_n \end{cases} \end{cases}$$

Доказательство. Выпишем матрицу Якоби для F:

$$\mathcal{D}F(Z_0) = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(Z_0) & \dots & f'_{1x_n}(Z_0) & f'_{1y_1}(Z_0) & \dots & f'_{1y_m}(Z_0) \\ . & . & . & . & . & . \\ f'_{nx_1}(Z_0) & \dots & f'_{nx_n}(Z_0) & f'_{ny_1}(Z_0) & \dots & f'_{ny_m}(Z_0) \end{bmatrix}$$

1. Построение g, W, E

   Определим отображение $\Phi(Z) \coloneqq \begin{bmatrix} F(Z) \\ Y \end{bmatrix}$

$$\Phi : E \to \mathbb{R}^{n+m}$$

$$\Phi(Z) = \Phi\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} F\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) \\ Y \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \varphi_1(Z) \\ \vdots \\ \varphi_{n+m}(Z) \end{bmatrix}$$

$$\varphi_k\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} y_{k-n}, & k > n \\ f_k\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right), & 1 \le k \le n \end{cases}$$

$$\Phi \in \mathcal{C}^1(E)$$

   Временно обозначим $x_{n+k} \coloneqq y_k$

   Напишем матрицу Якоби для Φ:

$$\mathcal{D}\Phi\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) = \left[\begin{array}{ccc} \varphi'_{1x_1}(Z) & \dots & \varphi_{1x_{n+m}}(Z) \\ . & . & . \\ \hline . & . & . \\ \varphi'_{n+mx_1}(Z) & \dots & \varphi_{n+m}x_{n+m}{}'(Z) \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccccccc} f'_{1x_1}(Z) & \dots & f'_{1x_n}(Z) & f'_{1y_1}(Z) & \dots & \dots & f'_{1y_m}(Z) \\ . & . & . & . & . & . & . \\ f'_{nx_1}(Z) & \dots & f'_{nx_n}(Z) & f'_{ny_1}(Z) & \dots & \dots & f'_{ny_m}(Z) \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

   (черта стоит после n-го ряда)

   Обозначим

$$A(Z) \coloneqq \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(Z) & \dots & f1x_n{}'(Z) \\ . & . & . \\ f'_{nx_1}(Z) & \dots & f'_{nx_n}(Z) \end{bmatrix}, \qquad B(Z) \coloneqq \begin{bmatrix} f'_{1y_1}(Z) & \dots & f'_{1y_m}(Z) \\ . & . & . \\ f'_{ny_1}(Z) & \dots & f'_{ny_m}(Z) \end{bmatrix}$$

   В этих обозначениях

$$\mathcal{D}F(Z) = \begin{bmatrix} A(Z)B(Z) \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{D}\Phi(Z) = \begin{bmatrix} A(Z) & B(Z) \\ \mathbb{O}_{m\times n} & I_m \end{bmatrix}$$

   Найдём Якобиан Φ:

   Раскладвыая по последней строке, получаем новую матрицу поряка $(m-1)\times(n-1)$

Будем так делать, пока внизу стоит I_m (т. е. m раз)
Останется $A(Z)$:

$$\det \mathcal{D}F(Z) = \det A(Z), \qquad \text{в частности, } \det \mathcal{D}F(Z_0) = \det A(Z_0) \underset{\text{по усл.}}{\neq} 0$$

То есть, матрица Якоби в Z_0 обратима. Значит, к Φ можно применить теорему об обратном отображении
Будем верхним индексом к шарам обозначать, в каком пространстве они находятся

$$\exists\, \mathtt{B}_r^{n+m}(Z_0), \quad V \coloneqq \Phi\Big(\mathtt{B}_r^{n+m}(Z_0)\Big), \qquad \exists\, \Psi : V \to B_r^{n+m}(Z_0), \text{ такое что:}$$

$$\Psi \in \mathcal{C}^1(V)$$

$$\Phi\left(\Psi\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right)\right) = \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \qquad \forall \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \in V, \qquad S \in \mathbb{R}^n, \quad T \in \mathbb{R}^m \tag{105}$$

$$\Psi\left(\Phi\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right)\right) = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \qquad \forall \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \in B_r^{n+m}(Z_0) \tag{106}$$

Обозначим

$$\Psi\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) =: \begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) \\ \lambda\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}$$

(где ψ задаёт первые n столбцов, а λ – оставшиеся m)

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) \\ \lambda\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}\right) \xlongequal{\text{def } \Phi} \begin{bmatrix} F\left(\begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) \\ \lambda\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix}\right) \\ \lambda\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) \end{bmatrix} \underset{(105)}{=\!=\!=} \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \tag{107}$$

$$(107) \implies \lambda\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) = T \tag{108}$$

$$\Psi\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) \xlongequal{\text{def } \Psi, (108)} \begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix}\right) \\ T \end{bmatrix} \tag{109}$$

Рассмотрим случай, когда $S = \mathbb{O}_n$:

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ T \end{bmatrix}\right) \\ T \end{bmatrix}\right) \underset{(109)}{=\!=\!=} \Phi\left(\Psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ T \end{bmatrix}\right)\right) \underset{(105)}{=\!=\!=} \begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ T \end{bmatrix}$$

При этом,

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ T \end{bmatrix}\right) \\ T \end{bmatrix}\right) \xlongequal{\text{def } \Phi} \begin{bmatrix} F\left(\begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ T \end{bmatrix}\right) \\ T \end{bmatrix}\right) \\ T \end{bmatrix}$$

Из последних двух выражений следует, что

$$F\left(\begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ T \end{bmatrix}\right) \\ T \end{bmatrix}\right) = \mathbb{O}_n \tag{110}$$

Из того, что V открытое и $\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \in V$, следует, что

$$\exists\, \rho > 0 : \quad \mathtt{B}_\rho^{n+m}\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y_0 \end{bmatrix}\right) \subset V$$

При этом, если $Y \in \mathtt{B}_\rho^m(Y_0)$, то

$$\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y \end{bmatrix} \in \mathtt{B}_\rho^{n+m}\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y_0 \end{bmatrix}\right)$$

Поэтому (110) выполнено при $T \in \mathtt{B}_\rho^m(Y_0)$
Вспомним про отображение g из формулировки теоремы. Оно действует из некоторого W
Возьмём

$$W \coloneqq \mathtt{B}_\rho^m(Y_0), \qquad E \coloneqq \mathtt{B}_\rho^{n+m}\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y_0 \end{bmatrix}\right), \qquad g(Y) \coloneqq \psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y \end{bmatrix}\right)$$

Тогда мы действительно имеем $g : W \to \mathbb{R}^n$

$$F\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right) \xlongequal{\text{def } g} F\left(\begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y \end{bmatrix}\right) \\ Y \end{bmatrix}\right) \xlongequal[(110)]{} \mathbb{O}_n$$

2. Теперь надо выяснить, чему равно $g(Y_0)$

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} F\left(\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}\right) \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \tag{111}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Psi\left(\Phi\left(\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}\right)\right) \xlongequal[(106)]{} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \\ &\Psi\left(\Phi\left(\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}\right)\right) \xlongequal[(111)]{} \Psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y_0 \end{bmatrix}\right) \xlongequal{\text{def } \Psi} \begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y_0 \end{bmatrix}\right) \\ Y_0 \end{bmatrix} \xlongequal{\text{def } g} \begin{bmatrix} g(Y_0) \\ Y_0 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \implies g(Y_0) = X_0$$

3. Осталось проверить единственность g
Пусть есть другое $g_1 \in \mathcal{C}^1\big(B_\rho^m(Y_0)\big)$, такое что

$$g_1(Y_0) = X_0, \qquad F\left(\begin{bmatrix} g_1(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right) = \mathbb{O}_n$$

$$(106) \implies \Psi\left(\begin{bmatrix} F\left(\begin{bmatrix} g_1(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right) \\ Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} g_1(Y) \\ Y \end{bmatrix}$$

При этом,

$$\Psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \psi\left(\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y \end{bmatrix}\right) \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}$$

Правые части равны, а значит, и левые части равны
Значит, $g_1(Y) = g(Y)$

$\square$

24. Вычисление матрицы Якоби отображения, заданного неявно

$$P(Y) = \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}, \qquad g \in \mathcal{C}^1(W), \qquad P \in \mathcal{C}^1(W)$$

По последнему утверждению из теоремы,

$$F\Big(P(Y)\Big) = \mathbb{O}_n \quad \forall Y \in W$$

$$\implies \mathcal{D}\Big(F\big(P(Y)\big)\Big) = \mathbb{O}_{n\times m}$$

Применим теорему о матрице Якоби суперпозиции:

$$\mathcal{D}F\Big(P(Y)\Big)\mathcal{D}P(Y) = \mathbb{O}_{n\times m} \tag{112}$$

$$\mathcal{D}P(Y) \xlongequal{\text{def } P(Y)} \begin{bmatrix}\mathcal{D}g(Y)\\ I_m\end{bmatrix} \tag{113}$$

Обозначим $Z := P(Y)$

$$\mathcal{D}F(Z) = \Big[A(Z)B(Z)\Big]$$

$$\mathcal{D}F(Z)\mathcal{D}P(Y) \underset{(113)}{=\!=} \Big[A(Z)B(Z)\Big]\begin{bmatrix}\mathcal{D}g(Y)\\ I_m\end{bmatrix} = A(Z)\mathcal{D}g(Y) + B(Z)I_m = A(Z)\mathcal{D}g(Y) + B(Z) \tag{114}$$

$$\underset{(112)}{\implies} A(Z)\mathcal{D}g(Y) + B(Z) = \mathbb{O}_{n\times m} \implies \mathcal{D}g(Y) = -A^{-1}(Z)B(Z)$$

25. Определение условного локального экстремума; теорема о множителях Лагранжа

Определение 8. $E \subset \mathbb{R}^{n\geq 2}$, $\quad M \subset E$, $\quad X_0 \in M$, $\quad f : E \to \mathbb{R}$
Говорят, что X_0 — точка локального экстремума f при условии M, если X_0 — точка локального экстремума функции $f\big|_M$

Определение 9. $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ — открытое, $\quad F : E \to \mathbb{R}^n$, $\quad X_0 \in E$, $\quad f(X_0) = \mathbb{O}_n$, $\quad f : E \to R$
Говорят, что X_0 — точка локального экстремума f при условии $F(X) = \mathbb{O}_n$, если X_0 — точка локального экстремума f при условии $\ker F$

Теорема 18 (о множителях Лагранжа)**.** $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ — открытое, $\quad F \in \mathcal{C}^1\big(E\big)$
$\operatorname{rk} \mathcal{D}F(X) = n \quad \forall X \in E, \quad X_0 \in E : \quad F(X_0) = \mathbb{O}_n$

$$\implies \exists!\Lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) : \quad \text{для } \varphi(X, \Lambda) := f(X) + \Lambda F(X) \qquad \nabla\varphi(X_0, \Lambda) = \mathbb{O}^T_{n+m} \tag{115}$$

Замечание. Числа λ_i называются множителями Лагранжа

Доказательство.

- Существование

  Пусть $X = \begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_{n+m}\end{bmatrix}$, $\quad F = \begin{bmatrix}F_1\\ \vdots\\ F_n\end{bmatrix}$
  Запишем матрицу Якоби для F:

  $$\mathcal{D}F(X) = \begin{bmatrix}F'_{1x_1}(X) & \dots & F'_{1x_{n+m}}(X)\\ . & . & .\\ F'_{nx_1}(X) & \dots & F'_{nx_{n+m}}(X)\end{bmatrix}$$

  По условию, её ранг равен n при любом X. НУО считаем, что не равен нулю "верхний левый" минор, в том числе при X_0:

  $$\begin{vmatrix}F'_{1x_1}(X_0) & \dots & F'_{1x_n}(X_0)\\ . & . & .\\ F'_{nx_1}(X_0) & \dots & F'_{nx_n}(X_0)\end{vmatrix} \neq 0 \tag{116}$$

  Обозначим $X' := \begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$, $\quad Y = \begin{bmatrix}x_{n+1}\\ \vdots\\ x_{n+m}\end{bmatrix}$

Определим матрицы A и B так же, как в теореме о неявном отображении, то есть так, что

$$\mathcal{D}F(X) = \Big[A(X)B(X)\Big], \qquad \det A(X_0) \neq 0$$

Обозначим $X_0' \coloneqq \begin{bmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} x_{n+1}^0 \\ \vdots \\ x_{n+m}^0 \end{bmatrix}$

По теореме о неявном отображении

$$\exists\, W \ni Y_0, \qquad \exists!\, g : W \to \mathbb{R}^n : \quad g \in \mathcal{C}^1\big(W\big), \quad F\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right) = \mathbb{O}_n \quad \forall\, Y \in W \tag{117}$$

Из единственности g следует, что

$$\exists U \subset E \subset \mathbb{R}^{n+m},\ X_0 \in U : \quad \forall X \in U \quad \left(F(X) = \mathbb{O}_n \iff X = \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}, \quad Y \in W\right)$$

X из условия теоремы подходит под правое условие, значит,

$$\varphi(X, \Lambda) \xlongequal{\text{def } \varphi} f(X) + \Lambda F(x) = f(X) + \Lambda \mathbb{O}_n = f(X)$$

$$\text{То есть, } X_0 \text{ — т. лок. экстеремума функции } \varphi(X, \Lambda) \quad \forall \Lambda \text{ при условии } F(X) = \mathbb{O}_n \tag{118}$$

Возьмём $Y \in W$

Рассмотрим функцию

$$h(Y, \Lambda) \coloneqq \varphi\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}, \Lambda\right) = f\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right) + \Lambda F\left(\begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}\right), \qquad Y_0 \in W \tag{119}$$

$$\varphi(X, \Lambda) \xlongequal[\text{при } X \in U \text{ и } F(X) = \mathbb{O}_n]{} h(Y, \Lambda), \qquad \text{где } X = \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}$$

Вместе с (118) это означает, что Y_0 — точка локального экстремума $h(Y)$ (без условий)

Для h действует необходиомое условие локального экстремума:

$$\nabla h(Y_0, \Lambda) = \mathbb{O}_m^T$$

Рассмотрим теперь h как отображение в $\mathbb{R}^1$

Его градиент будет матрицей Якоби $n \times 1$:

$$\mathcal{D}h(Y_0, \Lambda) = \nabla h(Y_0, \Lambda) = \mathbb{O}_m^T \tag{120}$$

Определим отображение $P(Y) \coloneqq \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}$

Возьмём $Y \in W$

$$h(Y, \Lambda) \xlongequal[(119)]{} f\Big(P(Y)\Big) + \Lambda F\Big(P(Y)\Big)$$

$$\implies \mathcal{D}h(Y, \Lambda) = \mathcal{D}\Big(f\big(P(Y)\big)\Big) + \Lambda \mathcal{D}\Big(F\big(P(Y)\big)\Big) \tag{121}$$

Вспомним, чему равны матрицы Якоби суперпозиции:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{D}\Big(f\big(P(Y)\big)\Big) &= \mathcal{D}f\Big(P(Y)\Big) \cdot \mathcal{D}P(Y) \\ \mathcal{D}\Big(F\big(P(Y)\big)\Big) &= \mathcal{D}F\Big(P(Y)\Big) \cdot \mathcal{D}P(Y) \end{aligned}\right\} \tag{122}$$

При доказательстве теоремы о неявной функции мы получили, что

$$\mathcal{D}P(Y) = \begin{bmatrix} \mathcal{D}g(Y) \\ I_m \end{bmatrix} \tag{123}$$

$$\mathcal{D}F(X_0) = \Big[A(X_0)B(X_0)\Big]$$

Подставим Y_0 в (121) и (122):

$$P(Y_0) = X_0$$

Снова будем вместо матрицы Якоби писать градиент:

$$\mathcal{D}f(X_0) = \Big(f'_{x_1}(X_0), ..., f'_{x_{x+m}}(X_0)\Big)$$

Запишем его как два градиента:

$$\nabla_1 f(X_0) \coloneqq \Big(f'_{x_1}(X_0), ..., f'_{x_n}(X_0)\Big), \qquad \nabla_2 f(X_0) \coloneqq \Big(f'_{x_{n+1}}(X_0), ..., f'_{x_{n+m}}(X_0)\Big)$$

$$\mathcal{D}f(X_0) = \Big(\nabla_1 f(X_0), \nabla_2 f(X_0)\Big) \tag{124}$$

$$(122) - (123) \implies \mathbb{O}_m^T \underset{(120)}{=\!=\!=} \mathcal{D}h(Y_0, \Lambda) \underset{(121)}{=\!=\!=}$$

$$= \underbrace{\Big(\nabla_1 f(X_0), \nabla_2 f(X_0)\Big)}_{(124)} \begin{bmatrix} \mathcal{D}g(Y_0) \\ I_m \end{bmatrix} + \Lambda \Big[A(X_0)B(X_0)\Big] \begin{bmatrix} \mathcal{D}g(Y) \\ I_m \end{bmatrix} =$$

$$= \nabla_1 f(X_0)\underline{\mathcal{D}g(Y_0)} + \nabla_2 f(X_0) + \Lambda\Big(A(X_0)\underline{\mathcal{D}g(Y_0)} + B(X_0)\Big) =$$

$$= \underbrace{\Big(\nabla_1 f(X_0) + \Lambda A(X_0)\Big)} \mathcal{D}g(Y_0) + \nabla_2 f(X_0) + \Lambda B(X_0) \tag{125}$$

Хотим выбрать Λ так, чтобы скобка обратилась в 0:

$$\nabla_1 f(X_0) + \Lambda A(X_0) = \mathbb{O}_m^T$$

$$\Lambda = -\nabla_1 f(X_0) A^{-1}(X_0)$$

При таком Λ выделенная скобка равна 0, а значит из (125) остаётся только

$$\nabla_2 f(X_0) + \Lambda B(X_0) = \mathbb{O}_m^T$$

Вернёмся к полному градиенту:

$$\nabla f(X_0) + \Lambda \Big[A(X_0)B(X_0)\Big] = \mathbb{O}_{n+m}^T$$

"Склеивая" A и B, получаем

$$\nabla f(X_0) + \Lambda \mathcal{D}F(X_0) = \mathbb{O}_{n+m}^T$$

- Единственность
  Возьмём какой-то другой набор Λ

$$\nabla_1 f(X_0) + \Lambda A(X_0) = \mathbb{O}_n^T$$

Так мы определяли Λ, а значит она единственна.

□

Часть II

Функциональные последовательности и ряды

26. Определение равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда

Определение 10. $X, d(x,y)$ — метрическое пространство
$f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), \dots$ — функции, $\quad f_n : X \to \mathbb{R}, \quad n = 1, \dots$
$\{ f_n(x) \}_{n=1}^{\infty}$ — функциональная последовательность

Определение 11. $\{ v_n(x) \}_{n=1}^{\infty}$
Функциональным рядом будем называть символ

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$$

Определение 12. $x_0 \in X$
Будем называть x_0 точкой сходимости последовательности $\{ f_n(x) \}_{n=1}^{\infty}$, если

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) \in \mathbb{R}$$

Точку $x_1 \in X$ будем называть точкой расходимости последовательности $\{ f_n(x) \}_{n=1}^{\infty}$, если предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_1)$ не существует или бесконечен

Определение 13. Определим сумму ряда $\sum v_n(x)$:

$$S_n(x) = v_1(x) + \dots + v_n(x)$$

Будем называть точку $x_0 \in X$ точкой сходимости ряда, если существует конечный предел последовательности $\{ S_n(x) \}_{n=1}^{\infty}$
Аналогично определяется точка расходимости ряда

Замечание. Любая точка для фиксированной последовательности или фиксированного ряда является либо точкой сходимости, либо точкой расходиомости

Определение 14. Множество всех точек сходимости функциональной последовательности или ряда будем называть *множеством сходимости.*

Обозначение. E_0

Множество точек расходимости — множеством расходимости

Обозначение. E_1

Определение 15. $f : X \to \mathbb{R}, \qquad \forall x \in X \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$
Говорят, что функциональная последовательность **поточечно** сходится к $f(x)$

Определение 16. $S : X \to \mathbb{R}, \qquad \forall x \in X \quad S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} S(x)$
Говорят, что функциональный ряд **поточечно** сходится к S

Определение 17. $f_n(x)$ **равномерно** на X сходится (стремится) к $f(x)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначение. $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{x\in X} f(x)$

Определение 18. Будем говорить, что функциональный ряд **равномерно** сходится на X к сумме $S(x)$, если

$$S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{x\in X} S(x)$$

Тогда ряду приписывается значение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) := S(x)$$

27. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда

Теорема 19. Для того чтобы функцональная последовательность **равномерно** сходилась на X к некоторой функции f, **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n > N,\ m > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Доказательство.

- Необходимость
  Пусть $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{x\in X} f(x)$
  В таком случае, по определению равномерной сходиомости,

  $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

  Возьмём произвольный $x \in X$

  $$|f_m(x)-f_n(x)| \xlongequal[\pm f(x)]{} \left|\Big(f_m(x)-f(x)\Big)+\Big(f(x)-f_n(x)\Big)\right| \overset{\Delta}{\leq} |f_m(x)-f(x)|+|f(x)-f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- Достаточность
  Фиксируем $x \in X$
  Получаем **числовую** последовательность $\{\, f_n(x) \,\}_{n=1}^{\infty}$
  По критерию Коши для числовых последовательностей, она имеет конечный предел:

  $$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$$

  То есть, любая точка из X является точкой сходимости:

  $$E_0 = X$$

  Получается, что $f_n(x)$ поточечно сходится к $f(x)$ на X:

  $$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \tag{126}$$

  При фиксированных x и ε имеем

  $$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

  Фиксируем $\forall m > N$ и переходим к пределу по n:

  $$\lim_{n\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \xRightarrow[(126)]{} |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

  Т. к. мы брали $\forall m > N$ и $\forall x \in X$, это и есть определение равномерной сходимости

$\square$

Теорема 20. Имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x), \qquad x \in X$$

Для того чтобы он **равномерно** сходился, **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall m > n > N \quad \forall x \in X \quad \left| \sum_{k=n+1}^{m} v_k(x) \right| < \varepsilon \tag{127}$$

Доказательство. По определению равномерная сходимость функционального ряда означает, что равномерно сходится последовательность $\{ S_n(x) \}_{n=1}^{\infty}$
Применяя к ней критерий Коши, получаем, что для её равномерной сходимости необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall m > n > N \quad \forall x \in X \quad |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$$

Это и есть условие (127) □

28. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов

Теорема 21. Имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \tag{128}$$

$$\exists\, c_n : \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ сходится} \tag{129}$$

$$|v_n(x)| \le c_n \quad \forall x \in X \tag{130}$$

Тогда ряд (128) сходится **равномерно**

Доказательство. Вспомним критерий Коши для числовых рядов:
Возьмём $\forall \varepsilon > 0$

$$(129) \implies \exists N : \quad \forall m > n > N \quad \sum_{k=n+1}^{m} c_k < \varepsilon \tag{131}$$

> **Примечание.** Мы не ставим модуль, поскольку c_k положительные

Зафиксируем эти m, n, N и возьмём $\forall x \in X$

$$(131) \implies \left| \sum_{k=n+1}^{m} v_k(x) \right| \overset{\triangle}{\le} \sum_{k=n+1}^{m} |v_k(x)| \underset{(130)}{\le} \sum_{k=n+1}^{m} c_k \underset{(131)}{<} \varepsilon$$

Применяем критерий Коши для функционального ряда □

29. Признак Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов

Теорема 22. Имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) v_n \tag{132}$$

$$b_n \text{ монотонна по } n \quad \forall \text{ фиксированного } x \in X \tag{133}$$

$$b_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{x\in X} 0 \tag{134}$$

Примечание. Имеется в виду функция $0_X : X \to \mathbb{R}$ такая, что $0_X(x) = 0 \quad \forall x \in X$

$$\exists\, c > 0 : \quad \forall n \quad \forall x \in X \quad \left|\sum_{k=1}^{n} v_k(x)\right| \le c \tag{135}$$

Тогда ряд (132) **равномерно** сходится на X

Доказательство. Возьмём $\forall \varepsilon > 0$

$$(134) \implies \exists\, N : \quad \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |b_n(x)| < \varepsilon \tag{136}$$

$$\forall m > n \ge 1 \quad \left|\sum_{k=n+1}^{m} v_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} v_k(x) - \sum_{k=1}^{n} v_k(x)\right| \overset{\Delta}{\le} \sum_{k=1}^{m} |v_k(x)| - \sum_{k=1}^{n} |v_k(x)| \underset{(135)}{\le} c + c = 2c \tag{137}$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=n+1}^{m} b_k(x) v_k(x)$$

Определим

$$V_n(x) :\equiv 0$$

$$V_{n+1}(x) \coloneqq v_{n+1}(x)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$V_l(x) = v_{n+1}(x) + \dots + v_l(x), \qquad n+1 < l \le m$$

Тогда $v_k(x) = V_k(x) - V_{k-1}(x), \quad k \ge n+1$
Перепишем нашу сумму:

$$\sum_{k=n+1}^{m} b_k(x) v_k(x) = \sum_{k=n+1}^{m} b_k(x)\Big(V_k(x) - V_{k-1}(x)\Big) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{m} b_k(x) V_k(x) - \sum_{k=n+1}^{m} b_k(x) V_{k-1}(x) \xlongequal[\text{во второй сумме заменим } k-1 \text{ на } k]{}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{m} b_k(x) V_k(x) - \sum_{k=n}^{m-1} b_{k+1}(x) V_k(x) \xlongequal[V_n \overset{\text{def}}{=} 0]{} b_m(x) V_m(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1} \Big(b_k(x) - b_{k+1}(x)\Big) V_k(x) \tag{138}$$

$$(137) \implies |V_k(x)| \le 2c \quad \forall k \tag{139}$$

Возьмём N из (136), $m > n > N$ и $\forall x \in X$

$$(138) \implies \left|\sum_{k=n+1}^{m} b_k(x) v_k(x)\right| \le |b_m(x)| \cdot |V_m(x)| + \sum_{k=n+1}^{m-1} |b_k(x) - b_{k+1}(x)| \cdot |V_k(x)| <$$

$$< \varepsilon \cdot 2c + 2c \sum_{k=n+1}^{m-1} |b_k(x) - b_{k+1}(x)| \xlongequal[(133)]{} 2c\varepsilon + 2c\left|\sum_{k=n+1}^{m-1} \Big(b_k(x) - b_{k+1}(x)\Big)\right| = 2c\varepsilon + 2c|b_{n+1}(x) - b_m(x)| \le$$

$$\le 2c\varepsilon + 2c\Big(\underbrace{|b_{n+1}(x)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|b_m(x)|}_{<\varepsilon}\Big) < 6c\varepsilon$$

Можно применить критерий Коши ∎

30. Признак Абеля равномерной сходимости функциональных рядов

Теорема 23. Имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) v_n(x) \tag{140}$$

$$b_n(x) \text{ монотонна по } n \quad \forall x \in X \tag{141}$$

$$\exists\, c > 0: \quad |b_n(x)| \le c \quad \forall n \quad \forall x \in X \tag{142}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \text{ равномерно сходится на } X \tag{143}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{ряд (144) равномерно сходится} \tag{144}$$

Доказательство. Применим необходимую часть критерия Коши к условию (143):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N: \quad \forall m > n > N \quad \forall x \in X \quad \left| \sum_{k=n+1}^{m} v_k(x) \right| < \varepsilon \tag{145}$$

Возьмём какое-нибудь $m_0 > n > N$
Соотношение (145) действует при $m = n+1, ..., m_0$
Определим функции $V_k(x)$ так же, как в доказательстве признака Дирихле
Там было доказано, что

$$\sum_{k=1}^{m_0} b_k(s) v_k(x) = \sum_{k=n+1}^{m_0-1} V_k(x) \Big(b_k(x) - b_{k+1}(x) \Big) + b_{m_0}(x) V_{m_0}(x) \tag{146}$$

$$(146), (145) \implies \left| \sum_{k=n+1}^{m_0} b_k(x) v_k(x) \right| \le \left| \sum_{k=n+1}^{m_0-1} V_k(x) \Big(b_k(x) - b_{k+1}(x) \Big) \right| + |b_{m_0}(x)| \cdot |V_{m_0}(x)| \le$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{m_0-1} |V_k(x)| \cdot \Big| b_k(x) - b_{k+1} \Big| + |b_{m_0}(x) V_{m_0}(x)| \le \underbrace{|b_{m_0}(x)|}_{\le c} \varepsilon + \varepsilon \sum_{k=n+1}^{m_0-1} |b_k(x) - b_{k+1}(x)| \le$$

$$\le c\varepsilon + \varepsilon \left| \sum_{k=n+1}^{m_0-1} \Big(b_k(x) - b_{k+1} \Big) \right| = c\varepsilon + \varepsilon |b_{n+1}(x) - b_{m_0}(x)| \le 3c\varepsilon \implies (144)$$

□

31. Теорема о переходе к пределу в равномерно сходящейся функциональной последовательности

Теорема 24. $X, \mathrm{d}(x,y)$ — метрическое пространство, $x_0 \in X$ — точка сгущения X
$\{ f_n(x) \}_{n=1}^{\infty}$, $f_n : X \setminus \{ x_0 \} \to \mathbb{R}$, $f : X \setminus \{ x_0 \} \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{x \in X \setminus \{ x_0 \}} f(x) \tag{147}$$

$$\forall x \in X \setminus \{ x_0 \} \quad \exists \lim_{x \to x_0} f_n(x) = a_n \tag{148}$$

$$\implies \begin{cases} \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R} & (149) \\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) & (150) \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A & (151) \end{cases}$$

Доказательство. Применим критерий Коши к (147):

$$\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall m, n > N \quad \forall x \in X \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \tag{152}$$

Зафиксируем всё, кроме x, а x устремим к x_0:

$$\implies \lim_{x\to x_0} |f_m(x) - f_n(x)| \le \varepsilon \tag{153}$$

$$\underset{(148)}{\implies} |a_m - a_n| \le \varepsilon \tag{154}$$

$$\implies \exists \lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$$

(149) доказано
Докажем (151) (из него будет следовать (150)):
Возьмём $\forall \varepsilon > 0$
Выберем N_1 такое, что

$$\forall n > N \quad \forall x \in X \setminus \{ x_0 \} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{155}$$

Выберем N_2 такое, что

$$\forall n > N_2 \quad |a_n - A| < \varepsilon \tag{156}$$

Выберем $N_0 \coloneqq \max\{ N_1, N_2 \} + 1$

Замечание. N_1, N_2, N_0 зависят от ε

Выберем $\delta > 0$ такое, что

$$\forall y \in X \setminus \{ x_0 \} \quad \Big(\mathrm{d}(y, x_0) < \delta \implies |f_{N_0}(y) - A_{N_0}| < \varepsilon \Big) \tag{157}$$

Замечание. δ зависит **только** от ε

$$f(y) - A \underset{\substack{\pm f_{N_0}(y) \\ \pm a_{N_0}}}{=\!=\!=\!=} f(y) - f_{N_0}(y) + f_{N_0}(y) - a_{N_0} + a_{N_0} - A$$

$$\implies |f(y) - A| \overset{\triangle}{\le} \underbrace{|f(y) - f_{N_0}(y)|}_{\underset{(147)}{<\varepsilon}} + \underbrace{|f_{N_0}(y) - a_{N_0}|}_{\underset{(157)}{<\varepsilon}} + \underbrace{|a_{N_0} - A|}_{\underset{(156)}{<\varepsilon}} < 3\varepsilon \implies (151)$$

□

32. Теорема о непрерывности в точке предела равномерно сходящейся функциональной последовательности и суммы равномерно сходящегося функционального ряда

Следствие (о непрерывности предельной функции равномерно сходящейся функциональной последовательности). $X, \quad x_0 \in X, \quad f_n : X \to \mathbb{R}, \quad f_n(x)$ непрерывна в $x_0 \quad \forall n$

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{x \in X} f(x) \tag{158}$$

$$\implies f(x) \text{ непрерывна в } x_0 \quad \forall n \tag{159}$$

Доказательство. Непрерывность f_n означает, что

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \underbrace{f_n(x_0)}_{a_n} \in \mathbb{R}$$

То есть, выполнено второе условие из теоремы

$$(158) \implies f_n(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0) \tag{160}$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) \overset{}{\underset{(160)}{=\!=\!=}} f(x_0)$$

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n = f(x_0)$$

□

Следствие. X всюду плотно, $\quad f_n \in \mathcal{C}(X), \quad f_n(x) \overset{x\in X}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x)$

$$\implies f \in \mathcal{C}(X)$$

Теорема 25. X — метрическое пространство, $\quad \{ v_n(x) \}_{n=1}^{\infty}, \quad$ имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) = S(x) \tag{161}$$

1. $x_0 \in X$ — точка сгущения, $\quad$ (161) сходится равномерно на $X \setminus \{ x_0 \}$, $\quad \forall n \quad \exists \lim\limits_{x\to x_0} v_n(x) = c_n$

$$\implies \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ сходится} \\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} S(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \lim\limits_{x\to x_0} S(x) \end{cases}$$

2. (161) сходится равномерно на всём X, $\quad v_n$ непр. в $x_0 \quad \forall n$

$$\implies S(x) \text{ непр. в } x_0$$

3. X всюду плотно, $\quad$ (161) сходится равномерно на всём X, $\quad v_n \in \mathcal{C}(X) \quad \forall n$

$$\implies S \in \mathcal{C}(X)$$

Доказательство. $S_n(x) = v_1(x) + \dots + v_n(x)$
Равномерная сходимость ряда (161) по определению означает, что

$$S_n(x) \overset{x\in X\setminus\{ x_0 \}}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} S(x)$$

Применима аналогичная теорема для функциональных последовательностей □

33. Интегрирование равномерно сходящейся функциональной последовательности и равномерно сходящегося функционального ряда

Теорема 26. $\{ f_n(x) \}_{n=1}^{\infty}$, $\quad f_n \in \mathcal{C}\big([a,b]\big)$, $\quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{x\in[a,b]} f(x)$

> **Замечание.** В таком случае $f \in \mathcal{C}\big([a,b]\big)$, а значит $f \in \mathcal{R}[a,b]$

$$\Longrightarrow \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}\,x \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Доказательство. Равномерная сходимость означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N: \quad \forall n > N \quad \forall x \in [a,b] \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{162}$$

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}\,x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \right| = \left| \int_a^b \Big(f_n(x) - f(x) \Big)\,\mathrm{d}\,x \right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}\,x \overset{}{\underset{(162)}{=\!=}} \int_a^b \varepsilon\,\mathrm{d}\,x = \varepsilon(b-a)$$

Это и есть определение сходимости требуемой числовой последовательности $\square$

Теорема 27 (интегрирование функционального ряда). $\{ v_n(x) \}_{n=1}^{\infty}$, $\quad v_n \in \mathcal{C}\big([a,b]\big)$
$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ равномерно сходится на $[a,b]$

$$\Longrightarrow \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b v_n(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Доказательство. Обозначим

$$c_n \coloneqq \int_a^b v_n(x)\,\mathrm{d}\,x, \qquad B_n \coloneqq c_1 + \dots + c_n, \qquad S_n(x) \coloneqq v_1(x) + \dots + v_n(x), \qquad S(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$$

По определению равномерной сходимости ряда,

$$S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{x\in[a,b]} S(x)$$

Отсюда, по только что доказанной теореме,

$$\left.\begin{aligned} &\textstyle\int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}\,x \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}\,x \\ &\textstyle\int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b \Big(v_1(x) + \dots + v_n(x) \Big)\,\mathrm{d}\,x = B_n \end{aligned}\right\} \Longrightarrow B_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$\square$

34. Дифференцирование равномерно сходящейся функциональной последовательности и равномерно сходящегося функционального ряда

Теорема 28. $\{ f_n(x) \}_{n=1}^{\infty}$

$$\forall n \quad \forall x \in [a,b] \quad \exists f_n'(x) \tag{163}$$

$$\exists \varphi(x) : [a,b] \to \mathbb{R} : \quad f_n'(x) \xrightarrow[n\to\infty]{x\in[a,b]} \varphi(x) \tag{164}$$

$$\exists x_0 \in [a,b] : \quad \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) \in \mathbb{R} \tag{165}$$

$$\implies \exists\, f : [a,b] \to \mathbb{R} : \quad \begin{cases} f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{x\in[a,b]} f(x) & (166) \\ \forall x \in [a,b] \quad \exists\, f'(x) & (167) \\ f'(x) = \varphi(x) & (168) \end{cases}$$

Доказательство.

- Возьмём $m \neq n$
  Определим функции:

$$P_{mn}(x) \coloneqq f_m(x) - f_n(x)$$

$$(163) \implies \exists\, P'_{mn}(x) = f'_m(x) - f'_n(x) \tag{169}$$

Значит, к P_{mn} можно применить теорему Лагранжа:

$$\forall x \in [a,b] : x \neq x_0 \quad \exists\, c \in (x \between x_0) : \quad P_{mn}(x) - P_{mn}(x_0) = P'_{mn}(c)(x - x_0) \underset{(169)}{=\!=} \\ = \Big(f'_m(c) - f'_n(c)\Big)(x - x_0) \tag{170}$$

К функциональной последовательности производных применим необходимую часть критерия Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_1 : \quad \forall m > n > N_1 \quad \forall x \in [a,b] \quad |f'_m(x) - f'_n(x)| < \varepsilon \tag{171}$$

$$\underset{(170)}{\implies} \forall m > n > N_1 \quad \forall x \in [a,b], x \neq x_0 \quad |P_{mn}(x) - P_{mn}(x_0)| = \\ = |f'_m(c) - f'_n(c)| \cdot |x - x_0| < \varepsilon(b-a) \tag{172}$$

По условию (165) мы можем применить критерий Коши к $f_n(x_0)$:

$$\exists\, N_2 : \quad \forall m > n > N_2 \quad |f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

Применим обозначение P_{mn}:

$$\forall m > n > N_2 \quad |P_{mn}(x_0)| < \varepsilon \tag{173}$$

Пусть $N \coloneqq \max\{\, N_1, N_2 \,\}$. При $m > n > N$ действуют и (172), и (173):

$$\forall x \in [a,b], x \neq x_0 \quad |P_{mn}(x)| = |P_{mn}(x) - P_{mn}(x_0) + P_{mn}(x_0)| \overset{\triangle}{\leq} |P_{mn}(x) - P_{mn}(x_0)| + |P_{mn}(x_0)| < \\ < (b-a)\varepsilon + \varepsilon = (b-a+1)\varepsilon$$

При $x = x_0$ это тоже верно (т. к. у нас есть (173)), т. е.

$$\forall x \in [a,b] \quad |f_m(x) - f_n(x)| < (b-a+1)\varepsilon$$

Значит, к функциональной последовательности $f_n(x)$ можно применить критерий Коши:

$$\implies f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{x\in[a,b]} f(x) \tag{174}$$

$$f_n \in \mathcal{C}\big([a,b]\big) \implies f \in \mathcal{C}\big([a,b]\big)$$

- Фиксируем произвольный $x \in [a,b]$
  Рассмотрим

$$g_n : [a,b] \setminus \{\, x \,\} : \quad g_n(y) \coloneqq \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x}, \qquad g : [a,b] \setminus \{\, x \,\} : \quad g(y) \coloneqq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$g_m(y) - g_n(y) = \frac{f_m(y) - f_m(x) - (f_n(y) - f_n(x))}{y - x} = \frac{\big(f_m(y) - f_n(y)\big) - \big(f_m(x) - f_n(x)\big)}{y - x} = \\ = \frac{P_{mn}(y) - P_{mn}(x)}{y - x} \quad (175)$$

Применим теорему Лагранжа:

$$\exists\, c_1 \in (y \between x): \quad P_{mn}(y) - P_{mn}(x) = P'_{mn}(c_1)(y - x)$$

Подставим в (175):

$$g_m(y) - g_n(y) = P'_{mn}(c_1) \tag{176}$$

$$P'_{mn}(c_1) \xlongequal[(169)]{} f'_m(c_1) - f'_n(c_1)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_1: \qquad \text{выполнено (171)}$$

$$\xRightarrow[(176)]{} \forall y \in [a, b] \setminus \{\, x \,\} \quad \forall m > n > N_1 \quad |g_m(y) - g_n(y)| < \varepsilon |y - x| \le \varepsilon(b - a) \tag{177}$$

Применим критерий Коши:

$$\exists\, h: [a, b] \setminus \{\, x \,\}: \quad g_n(y) \xrightarrow[n\to\infty]{y \in [a,b] \setminus \{\, x \,\}} h(y) \tag{178}$$

Зафиксируем $y \in [a, b] \setminus \{\, x \,\}$ и рассмотрим числовую последовательность:

$$\Longrightarrow \; g_n(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} h(y) \tag{179}$$

$$g_n(y) \xlongequal{\text{def } g_n} \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x}$$

$$(174) \implies \begin{cases} f_n(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(y) \\ f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \end{cases} \tag{180}$$

$$(180) \implies g_n(y) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \tag{181}$$

$$(179), (181) \implies h(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \tag{182}$$

$$(178), (182) \implies \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} \xrightarrow[n\to\infty]{y \in [a,b] \setminus \{\, x \,\}} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \tag{183}$$

Вспомним, как мы определяли $g_n(y)$ и $g(y)$:

$$\Longrightarrow \; g_n(y) \xrightarrow[n\to\infty]{y \in [a,b] \setminus \{\, x \,\}} g(y)$$

$$(163) \overset{\text{def } g_n}{\iff} \forall n \quad \exists \lim_{y \to x} g_n(y) = f'_n(x) \tag{184}$$

К последним двум выражениям можно применить теорему о предельном переходе в функциональной последовательности:

$$\exists \lim_{y \to x} g(y) = A, \qquad \exists \lim_{n\to\infty} f'_n(x) \tag{185}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) \tag{186}$$

$$(185) \overset{\text{def } g(y)}{\Longrightarrow} \exists \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(x) = A$$

$$\left.\begin{aligned} &(185),(186) \implies \exists\, f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \\ &(164) \implies \text{для фиксированного } x \in [a,b] \quad f_n'(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(x) \end{aligned}\right\} \implies \varphi(x) = f'(x)$$

□

У этой теоремы имеется вариант для функциональных рядов:

Теорема 29 (о производной функционального ряда). $\{\, v_n(x) \,\}_{,=1}^{\infty} \qquad v_n \in \mathcal{C}\big([a,b]\big)$
$\forall x \in [a,b] \quad \exists\, v_n'(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n'(x) \text{ равномерно сходится на } [a,b] \tag{187}$$

$$\exists\, x_0 \in [a,b] : \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x_0) \text{ сходится} \tag{188}$$

$$\implies \begin{cases} \forall x \in [a,b] \quad \exists \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x) \right)' \\ \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x) \right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n'(x) \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим частичные суммы:

$$S_n(x) = v_1(x) + \dots + v_n(x) \quad \forall x \in [a,b] \quad \forall n$$

$$\exists\, S_n'(x) = v_1'(x) + \dots + v_n'(x)$$

$$(187) \implies \exists\, \varphi(x) : \quad S_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$$

$$(188) \implies S_n(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} A \in \mathbb{R}$$

К функциональной последовательности частичных сумм можно применить только что доказанную теорему □

35. Пример Ван дер Вардена

Теорема 30. $\exists\, f \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}\big) : \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \nexists\, f'(x)$

Доказательство (построение ван дер Вардена). Рассмотрим функцию $\varphi(x) \coloneqq 1 - |x-1|$ при $x \in [0,2]$ (рис. 3a)
При $x \in [2k, 2k+2]$, где $k \neq 0 \in \mathbb{Z}$, полагаем $\varphi(x) \coloneqq \varphi(x-2k)$ (рис. 3b)

$$f(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x) \tag{189}$$

- Проверим непрерывность $f(x)$:
  Воспользуемся признаком Вейерштрасса:

  Очевидно, что. $\varphi(4^n x) \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}\big)$

  При этом, $0 \le \varphi(x) \le 1$

  $$\implies \left(\frac{3}{4}\right)^n |\varphi(4^n x)| = \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x) \le \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4$$

Значит, ряд (189) равномерно сходится на $\mathbb{R}$
Значит, и его сумма непрерывна

- Докажем, что производной не существует:
  Доказывать будем **от противного**. Пусть есть точка, в которой существует производная:

$$\exists\, x \in \mathbb{R}: \quad \exists\, f'(x) \tag{190}$$

Это эквивалентно тому, что она дифференцируема в этой точке:

$$f(y) - f(x) = f'(x)(y-x) + r(y) \tag{191}$$

$$\text{где } \frac{|r(y)|}{|y-x|} \xrightarrow[y \in x]{} 0 \tag{192}$$

$$(192) \overset{\text{def lim}}{\Longrightarrow} \exists\, \delta > 0: \quad \forall y \in [x-\delta, x+\delta] \quad \frac{|r(y)|}{|y-x|} \le 1 \tag{193}$$

$$(191),(193) \implies \forall y \in [x-\delta, x+\delta] \quad |f(y)-f(x)| \le |f'(x)| \cdot |y-x| + |r(y)| \le$$
$$\le \underbrace{\Big(|f'(x)| + 1\Big)}_{=:A} |y-x| = A|y-x| \tag{194}$$

Рассмотрим $x - \delta \le y_1 \le x \le y_2 \le x + \delta$

$$(194) \implies |f(y_2) - f(x)| \le A(y_2 - x) \tag{195}$$

$$(194) \implies |f(x) - f(y_1)| \le A(x - y_1) \tag{196}$$

$$(195),(196) \implies |f(y_2) - f(y_1)| = \left| \Big(f(y_2) - f(x)\Big) + \Big(f(x) - f(y_1)\Big) \right| \overset{\triangle}{\le}$$
$$\le |f(y_2) - f(x)| + |f(x) - f(y_1)| \le A(y_2 - x) + A(x - y_1) = A(y_2 - y_1)$$

Выберем $m \ge 1$ так, что

$$4^m > \frac{1}{\delta}$$

Рассмотрим число $4^m x$
Так как это какое-то конкретное вещественное число, то

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}: \quad k \le 4^m x < k+1$$

$$\implies \underbrace{k \cdot 4^{-m}}_{=:a_m} \le x < \underbrace{(k+1) \cdot 4^{-m}}_{=:b_m} \tag{197}$$

$$b_m - a_m \overset{\text{def}}{=} 4^{-m} \tag{198}$$

  - Возьмём $n > m$

    $$4^n x = 4^{n-m} \cdot 4^m x$$

    (это справедливо для любого n)
    Рассмотрим числа $4^n a_m$ и $4^n b_m$

    $$4^n a_m = 4^{n-m} \cdot 4^m a_m = 4^{n-m} \cdot k$$

$$4^n b_m = 4^{n-m}\cdot 4^m b_m = 4^{n-m}(k+1) = \underbrace{4^{n-m}k}_{4^n a_m} + \underbrace{4^{n-m}}_{\text{чётное}}$$

$$\implies \varphi(4^n b_m) = \varphi(4^n a_m + \text{ чётное}) = \varphi(4^n a_m) \tag{199}$$

(т. к. у функциии φ период 2)

– Если $n = m$

$$4^m a_m = k, \qquad 4^m b_m = k+1$$

$$\varphi(4^m b_m) - \varphi(4^m a_m) = \varphi(k+1) - \varphi(k) \tag{200}$$

Посмотрев на график φ, видим, что для всякого целого k

$$|\varphi(k+1) - \varphi(k)| = 1 \tag{201}$$

– Пусть $0 < n < m$

$$4^n b_m - 4^n a_n = 4^{n-m}4^m(b_m - a_m) = 4^{n-m} \tag{202}$$

Запишем некоторые свойства $\varphi(x)$, которые видно из графика, но можно доказать и аналитически:

$$\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad |\varphi(y_2) - \varphi(y_1)| \le |y_2 - y_1| \tag{203}$$

Рассмотрим выражение

$$f(b_m) - f(a_m) \xlongequal{\text{def } f} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n b_m) - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n b_m) =$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \Big(\varphi(4^n b_m) - \varphi(4^n a_m)\Big) + \left(\frac{3}{4}\right)^m \Big(\varphi(4^m b_m) - \varphi(4^m a_m)\Big) +$$

$$+ \sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \Big(\underbrace{\varphi(4^n b_m) - \varphi(4^n a_m)}_{=0 \text{ по } (199)}\Big) =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^m \Big(\varphi(4^m b_m) - \varphi(4^m a_m)\Big) + \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \Big(\varphi(4^n b_m) - \varphi(4^n a_m)\Big)$$

$$\implies |f(b_m) - f(a_m)| \ge$$

$$\ge \left(\frac{3}{4}\right)^m |\varphi(4^m b_m) - \varphi(4^m a_m)| - \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n |\varphi(4^n b_m) - \varphi(4^n a_m)| \underset{(200),(203)}{\ge}$$

$$\ge \left(\frac{3}{4}\right)^m |\varphi(k+1) - \varphi(k)| - \sum_{n=0}^{m-1} |4^n b_m - 4^n a_m| \xlongequal[(201),(202)]{} \left(\frac{3}{4}\right)^m \cdot 1 - \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 4^{n-m} =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^m - 4^{-m}\sum_{n=0}^{m-1} 3^n \xlongequal[\text{геом. прогр.}]{} \left(\frac{3}{4}\right)^m - 4^{-m}\cdot\frac{3^m - 1}{3-1} > \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^m \tag{204}$$

При этом, $a_m \le x < b_m$, поэтому

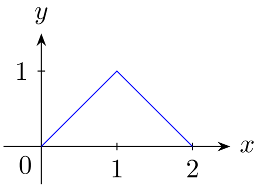
$$|f(b_m) - f(a_m)| \underset{(194)}{\le} A(b_m - a_m) \xlongequal[(198)]{} A\cdot 4^{-m}$$

$$\xRightarrow[(204)]{} 4^{-m} > \frac{1}{2}\cdot 3^m \cdot 4^{-m} \quad \implies \quad \frac{1}{2}\cdot 3^m < A$$

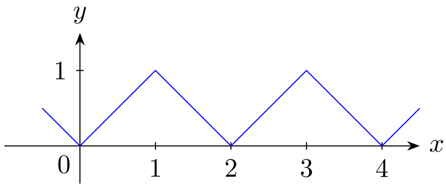
При этом, A не зависит от m, а условие на m позволяет нам брать произвольно большие m, в том числе такое, что

$$\frac{1}{2}\cdot 3^m > A - \lightning$$

$\square$



(a) Шаг 1



(b) Шаг 2

36. Определение равномерной сходимости семейства функций; критерий Коши равномерной сходимости семейства функций

Определение 19. y_0 — т. сг. Y, $\quad f : E \times Y \to \mathbb{R}$, $\quad f_0 : E \to \mathbb{R}$
Будем говорить, что семейство функций **равномерно** сходится к f_0 при $y \to y_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \,\text{окрест. } U(y_0): \quad \forall x \in E \qquad \forall y \in \Big(U(y_0) \cap Y\Big) \setminus \{\, y_0 \,\} \quad |f(x,y) - f_0(x)| < \varepsilon$$

Обозначение. $f(x,y) \underset{y \to y_0}{\overset{x \in E}{\rightrightarrows}} f_0(x)$

Теорема 31 (Критерий Коши равномерной сходимости семейства функций).
$f : E \times Y \to \mathbb{R}$, $\qquad y_0$ — т. сг. Y
Для того, чтобы семейство функций равномерно сходилось к некоторой функции f_0 **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \,\text{окрест. } U(y_0): \quad \forall y_1, y_2 \in \Big(U(y_0) \cap Y\Big) \setminus \{\, y_0 \,\} \quad \forall x \in E \quad |f(x,y_2) - f(x,y_1)| < \varepsilon \tag{205}$$

Доказательство.

- Необходимость:
Пусть семейство функций $f : E \times Y \to \mathbb{R}$ равномерно сходится к f_0 при $y \to y_0$
По определению это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \,\text{окр. } U(y_0): \quad \forall y_1, y_2 \in \Big(U(y_0) \cap Y\Big) \setminus \{\, y_0 \,\} \quad |f(x, y_{1,2}) - f_0(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies |f(x,y_2) - f(x,y_1)| \overset{\triangle}{\leq} |f(x,y_2) - f_0(x)| + |f_0(x) - f(x,y_1)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- Достаточность
Фиксируем $x \in E$
Применяя критерий Коши к функции одного аргумента $f(x,y)$, получаем, что $\exists \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) \coloneqq f_0(x)$
Возьмём $\forall \varepsilon > 0$, выберем окрестность $U(y_0)$
Возьмём $\forall y_1, y_2 \in \Big(U(y_0), \cap Y\Big) \setminus \{\, x_0 \,\}$ и зафиксируем y_1

$$\lim_{y_2 \to y_0} |f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq \varepsilon$$

$$|f_0(x) - f(x,y_1)| \xlongequal{\text{def } f_0} \left| \lim_{y_2 \to y_0} \Big(f(x,y_2) - f(x,y_1)\Big) \right| \xlongequal[\text{непр. } |\cdot|]{} \lim_{y_2 \to y_0} |f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq \varepsilon$$

Значит, $f(x,y)$ равномерно сходится к $f_0(x)$ при $y \to y_0$

$\square$

37. Теорема о переходе к пределу в равномерно сходящемся семействе функций

Теорема 32. $f : E \times Y \to \mathbb{R}$, $\quad Y \subset \mathbb{R}^{n\geq 1}$, $\quad y_\circ \in \mathbb{R}^n$ — т. сг. Y, $\quad E$ — метр. пр-во, $\quad x_\circ \in E$ — т. сг. E

$$f(x,y) \xrightarrow[y\to y_0]{x\in E} f_0(x), \qquad \forall y \in Y \quad \exists \lim_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$$

Тогда $\exists \lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y)$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f_0(x)$ и справедливо

$$\lim_{y\to y_0} \varphi(y) = \lim_{x\to x_0} f_0(x)$$

Доказательство. Возьмём любую последовательность $\{\, y_n \,\}_{n=1}^{\infty}$, $\quad y_n \in Y$, $\quad y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0$
Положим $f_n(x) \coloneqq f(x, y_n)$

$$f(x,y) \xrightarrow[y\to y_0]{x\in E} f_0(x) \quad \Longrightarrow \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{x\in E} f_0(x)$$

При этом, по условию теоремы для любого n имеем

$$\varphi(y_n) = \lim_{x\to x_0} f(x, y_n) \overset{\text{def } f_n}{=\!=\!=} \lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

Значит, можно применить теорему о переходе к пределу в равномерно сходящейся функциональной последовательности:

$$\exists \lim_{n\to\infty} \varphi(y_n) \in \mathbb{R}, \qquad \exists \lim_{x\to x_0} f_0(x), \qquad \lim_{n\to\infty} \varphi(y_n) = \lim_{x\to x_0} f_0(x)$$

В силу произвольности $\{\, y_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ и условий, наложенных на y_n в начале, последнее утверждение доказывает теорему. $\square$

38. Непрерывность предельной функции равномерно сходящегося семейства функций

Теорема 33. E, d — метрическое пространство, $\quad x_0 \in E$ — т. сг., $\quad y_0$ — т. сг. $Y \subset \mathbb{R}^n$
$f(x,y) \xrightarrow[y\to y_0]{x\in E} f_0(x)$, $\qquad \forall y \in Y \quad f(x,y)$ непр. в x_0
Тогда $f_0(x)$ непр. в x_0

Доказательство. Применим предыдущую теорему:
По условию имеем $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) \coloneqq \varphi(y) \quad \forall y \in Y$, при этом $\varphi(y) = f(x_0, y)$
По предыдущей теореме $\exists \lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y)$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f_0(x)$ и тогда

$$\lim_{y\to y_0} f(x_0, y) = \lim_{y\to y_0} \varphi(y) = \lim_{x\to x_0} f_0(x)$$

Но $\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0, y) = f_0(x_0)$, что и даёт непрерывность f_0 в x_0 $\square$

Следствие. $f : E \times Y \to \mathbb{R}$, $\qquad f(x,y) \xrightarrow[y\to y_0]{x\in E} f_0(x)$, $\qquad \forall y \in Y \quad f(x,y) \in \mathcal{C}(E)$

$$\Longrightarrow \; f_0 \in \mathcal{C}(E)$$

39. Теорема о непрерывности интеграла, зависящего от параметра

Теорема 34. y_0 — т. сг. Y, $\quad f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{x\in[a,b]}{\rightrightarrows}} f_0(x)$

Тогда $f_0 \in \mathcal{C}\big([a,b]\big)$ и

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}\,x \xrightarrow[y\to y_0]{} \int_a^b f_0(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{206}$$

Доказательство. Непрерывность f_0 следует из следствия к предыдущей теореме, поэтому интеграл в правой части (206) определён
По определению равномерной сходимости,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U(y_0): \quad \forall y \in \Big(U(y_0) \cap Y\Big) \setminus \{\, y_0 \,\} \quad |f(x,y) - f_0(x)| < \varepsilon$$

При таких y имеем

$$|I(t) - \int_a^b f_0(x)\,\mathrm{d}\,x| = \left|\int_a^b \Big(f(x,y) - f_0(x)\Big)\,\mathrm{d}\,x\right| \le \int_a^b |f(x,y) - f_0(x)|\,\mathrm{d}\,x \le \int_a^b \varepsilon\,\mathrm{d}\,x = \varepsilon(b-a)$$

□

Следствие. $Y = [p,q], \quad f : [a,b]\times Y \to \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{C}\big([a,b]\times Y\big)$

$$\implies I(y) \in \mathcal{C}\big([p,q]\big)$$

40. Теорема о производной интеграла, зависящего от параметра

Теорема 35. $f : [a,b]\times Y \to \mathbb{R}, \quad Y = [p,q], \quad f \in \mathcal{C}\big([a,b]\times Y\big)$

$$\forall\ (x,y) \in [a,b]\times Y \quad \exists f'(x,y), \qquad f'_y(x,y) \in \mathcal{C}\big([a,b]\times Y\big)$$

$$\implies \quad \forall y \in [p,q] \quad \exists I'(y), \qquad I'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)\,\mathrm{d}\,x$$

Доказательство. Поскольку f'_y непрерывна, к нейц применима терема Кантора:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall (x_1,y_1),(x_2,y_2): \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} < \delta \qquad |f'_y(x_2,y_2) - f'_y(x_1,y_1)| < \varepsilon$$

Пусть $0 < |h| < \delta$, тогда

$$\exists c \in (y \between y+h): \quad f(x,y+h) - f(x,y) = f'_y(x,c)h$$

$$f(x,y+h) - f(x,y) = f'_y(x,y)h + \Big(f'_y(x,c) - f'_y(x,y)\Big)h \coloneqq f'_y(x,y)h + r_h(x,y)h, \qquad |r_h(x,y)| < \varepsilon \tag{207}$$

$$I(y+h) - I(y) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \Big(f(x,y+h) - f(x,y)\Big)\,\mathrm{d}\,x \overset{}{\underset{(207)}{=\!=}}$$
$$= \int_a^b f'_y(x,y)h\,\mathrm{d}\,x + \int_a^b r_h(x,y)h\,\mathrm{d}\,x = h\int_a^b f'(x,y)\,\mathrm{d}\,x + h\int_a^b r_h(x,y)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\left|h\int_a^b r_h(x,y)\,\mathrm{d}\,x\right| \le |h|\int_a^b |r_h(x,y)|\,\mathrm{d}\,x \le |h|\int_a^b \varepsilon\,\mathrm{d}\,x = |h|\varepsilon(b-a)$$

Отсюда следует, что $I(y)$ дифференцируема в y и выполнено утверждение теоремы □

41. Теорема об интегрировании по параметру интеграла, зависящего от параметра

Теорема 36. $f \in \mathcal{C}\big([a,b]\times[p,q]\big), \qquad I(y) \coloneqq \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}\,x, \quad K(x) \coloneqq \int_p^q f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$

$$\Longrightarrow \int_p^q I(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_a^b K(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Доказательство. По теореме о непрерывности интеграла, $I(y) \in \mathcal{C}\big([a,b]\big)$
Положим

$$\varphi(y_0) \coloneqq \int_p^{y_0} I(y)\,\mathrm{d}\,y, \qquad v(y) \coloneqq \int_a^b l(x,y_0)\,\mathrm{d}\,x, \qquad l(x,y_0) \coloneqq \int_p^{y_0} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

$\varphi \in \mathcal{C}\big([p,q]\big)$, поскольку $I(y) \in \mathcal{C}\big([p,q]\big)$
Поскольку $f \in \mathcal{C}\big([a,b]\times[p,q]\big)$, то она ограничена (по первой теореме Вейерштрасса), т. е.

$$\exists\, M: \quad \forall (x,y) \in [a,b]\times[p,q] \quad |f(x,y)| \le M$$

Поэтому при $y_1, y_2 \in [p,q]$ имеем

$$|f(x,y_2) - l(x,y_1)| = \left| \int_p^{y_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y - \int_p^{y_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y \right| = \left| \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y \right| \le$$
$$\le \left| \int_{y_1}^{y_2} |f(x,y)|\,\mathrm{d}\,y \right| \le |M(y_2-y_1)| = M|y_2-y_1| \tag{208}$$

При фиксированном y_0 функция $l(x,y_0) \in \mathcal{C}\big([a,b]\big)$, поэтому, с учётом (208) имеем

$$l(x,y_0) \in \mathcal{C}\big([a,b]\times[p,q]\big)$$

По определению l, при фиксированном x получаем

$$l'_{y_0}(x,y) = f(x,y_0)$$

$$\Longrightarrow\ l'_{y_0}(x,y) \in \mathcal{C}\big([a,b]\times[p,q]\big)$$

$$\Longrightarrow\ \exists\, v'(y_0), \qquad v'(y_0) = \int_a^b l'_{y_0}(x,y_0)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b f(x,y_0)\,\mathrm{d}\,x = I(y_0)$$

По определению φ,

$$\exists\, \varphi'(y_0), \qquad \varphi'(y_0) = I(y_0)$$

Из последних двух выражений следует, что

$$v'(y_0) = \varphi'(y_0), \qquad y_0 \in [p,q]$$

Подставляя p вместо y_0 получаем

$$\varphi(p) = \int_p^p I(y)\,\mathrm{d}\,y = 0, \qquad v(p) = \int_a^b l(x,p)\,\mathrm{d}\,x$$

$$f(x,p) = \int_p^p f(x,y)\,\mathrm{d}\,y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad v(p) = 0$$

$$\Longrightarrow \int_p^q I(y)\,\mathrm{d}\,y = \varphi(q) = \varphi(q) - \varphi(p) = \int_p^q \varphi'(y_0)\,\mathrm{d}\,y_0 = \int_p^q v'(y_0)\,\mathrm{d}\,y_0 =$$
$$= v(q) - v(p) = v(q) = \int_a^b l(x,q)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b K(x)\,\mathrm{d}\,x$$

□

42. Равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра; критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла от параметра

Пусть $Y \subset \mathbb{R}^{n \geq 1}$, $\quad f : [a, \infty) \times Y \to \mathbb{R}$ — семейство функций
Предположим, что $f \in \mathcal{C}\big([a, \infty) \times Y\big)$ и пусть $A > a$
Определим функцию $F : Y \times [a, \infty)$:

$$f(y, A) \coloneqq \int_a^A f(x, y) \,\mathrm{d}\, x, \qquad y \in Y, \quad A > a$$

Пусть

$$\forall y \in Y \quad \exists \lim_{A \to \infty} F(y, A) =: F_0(y)$$

Определение 20. Будем говорить, что несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x, y) \,\mathrm{d}\, x$ равномерно сходится при $y \in Y$, если

$$F(y, A) \underset{A \to \infty}{\overset{y \in Y}{\rightrightarrows}} F_0(y)$$

Применяя критерий Коши равномерной сходимости семейства функций, получаем следующее утверждение:

Теорема 37. Для того, чтобы несобственнный интеграл $\int_a^\infty f(x, y) \,\mathrm{d}\, x$, зависящий от параметра, равномерно сходился при $y \in Y$, **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists L > a : \quad \forall A_1, A_2 > L \quad \forall y \in Y \quad \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, y) \,\mathrm{d}\, x \right| < \varepsilon$$

Доказательство. Заметим, что

$$F(y, A_2) - F(y, A_1) = \int_a^{A_2} f(x, y) \,\mathrm{d}\, x - \int_a^{A_1} f(x, y) \,\mathrm{d}\, x = \int_{A_1}^{A_2} f(x, y) \,\mathrm{d}\, x$$

□

43. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла от параметра

Теорема 38. $f \in \mathcal{C}\big([a, \infty) \times Y\big)$

$$\forall y \in Y \quad |f(x, y)| \leq g \tag{209}$$

$$\int_a^\infty g(x) \,\mathrm{d}\, x < \infty$$

Тогда несобственный интеграл $\int_a^\infty f(x, y) \,\mathrm{d}\, x$ сходится равномерно при $y \in Y$

Доказательство. Возьмём $\forall \varepsilon > 0$, выберем L так, чтобы $\int_L^\infty g(x) \,\mathrm{d}\, x < \varepsilon$. Тогда

$$\forall y \in Y \quad \forall A_1, A_2 > L \quad \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, y) \,\mathrm{d}\, x \right| \leq \left| \int_{A_1}^{A_2} |f(x, y)| \,\mathrm{d}\, x \right| \underset{(209)}{\leq} \left| \int_{A_1}^{A_2} g(x) \,\mathrm{d}\, x \right| \leq \int_L^\infty g(x) \,\mathrm{d}\, x < \varepsilon$$

По предыдущей теореме

$$\int_a^A f(x, y) \,\mathrm{d}\, x \underset{A \to \infty}{\overset{y \in Y}{\rightrightarrows}} \int_a^\infty f(x, y) \,\mathrm{d}\, x$$

□

44. Признак Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла от параметра

Теорема 39. $f : [a, \infty) \times Y, \qquad Y \subset \mathbb{R}^n, \qquad f \in \mathcal{C}\big([a, \infty) \times Y\big), \qquad g : [a, \infty) \times Y \to \mathbb{R}$

$$\exists\, M : \quad |g(x, y)| \le M \quad \forall x \in [a, \infty) \tag{210}$$

$g(x, y)$ монотонна по x при $\forall y \in Y$

$$\int_a^\infty f(x, y)\,\mathrm{d}\,x \text{ равномерно сх. при } y \in Y \tag{211}$$

$$\implies \int_a^\infty f(x, y) g(x, y)\,\mathrm{d}\,x \text{ равномерно сх. при } y \in Y$$

Доказательство. Возьмём $\forall \varepsilon > 0$ и воспользуемся критерием Коши для несобственных интегралов (условие (211)):

$$\exists\, A > a : \quad \forall A_2 > A_1 > A \quad \forall y \in Y \quad \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, y)\,\mathrm{d}\,x \right| < \varepsilon \tag{212}$$

Утверждение 9. Вторая теорема о среднем справедлива, если f монотонна, а g интегрируема
Мы требовали дифференцируемости g для упрощения доказательства

Применим её:

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x, y) g(x, y)\,\mathrm{d}\,x g(A, y) \int_{A_1}^{c} f(x, y)\,\mathrm{d}\,x + g(A_2, y) \int_c^{A_2} f(x, y)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\implies \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, y) g(x, y)\,\mathrm{d}\,x \right| \le |g(A, y)| \cdot \left| \int_{A_1}^{c} F(x, y)\,\mathrm{d}\,x \right| + |g(A_2, y)| \cdot \left| \int_c^{A_2} f(x, y)\,\mathrm{d}\,x \right| \underset{(210),(212)}{\le}$$
$$\le M \cdot \varepsilon + M \cdot \varepsilon = 2M\varepsilon$$

□

45. Признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла от параметра

Теорема 40. $f \in \mathcal{C}\big([a, \infty) \times Y\big), \qquad g : [a, \infty) \times Y \to \mathbb{R}, \qquad g$ монотонна по x при $\forall y \in Y$

$$g(x, y) \overset{y \in Y}{\underset{x \to \infty}{\rightrightarrows}} 0 \tag{213}$$

$$\exists\, L > 0 : \quad \forall A > a \quad \forall y \in Y \quad \left| \int_a^A f(x, y)\,\mathrm{d}\,x \right| \le L \tag{214}$$

$$\implies \int_a^\infty f(x, y) g(x, y)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится равномерно при } y \in Y$$

Доказательство.

$$\forall A_2 > A_1 > a \quad \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, y)\,\mathrm{d}\,x \right| = \left| \int_a^{A_2} f(x, y)\,\mathrm{d}\,x - \int_a^{A_1} f(x, y)\,\mathrm{d}\,x \right| \overset{\triangle}{\le}$$
$$\le \left| \int_a^{A_2} f(x, y)\,\mathrm{d}\,x \right| - \left| \int_a^{A_1} f(x, y)\,\mathrm{d}\,x \right| \underset{(214)}{\le} 2L \tag{215}$$

По определению равномерной сходимости,

$$(213) \implies \exists\, A > a: \quad \forall A_1 > A \quad \forall y \in Y \quad |g(A_1, y)| < \varepsilon \tag{216}$$

Возьмём $A_2 > A_1 > A$
Воспользуемся второй теоремой о среднем:

$$\exists\, c \in (A_1, A_2): \quad \int_{A_1}^{A_2} f(x,y) g(x,y)\,\mathrm{d}\,x = g(A_1, y) \int_{A_1}^{c} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x + g(A_2, y) \int_{c}^{A_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\implies \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x,y) g(x,y)\,\mathrm{d}\,x \right| \le |g(A_1,y)| \cdot \left| \int_{A_1}^{c} F(x,y)\,\mathrm{d}\,x \right| + |g(A_2,y)| \cdot \left| \int_{c}^{A_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x \right| \underset{(215),(216)}{\le}$$

$$\le 2L\varepsilon + 2L\varepsilon = 4L\varepsilon$$

□

46. Предел несобственного интеграла, зависящего от параметра

Теорема 41. $Y \subset \mathbb{R}^n$, $\quad y_0$ — т. сг. Y (не обязательно $\in Y$), $\quad f \in \mathcal{C}\big([a, \infty) \times Y\big)$

$$I(y) := \int_a^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x \text{ равномерно сходится при } y \in Y \tag{217}$$

$$\forall x \in [a, \infty) \quad \exists\, \varphi(x): \quad f(x,y) \xrightarrow[y \to y_0]{x \in [a, \infty)} \varphi(x) \tag{218}$$

$$\implies \int_a^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится,} \qquad I(y) \xrightarrow[y \to y_0]{} \int_a^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Замечание. Требование (218) можно ослабить:

$$\forall A > a, \quad f(x,y) \xrightarrow[y \to y_0]{x \in [a, A]} \varphi(x)$$

Доказательство. Рассмотрим функции:

$$F(A, y) := \int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}\,x, \qquad \Phi(A) := \int_a^A \varphi(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$(218) \implies \varphi \in \mathcal{C}\big([a, \infty)\big) \tag{219}$$

Значит, функция Φ корректно определена

$$(217) \iff F(a, y) \xrightarrow[A \to \infty]{y \in Y} I(y) \tag{220}$$

Можно применить теорему о функциональной сходимости функционального семейства:

$$(218) \implies \forall A > a \quad \int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}\,x \xrightarrow[y \to y_0]{} \int_a^A \varphi(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{221}$$

В обозначениях F, Φ это означает, что

$$F(A, y) \xrightarrow[y \to y_0]{} \Phi(A) \tag{222}$$

Можно применить теорему о предельном переходе в функциональном семействе:

$$(220), (222) \implies \exists \lim_{y \to y_0} I(y)$$

и

$$\exists \lim_{A\to\infty} \Phi(A), \qquad \lim_{A\to\infty} \Phi(A) = \lim_{y\to y_0} I(y)$$

При этом,

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,\mathrm{d}\,x \overset{\text{def }\Phi}{=\!=} \lim_{A\to\infty} \Phi(A)$$

□

Следствие (непрерывность в точке). $f \in \mathcal{C}\big([a,\infty) \times Y\big), \qquad y_0 \in Y$ — т. сг. Y

$$f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{x\in[a,\infty)}{\rightrightarrows}} f(x,y_0)$$

$$I(y) \coloneqq \int_a^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}\,x \text{ равномерно сходится при } y \in Y$$

$$\implies I(y) \text{ непр. в } y_0$$

Следствие. $f \in \mathcal{C}\big([a,\infty) \times Y\big), \qquad I(y)$ равномерно сходится при $y \in Y$

$$\implies I(y) \in \mathcal{C}\big(Y\big)$$

Рассмотрим $Y = [p,q]$, а равномерную сходимость функционального семейства требовать не будем:

Утверждение 10 (частный случай). $f \in \mathcal{C}\big(Y = [p,q]\big)$
$I(y) \coloneqq \int_a^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$ равномерно сходится при $y \in [p,q]$

$$\implies I(y) \to I(y_0)$$

Доказательство. Рассмотрим

$$F(A,y) \coloneqq \int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$$

Пусть $y_0 \in [p,q]$
f непрерывна на всём произведении, в частности $f(x,y) \in \mathcal{C}\big([a,A] \times [p,q]\big)$
Это — компакт. Значит, f равномерно непрерывна на $[p,q]$

$$\implies f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{x\in[a,A]}{\rightrightarrows}} f(x,y_0)$$

Применяя те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы, получаем, что

$$I(y) \to I(y_0)$$

□

47. Определённый интеграл от интеграла, зависящего от параметра

Теорема 42. $f \in \mathcal{C}\big([a,\infty) \times [p,q]\big)$

$$I(y) \coloneqq \int_a^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}\,x \text{ равномерно сх. при } y \in [p,q]$$

По последнему следствию, $I(y) \in \mathcal{C}\big([p,q]\big)$, и можно рассматривать $\int_p^q I(y)\,\mathrm{d}\,y$

$$K(y) \coloneqq \int_p^q f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

$K(y)$ — собственный интеграл от параметра, значит $k \in \mathcal{C}\big([a,\infty)\big)$

$$\implies \int_a^\infty K(x)\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится}$$

и

$$\implies \int_p^q I(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_a^\infty K(x)\,\mathrm{d}\,x$$

или

$$\int_p^q \left(\int_a^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,y = \int_a^\infty \left(\int_p^q f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,x$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(A,y) = \int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$$

$F \in \mathcal{C}\big([a,A]\times[p,q]\big)$, значит, по теореме об интегрировании "собственного" интеграла от параметра,

$$\int_p^q F(A,y)\,\mathrm{d}\,y \xlongequal{\text{def } F} \int_p^q \left(\int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,y = \int_a^A \left(\int_p^q f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,x \xlongequal{\text{def } K} \int_a^A K(x)\,\mathrm{d}\,x$$

По условию,

$$F(y) \overset{y\in[p,q]}{\underset{A\to\infty}{\rightrightarrows}} I(y) \xrightarrow[\text{т. о переходе к пределу}]{} \int_p^q F(y)\,\mathrm{d}\,y \xrightarrow[A\to\infty]{} \int_p^q I(y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$\implies \exists \lim_{A\to\infty}\int_a^A K(x)\,\mathrm{d}\,x \overset{\text{def}}{=} \int_a^\infty K(x)\,\mathrm{d}\,x$$

□

48. Производная несобственного интеграла, зависящего от параметра

Теорема 43. $f \in \mathcal{C}\big([a,\infty)\times[p,q]\big), \qquad \forall x \in [a,\infty) \quad \forall y \in [p,q] \quad \exists\, f'_y(x,y)$

$$f'_y(x,y) \in \mathcal{C}\big([a,\infty)\times[p,q]\big)$$

$$\forall y \in [p,q] \qquad \textbf{сходится } I(y) \coloneqq \int_a^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int_a^\infty f'_y(x,y)\,\mathrm{d}\,x \textbf{ равномерно сходится } \text{при } y \in [p,q] \tag{223}$$

$$\implies \forall y \in [p,q] \quad \exists\, I'(y), \qquad I'(y) = \int_a^\infty f'_y(x,y)\,\mathrm{d}\,x$$

Доказательство. Зафиксируем $y_0 \in [p,q]$
Обозначим $Y \coloneqq [p,q]\setminus\{\,y_0\,\}$
Рассмотрим функции

$$F(A,y) \coloneqq \int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}\,x, \qquad G(A,y) \coloneqq \frac{F(A,y)-F(A,y_0)}{y-y_0}$$

f удовлетворяет требованиям, которые накладывались на функцию в теореме о производной интеграла от параметра:

$$\exists \lim_{y\to y_0} G(A,y) \overset{\text{def}}{=} \lim_{y\to y_0}\frac{F(A,y)-F(A,y_0)}{y-y_0} \xlongequal{\text{def } F'_y} F'_y(A,y_0) \xlongequal[\text{упомянутая теорема}]{} \int_a^A f'_y(x,y_0)\,\mathrm{d}\,x \tag{224}$$

(для любого фиксированного $A > a$)

Утверждение 11.

$$\exists\,\Phi(y),\quad y\in Y:\quad G(A,y)\overset{y\in Y}{\underset{A\to\infty}{\rightrightarrows}}\Phi(y) \tag{225}$$

Доказательство. Докажем, используя критерий Коши (применяя его к условию (223)):

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\,A>a:\quad\forall A_2>A_1>A\quad\forall y\in[p,q]\quad\left|\int_{A_1}^{A_2}f'_y(x,y)\,\mathrm{d}\,x\right|<\varepsilon \tag{226}$$

$$G(A_2,y)-G(A_1,y)\overset{\text{def }G}{=\!=\!=}\frac{F(A_2,y)-F(A_2,y_0)}{y-y_0}-\frac{F(A_1,y)-F(A_1,y_0)}{y-y_0}=$$
$$=\frac{\Big(F(A_2,y)-F(A_1,y)\Big)-\Big(F(A_2,y_0)-F(A_1,y_0)\Big)}{y-y_0}\overset{\text{def }F}{=\!=\!=}\frac{\int_{A_1}^{A_2}f(x,y)\,\mathrm{d}\,x-\int_{A_1}^{A_2}f(x,y_0)\,\mathrm{d}\,x}{y-y_0} \tag{227}$$

Определим (учитывая, что A_1,A_2 фиксированы)

$$V(y):=\int_{A_1}^{A_2}F(x,y)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\forall y\in[p,q]\quad\exists\,V'(y),\qquad V'(y)=\int_{A_1}^{A_2}f'_y(x,y)\,\mathrm{d}\,x \tag{228}$$

По теореме Лагранжа

$$\exists\,c\in(y,\between\,y_0):\quad V(y)-V(y_0)=V'(c)(y-y_0) \tag{229}$$

$$G(A_2,y)-G(A_1,y)\underset{(227)}{\overset{\text{def }V}{=\!=\!=}}\frac{V(y)-V(y_0)}{y-y_0}\underset{(229)}{=\!=\!=}\frac{V'(c)(y-y_0)}{y-y_0}=V'(c)\underset{(228)}{=\!=\!=}\int_{A_1}^{A_2}f'_y(x,c)\,\mathrm{d}\,x$$
$$\implies|G(A_2,y)-G(A_1,y)|=\left|\int_{A_1}^{A_2}f'_y(x,c)\,\mathrm{d}\,x\right|\underset{(226)}{<}\varepsilon$$

□

Применим теорему о предельном переходе в функциональном семействе:

$$(224),(225)\implies\begin{cases}\exists\lim\limits_{y\to y_0}\Phi(y)\\ \exists\lim\limits_{A\to\infty}\int_a^A f'_y(x,y_0)\,\mathrm{d}\,x=\int_a^\infty f'_y(x,y_0)\,\mathrm{d}\,x\\ \lim\limits_{y\to y_0}\Phi(y)=\int_a^\infty f'_y(x,y_0)\,\mathrm{d}\,x\end{cases} \tag{230}$$

$$G(A,y)\underset{A\to\infty}{\overset{\text{def }G,F}{\longrightarrow}}\frac{I(y)-I(y_0)}{y-y_0}$$

То есть,

$$\Phi(y)=\frac{I(y)-I(y_0)}{y-y_0}$$

Вместе с (230), получаем утверждение теоремы □

49. Несобственный интеграл по параметру от несобственного интеграла от параметра

Теорема 44. $f \in \mathcal{C}\big([a,\infty) \times [p,\infty)\big), \qquad f(x,y) \ge 0$

$$\forall y \in [p,\infty) \quad \exists I(y) := \int_a^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\forall x \in [a,\infty) \quad \exists K(x) = \int_p^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

Существует по крайней мере один из интегралов:

$$\int_p^\infty I(y)\,\mathrm{d}\,y, \qquad \int_a^\infty K(y)\,\mathrm{d}\,x$$

Тогда существует и второй, и справедливо равенство:

$$\int_p^\infty I(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_a^\infty K(x)\,\mathrm{d}\,x$$

то есть,

$$\int_p^\infty \left(\int_a^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,y = \int_a^\infty \left(\int_p^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,x$$

Замечание. Важность этой теоремы заключается в том, что в ней не требуется равномерная сходимость

Доказательство. Будет доказано в четвёртом семестре □

50. Вычисление интеграла Дирихле

Теорема 45.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi}{2}$$

Доказательство. Применим признак Абеля к

$$f(x,y) := \frac{\sin x}{x}, \qquad x \in [0,\infty), \quad y \in [0,\infty)$$

Интеграл, не зависящий от y равномерно сходится:

$$\int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}\,x = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\,x \text{ равн. сх. при } y \in [0,\infty) \tag{231}$$

$$g(x,y) := e^{-xy} \text{ монот. по } x \text{ при } y \in [0,\infty) \tag{232}$$

$$0 < e^{-xy} \le 1 \tag{233}$$

$$(231),(232),(233) \implies I(y) := \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-xy}\,\mathrm{d}\,x \text{ равн. сх. при } y \in [0,\infty) \tag{234}$$

$$h(x,y) := \frac{\sin x}{x}e^{-xy} \in \mathcal{C}\big([0,\infty) \times [0,\infty)\big) \tag{235}$$

По частному случаю перехода к пределу в интеграле от параметра

$$(234),(235) \implies I(0) = \lim_{y \to +0} I(y) \tag{236}$$

Возьмём $y \ge \delta > 0$

$$\left|\frac{\sin x}{x}e^{-xy}\right| \le e^{-\delta x} \tag{237}$$

$$\implies h'_y(x,y) = -\sin x e^{-xy}$$

$$|h'_y(x,y)| \le e^{-xy} \le e^{-\delta x} \tag{238}$$

По только что доказанной теореме

$$(237),(238) \implies \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-xy}\,\mathrm{d}\,x \text{ сходится} & (239)\\ \displaystyle\int_0^\infty h'_y(x,y)\,\mathrm{d}\,x \text{ равномерно сходится} & (240)\end{cases}$$

То есть

$$\forall A > \delta \quad \exists\, I'(y) \text{ при } y \in [\delta, A]$$

$$\implies \forall y \ge \delta \quad \exists\, I'(y), \qquad I'(y) = \int_0^\infty h'_y(x,y)\,\mathrm{d}\,x = -\int_0^\infty \sin x e^{-xy}\,\mathrm{d}\,x \tag{241}$$

Проинтегрируем по частям:

$$-\int_0^\infty \sin x e^{-xy}\,\mathrm{d}\,x = \int_0^\infty e^{-xy}(\cos x)'\,\mathrm{d}\,x = e^{-xy}\cos\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \cos x (e^{-xy})'_x\,\mathrm{d}\,x =$$
$$= -1 + y\int_0^\infty e^{-xy}\cos x\,\mathrm{d}\,x \xlongequal[\text{по частям}]{} -1 + y\int_0^\infty e^{-xy}(\sin x)'\,\mathrm{d}\,x =$$
$$= -1 + y\Big(\underbrace{e^{-xy}\sin x\Big|_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty \sin x (e^{-xy})'\,\mathrm{d}\,x\Big) = -1 + y^2\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}\,x$$

$$\implies -(1+y^2)\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}\,x = -1$$

$$-\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{1+y^2}$$

$$\iff I'(y) = -\frac{1}{1+y^2} \tag{242}$$

Применим формулу Ньютона—Лейбница:

$$I(B) - I(\delta) = \int_\delta^B I'(y)\,\mathrm{d}\,y \xlongequal[(242)]{} -\int_\delta^B \frac{\mathrm{d}\,y}{1+y^2} = -\operatorname{arctg} y\Big|_\delta^B = \operatorname{arctg}\delta - \operatorname{arctg} B \tag{243}$$

При $B \to \infty$

$$|I(B)| \le \int_0^\infty e^{-Bx}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{B} \xrightarrow[B\to\infty]{} 0$$

$$(243) \implies 0 - I(\delta) = \operatorname{arctg}\delta - \frac{\pi}{2}$$

$$\implies I(\delta) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\delta$$

$$\int_0^\infty \sin x\,\mathrm{d}\,x = I(0) = \lim_{\delta\to+0} I(\delta) = \lim\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\delta\right) = \frac{\pi}{2}$$

□

51. Вычисление интеграла Эйлера—Пуассона

Теорема 46.

$$E \coloneqq \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Доказательство. Рассмотрим $f(x,y) \coloneqq e^{-x^2y-y}, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0$

Понятно, что $f(x,y) \in \mathcal{C}\big([0,\infty)\times[0,\infty)\big)$

Пусть

$$I(y) := \int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}\,x, \qquad K(x) := \int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$I(y) = \int_0^\infty e^{-x^2y-y}\,\mathrm{d}\,x \xlongequal[\mathrm{d}\,x=\frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}\,x_1]{x_1:=x\sqrt{y}} \int_0^\infty e^{-x_1^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot e^{-y}\,\mathrm{d}\,x_1 = \frac{1}{\sqrt{y}}e^{-y}\int_0^\infty e^{-x_1^2}\,\mathrm{d}\,x_1 = \frac{1}{\sqrt{y}}e^{-y}E$$

$$\int_0^\infty I(y)\,\mathrm{d}\,y = E\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{y}}e^{-y}\,\mathrm{d}\,y \xlongequal[\mathrm{d}\,y=2y_1\,\mathrm{d}\,y_1]{y:=y_1^2} E\cdot\int_0^\infty \frac{1}{y_1}e^{-y_1^2}\cdot 2y_1\,\mathrm{d}\,y_1 = 2E\cdot\int_0^\infty e^{-y_1^2}\,\mathrm{d}\,y_1 = 2E^2$$

Применим теорему об интегрировании несобственного интеграла по параметру:

$$\Longrightarrow\ 2E^2 = \int_0^\infty I(y)\,\mathrm{d}\,y = \int_0^\infty K(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{244}$$

$$K(x) = \int_0^\infty e^{-x^2y-y}\,\mathrm{d}\,y = \int_0^\infty e^{-(x^2+1)y}\,\mathrm{d}\,y \xlongequal[t=(x^2+1)y]{} \frac{1}{1+x^2}\cdot\int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\xRightarrow[(244)]{} 2E^2 = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

При этом, $E > 0$. □

52. Числовые и функциональные ряды с комплексными слагаемыми; абсолютная и равномерная сходимость; признак Вейерштрасса равномерной сходимости

Определение 21. Если $c_n = a_n + ib_n, \quad n \geq 1, \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}$, то *рядом с комплексными слагаемыми* называется символ

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \tag{245}$$

Определение 22. Ряд (245) по определению *сходится*, если сходятся ряды $\sum a_n$, $\sum b_n$, при этом

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n := \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Определение 23. Ряд (245) называют *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum |c_n|$.

Напоминание. $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

Утверждение 12. Чтобы ряд (245) абсолютно сходился, необходимо и достаточно, чтобы абсолютно сходились ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$.

Доказательство.

- Поскольку $|a_n| \leq |c_n|$ и $|b_n| \leq |c_n|$, то абсолютная сходимость ряда (245) влечёт абсолютную сходимость рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$.
- Поскольку $|c_n| \leq |a_n| + |b_n|$, то абсолютная сходимость рядов $\sum a_n$ и b_n влечёт абсолютную сходимость ряда (245).

□

Следствие. Если ряд (245) абсолютно сходится, то он сходится.

Доказательство. Следует из факта, что абсолютно сходящийся вещественный ряд сходится. □

Определение 24. $E \neq \emptyset \subset \mathbb{C}, \qquad u_n : E \to \mathbb{R}, \quad v_n : E \to \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \ldots$
Функциональным комплекснозначным рядом будем называть символ

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n(x), \qquad w_n(x) = u_n(x) + iv_n(x), \quad x \in E$$

Определение 25. Ряд $\sum w_n$ будем называть *равномерно сходящимся* на E, если равномерно сходятся на E ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$.

Теорема 47 (критерий Коши). Для того чтобы ряд $\sum \gamma_n$ **равномерно** сходился на E, **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall m > n > N \quad \forall x \in E \quad |\gamma_{n+1}(x) + \cdots + \gamma_m(x)| < \varepsilon$$

Доказательство. Можно применить критерий Коши для комплексной функциональной последовательности □

Теорема 48 (признак Вейерштрасса).

$$\{ a_n \}_{n=1}^{\infty}, \quad a_n > 0 : \quad |\gamma_n(x)| \leq a_n \quad \forall n \quad \forall x \in E \tag{246}$$

Ряд a_n сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \tag{247}$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \text{ сходится равномерно}$$

Доказательство. Возьмём $\forall \varepsilon > 0$

$$(247) \implies \exists N : \quad \forall m > n > N \quad a_{n+1} + \cdots + a_n < \varepsilon \tag{248}$$

$$|\gamma_{n+1}(x) + \cdots + \gamma_n(x)| \leq |\gamma_{n+1}(x)| + \cdots + |\gamma_m(x)| \underset{a_n > 0}{\leq} a_{n+1} + \cdots + a_m \underset{(248)}{<} \varepsilon$$

По критерию Коши получаем равномерную сходимость □

53. Степенные ряды; лемма Абеля

$$E = \mathbb{C}, \qquad \{ c_n \}_{n=0}^{\infty}, \qquad c_n \in \mathbb{C}, \qquad z_0 \in \mathbb{C}$$

Положим $\gamma_0(z) := c_0, \quad \gamma_n(z) := c_n(z - z_0)^n$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \tag{249}$$

Такое выражение будем называть комплексным степенным рядом с центром z_0 (рядом по степеням $(z - z_0)$)

Замечание. $\{ c_n \}_{n=1}^{\infty}, \qquad c_n \to c \in \mathbb{C}$

$$\implies \exists M : \quad |c_n| \leq M \quad \forall n$$

Доказательство. Положим $c_n = a_n + ib_n, \quad c = a + ib$

$$a_n \to a, \qquad b_n \to b$$

Дальше применяем теорему из первого семестра □

Замечание (необходимый признак сходимости комплексных числовых рядов).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{сх.} \implies \gamma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Доказательство. $c_n = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$

$$\left.\begin{matrix} c_n \to c \\ c_{n-1} \to c \end{matrix}\right\} \implies \underbrace{c_n - c_{n-1}}_{\gamma_n} \to c - c = 0$$

□

Следствие.

$$\exists\, M : \quad |\gamma_n| \le M \quad \forall n$$

Лемма 2 (Абеля).

$$\exists\, z_1 \ne z_0 : \quad (249) \text{ сходится при } z_1$$

Обозначим $R \coloneqq |z_1 - z_0|$

$$\implies (249) \text{ сх.} \quad \forall z : |z - z_0| < R$$

$$\implies \forall 0 < r < R \quad (249) \text{ равн. сх. при } |z - z_0| \le r \tag{250}$$

Доказательство. Докажем (250):
Обозначим $0 < q \coloneqq \frac{r}{R} < 1$
Сходимость при z_1, по первому замечанию, означает, что

$$c_n (z_1 - z_0)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Тогда, по следствию,

$$\exists\, M : \quad |c_n (z_1 - z_0)^n| \le M \quad \iff \quad |c_n| \cdot |z_1 - z_0|^n \le M \overset{\text{def}\, R}{\iff} |c_n| \le \frac{M}{R^n} \tag{251}$$

$$|c_n (z - z_0)^n| = |c_n| \cdot |z - z_0|^n \underset{(251), \text{def}\, r}{\le} \frac{M}{R^n} \cdot r^n = M q^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M q^n = \frac{Mq}{1 - q}$$

Можно применить признак Вейерштрасса, тем самым доказывая (250)

$$(250) \implies (249) \text{ сх. абс. при } |z - z_0| < R$$

□

54. Определение радиуса сходимости и круга сходимости степенного ряда

Определение 26.

1. Пусть (249) сходится только при $z = z_0$
   Будем полагать радиус сходимости $R \coloneqq 0$, круг сходимости $\mathtt{B} \coloneqq \emptyset$
2. (249) сходится при всех z
   Полагаем $R \coloneqq +\infty$, $\quad \mathtt{B} \coloneqq \mathbb{C}$
3. $\exists\, z_1 \ne z_0 : \quad (249)$ сх. в z_1, $\qquad \exists\, z_2 : \quad (249)$ расх. в z_2

$$R \coloneqq \sup \{\, r \mid r = |\, z_* - z_0|, \quad (249) \text{ сх. в } z_* \,\}, \qquad \mathtt{B} \coloneqq \{\, z_0 \mid |\, z - z_0| < R \,\}$$

Положим $r_1 \coloneqq |z_1 - z_0|, \quad r_2 \coloneqq |z_2 - z_1|$
По определению R
$$R \geq r_1 > 0$$
Возьмём $z_3 : \quad r_3 \coloneqq |z_3 - z_0| > r_2$
Если бы (249) сходился при z_3, можно было бы применить к z_3 лемму Абеля. Тогда бы (249) сходился в z_2 — $\lightning$
То есть, в z_3 ряд расходится
Значит, $R \leq r_2, \quad r_1 < r_2$

55. Свойства круга сходимости

Рассматриваем только случай, когда $0 < R < \infty$

Теорема 49.
$$(249) \text{ сх.} \quad \forall z \in \mathtt{B}$$
$$(249) \text{ расх.} \quad \forall z_2 \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}$$

Доказательство.

- Возьмём $r \coloneqq |z - z_0| < R$
  По определению R
  $$\exists\, z_* : \quad |z_* - z_0| > R, \quad (249) \text{ сх. в } z_*$$
  По лемме Абеля (249) сх. в z
- Возьмём $\rho \coloneqq |\widehat{z} - z_0| > R$
  Если ряд сходится, то ρ больше супремума, что невозможно

$\square$

56. Вычисление радиуса сходимости

Теорема 50. Определим
$$t \coloneqq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{c_n} \tag{252}$$

1. $R = 0$, если $t = +\infty$
2. $R = +\infty$, если $t = 0$
3. $R = \frac{1}{t}$ иначе

Доказательство. Будем рассматривать только последний случай
Определим $R_0 \coloneqq \frac{1}{t}$

- Возьмём $z_2 : \quad |z_2 - z_0| > R_0$
  Обозначим $\varepsilon \coloneqq |z_2 - z_0| - R_0 > 0$
  Определим
  $$\delta \coloneqq \frac{\varepsilon t^2}{1 + \varepsilon t}$$
  По определению верхнего предела
  $$\exists\, \{\, n_k \,\}_{k=1}^{\infty} : \quad \sqrt[n_k]{c_{n_k}} > t - \delta \quad \iff \quad |c_{n_k}| > (t - \varepsilon)^{n_k}$$
  $$\implies |c_{n_k}(z_2 - z_0)^{n_k}| = |c_{n_k}| \cdot |z_2 - z_0|^{n_k} > (t - \delta)^{n_k} \cdot (R_0 + \varepsilon)^{n_k} = \Big((t - \delta)(R_0 + \varepsilon)\Big)^{n_k}$$
  $$(t - \delta)(R_0 + \varepsilon) = \left(t - \frac{\varepsilon t^2}{1 + \varepsilon t}\right)\left(\frac{1}{t} + \varepsilon\right) = \frac{t + \varepsilon t^2 - \varepsilon t^2}{1 + \varepsilon t} \cdot \frac{1 + \varepsilon t}{t} = 1$$
  $$\implies |c_{n_k}(z_2 - z_0)^{n_k}| \geq 1$$

По второму замечанию ряд в z_2 расходится

- Возьмём $z_1: \quad |z_1 - z_0| < R_0$
  Пусть
$$\varepsilon_0 := R_0 - |z_1 - z_0|, \quad \delta_0 := \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0 t^2}{1 - \varepsilon_0 t}$$
  По свойствам верхнего предела
$$\exists N : \quad \forall n > N \quad \sqrt[n]{|c_n|} < t + \delta_0$$
$$\iff |c_n| < (t + \delta_0)^n$$
$$\implies \forall n > N \quad |c_n(z_1 - z_0)^n| = |c_n| \cdot |z_1 - z_0|^n < (t + \delta_0)^n \cdot (R_0 - \varepsilon_0)^n = \Big((t - \delta_0)(R_0 - \varepsilon_0)\Big)^n$$
$$(t + \delta_0)(R_0 - \varepsilon_0) \overset{\text{def } \delta}{=\!=} \left(t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0 t^2}{1 - \varepsilon_0 t}\right)\left(\frac{1}{t} - \varepsilon_0\right) = \frac{t - \varepsilon_0 t^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 t^2}{1 - \varepsilon_0 t} \cdot \frac{1 - \varepsilon_0 t}{t} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_0 t$$
$$0 < q := 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_0 t < 1$$
$$\implies |c_n(z_1 - z_0)^n| < q^n < 1$$
  Значит, ряд сходится при z_1

□

Теорема 51. $c_n \neq 0 \quad \forall n, \qquad \exists \lim\limits_{n \to \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$
Тогда этот предел и равен радиусу сходимости

57. Интервал сходимости вещественного степенного ряда, его свойства

Определение 27.
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{253}$$
Будем называть (253) вещественным степенным рядом, если $x_0 \in \mathbb{R}, \quad a_n \in \mathbb{R}, \; n \geq 1, \quad x \in \mathbb{R}$

Можно найти радиус сходимости и круг сходимости соответствующего комплексного степенного ряда:

1. $R = 0, \quad \mathtt{B} = \emptyset$
   Ряд сходится только при $x = x_0$
2. $R = \infty, \quad \mathtt{B} = \mathbb{C}$
   Ряд сходится при любых $z \in \mathbb{C}$, а значит, и при любых $x \in \mathbb{R}$
3. $0 < R < \infty, \quad \mathtt{B} \neq \emptyset, \mathbb{C}$
   Пусть $I := \mathtt{B} \cap \mathbb{R}$
$$I = (x_0 - R, x_0 + R)$$
   - $x \in I \implies x \in \mathtt{B} \implies$ ряд сходится в x
   - $x_1 \notin \overline{I} \implies x_1 \notin \overline{\mathtt{B}} \implies$ ряд расходится в x_1

   Пусть есть $0 < r < R$
   Рассмотрим промежуток $[x_0 - r, x_0 + r] \subset \mathtt{B} \quad \implies$ ряд сходится равномерно на $[x_0 - r, x_0 + r]$

При доказательстве теоремы о радиусе сходимости для комплексных рядов мы пользовались признаком Вейерштрасса. Если перейти к вещественным рядам, то при $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ будет равномерно сходится ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n (x - x_0)^n|$$

58. Теорема Абеля о вещественном степенном ряде

Бывает, что при $r = R$ ряд сходится

Теорема 52 (Абеля)**.** Ряд (253) сходится при $x_0 - R$ или при $x_0 + R$

$$S(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Тогда ряд сходится равномерно на $[x_0 - R, x_0]$ или $[x_0, x_0 + R]$, и

$$\implies \left[\begin{array}{l} S \in \mathcal{C}\big([x_0 - R, x_0]\big) \\ S \in \mathcal{C}\big([x_0, x_0 + R]\big) \end{array} \right.$$

Если ряд сходится и при $x_0 - R$, и при $x_0 + R$, то верны оба утверждения

Доказательство. Докажем для $[x_0 - R, x_0]$:
Так как $x_0 - R - x_0 = -R$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-R)^n$ сходится. Пусть $x_0 - R < x < x_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-R)^n \cdot \left(\frac{x - x_0}{-R} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-R)^n \cdot \left(\frac{x_0 - x}{R} \right)^n$$

Положим

$$u_n(x) \coloneqq a_n (-R)^n, \qquad v_n(x) \coloneqq \left(\frac{x_0 - x}{R} \right)^n$$

Тогда $\sum u_n(x)$ равномерно сходится на $[x_0 - R, x_0]$ (т. к. он не зависит от x)

$$0 \le v_n(x) \le 1, \qquad v_n(x) \text{ монотонн. по } n \quad \forall x \in [x_0 - R, x_0]$$

По признаку Абеля, последние два утверждения влекут, что

$$S(x) \xlongequal{\text{def } u_n, v_n} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x) \text{ равномерно сходится при } x \in [x_0 - R, x_0]$$

$$a_n (x - x_0)^n \in \mathcal{C}\big([x_0 - R, x_0]\big)$$

Можно применить следствие о непрерывности ряда непрерывных функций □

59. Производная вещественного степенного ряда

Теорема 53. Имеется вещественный степенной ряд

$$S(x) \coloneqq a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad R > 0$$

$$T(x) \coloneqq a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \qquad R_0 \text{ — его радиус сх.}$$

$$\implies R_0 = R$$

Замечание.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^n = (x - x_0) \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \qquad x \ne x_0$$

Ряды слева и справа сходится или расходятся одновременно, так как они различаются умножением на ненулевую константу

Доказательство.

$$t = \varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \qquad t_0 = \varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|n a_n|}$$

Видно, что $t_0 \geq t$

$$R \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{t}, \qquad R_0 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{t_0}$$
$$\implies R_0 \leq R$$

Нужно доказать, что они совпадают
Возьмём x такой, что $|x - x_0| =: r < R$
Докажем, что при таком x будет сходится ряд $T(x)$:
Возьмём $r < \rho < R, \quad q := \frac{r}{\rho}, \quad 0 < q < 1$
Докажем, что $T(x)$ абсолютно сходится (из этого будет следовать, что он сходится):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\rho^n \cdot \left(n\frac{r^n}{\rho^n}\right) \overset{\text{def } q}{=\!=\!=} \sum |a_n|\rho^n \cdot (nq^n) \tag{254}$$

Рассмотрим $\varphi(x) := xq^x, \quad x \geq 0$
Понятно, что $\varphi(0) = 0, \qquad \varphi(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$
Найдём её максимум:

$$\varphi'(x) = q^x + x \ln q q^x$$
$$q^{x_0} + x_0 \ln q q^{x_0} = 0$$
$$x_0 = -\frac{1}{\ln q} = \frac{1}{\ln \frac{1}{q}} =: M$$
$$\implies nq^n \leq M \quad \forall n$$
$$\underset{(254)}{\implies} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\rho^n (nq^n) \leq \sum |a_n|\rho^n \cdot M \underset{S(x) \text{ сх.}}{<} \infty$$
$$\implies [x_0 - r, x_0 + r] \subset (x_0 - R_0, x_0 + R_0)$$
$$\xRightarrow[\text{в силу произвольности } r]{} (x_0 - R, x_0 + R) \subset (x_0 - R_0, x_0 + R_0) \quad \implies R \leq R_0$$

□

Следствие. Обозначим $u_n(x) := a_n(x - x_0)^n$
Тогда $u_n'(x) = na_n(x - x_0)^{n-1}$
Если взять $\forall 0 < r < R$, то ряд $T(x)$ сходится равномерно при $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$
Ряд $S(x)$ сходится равномерно там же

$$\implies \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] \quad \exists S'(x) = T(x)$$

Это верно при $\forall x \in I$ (т. к. можно обозначить $|x - x_0| =: r < R$)

60. Старшие производные вещественного степенного ряда; степенной ряд как ряд Тейлора своей суммы

Рассмотрим ряд $T(x)$ как первоначальный ряд.
По теореме получаем, что радиус сходимости $T'(x)$ будет таким же, то есть,

Следствие.

$$2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} = \Big(S'(x)\Big)' = S''(x)$$

Это можно продолжать. Получаем следующую теорему:

Теорема 54.

$$\forall m \quad \forall x \in I \quad \exists S^{(m)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n(x - x_0)^n\Big)^{(m)}$$

61. Интегрирование вещественного степенного ряда

Теорема 55 (об интегрируемости вещественного степенного ряда).
По-прежнему рассматриваем ряд $S(x)$, $\qquad p, q \in I$ (не обязательно $p < q$)

$$\implies \int_p^q S(x)\ \mathrm{d}\, x = a_0(q-p) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(q-x_0)^{n+1} - (p-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

Доказательство. S равномерно сходится на $[p \between q]$.
Его можно интегрировать почленно, что и записано в теореме. □

Утверждение 13. В частности, при $p = x_0, \quad q = y \in I$,

$$\int_{x_0}^y S(x)\ \mathrm{d}\, x = a_0(y - x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(y-x_0)^{n+1}}{n+1} \tag{255}$$

62. Разложение в степенной ряд функций $\ln(1+x)$ и $\operatorname{arctg} x$

Рассмотрим ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \qquad x \in (-1, 1)$$

Понятно, что при $r < 1$ ряд сходится равномерно на $[-r, r]$.
Возьмём $|y| \le r$ и проинтегрируем по формуле (255):

$$\boxed{\ln(1+y)} = \int_0^y \frac{\mathrm{d}\, x}{1+x} = y + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{n+1}}{n+1} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{y^n}{n}}$$

Радиус сходимости этого ряда равен 1. При $y = 1$ он сходится. По теореме Абеля он сходится равномерно на $[0, 1]$.

$$\implies \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}} = \lim_{y \to 1} \ln(1+y) = \boxed{\ln 2}$$

Напишем в этом равенстве x^2 вместо x:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

Рассмотрим $|y| < 1$:

$$\boxed{\operatorname{arctg} y} = \int_0^y \frac{\mathrm{d}\, x}{1+x^2} = y + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{2n-1}}{2n-1}}$$

При $y = 1$ этот рад сходится как знакочередующийся. По теореме Абеля он непрерывен на $[0, 1]$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}} = \lim_{y \to 1^-} \operatorname{arctg} y = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

63. Формула Тейлора с интегральным остатком

Теорема 56. $f \in \mathcal{C}^n\big((a, b)\big), \qquad x, x_0 \in (a, b), \quad x \ne x_0$

$$\implies f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\ \mathrm{d}\, t$$

Доказательство. Докажем **по индукции**.

- **База.** $n = 1$
$$f(x) \overset{?}{=} f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}\,t$$
Это — формула Ньютона—Лейбница.

- **Переход.** $n \to n+1$
$$f \in \mathcal{C}^{n+1}\big((a,b)\big)$$
Проинтегрируем по частям по t:
$$\left(-\frac{x-t)^n}{n}\right)'_t = (x-t)^{n-1}$$

$$\int_{x_0}^{x}\left(-\frac{(x-t)^n}{n}\right)'\mathrm{d}\,t f^{(n)}(t) = \left(-\frac{(x-t)^n}{n}f^{(n)}(t)\right)\Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x}\left(-\frac{(x-t)^n}{n}\right)f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}\,t =$$
$$= \frac{(x-x_0)^n}{n}f^{(n)}(x_0) + \frac{1}{n}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$\xRightarrow[\text{предп.}]{} f(x) =$$
$$= f(x_0)\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}\frac{(x-t)^n}{n}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}\,t$$

□

64. Разложение в степенные ряды e^x, $\cos x$, $\sin x$

Рассматриваем $x_0 = 0$

1. e^x
$$(e^x)^{(n)} = e^x$$
$$(e^x)^{(n)}\big|_{x=0} = 1$$
$$e^0 = 1$$
$$e^x \overset{T}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + e^c \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad c < |x|, \quad cx > 0 \tag{256}$$
$$\left|e^c\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \le e^{|x|}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
$$\xRightarrow[(256)]{} \boxed{e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}}$$
При $x = 1$ получаем
$$e = 2 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}$$
Взяв сумму до пятого слагаемого, получаем очень хорошее приближение — с точностью до $\frac{1}{720}$

2. $\cos x$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\cos x)'' = -\cos x$$
$$(\cos x)''' = \sin x$$
$$(\cos x)^{(4)} = \cos x$$
$$(\cos x)^{(2n-1)}\big|_{x=0} = 0$$

$$(\cos x)^{(2n)}\big|_{x=0} = (-1)^n$$

$$\cos x \overset{T}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \sin c \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\xRightarrow[\text{лемма}]{} \boxed{\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

3. $\sin x$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\sin x)'' = -\sin x$$

$$(\sin x)''' = -\cos x$$

$$(\sin x)^{(4)} = \sin x$$

$$(\sin x)^{(2n)}\big|_{x=0} = 0$$

$$(\sin x)^{2n-1}\big|_{x=0} = (-1)^{n-1}$$

$$\sin x \overset{T}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \pm \sin c \cdot \frac{x^{2n}}{2n!}$$

$$\xRightarrow[\text{лемма}]{} \boxed{\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}}$$

65. Разложение в степенной ряд $(1+x)^r$

$(1+x)^r, \qquad r \notin \mathbb{N}, \quad r \neq 0$ (чтобы была нетривиальность)

$$\Big((1+x)^r\Big)' = r(1+x)^{r-1}$$

$$\Big((1+x)^r\Big)'' = r(r-1)(1+x)^{r-2}$$

$$\Big((1+x)^r\Big)^{(n)} = r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1)(1+x)^{r-n}$$

$$\Big((1+x)^r\Big)^{(n)}\Big|_{x=0} = r(r-1)\dots(r-n+1)$$

Применим формулу Тейлора с остатком в форме Коши:

$$(1+x)^r = 1 + \frac{rx}{1!}x + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}x^n + \\ + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n r(r-1)\dots(r-n)(1+t)^{r-n-1}\,\mathrm{d}\,t}_{I_n} \quad (257)$$

$$(x-t)^n(1+t)^{-n} = \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n$$

Всё это верно при $0 \le |t| \le x, \quad tx \ge 0$

- $x > 0$

$$0 \le \frac{x-t}{1+t} \le x$$

- $x < 0$

$$\frac{x-t}{1+t} = \frac{-|x|+|t|}{1-|t|} \implies \left|\frac{x-t}{1+t}\right| = \frac{|x|-|t|}{1-|t|} \le |x|$$

Объединим последние два выражения:

$$\left|\frac{x-t}{1+t}\right| \le |x|, \qquad \text{при } |t| \le |x|, \quad tx \ge 0$$

$$\implies |I_n| \le \frac{|r(r-1)\dots(r-n)|}{n!}\left|\int_0^x \left|\frac{x-t}{1+t}\right|^n \cdot (1+t)^{r-1}\,\mathrm{d}\,t\right| \le$$
$$\le \frac{|r(r-1)\dots(r-n)|}{n!}|x^n|\underbrace{\left|\int_0^x (1+t)^{r-1}\,\mathrm{d}\,t\right|}_{M(x)}$$

Обозначим

$$\alpha_n \coloneqq \frac{|r(r-1)\dots(r-n)|}{n!}|x|^n$$

Считаем, что $n > r+1$

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{1}{n+1}\cdot|r-n-1|\cdot|x|$$
$$|r-n+1| = n+1-r$$
$$\implies \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{n+1-r}{n+1}\cdot|x| = \left(1-\frac{r}{n+1}\right)|x| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x| \tag{258}$$

Обозначим

$$q \coloneqq \frac{1+|x|}{2}, \qquad q<1, \quad |x|<q$$

В новых обозначениях,

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \le q \quad \forall n \ge \text{ некторого } n_0$$

Значит, при $n > n_0$, $\alpha_n > 0$, α_n монотонно убывает

$$\implies \exists \lim_{n\to\infty}\alpha_n \eqqcolon \alpha \ge 0 \tag{259}$$

$$(258) \iff \alpha_{n+1} = \alpha_n\left(1-\frac{r}{n+1}\right)\cdot|x|$$
$$\underset{(259)}{\implies} \alpha = \alpha|x| \implies \alpha = 0$$

$$\underset{(257)}{\implies} (1+x)^r = 1 + \frac{rx}{1!} + \frac{r(r-1)x^2}{2!} + \dots + \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}x^n + \dots \tag{260}$$

66. Разложение в степенной ряд $\arcsin x$

Подставим в (260) $x = -y^2$, $\quad 0<|y|<1$, $\quad r = \frac{1}{2}$:

$$(1-y^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-y^2) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}y^4 + \dots + (-1)^n\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}y^{2n} + \dots =$$
$$= 1 + \frac{y^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}y^4 + \dots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}y^{2n} + \dots$$

$$\implies \arcsin x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,y}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^x \left(1 + \frac{y^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}y^4 + \dots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}y^{2n} + \dots\right)\mathrm{d}\,y =$$
$$= x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\cdot 5}x^5 + \dots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!(2n+1)}x^{2n+1} + \dots$$

Часть III
Криволинейные интегралы

67. Спрямляемые кривые, длина кривой, аддитивность длины кривой

Определение 28. $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^{n\geq 2}, \qquad \Gamma \in \mathcal{C}\big([a,b]\big)$
Γ будем называть разомкнутой кривой, если оно биективно

Образ $\Gamma([a,b])$ будем называть кривой и обозначать Γ

$$\mathtt{P} \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

Множество точек $\{\,\Gamma(t_k)\,\}_{k=1}^{\infty}$ будем называть разбиением

$$l\Big(\,\{\,\Gamma[m](t_k)\,\}_{k=1}^{\infty}\,\Big) \coloneqq \sum_{k=0}^{m-1} \|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)\|_n$$

Рассмотрим величину

$$\sup_{\{\,\Gamma(t_k)\,\}} l\Big(\,\{\,\Gamma(t_k)\,\}_{k=1}^{\infty}\Big)$$

Если $\sup < \infty$, то Γ будем называть спрямляемой, а $\sup$ — длиной Γ

$$\Gamma_{[a,c]}(t) \coloneqq \Gamma(t)\big|_{[a,c]}, \qquad \Gamma_{[c,b]}(t) \coloneqq \Gamma(t)\big|_{[c,b]}$$

Утверждение 14. Если Γ спрямляема, то $\Gamma_{[a,c]}$ и $\Gamma_{[c,b]}$ тоже спрямляемы, и

$$l\Big(\Gamma([a,b])\Big) = l\Big(\Gamma([a,c])\Big) + l\Big(\Gamma([c,b])\Big)$$

Доказательство. Возьмём $c \in (t_{k_0}, t_{k_0+1})$

$$\|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)\| \leq \|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(c)\| + \|\Gamma(c) - \Gamma(t_k)\|$$

$$l\Big(\,\{\,\Gamma(t_k)\,\}_{k=1}^{m}\,\Big) \leq l\Big(\,\{\,\Gamma(t_k) \cup \Gamma(c)\,\}_{k=1}^{\infty}\Big)$$

$$l\Big(\,\{\,\Gamma(t_k) \cup \Gamma(c)\,\}\,\Big) = l\Big(\,\{\,\Gamma(t_k)\,\}_{k=1}^{k_0} \cup \Gamma(c)\Big) + l\Big(\,\{\,\Gamma(t_k)\,\}_{k=k_0}^{m} \cup \Gamma(c)\Big)$$

Далее нужно перейти к супремуму в левой и правой частях. □

68. Непрерывность длины кривой как функции от параметра

Свойство. $\Gamma(t)$ спрямляема. Тогда

$$\lim_{c\to b^-} l\Big(\Gamma[a,c]\Big) = l\Big(\Gamma([a,b]\Big)$$

Доказательство. Если $a < c_1 < c_2 < b$, то по последнему свойству,

$$l\big(\Gamma[a,c_2]\big) > l\big(\Gamma[a,c_1]\big), \qquad l\big(\Gamma[a,c_2]\big) + l\big(\Gamma[c_2,b]\big) = l\big(\Gamma[a,b]\big)$$

Поэтому функция $f : (a,b) \to \mathbb{R} : \quad f = l\big(\Gamma[a,c]\big)$ возрастает и $f < l\big(\Gamma[a,b]\big) \quad \forall c < b$.
Значит, $\exists \lim\limits_{c\to b^-} l\big(\Gamma[a,c]\big) \leq l\big(\Gamma[a,b]\big)$

Предположим, что $\lim\limits_{c\to b^-} l\big(\Gamma[a,c]\big) < l\big(\Gamma[a,b]\big)$ и положим

$$\delta \coloneqq l\big(\Gamma[a,b]\big) - \lim_{c\to b^-} l\big(\Gamma[a,c]\big) > 0$$

Поскольку $l\big(\Gamma[a,c]\big) \leq \lim\limits_{c\to b^-} l\big(\Gamma[a,c]\big)$, то $\forall c : \ a < c < b \quad l\big(\Gamma[c,b]\big) \geq \delta$. □

69. Вычисление длины гладкой кривой

Лемма 3. $F : [a, b] \to \mathbb{R}^n, \qquad F \in \mathcal{C}\big([a, b]\big)$

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

Определим символ:

$$\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}\,t := \begin{bmatrix} \int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}\,t \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}\,t \end{bmatrix}$$

Тогда справедливо соотношение:

$$\left\| \int_a^b F(t)\,\mathrm{d}\,t \right\| \le \int_a^b \|F(t)\|\,\mathrm{d}\,t$$

Доказательство. Будем считать, что $\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}\,t \ne \mathbb{O}_n$ (иначе — очевидно)
Обозначим $q := \left\|\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}\,t\right\| > 0$
Введём числа

$$\alpha_k := \int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}\,t, \qquad a_k := \frac{\alpha_k}{q}$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^n a_k \alpha_k \xlongequal{\text{def } a_k} \sum \frac{\alpha_k}{q}\alpha_k = \frac{1}{q}\sum \alpha_k^2 \xlongequal{\text{def } \alpha_k, q} \frac{q^2}{q} = q \tag{261}$$

С другой стороны,

$$\sum_{k=1}^n a_k\alpha_k \sum a_k \int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b \sum a_k f_k(t)\,\mathrm{d}\,t \underset{\text{КБШ}}{\le} \int_a^b \left(\sum a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum f_k^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\,t =$$

$$= \left(\sum a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \int_a^b \left(\sum f_k^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\,t = \left(\sum a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \int_a^b \|F(t)\|\,\mathrm{d}\,t \tag{262}$$

$$\sum a_k^2 \xlongequal{\text{def } a_k} \sum \frac{\alpha_k^2}{q^2} = \frac{1}{q^2}\sum \alpha_k^2 = \frac{q^2}{q^2} = 1 \tag{263}$$

$$(261), (262), (263) \implies \left\| \int_a^b F(t)\,\mathrm{d}\,t \right\| = q \le 1 \cdot \int_a^b F(t)\,\mathrm{d}\,t$$

$\square$

Теорема 57. $\Gamma \in \mathcal{C}^1\big([a, b]\big)$

$$\implies l(\Gamma) = \int_a^b \|\lceil\Gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t$$

Доказательство.

- $l \le \int$
  Пусть имеется любое разбиение любой Γ:

$$\{\,\Gamma(t_k)\,\}_{k=1}^{\infty}$$

Тогда

$$\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t_{k+1}) - \gamma_1(t_k) \\ \vdots \\ \gamma_n(t_[k+1]) - \gamma_n(t_k) \end{bmatrix} \xlongequal[\text{ф. Ньютона–Лейбница}]{} $$

$$= \begin{bmatrix} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \gamma_1'(t) \, \mathrm{d}\, t \\ \vdots \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \gamma_n'(t) \, \mathrm{d}\, t \end{bmatrix} \xlongequal{\text{def} \int F} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathcal{D}\Gamma(t) \, \mathrm{d}\, t$$

$$\underset{\text{лемма}}{\Longrightarrow} \|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)\| = \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathcal{D}\Gamma(t) \, \mathrm{d}\, t \right\| \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| \, \mathrm{d}\, t$$

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{m-1} \|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)\| \leq \sum \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}(t)\| \, \mathrm{d}\, t = \int_a^b \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| \, \mathrm{d}\, t$$

Перепишем в обозначениях длины:

$$l\Big(\{ \Gamma(t_k) \}_{k=1}^{\infty} \Big) \leq \int_a^b \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| \, \mathrm{d}\, t \implies l(\Gamma) \leq \int_a^b \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| \, \mathrm{d}\, t$$

- $l \geq \int$

  Т. к. $\Gamma \in C^1$,

$$\gamma_k' \in \mathcal{C}\big([a,b]\big)$$

То есть,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall t'', t' \in [a,b] \quad \left(|t'' - t'| < \delta \implies |\gamma_1'(t'') - \gamma_k'(t')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \right), \qquad k = 1, \dots, n$$

$$\implies \sqrt{\Big(\gamma_1'(t'') - \gamma_1'(t')\Big)^2 + \dots + \Big(\gamma_n'(t'') - \gamma_n'(t')\Big)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n}} \cdot n = \varepsilon$$

$$\iff \|\mathcal{D}\Gamma(t'') - \mathcal{D}\Gamma(t')\| < \varepsilon$$

Возьмём разбиение $\{ \Gamma(t_k) \}_{k=1}^m$ такое, что $t_{k-1} - t_k < \delta \quad k = 0, \dots, m-1$

Для $\forall t \in [t_k, t_{k+1}]$ имеем соотношение

$$\|\mathcal{D}\Gamma(t)\| \overset{\triangle}{\leq} \|\mathcal{D}\Gamma(t) - \mathcal{D}\Gamma(t_k)\| + \|\mathcal{D}\Gamma(t_k)\| < \|\mathcal{D}\Gamma(t_k)\| + \varepsilon \tag{264}$$

Рассмотрим выражение

$$\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k) - (t_{k+1} - t_k)\mathcal{D}\Gamma(t_k) = \begin{bmatrix} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \gamma_1'(t) \, \mathrm{d}\, t \\ \vdots \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \gamma_n'(t) \, \mathrm{d}\, t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (t_{k+1} - t_k)\gamma_1'(t_k) \\ \vdots \\ (t_{k+1} - t_k)\gamma_n'(t) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big(\gamma_1'(t) - \gamma_1'(t_k)\Big) \, \mathrm{d}\, t \\ \vdots \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Big(\gamma_n'(t) - \gamma_n'(t_k)\Big) \, \mathrm{d}\, t \end{bmatrix} \xlongequal{\text{def} \int F} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathcal{D}\Gamma(t) - \mathcal{D}\Gamma(t_k) \, \mathrm{d}\, t \tag{265}$$

Применим лемму:

$$\|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k) - (t_{k+1} - t_k)\mathcal{D}\Gamma(t_k)\| \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}\Gamma(t) + \mathcal{D}\Gamma(t_k)\| \, \mathrm{d}\, t \underset{(264)}{\leq} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varepsilon \, \mathrm{d}\, t = \varepsilon(t_{k+1} + t_k)$$

$$\implies \|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)\| \overset{\triangle}{\geq} \|(t_{k+1} - t_k)\mathcal{D}\Gamma(t_k)\| - \varepsilon(t_{k+1} - t_k) \tag{266}$$

$$(t_{k+1}-t_k)\,\|\mathcal{D}\Gamma(t_k)\| = \sqrt{(t_{k+1}-t_k)^2\Big(\gamma_1'(t_k)\Big)^2 + \dots + (t_{k+1}-t_k)^2\Big(\gamma_n'(t_k)\Big)^2} \tag{267}$$

Если взять $t \in [t_k, t_{k+1}]$, то

$$\|\mathcal{D}\Gamma(t_k)\| \geq \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| - \|\mathcal{D}\Gamma(t_k) - \mathcal{D}\Gamma(t)\| > \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| - \varepsilon$$

Проинтегрируем:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}\Gamma(t_k)\|\,\mathrm{d}\,t > \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t - \varepsilon\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{d}\,t$$

$$(t_{k+1}-t_k)\,\|\mathcal{D}\Gamma(t_k)\| \geq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t - \varepsilon(t_{k+1}-t_k) \tag{268}$$

$$(266), (267), (268) \implies \|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)\| > \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t - \varepsilon(t_{k+1}-t_k)$$

$$\implies \sum_{k=0}^{m-1} \|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)\| > \sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t - \varepsilon\sum_{k=0}^{m-1}(t_{k+1}-t_k) = \int_a^b \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t - \varepsilon(b-a)$$

$$\iff l\Big(\{\,\Gamma(t_k)\,\}_{k=0}^m\Big) > \int_a^b \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t - \varepsilon(b-a)$$

$$\implies l(\Gamma) > \int_a^b \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t - \varepsilon(b-a)$$

$$\implies l(\Gamma) \geq \int_a^b \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t$$

□

70. Определение криволинейного интеграла первого рода; суммы Римана криволинейного интеграла первого рода; криволинейный интеграл первого рода как предел сумм Римана

Определение 29. $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \qquad \Gamma \in C^1, \qquad f \in \mathcal{C}\big(\underset{(\text{образ})}{\Gamma}\big)$

Криволинейным интегралом первого рода по кривой Γ называется

$$\int\limits_{\Gamma} f(M)\,\mathrm{d}\,l(M) \coloneqq \int_a^b f\big(\Gamma(t)\big)\,\|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t$$

Определение 30. $\Gamma_\circ : [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad c_0 = a < c_1 < \dots < c_m = b$

$$\forall [c_k, c_{k+1}] \quad \Gamma_\circ([c_k, c_{k+1}]) - C^1\text{-кривая}$$

$f \in \mathcal{C}(\Gamma_0)$

Криволинейный интеграл первого рода для “кусочной” кривой определяется как

$$\int\limits_{\Gamma_0} f(M)\,\mathrm{d}\,l(M) = \sum_{k=0}^{m-1}\int\limits_{\Gamma_0([c_k, c_{k+1}])} f(M)\,\mathrm{d}\,l(M)$$

Определение 31. $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n - C^1$-кривая, $\qquad f \in \mathcal{C}(\Gamma)$

$\mathtt{T} = \{\,t_k\,\}_{k=1}^m, \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ — разбиение, $\qquad \mathtt{P} = \{\,\tau_k\,\}_{k=1}^m, \quad \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ — оснащение

$$\mathtt{S}_\Gamma(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) \coloneqq \sum_{k=1}^m f\big(\Gamma(\tau_k)\big)\,l\big(\Gamma([t_{k-1}, t_k])\big)$$

Теорема 58.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0: \quad \forall \mathtt{T}: t_k - t_{k-1} < \delta \quad \forall \mathtt{P} \quad \left| \mathtt{S}_\Gamma(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) - \int\limits_\Gamma f(M) \, \mathrm{d}\, l(M) \right| < \varepsilon$$

Доказательство. $\Gamma([a,b])$ — компакт в $\mathbb{R}^n$
$f \in \mathcal{C}(\Gamma) \xRightarrow[\text{т. Кантора}]{} f$ равномерно непрерывна на Γ, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \lambda > 0: \quad \forall M', M'' \in \Gamma: \quad \|M'' - M'\| < \lambda \implies |f(M'') - f(M')| < \varepsilon \tag{269}$$

$$\Gamma \in \mathcal{C}^1\big([a,b]\big)$$

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{bmatrix}, \qquad \gamma_k'(t) \in \mathcal{C}\big([a,b]\big)$$

$$\xRightarrow[\text{I т. Вейерештрасаа}]{} \exists\, c_1 : |\gamma_k'(t)| \le c_1 \quad \forall t \in [a,b] \quad \forall k$$

Рассмотрим любые два значения $t', t'' \in [a,b]$.
Применим теорему Лагранжа:

$$|\gamma_k(t'') - \gamma_k(t')| = |\gamma_k'(\widetilde{t})(t'' - t')| \le c_1 |t'' - t'|$$

$$\implies \sqrt{\Big(\gamma_1(t'') - \gamma_1(t')\Big)^2 + \dots + \Big(\gamma_n(t'') - \gamma_n(t')\Big)^2} \le \sqrt{n c^2 |t'' - t'|^2} = \sqrt{n} c_1 |t'' - t'| \tag{270}$$

$$\iff \|\Gamma(t'') - \Gamma(t')\| < \sqrt{n} c_1 |t'' - t'| \tag{271}$$

Выберем δ:

$$\delta := \frac{\lambda}{\sqrt{n} c_1}$$

$$(269), (270), (271), \text{def } \delta \implies \text{при } |t'' - t'| < \delta \quad \Big| f\big(\Gamma(t'')\big) - f\big(\Gamma(t')\big) \Big| < \varepsilon \tag{272}$$

Обозначим $M_k := \Gamma(\tau_k)$

$$\mathtt{S}_\Gamma(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) - \int\limits_\Gamma f(M) \, \mathrm{d}\, l(M) = \sum_{k=1}^m f\big(\Gamma(c_k)\big) l\big(\Gamma([t_{k-1}, t_k])\big) - \sum \int\limits_{\Gamma([t_{k-1}, t_k])} f(M) \, \mathrm{d}\, l(M) =$$
$$= \sum \int\limits_{\Gamma([t_{k-1}, t_k])} f(M_k) \, \mathrm{d}\, l(M) - \sum \int\limits_{\Gamma([t_{k-1}, t_k])} f(M) \, \mathrm{d}\, l(M) = \sum \int\limits_{\Gamma([t_{k-1}, t_k])} \Big(f(M_k) - f(M) \Big) \, \mathrm{d}\, l(M) \tag{273}$$

$$(272) \implies |f(M_k) - f(M)| < \varepsilon \tag{274}$$

$$\xRightarrow[(273)]{} |S_\Gamma(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) - \int\limits_\Gamma f(M) \, \mathrm{d}\, l(M)| \overset{\Delta}{\le} \sum_{k=1}^m \Bigg| \int\limits_{\Gamma([t_{k-1}, t_k])} \Big(f(M_k) - f(M) \Big) \, \mathrm{d}\, l(M) \le$$
$$\le \sum \int\limits_{\Gamma([t_{k-1}, t_k])} |f(M_k) - f(M)| \, \mathrm{d}\, l(M) \le \sum \int\limits_{\Gamma(t_{k-1}, t_k)} \varepsilon \, \mathrm{d}\, l(M) = \varepsilon l\big(\Gamma([t_{k-1}, t_k])\big) = \varepsilon l(\Gamma)$$

□

71. Ориентация кривой, ориентированные кривые

Определение 32. $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^{n \geq 2}$ — разомкнутая или замкнутая кривая.
$\Gamma(a)$ называется началом кривой, $\Gamma(b)$ — концом.
Начало и конец задают ориентацию кривой.

$$a < c_1 < \dots < c_m < b$$

Точки $\Gamma(a), \Gamma(c_1), \dots, \Gamma(c_m), \Gamma(b)$ проходятся в соответствии с выбранной ориентацией.

Рассмотрим образ кривой:

$$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$$

$$\Gamma(a) =: A, \qquad \Gamma(b) =: B, \qquad \Gamma(c_k) =: M_k$$

Точки $A, M_1, \dots, M_m, B$ проходятся в соответствии с выбранной ориентацией.

Можно выбрать т. н. обратную ориентацию:

$$\Gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

$$\Gamma_1(t) := \Gamma(a + b - t)$$

$$\Gamma_1(a) = \Gamma(b), \qquad \Gamma_1(b) = \Gamma(a)$$

Справедливо следующее топологическое утверждение:

Теорема 59. Если имеется разомкнутая или замкнутая кривая в $\mathbb{R}^n$ (здесь имеется в виду образ), то на ней можно ввести одну из двух ориентаций.

Без доказательства. □

При определении длины кривой мы вводили следующие суммы (записанные теперь через образ):

$$\sum_{k=0}^{m} \|M_{k+1} - M_k\|$$

Рассмотрим противоположную ориентацию:

$$M'_k = M_{m+1-k}$$

Поменяем индексы:

$$\sum_{k=0}^{m} \|M_{k+1} - M_k\| = \sum_{k=0}^{m} \|M_{m+1-k} - M_{m-k}\| = \sum_{k=0}^{m} \left\|M'_{k+1} - M'_k\right\|$$

Таким образом мы доказали, что

Утверждение 15. Длина кривой не зависит от ориентации.

Другая формулировка. Длина кривой зависит только от её образа.

Рассмотрим $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ — образ замкнутой кривой.
Пусть даны разбиение $\mathtt{T} = \{\, t_k \,\}$ и оснащение $\mathtt{P} = \{\, \tau_j \,\}$.

$$\Gamma(a) = A, \qquad \Gamma(b) = B, \qquad \Gamma(t_k) = M_k$$

$$A = B, \qquad \Gamma(\tau_j) =: N_j$$

Можно переписать суммы Римана в новых обозначениях:

$$\mathtt{S}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}) = \sum_{k=1}^{m} f(N_k) l\Big(\Gamma(M_{k-1}, M_k)\Big)$$

Они (при стремлении диаметра разбиения к нулю) стремились к интегралу первого рода.
Аналогично длине кривой, здесь можно поменять индексы определённым образом.
Таким образом верно следующее:

Утверждение 16. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой.

72. Определение криволинейного интеграла второго рода; суммы Римана криволинейного интеграла второго рода; криволинейный интеграл второго рода как предел интегральных сумм

Определение 33.

$$\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{bmatrix} — C^1\text{-кривая}, \qquad f \in \mathcal{C}(\Gamma)$$

Криволинейным интеграл второго рода по ориентированной кривой функции f называется

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j := \int_a^b f\big(\Gamma(t)\big)\gamma_j'\,\mathrm{d}\,t$$

Определение 34.

$$c_0 = a < c_1 < \dots < cm < b = c_{m+1}$$

$$\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}[a,b], \qquad \Gamma([c_{k-1},c_k]) — C^1\text{-кривая при } k = 1,\dots,m+1$$

Тогда

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j := \sum_{k=1}^{m+1} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}([c_{k-1},c_k])} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j$$

Определение 35. $\Gamma — C^1$-кривая, $\quad f \in \mathcal{C}(\Gamma), \quad \mathtt{T} = \{\, t_k \,\}_{k=0}^m, \quad \mathtt{P} = \{\, \tau_k \,\}_{k=1}^m, \quad \tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$
Суммой Римана для интеграла второго рода будем называть

$$\mathtt{S}_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}}(f,\mathtt{T},\mathtt{P},j) = \sum_{k=1}^m f\big(\Gamma(\tau_k)\big)\Big(\gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1})\Big)$$

Теорема 60. $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma} — C^1$-кривая

$$\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 : \quad \forall \mathtt{T} : t_{k+1} - t_k < \delta \quad \forall \mathtt{P} \quad \left| \mathtt{S}_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}}(f,\mathtt{T},\mathtt{P},j) - \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j \right| < \varepsilon$$

Доказательство. $\gamma_\nu' \in \mathcal{C}\big([a,b]\big)$

$$c_1 > 0 \quad |\gamma_n'(t)| \le c_1 \quad \forall t \in [a,b], \quad \nu = 1,\dots,n$$

$$\int_a^b f\big(\Gamma(t)\big)\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}\,t \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f\big(\Gamma(t)\big)\,\mathrm{d}\,t$$

$$\implies \mathtt{S}(\dots) - \int_a^b f\big(\Gamma(t)\big)\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}\,t \xlongequal{\text{def } \mathtt{S}}$$

$$= \sum_{k=1}^m \left(f\big(\Gamma(\tau_k)\big)\big(\gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_k)\big) - \int_{t_{k-1}}^{t_k} f\big(\Gamma(t)\big)\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}\,t \right) \xlongequal[\text{ф. Ньютона–Лейбница}]{}$$

$$= \sum_{k=1}^m \left(f\big(\Gamma(\tau_k)\big) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma_j'(t)\,\mathrm{d}\,t - \int_{t_{k-1}}^{t_k} f\big(\Gamma(t)\big)\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}\,t \right) \xlongequal[\substack{\text{в первом слагаемом вносим константу} \\ \text{разность интегралов как интеграл разности}}]{}$$

$$= \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Big(f\big(\Gamma(\tau_k)\big) - f\big(\Gamma(t)\big)\Big)\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}\,t \qquad (275)$$

По теореме Кантора f равномерно непрерывна на Γ:

$$\exists\,\lambda > 0: \quad \forall M', M'' \in \Gamma \quad \Big(\|M'' - M'\| < \lambda \implies |f(M'') - f(M')| < \varepsilon \Big) \tag{276}$$

В конце прошлой лекции мы выяснили, что

$$|t'' - t'| < \delta \implies \|\Gamma(t'') - \Gamma(t')\| \le c_1\sqrt{n}\delta \tag{277}$$

c_1 играло ту же роль, что сейчас ε.
Выберем δ так, чтобы выполнялось

$$c_1\sqrt{n}\delta = \lambda \tag{278}$$

Если $t_k - t_{k-1} < 0$, то при $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $\quad \tau \in [t_{k-1}, t_k]$ выполнено

$$|t - \tau| < \delta, \qquad k = 1, \dots, m$$

Тогда

$$(276), (277), (278) \implies \Big| f\big(\Gamma(\tau_k)\big) - f\big(\Gamma(t)\big) \Big| < \varepsilon$$

$$\underset{(275)}{\implies} \Big| \mathtt{S}_{\overset{\smile}{\Gamma}}(\dots) - \int\limits_{\overset{\smile}{\Gamma}} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j \Big| \overset{\triangle}{\le} \sum_{k=1}^{m} \Big| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Big(f\big(\Gamma(\tau_k)\big) - f\big(\Gamma(t)\big) \Big) \gamma_j'\,\mathrm{d}\,t \Big| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Big| f\big(\Gamma(\tau_k)\big) - f\big(\Gamma(t)\big) \Big| \cdot |\gamma_j'|\,\mathrm{d}\,t < \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varepsilon |\gamma_j'(t)|\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \varepsilon \int_a^b |\gamma_j'(t)|\,\mathrm{d}\,t \underset{|\gamma_j'(t)| \le \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|_n}{\le} \varepsilon \int_a^b \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|\,\mathrm{d}\,t = \varepsilon l(\Gamma)$$

□

73. Зависимость криволинейного интеграла второго рода от ориентации кривой

Следствие.

$$\Gamma(t_k) =: M_k = \begin{bmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix}, \qquad \Gamma(\tau_k) =: N_k$$

$$\implies x_{jk} = \gamma_j(t_k)$$

$$\implies \mathtt{S}_{\overset{\smile}{\Gamma}}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}, j) = \sum_{k=1}^{m} f(N_k)(x_{jk} - x_{j\ k-1})$$

N_k лежит на дуге $\Gamma(M_{k-1}, M_k)$
В этой формуле нет отображения. Есть только образ и ориентация.
Значит, криволинейный интеграл второго рода зависит только от образа и ориентации кривой.

Свойство. Определим $t'_\nu := t_{m-\nu}$, $\quad \tau'_\nu := \tau_{m-\nu+1}$

$$\mathtt{T}' := \{\, t_k \,\}_{k=0}^{m}, \qquad \mathtt{P}' := \{\, \tau_k \,\}_{m=1}^{m}, \qquad M'_\nu = M_{m-\nu}, \qquad N'_\nu = N_{m-\nu+1}$$

В соответствии с выбранной ориентацией проходились точки $M_0, \dots, M_m$
Точки $M'_0, \dots, M'_m$ — это те же самые точки, проходимые в обратном порядке. То есть мы имеем дело с противоположной ориентацией $\overset{\frown}{\Gamma}$

$$x'_{j\nu} = x_{j\ m-\nu}$$

$$\widetilde{\mathtt{S}} = \sum_{k=1}^{m} f(N'_k)(x'_{jk} - x'_{j\ k-1}) = \boxed{\mathtt{S}_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}}(f, \mathtt{T}', \mathtt{P}', j)} = \sum_{k=1}^{m} f(N_{m-k+1})(x_{j\ m-k} - x_{j\ m-k+1}) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{m} f(N_{m-k+1})(x_{j\ m-k+1} - x_{j\ m-k}) \xlongequal[m-k+1=:\nu]{} -\sum_{\nu=m}^{1} f(N_\nu)(x_{j\nu} - x_{j\ \nu-1}) \xlongequal[k:=\nu]{} \boxed{-\mathtt{S}_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}, j)}$$

74. Свойства криволинейного интеграла второго рода

Свойства.

1. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} = \bigcup_{j=1}^{l} \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_j, \qquad \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_j — C^1$-кривая, $\qquad f \in \mathcal{C}(\Gamma)$

$$\Longrightarrow \int_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(M)\ \mathrm{d}\,x_j = -\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M)\ \mathrm{d}\,x_j$$

2. $\Gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \qquad \Gamma(t) \in \mathcal{C}\big([a,b]\big), \qquad c \in \mathbb{R}$

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}[a,b]} c\ \mathrm{d}\,x_j = c\big(\gamma_j(b) - \gamma_j(a)\big)$$

В частности, если $\Gamma(a) = \Gamma(b)$, то

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} = \mathrm{d}\,x_j 0$$

3. $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} = \bigcup_{\nu=1}^{l} \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_\nu, \qquad f \in \mathcal{C}(\Gamma)$

$$\left| \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M)\ \mathrm{d}\,x_j \right| \le \int_{\Gamma} |f(M)|\ \mathrm{d}\,l(M)$$

Доказательство.

1. • Докажем для C^1-кривой (не кусочной):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall \mathtt{T} \quad \forall \mathtt{P} : t_k - t_{k-1} < \delta \quad \left| \mathtt{S}_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}}(f, \mathtt{T}, \mathtt{P}, j) - \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M)\ \mathrm{d}\,x_j \right| < \varepsilon$$

В силу свойства о зависимости от ориентации,

$$\left| \mathtt{S}_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}}(f, \mathtt{T}', \mathtt{P}', j) - \int_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(M)\ \mathrm{d}\,x_j \right| < \varepsilon$$

$$\left|\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j + \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j\right| =$$

$$= \left|\left(\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j - \mathtt{S}_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}}(f,\mathtt{T},\mathtt{P},j)\right) + \left(\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j - \mathtt{S}_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}}(f,\mathtt{T}',\mathtt{P}',j)\right)\right| \overset{\triangle}{\leq}$$

$$\leq \left|\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j - \mathtt{S}_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}}(f,\mathtt{T},\mathtt{P},j)\right| + \left|\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j - \mathtt{S}_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}}(f,\mathtt{T}',\mathtt{P}',j)\right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

- Общий случай:

$$\overset{\curvearrowright}{\Gamma} = \bigcup_{\nu=1}^{l} \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_\nu \iff \overset{\curvearrowleft}{\Gamma} = \bigcup_{\nu=1}^{l} \overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_\nu$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{l} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_\nu} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j = \sum_{\nu=1}^{l}\left(-\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_\nu} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j\right) =$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{l}\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j$$

2. - C^1-кривая

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{d}\,x_j \int_a^b c\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}\,t \xlongequal[\text{ф. Ньютона–Лейбница}]{} c\big(\gamma_j(b) - \gamma_j(a)\big)$$

- $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} = \bigcup_{\nu=1}^{l} \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_\nu, \qquad \Gamma([t_{k-1}, t_k]) - C^1$-кривая

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} c\,\mathrm{d}\,x_j \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{l} \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}[t_{\nu-1},t_\nu]} = \mathrm{d}\,x_j \sum_{\nu=1}^{l} c\big(\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1})\big) = c\big(\gamma(t_l) - \gamma(t_0)\big) \xlongequal{\text{def } t_0, t_l} c\big(\gamma(b) - \gamma(a)\big)$$

3. - $\Gamma \in C^1$

$$\left|\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j\right| \overset{\text{def}}{=} \left|\int_a^b f\big(\Gamma(t)\big)\gamma_j'(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \leq \int_a^b |f\big|(\Gamma(t))\big| \cdot |\gamma_j'(t)|\,\mathrm{d}\,t \leq$$

$$\leq \int_a^b \big|f\big(\Gamma(t)\big)\big|\,\|\mathcal{D}\Gamma(t)\|_n\,\mathrm{d}\,t \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\Gamma} f(M)\,\mathrm{d}\,l(M)$$

- $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} = \bigcup_{\nu=1}^{l} \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_\nu, \qquad \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_\nu - C^1$-кривая

$$\left|\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j\right| \overset{\text{def}}{=} \left|\sum_{\nu=1}^{l}\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_\nu} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j\right| \leq \sum_{\nu=1}^{l}\left|\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_\nu} f(M)\,\mathrm{d}\,x_j\right| \overset{\triangle}{\leq}$$

$$\leq \sum_{\nu=1}^{l}\int\limits_{\Gamma_\nu} |f(M)|\,\mathrm{d}\,l(M) = \int\limits_{\Gamma} f(M)\,\mathrm{d}\,l(M)$$

$\square$

Часть IV

Теория функции комплексной переменной

75. Определение аналитической в области функции

Определение 36. $E \subset \mathbb{C}$ — область, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) : E \to \mathbb{C}$, $u, v : E* \to \mathbb{R}$
Будем говорить, что $f \in \mathcal{C}^1\big(E\big)$, если $u \in \mathcal{C}^1\big(E^*\big)$ и $v \in \mathcal{C}^1\big(E^*\big)$

Утверждение 17. $f \in \mathcal{C}^1\big(E\big)$
Тогда f дифференцируема в $\forall z \in E$.

Доказательство. По определению $u, v \in \mathcal{C}^1\big(E^*\big)$, поэтому по достаточному условию дифференциуемости функции u, v дифференцируемы для $\forall (x,y) \in E$.
Тогда, по определению, $f^*(x,y)$ дифференцируема $\forall (x,y) \in E$.
Значит, f дифференцируема для $\forall z \in E$. □

Определение 37. $E \subset \mathbb{C}$ — область, $f : E \to \mathbb{C}$
Функцию f будем называть аналитической, если

1. $f \in \mathcal{C}^1\big(E\big)$;
2. $\forall z \in E \quad f'_{\overline{z}} = 0$.

Замечание. По предыдущему утверждению $f(z)$ дифференцируема $\forall z \in E$, поэтому для $\forall z \in E$ определены $f'_x(z), f'_y(z), f'_z(z), f'_{\overline{z}}(z)$.

Обозначение. Множество всех функций, аналитических в E, будем обозначать $A(E)$.

76. Свойства частных производных комплекснозначных функций

Свойства. $E \subset \mathbb{C}$ — область, $z \in E$, f, g дифференцируемы в z,
λ — любой из символов $x, y, z, \overline{z}$.

1. $\Big(cf(z)\Big)'_\lambda = cf'_\lambda(z)$
2. $\Big(f(z) + g(z)\Big)'_\lambda = f'_\lambda(z) + g'_\lambda(z)$
3. $\Big(f(z)g(z)\Big)'_\lambda = f'_\lambda(z)g(z) + f(z)g'_\lambda(z)$
4. $f(z) \neq 0$
$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)'_\lambda = -\frac{f'_\lambda(z)}{f^2(z)}$$
5. $f(z) \neq 0$
$$\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right)'_\lambda = \frac{g'_\lambda(z)f(z) - g(z)f'_\lambda(z)}{f^2(z)}$$

Доказательство. Доказательства проводятся проверкой возникающих тождеств. Докажем для примера 4 при $\lambda = x$ и при $\lambda = \overline{z}$.
Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $f'_x(z) = u'_x + iv'_x$ (далее не будем писать вргументы).

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{u + iv} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} = \frac{u}{u^2 + v^2} - i\frac{v}{u^2 + v^2}$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'_x = \left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)'_x - i\left(\frac{v}{u^2+v^2}\right)'_x = \frac{u'_x(u^2+v^2)-2u(uu'_x+vv'_x)}{(u^2+v^2)^2} - i\frac{v'_x(u^2+v^2)-2v(uu'_x+vv'_x)}{(u^2+v^2)^2} =$$
$$= \frac{u'_xv^2-2uvv'_x-u^2ux'-i(v'_xu^2-2uvu'_x-v^2v'_x)}{(u^2+v^2)^2} = \frac{(u'_x+iv'_x)(v^2-u^2)-2uv(v'_x-iu'_x)}{(u^2+v^2)^2} =$$
$$= \frac{f'_x(v^2-u^2)+2uvi(u'_x+iv'_x)}{(u^2+v^2)^2} = f'_x\cdot\frac{v^2-u^2+2uvi}{(u^2+v^2)^2} = f'_x\cdot\frac{(v+iu)^2}{(u^2+v^2)^2} = -f'_x\cdot\frac{(u-iv)^2}{(u^2+v^2)^2} =$$
$$= -f'_x\cdot\frac{((u-iv)^2)}{(u-iv)^2(u+iv)^2} = -f'_x\cdot\frac{1}{(u+iv)^2} = -\frac{f'_x}{f^2}$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{f}\right)'_x + i\left(\frac{1}{f}\right)'_y\right] = \frac{1}{2}\left(-\frac{f'_x}{f^2} - i\frac{f'_y}{f^2}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{f^2}(f'_x+if'_y) = -\frac{f'_{\overline{z}}}{f^2}$$

$\square$

77. Формула для дифференцируемой функции

Определение 38. Пусть $E\subset\mathbb{C}$ — область, $z_\circ\in E$, $f: E\to\mathbb{C}$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$
$u,v: E^*\to\mathbb{R}$

Будем говорить, что f дифференцируема в точке $z_\circ$, если $f^*(x,y)$ дифференцируема в точке $(x_\circ,y_\circ)$ в следующем смысле:
функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке $(x_\circ,y_\circ)$.

Пусть $\sigma\coloneqq s+it$, $E\subset\mathbb{C}$ — область, $z_\circ\in E$, $z_\circ+\sigma\in E$, $z_\circ\leftrightarrow(x_\circ,y_\circ)$
Предположим, что $f(z)$ дифференцируема в точке $z_\circ$.

Тогда

$$f(z_\circ+\sigma)-f(z_\circ) = f^*(x_\circ+s,y_\circ+t)-f^*(x_\circ,y_\circ) = \Big(u(x_\circ+s,y_\circ+t)-u(x_\circ,y_\circ)\Big)+i\Big(v(x_\circ+s,y_\circ+t)-v(x_\circ,y_\circ)\Big) \tag{279}$$

В силу дифференцируемости f

$$u(x_\circ+s,y_\circ+t)-u(x_\circ,y_\circ) = u'_x(x_\circ,y_\circ)s+u'_y(x_\circ,y_\circ)t+r_1(s,t),\qquad \frac{|r_1(s,t)|}{\sqrt{s^2+t^2}} = \frac{|r_1(s,t)|}{|\sigma|} \xrightarrow[\sigma\to0]{} 0$$

$$v(x_\circ+s,y_\circ+t)-v(x_\circ,y_\circ) = v'_x(x_\circ,y_\circ)s+v'_y(x_\circ,y_\circ)t+r_2(s,t),\qquad \frac{|r_2(s,t)|}{|\sigma|} \xrightarrow[\sigma\to0]{} 0$$

Отсюда

$$(279) = \Big(u'_x(x_\circ,y_\circ)s+u'_y(x_\circ,y_\circ)t+r_1(s,t)\Big)+i\Big(v'_x(x_\circ,y_\circ)s+v'_y(x_\circ,y_\circ)t+r_2(s,t)\Big) =$$
$$= \Big(u'_x(x_\circ,y_\circ)+iv'_x(x_\circ,y_\circ)\Big)s+\Big(u'_y(x_\circ,y_\circ)+iv'_y(x_\circ,y_\circ)\Big)t+r_1(s,t)+ir_2(s,t) =$$
$$= f'_x(z_\circ)s+f'_y(z_\circ)t+r_1(s,t)+ir_2(s,t)$$

Положим $\rho(\sigma)\coloneqq r_1(s,t)+ir_2(s,t)$. Тогда

$$\frac{|\rho(\sigma)|}{|\sigma|} = \frac{\sqrt{r_1^2(s,t)+r_2^2(s,t)}}{|\sigma|} = \sqrt{\left(\frac{r_1(s,t)}{|\sigma|}\right)^2+\left(\frac{r_2(s,t)}{|\sigma|}\right)^2} \xrightarrow[\sigma\to0]{} 0 \tag{280}$$

Понятно, что

$$s=\frac{1}{2}(\sigma+\overline{\sigma}),\qquad t=\frac{1}{2i}(\sigma-\overline{\sigma}) = -\frac{i}{2}(\overline{\sigma}-\sigma)$$

Поэтому

$$f(z_\circ+\sigma)-f(z_\circ) = f'_x(z_\circ)\cdot\frac{1}{2}(\sigma+\overline{\sigma})+\frac{i}{2}f'_y(z_\circ)(\overline{\sigma}-\sigma)+\rho(\sigma) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(f'_x(z_\circ)-if'_y(z_\circ)\Big)\sigma+\frac{1}{2}\Big(f'_x(z_\circ)+if'_y(z_\circ)\Big)\overline{\sigma}+\rho(\sigma) = f'_z(z_\circ)\sigma+f_{\overline{z}}(z_\circ)\overline{\sigma}+\rho(\sigma) \tag{281}$$

где для $\rho(\sigma)$ выполнено (280).

78. Первые свойства и первые примеры аналитических функций

Свойства. $f, g \in A(E), \qquad c \in E$

1. $cf \in A(E)$
2. $f + g \in A(E)$
3. $fg \in A(E)$
4. $f(z) \neq 0$
$$\implies \frac{1}{f} \in A(E)$$
5. $f(z) \neq 0$
$$\implies \frac{g}{f} \in A(E)$$

Доказательство. Следует из свойств частных производных, например, 4:

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)'_{\overline{z}} = -\frac{f'_{\overline{z}}(z)}{f^2(z)} = \frac{0}{f^2(z)} = 0$$

□

Примеры.

1. $f(z) \equiv c, \qquad c \in \mathbb{C}$
$$c'_x = c'_y \equiv 0 \qquad \implies c'_{\overline{z}} \equiv 0$$
2. $f(z) \equiv z$
Уже проверено, что $z'_{\overline{z}} \equiv 0$
3. Пользуясь свойствами аналитических функций 1., 2., 3. и предыдущими примерами, получаем
$$z^2 \in A(\mathbb{C}), \quad z^3 \in A(\mathbb{C}), \quad \dots, \quad z^n \in A(\mathbb{C})$$
$$P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n \in A(\mathbb{C})$$
4. Для $z = x + iy$ положим $e^z := e^y \cos y + ie^x \sin y$. Тогда
$$(e^z)'_x = (e^x \cos y)'_x + i(e^x \sin y)'_x = e^x \cos y + ie^x \sin y$$
$$(e^z)'_y = (e^x \cos y)'_y + i(e^x \sin y)'_y = -e^x \sin y + ie^x \cos y$$
$$(e^z)'_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\Big((e^z)'_x + i(e^z)'_y\Big) = \frac{1}{2}\Big(e^x \cos y + ie^x \sin y + i(-e^x \sin y + ie^x \cos y)\Big) = 0$$
5. Пусть $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n, \quad Q(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m, \quad m \geq 1, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ — все различные корни уравнения $Q(z) = 0, \quad k \leq m$.
Тогда по примеру 3. и свойству 5.
$$\frac{P(z)}{Q(z)} \in A\Big(\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^{k} \{\, \alpha_j \,\}\Big)$$
6. Пусть $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \qquad$ для $z \in D$ пусть φ — аргумент $z, \quad -\pi < \varphi < \pi$.
Положим $\ln z := \ln |z| + i\varphi$ для $z \in D$.
Если $z = x + iy, \quad |z| > 0, \quad z \in D$, то φ может быть определён разными формулами при $x > 0$, при $y \geq 0$ или при $y \leq 0$.
Например, при $x > 0 \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ и тогда
$$\ln z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = i \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = i \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Тогда

$$(\ln z)'_x = \left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)'_x + i\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$(\ln z)'_y = \left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)'_y + i\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{y}{x^2+y^2} + i\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\right) = \frac{y}{x^2+y^2} + i\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$(\ln z)'_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\left((\ln z)'_x + i(\ln z)'_y\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} + i\left(\frac{y}{x^2+y^2} + i\frac{x}{x^2+y^2}\right)\right) = 0$$

Аналогично, $(\ln z)'_{\overline{z}} = 0$ при $y \geq 0$ и при $y \leq 0$. Получаем

$$\ln z \in A(D)$$

Утверждение 18 (ещё одно свойство аналитических функций). $f \in A(E)$, E — область, $z \in E$, $\sigma \in \mathbb{C}$, $z+\sigma \in \mathbb{C}$

Тогда

$$f(z+\sigma) - f(z) = f'_z(z)\sigma + \rho(\sigma), \qquad \frac{|\rho(\sigma)|}{|\sigma|} \xrightarrow[\sigma\to 0]{} 0 \tag{282}$$

Доказательство. Из (281) и того, что $f \in A(E)$ следует, что

$$f(z-\sigma) - f(z) = f'_z(z)\sigma + f'_{\overline{z}}(z)\overline{\sigma} + \rho(\sigma) = f'_z(z)\sigma + \rho(\sigma)$$

где выполнено (280). □

79. Эквивалентные определения аналитических функций

Теорема 61. $E \subset \mathbb{C}$ — область, $f \in \mathcal{C}^1(E)$, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

Следующие условия эквивалентны

1. $f'_{\overline{z}}(z) = 0 \quad \forall z \in E$
2. $f(z+\sigma) = f'_z(z)\sigma + \rho(\sigma) \quad \forall z \in E, \qquad \frac{|\rho(\sigma)|}{|\sigma|} \xrightarrow[\sigma\to 0]{} 0$
3. $\forall z = x+iy$ выполнены уравнения Коши—Римана:
$$\left.\begin{aligned} u'_x(x,y) &= v'_y(x,y) \\ u'_y(x,y) &= -v'_x(x,y) \end{aligned}\right\}$$
4. $$\forall z \in E \quad \exists \lim_{\sigma\to 0}\frac{f(z+\sigma)-f(z)}{\sigma} \in \mathbb{C}$$
Этот предел называется комплексной призводной функции f в точке z и обозначается $f'(z)$.

Доказательство.

- Из (282) следует, что 1. $\implies$ 2.
- Если выполнено 2., то
$$\frac{f(z+\sigma)-f(z)}{\sigma} = f'_z(z) + \frac{\rho(\sigma)}{\sigma} \xrightarrow[\sigma\to 0]{} f'_z(z),$$
поэтому 2. $\implies$ 4., при этом получаем равенство
$$f'(z) = f'_z(z)$$
- Предположим, что выполнено 4.

Положим
$$\frac{f(z+\sigma)-f(z)}{\sigma} \coloneqq f'(z)=\delta(\sigma)$$
$$\implies f(z+\sigma)-f(z)=f'(z)\sigma+\sigma\delta(\sigma)$$
Положим $\rho_\circ(\sigma)\coloneqq \sigma\delta(\sigma)$. Тогда
$$4. \implies \frac{|\rho_\circ(\sigma)|}{|\sigma|}=|\delta(\sigma)|\xrightarrow[\sigma\to 0]{}0$$
Запишем для f формулу (281):
$$f(z+\sigma)-f(z)=f'_z(z)\sigma+f'_{\overline{z}}(z)\overline{\sigma}+\rho(\sigma), \qquad \frac{|\rho(\sigma)|}{|\sigma|}\xrightarrow[\sigma\to 0]{}0$$
Вычитая из неё предыдущую формулу, получаем
$$f'_z(z)\sigma+f'_z(z)\overline{\sigma}+\rho(\sigma)-f'(z)\sigma-\rho_\circ(\sigma)=0$$
Делим на σ:
$$f'_z(z)-f'(z)+f'_{\overline{z}}(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}+\frac{\rho(\sigma)}{\sigma}-\frac{\rho_\circ(\sigma)}{\sigma}=0$$
или
$$f_{[}\overline{z}]'(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}=f'(z)-f'_z(z)+\frac{\rho_\circ(\sigma)}{\sigma}-\frac{\rho(\sigma)}{\sigma}$$
$$f'(z)-f'_z(z)+\frac{\rho_\circ(\sigma)}{\sigma}-\frac{\rho(\sigma)}{\sigma}\xrightarrow[\sigma\to 0]{}f'(z)-f'_z(z)$$
Следовательно, существует $\lim\limits_{\sigma\to 0}f'_{\overline{z}}(z)\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}\eqqcolon A$.

Если $\sigma=s>0$, то $\overline{\sigma}=\sigma$ и
$$a=\lim_{\sigma\to 0^+}f'_{\overline{z}}(z)\cdot 1=f'_{\overline{z}}(z)$$
Если положить $\sigma=it, \quad t>0$, то $\overline{\sigma}=-it$, и
$$A=\lim_{t\ to0^+}f'_{\overline{z}}\cdot\frac{-it}{it}=-f'_{\overline{z}}$$
$$\implies f'_{\overline{z}}=A=0$$
То есть, 4. $\implies$ 1. и
$$f'_z(z)=f'(z)$$

- Далее,
$$f'_x(z)=u'_x(x,y)+iv'_x(x,y), \qquad f'_y(z)=u'_y(x,y)+iv'_y(x,y)$$
$$f'_{\overline{z}}=\frac{1}{2}\Big(f'_x(z)+if'_y(z)\Big)=\frac{1}{2}\Big(\big(u'_x(x,y)+iv'_x(x,y)\big)+i\big(u'_y(x,y)+iv'_y(x,y)\big)\Big)=$$
$$=\frac{1}{2}\Big(\big(u'_x(x,y)-v'_y(x,y)\big)+i\big(v'_x(x,y)+u'_y(x,y)\big)\Big)$$
Отсюда 1. $\iff$ 3.

$\square$

Следствие. $f\in A(E)$
$$\implies f'(z)=f'_x(z), \qquad z\in E$$

Доказательство. Имеем
$$f'_z=\frac{1}{2}(f'_x-if'_y), \qquad f'_{\overline{z}}=\frac{1}{2}(f'_x+if'_y)$$
$$\implies f'_x=f'_z+f'_{\overline{z}}$$

$$f \in A(E) \implies f'_z = f'_z + 0 = f'_z = f'$$

□

80. Аналитичность суперпозиции аналитических функций; производная суперпозиции

Теорема 62. $E, G \subset \mathbb{C}$ — области, $\quad f \in A(E), \quad f(z) \in G \quad \forall z \in E, \quad \varphi \in A(G)$
$F : E \to \mathbb{C}, \quad F(z) \coloneqq \varphi\big(f(z)\big)$
Тогда $F \in A(E)$.

Доказательство. По определению $f \in \mathcal{C}^1\big(E\big), \quad \varphi \in \mathcal{C}^1\big(G\big)$.
Поэтому, по теореме о матрице Якоби, выполнено соотношение

$$F(z) = \varphi\big(f(z)\big) \in \mathcal{C}^1\big(E\big)$$

Фиксируем $\forall z \in E$.
Пусть $\sigma \in \mathbb{C}, \quad \sigma \neq 0, \quad z + \sigma \in E$.
Пусть $w \coloneqq f(z), \quad w \in G$.
Будем использовать теорему об эквивалентных определениях аналитических функций.
Пусть $\lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \neq 0, \quad w + \lambda \in G$.
Из условия следует соотношение

$$\varphi(w + \lambda) - \varphi(w) = \varphi'(w)\lambda + r(\lambda), \qquad \frac{|r(\lambda)|}{|\lambda|} \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0$$

Положим $r(\lambda) \eqqcolon \lambda\delta(\lambda)$. Тогда $\delta(\lambda) \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0$.
Положим $\delta(0) \coloneqq 0$. Тогда можно не рассматривать ограничение $\lambda \neq 0$ при следующей записи:

$$\varphi(w + \lambda) - \varphi(w) = \varphi'(w)\lambda + \lambda\delta(\lambda)$$

(в этих формулах мы пользовались соотношением $\varphi'_w(w) = \varphi'(w)$).
Положим $\lambda \coloneqq f(z + \sigma) - f(z)$. Тогда $f(z + \sigma) = f(z) + \lambda = w + \lambda$

$$F(z + \sigma) - F(z) = \varphi\big(f(z + \sigma)\big) - \varphi\big(f(z)\big) = \varphi(w + \lambda) - \varphi(w) = \varphi'(w)\lambda + \lambda\delta(\lambda) =$$
$$= \varphi'(w)\lambda + \Big(f(z + \sigma) - f(z)\Big)\delta\Big(f(z + \sigma) - f(z)\Big)$$

$$\lambda = f(z + \sigma) - f(z) = f'(z)\sigma + \rho(\sigma), \qquad \frac{|\rho(\sigma)|}{|\sigma|}$$

Получаем:

$$F(z + \sigma) - F(z) = \varphi'(w)\Big(f'(z)\sigma + \rho(\sigma)\Big) + \Big(f(z + \sigma) - f(z)\Big)\delta\Big(f(z + \sigma) - f(z)\Big) =$$
$$= \varphi'(2)f'(z)\sigma + \underbrace{\varphi'(w)\rho(\sigma) + \Big(f(z + \sigma) - f(z)\Big)\delta\Big(f(z + \sigma) - f(z)\Big)}_{R(\sigma)}$$

$$\frac{R(\sigma)}{\sigma} = \varphi'(w)\frac{\rho(\sigma)}{\sigma} + \frac{f(z + \sigma) - f(z)}{\sigma}\delta\Big(f(z + \sigma) - f(z)\Big) \xrightarrow[\sigma \to 0]{} \varphi'(w) \cdot 0 + f'(z) \cdot 0 = 0$$

Значит, $F \in A(E)$. □

Следствие. Из последних двух выражений и теоремы о равносильных определениях аналитичности получаем равенство

$$F'(z) = \Big(\varphi\big(f(z)\big)\Big)' = \varphi'\big(f(z)\big) \cdot f'(z) \tag{283}$$

81. Вычисление $(e^z)'$, $(\ln z)'$, $(z^\alpha)'$

Примеры.

1. Если $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$, то $e^{P(z)} \in A(\mathbb{C})$
2. Пусть $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, $\quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \alpha \neq 0$
   Уже проверено, что
   $$\ln z \in A(D) \implies \alpha \ln z \in A(D) \implies e^{\alpha \ln z} \in A(D)$$
   Далее полагаем при $z \in D \quad z^\alpha := e^{\alpha \ln z}$.

   Рассмотрим случай $\alpha = 1$.
   $$\ln z \overset{\text{def}}{=} \ln|z| + i\varphi$$
   $$e^{\ln z} = e^{\ln|z| + i\varphi} \overset{\text{def}}{=} e^{\ln|z|} \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z$$
   Полагая $\ln z = f(z), \quad e^w = \varphi(w)$, из (283) находим
   $$(e^{\ln z})' = (e^w)' \cdot (\ln z)'$$
   Пусть $w = u + iv$
   $$(e^w)' = (e^w)'_u = (e^u \cos v + ie^u \sin v)'_u = e^u \cos v + ie^u \sin v = e^w$$
   Если $w = \ln z$, то
   $$(e^w)' = e^w = e^{\ln z} = z$$
   $$\implies (e^{\ln z})' = z(\ln z)'$$
   Но $e^{\ln z} = z$
   $$\implies (e^{\ln z})' = z' = z'_x = (x + iy)'_x = 1$$
   Поэтому
   $$z(\ln z)' = 1, \qquad (\ln z)' = \frac{1}{z}, \qquad z \in D$$
   Находим при $\alpha \neq 0, 1, \quad z \in D$:
   $$(z^\alpha)' = (e^{\alpha \ln z})' = (e^w)'_{w=\alpha\ln z} \cdot (\alpha \ln z)' = e^{\alpha \ln z} \cdot (\alpha \ln z)'_x = \alpha e^{\alpha \ln z} \cdot (\ln z)'_x = \alpha e^{\alpha \ln z} \cdot (\ln z)' =$$
   $$= \alpha e^{\alpha \ln z} \cdot \frac{1}{z} = \alpha e^{\alpha \ln z} \cdot e^{-\ln z} = \alpha \cdot e^{(\alpha - 1)\ln z} = \alpha z^{\alpha - 1}$$
   Здесь использовалась формула $\dfrac{1}{e^w} = e^{-w}$. Действительно, если $w = u + iv$, то
   $$\frac{1}{e^w} = \frac{1}{e^u(\cos v + i\sin v)} = e^{-u} \cdot \frac{1}{\cos v + i \sin v} = e^{-u} \cdot \frac{\cos v - i\sin v}{\cos^2 v + \sin^2 v} =$$
   $$= e^{-u}\big(\cos(-v) + i\sin(-v)\big) = e^{-u-iv} = e^{-w}$$

82. Аналитичность суммы степенного ряда

Теорема 63. Пусть дан степенной ряд
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_\circ)^n \tag{284}$$
$R > 0$ — его радиус сходимости, $\quad$ B — круг сходимости, $\quad z \in$ B.
Тогда $f \in A(\text{B})$.

Существует комплексная производная $f'(z)$:

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n(z - z_\circ)^{n-1} \tag{285}$$

Доказательство.

- Рассмотрим сначала случай, когда $z_\circ = 0$.

  Поскольку $|z| < R, \quad \exists\, r: \quad |r| + r < R$. Зафиксируем z и r.
  Так как $|z| + r < R$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c|(|z| + r)^n < \infty \tag{286}$$

  и $\overline{\mathtt{B}}_r(z) \subset \mathtt{B}$, то есть

$$\forall w \in \mathbb{C} : |w| \le r \quad z + w \in \mathtt{B} \quad \implies f(z+w) \text{ абс. сходится}$$

  Докажем, что при $w \to 0$ дробь $\frac{f(z+w)-f(z)}{w}$ стремится к правой части (285) с $z_\circ = 0$, то есть к сумме $A \coloneqq \sum nc_n z^{n-1}$.
  Для этого надо показать, что при $w \to 0$ бесконечно мала разность

$$\Delta w \coloneqq \frac{f(z+w) - f(z)}{w} - A = \frac{1}{w}\sum c_n\big((z+w)^n - z^n\big) - A = \sum c_n\left(\frac{(z+w)^n - z^n}{w} - nz^{n-1}\right)$$

  В полученном ряде слагаемые, соответствующие $n = 0, 1$, нулевые. Поэтому

$$|\Delta w| = \left|\sum_{n=2}^{\infty} c_n\left(\frac{(z+w)^n - z^n}{w} - nz^{n-1}\right)\right| \le \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \cdot \left|\underbrace{\frac{(z+w)^n - z^n}{w} - nz^{n-1}}_{\rho_n(w)}\right|$$

  Теперь надо оценить разности $\rho_n(w)$ при $n \ge 2$. Воспользуемся биномом Ньютона:

$$\rho_n(w) = \frac{1}{w}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{n-k} w^k - z^n\right) - nz^{n-1} = \frac{1}{w}\sum_{k=1}^{n} C_n^k z^{n-k} w^k - nz^{n-1} = \frac{1}{w}\sum_{k=2}^{n} C_n^k z^{n-k} w^k$$

  Поскольку $|w| \le r$, отсюда следует нужная нам оценка:

$$|rho_n(w)| = \left|w\sum_{k=2}^{n} C_n^k z^{n-k} w^{k-2}\right| \le |w|\sum_{k=2}^{n} C_n^k |z|^{n-k}|w|^{k-2} \le |w|\sum_{k=2}^{n} C_n^k |z|^{n-k} r^{k-2} \le \frac{|w|}{r^2}(|z| + r)^n$$

  Таким образом,

$$|\Delta w| \le \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |\rho_n(w)| \le \frac{|w|}{r^2}\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot (|z| + r)^n$$

  Благодаря неравенству (286), отсюда вытекает, что $\Delta w \xrightarrow[w \to 0]{} 0$.

- Пусть теперь $z_\circ \ne 0$.

  Положим $\widetilde{z} \coloneqq z - \widetilde{z}_\circ$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \widetilde{z}^n \eqqcolon \widetilde{f}(\widetilde{z}), \qquad f(z+w) = \widetilde{(}\widetilde{z} + w)$$

  Ряд $\widetilde{f}(\widetilde{z})$ — это первый случай. Продиффиренцируем его:

$$\frac{f(z+w) - f(z)}{w} = \frac{\widetilde{f}(\widetilde{z} + w) - \widetilde{f}(\widetilde{z})}{w} \xrightarrow[w \to 0]{} \widetilde{f}'(\widetilde{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n \widetilde{z}^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n(z - z_0)^{n-1}$$

$\square$