Оглавление

Глава 1

Линейные функционалы

1.1. Продолжение линейных функционалов

1.1.1. Небольшое отступление: трансфинитная индукция

Определение 1. P полуупорядочено, $A \subset P$
Будем говорить, что A — *цепь (линейно-упорядоченное подмножество)*, если

$$\forall a, b \in A \quad \begin{cases} a \le b \\ b \le a \end{cases}$$

Определение 2. P полуупорядочено
x — *максимальный элемент* P, если

$$\forall y \in P : x \le y \quad x = y$$

Лемма Цорна

Лемма 1 (Цорн). P полуупорядочено
Если для любой цепи имеется верхняя грань, то во всём множестве P существует максимальный элемент.

Замечание. Лемма Цорна **эквивалентна** аксиоме выбора.

Аксиома выбора. $\{ B_\alpha \ne \emptyset \}_{\alpha \in A}, \quad B_\alpha$ — множества

$$\exists \{ b_\alpha \}_{\alpha \in A} : \quad b_\alpha \in B_\alpha$$

1.1.2. Возвращаемся в анализ

Определение 3. X — линейное пространство над $\mathbb{K}$
$p : X \to \mathbb{K}$ называется *выпуклым функционалом*, если

1. $p(x + y) \le p(x) + p(y)$;
2. $p(tx) = tp(x) \quad$ при $t \ge 0$.

1.1.3. Продолжение линейного функционала в вещественном линейном пространстве

Теорема 1 (Хан—Банах). X — линейное над $\mathbb{R}$, $\quad p : X \to \mathbb{R}$ — выпуклый функционал, $\quad L$ — подпространство X, $\quad f \in \mathscr{L}in(L, \mathbb{R})$, $\quad f(x) \overset{L}{\le} p(x)$ (говорят, что f *подчинён* p)

$$\exists g \in \mathscr{L}in(X,\mathbb{R}): \quad \begin{cases} g\big|_L = f \\ g(x) \overset{X}{\le} p(x) \end{cases}$$

Доказательство.

1. Возьмём $z \in X \setminus L$

$$L_1 \coloneqq \mathscr{L}\,\{\, L, z \,\} = \{\, tx + z \mid t \in \mathbb{R} \,\}$$

Построим $f_1 \in \mathscr{L}in(L_1,\mathbb{R}): \quad f_1\big|_L = f, \quad f_1(y) \overset{L_1}{\le} p(y).$

$$f_1(c) \coloneqq c$$

Докажем, что можно выбрать такой c.

$$f_1(x+tz) = f(x) + tc$$

$$f_1(y) \overset{L_1}{\le} p(y) \iff f(x) + tc\overset{L}{f}(x) + tc \iff \begin{cases} f(x) + tc \le p(x+tz), & t > 0, \\ f(x) - tc \le p(x - tz), & t > 0 \end{cases}$$

Разделим на t:

$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{t}\right) + c \le p\left(\frac{x}{t} + z\right), \\ f\left(\frac{x}{t}\right) - c \le p\left(\frac{x}{t} - z\right) \end{cases}$$

Обозначим $u = \frac{x}{t}, \ v = \frac{x}{t}$ (никак друг с другом не связанные).

$$\begin{cases} f(u) + c \le p(u+z) & \forall u \in L, \\ f(v) - c \le p(v - z) & \forall v \in L \end{cases}$$

$$f(v) - p(v-z) \le c \le p(u+z) - f(u)$$

Рассмотрим $A = \{\, p(u+z) - f(u) \,\}_{u \in L} \subset \mathbb{R}, \quad B = \{\, f(v) - p(v-z) \,\}_{v \in L} \subset \mathbb{R}$. Проверим, что $\forall a \in B \quad \forall b \in B \quad b \le a$.

$$b \le a \iff f(v) - p(v-z) \le p(u+z) - f(u) \iff \underbrace{f(u) + f(v)}_{f(u+v) \in L} \le p(u+z) + p(v-z)$$

f подчинён p, значит,

$$f(u+v) \le p(u+v) \underset{\text{выпуклость}}{\le} p(u+z) + p(v-z) \implies \exists c \in \mathbb{R}: \quad f_1(z) = c$$

2. $\mathcal{P} \coloneqq \{\, (M,h) \,\}, \quad L \subset M \subset X, \quad M$ — подпр-во, $\quad h \in \mathscr{L}in(M,\mathbb{R}), \quad h\big|_L = f, \quad h(x) \overset{M}{\le} p(x)$

Определим порядок:

$$(M,h) \le (M_1,h_1) \iff \begin{cases} M \subset M_1, \\ h_1\big|_M = h \end{cases}$$

Пусть A — цепь в $\mathcal{P}$, т. е.

$$A = \{\, (M_\alpha, h_\alpha) \,\}_{\alpha \in I}: \quad \forall \alpha, \beta \in I \quad \left[\begin{array}{l} (M_\alpha, h_\alpha) \le (M_\beta, h_\beta) \\ (M_\beta, h_\beta) \le (M_\alpha, h_\alpha) \end{array} \right.$$

Построим верхнюю грань для A.

$$M_0 \coloneqq \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$$

Проверим, что M_0 — подпространство. Пусть $x, y \in M_0$.

$$\exists \alpha, \beta : x \in M_\alpha, \ y \in M_\beta \implies \left[\begin{array}{l} M_\alpha \subset M_\beta, \\ M_\beta \subset M_\alpha \end{array} \right.$$

Пусть выполняется первое.

$$\implies x, y \in M_\beta \text{ — подпространство } \implies ax + by \in M_\beta \subset M_0 \implies M_0 \text{ — подпространство}$$

Определим $h_0 : M_0 \to \mathbb{R}$.
Возьмём $x \in M_0$.

$$\exists \alpha : x \in M_\alpha$$

Положим $h_0(x) = h_\alpha(x)$.
Проверим корректность. Пусть $x \in M_\beta$.

$$\left[\begin{array}{l}(M_\alpha, H_\alpha) \leq (M_\beta, h_\beta),\\ (M_\beta, h_\beta) \leq (M_\alpha, h_\alpha)\end{array}\right.$$

Пусть выполнено первое.

$$x \in M_\alpha,\ x \in M_\beta \implies h_\beta(x) = h_\alpha(x) = h(x)$$

Можно проверить, что $h_0 \in \mathscr{L}in(M_0, \mathbb{R})$.

$$\forall \alpha \in I \quad (M_\alpha, h_\alpha) \leq (M_0, h_0) \implies (M_0, h_0) \text{ — верхняя грань для } A$$

По лемме Цорна, в $\mathcal{P}$ существует максимальный элемент (M, h).

$$L \subset M, \quad h\big|_L = f, \quad h(x) \overset{M}{\leq} p(x)$$

Докажем, что $M = X$. **Пусть** $\exists z \in X \setminus M$.

$$M_1 \coloneqq \mathscr{L}in\{\, M, z \,\}$$

По первой части доказательства

$$\exists h_1 \in \mathscr{L}in(M_1, \mathbb{R}) : \quad h_1\big|_M = h, \quad h_1(x) \overset{M_1}{\leq} p(x)$$

$$\implies (M_1, h_1) \in \mathcal{P}$$

$$(M, h) \leq (M_1, h_1), \quad M \subsetneq M_1$$

Это **противоречит** максимальности (M, h).

$\square$

Утверждение 1. X линейно над $\mathbb{R}$, $\quad p$ — выпуклый функционал, $\quad f \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{R})$, $\quad f(x) \overset{X}{\leq} p(x)$

$$f(x) \geq -p(-x)$$

Доказательство. $f(x) \leq p(x) \implies f(-x) \leq p(-x) \implies -f(x) \leq p(-x)$ $\square$

Утверждение 2. p — полунорма, $\quad f(x) \overset{X}{\leq} p(x)$

$$|f(x)| \leq p(x)$$

Доказательство. $p(-x) \xlongequal[p \text{ — полунорма}]{} p(x) \implies f(x) \geq -p(x)$ $\square$

1.1.4. Обобщённый предел ограниченной последовательности

Теорема 2. $l^\infty_\mathbb{R} \coloneqq \left\{ x = \{\, x_n \in \mathbb{R} \,\}_{n=1}^\infty \;\middle|\; \|x\| = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}$

$$\exists L \in (l^\infty)^* : \quad \|l\|_{(l^\infty)^*} = 1, \quad \forall x = \{\, x_n \,\}_{n=1}^\infty \in l^\infty \quad \varliminf_{n\to\infty} x_n \le L(x) \le \varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

В частности, если $\exists \lim x_n = x_0$, то $L(x) = x_0$.

Доказательство. Для $x \in l^\infty$ положим $p(x) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

Докажем, что p — выпуклый функционал:

- $t > 0 \implies p(tx) = tp(x)$ — очевидно;
- $p(x+y) \le p(x) + p(y)$

$$\varlimsup x_n + \varlimsup y_n \overset{?}{\le} \varlimsup (x_n + y_n)$$

Вспомним определение верхнего предела:

$$a_n \coloneqq \sup_{m\ge n} \{\, x_m \,\} \implies a_n \downarrow \implies \exists \lim a_n = a, \quad \varlimsup x_n \coloneqq a$$

$$b_n = \sup_{m \ge n}, \quad b = \varlimsup y_n$$

$$c_n = \sup \{\, x_m + y_m \,\}, \quad c = \varlimsup \{\, x_n + y_n \,\}$$

Зафиксируем n.

$$\forall m \ge n \quad x_m + y_m \le a_n + b_n \implies c_n \le a_n + b_n$$

Устремим $n \to \infty$:

$$c \le a + b$$

$$C \subset l^\infty, \quad C \coloneqq \{\, x = \{\, x_n \,\}_{n=1}^\infty \mid \exists \lim x_n = x_0 \,\}$$

Определим $f : C \to \mathbb{R} : \quad f(x) = \lim x_n = x_0$.

$$f(x) = \lim x_n \le \varlimsup x_n \implies f(x) \overset{C}{\le} p(x)$$

Применим теорему Хана—Банаха:

$$\exists g \in \mathscr{L}in(l^\infty, \mathbb{R}), \quad g(x) \overset{C}{=} f(x), \quad g(x) \overset{l^\infty}{\le} \varlimsup x_n$$

По утв. 1

$$g(x) \ge -p(-x) = -\varlimsup(-x_n) \xlongequal[\text{задача из Демидовича}]{\qquad\qquad} \varliminf x_n$$

$g = L$ — в теореме, $\quad g \in \mathscr{L}in(l^\infty, \mathbb{R})$.

$$\left.\begin{aligned} g(x) &\le \varlimsup x_n \le \sup |x_n| \\ g(x) &\ge \varliminf x_n \ge -\sup |x_n| \end{aligned}\right\} \implies |g(x)| \le \|x\|_\infty \implies \|g\| \le 1 \implies g \in (l^\infty)^*$$

Возьмём $x = \{\, 1, 1, \dots \,\}$.

$$\|x\| = 1, \quad |g(x)| = 1 \implies \|g\| \ge \frac{|g(x)|}{\|x\|} = 1 \implies \|g\| = 1$$

∎

1.1.5. Продолжение линейного функционала в комплексном линейном пространстве

Теорема 3 (Боненблюст—Собчик). X линейно над $\mathbb{C}$, $\quad p$ — полунорма, $\quad L$ — подпространство X, $f \in \mathscr{L}in(L, \mathbb{C})$, $\quad |f(x)| \overset{L}{\le} p(x)$

$$\exists g \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{C}) : \quad \begin{cases} g\big|_L = f, \\ |g(x)| \underset{X}{\leq} p(x) \end{cases}$$