Оглавление

1 Линейные функционалы **2**
1.1 Спектр компактного оператора 2
1.1.1 Следствие о точечном спектре компактного оператора 2
1.2 Теория Фредгольма 3
1.2.1 Условие разрешимости уравнения Фредгольма 4
1.2.2 Альтернатива Фредгольма 5

Глава 1

Линейные функционалы

1.1. Спектр компактного оператора

Замечание (воспоминания из алгебры). X — линейное пространство, $T \in \mathscr{L}in(X)$, $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ — с. ч., $Tx_j = \lambda_j x_j$, $\lambda_j \neq \lambda_k$, x_j — с. в. $(x_j \neq 0)$

$$\implies \{x_j\} \text{ ЛНЗ}$$

Теорема 1. X — банахово, $T \in \mathrm{Com}(X)$, $\lambda \in \sigma_p(T)$ — с. ч., $X_\lambda = \mathrm{Ker}(\lambda I - T)$ — собств. подпр-во, $\delta > 0$

$$\sum_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T) \\ |\lambda| \geq \delta}} \dim(X_\lambda) < +\infty$$

То есть, число линейно-независимых собственных векторов T, соответствующих собственным числам λ, таких, что $|\lambda| \geq \delta$, конечно.

Доказательство. **Пусть** $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — ЛНЗ с. в.:

$$Tx_n = \lambda_n x_n, \quad |\lambda_n| \geq \delta$$

Рассмотрим последовательность подпространств:

$$L_n = \mathscr{L}\{x_j\}_{j=1}^n, \quad L_n \subsetneq L_{n+1}$$

$$\xRightarrow[\text{лемма Рисса}]{} \exists \{y_n\}_{n=1}^\infty : \quad \|y_n\| = 1, \quad \rho(y_{n+1}, L_n) = \inf_{x \in L_n} \|y_{n+1} - x\| \geq \frac{1}{2}$$

(т. к. $\dim L_n = n$, то $\exists y_{n+1} : \rho(y_{n+1}, L_n) = 1$)

Проверим, что $\|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{\delta}{2}$. Тогда не будет существовать фундаментальной подпоследовательности $\{Ty_n\}$, а значит, и последовательности $\{n_k\}$ такой, что $\exists \lim Ty_{n_k}$ — $\lightning$ с $T \in \mathrm{Com}(X)$.

Пусть $y_n \in L_n$, $y_n \notin L_{n-1}$. Тогда $y_n = \alpha n x_n + u_n$, $\alpha_n \neq 0$, $u_n \in L_{n-1}$.

$$Tx_n = \lambda_n x_n \implies Ty_n = \alpha_n \lambda_n x_n + Tu_n = \lambda_n(\alpha_n x_n + u_n) - \underbrace{\lambda_n u_n + Tu_n}_{=: v_n \in L_{n-1}} = \lambda_n y_n + v_n$$

Пусть $n > m$.

$$Ty_m \in L_n \subset L_{n-1}$$

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|\lambda_n y_n + v_n - Ty_m\| = |\lambda_n| \Big\| y_n - \underbrace{\frac{1}{\lambda_n}(-v_n + Ty_m)}_{\in L_{n-1}} \Big\| \geq \frac{\delta}{2}$$

Значит, последовательность y_n не содержит фундаментальных подпоследовательностей. $\square$

1.1.1. Следствие о точечном спектре компактного оператора

Следствие. $T \in \mathrm{Com}$

1. $\delta > 0$

$$\big|\{\, \lambda \in \sigma_p(T) \mid |\lambda| \geq \delta \,\}\big| < +\infty$$

2. $\lambda \in \sigma_p(T), \quad \lambda \neq 0, \quad X_\lambda = \mathrm{Ker}(\lambda I - T)$

$$\dim X_\lambda < +\infty$$

3. N — число собственных чисел.

   Тогда

   (a) $0 \leq N \leq +\infty$ (т. е. $\sigma_p(T)$ не более, чем счётно);

   (b) если $N = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

   Их можно занумеровать в порядке убывания модулей.

Доказательство.

1. Очевидно.

2. Очевидно.

3. $E_n := \left\{\, \lambda \in \sigma_n(T) \;\middle|\; |\lambda| \geq \frac{1}{n} \,\right\}, \quad |E_n| < +\infty$

$$\sigma_p(T) \setminus \{\, 0 \,\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \implies \sigma_p(T) \text{ не более, чем счётно}$$

$$\forall \delta > 0 \quad \{\, \lambda \in \sigma_p(T) \mid |\lambda| > \delta \,\} \text{ конечно} \implies \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$$

□

Замечание. $0 \in \sigma_p(T) \iff \mathrm{Ker}\, T \neq \{\, 0 \,\} \iff T$ не инъекция.
Если $T \in \mathrm{Com}(X), \quad \dim X = +\infty$, то $0 \in \sigma(T)$.

Доказательство.

$$0 \in \rho(T) \iff \exists V(0) = -T, \quad \exists T^{-1} \implies T(X) = X \xRightarrow[T \in \mathrm{Com}(X)]{} \dim X < +\infty$$

□

1.2. Теория Фредгольма

Будем изучать гильбертовы пространства, так как там проще доказательства. Всё это верно и для банаховых пространств.

Определение 1. H — гильбертово, $\quad T \in \mathrm{Com}(H), \quad S = I - T$
S будем называть *оператором Фредгольма*

Определение 2. Рассмотрим серию уравнений:

1. *уравнение Фредгольма*: $Sx = a$;

2. *однородное уравнение Фредгольма*: $Sx = 0$;

3. *сопряжённое уравнение Фредгольма*: $S^* y = h$;

4. *однородное сопряжённое уравнение Фредгольма*: $S^* y = 0$.

$$\lambda \in \mathbb{C} \neq 0, \quad V(\lambda) = \lambda I - T = \lambda\Big(I - \frac{1}{\lambda} T\Big)$$

$$\frac{1}{\lambda} \in \operatorname{Com}(H) \implies I - \frac{1}{\lambda}T \text{ — оператор Фредгольма}$$

Значит, свойства S можно будет распространить на $V(\lambda)$.

1.2.1. Условие разрешимости уравнения Фредгольма

Теорема 2. H — гильбертово, $\quad T \in \operatorname{Com}(H), \quad S = I - T$

1. $S(H)$ замкнуто;
2. $S^*(H)$ замкнуто;
3. $H = S(H) \oplus \operatorname{Ker} S^*$;
4. $H = S^*(H) \oplus \operatorname{Ker}(S)$.

Замечание. 3. и 4. эквивалентны тому, что

Уравнение $Sx = a$ разрешимо **для тех и только тех** a, которые ортогональны решениям однородного сопряжённого уравнения Фредгольма $S^*y = 0$.

Лемма 1 (об ограниченных проообразах)**.** В условиях теоремы $\{\, y_n \in S(H) \,\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена

$$\exists \{\, x_n \,\}_{n=1}^{\infty} : \quad \{\, x_n \,\} \text{ ограничена}, \quad Sx_n = y_n$$

Доказательство. $M = \operatorname{Ker} S, \quad L = M^{\perp}, \quad H = M \oplus L$

$$S(M) = 0 \implies S(H) = S(L)$$

$$y \in S(H) \implies \exists! x \in L : \quad Sx = y$$

$$\forall y_n \quad \exists x_n \in L : \quad Sx_n = y_n$$

Проверим, что $\{\, x_n \,\}$ ограничена. **Пусть** это не так, т. е.

$$\exists \{\, n_k \,\}_{k=1}^{\infty} : \quad \lim \|x_{n_k}\| = +\infty$$

НУО будем считать, что сама последовательность $\{\, x_n \,\}$ обладает таким свойством:

$$\lim \|x_n\| = +\infty$$

Возьмём последовательность

$$\left\{ \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$T \in \operatorname{Com}(H) \implies \exists \{\, n_k \,\} : \quad \exists \lim T\left(\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\right) =: z_0$$

$$y_{n_k} = S(x_{n_k}) = x_{n_k} - T(x_{n_k}) \implies \underbrace{\frac{y_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} 0} = \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} - \underbrace{T\left(\frac{x_n}{\|x_{n_k}\|}\right)}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} z_0} \implies$$

$$\implies \lim_{k\to\infty} \left(\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\right) = z_0 \xrightarrow[T \in \mathscr{B}(H)]{} \lim_{k\to\infty} T\left(\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\right) = T(z_0) \implies$$

$$\implies z_0 = T(z_0) \implies S(z_0) = z_0 - Tz_0 = 0 \implies z_0 \in M = \operatorname{Ker} S$$

$$\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} \in L \text{ — замкнуто}, \quad \lim \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} = z_0 \implies z_0 \in L, \quad \|z_0\| = 1$$

При этом, $z_0 \in L \cap M \implies z_0 = 0$ — $\lightning$. ∎

Доказательство (теоремы)**.**

1. Докажем, что $S(H)$ замкнуто. Возьмём $\{ y_n \in S(H) \}_{n=1}^{\infty}: \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_0$.

$$\exists \lim y_n \implies \{ y_n \} \text{ ограничена } \xRightarrow[\text{лемма}]{} \exists \{ x_n \in H \}: \quad \{ x_n \} \text{ ограничена}, \quad Sx_n = y_n$$

$$T \in \mathrm{Com}(H) \implies \exists \{ n_k \}: \quad \lim T_{x_{n_k}} = z_0$$

$$\underbrace{y_{n_k}}_{\to y_0} = S(x_{n_k}) = x_{n_k} - \underbrace{Tx_{n_k}}_{\to z_0}$$

$$\implies \exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \xRightarrow[T\in\mathscr{B}(H)]{} \lim T(x_{n_k}) = Tx_0$$

$$\implies z_0 = Tx_0 \implies y_0 = x_0 - Tx_0 = S(x_0) \implies y_0 \in S(H)$$

2. $S^* = I - T^*, \quad T^* \in \mathrm{Com}(H) \implies S^*(H)$ замкнуто.

3. $$\forall A \in \mathscr{B}(H) \quad H = \overline{A(H)} \oplus \mathrm{Ker}\, A^*$$
$$S(H) = \overline{S(H)} \implies H = S(H) \oplus \mathrm{Ker}\, S^*$$

4. Аналогично.

□

1.2.2. Альтернатива Фредгольма

Теорема 3.

$$\mathrm{Ker}\, S = \{ 0 \} \iff S(H) = H$$

Другая формулировка. Оператор S — инъекция **тогда и только тогда**, когда S — сюръекция. Из любого из этих выражений следует, что S — биекция.

Другая формулировка.

- **Либо** уравнение Фредгольма разрешимо для любой правой части и решение единственно.
- **Либо** существует ненулевое решение уравнения Фредгольма.

Лемма 2 (о стабилизации). $k \geq 0, \quad H_{k+1} \coloneqq S(H_k)$

$$\exists n \geq 0: \quad H_n = H_{n+1}$$

Доказательство. **Допустим**, что $H_{k+1} \subsetneq H_k$.

$$\implies H_k = H_{k+1} \oplus \underbrace{H_{k+1}^{\perp}}_{\text{ортогональное дополнение в } H_k}$$

$$\implies \exists x_k \in H_k: \quad \|x_k\| = 1, \quad x_k \perp H_{k+1}$$

Пусть $n > m$. Хотим оценить разность $\|Tx_n - Tx_m\|$.

$$Sx_n - Sx_m = x_n - Tx_n - x_m + Tx_m$$

$$Sx_n = x_n - Tx_n$$
$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|x_n - Sx_n - x_m + Sx_m\| \geq 1$$
$$Sx_n \in H_{n+1}, \quad Sx_m \in H_{m+1}$$
$$x_n, Sx_n, Sx_m \in H_{m+1} \implies x_m \perp H_{m+1}$$

Значит, не существует $\{ Tx_{n_k} \}: \quad \exists \lim T_{x_{n_k}}, \quad T \in \mathrm{Com}(H)$ — $\lightning$.

□