Оглавление

Глава 1

Пространства

1.1. Относительно компактные множества в $\mathcal{C}(K)$

Теорема 1 (Асколи-Арцела). $\Phi \subset \mathcal{C}(K)$.
Φ относительно компактно тогда и только тогда, когда

1. Φ ограничено в $\mathcal{C}(K)$;
2. Φ равностепенно непрерывно.

Доказательство. $\mathcal{C}(K)$ — полное. Значит,

$$\Phi \text{ относительно компактно} \iff \Phi \text{ вполне ограничено}$$

- $\Longrightarrow$
  1. Ограниченность
     Φ вполне ограничено $\Longrightarrow$ Φ ограничено, т. е.
     $$\exists M > 0 : \quad \forall f \in \Phi \quad \forall x \in K \quad |f(x)| \le M$$
  2. Равностепенная непрерывность
     Возьмём $\varepsilon > 0$
     $$\exists \text{ конечная } \varepsilon\text{-сеть } \{\, \varphi_j \,\}_{j=1}^n, \quad \varphi_j \in \mathcal{C}(K)$$
     $$\varphi_j \text{ равном. непр.} \implies \exists \delta_j : \quad \forall x, y \in K : \rho(x,y) < \delta \quad |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| < \varepsilon \quad 1 \le j \le n$$
     Положим $\delta = \min\limits_{1 \le j \le n} \{\, \delta_j \,\}$. Проверим условие равностепенной непрерывности с δ.
     Пусть $f \in \Phi, \quad x, y \in K : \rho(x,y) < \delta$.
     $$\{\, \varphi_j \,\} \text{ — } \varepsilon\text{-сеть} \implies \exists 1 \le m \le n : \quad \|f - \varphi_m\|_\infty < \varepsilon \implies \max_{x \in K} |f(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon$$
     $$|f(x) - f(y) \overset{\triangle}{\le} |f(x) - \varphi_m(x)| + |\varphi_m(x) - \varphi_m(y)| + |\varphi_m(y) - f(y)| < 3\varepsilon$$
- $\Longleftarrow$

$\square$