

Оглавление

1	Пространства	2
1.1	Экскурс в теорию меры	2
1.1.1	Плотность непрерывных функций в $L^p(T, \mu)$ для регулярных мер	4
1.2	Компакты в метрических пространствах	4

Глава 1

Пространства

1.1. Экскурс в теорию меры

Определение 1. T — множество, \mathcal{R} — семейство подмножеств T .

\mathcal{R} будем называть *полукольцом*, если

1. $\emptyset \in \mathcal{R}$;
2. $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cap B \in \mathcal{R}$;
3. $A, B \in \mathcal{R}, B \subset A \implies \exists \{e_j\}_{j=1}^n : e_i \cap e_j = \emptyset, e_j \in \mathcal{R}, A \setminus B = \bigcup_{j=1}^n e_j$.

Определение 2. $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, +\infty]$ — *мера* на полукольце, если

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. если $\{e_j\}_{j=1}^\infty, e_j \in \mathcal{R}, e_j \cap e_i = \emptyset, e = \bigcup_{j=1}^\infty e_j, e \in \mathcal{R}$, то $\mu e = \sum_{j=1}^\infty \mu e_j$.

Пример. \mathbb{R}^n

$$\mathcal{R} = \left\{ e = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j) \mid a_j < b_j \right\}, \quad \mu e = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$$

Определение 3 (стандартное распространение меры с полукольца на σ -алгебру). $E \subset T$

Определим *внешнюю меру*:

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty \mu e_j \mid E \subset \bigcup_{j=1}^\infty e_j, e_j \in \mathcal{R} \right\}$$

\mathcal{U} — σ -алгебра измеримых множеств.

Теорема 1. (T, \mathcal{U}, μ) — пространство с мерой, μ — стандартное распространение с \mathcal{R} , $p \leq p < +\infty$. Тогда $\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{R}}$ — полное семейство в $L^p(T, \mu)$.

Доказательство. Пусть $E \in \mathcal{U}$, $\mu E < +\infty$. Приближим χ_E линейными комбинациями $\{\chi_{e_j}\}_{e_j \in \mathcal{R}}$.

$$\mu E = \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty \mu e_j \mid E \subset \bigcup_{j=1}^\infty e_j, e_j \cap e_i = \emptyset, e_j \in \mathcal{R} \right\}$$

Возьмём $\varepsilon > 0$. По определению \inf ,

$$\exists \{e_j\}_{j=1}^\infty : e_j \in \mathcal{R}, e_j \cap e_i = \emptyset, \mu E \leq \sum_{j=1}^\infty \mu e_j < \mu E + \varepsilon$$

Обозначим $A = \bigcup e_j$.

Так как ряд сходится, можно отбросить его начало так, чтобы

$$\exists n \in \mathbb{N} : \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu e_j < \varepsilon$$

Обозначим $B = \bigcup_{j=1}^n e_j$.

$$\chi_B = \sum_{j=1}^n \chi_{e_j} \in \mathcal{L} \{ \chi_e \}_{e \in \mathcal{R}}$$

При этом, $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$, $\mu(A \setminus E) < \varepsilon$.

$$\|\chi_E - \chi_B\|_p \stackrel{\Delta}{\leq} \|\chi_A - \chi_E\|_p + \|\chi_A - \chi_B\|_p = \left(\int_{A \setminus E} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{A \setminus B} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < 2\varepsilon^{\frac{1}{p}} \implies \chi_E \in \overline{\mathcal{L} \{ \chi_e \}_{e \in \mathcal{R}}}$$

Уже доказано, что

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L} \{ \chi_E \}_{E \in \mathcal{U}, \mu E < +\infty}}^{\|\cdot\|_p} &= L^p(T, \mu) \\ \implies \overline{\mathcal{L} \{ \chi_e \}_{e \in \mathcal{R}}}^{\|\cdot\|_p} &= L^p \end{aligned}$$

□

Следствие. μ — стандартное распространение с \mathcal{R} на \mathcal{U} , $1 \leq p < +\infty$.

Если \mathcal{R} счётно, то $L^p(T, \mathcal{U}, \mu)$ сепарабельно.

Следствие. $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по мере Лебега λ , $1 \leq p < +\infty$.

Тогда $L^p(E, \lambda)$ сепарабельно.

Доказательство. $\mathcal{R} = \left\{ e = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j) \right\}$ — полукольцо ячеек. Рассмотрим

$$\mathcal{R}_0 = \left\{ \prod_{j=1}^n [a_j, b_j) \mid a_j, b_j \in \mathbb{Q} \right\}$$

Понятно, что \mathcal{R}_0 счётно.

Пусть $e \in \mathcal{R}$

$$e = \prod_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j), \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}, \quad a_j < b_j$$

Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$\exists e_0 \in \mathcal{R}_0 : \quad e \subset e_0, \quad \lambda(e_0 \setminus e) < \varepsilon$$

$$\implies \|\chi_{e_0} - \chi_e\|_p = \left(\int_{e_0 \setminus e} d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\implies \overline{\mathcal{L} \{ \chi_e \}_{e \in \mathcal{R}}} \ni \{ \chi_e \}_{e \in \mathcal{R}} \implies \overline{\mathcal{L} \{ \chi_e \}_{e \in \mathcal{R}_0}}^{\|\cdot\|_p} = L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$$

$$L^p(E, \lambda) \subset L^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$$

$$\implies L^p(E, \lambda) \text{ сепарабельно}$$

□

Определение 4. (T, ρ) — метрическое пространство, (T, \mathcal{U}, μ) — пространство с мерой.

Будем говорить, что μ — *борелевская мера*, если все открытые множества измеримы.

Замечание. Все непрерывные функции измеримы.

Доказательство. $f : T \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(T)$, f непрерывна. Возьмём $c \in \mathbb{R}$.

$$\{x \in T \mid f(x) \in (c, +\infty)\} = f^{-1}(c, +\infty)$$

f непрерывна $\implies f^{-1}(c, +\infty)$ открыто в $T \implies$ измеримо по $\mu \implies f$ измеримы. \square

Определение 5. μ — борелевская мера.

Будем говорить, что μ *регулярна*, если

$$\forall e \in \mathcal{U} \quad \mu(e) = \inf_{\substack{G \text{ открыто} \\ e \subset G}} \mu G = \sup_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \subset e}} \mu F$$

Замечание. Мера Лебега в \mathbb{R}^n регулярна.

1.1.1. Плотность непрерывных функций в $L^p(T, \mu)$ для регулярных мер

Теорема 2. (T, ρ) , (T, \mathcal{U}, μ) , μ — регулярная, $1 \leq p < +\infty$.

Тогда $\mathcal{C}(T) \cap L^p(T, \mu)$ плотно в L^p .

Доказательство. Пусть $e \in \mathcal{U}$ — измеримо, $\mu e < +\infty$. Приближим χ_e непрерывными (по $\|\cdot\|_p$). Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$\mu \text{ регулярна} \implies \exists \text{ замкн. } F, \text{ откр. } G : F \subset e \subset G, \quad \mu(G \setminus F) < \varepsilon$$

$$\varphi(x) := \frac{\rho(x, T \setminus G)}{\rho(x, T \setminus G) + \rho(x, F)}$$

Проверим непрерывность:

Пусть $\rho(x, F) = 0 \implies x \in F$, $x \notin T \setminus G \implies \rho(x, T \setminus G) \neq 0$.

$$\implies \rho \in \mathcal{C}(T)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in T \setminus G \\ 1, & x \in F \end{cases} \quad \forall x \in T \implies 0 \leq \varphi(x) \leq 1$$

$$|\varphi(x) - \chi_e(x)| = \begin{cases} 0, & x \in T \setminus G \\ 0, & x \in F \end{cases}$$

$$|\chi_e(x) - \varphi(x)| \leq 1 \quad \forall x$$

$$\|\chi_e - \varphi\|_p = \left(\int_T |\chi_e - \varphi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{G \setminus F} |\chi_e - \varphi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{G \setminus F} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\mu(G \setminus F) \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{U}, \mu e < +\infty}}^{\|\cdot\|_p} = L^p(T, \mu) \implies \overline{\mathcal{C}(T) \cap L^p}^{\|\cdot\|_p} = L^p$$

\square

Следствие. $K \subset \mathbb{R}^n$, K — компакт, λ — мера Лебега, $1 \leq p < +\infty$

$$\implies \overline{\mathcal{C}(K)}^{\|\cdot\|_p} = L^p(K, \lambda)$$

1.2. Компакты в метрических пространствах

Утверждение 1. (K, ρ) — метрический компакт.

$$\iff \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \in K \quad \exists \{x_{n_j}\} : \quad \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} \in K$$

(секвенциальная компактность)

Утверждение 2. (K, ρ) — метрический компакт $\implies K$ ограничено и замкнуто.

Замечание. Для $K \subset \mathbb{R}^n$ (или \mathbb{C}^n) верно и обратное. В общем случае — нет.

Пример.

$$l^2 = \left\{ x = \{x_j\}_{j=1}^\infty \mid \left(\sum_{j=1}^\infty |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2 < +\infty \right\}$$

$$D_1(\mathbb{O}_n) = \{ x \in l^2 \mid \|x\|_2 \leq 1 \}$$

Покажем, что D_1 не компакт.

$$e_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0) \in D_1(\mathbb{O}_n)$$

$$\|e_i - e_j\|_2 = \sqrt{2}$$

$$\forall \{e_{n_k}\} \text{ не фундаментальна } \implies \nexists \lim \{e_{n_k}\}$$

Определение 6. (A, ρ) , $A \subset X$.

A относительно компактно, если \overline{A} компактно.

$$\iff \forall \{x_n\}_{n=1}^\infty, x_n \in A \quad \exists \{x_{n_j}\}_{j=1}^\infty \quad \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} \in X$$

Определение 7. (X, ρ) , $A \subset X$, $\varepsilon > 0$, $F \subset X$.

Будем говорить, что F — ε -сеть для множества A , если

$$\forall a \in A \quad \exists b \in F : \rho(a, b) < \varepsilon$$

$$\iff A \subset \bigcup_{b \in F} B_\varepsilon(b)$$

Определение 8. $A \subset X$.

A называется вполне ограниченным, если $\forall \varepsilon > 0$ существует конечная ε -сеть для A .