Оглавление

Глава 1

ТФКП

1.1. Теорема о единственности значения аналитической функции

Теорема 1. $D \subset \mathbb{C}, \quad E \subset D, \quad z_0$ — т. сг. $E, \quad z_0 \in D, \quad f \in \mathcal{A}(D), \quad f(z) = 0 \quad \forall z \in E$

$$\implies f(z) \equiv 0$$

Доказательство.

$$f(z) \xrightarrow[\substack{z \in E \\ z \to z_0}]{} f(z_0)$$

$$0 \to f(z_0)$$

То есть, $f(z_0) = 0$. **Пусть** $f(z) \not\equiv 0$. Тогда

$$\exists \varphi(z) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists \delta > 0 : \quad \begin{cases} f(z) = (z - z_0)^{n_0} \varphi(z) \\ |z - z_0| < \delta \quad \implies \quad \varphi(z) \neq 0 \end{cases}$$

$$\implies \text{если } |z - z_0| < \delta, \quad f(z) = 0 \implies z = z_0 \tag{1.1}$$

$$z_0 \text{ — т. сг. } E \implies \exists z_1 \in E : \quad |z_1 - z_0| < \delta$$

$$z_1 \in E \implies f(z_1) = 0 \tag{1.2}$$

(1.1) и (1.2) противоречивы. □

Следствие. $f \in \mathcal{A}(D), \quad g \in \mathcal{A}(D), \quad \forall z \in E \quad f(z) = g(z)$

$$\implies f(z) \overset{D}{\equiv} g(z)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(z) = g(z) - f(z)$. В силу аналитичности f и g получаем $h(z) \in \mathcal{A}(D)$.

$$h(z) = 0 \quad \forall z \in E \implies h(z) \equiv 0$$

□

1.2. Аналитическое продолжение функции

Определение 1. $D_1, D_2 \in \mathbb{C}, \quad D_1 \cap D_2 =: G \neq \emptyset, \quad f_1 \in \mathcal{A}(D_1), \quad f_2 \in \mathcal{A}(D_2)$

$$\forall z \in G \quad f_1(z) = f_2(z)$$

Говорят, что функция f_1 *аналитически продолжена* в область D_2 функцией f_2.

Теорема 2. Пусть имеется два аналитических продолжения функции f_1 в область D_2: f_2 и $\widetilde{f}_2$.

$$\implies \widetilde{f}_2(z) \overset{D_2}{=\!=} f_2(z)$$

Доказательство. G открыто, $\quad \forall z_0 \in G$ — т. сг. G. Рассмотрим область D_2:

$$f_2(z) = \widetilde{f}_2(z) \quad \forall z \in G$$

Можно применить следствие из теоремы о единственности. □

Определение 2. *Путём* $\Gamma(t) : [a, b] \to \mathbb{C}$ называется непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ в $\mathbb{C}$.

Замечание. Нет требований к инъективности или сюръективности.

Определение 3. *Системой кругов, связанных с путём* $\Gamma(t)$ будем называть следующее:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, \qquad r_0, r_1, \dots, r_n > 0$$

Рассматриваем круги $\mathtt{B}_{r_k}\big(\Gamma(t_k)\big)$. Будем называть их системой кругов, если выполнено

$$\mathtt{B}_{r_k}\big(\Gamma(t_k)\big) \cap \mathtt{B}_{r_{k-1}}\big(\Gamma(t_{k-1})\big) \neq \emptyset, \qquad k = 1, \dots, n$$

Определение 4. Пусть имеется путь $\Gamma(t)$ и система кругов, связанных им.

$$f \in \mathcal{A}\Big(\mathtt{B}_{r_0}\big(\Gamma(t_0)\big)\Big) = \mathtt{B}_{r_0}\big(\Gamma(a)\big)$$

Будем говорить, что функция f аналитически продолжена вдоль пути $\Gamma(t)$ в круг $\mathtt{B}_{r_n}\big(\Gamma(t_n)\big) = \mathtt{B}_{r_n}\big(\Gamma(b)\big)$, если функция f аналитически продолжается из круга r_0 в круг r_1, далее из него в круг r_2, и так далее до круга r_n.

Теорема 3. Аналитическое продолжение вдоль пути единственно.

Доказательство. Следует из единственности аналитического продолжения в область. □

1.3. Функции, продолжимые по любому пути

Определение 5. $D \subset \mathbb{C}, \qquad B = \mathtt{B}_r(z_0) \subset D, \qquad f \in \mathcal{A}\big(B_r(z_0)\big)$

Будем говорить, что функция f продолжима из круга B по любому пути в области D, если

$$\forall \Gamma(t) : [a, b] \to D : \ \Gamma(a) = z_0 \quad f \text{ аналитически продолжается вдоль этого пути,}$$

причём в качестве первого круга мы берём круг B.

Пример. $D = \mathbb{C} \setminus \{\, 0 \,\}, \qquad B = \mathtt{B}_1(1)$

Рассмотрим функцию $f(z) = \log z, \quad z \in B$.

$$\log z = |z| + i \arg z, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

Зададим $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$.

Рассмотрим теперь любой круг $\widetilde{B}$. Хотим задать Arg так, чтобы он был в этом круге непрерывен. Положим $\log z := \log |z| + i \operatorname{Arg} z$ при $z \in \widetilde{B}$. Эта функция аналитична в $\widetilde{B}$.

Определение 6. Область называется *односвязной*, если любой замкнутый путь можно непрерывно деформировать в точку, оставаясь в этой области.

Пример. $\mathbb{C} \setminus \{\, 0 \,\}$ **не** является односвязной.

1.4. Теорема о монодромии

Теорема 4. D — односвязная область, $B = \{ z \mid |z - z_0| < r \} \subset D$, $f \in \mathcal{A}(B)$, f продолжима в D по любому пути.

Тогда f аналитична в D, то есть

$$\exists F \in \mathcal{A}(D) : \quad F(z) \overset{B}{\equiv} f(z)$$

Доказательство. Тут какие-то интуитивные рассуждения. □

1.5. Ряды Лорана

Определение 7. $0 \le r \le R \le +\infty$

$$D_{r,R}(a) = \{ z \mid r < |z - a| < R \}$$

Будем называть $D_{r,R}$ *кольцом.*

Теорема 5. $f \in \mathcal{A}\big(D_{r,R}(a)\big)$

$$\implies \exists c_n \in \mathbb{Z} : \quad \forall z \in D_{r,R}(a) \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n, \tag{1.3}$$

где ряды сходятся.

Если $r < r_1 < R_1 < R$, то каждый из рядов сходится равномерно и абсолютно при $z \in \overline{D_{r,R}(a)}$.

Эта формула называется разложением функции в *ряд Лорана.*