

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Пространства</b>	<b>2</b>
1.1	Экскурс в теорию меры . . . . .	2
1.1.1	Плотность непрерывных функций в $L^p(T, \mu)$ для регулярных мер . . . . .	4
1.2	Компакты в метрических пространствах . . . . .	4

# Глава 1

## Пространства

### 1.1. Экскурс в теорию меры

**Определение 1.**  $T$  — множество,  $\mathcal{R}$  — семейство подмножеств  $T$ .

$\mathcal{R}$  будем называть *полукольцом*, если

1.  $\emptyset \in \mathcal{R}$ ;
2.  $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cap B \in \mathcal{R}$ ;
3.  $A, B \in \mathcal{R}, B \subset A \implies \exists \{e_j\}_{j=1}^n : e_i \cap e_j = \emptyset, e_j \in \mathcal{R}, A \setminus B = \bigcup_{j=1}^n e_j$ .

**Определение 2.**  $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, +\infty]$  — мера на полукольце, если

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
2. если  $\{e_j\}_{j=1}^\infty, e_j \in \mathcal{R}, e_j \cap e_i = \emptyset, e = \bigcup_{j=1}^\infty e_j, e \in \mathcal{R}$ , то  $\mu e = \sum_{j=1}^\infty \mu e_j$ .

**Пример.**  $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{R} = \left\{ e = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j] \mid a_j < b_j \right\}, \quad \mu e = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$$

**Определение 3 (стандартное распространение меры с полукольца на  $\sigma$ -алгебру).**  $E \subset T$

Определим *внешнюю меру*:

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty \mu e_j \mid E \subset \bigcup_{j=1}^\infty e_j, e_j \in \mathcal{R} \right\}$$

$\mathcal{U}$  —  $\sigma$ -алгебра измеримых множеств.

**Теорема 1.**  $(T, \mathcal{U}, \mu)$  — пространство с мерой,  $\mu$  — стандартное распространение с  $\mathcal{R}$ ,  $p \leq p < +\infty$ .

Тогда  $\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{R}}$  — полное семейство в  $L^p(T, \mu)$ .

**Доказательство.** Пусть  $E \in \mathcal{U}, \mu E < +\infty$ . Приблизим  $\chi_E$  линейными комбинациями  $\{\chi_{e_j}\}_{e_j \in \mathcal{R}}$ .

$$\mu E = \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty \mu e_j \mid E \subset \bigcup_{j=1}^\infty e_j, e_j \cap e_i = \emptyset, e_j \in \mathcal{R} \right\}$$

Возьмём  $\varepsilon > 0$ . По определению  $\inf$ ,

$$\exists \{e_j\}_{j=1}^\infty : e_j \in \mathcal{R}, e_j \cap e_i = \emptyset, \mu E \leq \sum_{j=1}^\infty \mu e_j < \mu E + \varepsilon$$

Обозначим  $A = \bigcup e_j$ .

Так как ряд сходится, можно отбросить его начало так, чтобы

$$\exists n \in \mathbb{N} : \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu e_j < \varepsilon$$

Обозначим  $B = \bigcup_{j=1}^n e_j$ .

$$\chi_B = \sum_{j=1}^n \chi_{e_j} \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{R}}}$$

При этом,  $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$ ,  $\mu(A \setminus E) < \varepsilon$ .

$$\|\chi_E - \chi_B\|_p \stackrel{\Delta}{\leq} \|\chi_A - \chi_E\|_p + \|\chi_A - \chi_B\|_p = \left( \int_{A \setminus B} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_{A \setminus B} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < 2\varepsilon^{\frac{1}{p}} \implies \chi_E \in \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{R}}}$$

Уже доказано, что

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L}\{\chi_E\}_{E \in \mathcal{U}, \mu E < +\infty}}^{\|\cdot\|_p} &= L^p(T, \mu) \\ \implies \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{R}}}^{\|\cdot\|_p} &= L^p \end{aligned}$$

□

**Следствие.**  $\mu$  — стандартное распространение с  $\mathcal{R}$  на  $\mathcal{U}$ ,  $1 \leq p < +\infty$ .

Если  $\mathcal{R}$  счётно, то  $L^p(T, \mathcal{U}, \mu)$  сепарабельно.

**Следствие.**  $E \subset \mathbb{R}^n$  измеримо по мере Лебега  $\lambda$ ,  $1 \leq p < +\infty$ .

Тогда  $L^p(E, \lambda)$  сепарабельно.

**Доказательство.**  $\mathcal{R} = \{e = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j)\}$  — полукольцо ячеек. Рассмотрим

$$\mathcal{R}_0 = \left\{ \prod_{j=1}^n [a_j, b_j) \mid a_j, b_j \in \mathbb{Q} \right\}$$

Понятно, что  $\mathcal{R}_0$  счётно.

Пусть  $e \in \mathcal{R}$

$$e = \prod_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j), \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}, \quad a_j < b_j$$

Возьмём  $\varepsilon > 0$ .

$$\begin{aligned} \exists e_0 \in \mathcal{R}_0 : \quad e \subset e_0, \quad \lambda(e_0 \setminus e) &< \varepsilon \\ \implies \|\chi_{e_0} - \chi_e\|_p &= \left( \int_{e_0 \setminus e} d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} \\ \implies \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{R}}} &\ni \{\chi_e\}_{e \in \mathcal{R}} \implies \overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{R}_0}}^{\|\cdot\|_p} = L^p(\mathbb{R}^n, \lambda) \\ L^p(E, \lambda) &\subset L^p(\mathbb{R}^n, \lambda) \\ \implies L^p(E, \lambda) &\text{ сепарабельно} \end{aligned}$$

□

**Определение 4.**  $(T, \rho)$  — метрическое пространство,  $(T, \mathcal{U}, \mu)$  — пространство с мерой.

Будем говорить, что  $\mu$  — *борелевская мера*, если все открытые множества измеримы.

**Замечание.** Все непрерывные функции измеримы.

**Доказательство.**  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}(T)$ ,  $f$  непрерывна. Возьмём  $c \in \mathbb{R}$ .

$$\{x \in T \mid f(x) \in (c, +\infty)\} = f^{-1}(c, +\infty)$$

$f$  непрерывна  $\implies f^{-1}(c, +\infty)$  открыто в  $T \implies$  измеримо по  $\mu \implies f$  измеримы.  $\square$

**Определение 5.**  $\mu$  — борелевская мера.

Будем говорить, что  $\mu$  регулярна, если

$$\forall e \in \mathcal{U} \quad \mu(e) = \inf_{\substack{G \text{ открыто} \\ e \subset G}} \mu G = \sup_{\substack{F \text{ замкнуто} \\ F \subset e}} \mu F$$

**Замечание.** Мера Лебега в  $\mathbb{R}^n$  регулярна.

### 1.1.1. Плотность непрерывных функций в $L^p(T, \mu)$ для регулярных мер

**Теорема 2.**  $(T, \rho), (T, \mathcal{U}, \mu)$ ,  $\mu$  — регулярная,  $1 \leq p < +\infty$ .

Тогда  $\mathcal{C}(T) \cap L^p(T, \mu)$  плотно в  $L^p$ .

**Доказательство.** Пусть  $e \in \mathcal{U}$  — измеримо,  $\mu e < +\infty$ . Приблизим  $\chi_e$  непрерывными (по  $\|\cdot\|_p$ ). Возьмём  $\varepsilon > 0$ .

$\mu$  регулярна  $\implies \exists$  замкн.  $F$ , открытое  $G : F \subset e \subset G, \mu(G \setminus F) < \varepsilon$

$$\varphi(x) := \frac{\rho(x, T \setminus G)}{\rho(x, T \setminus G) + \rho(x, F)}$$

Проверим непрерывность:

Пусть  $\rho(x, F) = 0 \implies x \in F, x \notin T \setminus G \implies \rho(x, T \setminus G) \neq 0$ .

$$\implies \rho \in \mathcal{C}(T)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in T \setminus G \\ 1, & x \in F \end{cases} \quad \forall x \in T \implies 0 \leq \varphi(x) \leq 1$$

$$|\varphi(x) - \chi_e(x)| = \begin{cases} 0, & x \in T \setminus G \\ 0, & x \in F \end{cases}$$

$$|\chi_e(x) - \varphi(x)| \leq 1 \quad \forall x$$

$$\|\chi_e - \varphi\|_p = \left( \int_T |\chi_e - \varphi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_{G \setminus F} |\chi_e - \varphi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_{G \setminus F} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = (\mu(G \setminus F))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\overline{\mathcal{L}\{\chi_e\}_{e \in \mathcal{U}, \mu e < +\infty}}^{\|\cdot\|_p} = L^p(T, \mu) \implies \overline{\mathcal{C}(T) \cap L^p}^{\|\cdot\|_p} = L^p$$

$\square$

**Следствие.**  $K \subset \mathbb{R}^n$ ,  $K$  — компакт,  $\lambda$  — мера Лебега,  $1 \leq p < +\infty$

$$\implies \overline{\mathcal{C}(K)}^{\|\cdot\|_p} = L^p(K, \lambda)$$

## 1.2. Компакты в метрических пространствах

**Утверждение 1.**  $(K, \rho)$  — метрический компакт.

$$\iff \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \in K \quad \exists \{x_{n_j}\} : \quad \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} \in K$$

(секвенциальная компактность)

**Утверждение 2.**  $(K, \rho)$  — метрический компакт  $\implies K$  ограничено и замкнуто.

**Замечание.** Для  $K \subset \mathbb{R}^n$  (или  $\mathbb{C}^n$ ) верно и обратное. В общем случае — нет.

**Пример.**

$$l^2 = \left\{ x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \mid \left( \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2 < +\infty \right\}$$
$$\mathbb{D}_1(\mathbb{O}_n) = \{ x \in l^2 \mid \|x\|_2 \leq 1 \}$$

Покажем, что  $\mathbb{D}_1$  не компакт.

$$e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{D}_1(\mathbb{O}_n)$$

$$\|e_i - e_j\|_2 = \sqrt{2}$$

$$\forall \{e_{n_k}\} \text{ не фундаментальна} \implies \nexists \lim \{e_{n_k}\}$$

**Определение 6.**  $(A, \rho)$ ,  $A \subset X$ .

$A$  относительно компактно, если  $\overline{A}$  компактно.

$$\iff \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in A \quad \exists \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} \quad \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} \in X$$

**Определение 7.**  $(X, \rho)$ ,  $A \subset X$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $F \subset X$ .

Будем говорить, что  $F$  —  $\varepsilon$ -сеть для множества  $A$ , если

$$\forall a \in A \quad \exists b \in F : \quad \rho(a, b) < \varepsilon$$

$$\iff A \subset \bigcup_{b \in F} B_{\varepsilon}(b)$$

**Определение 8.**  $A \subset X$ .

$A$  называется вполне ограниченным, если  $\forall \varepsilon > 0$  существует конечная  $\varepsilon$ -сеть для  $A$ .