Оглавление

Глава 1

ТФКП

1.1. Разложение аналитической функции в степенной ряд

В прошлый раз мы доказали, что $f \in A(D) \implies f' \in A(D) \implies f \in \mathcal{C}^\infty(D)$.

$$D = \{\, z \mid |\, z - z_0| < R \,\}, \qquad 0 < \rho < r < R, \qquad f \in \mathcal{A}(D), \qquad S = \{\, z \mid |\, z - z_0| = r \,\}$$

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \oint\limits_{S} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} \,\mathrm{d}\,\zeta$$

Обозначение. Начиная с этого момента, все кривые полагаются положительно ориентированными.

$$f'''(z) = (f'')'(z) = (f'')'_x(z) = \frac{2}{2\pi i} \int\limits_{S} f(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z)^3}\right)'_x \mathrm{d}\,\zeta = \frac{2 \cdot 3}{2\pi i} \int\limits_{S} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^4} \,\mathrm{d}\,\zeta \tag{1.1}$$

Утверждение 1.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{S} \frac{f(\zeta)}{(} \zeta - z)^{n+1} \,\mathrm{d}\,\zeta \tag{1.2}$$

Доказательство. Доказывать будем по **индукции**. **База** уже доказана. **Переход**:

$$f^{(n+1)}(z) = \left(f^{(n)}\right)'(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{S} f(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}}\right)' \mathrm{d}\,\zeta = \frac{n! \cdot (n+1)}{2\pi i} \int\limits_{S} \frac{f(z)}{(\zeta - z)^{n+2}} \,\mathrm{d}\,\zeta =$$

$$= \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int\limits_{S} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+2}} \,\mathrm{d}\,\zeta$$

□

Теорема 1. $f \in \mathcal{A}(D)$

$$\implies f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \tag{1.3}$$

То есть,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \qquad f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

где ряд сходится в D и $\forall \rho_1 < \rho < R$ ряд сходится равномерно на $\overline{D}_\rho = \{\, z \mid |\, z - z_0| \le \rho \,\}$.

Доказательство. $S_r = \{\, z \mid |\, z - z_0| = r \,\}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\,\zeta$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \tag{1.4}$$

Обозначим $q(\zeta, z) = \frac{z-z_0}{\zeta - z_0}$.

$$|q| = \frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} \leq \frac{\rho}{r} =: q_0 < 1$$

$$\frac{1}{1-q} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \tag{1.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |q^n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} q_0^n = \frac{q_0}{1 - q_0} \tag{1.6}$$

$$(1.5), (1.6) \implies 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n(z, \zeta) \text{ равномерно сходится при } \zeta \in S_r,\ z \in \overline{D}_\rho$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_r} f(\zeta) \frac{1}{\zeta - z_0} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \right) \,\mathrm{d}\,\zeta =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \,\mathrm{d}\,\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}\,\zeta = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Обозначим $M(r) = \max\limits_{z \in S_r} |f(z)|$.

$$|c_n| = \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \,\mathrm{d}\,\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S_r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{n+1}} \,|\,\mathrm{d}\,\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S_r} \frac{M(r)}{r^{n+1}} \,|\,\mathrm{d}\,\zeta| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{M(r)}{r^{n+1}} = \frac{M(r)}{r^n}$$

$$\implies |z - z_0|^n \cdot |c_n| \leq \rho^n \cdot \frac{M(r)}{r^n} = M(r) q_0^n$$

□

1.2. Теорема Лиувилля

Теорема 2.

$$\exists\, M : \quad |f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C} \tag{1.7}$$

$$\implies f(z) \equiv f(0)$$

Доказательство.

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

$$\forall R > 1 \quad f \in \mathcal{A}(\{\, z \mid |\, z| < R \,\}), \qquad r = \frac{R}{2} < R$$

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \tag{1.8}$$

Воспользуемся неравенством Коши:

$$M(r) \leq M \quad \forall r \tag{1.9}$$

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n} = \frac{2^n M}{R^n} \tag{1.10}$$

$$\lim_{[\to\infty} R]|c_n| \le \lim_{[\to\infty} R]\frac{2^n M}{R^n} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad |c_n| = 0 \quad n \ge 1$$

$$\underset{(1.8)}{\Longrightarrow} f(z) = 0$$

□

Теорема 3. $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \qquad a_j \in \mathbb{C}$

$$\Longrightarrow \exists\, z_0 \in \mathbb{C}: \quad P(z_0) = 0 \tag{1.11}$$

Доказательство. Предположим, что **это не так**. Пусть $P(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Полином — это аналитическая функция.

Обозначим $f(z) = \frac{1}{p(z)}$.

$$\Longrightarrow f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}) \tag{1.12}$$

Возьмём $R_0 \ge 1$, $|z| \ge R_0$. Тогда

$$|z|^k \ge |z| \text{ при } k \ge 1, \quad |z| \ge 1$$

$$|P(z)| = |z|^n \left|1 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n}\right| \ge |z|^n \left(1 - \frac{|a_1|}{|z|} - \dots - \frac{|a_n|}{|z|^n}\right) \ge |z|^n \left(1 - \frac{|a_1| + \dots + |a_n|}{R_0}\right)$$

$$1 - \frac{|a_1| + \dots + |a_n|}{R_0} \ge \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \forall |z| \ge R_0 \quad |f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} \le \frac{2}{|z|^n} \le \frac{2}{R_0^n} \tag{1.13}$$

Возьмём $M_1 = \max\limits_{|z| \le R_0} |f(z)|, \quad M = \max\left\{ M_1, \frac{2}{R_0^n} \right\}$.

$$(1.13) \Longrightarrow |f(z)| \le M \quad \forall z \in \mathbb{C} \tag{1.14}$$

По теореме Лиувилля $f(z) \equiv f(0)$. То есть, $P(z) \equiv P(0)$. □