Оглавление

1 Пространства **2**
1.1 Метрические пространства 2
1.2 Банаховы пространства 2
1.2.1 Основные понятия 2
1.2.2 Критерий полноты 3
1.3 Пространство ограниченных функций 4
1.4 Пространства с sup-нормой 5

Глава 1

Пространства

1.1. Метрические пространства

Следствие. (X, ρ), $\{ x_n \}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная

$$\implies \exists \{ x_{n_k} \}_{k=1}^{\infty} : \quad \sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < +\infty$$

Доказательство. Следует из свойства 3 фундаментальных последовательностей □

Теорема 1 (о замкнутом подпротрānстве). (X, ρ), $Y \subset X$ (Y называется *подпространством*)

1. (X, ρ) — полное, Y замкнуто.
   Тогда (Y, ρ) полно.
2. (Y, ρ) — полное.
   Тогда Y замкнуто.

Доказательство.

1. Пусть $\{ y_n \}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в Y. Тогда она фундаментальна и в X, а X полно. Значит, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \in X$. Так как Y замкнуто, $a \in Y \implies (Y, \rho)$ — полное.
2. Пусть $\{ y_n \}_{n=1}^{\infty}$, $y_n \in Y$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Проверим, что $a \in Y$.
   $\{ y_n \}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна $\implies \exists \lim y_n \in Y$ (т. к. Y — полное).

□

1.2. Банаховы пространства

1.2.1. Основные понятия

Определение 1. X — линейное пространство над полем K ($K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).
$p : X \to \mathbb{R}$ называется *полунормой*, если

1. полуаддитивность: $p(x + y) \le p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$;
2. однородность: $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad \forall \lambda \in K,\ x \in X$.

Свойства. (X, p), p — полунорма, $\mathbb{O}_n$ — ноль пространства X

1. $p(\mathbb{O}_n) = 0$;
2. $p(x) \ge 0 \quad \forall x \in X$.

Доказательство.

1. $p(\mathbb{O}_n) = p(0 \cdot \mathbb{O}_n) \xlongequal[\text{однородность}]{} 0 \cdot p(\mathbb{O}_n) = 0.$

2. Пусть $x \in X$

$$0 = p(\mathbb{O}_n) = p\big(x + (-x)\big) \le p(x) + p(-x) = 2p(x) \quad \implies p(x) \ge 0$$

□

Определение 2. X — линейное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.
$p : X \to \mathbb{R}$ называется *нормой*, если

1. p — полунорма;
2. $p(x) = 0 \iff x = \mathbb{O}_n$.

Обозначение. $\|x\|$ — норма, $\quad (X, \|\cdot\|)$ — нормированное пространство.

Определим метрику, *порождённую нормой*: $\rho(x, y) := \|x - y\|$.

Определение 3. $(X, \|\cdot\|)$ называется *банаховым*, если оно полное.

1.2.2. Критерий полноты

Определение 4.

1. X — линейное пространство над K.
   $L \subset X$ называется *подпространством (в алгебраическом смысле)*, если оно является линейным пространством, т. е.
   $$\left.\begin{array}{r} x, y \in L \\ \alpha, \beta \in K \end{array}\right\} \implies \alpha x + \beta y \in L$$
2. $(X, \|\cdot\|)$
   $L \subset X$ называется *(замкнутым) подпространством*, если
   (a) L — подпространство в алгебраическом смысле;
   (b) L замкнуто.

Определение 5. $(X, \|\cdot\|)$, $\quad \{\, x_k \,\}_{k=1}^{\infty}$

$$S_n := \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

Говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *сходится*, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in X$. Тогда $S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$.
Говорят, что ряд $\sum x_k$ *сходится абсолютно*, если $\sum \|x_k\|$ сходится.

Теорема 2 (критерий полноты нормированного пространства)**.** $(X, \|\cdot\|)$ — полное **тогда и только тогда**, когда из абсолютной сходимости ряда следует его сходимость.

Доказательство.

- $\implies$ (X — полное)
  Возьмём $\{\, x_k \,\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ сходится. Применим к этому ряду критерий Коши:
  $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N, \ p \in \mathbb{N} : \quad \|x_{n+1}\| + \dots + \|x_{n+p}\| < \varepsilon$$
  $$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Требуется доказать, что S_n образуют фундаментальную последовательность. Для этого оценим норму разности:

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \|\sum_{k=1}^{p} x_{n+k}\| \overset{\triangle}{\le} \sum_{k=1}^{p} \|x_{n+k}\| < \varepsilon$$

- $\Longleftarrow$ (абсолютно сходящийся ряд сходится)

  Пусть $\{ x_n \}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Нужно доказать, что у неё есть предел.

  Воспользуемся следствием из начала лекции:

$$\exists \{ x_{n_k} \}_{k=1}^{\infty} : \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < +\infty$$

$$\Longrightarrow \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < +\infty$$

  Рассмотрим ряд без нормы:

$$\exists S = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$$

$$S_m = x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \dots + (x_{n_m} - x_{n_{m-1}}) = x_{n_m}$$

  При этом,

$$\exists \lim_{m\to\infty} S_m = S \quad \Longrightarrow \exists \lim x_{n_m} = S \xRightarrow[\text{св-во фунд. посл. 2}]{} \lim x_n = S$$

$\square$

1.3. Пространство ограниченных функций

Определение 6. X — множество.

$m(X)$ — *пространство ограниченных функций*:

$$m(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C}) \mid \sup_{x\in X} \Big| f(x)| < +\infty \right\}$$

Норма на таком пространстве называется *равномерной, чебышёвской или* sup-*нормой*:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

Теорема 3. $m(X)$ — банахово пространство.

Доказательство.

1. Проверим, что $\|f\|_\infty$ удовлетворяет аксиомам нормы:

$$\|f\|_\infty = 0 \iff \sup_{x\in X} |f(x)| = 0 \iff f(x) \equiv 0 \iff f = \mathbb{O}_n$$

$$\lambda \in K, \quad \|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in X} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in X} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$$

   Пусть $f, g \in m(X)$, x фиксирован. Тогда $f(x), g(x)$ — числа.

$$\|f\|_\infty + \|g\|_\infty \ge \Longrightarrow |f(x)| + |g(x)| \overset{\triangle}{\ge} |f(x) + g(x)| \quad \forall x \in X$$

   В силу произвольности x,

$$\Longrightarrow \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \sup_{x\in X} |f(x) + g(x)| = \|f + g\|_\infty$$

2. Проверим полноту.

Возьмём фундаментальную последовательность $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$ (в смысле нормы $\| \cdot \|_\infty$).

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n, m > N \quad \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \tag{1.1}$$

Зафиксируем $x \in X$.

$$(1.1) \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Из полноты K следует, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Обозначим $f(x) \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (*поточечный*).

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \text{ при фиксированном } x, \quad n, m > N$$

Перейдём к пределу по n:

$$|f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X, \quad m > N$$

Воспользуемся произвольностью x:

$$\|f - f_m\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \implies (f - f_m) \in m(X)$$

$$f = (f - f_m) + f_m$$

В силу линейности $m(X)$ это означает, что $f \in m(X)$, $\|f - f_m\|_\infty < \varepsilon$ при $m > N$

$$\implies \lim_{m\to\infty} = f \text{ в пространстве } m(X)$$

$\square$

Примечание. Почему молодёжь ностальгирует по советской власти?

Замечание. Сходимость по норме в $m(X)$ совпадает с равномерной сходимостью.

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \big(\sup_{x\in X} |f(x) - f_n(x)|\big) = 0 \iff f_n \xrightarrow[n\to\infty]{X} f$$

1.4. Пространства с sup-нормой

Определение 7. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $l_n^\infty = (\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_\infty)$ или $(\mathbb{C}^n, \| \cdot \|_\infty)$, где

$$\mathbb{R}^n = \{ x = (x_1, \dots, x_n),\ x_j \in \mathbb{R} \}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|$$

При этом, $l_n^\infty = m(X)$, где $X = \{ 1, 2, \dots, n \}$, $f(j) = x_j$. Значит, l_n^∞ — банахово пространство.

Определение 8. l^∞ — *пространство ограниченных последовательностей*, т. е.

$$l^\infty = \left\{ x = \{ x_j \}_{j=1}^{\infty},\ x_j \in \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C},\ \sup j \geq 1 \,\middle|\, x_j| < +\infty \right\}$$

$$l^\infty = m(X),\ X = \mathbb{N} \implies l^\infty \text{ — банахово}$$

Определение 9.

$$C = \left\{ x = \{ x_j \}_{j=1}^{\infty} \mid \exists \lim_{j\to\infty} x_j = x_0 \right\}$$

$$C_0 = \left\{ x = \{ x_j \}_{j=1}^{\infty} \mid \exists \lim x_j = 0 \right\}$$

TODO: Доказать, что они замкнуты