# Оглавление

# Глава 1

# Пространства

## 1.1. Пространства с sup-нормой

### 1.1.1. Пространство непрерывных функций на компакте

**Определение 1.** $K$ — *топологический компакт*, если:

1. $\forall \{ G_\alpha \}_{\alpha \in A}$, $G_\alpha$ открыты, такие, что $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \quad \exists \{ \alpha_j \}_{j=1}^n$ такие, что $K \subset \bigcup_{j=1}^n G_{\alpha_j}$;
2. *Хаусдорфовость*: $\forall a \neq b \in K \quad \exists U, V$ — открытые: $a \in U,\ b \in V : \quad U \cap V = \emptyset$.

**Определение 2.** $K$ — топологический компакт.

Введём *пространство непрерывных функций на компакте*:

$$\mathcal{C}(K) = \{ f : K \to \mathbb{C} \text{ (или } \mathbb{R}) \text{ — непрерывны} \}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)| = \max_{x \in K} |f(x)|$$

**Утверждение 1.** $\big(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty\big)$ — банахово.

**Доказательство.** $m(K)$ — пространство ограниченных функций с такой же нормой. Уже доказано, что оно банахово.

Линейная комбинация линейных функций линейна, поэтому $C(K)$ — подпространство в алгебраическом смысле. Осталось проверить замкнутость.

Возьмём $\{ f_n \}_{n=1}^\infty$, $f_n \in C(K)$, $\quad f \in m(K)$ такие, что $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ в $C(K)$.

$$\implies \lim_{n \to \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0 \iff f_n \underset{n \to \infty}{\overset{K}{\rightrightarrows}} f \implies f \in C(K) \implies C(K) \text{ замкнуто}$$

$\square$

### 1.1.2. Пространство непрерывных производных

**Определение 3.** $n \in \mathbb{N}$ — фиксировано.

Рассмотрим *пространство непрерывных производных*:

$$\mathcal{C}^{(n)}[a, b] = \Big\{ f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C}), \quad \exists f^{(n)} \in \mathcal{C}[a, b] \Big\}$$

$$\|f\|_{C^{(n)}} := \max_{0 \leq k \leq n} \|f^{(k)}\|_\infty, \quad f := f^{(0)}$$

**Утверждение 2.** $\big(\mathcal{C}[a, b]^{(n)}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}^{(n)}}\big)$ — банахово.

**Утверждение 3.** Пусть $\{ f_m \}_{m=1}^{\infty}$ фундаментальна в $C^{(n)}[a,b]$. Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$\exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall m, p > N \quad \|f_m - f_p\|_{\mathcal{C}^{(n)}} < \varepsilon$$

$$\implies \forall 0 \leq k \leq n \quad \|{f_m}^{(k)} - {f_p}^{(k)}\|_\infty < \varepsilon$$

Рассмотрим $\left\{ {f_m}^{(k)} \right\}_{m=1}^{\infty}, \quad {f_m}^{(k)} \in \mathcal{C}[a,b]$.
$\mathcal{C}[a,b]$ — банахово $\implies \varphi_k \in \mathcal{C}[a,b]$.

$$\lim \|f^{(k)} - \varphi_k\|_\infty = 0, \quad 0 \leq k \leq n \implies \begin{cases} f_m \xrightarrow[m\to\infty]{[a,b]} \varphi_0, \\ f'_m \xrightarrow[m\to\infty]{[a,b]} \varphi_1 \\ \dots \\ {f_m}^{(n)} \xrightarrow[m\to\infty]{[a,b]} \varphi_n \end{cases} \xRightarrow[\text{в анализе доказано}]{} \begin{cases} \varphi_1 = \varphi'_0 \\ \varphi_2 = \varphi'_1 = \varphi''_0 \\ \dots \\ \varphi_n = {\varphi_0}^{(n)} \end{cases}$$

$$\|f_m - \varphi_0\|_{\mathcal{C}^{(n)}} = \max_{0 \leq k \leq n} \|{f_m}^{(k)} - {\varphi_0}^{(k)}\|_\infty \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

$\lim\limits_{m\to\infty} f_m = \varphi_0$ в $\mathcal{C}^{(n)}[a,b]$.

## 1.2. Пространства Лебега

### 1.2.1. Экскурс в теорию меры

**Определение 4** (пространство с мерой). $(T, \mathscr{U}, \mu)$, $\quad T$ — множество, $\quad \mathscr{U}$ — $\sigma$-алгебра, то есть

1. $\emptyset \in \mathscr{U}$;
2. $A \in \mathscr{U} \implies T \setminus A \in \mathscr{U}$;
3. $\{ A_n \}_{n=1}^{\infty}, \ A_n \in \mathscr{U}, \ A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \implies A \in \mathscr{U}$.

$\mu : \mathscr{U} \to [0, +\infty]$ — *мера*, то есть

1. $\mu\emptyset = 0$;
2. $A_n \in \mathscr{U}, \ \{ A_n \}_{n=1}^{\infty}, \ A_n \cap A_m = \emptyset \implies \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$.

Будем также предполагать, что верны следующие предположения:

1. $\mu$ — *полная*, то есть если $A \in \mathscr{U}$ и $\mu A = 0, \ B \subset A$, то $B \in \mathscr{U}$. Отсюда сразу следует, что $\mu B = 0$.
2. $\mu$ — *$\sigma$-конечна*, то есть $T = \bigcup_{j=1}^{\infty} T_j$, где $\mu(T_j) < +\infty$.

**Определение 5.** $A \in \mathscr{U}, \quad f : A \to \overline{\mathbb{R}}$
$f$ — *измеримая*, если

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad \{ x \mid c < f(x) \leq +\infty \} = f^{-1}(c, +\infty] \in \mathscr{U}$$

**Определение 6.** $f : A \to \mathbb{C}, \quad f = u + \mathrm{i}v, \quad u, v : A \to \mathbb{R}$
$f$ *измерима*, если $u$ и $v$ измеримы.

**Определение 7** (интеграл от измеримой функции по мере $\mu$).

- $A \in \mathscr{U}$

  Определим *характеристическую функцию*: $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

Введём множество *простых функций*:

$$S = \left\{ g(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{A_k}, \quad c_k \in \mathbb{R},\ A_k \cap A_j = \emptyset \right\}$$

Для $g(x) \in S$

$$\int\limits_T g(x)\,\mathrm{d}\,\mu \coloneqq \sum_{k=1}^{n} c_k \mu A_k, \qquad \text{если } \mu A_k < +\infty$$

- $f$ измерима, $f : T \to \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$

$$\int\limits_T f(x)\,\mathrm{d}\,\mu \coloneqq \sup_{g\in S} \left\{ \int\limits_T g(x)\,\mathrm{d}\,\mu \mu 0 \leq g(x) \leq f(x) \right\}$$

- $f : T \to \mathbb{R}$

  Определим

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0, \end{cases} \qquad f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) < 0 \\ 0, & f(x) \geq 0 \end{cases}$$

  Тогда $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.

  Если $\int\limits_T f^+(x)\,\mathrm{d}\,\mu < +\infty$, $\int\limits_T f^-(x)\,\mathrm{d}\,\mu < +\infty$, то

$$\int\limits_T f(x)\,\mathrm{d}\,\mu \coloneqq \int\limits_T f^+\,\mathrm{d}\,\mu - \int\limits_T f^-\,\mathrm{d}\,\mu$$

  Такие функции называются *суммируемыми* или *интегрируемыми*. Их множество обозначим $\mathscr{L}(T, \mu)$.

- $f : T \to \mathbb{C}$ — измеримая

  Пусть $f = u + \mathrm{i}v, \quad u, v : T \to \mathbb{R}$.

$$\int\limits_T f\,\mathrm{d}\,\mu = \int\limits_T u\,\mathrm{d}\,\mu + \mathrm{i}\int\limits_T v\,\mathrm{d}\,\mu$$

  (если всё конечно).

**Примеры.**

1. $\lambda$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, $\quad A$ — измеримое по $\lambda$ множество, $\quad w(x) \geq 0 : A \to \mathbb{R}$.

   Введём новую меру: $\mu = w \cdot \lambda$, то есть

$$\mu B = \int\limits_B w(x)\,\mathrm{d}\,\lambda$$

$$\int\limits_A f\,\mathrm{d}\,\mu = \int\limits_A f(x)w(x)\,\mathrm{d}\,\lambda$$

2. $T$ — бесконечное множество, $\quad \{\,a_n\,\}_{n=1}^{\infty},\ a_n \in T$

   Для $a \in T$ можно определить *меру с нагрузкой в точке* $a$:

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

Для последовательности $\{ c_n \}_{n=1}^{\infty}$, $c_n > 0$ можно рассмотреть *дискретную меру*:

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{a_n}$$

$$\mu A = \sum_{\{ n | a_n \in A \}} c_n$$

$$\int\limits_T f \,\mathrm{d}\,\mu = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(a_n)$$

### 1.2.2. Несколько простых неравенств

#### Неравенство Юнга

**Утверждение 4.** $a, b > 0, \quad p > 1, \quad q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($q$ называется *сопряжённым показателем*).

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \qquad \text{равенство только при } a^p = b^q$$

**Доказательство.** Воспользуемся тем, что $\ln x$ выпукла вверх, т. е. $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$. Это означает, что график лежит над хордой, т. е.

$$\forall x_1 \ne x_2 \forall 0 < \alpha < 1 \forall \beta = 1 - \alpha \quad f\big(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\big) > \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

Применим это неравенство к ln:

$$f(x) = \ln x, \quad x_1 = a^p, \quad x_2 = b^q, \quad \alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{q}$$

$$\ln\Big(\frac{1}{p} \cdot a^p + \frac{1}{q} \cdot b^q\Big) > \frac{1}{p} \cdot \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) = \ln(ab)$$

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} > ab$$

□

#### Неравенство Гёльдера

**Утверждение 5.** $(T, \mathscr{U}, \mu), \quad f, g$ измеримы, $\quad p > 1, \quad q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

$$\int\limits_T |fg| \,\mathrm{d}\,\mu \le \Big(\int\limits_T |f|^p \,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \cdot \Big(\int\limits_T |g|^q \,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \tag{1.1}$$

**Примечание.** Для $p = q = 2$ это неравенство называется *неравенством Коши—Буняковского—Шварца*.

**Доказательство.**

$$A = \Big(\int\limits_T |f(x)|^p \,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad B = \Big(\int\limits_T |g|^q \,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{q}}$$

- $A = 0$

  Докажем, что в таком случае $f(x) = 0$ почти всюду:

  Рассмотрим $e = \{ x \mid f(x) \ne 0 \} = \{ x \mid | f(x)| > 0 \}$.

$$e_n = \Big\{ x \,\Big|\, \big| f(x)| > \frac{1}{n} \Big\}$$

$$0 = \int\limits_T |f(x)|^p \,\mathrm{d}\,\mu \geq \int\limits_{e_n} |f(x)|^p \,\mathrm{d}\,\mu \geq \left(\frac{1}{n}\right)^p \mu(e_n) \quad\implies \mu e_n = 0$$

При этом, $e = \bigcup e_n \implies \mu e = 0$.

$$A = 0 \implies f(x) = 0 \text{ п. в. по } \mu \implies f(x)\cdot g(x) = 0 \text{ п. в.} \implies (\textbf{??})$$

- Аналогично, $B = 0 \implies (\textbf{??})$
- $A = +\infty \implies (\textbf{??})$
- $B = +\infty(\textbf{??})$
- $0 < A, B < +\infty$

  Рассмотрим нормировку функций $f$ и $g$:

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{A} \implies \int\limits_T |f_1|^p \,\mathrm{d}\,\mu = \frac{1}{A^p}\int\limits_T |f(x)|^p \,\mathrm{d}\,\mu = \frac{A^p}{A^p} = 1$$

  Аналогично,

$$g_1(x) = \frac{g(x)}{B} \implies \int\limits_T |g_1|^p \,\mathrm{d}\,\mu = 1$$

  Возьмём $a = |f_1(x)|,\ b = |g_1(x)|$, применим неравенство Юнга:

$$|f_1(x)|\cdot|g_1(x)| \leq \frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q} \quad \forall x \in T$$

  Проинтегрируем:

$$\int\limits_T |f_1|\cdot|g_1| \,\mathrm{d}\,\mu \leq \frac{1}{p}\int\limits_T |f_1|^p \,\mathrm{d}\,\mu + \frac{1}{q}\int\limits_T |g_1|^q \,\mathrm{d}\,\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

  Подставим изначальные функции и умножим на $AB$:

$$\int\limits_T \frac{|f|\cdot|g|}{AB} \,\mathrm{d}\,\mu \leq 1 \implies \int\limits_T |f|\cdot|g| \,\mathrm{d}\,\mu \leq AB$$

□

**Неравенство Минковского**

**Утверждение 6.** $(T, \mathscr{U}, \mu)$, $\quad f, g$ измеримы, $\quad 1 \leq p \leq +\infty$

$$\left(\int\limits_T |f(x) + g(x)|^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_T |f|^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_T |g|^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

**Доказательство.**

- $p = 1$

$$|f(x) + g(x)| \overset{\triangle}{\leq} |f(x)| + |g(x)|$$

  Проинтегрируем:

$$\int\limits_T |f + g| \,\mathrm{d}\,\mu \leq \int\limits_T |f|\mu + \int\limits_T |g| \,\mathrm{d}\,\mu$$

□