# Оглавление

# Глава 1

# Линейные функционалы

## 1.1. Обратные операторы

Когда существует непрерывный обратный оператор?

### 1.1.1. Обратимость оператора, близкого к тождественному

**Утверждение 1.** $A, B \in \mathscr{B}(X)$

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

**Доказательство.**

$$\|A(Bx)\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|$$

□

**Теорема 1.** $X$ — банахово, $\quad I$ — тождественный, $\quad A \in \mathscr{B}(X), \quad \|A\| < 1$

$$\exists (I - A)^{-1}, \quad \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}, \quad (I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

**Доказательство.** Проверим, что сумма норм операторов сходится. По утв. 1

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k \implies \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|}$$

$X$ — банахово $\implies \mathscr{B}(X)$ — банахово. Воспользуемся критерием полноты:

$$\implies \exists S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \in \mathscr{B}(X)$$

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} A^k$$

$$\|S_n\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|A\|^k < \frac{1}{1 - \|A\|}, \quad \lim_{n \to \infty} \|S - S_n\| = 0$$

$$\implies \|S\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

$$(I - A)S_n = (I - A) \sum_{k=0}^{n} A^k = \sum_{k=0}^{n} A^k - \sum_{k=0}^{n} A^{k+1} = I - A^{n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} \|A^{n+1}\| = 0 \implies \lim (I - A^{n+1}) = I$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim(I-A)S_n = I\\ \lim(I-A)S_n = (I-A)S\end{array}\right\} \implies (I-A)S = I\\ S_n(I-A) = I - A^{n+1} \implies S(I-A) = I\end{array}\right\} \implies S = (I-A)^{-1}$$

□

**Замечание.** Если $A \cdot B = I$, то **не обязательно** $A = B^{-1}$.

**Пример.** $l^2, \quad x \in l^2, \quad x = (x_1, x_2, \dots)$ Рассмотрим *операторы сдвига*:

$$Sx = (0, x_1, x_2, \dots), \quad Tx = (x_2, x_3, \dots)$$

$$(ST)x = (0, x_2, x_3, \dots), \quad (TS)x = x$$

**Определение 1.** $(X, \|\cdot\|), \ (Y, \|\cdot\|)$

Определим *множество обратимых операторов*:

$$\operatorname{In}(X, Y) = \left\{\, A \in \mathscr{B}(X, Y) \;\middle|\; \exists A^{-1} \in \mathscr{B}(Y, X) \,\right\}$$

### 1.1.2. Множество обратимых операторов открыто

**Теорема 2.** $X$ — банахово, $\quad (Y, \|\cdot\|)$

1. $U \in \operatorname{In}(X, Y), \quad V \in \mathscr{B}(X, Y),$

$$\|U - V\| < \frac{1}{\|U^{-1}\|}$$

$$\implies V \in \operatorname{In}(X, Y),$$

$$\|V^{-1}\| \le \frac{\|U^{-1}\|}{1 - \|U - V\| \cdot \|U^{-1}\|} \tag{1.1}$$

$$\|U^{-1} - V^{-1}\| \le \frac{\|U^{-1}\|^2 \|U - V\|}{1 - \|U - V\| \cdot \|U^{-1}\|} \tag{1.2}$$

2. $\varphi : \operatorname{In}(X, Y) \to \operatorname{In}(Y, X) : \quad \varphi(A) = A^{-1}$

   Тогда $\varphi$ непрерывно.

**Замечание.** $\mathrm{B}_{\frac{1}{\|U^{-1}\|}}(U) \subset \operatorname{In}(X, Y) \implies \operatorname{In}(X, Y)$ открыто.

**Доказательство.**

1. Рассмотрим оператор $W = U^{-1}(U - V)$.

$$\|W\| \le \|U^{-1}\| \cdot \|U - V\| < 1, \quad W \in \mathscr{B}(X)$$

Можно применить предыдущую теорему:

$$\exists (I - W)^{-1}, \quad \|(I - W)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|W\|} \le \frac{1}{1 - \|U^{-1}\|\|U - V\|}$$

$$W = U^{-1}(U - V) = I - U^{-1}V \implies I - W = U^{-1}V$$

$$V = U(U^{-1}V) = U(I - W)$$

Каждый их них обратим, значит,

$$\exists V^{-1} = (I - W)^{-1}U^{-1}$$

$$\|V^{-1}\| \le \|U^{-1}\| \cdot \|(I - W)^{-1}\| \le \frac{\|U^{-1}\|}{1 - \|U^{-1}\| \cdot \|U - V\|}$$

Получили неравенство (1.1). Получим из него неравенство (1.2):

$$U^{-1} - V^{-1} = U^{-1}(V-U)V^{-1} \implies \|U^{-1} - V^{-1}\| \le \|U^{-1}\|\|V-U\|\|V^{-1}\| \underset{(1.1)}{\le} \frac{\|U^{-1}\|^2\|U-V\|}{1 - \|U^{-1}\| \cdot \|U-V\|}$$

2. $\varphi(U) = U^{-1}$

$$\varphi(U) - \varphi(V) = U^{-1} - V^{-1} \underset{(1.2)}{\implies} \lim_{\|U-V\|\to 0} \|\varphi(U) - \varphi(V)\| = 0$$

□

## 1.2. Открытые отображения

**Определение 2.** $(X, \tau_1)$, $(Y, \tau_2)$ — топологические пространства

Отображение $U : X \to Y$ *открыто*, если оно переводит открытые множества в открытые:

$$G \subset X \text{ открыто } \implies U(G) \text{ открыто}$$

**Замечание.** $U$ непрерывно, если **прообраз** открытого множества открыт.

**Утверждение 2.** $(X < \tau_1)$, $(Y, \tau_2)$ — топологические пространства, $U : X \to Y$ — биекция

$$U \text{ открыто } \iff U^{-1} \text{ непрерывно}$$

**Доказательство.** Очевидно. □

### 1.2.1. Критерий открытости линейного оператора

**Утверждение 3.** $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$, $U \in \mathscr{L}in(X, Y)$

$$U \text{ открыт } \iff \exists r > 0 : \quad \mathtt{B}_r(0) \subset U\big(\mathtt{B}_1(0)\big)$$

**Доказательство.**

- $\implies$

$$\left.\begin{aligned} &U(0) = 0 \\ &U \text{ открыто } \implies U\big(\mathtt{B}_1(0)\big) \text{ открыто} \end{aligned}\right\} \implies 0 \in U\big(\mathtt{B}_1(0)\big) \implies \exists r > 0 : \quad \mathtt{B}_r(0) \subset U\big(\mathtt{B}_1(0)\big)$$

- $\impliedby$

Возьмём $G \subset X$ — открытое. Пусть $y_0 \in U(G)$.

$$\exists x_0 \in G : \quad Ux_0 = y_0$$

$$\exists R > 0 : \quad \mathtt{B}_R(x_0) \subset G$$

$$\mathtt{B}_r(0) \subset U\big(\mathtt{B}_1(0)\big) \xrightarrow[\text{линейность}]{} \mathtt{B}_{rR}(0) \subset U\big(\mathtt{B}_R(0)\big)$$

Сдвинем на $U(x_0)$:

$$\underbrace{Ux_0 + \mathtt{B}_{rR}(0)}_{\mathtt{B}_{rR}(Ux_0) \subset U(\mathtt{B}_R(x_0)) \subset U(G)} \subset Ux_0 + U\big(\mathtt{B}_R(0)\big) = U\big(x_0 + \mathtt{B}_R(0)\big) = U\big(\mathtt{B}_R(x_0)\big)$$

$\implies Ux_0$ — внутренняя точка $U(G)$.

□

### 1.2.2. Необходимое условие открытости линейного отображения

**Следствие.** $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$, $\quad U \in \mathscr{L}in(X, Y)$

$$U \text{ открыто} \implies U(X) = Y, \text{ т. е. } U \text{ — сюръекция}$$

**Доказательство.** По критерию $\exists r > 0: \quad \mathtt{B}_r(0) \subset U\big(\mathtt{B}_1(0)\big)$. Возьмём $y \in Y$.

$$\exists n \in \mathbb{N}: \quad \|y\| < nr \implies y \in \mathtt{B}_{nr}(0) \subset U\big(\mathtt{B}_n(0)\big) \implies y \in U(X)$$

□

### 1.2.3. Теорема об открытом отображении

**Лемма 1** (редукция). $X$ — банахово, $\quad (Y, \|\cdot\|)$, $\quad U \in \mathscr{B}(X, Y)$, $\quad \exists r > 0: \quad \mathtt{B}_r(0) \subset \overline{U\big(\mathtt{B}_1(0)\big)}$

$$\mathtt{B}_{\frac{r}{2}}(0) \subset U\big(\mathtt{B}_1(0)\big)$$

**Доказательство.** Пусть $y \in \mathtt{B}_{\frac{r}{2}}(0)$, т. е. $\|y\| < \frac{r}{2}$. Докажем, что $\exists x: \quad \|x\| < 1, \quad Ux = y$.

$$\mathtt{B}_r(0) \subset \overline{U\big(\mathtt{B}_1(0)\big)} \implies \forall k \in \mathbb{N} \quad \mathtt{B}_{\frac{r}{2^k}}(0) \subset \overline{U\big(\mathtt{B}_{\frac{1}{2^k}}(0)\big)}$$

- При $k = 1$
$$\|y\| < \frac{r}{2} \implies y \in \mathscr{B}_{\frac{r}{2}}(0) \subset \overline{U\big(\mathtt{B}_{\frac{1}{2}}(0)\big)}$$
$$\exists x_1: \quad \|x_1\| < \frac{1}{2}, \quad \|y - Ux_1\| < \frac{r}{4}$$

- $k = 2$
$$y - Ux_1 \in \mathtt{B}_{\frac{r}{4}}(0) \subset \overline{U\big(\mathtt{B}_{\frac{1}{4}}(0)\big)} \implies \exists x_2: \quad \|x_2\| < \frac{1}{4}, \quad \|y - Ux_1 - Ux_2\| < \frac{r}{2^3}$$
$$\dots$$

- Построим $\{\, x_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что
$$\|x_n\| < \frac{1}{2^n}, \quad \|y - Ux_1 - \dots - Ux_n\| < \frac{r}{2^{n+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < 1 \xRightarrow[\text{критерий полноты}]{} \exists x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X, \quad \|x\| < 1$$

$$S_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim S_n = x \implies \lim US_n = Ux \\ &\lim \|y - US_n\| = 0 \implies \lim US_n = y \end{aligned}\right\} \implies Ux = y$$

□

**Теорема 3** (Банах). $X, Y$ — банаховы, $\quad U \in \mathscr{B}(X, Y)$
Если $U(X) = Y$, то $U$ открыто.

**Доказательство.** Обозначим $B = \mathtt{B}_1(0)$.

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (nB) \implies U(X) = Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} U(nB)$$

По теореме Бэра о категориях
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad \operatorname{Int} \overline{U(n_0 B)} \neq \emptyset$$

При этом, $U(n_0 B) = n_0 U(B)$.

$$\implies \operatorname{Int} \overline{U(B)} \neq \emptyset \implies \exists a \in Y \ \exists y > 0 : \quad \mathtt{B}_r(a) \subset \overline{U(B)}$$

Чтобы воспользоваться леммой, нужно сдвинуть точку $a$ в 0.
Возьмём $z \in X : \quad \|z\| < r$.

$$\left.\begin{aligned} & a + z \in \mathscr{B}_r(a) \subset \overline{U(B)} \\ & a \in \overline{U(B)} \implies -a \in \overline{U(B)} \end{aligned}\right\} \implies z = (a+z) + (-a) \in \overline{U(B)} + \overline{U(B)} \subset \overline{U(2B)}$$

Воспользуемся подобием:

$$\mathtt{B}_{\frac{r}{2}} \subset \overline{U(B)} \xRightarrow[\text{лемма}]{} \mathtt{B}_{\frac{r}{4}}(0) \subset U(B)$$

$\square$