Оглавление

Глава 1

Ряды Фурье

1.1. Разложение в ряд Фурье элемента из замыкания линейной оболочки ОНС

Замечание. $(X, \|\cdot\|)$, $\quad \{\, e_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ — базис.
Тогда $\{\, e_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ — полная система (т. е. $\overline{\mathscr{L}\{\, e_n \,\}} = X$).

Замечание. $(X, \|\cdot\|)$, $\quad \{\, e_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ — базис.
Тогда X сепарабельно.

Следствие. H — гильбертово, $\quad \{\, e_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ — полная ОС.
Тогда $\{\, e_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ — базис.

Доказательство. Уже доказано, что

$$x \in H, \quad x \in \overline{\mathscr{L}\{\, e_n \,\}} \quad \Longrightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$$

Проверим единственность разложения

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$$

Рассмотрим частичную сумму:

$$\sigma_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, \quad \lim \sigma_n = x$$

$$(\sigma_n, e_k) = \alpha_k \text{ при } n \geq k \implies \lim_{n\to\infty} (\sigma_n, e_k) = \alpha_k$$

При этом,

$$\lim(\sigma_n, e_k) \xlongequal[\text{непр. ск. произв.}]{} (x, e_k) \implies \alpha_k = (x, e_k)$$

$\square$

Теорема 1. H — сепарабельное гильбертово пространство.
Тогда в H существует ОНБ.

Доказательство. Существует всюду плотное $\{\, x_n \,\}_{n=1}^{\infty}$, т. е. $\overline{\{\, x_n \,\}} = H$. Значит, $\{\, x_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ — полная, т. е. $\overline{\mathscr{L}\{\, x_n \,\}} = H$.
Положим $x_1 = \cdots = x_{n_1 - 1} = 0$, $\quad x_{n_1} \neq 0$, $\quad z_1 \coloneqq x_{n_1}$, $\quad L_1 = \mathscr{L}\{\, z_1 \,\}$.

$$L_1 = \mathscr{L}\{\, x_1, \ldots, x_{n_1} \,\}$$

$$x_{n_1+1} \in L_1, \ldots, x_{n_2 - 1} \in L_1, \quad x_{n_2} \notin L_1, \quad z_2 \coloneqq x_{n_2}, \quad L_2 = \mathscr{L}\{\, z_1, z_2 \,\}$$

И так далее по индукции.

$$z_1, z_2, \ldots, z_m, \quad z_m = x_{n_m}$$

- Если $x_k \in L_m \quad \forall k > m$, то $\dim H = m$.
- Если $x_{n_m+1}, \ldots, x_{n_{m+1}-1} \in L_m, \quad \exists x_{n_{m+1}} \notin L_m$, то $z_{m+1} \coloneqq x_{n_{m+1}}$.

$\{ z_m \}_{m=1}^{\infty}$ ЛНЗ

$$\mathscr{L}\{ z_1, \ldots, z_n \} = \mathscr{L}\{ x_1, \ldots, x_{n_m} \} \implies \mathscr{L}\{ z_m \} = \mathscr{L}\{ x_n \}$$

Значит, $\{ z_m \}$ — полная ЛНЗ система. Применим к ней процесс ортогонализации Грама—Шмидта, получим набор $\{ e_j \}$.

$$\mathscr{L}\{ e_j \} = \mathscr{L}\{ z_j \} \implies \{ e_j \} \text{ — полная ОНС}$$

□

Проблема Банаха (1936). X — сепарабельное банахово пространство. Верно ли, что в нём существует базис?

П. Энфло в 1973 году построил контрпример.

Теорема 2. Все бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства линейно изометрически (с сохранением нормы) изоморфны друг другу.

Доказательство. H — сепарабельное гильбертово пространство. Докажем, что оно линейно изометрически изоморфно l^2.

Известно, что в H существует ОНБ $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$.

$$x \in H \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, f_n) f_n$$

Определим оператор $T : H \to l^2$:

$$Tx = \{ (x, e_n) \}_{n=1}^{\infty}$$

В l^2 мы попадаем в силу равенства Парсеваля:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \implies \begin{cases} Tx \in l^2, \\ T \text{ — изометрия, т. е. } \|Tx\|_2 = \|x\|_H. \end{cases}$$

Из свойств скалярного произведения очевидно, что $T \in \mathscr{L}in(H, l^2)$.

$$\|Tx\| = \|x\| \implies \|T\| = 1, \quad T \in \mathscr{B}(H, l^2)$$

Проверили, что $T(H) \subset l^2$. Докажем равенство.

Возьмём $y = \{ y_n \}_{n=1}^{\infty} \in l^2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 = \|y\|_2^2 < +\infty$$

$$g_n \coloneqq \sum_{j=1}^{n} y_j f_j \in H$$

Проверим, что $\{ g_n \}$ фундаментальна.

Применим критерий Коши к $\sum |y_n|^2 < +\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall m > n \geq N \quad \|y_{n+1}\|^2 + \cdots + \|y_m\|^2 < \varepsilon$$

$$\|g_m - g_n\|^2 = \left\| \sum_{j=n+1}^{m} y_j f_j \right\|^2 = \sum_{j=n+1}^{m} |y_j|^2 < \varepsilon$$

Значит, $\{ g_n \}$ фундаментальна.

$$\xrightarrow[H\text{ — гильбертово}]{} \exists g = \lim g_n \implies g = \sum_{j=1}^{\infty} y_j f_j \xrightarrow[\text{разложение единственно}]{} e_j = (g, f_j) \implies T(g) = y$$

□

1.2. Классические ряды Фурье

Теорема 3 (Вейерштрасс). $f \in \widetilde{\mathcal{C}}[-\pi,\pi]$, т. е. $f(-\pi) = f(\pi)$, $f \in \mathcal{C}[-\pi,\pi]$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{n} \big(\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)\big) : \quad \|f - T_n\|_\infty < \varepsilon$$

Без доказательства. □

Примеры.

1. $L^2_{\mathbb{R}}[-\pi,\pi]$, dx — мера Лебега

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Докажем, что $\{\,1, \cos nx, \sin nx\,\}_{n=1}^{\infty}$ — полная ОС.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}\,x = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}\,x = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\,\mathrm{d}\,x = 2\pi$$

$f \in L^2[-\pi,\pi]$, $\mathcal{C}[-\pi,\pi]$ плотно в $L^2[-\pi,\pi]$

$$\exists g \in \mathcal{C}[-\pi,\pi] : \quad \|f - g\|_2 < \varepsilon$$

Утверждается, что g можно сделать 2π-периодической, не сильно испортив её норму в l^2.

$$\exists \delta > 0 : \quad \Big(\in_{\pi-\delta}^{\pi} |g(x)|^2\,\mathrm{d}\,x\Big)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

$$h(x) := \begin{cases} g(x), & x \in [-\pi, \pi - \delta], \\ h(\pi) = g(-\pi), \\ \text{по непрерывности иначе} \end{cases}$$

$$\exists T_n : \quad \|h - T_n\|_\infty < \varepsilon \implies \Big(\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|h(x) - T_n(x)|^2}_{<\varepsilon}\,\mathrm{d}\,x\Big)^{\frac{1}{2}} \le \varepsilon\sqrt{2\pi}$$

$$\|f - h\|_2 \le \|f - g\|_2 + \|g - h\|^2$$

$$\|f - T_n\|_2 \le \underbrace{\|f - g\|_2}_{<\varepsilon} + \|g - T_n\|_2 < \varepsilon + \|g - h\|_2 + \|h - T_n\| + \|h - T_n\|_2 < 3\varepsilon + \varepsilon\sqrt{2\pi}$$

Базис:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Коэффициенты Фурье:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}\,x, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}\,x, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big)$$

Ряд Фурье сходится в функции в пространстве L^2:

$$\forall f \in \mathrm{L}^2[-\pi,\pi] \quad \|f - S_n\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

То есть,

$$\lim\Big(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - S_n(x)|^2\,\mathrm{d}\,x\Big)^{\frac{1}{2}} = 0$$

2. $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi], \quad f \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi]$

$$f = u + \mathrm{i}v, \quad u, v \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}[-\pi,\pi]$$

Аналогично, $\{\,1, \cos(nx), \sin(nx)\,\}_{n\in\mathbb{N}}$ — полная ОНС в $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}$.

3. $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi]$

Докажем, что $\{\,e^{\mathrm{i}nx}\,\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — полная ОС в $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}$.

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\,x, \quad \in_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}nx}e^{-\mathrm{i}mx}\,\mathrm{d}\,x = \begin{cases}0, & n \neq m,\\ 2\pi, & n = m\end{cases}$$

Получаем коэффициенты:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\in_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}\,x, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- $c_0 = a_0$;
- $n \in \mathbb{N}$
$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i}b_n);$$
- $n \in \mathbb{N}$
$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{i}b_n).$$

$$S_n \coloneqq \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\mathrm{i}kx} = a_0 + \sum\big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big)$$

ОНБ:

$$\left\{\,\frac{e^{\mathrm{i}nx}}{\sqrt{2\pi}}\,\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

4. $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}[0,\pi]$

Докажем, что $\{\,1, \cos(nx)\,\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — ОС в L^2.

$$f \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}[0,\pi], \quad f(-x) \coloneqq f(x) \implies f \in \mathrm{L}^2[-\pi,\pi]$$

$$\|f - S_n\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - \sum a_k\cos(kx)|^2\,\mathrm{d}\,x \to 0 \implies \int_0^{\pi}|f(x) - \sum a_k\cos(kx)|^2\,\mathrm{d}\,x \to 0$$