Оглавление

Глава 1

Равномерное приближение

1.1. Многочлены Чебышёва первого рода

Дальше — сакральное знание. В конспектах этого нет.

1.1.1. Свойство наименьшего уклонения от нуля

Определение 1. Π_n — множество приведённых многочленов степени ровно n.

Определение 2. Рассмотрим приведённый многочлен Чебышёва:

$$\widetilde{T}_n(x) = 2^{1-n} T_n(x) = x^n + \cdots$$

Можно доказать, что $\widetilde{T}_n$ среди всех приведённых многочленов степени n имеет наименьшую норму в пространстве непрерывных функций $\mathcal{C}[-1,1]$. Такой приведённый многочлен будем называть *многочленом, наименее уклоняющимся от нуля.*

Критерий многочлена наименьшего уклонения от нуля в $\mathcal{C}[a,b]$

Теорема 1. Для того, чтобы $Q_n \in \Pi_n$ был МНУ от 0 в $\mathcal{C}[-1,1]$ **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\exists -1 \leq t_1 < \cdots < t_{n+1} \leq 1 \quad \begin{cases} |Q_n(t_i)| = \|Q_n\|_{\mathcal{C}[-1,1]} \\ Q_n(t_i) = -Q_n(t_{i+1}) \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{C}[-1,1]$.

$$\forall f \in \mathcal{C}[-1,1] \quad \exists! P_l^* \text{ — ПНРПр}$$

Пусть $f(x) = x^n$.

$$\exists! P_{n-1}^* \text{ — ПНРПр} \xLeftrightarrow[\text{т. Чебышёва}]{} \exists -1 \leq t_1 < t_2 < \ldots t_{n+1} \leq 1$$

$$Q_n(x) := \frac{x^n - P_{n-1}^*(x)}{|Q_n(t_i)|} = \|Q_n\|_{\mathcal{C}[-1,1]} \quad \forall i = 1, \ldots, n+1$$

$$Q_n(t_i) = -Q_n(t_{i+1})$$

□

Теорема 2. В $\mathcal{C}[-1,1]$ МНУ от 0 является

$$\widetilde{T}_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$$

Доказательство. $\widetilde{T}_n \in \Pi_n$

Точки экстремума T_n:

$$x'_l \coloneqq \cos\left(\frac{\pi l}{n}\right), \quad l = 0, 1, \ldots, n$$

Известно, что $T_n(x'_l) = (-1)^l$.

$$\|T_n\|_{\mathcal{C}[-1,1]} = \max_{x \in [-1,1]} |T_n(x)|$$

$$\|\widetilde{T}_n\|_{\mathcal{C}[-1,1]} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Положим $t_k = x_{n+1-k}, \quad k = 1, \ldots, (n+1)$. Дальше можно воспользоваться теор. 1. $\square$

Если требуется получить МНУ на конечном $[a, b]$, то можно воспользоваться заменой

$$z = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}, \quad x = \frac{2z - (a+b)}{b-a}$$