Оглавление

Глава 1

Линейные функционалы

1.1. Спектр оператора

Определение 1. X — банахово, $\quad T \in \mathscr{B}(X)$
Определим *спектральный радиус*:
$$r(T) = \max_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

Утверждение 1.
$$r(T) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|T^n\|}$$

Без доказательства. □

По теореме о свойствах резольвенты,
$$r(T) \le \|T\|$$

1.2. Компактные операторы

Определение 2. X, Y — банаховы, $\quad T \in \mathscr{L}in(X, Y)$
T называется *компактным*, если $T\big(\mathsf{B}_1(0)\big)$ относительно компактен.

Обозначение. $\operatorname{Com}(X, Y)$ — множество компактных операторов.

Свойства.

1. $\operatorname{Com}(X, Y) \subset \mathscr{B}(X, Y)$
2. $T \in Com(X, Y), \quad A \subset X$ ограничено
$$T(A) \text{ относительно компактно}$$
3. $T \in \operatorname{Com}(X, Y)$ **тогда и только тогда**, когда
$$\{\, x_n \in X \,\}_{n=1}^{\infty} \text{ — ограниченная} \implies \exists \{\, n_k \,\}_{k=1}^{\infty} : \quad \exists \lim_{k \to \infty} T_{n_k} \in Y$$

Доказательство.

1. $T \in \operatorname{Com}(X, Y)$
Обозначим $B = \mathsf{B}_1^X(0)$.
$$\implies \overline{T(B)} \text{ — компакт} \implies T(B) \text{ ограничено} \implies T \in \mathscr{B}(X, Y)$$

□

Определение 3. X, Y — банаховы, $T \in \mathscr{B}(X, Y)$

Если $\dim T(X) \le +\infty$, то T называется *оператором конечного ранга.*

Пример. X, Y — банаховы, $f_1, \dots, f_n \in X^*$, $y_1, \dots, y_n \in Y$

Для $x \in X$ определим

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) y_j$$

$$T(x) \subset \mathscr{L}\{\, y_j \,\}_{j=1}^{n} \implies \dim T(X) \le n \implies T \text{ — конечного ранга}$$

Все операторы конечного ранга имеют такой вид.

Утверждение 2. X, Y — банаховы, T — конечного ранга

$$T \in \mathrm{Com}(X, Y)$$

Доказательство. $B := \mathtt{B}_1^X(0)$

$$T(B) \subset T(X) \implies T(B) \text{ — ограниченное множество в конечномерном пр-ве } \implies$$
$$\implies T(B) \text{ относительно компактно}$$

□

1.2.1. Замкнутое подпространство образа компактного оператора конечномерно

Теорема 1. X, Y — банаховы, $T \in \mathrm{Com}(X, Y)$, $L \subset T(X)$ — замкнутое подпространство

$$\dim L < +\infty$$

Доказательство.

- $T(X)$ — замкнутое подпространство Y

$$T \in \mathscr{B}(X, T(X)), \quad T(X) \text{ — банахово } \xrightarrow[\text{т. Банаха об откр. отобр.}]{} T \text{ открыто } \implies$$
$$\exists r > 0 : \quad \mathtt{B}_r^{T(x)}(0) \subset \underbrace{T(B)}_{\text{отн. комп.}} \implies \mathtt{B}_r^{T(x)}(0) \text{ относительно компактно } \xrightarrow[\text{т. Рисса}]{} \dim T(X) < +\infty$$

- $L \subset T(X)$ — замкнутое подпространство

  Обозначим $X_1 = T^{-1}(L)$ (прообраз)

$$T \in \mathscr{B}(X, Y) \xrightarrow[L \text{ замкнуто}]{} T^{-1}(L) \text{ замкнуто в } X \implies X_1 \text{ замкнуто } \implies X_1 \text{ — банахово}$$

  По первой части доказательства

$$T(x_1) = L \implies \dim L < +\infty$$

□

1.2.2. Арифметические операции и предельный переход в пространстве компактных операторов

Теорема 2.

1. X, Y — банаховы пространства

$$\mathrm{Com}(X, Y) \text{ — замкнутое подпространство } \mathscr{B}(X, Y)$$

2. X, Y, Z — банаховы, $\quad X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{S} Z$

   (a) $T \in \mathrm{Com}(X, Y), \quad S \in \mathscr{B}(Y, Z)$
$$ST \in \mathrm{Com}(X, Z)$$

   (b) $T \in \mathscr{B}(X, Y), \quad S \in \mathrm{Com}(Y, Z)$
$$ST \in \mathrm{Com}(X, Z)$$

Доказательство. Обозначим $B = \mathsf{B}_1^X(0)$.

1. • $\alpha \in \mathbb{C}, \quad T \in \mathrm{Com}(X, Y) \implies \alpha T \in \mathrm{Com}(X, Y)$ — очевидно

   • Возьмём $T, S \in \mathrm{Com}(X, Y)$.
   $T(B)$ относительно компактно $\implies$ $T(B)$ вполне ограничено. Возьмём $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ε-сети:
$$\exists E \subset Y \text{ — конечная } \varepsilon\text{-сеть для } T(B)$$
$$\exists F \subset Y \text{ — конечная } \varepsilon\text{-сеть для } S(B)$$

$$E + F = \{\, e + f \mid e \in E,\ f \in F \,\} \text{ — конечное, } 2\varepsilon\text{-сеть для } T(B) + S(B) \implies$$
$$\implies T(B) + S(B) \text{ относительно компактно}$$

   $(T+S)(B) \subset T(B)+S(B) \implies (T+S)(B)$ относительно компактно $\implies T+S \in \mathrm{Com}(X, Y)$

   • $\{\, T_n \in \mathrm{Com}(X, Y) \,\}_{n=1}^{\infty}, \quad \lim\limits_{n \to \infty} \|T_n - T\| = 0$
   Возьмём $\varepsilon > 0$.
$$\exists n \in \mathbb{N} : \quad \|T - T_n\| < \varepsilon$$
   При этом, $T_n(B)$ относительно компактно.
$$\implies \exists E \text{ — конечная } \varepsilon\text{-сеть для } T_n(B)$$
   Проверим, что E — ε-сеть для $T(B)$. Возьмём $x \in B$.
$$\exists e \in E : \quad \|T_n x - e\| < \varepsilon$$
$$\|Tx - e\| \overset{\triangle}{\leq} \|Tx - T_n x\| + \|T_n x - e\| \leq \underbrace{\|T - T_n\|}_{<\varepsilon} \cdot \underbrace{\|x\|}_{<1} + \varepsilon < 2\varepsilon$$
   Значит, $T(B)$ вполне ограничено и относительно компактно.

2. X, Y, Z

   (a) $T \in \mathrm{Com}(X, Y)$
$$T(B) \text{ относительно компактно}, \quad S \in \mathscr{B}(Y, Z)$$
$$\xRightarrow[\text{непр. } S]{} S\big(T(B)\big) \text{ относительно компактно} \implies ST \in \mathrm{Com}(X, Z)$$

   (b) $T \in \mathscr{B}(X, Y)$
$$\implies T(B) \text{ ограничено}, \quad S \in \mathrm{Com}(X, Y)$$
$$\implies S\big(T(B)\big) \text{ относительно компактно}$$

□

Следствие. X — банахово
Тогда $\mathrm{Com}(X)$ — *двусторонний замкнутый идеал алгебры* $\mathscr{B}(X)$.

1.2.3. Компактность сопряжённого оператора

Теорема 3. H — гильбертово
$$T \in \mathrm{Com}(H) \iff T^* \in \mathrm{Com}(H)$$
(T^* — эрмитово сопряжённый)

Доказательство.

- $T \in \mathrm{Com}(H)$

  Возьмём $x \in H$.
  $$\|T^*x\|^2 = (T^*x, T^*x) = (TT^*x, x) \underset{\text{К–Б}}{\leq} \|TT^*x\| \cdot \|x\| \tag{1.1}$$

  Возьмём $\{ x_n \in H \}_{n=1}^{\infty}$ такую, что
  $$\exists M > 0 : \quad \|x_n\| \leq \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

  Проверим, что $\exists \{ n_k \} : \quad \exists \lim T^*x_{n_k}$.
  $$\left.\begin{matrix} T \in \mathrm{Com}(H) \\ T^* \in \mathscr{B}(H) \end{matrix}\right\} \implies TT^* \in \mathrm{Com}(H) \implies \exists \{ n_k \} : \quad \exists \lim TT^*x_{n_k} \implies$$
  $$\implies \{ TT^*x_{n_k} \} \text{ фундаментальна}$$

  $$\|T^*x_{n_k} - T^*x_{n_j}\|^2 = \left\|T^*(x_{n_k} - x_{n_j})\right\|^2 \underset{(1.1)}{\leq} \underbrace{\|(TT^*)(x_{n_k}) - TT^*x_{n_j}\|}_{\xrightarrow[k,j\to\infty]{}0} \cdot \underbrace{\|x_{n_k} - x_{n_j}\|}_{\leq 2M} \implies$$
  $$\implies \{ T^*x_{n_k} \} \text{ фундаментальна } \implies \exists \lim T^*x_{n_k} \implies T^* \in \mathrm{Com}(H)$$

- $T^* \in \mathrm{Com}(H) \implies T = T^{**} \in \mathrm{Com}(H)$

□

Замечание. X, Y — банаховы
$$T \in \mathrm{Com}(X, Y) \iff T^* \in \mathrm{Com}(Y^*, X^*)$$

Без доказательства. □

1.3. Спектр компактного оператора

Замечание (воспоминания из алгебры). X — линейное пространство, $T \in \mathscr{L}in(X)$, $\{ \lambda_j \}_{j=1}^n$ — с. ч., $Tx_j = \lambda_j x_j$, $\lambda_j \neq \lambda_k$, x_j — с. в. $(x_j \neq 0)$
$$\implies \{ x_j \} \text{ ЛНЗ}$$

Теорема 4. X — банахово, $T \in \mathrm{Com}(X)$, $\lambda \in \sigma_p(T)$ — с. ч., $X_\lambda = \mathrm{Ker}(\lambda I - T)$ — собств. подпр-во, $\delta > 0$
$$\sum_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T) \\ |\lambda| \geq \delta}} \dim(X_\lambda) < +\infty$$

То есть, число линейно-независимых собственных векторов T, соответствующих собственным числам λ, таких, что $|\lambda| \geq \delta$, конечно.

Доказательство. Пусть $\{ x_n \}_{n=1}^{\infty}$ — ЛНЗ с. в.:
$$Tx_n = \lambda_n x_n, \quad |\lambda_n| \geq \delta$$

Рассмотрим последовательность подпространств:
$$L_n = \mathscr{L}\{ x_j \}_{j=1}^n, \quad L_n \subsetneq L_{n+1}$$

$$\xRightarrow[\text{лемма Рисса}]{} \exists \{ y_n \}_{n=1}^{\infty}: \quad \|y_n\| = 1, \quad \rho(y_{n+1}, L_n) = \inf_{x \in L_n} \|y_{n+1} - x\| \geq \frac{1}{2}$$

(т. к. $\dim L_n = n$, то $\exists y_{n+1} : \rho(y_{n+1}, L_n) = 1$)

Проверим, что $\|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{\delta}{2}$. Тогда не будет существовать фундаментальной подпоследовательности $\{ Ty_n \}$, а значит, и последовательности $\{ n_k \}$ такой, что $\exists \lim Ty_{n_k}$ — $\lightning$ с $T \in \mathrm{Com}(X)$. $\square$