Оглавление

Глава 1

ТФКП

1.1. Разложение элементарных функций в степенной ряд

Мы уже выяснили, что аналитические функции раскладываются в ряд Тейлора:

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Будем рассматривать $z_0 = 0$.

1. $e^z \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$

$$e^0 = 1, \qquad \left(e^z\right)^{(n)}\big|_{z=0} = (e^z)^{(n)}_{\underbrace{x\ldots x}_{n}}\big|_{z=0} = e^{x\,(n)}\big|_{x=0} = 1$$

$$e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

2. $\cos z = 1 + \sum \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$

3. $\sin z = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-1}$

4. $\log(1+z)$ аналитична при $|z| < 1$ и на $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$.
   В этой области достаточно рассмотреть функцию $\log(1+x)$.

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n$$

5. $r \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \cup \{\, 0 \,\})$

$$(1+z)^r = e^{r \log(1+z)}$$

   Она аналитична при $|z| < 1$. Рассмотрим $(1+x)^r$.

$$(1+z)^r = e^{r \log(1+z)} = 1 + rz + \frac{r(r-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}z^n + \cdots$$

6. $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$(1+z)^\alpha = e^{\alpha \log(1+z)} \in \mathcal{A}(|z| < 1)$$

   Здесь нельзя сослаться на вещественный случай — $(1+x)^\alpha \in \mathbb{C}$.

$$1^\alpha = 1$$

$$\Big((1+z)^\alpha\Big) = \Big(e^{\alpha \log(1+z)}\Big)' = (e^w)'\big|_{w=\alpha \log(1+z)} \cdot \big(\alpha \log(1+z)\big)' = e^{\alpha \log(1+z)} \cdot \frac{\alpha}{1+z} =$$
$$= \alpha e^{\alpha \log(1+z)} e^{-\log(1+z)} = \alpha e^{(\alpha-1)\log(1+z)} = \alpha(1+z)^{\alpha-1}$$

$$\Big((1+z)^\alpha\Big)'' = \alpha(\alpha-1)(1+z)^{\alpha-2}$$

$$\Big((1+z)^\alpha\Big)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n}$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n + \cdots$$

1.2. Теорема о единственности аналитической функции с применением аналитических функций

Теорема 1. $D \subset \mathbb{C}$ — область, $\quad f \in \mathcal{A}(D), \quad z_0 \in D, \quad f^{(n)}(z_0) = 0, \quad n \geq 1$

$$\implies f(z) \equiv 0 \text{ в } D \tag{1.1}$$

Доказательство. Пусть

$$E = \left\{ \zeta \in D \mid f(\zeta) = 0, \quad f^{(n)}(\zeta) = 0 \quad \forall n \geq 1 \right\} \tag{1.2}$$

По условию $z_0 \in E \implies E \neq \emptyset$.

Утверждение 1. E *относительно замкнуто* в D, то есть если есть набор точек $\{ \zeta_m \}_{m=1}^{\infty}, \quad \zeta_m \neq \zeta_l$ при $m \neq l, \quad \zeta_m \in E \quad \forall m, \quad \zeta_m \xrightarrow[m\to\infty]{} z_*, \quad z_* \in D$

$$\implies z_* \in E \tag{1.3}$$

Доказательство. $f \in \mathcal{C}(D)$.

$$\implies \Big(\zeta_m \to z_* \implies f(\zeta_m) \to f(z_*)) \tag{1.4}$$

$$\zeta_m \in E \quad \forall m \quad \underset{(1.4)}{\implies} 0 \to f(z_*) \implies f(z_*) = 0 \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered} f^{(n)} \in \mathcal{A}(D) \implies f^{(n)} \in \mathcal{C}(D) \\ \implies f^{(n)}(\zeta_m) \to f^{(n)}(z_*) \\ \implies 0 \to f^{(n)}(z_*) \implies f^{(n)}(z_*) = 0 \\ \implies z_* \in E \end{gathered}$$

$\square$

Утверждение 2. Множество E *относительно открыто* в D, то есть

$$z_* \in E \implies \exists\, \delta > 0 : \quad \mathrm{B}_\delta(z_*) \subset E, \quad \mathrm{B}_\delta(z_*) = \{ \zeta \mid |\zeta - z_*| < \delta \}$$

Доказательство.

$$\begin{gathered} z_* \in E \implies \exists\, \delta > 0 : \quad \mathrm{B}_\delta(z_*) \subset D \\ \implies f \in \mathcal{A}\big(\mathrm{B}_\delta(z_*)\big) \\ \implies \forall z \in \mathrm{B}_\delta(z_*) \quad f(z) = f(z_*) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_*)}{n!}(z - z_*)^n \\ \underset{(1.2)}{\implies} f(z) = 0 + \sum 0 = 0 \quad \forall z \in \mathrm{B}_\delta(z_*) \\ \implies f^{(n)}(z_*) \equiv 0, \quad z \in \mathrm{B}_\delta(z_*), \quad n \geq 1 \end{gathered}$$

jjdd $\square$

По теореме из топологии, E пусто или $E = D$. Мы уже проверили, что E не пусто. $\square$

1.3. Локальная мультипликативная структура аналитических функций в окрестности нуля

Теорема 2. $D \subset \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{A}(D), \qquad f \not\equiv 0, \qquad a \in D, \qquad f(a) = 0$

$$\implies \exists n \in \mathbb{N}: \quad f(z) = (z = a)^n v(z) \tag{1.6}$$

$$\text{где } v \in \mathcal{A}(D) \tag{1.7}$$

$$\text{и } \exists \delta > 0: \quad \forall z \in \mathtt{B}_\delta(a) \quad v(z) \neq 0 \tag{1.8}$$

Доказательство. Рассмотрим $f^{(m)}(a)$. По предыдущей теореме она не может быть везде равна нулю. Значит,

$$\exists m : f^{(m)}(a) \neq 0$$

Возьмём $n = \min \{ m \mid f^{(m)}(a) \neq 0 \}$. Пусть $\delta_1 > 0$ такое, что $\mathtt{B}_{\delta_1}(a) \subset D$. Тогда $f \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_{\delta_1}(a)\big)$.

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a)^{n+1} + \cdots \tag{1.9}$$

$$\implies f(z) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a)^{n+1} + \dots = (z-a)^n \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a) + \cdots \right) \tag{1.10}$$

Возьмём $z \neq a, \quad z \in \mathtt{B}_{\delta_1}(a), \qquad (z-a)^n \neq 0$. Тогда

$$\frac{f(z)}{(z-a)^n} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a) + \cdots \tag{1.11}$$

Обозначим

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a) + \frac{f^{(n+2)}(a)}{(n+2)!}(z-a)^2 + \dots = v(z)$$

$v(z)$ — степенной ряд, сходящийся в $\mathtt{B}_{\delta_1}(a)$.

$$\implies v \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_{\delta_1}(a)\big)$$

Если $z \neq a$, положим $v(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^n}$.

$$\implies v \in \mathcal{A}(D \setminus \{ a \})$$

Если $z \in \mathtt{B}_{\delta_1}(a)$ и $z \neq a$, то

$$v(z) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a) + \cdots$$

$$\implies f \in \mathcal{A}\Big((D \setminus \{ a \}) \cup \mathtt{B}_{\delta_1}(a) \Big) = \mathcal{A}(D)$$

Обозначим

$$c_1 = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad c_2 = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}, \quad \dots, \quad c_{k+1} = \frac{f^{(n+k)}(a)}{(n+k)!}, \quad \dots$$

$$v(z) = c_1 + c_2(z-a) + \dots + c_k(z-a)^{k-1} + \cdots$$

$$z \in \mathtt{B}_{\delta_1}(a), \qquad c_1 \neq 0, \quad c_1 = v(a), \qquad v \in \mathcal{C}\big(\mathtt{B}_{\delta_1}(a)\big), \qquad v(a) \neq 0$$

$$\implies \exists 0 < \delta \leq \delta_1 : \quad v(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathtt{B}_\delta(a)$$

При этом, $f(z) = (z-a)^n v(z)$. $\square$