

# Содержание

<b>I</b>	<b>Многомерный анализ</b>	<b>4</b>
1	Норма линейного оператора $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ; $\ cA\ $ ; $\ AX\ _n \leq c \ X\ _m \implies \dots$	4
2	$\ A + B\  \leq \dots$ ; $\ AX\  \leq \ A\  \cdot \ X\ $	4
3	$\ BA\  \leq \dots$ ; $\ A\  \leq (\dots)^{\frac{1}{2}}$	5
4	Определение частных производных второго и последующих порядков; теорема о смешанных производных в $\mathbb{R}^2$	6
5	Теорема о смешанных производных для функций на множествах $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$	8
6	Определение классов $C^r(E)$ ; теорема о частных производных функций из $C^r(E)$	8
7	Классы гладкости	8
8	Теорема о производных сложной функции специального вида	10
9	Формула Тейлора для функции нескольких переменных с остатком в форме Лагранжа	12
10	Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остатком в форме Пеано	12
11	Дифференциалы функции порядка $\geq 2$ ; их вид	13
12	Вычисление второго дифференциала; положительно и отрицательно определённые квадратичные формы, их свойства; неопределённые формы	14
13	Достаточное условие наличия или отсутствия локального экстремума функции	16
14	Неравенство Лагранжа для вектор функции	18
15	Теорема об обратимости линейного оператора, близкого по норме разности к обратимому оператору	19
16	Теорема об обратимом отображении: выбор множества $U$	20
17	Теорема об обратимом отображении: взаимная однозначность $F _U$	20
18	Теорема об обратимом отображении: отображение $F$ открыто	22
19	Теорема об обратимом отображении: отображение $\Phi$ дифференцируемо $\forall y \in V$	26
20	Теорема об обратимом отображении: $\Phi \in C^1(V)$	28
21	Теорема об открытом отображении	29
22	Теорема о неявной функции (отображении): линейный вариант	29
23	Общий случай теоремы о неявной функции (отображении)	30
24	Вычисление матрицы Якоби отображения, заданного неявно	30
25	Определение условного локального экстремума; теорема о множителях Лагранжа	30
25.1	.....	33
<b>II</b>	<b>Функциональные последовательности и ряды</b>	<b>36</b>

26	Определение равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда	36
27	Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда	37
28	Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов	38
29	Признак Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов	39
30	Признак Абеля равномерной сходимости функциональных рядов	40
31	Теорема о переходе к пределу в равномерно сходящейся функциональной последовательности	41
32	Теорема о непрерывности в точке предела равномерно сходящейся функциональной последовательности и суммы равномерно сходящегося функционального ряда	42
33	Интегрирование равномерно сходящейся функциональной последовательности и равномерно сходящегося функционального ряда	43
34	Дифференцирование равномерно сходящейся функциональной последовательности и равномерно сходящегося функционально сходящегося функционального ряда	44
35	Пример Ван дер Вардена	47
36	Определение равномерной сходимости семейства функций; критерий Коши равномерной сходимости семейства функций	49
37	Теорема о переходе к пределу в равномерно сходящемся семействе функций	50
38	Непрерывность предельной функции равномерно сходящегося семейства функций	51
39	Теорема о непрерывности интеграла, зависящего от параметра	51
40	Теорема о производной интеграла, зависящего от параметра	52
41	Теорема об интегрировании по параметру интеграла, зависящего от параметра	52
42	Равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра; критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла от параметра	53
43	Признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла от параметра	54
44	Признак Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла от параметра	54
45	Признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла от параметра	55
46	Предел несобственного интеграла, зависящего от параметра	56
47	Определённый интеграл от интеграла, зависящего от параметра	57
48	Производная несобственного интеграла, зависящего от параметра	58
49	Несобственный интеграл по параметру от несобственного интеграла от параметра	60
50	Вычисление интеграла Дирихле	60
51	Вычисление интеграла Эйлера—Пуассона	62
52	Числовые и функциональные ряды с комплексными слагаемыми; абсолютная и равномерная сходимость; признак Вейерштрасса равномерной сходимости	62
53	Степенные ряды; лемма Абеля	62

54	Определение радиуса сходимости и круга сходимости степенного ряда	64
55	Свойства круга сходимости	64
56	Вычисление радиуса сходимости	64
57	Интервал сходимости вещественного степенного ряда, его свойства	65
58	Теорема Абеля о вещественном степенном ряде	66
59	Производная вещественного степенного ряда	67
60	Старшие производные вещественного степенного ряда; степенной ряд как ряд Тейлора своей суммы	68
61	Интегрирование вещественного степенного ряда	68
62	Разложение в степенной ряд функций $\ln(1+x)$ и $\operatorname{arctg} x$	68
63	Формула Тейлора с интегральным остатком	69
64	Разложение в степенные ряды $e^x$ , $\cos x$ , $\sin x$	69
65	Разложение в степенной ряд $(1+x)^r$	71
66	Разложение в степенной ряд $\arcsin x$	72
<b>III</b>	<b>Криволинейные интегралы</b>	<b>72</b>
67	Спрямолинейные кривые, длина кривой, аддитивность длины кривой	72
68	Непрерывность длины кривой как функции от параметра	73
69	Вычисление длины гладкой кривой	73
70	Определение криволинейного интеграла первого рода; суммы Римана криволинейного интеграла первого рода; криволинейный интеграл первого рода как предел сумм Римана	76
71	Ориентация кривой, ориентированные кривые	77
72	Определение криволинейного интеграла второго рода; суммы Римана криволинейного интеграла второго рода; криволинейный интеграл второго рода как предел интегральных сумм	78
73	Зависимость криволинейного интеграла второго рода от ориентации кривой	80
74	Свойства криволинейного интеграла второго рода	80
<b>IV</b>	<b>Теория функции комплексной переменной</b>	<b>82</b>
75	Определение аналитической в области функции	82
76	Свойства частных производных комплекснозначных функций	83
77	Формула для дифференцируемой функции	83
78	Первые свойства и первые примеры аналитических функций	84
79	Эквивалентные определения аналитических функций	86
80	Аналитичность суперпозиции аналитических функций; производная суперпозиции	87

## Часть I

## Многомерный анализ

1. Норма линейного оператора  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $\|cA\|$ ;  $\|AX\|_n \leq c \|X\|_m \implies \dots$ **Определение 1.**  $A : \mathbb{R}^{m \geq 1} \rightarrow \mathbb{R}^{n \geq 1}$ 

$$\|A\| := \sup_{\substack{X \in \mathbb{R}^m \\ \|X\|_m \leq 1}} \|AX\|_n$$

**Свойства.**1.  $c \in \mathbb{R}$ 

$$\|cA\| = |c| \cdot \|A\|$$

2.  $c > 0, \quad \forall X \in \mathbb{R}^m \quad \|AX\|_n \leq c \cdot \|X\|_m$ 

$$\implies \|A\| \leq c \quad (1)$$

**Доказательство.**

1.

$$\|cA\| = \sup_{\substack{X \in \mathbb{R}^m \\ \|X\|_m \leq 1}} \|(cA)X\|_n \stackrel{\text{линейность}}{=} \sup \|c(AX)\|_n = \sup |c| \cdot \|AX\|_n = |c| \sup \|AX\|_n = |c| \cdot \|A\|$$

2. Возьмём  $\forall X \in \mathbb{R}^m$ , такое, что  $\|X\|_m \leq 1$ 

$$\|AX\|_n \leq c \cdot \|X\|_m \stackrel{\text{def}}{\leq} c$$

$$\stackrel{\text{def sup}}{\iff} \sup_{\|X\| \leq 1} \|AX\|_n \leq c$$

□

2.  $\|A + B\| \leq \dots$ ;  $\|AX\| \leq \|A\| \cdot \|X\|$ **Свойства.**1.  $A, B : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

2.

$$\|AX\| \leq \|A\| \cdot \|X\| \quad \forall X \in \mathbb{R}^m \quad (2)$$

**Доказательство.**

1.

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup \|(A + B)X\|_n \stackrel{\text{линейность}}{=} \sup \|AX + BX\| \leq \sup (\|AX\| + \|BX\|) \leq \\ &\leq \sup \|AX\| + \sup \|BX\| \stackrel{\text{def } \|A\|, \|B\|}{=} \|A\| + \|B\| \end{aligned}$$

2. • Если  $X = \mathbb{O}_m$ , то это очевидно  
 • Пусть  $X \neq \mathbb{O}_m$   
 Тогда  $t := \|X\|_m > 0$   
 Рассмотрим  $Y := \frac{1}{t}X$

$$\|Y\|_m = \left\| \frac{1}{t}X \right\| \stackrel{t>0}{=} \frac{1}{t} \|X\| \stackrel{\text{def } t}{=} 1$$

$$\|AY\|_n \leq \sup_{\substack{U \in \mathbb{R}^m \\ \|U\| \leq 1}} \|AU\|_n = \|A\|$$

$$X = tY \implies \|AX\|_n = \|A(tY)\|_n = t \cdot \|AY\| \leq t \|A\| \stackrel{t>0}{\leq} \|A\|$$

□

$$3. \|BA\| \leq \dots; \|A\| \leq (\dots)^{\frac{1}{2}}$$

**Свойства.**

$$1. A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\implies \|A\| \leq \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 \right)^{1/2} \quad (3)$$

$$2. \mathbb{R}^{n \geq 1}, \mathbb{R}^{m \geq 1}, \mathbb{R}^{k \geq 1}, \quad A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad B: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad BA: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$\implies \|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$$

**Доказательство.**

1. Пусть

$$X := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad \|X\|_m \leq 1$$

Тогда

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m \end{bmatrix} \quad (4)$$

**Напоминание.** Неравенство КБШ:

$$|(A, X)| \leq |a_1| \cdot |x_1| + \dots + |a_n| \cdot |x_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \|Y\| \cdot \|X\|$$

$$\|AX\|_n^2 \stackrel{(6)}{=} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \right)^2 \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 \right) \left( \sum_{j=1}^m \underbrace{x_j^2}_{\stackrel{\text{def}}{\leq 1}} \right) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2$$

2. Возьмём  $X \in \mathbb{R}^m$ , такой, что  $\|X\|_m \leq 1$

Пусть  $Y = AX \in \mathbb{R}^n$

Тогда  $BA(X) \stackrel{\text{def } BA}{=} B(AX) \stackrel{\text{def } X}{=} BY$

$$\|BA(X)\|_k = \|BY\|_k \stackrel{\text{CB-BO (4)}}{\leq} \|B\| \cdot \|Y\|_n \quad (5)$$

$$\|Y\|_n \stackrel{\text{def } Y}{=} \|AX\|_n \stackrel{\text{CB-BO (4)}}{\leq} \|A\| \cdot \|X\|_m \stackrel{\|X\| \leq 1}{\leq} \|A\| \quad (6)$$

$$(7), (8) \implies \|BA(X)\|_k \leq \underbrace{\|B\| \cdot \|A\|}_{:=c_0}$$

Применяя свойство (2), получаем нужное утверждение.  $\square$

#### 4. Определение частных производных второго и последующих порядков; теорема о смешанных производных в $\mathbb{R}^2$

**Определение 2.**  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$  – открытое,  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $\exists f'_{x_i}(X) \quad \forall X \in \Omega$   
 $X_0 \in \Omega$ ,  $1 \leq j \leq n$

Получается новая функция  $f'_{x_i} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Пусть  $\exists (f'_{x_i})'_{x_j}(X_0)$

Говорят, что существует частная производная второго порядка

$$f''_{x_i x_j}(X_0) := (f'_{x_i})'_{x_j}(X_0)$$

**Определение 3.** Пусть  $\forall X \in \Omega \quad \exists f''_{x_i x_j}(X)$

Рассмотрим  $1 \leq k \leq n$  и  $X_0 \in \Omega$

Пусть  $\exists (f''_{x_i x_j})'_{x_k}(X_0)$

Будем говорить, что существует частная производная третьего порядка

$$f'''_{x_i x_j x_k}(X_0) = (f''_{x_i x_j})'_{x_k}(X_0)$$

.....

Пусть для  $l \geq 3$  определено понятие  $\underbrace{f^{(l)}_{x_i x_j \dots x_s}}_i(X_0)$

Пусть  $\forall X \in \Omega \exists f^{(l)}_{x_i \dots x_s}(X)$

Возьмём  $1 \leq t \leq n$

Предположим, что  $\exists (f^{(l)}_{x_i \dots x_s})'_{x_t}(X_0)$

Такую частную производную будем называть частной производной порядка  $l + 1$

$$f^{(l+1)}_{x_i \dots x_s, x_t}(X_0) := (f^{(l)}_{x_i \dots x_s})'_{x_t}(X_0)$$

**Обозначение.** Исторически более распространено обозначение

$$\frac{\partial^l f(x)}{\partial x_s, \dots, \partial x_i}$$

В знаменателе  $x_j$  расположены в обратном порядке, т. к.

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

**Теорема 1 (о смешанных производных).**  $G = B_r(x_1^0, x_2^0)$ ,  $X_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$ ,  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}(G)$

$\forall X \in G \quad \exists f'_{x_1}(X), f'_{x_2}(X) \in \mathcal{C}(G)$ ,  $\forall X \in G \quad \exists f''_{x_1 x_2}(X), f''_{x_2 x_1}(X)$  непрерывные в  $X_0$

$$\implies f''_{x_1 x_2}(X_0) = f''_{x_2 x_1}(X_0)$$

**Доказательство.** Возьмём  $0 < h < \frac{r}{\sqrt{2}}$

Тогда  $(x_1^0 + h, x_2^0 + h) \in G$

Рассмотрим функцию

$$g(h) := \frac{f(x_1^0 + h, x_2^0 + h) - f(x_1^0 + h, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0 - h) + f(x_1^0, x_2^0)}{h^2}$$

Определим

$$\varphi(x_2) := \frac{f(x_1^0 + h, x_2) - f(x_1^0, x_2)}{h}, \quad x_2 \in [x_2^0, x_2^0 + h]$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{\varphi(x_2^0 + h) - \varphi(x_2^0)}{h} \stackrel{\text{def } \varphi}{=} \frac{f(x_1^0 + h, x_2^0 + h) - f(x_1^0, x_2^0 + h) - f(x_1^0 + h, x_2^0) + f(x_1^0, x_2^0)}{h^2} = g(h) \quad (7)$$

$$\forall x_2 \in [x_2^0, x_2^0 + h] \quad \exists \varphi'(x_2) \stackrel{\text{def } \varphi}{=} \frac{f'_{x_2}(x_1^0 + h, x_2) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2)}{h} \quad (8)$$

Применим к  $\varphi$  теорему Лагранжа:

$$\begin{aligned} \exists 0 < h_2 < h : \varphi(x_2^0 + h) - \varphi(x_2^0) &= \varphi'(x_2^0 + h_2) \cdot h \implies \\ \implies \frac{\varphi(x_2^0 + h) - \varphi(x_2^0)}{h} &= \varphi'(x_2^0 + h_2) \stackrel{(10)}{=} \frac{f'_{x_2}(x_1^0 + h_2, x_2^0 + h_2) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0 + h_2)}{h} \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим отдельно выражение  $f'_{x_2}(x_1^0 + h, x_2^0 + h_2) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0 + h_2)$

Рассмотрим функцию  $l(x_1) := f'_{x_2}(x_1, x_2^0 + h_2)$

По условию, наложенному на первые производные, она непрерывна при  $x \in [x_1^0, x_1^0 + h]$

По условию,

$$\forall x_1 \in [x_1^0, x_1^0 + h] \quad \exists l'(x_1) = f''_{x_2 x_1}(x_1, x_2^0 + h_2) \quad (10)$$

Применим теорему Лагранжа к  $l$ :

$$\begin{aligned} \exists 0 < h_1 < h : l(x_1^0 + h) - l(x_1^0) &= l'(x_1^0 + h_1) \cdot h \implies \\ \implies \frac{l(x_1^0 + h) - l(x_1^0)}{h} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f'_{x_2}(x_1^0 + h, x_2^0 + h_2) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0 + h_2)}{h} = \\ &= l'(x_1^0 + h_1) \stackrel{(12)}{=} f''_{x_2 x_1}(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} g(h) &\stackrel{(9)}{=} \frac{\varphi(x_2^0 + h) - \varphi(x_2^0)}{h} \stackrel{(11)}{=} \frac{f'_{x_2}(x_1^0 + h, x_2^0 + h_2) - f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0 + h_2)}{h} \stackrel{(13)}{=} \\ &= f''_{x_2 x_1}(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2), \quad 0 < h_1, h_2 < h \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(x_1) := \frac{f(x_1, x_2^0 + h) - f(x_1, x_2^0)}{h}$$

$$\frac{\psi(x_1^0 + h) - \psi(x_1^0)}{h} = \frac{f(x_1^0 + h, x_2^0 + h) - f(x_1^0 + h, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0 + h) + f(x_1^0, x_2^0)}{h^2} = g(h) \quad (13)$$

$$\forall x_1 \in [x_1^0, x_1^0 + h] \quad \exists \psi'(x_1) = \frac{f'_{x_1}(x_1, x_2^0 + h) - f'_{x_1}(x_1, x_2^0)}{h} \quad (14)$$

По теореме Лагранжа,

$$\begin{aligned} \exists 0 < \overline{h_1}, \overline{h_2} < h : \frac{\psi(x_1^0 + h) - \psi(x_1^0)}{h} &= \psi'(x_1^0 + \overline{h_1}) \stackrel{(16)}{=} \frac{f'_{x_1}(x_1^0 + \overline{h_1}, x_2^0 + h) - f'_{x_1}(x_1^0 + \overline{h_1}, x_2^0)}{h} = \\ &= f''_{x_1 x_2}(x_1^0 + \overline{h_1}, x_2^0 + \overline{h_2}) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} g(h) &\stackrel{(15)}{=} \frac{\psi(x_1^0 + h) - \psi(x_1^0)}{h} \stackrel{(17)}{=} f''_{x_1 x_2}(x_1^0 + \overline{h_1}, x_2^0 + \overline{h_2}) \\ &\stackrel{(14)}{\implies} f''_{x_2 x_1}(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2) = f''_{x_1 x_2}(x_1^0 + \overline{h_1}, x_2^0 + \overline{h_2}) \end{aligned} \quad (16)$$

Устремим  $h$  к нулю справа и слева

По условию теоремы,

$$f''_{x_2 x_1}(x_1^0 + h_1, x_2^0 + h_2) \xrightarrow{h \rightarrow +0} f''_{x_2 x_1}(x_1^0, x_2^0)$$

$$f''_{x_1 x_2}(x_1^0 + \overline{h_1}, x_2^0 + \overline{h_2}) \xrightarrow{h \rightarrow -0} f''_{x_1 x_2}(x_1^0, x_2^0)$$

По соотношению (18), это одна и та же функция, а значит, она имеет единственный предел.  $\square$

## 5. Теорема о смешанных производных для функций на множествах $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$

**Следствие** (для  $n > 2$ ).  $X_0 \in \mathbb{R}^{n \geq 3}$ ,  $X_0 = (x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_j^0, \dots, x_n^0)$   
 $f : B_r(X_0) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}(B_r(X_0))$ ,  $\forall X \in B_r(X_0) \quad \exists f'_{x_i}(X), f'_{x_j}(X) \in \mathcal{C}(B_r(X_0))$   
 $\forall X \in B_r(X_0) \quad \exists f''_{x_i x_j}(X), f''_{x_j x_i}(X)$  – непр. в  $X_0$

$$\implies f''_{x_i x_j}(X_0) = f''_{x_j x_i}(X_0)$$

**Доказательство.**

$$F(x_i, x_j) := f(x_1^0, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n^0)$$

$$F''_{x_i x_j}(X_i, x_j) = f''_{x_i x_j}(x_1^0, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n^0)$$

$\square$

**Утверждение 1.**  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$ ,  $i \neq j$ ,  $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ ,  $\forall X \in \Omega \quad f'_{x_i}(X), f'_{x_j}(X) \in \mathcal{C}(\Omega)$   
 $\forall X \in \Omega \quad \exists f''_{x_i x_j}(X), f''_{x_j x_i}(X) \in \mathcal{C}(\Omega)$

По следствию,

$$\forall X \in \Omega \quad f''_{x_i x_j}(X) = f''_{x_j x_i}(X)$$

**Утверждение 2.**  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$ ,  $i \neq j$ ,  $k$   
 Рассмотрим  $f'''_{x_i x_j x_k}(X)$ ,  $f'''_{x_j x_i x_k}(X)$ ,  $f'''_{x_i x_k x_j}(X)$

Пусть они все непрерывны на  $\Omega$

Все производные первого и второго порядков существуют и непрерывны на  $\Omega$

Тогда, по следствию

$$f''_{x_i x_j} = f''_{x_j x_i} \implies (f''_{x_i x_j})'_{x_k} = (f''_{x_j x_i})'_{x_k}$$

$$(f'_{x_i})''_{x_k x_j} = (f'_{x_i})''_{x_j x_k}$$

Тем самым мы доказали, что у такой функции все частные производные третьего порядка совпадают

## 6. Определение классов $\mathcal{C}^r(E)$ ; теорема о частных производных функций из $\mathcal{C}^r(E)$

## 7. Классы гладкости

**Определение 4** ( $\mathcal{C}^r(E)$ ).  $r \in \mathbb{N}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$ ,  $E$  открыто,  $f \in \mathcal{C}(E)$

$$\forall x_1, \dots, x_n \quad \forall X \in E \quad \exists f'_{x_j}(X)$$

- $f'_{x_j}(X) \in \mathcal{C}(E) \implies f \in \mathcal{C}^1(E)$
- Пусть  $f \in \mathcal{C}^1(E)$

$$\forall 1 \leq k \leq r \quad \forall x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \quad \forall X \in E \quad \exists f^{(k)}_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}(X) \in \mathcal{C}(E)$$

Тогда говорят, что  $f \in \mathcal{C}^r(E)$



**Теорема 2.**  $r \geq 2$ ,  $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$ ,  $E$  открытое,  $f \in C^r(E)$ ,  $i_1, \dots, i_r$ ,  $j_1, \dots, j_r$

$$\forall X \in E \quad f_{x_{i_1} \dots x_{i_r}}^{(r)}(X) = f_{x_{j_1} \dots x_{j_r}}^{(r)}(X)$$

**Доказательство.** Докажем по индукции

• **База.**  $r = 2$  – доказано в конце прошлой лекции

• **Переход.** Пусть  $f \in C^{r+1}(E)$

$$j_k \neq j_{k+1}$$

Рассмотрим частные производные:

$$f_{x_{j_1} \dots x_{j_k} x_{j_{k+1}} \dots x_{j_{r+1}}}^{(r+1)}(X), \quad f_{x_{j_1} \dots x_{j_{k+1}} x_{j_k} \dots x_{j_{r+1}}}^{(r+1)}(X)$$

$$\text{Обозначим } g(X) := f_{x_{j_1} \dots x_{j_{k-1}}}^{(k-1)}(X)$$

$$f_{x_{j_1} \dots x_{j_{k-1}} x_{j_k} x_{j_{k+1}}}^{(k+1)}(X) = g_{x_{j_k} x_{j_{k+1}}}''(X) \quad (17)$$

$$f_{x_{j_1} \dots x_{j_{k+1}} x_{j_k}}^{(k+1)}(X) = g_{x_{j_{k+1}} x_{j_k}}''(X) \quad (18)$$

По следствию к теореме о смешанных производных, получаем

$$(17), (20) \implies g_{x_{j_k} x_{j_{k+1}}} = g_{x_{j_{k+1}} x_{j_k}}''(X) \quad (19)$$

$$(19) \implies f_{x_{j_1} \dots x_{j_k} x_{j_{k+1}} \dots x_{j_{r+1}}}^{(r+1)}(X) = g_{x_{j_k} x_{j_{k+1}} \dots x_{j_{r+1}}}^{(r-k+2)} \quad \forall X \in E \quad (20)$$

$$(20) \implies f_{x_{j_1} \dots x_{j_{k+1}} x_{j_k} \dots x_{j_{r+1}}}^{(r+1)}(X) = g_{x_{j_{k+1}} x_{j_k} \dots x_{j_{r+1}}}^{(r-k+2)} \quad \forall X \in E \quad (21)$$

$$(21), (22), (23) \implies f_{x_{j_1} \dots x_{j_k} x_{j_{k+1}} \dots x_{j_{r+1}}}^{(r+1)}(X) = f_{x_{j_1} \dots x_{j_{k+1}} x_{j_k} \dots x_{j_{r+1}}}^{(r+1)}(X) \quad \forall X \in E \quad (22)$$

$i_1, \dots, i_n$ ,  $j_k = i_1$ ,  $j_k$  – минимальный

Рассмотрим две ситуации:

–  $k = 1$

$$i_1, \dots, i_{r+1}$$

$$i_1, j_2, \dots, j_{r+1}$$

Тогда индексы  $i_2, \dots, i_{r+1}$  и  $j_2, \dots, j_{r+1}$  получаются друг из друга перестановкой. А тогда, по индукции,

$$f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{r+1}}}^{(r+1)}(X) = \left( f'_{x_{i_1}} \right)_{x_{i_2} \dots x_{i_{r+1}}}^{(r)} = \underset{\text{инд. предполож.}}{=} \left( f'_{x_{i_1}} \right)_{x_{j_2} \dots x_{j_{r+1}}}^{(r)}(X) = f_{x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_{r+1}}}^{(r+1)}(X)$$

–  $k > 1$

Тогда  $j_1, \dots, j_{k-1} \neq i_1$

Тогда,

$$(24) \implies f_{\dots x_{j_{k-1}} x_{j_k}}^{(r+1)} = f_{\dots x_{j_k} x_{j_{k-1}}}^{(r+1)} = f_{\dots x_{j_k} x_{j_{k-2}} x_{j_{k-1}}}^{(r+1)} = \dots = f_{x_{j_k} x_{j_2} \dots}^{(r+1)}$$

Теперь можно применить первый случай.

□

## 8. Теорема о производных сложной функции специального вида

**Теорема 3.**  $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$  – открытое,  $f \in C^{r \geq 1}(E)$ ,  $Y \in E$ ,  $H \in \mathbb{R}^n$ ,  $H \neq 0_n$ ,  $t \in (-a, a)$

$$Y + tH \in E \quad \forall t \in (-a, a)$$

$$g(t) := f(Y + tH) \quad (23)$$

$$\implies g^{(r)}(0) = \sum_{\alpha: |\alpha|=r} C_r^\alpha \partial^\alpha f(Y) H^\alpha \quad (24)$$

**Доказательство.** Докажем по индукции:

• База.  $r = 1$

То есть,  $|\alpha| = 1$

Если  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , то  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha_i \geq 0$

Значит,

$$\exists \nu : \begin{cases} \alpha_\nu = 1 \\ \alpha_j = 0, \quad j \neq \nu \end{cases}$$

$$\alpha = (0, \dots, \underset{\nu}{1}, \dots, 0) := e_\nu, \quad 1 \leq \nu \leq n$$

$$C_1^{e_\nu} = \frac{1!}{0! \cdot \dots \cdot 1! \cdot \dots \cdot 0} = 1 \quad (25)$$

$$\partial^{e_\nu} f(X) = f'_{x_\nu}(X) \quad (26)$$

Если  $H = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$ , то

$$H^{e_\nu} = h_\nu \quad (27)$$

$$(26), (27), (28), (29) \implies g'(0) = \sum_{\nu=1}^n f'_{x_\nu}(Y) h_\nu \quad (28)$$

По условию,  $f \in \mathcal{C}^1(E)$ , а значит, применяя теорему о достаточном условии дифференцируемости,  $f$  дифф. в  $X \quad \forall X \in E$

Рассмотрим отображение

$$\Psi : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Psi(t) = Y + tH$$

$$g(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(\Psi(t)), \quad f : E \rightarrow \mathbb{R}^1$$

То есть,  $g : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^1$  и можно применить теорему о дифференцируемости суперпозиции дифференцируемых отображений:

$$\mathcal{D}g(t) = \mathcal{D}f(V)|_{V=Y+tH} \cdot \mathcal{D}\Psi(t) \quad (29)$$

Матрица Якоби для отображения  $\mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  – матрица  $1 \times 1$ :

$$\mathcal{D}g(t) = g'(t) \quad (30)$$

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ , значит, её матрица Якоби – это вектор-строка:

$$\mathcal{D}f(V)|_{V=Y+tH} = \left( f'_{x_1}(Y + tH), \dots, f'_{x_n}(Y + tH) \right) \quad (31)$$

$$\mathcal{D}\Psi(t) = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$(31), (32), (33), (34) \implies g'(t) = \sum_{\nu=1}^n f'_{x_\nu}(Y + tH) h_\nu, \quad t \in (-a, a) \quad (33)$$

Подставляя  $t = 0$ , получаем (30)

• **Переход.**

$$f \in \mathcal{C}^{r+1}(E)$$

Рассмотрим мультииндекс  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ,  $|\beta| = r + 1$

$$\beta = (0, \dots, \beta_{i_1}, 0, \dots, \beta_{i_l}, \dots, 0), \quad \beta_{i_k} \neq 0, \quad 1 \leq k \leq l$$

То есть, некоторые члены не равны нулю, остальные – нули

Пусть

$$\alpha^{(1)} = (0, \dots, 0, \beta_{i_1} - 1, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_l}, \dots, 0)$$

$$\alpha^{(2)} = (0, \dots, \beta_{i_1}, 0, \dots, \beta_{i_2} - 1, \dots, \beta_{i_l}, \dots, 0)$$

.....

$$\alpha^{(l)} = (0, \dots, \beta_{i_1}, 0, \dots, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_l} - 1, \dots, 0)$$

$|\alpha| = r$ ,  $\alpha + e_\nu = \beta$  для некоторого  $\nu$ .

$\nu \in \{i_1, \dots, i_l\}$  (иначе на месте одного из нулей была бы 1).

По индукционному предположению,

$$g^{(r)}(Y + tH) = \sum_{|\alpha|=r} C_r^{(\alpha)} \partial^\alpha f(Y + tH) H^\alpha \quad (34)$$

$$\stackrel{(35)}{\implies} g^{(r+1)}(Y + tH) = \sum_{|\alpha|=r} C_r^\alpha H^\alpha \left( \underbrace{\partial^\alpha f(Y + tH)}_{\in \mathcal{C}^1(E)} \right)' \quad (35)$$

Воспользуемся базой индукции для  $f_\alpha$ :

$$(37) = \sum_{|\alpha|=r} C_r^\alpha H^\alpha \left( \sum_{\nu=1}^n (\partial^\alpha f x_\nu)'(Y + tH) h_\nu \right) = \sum_{|\alpha|=1} \sum_{\nu=1}^n C_r^\alpha H^\alpha h_\nu \left( \partial^\alpha f(Y + tH) \right)'_{x_\nu} \quad (36)$$

$$\alpha = (l_1, \dots, l_\nu, \dots, l_n)$$

$$\begin{aligned} \left( \partial^\alpha f(X) \right)'_{x_\nu} &\stackrel{\text{def}}{=} f_{\underbrace{x_1 \dots x_1}_{l_1} \dots \underbrace{x_\nu \dots x_\nu}_{l_\nu} \dots \underbrace{x_n \dots x_n}_{l_n}} x_\nu(X) \stackrel{\text{т. о. классах } \mathcal{C}^r}{=} \\ &= f_{\underbrace{x_1 \dots x_1}_{l_1} \dots \underbrace{x_\nu \dots x_\nu}_{l_\nu+1} \dots \underbrace{x_n \dots x_n}_{l_n}}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \partial^{\alpha+e_\nu} f(X) \end{aligned} \quad (37)$$

$$H^\alpha h_\nu = h_1^{e_1} \dots h_\nu^{e_\nu} \dots h_n^{e_n} h_\nu = h_1^{e_1} \dots h_\nu^{e_\nu+1} \dots h_n^{e_n} = H^{\alpha+e_\nu} \quad (38)$$

$$(38) \stackrel{(36),(39)}{=} \sum_{|\alpha|=r} \sum_{\nu=1}^n C_r^\alpha H^{\alpha+e_\nu} \partial^{\alpha+e_\nu} f(Y + tH) \quad (39)$$

При этом,  $\alpha + e_\nu = \beta$ ,  $|\beta| = r + 1$

$$(41) = \sum_{|\beta|=r+1} \partial^\beta f(Y + tH) H^\beta \sum_{\alpha, \nu: \alpha+e_\nu=\beta} C_r^\alpha \quad (40)$$

$$\alpha^{(\mu)} := (0, \dots, \beta_{i_1}, 0, \dots, \beta_{i_\mu} - 1, 0, \dots, \beta_{i_l}, 0, \dots)$$

$$\alpha^{(\mu)} + e_{i_\mu} = \beta, \quad 1 \leq \mu \leq l$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{\alpha+e_\nu=\beta} C_r^\alpha &= \sum_{\mu=1}^l C_r^{\alpha^{(\mu)}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mu=1}^l \frac{r!}{\beta_{i_1}! \dots (\beta_{i_\mu} - 1)! \dots \beta_{i_l}!} = \frac{r!}{\beta_{i_1}! \dots \beta_{i_l}!} \sum_{\mu=1}^l \beta_{i_\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \\
&= \frac{r!}{\beta!} |\beta| = \frac{r!}{\beta!} (r+1) = \frac{(r+1)!}{\beta!} = C_{r+1}^\beta \\
\Rightarrow (42) &= g^{(r+1)}(t) = \sum_{|\beta|=r+1} \partial^\beta f(Y+tH) H^\beta C_{r+1}^\beta
\end{aligned}$$

□

## 9. Формула Тейлора для функции нескольких переменных с остатком в форме Лагранжа

**Теорема 4.**  $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$  – открытое,  $X_0 \in E$ ,  $B_\delta(X_0) \subset E$ ,  $f \in C^{r+1}(E)$   
 $H \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|H\| < \delta$

$$\Rightarrow \exists 0 < c < 1 : f(X_0 + H) = f(X_0) + \sum_{k=1}^r \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha + \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0 + cH) H^\alpha$$

**Доказательство.** Рассмотрим  $g(t) := f(X_0 + tH)$

$$g(1) = f(X_0 + H), \quad g(0) = f(X_0)$$

$$g \in C^{r+1}((-a, a)), \quad a > 1$$

так как  $\|H\| < \delta \Rightarrow$  для некоторого  $a > 1$   $\|aH\| = a\|H\| < \delta$

Для функции  $g$  можно применить теорему Лагранжа для одной переменной:

$$\begin{aligned}
g(1) &= g(0) + \sum_{k=1}^r \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \cdot 1^k + \frac{1}{(r+1)!} g^{(r+1)}(c) \cdot 1^{r+1} = \\
&= g(0) + \sum_{k=1}^r \frac{1}{k!} g^{(k)}(0) + \frac{1}{(r+1)!} g^{(r+1)}(c) \stackrel{\text{формула для } k\text{-й производной}}{=} \\
&= f(X_0) + \sum_{k=1}^r \frac{1}{k!} \sum_{|\alpha|=k} C_k^\alpha \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha + \frac{1}{(r+1)!} \sum_{|\alpha|=r+1} C_{r+1}^\alpha \partial^\alpha f(X_0 + cH) H^\alpha = \\
&= f(X_0) + \sum_{k=1}^r \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha + \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0 + cH) H^\alpha
\end{aligned}$$

□

## 10. Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остатком в форме Пеано

**Теорема 5.**  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$ ,  $X_0 \in E$ ,  $X_0 \in \omega \subset E$ ,  $f \in C^{r \geq 1}(\omega)$

$$\Rightarrow f(X_0 + H) = f(X_0) + \sum_{k=1}^r \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha + \rho(H) \quad (41)$$

где

$$\frac{\rho(H)}{\|H\|^r} \xrightarrow{H \rightarrow \mathbb{O}_n} 0 \quad (42)$$

**Доказательство.**

- $r = 1$

По достаточному условию дифференцируемости,  $f$  дифф. в  $X_0$ , что, по определению, означает, что

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \sum_{\nu=1}^n f'_{x_\nu}(X_0)h_\nu + \rho(H), \quad \frac{\rho(H)}{\|H\|} \xrightarrow{H \rightarrow \mathbb{O}_n} 0, \quad H = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

Перепишем эту сумму, используя мультииндексы. Возьмём  $\alpha : |\alpha| = 1$ , то есть  $\alpha = (0, \dots, 1, \dots, 0)$

$$C_1^\alpha = \frac{0! \dots 1! \dots 0!}{1!} = 1$$

$$\sum_{\nu=1}^n f'_{x_\nu}(X_0)h_\nu = \sum_{|\alpha|=1} C_1^\alpha \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha$$

Значит, ранее введённое определение дифференцируемости соотносится с обозначениями через мультииндексы.

- $r \geq 2$

Применим к функции  $f$  формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа для  $r - 1$ :

$$\begin{aligned} \exists c \in (0, 1) : f(X_0 + H) &= \\ &= f(X_0) + \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha + \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0 + cH) H^\alpha \pm \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha = \\ &= f(X_0) + \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha + \sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(X_0) H^\alpha + \underbrace{\sum_{|\alpha|=r} \frac{1}{\alpha!} \left( \partial^\alpha f(X_0 + cH) - \partial^\alpha f(X_0) \right) H^\alpha}_{\rho(H)} \end{aligned} \quad (43)$$

Получили соотношение (43). Осталось доказать (44).

$$f \in C^r(\omega) \xrightarrow{\text{def } \mathcal{C}} \partial^\alpha f(X_0 + H) - \partial^\alpha f(X_0) \xrightarrow{H \rightarrow \mathbb{O}_n} 0 \quad \forall \alpha : |\alpha| = r \quad (44)$$

$$H^\alpha \stackrel{\text{def } x^\alpha}{=} h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n} \implies |H^\alpha| \leq \|H\|^{\alpha_1} \dots \|H\|^{\alpha_n} = \|H\|^{|\alpha|} = \|H\|^r \implies \frac{|H^\alpha|}{\|H\|^r} \leq 1 \quad (45)$$

$$\left| \frac{\rho(H)}{\|H\|^r} \right| \stackrel{(45)}{=} \left| \frac{\left( \partial^\alpha f(X_0 + H) - \partial^\alpha f(X_0) \right) H^\alpha}{\|H\|^r} \right| \stackrel{(47)}{\leq} \left| \partial^\alpha f(X_0 + cH) - \partial^\alpha f(X_0) \right| \stackrel{(46)}{\xrightarrow{H \rightarrow \mathbb{O}_n}} 0$$

□

## 11. Дифференциалы функции порядка $\geq 2$ ; их вид

Будем иметь дело с некоторым открытым  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n \geq 1}$

**Определение 5.**  $f \in C^1(\omega)$ ,  $X \in \omega$ ,  $H \in \mathbb{R}^n$ ,  $H = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$

$$d^1 f(X, H) := d f(X, H) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n f'_{x_k}(X) h_k$$

.....

Пусть для некоторого  $r \geq 1$  для функции  $f \in C^r(\omega)$  для любых  $X$  и  $\omega$  определена функция

$$d^r f(X, H) = \sum_{|\alpha|=r} A_{r,\alpha} \partial^\alpha f(X) H^\alpha, \quad A_{r,\alpha} - \text{некоторые определённые коэффициенты}$$

$$A_{1,\alpha} = 1 \quad \forall \alpha : |\alpha| = 1$$

Пусть  $f \in C^r(\omega)$ . Определим дифференциал порядка  $r+1$ :

$$d^{r+1} f(X, H) := \sum_{|\alpha|=r} A_{r,\alpha} d \left( \partial^\alpha f(X), H \right) H^\alpha = \sum_{|\alpha|=r+1} A_{r+1,\alpha} \partial^\alpha f(X) H^\alpha$$

## 12. Вычисление второго дифференциала; положительно и отрицательно определённые квадратичные формы, их свойства; неопределённые формы

**Пример** (переход от дифференциала порядка 1 к дифференциалу порядка 2). Воспользуемся тем, что  $C_1^\alpha = 1 \quad \forall \alpha : |\alpha| = 1$

Выпишем дифференциал первого порядка:

$$d^1 f(X, H) = \sum_{k=1}^n f'_{x_k}(X) h_k$$

$$\begin{aligned} d^2 f(X, H) &\stackrel{\text{def } d^{r+1}}{=} \sum_{k=1}^n d \left( f'_{x_k}(X), H \right) h_k \stackrel{\text{def } d}{=} \sum_{k=1}^n \left( \sum_{l=1}^n f''_{x_k x_l}(X) h_l \right) h_k = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n f''_{x_k x_l}(X) h_l h_k \stackrel{f''_{x_k x_l} = f''_{x_l x_k}}{=} \sum_{k=1}^n f''_{x_k x_k}(X) h_k^2 + 2 \sum_{k < l} f''_{x_k x_l}(X) h_k h_l \quad (46) \end{aligned}$$

Возьмём  $\alpha : |\alpha| = 2$ :

- $\alpha = (0, \dots, 2, \dots, 0)$

$$\partial^\alpha f(X) = f''_{x_k x_k}$$

$$C_2^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2!}{0! \dots 2! \dots 0!} = 1$$

- $\alpha = (0, \dots, 1, \dots, 1, \dots, 0)$

$$\partial^\alpha f = f''_{x_k x_l}$$

$$C_2^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2!}{0! \dots 1! \dots 1! \dots 0!} = 2$$

Теперь можно записать, что

$$(48) = \sum_{|\alpha|=2} C_2^\alpha \partial^\alpha f(X) H^\alpha$$

То есть,  $A_{2,\alpha} = C_2^\alpha$

**Теорема 6.**  $A_{r,\alpha} = C_r^\alpha$

**Доказательство.** Будем доказывать **индукцией** по  $r$ :

- **База.**  $r = 1, 2$  – только что проверили
- **Переход.** Пусть это верно для  $r \geq 2$ . Докажем для  $r+1$ :

По предположению индукции,

$$d^{r+1} f(X, H) \stackrel{\text{def } d^{r+1}}{=} \sum_{|\alpha|=1} C_r^\alpha d \left( \partial^\alpha f(X), H \right) H^\alpha = \sum_{|\alpha|=r} C_r^\alpha \left( \sum_{\nu=1}^n (\partial^\alpha f)'_{x_\nu}(X) h_\nu \right) H^\alpha \quad (47)$$

В доказательстве формулы для производной порядка  $r$  (в предыдущей лекции, формулы с (38) до конца доказательства) было доказано, что

$$(49) = \sum_{|\alpha|=r+1} C_{r+1}^\alpha \partial^\alpha f(X) H^\alpha$$

□

**Утверждения.** Теперь можно переписать формулы Тейлора:

1. с остатком в форме Лагранжа:

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \sum_{k=1}^r \frac{1}{k!} d^k f(X_0, H) + \frac{1}{(r+1)!} d^{r+1} f(X_0 + cH, H)$$

2. с остатком в форме Пеано:

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \sum_{k=1}^r \frac{1}{k!} d^k f(X_0, H) + \rho(H)$$

$$\frac{\rho(H)}{\|H\|^r} \xrightarrow{H \rightarrow \mathbb{O}_n} 0$$

**Пример.** Применим формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа при  $r = 2$ :

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + d f(X_0, H) + \frac{1}{2} d^2 f(X_0, H) + \rho(H), \quad \frac{\rho(H)}{\|H\|^2} \xrightarrow{H \rightarrow \mathbb{O}_n} 0 \quad (48)$$

Перепишем через двойные суммы (как мы это делали при переходе к дифференциалу порядка 2):

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \sum_{k=1}^n f'_{x_k}(X_0) h_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n f''_{x_k x_l}(X_0) h_k h_l + \rho(H)$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$A(H) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} h_k h_l, \quad a_{kl} = \frac{1}{2} f''_{x_k x_l}(X_0), \quad a_{kl} = a_{lk}$$

**Напоминание** (классификация квадратичных форм). Квадратичная форма называется:

1. положительно определённой, если  $\forall H \neq \mathbb{O}_n \quad A(H) > 0$
2. отрицательно определённой, если  $\forall H \neq \mathbb{O}_n \quad A(H) < 0$
3. неопределённой, если  $\exists H_1, H_2 \neq \mathbb{O}_n \quad A(H_1) > 0, \quad A(H_2) < 0$

**Теорема 7.** Если квадратичная форма  $A$  положительно определена, то

$$\exists m_1 > 0 \quad A(H) \geq m_1 \|H\|^2 \quad (49)$$

Если квадратичная форма отрицательно определена, то

$$\exists m_2 > 0 \quad A(H) \leq -m_2 \|H\|^2$$

**Доказательство.** Достаточно доказать (51), т. к. для полож. определённой  $B$ , форма  $-B(H)$  отрицательно определена

Рассмотрим единичную сферу  $S := \{ H \in \mathbb{R}^n \mid \|H\| = 1 \}$   
 $S$  – компакт в пространстве  $\mathbb{R}^n$  (это доказывалось, когда рассматривались компакты в  $\mathbb{R}^n$ )

**Очевидно, что.**  $A(H) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$

Значит, по второй теореме Вейерштрасса,  $A$  достигает своего минимального значения, т. е.

$$\exists H_0 \in S : \forall H \in S \quad A(H) \geq A(H_0)$$

Обозначим  $m_1 := A(H_0)$

Т. к. квадратичная форма положительно определена,  $m_1 > 0$

Рассмотрим  $\forall H \neq \mathbb{O}_n$

Пусть  $t := \|H\| > 0$  (т. к.  $H \neq \mathbb{O}_n$ )

Зафиксируем  $H^* = \frac{1}{t}H$

$$\|H^*\| = \left\| \frac{1}{t}H \right\| = \frac{1}{t} \|H\| = \frac{t}{t} = 1$$

То есть,  $H^* \in S$

Тогда, в силу выбора  $H_0$ , получаем, что  $A(H^*) \geq m_1$

**Замечание.** Легко заметить, что константа из квадратичной формы выносится в квадрате:

$$A(tH) = t^2 A(H) \tag{50}$$

$$A(H^*) \stackrel{\text{def } H^*}{=} A\left(\frac{1}{t}H\right) \stackrel{(52)}{=} \frac{1}{t^2} A(H) \geq m_1$$

$$A(H) \geq m_1 t^2 \stackrel{\text{def } t}{=} m_1 \|H\|^2$$

□

### 13. Достаточное условие наличия или отсутствия локального экстремума функции

**Теорема 8.**  $\omega \subset \mathbb{R}^n$  – открытое,  $X_0 \in \omega$ ,  $f \in \mathcal{C}^2(\omega)$

Выполнено необходимое условие локального экстремума, то есть  $f'_{x_j}(X_0) = 0$ ,  $1 \leq j \leq n$

**Замечание.**  $\implies d f(X_0, H) = 0 \quad \forall H$

1. если  $d^2 f(X_0, H)$  положительно определён, то  $X_0$  – строгий локальный минимум
2. если  $d^2 f(X_0, H)$  отрицательно определён, то  $X_0$  – строгий локальный максимум
3. если  $d^2 f(X_0, H)$  неопределён, то нет локального экстремума

**Доказательство.**

1. Вспомним формулу Тейлора с остатком в форме Пеано:

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + d f(X_0, H) + \frac{1}{2} d^2 f(X_0, H) + \rho(H)$$

$$\text{где } \frac{\rho(H)}{\|H\|^2} \xrightarrow{H \rightarrow \mathbb{O}_n} 0 \tag{51}$$

Перепишем, применив замечание:

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \frac{1}{2} d^2 f(X_0, H) + \rho(H) \tag{52}$$

Т. к. второй дифференциал положительно определён, то, по предыдущей теореме,

$$\exists m_1 > 0 : d^2 f(X_0, H) \geq m_1 \|H\|^2 \tag{53}$$



Соотношение (53) означает, что

$$\exists \delta > 0 : \forall 0 < \|H\| < \delta \quad \left| \frac{\rho(H)}{\|H\|^2} \right| < \frac{m_1}{4} \iff |\rho(H)| < \frac{m_1}{4} \|H\|^2 \quad (54)$$

$$\begin{aligned} f(X_0 + H) &\stackrel{(50)}{=} f(X_0) + \frac{1}{2} d^2 f(X_0, H) + \rho(H) \geq f(X_0) + \frac{1}{2} d^2 f(X_0, H) - |\rho(H)| \stackrel{(55), (56)}{>} \\ &> f(X_0) + \frac{m_1}{2} \|H\|^2 - \frac{m_1}{4} \|H\|^2 = f(X_0) + \frac{m_1}{4} \|H\|^2 > f(X_0) \end{aligned}$$

2. Аналогично.

3.  $d^2 f(X_0, H)$  неопределён означает, что

$$A(H_1) > 0, \quad A(H_2) < 0$$

Рассмотрим  $H_1^* = \frac{1}{\|H_1\|} H_1$ . Очевидно, что  $H_1^* \in S$

$$A(H_1^*) = A\left(\frac{1}{\|H_1\|} H_1\right) \stackrel{(52)}{=} \frac{1}{\|H_1\|^2} A(H_1) := p_1 > 0$$

Рассмотрим  $H_2^* = \frac{1}{\|H_2\|} H_2$ . Очевидно, что  $H_2^* \in S$

$$A(H_2^*) = A\left(\frac{1}{\|H_2\|} H_2\right) \stackrel{(52)}{=} \frac{1}{\|H_2\|^2} A(H_2) := -p_2 > 0$$

Возьмём  $t > 0$

$$A(tH_2^*) \stackrel{(52)}{=} t^2 A(H_2^*) \stackrel{\text{def } p_2}{=} -p_2 t^2 \quad (55)$$

$$A(tH_1^*) \stackrel{(52)}{=} t^2 A(H_1^*) \stackrel{\text{def } p_1}{=} p_1 t^2 \quad (56)$$

Это было верно для любой квадратичной формы. Вернёмся к  $A(H) = d^2 f(X_0, H)$   
Выберем  $\delta_1 > 0$ , такое что

$$\forall 0 < \|H\| < \delta_1 \quad |\rho(H)| < \frac{1}{4} \min \{ p_1, p_2 \} \cdot \|H\|^2 \quad (57)$$

Пусть  $0 < t < \delta_1$

$$\|tH_1^*\| = \|tH_2^*\| = t$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} f(X_0 + tH_1^*) &= f(X_0) + \frac{1}{2} d^2 f(X_0, tH_1^*) + \rho(tH_1^*) \geq \\ &\geq f(X_0) + \frac{1}{2} t^2 d^2 f(X_0, H_1^*) - |\rho(tH_1^*)| \stackrel{(58), (59)}{>} \\ &> f(X_0) + \frac{1}{2} p_1 t^2 - \frac{1}{4} p_1 t^2 = f(X_0) + \frac{1}{4} p_1 t^2 > f(X_0) \end{aligned}$$

При этом,  $X_0 + tH_1^*$  лежит в любой окрестности  $X_0$

Рассмотрим

$$f(X_0 + tH_2^*) \stackrel{(57), (59)}{\leq} f(X_0) - \frac{p_2}{2} t^2 + |\rho(tH_2^*)| < f(X_0) - \frac{p_2}{2} t^2 + \frac{p_2}{4} t^2 = f(X_0) - \frac{p_2}{4} t^2 < f(X_0)$$

При этом,  $X_0 + tH_2^*$  тоже лежит в любой окрестности  $X_0$

Значит, локального экстремума нет (по определению локального экстремума)

□

## 14. Неравенство Лагранжа для вектор функции

**Утверждение 3.**  $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{n \geq 2}$ ,  $F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$ ,  $t_0 \in (a, b)$

**Напоминание.** По теореме из прошлого семестра,  $F$  дифференцируема в  $t_0$  тогда и только тогда, когда  $f_j(t)$  дифф. в  $t_0$   $j = 1, \dots, n$

**Напоминание.**  $f_j(t)$  дифф. в  $t_0$  тогда и только тогда, когда  $\exists f'_j(t_0)$

$$\mathcal{D}F(t_0) = \begin{bmatrix} f'_1(t_0) \\ \vdots \\ f'_n(t_0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underset{\text{(как линейного отображения)}}{\|\mathcal{D}F(t_0)\|} &= \sup_{\substack{|h| \leq 1 \\ h \in \mathbb{R}}} \|\mathcal{D}F(t_0)h\|_n = \sup \|h\mathcal{D}F(t_0)\|_n = \sup |h| \|\mathcal{D}F(t_0)\|_n = \\ &= \|\mathcal{D}F(t_0)\|_n = \left\| \begin{bmatrix} f'_1(t_0) \\ \vdots \\ f'_n(t_0) \end{bmatrix} \right\|_n \end{aligned}$$

**Теорема 9 (Лагранжа).**  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n \geq 2}$ ,  $F \in \mathcal{C}([a, b])$

**Напоминание.**  $F \in \mathcal{C}([a, b]) \iff f_j \in \mathcal{C}([a, b]) \quad j = 1, \dots, n$

$\forall t \in (a, b) \quad F$  дифф. в  $t$

$$\implies \exists c \in (a, b) : \|F(b) - F(a)\|_n \leq \|\mathcal{D}F(c)\|_n (b - a) \quad (58)$$

**Доказательство.** Возьмём

$$\varphi(t) := F(t)^T (F(b) - F(a)) = f_1(t) (f_1(b) - f_1(a)) + \dots + f_n(t) (f_n(b) - f_n(a)) \quad (59)$$

Будем считать, что  $F(b) \neq F(a)$  (иначе – очевидно)  
По напоминанию из условия теоремы,  $\varphi \in \mathcal{C}([a, b])$ . Значит,  $\forall t \in (a, b) \quad \exists \varphi'(t)$

$$\varphi'(t) = f'_1(t) (f_1(b) - f_1(a)) + \dots + f'_n(t) (f_n(b) - f_n(a)) \quad (60)$$

К  $\varphi$  можно применить теорему Лагранжа из первого семестра:

$$\exists c \in (a, b) : \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b - a) \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \varphi(b) - \varphi(a) &\stackrel{(61)}{=} \left[ f_1(b) (f_1(b) - f_1(a)) + \dots \right] - \left[ f_1(a) (f_1(b) - f_1(a)) + \dots \right] = \\ &= \left( f_1(b) - f_1(a) \right)^2 + \dots + \left( f_n(b) - f_n(a) \right)^2 = \|F(b) - F(a)\|_n^2 \quad (62) \end{aligned}$$

Применим к (62) неравенство КБШ:

$$\begin{aligned} |\varphi'(c)| &\leq \left( \left( f'_1(c) \right)^2 + \dots + \left( f'_n(c) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \left( f_1(b) - f_1(a) \right)^2 + \dots + \left( f_n(b) - f_n(a) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \|\mathcal{D}F(c)\| \cdot \|F(b) - F(a)\| \quad (63) \end{aligned}$$

$$(64), (65) \implies \|F(b) - F(a)\|^2 \leq \|DF(c)\| \cdot \|F(b) - F(a)\| \implies (60)$$

□

## 15. Теорема об обратимости линейного оператора, близкого по норме разности к обратимому оператору

Вспомним две теоремы из алгебры:

**Напоминание.**  $A$  обратима  $\iff \det A \neq 0$

**Напоминание.**  $A$  обратима  $\iff AX \neq \mathbb{O}_n \quad \forall X \neq \mathbb{O}_n$

**Теорема 10.**  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  – линейное, т. е.  $\mathcal{A}(X) = AX$ ,  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$A$  обратимо, т. е.  $\exists D : AD = I$  и  $DA = I$  ( $D$  называется обратной матрицей и обозначается  $D = A^{-1}$ )

$\|A^{-1}\| = \frac{1}{\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\|B - A\| = \beta$ ,  $0 < \beta < \alpha$

Тогда  $B$  обратима и  $\|A^{-1} - B^{-1}\| \leq \frac{\beta}{\alpha(\beta - \alpha)}$

**Доказательство.**

- Докажем, что  $B$  обратима:  
Возьмём  $X \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} X = IX &= (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) \implies \|X\| = \|A^{-1}(AX)\| \leq \\ &\leq \|A^{-1}\| \|AX\| \stackrel{\text{def } \alpha}{=} \frac{1}{\alpha} \|AX\| \implies \|AX\| \geq \alpha \|X\| \end{aligned} \quad (64)$$

$$BX = AX + (BX - AX) \implies \|BX\| \stackrel{\Delta}{\geq} \|AX\| - \|BX - AX\| \quad (65)$$

$$\|BX - AX\| = \|(B - A)X\| \leq \|B - A\| \|X\|_n \quad (66)$$

$$\|BX\|_n \stackrel{(67)}{\geq} \underbrace{\alpha \|X\|}_{(66)} - \underbrace{\|B - A\| \|X\|}_{(68)} = \underbrace{(\alpha - \beta)}_{>0} \|X\| \quad (67)$$

Это означает, что  $B$  обратима (по второй теореме из алгебры)

- Докажем соотношение для  $\|A^{-1} - B^{-1}\|$ :  
Возьмём  $\forall Y \neq \mathbb{O}_n$  и  $X := B^{-1}Y$

$$\|B(B^{-1}Y)\| \stackrel{\text{def } Y}{=} \|BX\| \stackrel{(69)}{\geq} (\alpha - \beta) \|X\| \stackrel{\text{def } X}{=} (\alpha - \beta) \|B^{-1}Y\| \quad (68)$$

$$B(B^{-1}Y) \stackrel{\text{асс.}}{=} (BB^{-1})Y = IY = Y$$

$$(70) \implies \|B^{-1}Y\| \leq \frac{1}{\alpha - \beta} \|Y\| \implies \|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha - \beta} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} A(A^{-1} - B^{-1})B &\stackrel{\text{асс.}}{=} \left( A(A^{-1} - B^{-1}) \right) B \stackrel{\text{дистр.}}{=} (AA^{-1} - AB^{-1})B = (I - AB^{-1})B \stackrel{\text{дистр.}}{=} \\ &= IB - (AB^{-1})B \stackrel{\text{асс.}}{=} B - A(B^{-1}B) = B - AI = B - A \end{aligned}$$

$$\implies \underbrace{(A^{-1}A)}_{=I} (A^{-1} - B^{-1}) \underbrace{(BB^{-1})}_{=I} = A^{-1}(B - A)B^{-1} \implies A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1} \quad (70)$$

$$\|A^{-1} - B^{-1}\| \stackrel{(72)}{\leq} \|A^{-1}\| \cdot \|B - A\| \cdot \|B^{-1}\| \stackrel{(71)}{\leq} \frac{1}{\alpha} \cdot \beta \cdot \frac{1}{\alpha - \beta} \stackrel{\text{def } \alpha, \beta}{\leq}$$

## 16. Теорема об обратимом отображении: выбор множества $U$

**Теорема 11.**  $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$ ,  $E$  открыто,  $X_0 \in E$ ,  $F : E \rightarrow \mathbb{R}^1$   
 $F \in \mathcal{C}^1(E)$ , т. е. все координатные функции  $\in \mathcal{C}^1$ ,  $Y_0 = F(X_0)$ ,  $\mathcal{D}F(X_0)$  обратима

$$\implies \exists U - \text{окрестность } X_0, V - \text{окрестность } Y_0 : \begin{cases} F|_U \text{ обратимо} \\ F(U) = V \\ \Phi = \left(F|_U\right)^{-1} \implies \Phi \in \mathcal{C}^1(V) \end{cases}$$

**Доказательство** (определение множества  $U$ ). Обозначим  $A := \mathcal{D}F(X_0)$ . По условию, она обратима

Положим  $\lambda := \frac{1}{4 \|A^{-1}\|}$

Обозначим  $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$

$$\mathcal{D}F(X) = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(X) & \dots & f'_{1x_n}(X) \\ \vdots & & \vdots \\ f'_{nx_1}(X) & \dots & f'_{nx_n}(X) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{D}F(X) - \mathcal{D}F(X_0) = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(X) - f'_{1x_1}(X_0) & \dots & f'_{1x_n}(X) - f'_{1x_n}(X_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f'_{nx_1}(X) - f'_{nx_1}(X_0) & \dots & f'_{nx_n}(X) - f'_{nx_n}(X_0) \end{bmatrix}$$

По свойству (5) нормы матрицы,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}F(X) - A\| &\stackrel{\text{def } A}{=} \|\mathcal{D}F(X) - \mathcal{D}F(X_0)\| \leq \left( \sum_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} \left( f'_{ix_j}(X) - f'_{ix_j}(X_0) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{F \in \mathcal{C}^1}{\implies} \|\mathcal{D}F(X) - \mathcal{D}F(X_0)\| \xrightarrow{X \rightarrow X_0} 0 \\ &\implies \exists r > 0 : \forall X \in B_r(X_0) \quad \|\mathcal{D}F(X) - A\| < 2\lambda \end{aligned} \quad (71)$$

Положим  $U := B_r(X_0)$

□

## 17. Теорема об обратимом отображении: взаимная однозначность

$F|_U$

**Теорема 12.**  $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$ ,  $E$  открыто,  $X_0 \in E$ ,  $F : E \rightarrow \mathbb{R}^1$   
 $F \in \mathcal{C}^1(E)$ , т. е. все координатные функции  $\in \mathcal{C}^1$ ,  $Y_0 = F(X_0)$ ,  $\mathcal{D}F(X_0)$  обратима

$$\implies \exists U - \text{окрестность } X_0, V - \text{окрестность } Y_0 : \begin{cases} F|_U \text{ обратимо} \\ F(U) = V \\ \Phi = \left(F|_U\right)^{-1} \implies \Phi \in \mathcal{C}^1(V) \end{cases}$$

**Утверждение 4** (о выпуклости шара).  $X_1, X_2 \in U$ ,  $0 < t < 1$

$$\implies tX_1 + (1-t)X_2 \in U$$

(см. рис. 1)

**Замечание.** Используем наши обозначения (т. е.  $U = B_r(X_0)$ )

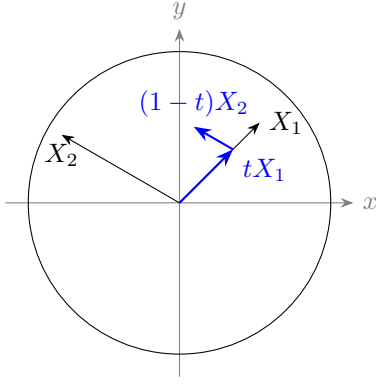


Рис. 1: Выпуклость шара

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \|tX_1 + (1-t)X_2 - X_0\| &= \|t(X_1 - X_0) + (1-t)(X_2 - X_0)\| \stackrel{\Delta}{\leq} \\ &\leq \|t(X_1 - X_0)\| + \|(1-t)(X_2 - X_0)\| < t \cdot r + (1-t) \cdot r = r \end{aligned}$$

□

**Следствие.**  $X \in U$ ,  $X + H \in U$ ,  $0 < t < 1$

$$\implies X + tH \in U$$

**Доказательство.**  $X_1 := X + H$ ,  $X_2 := X$

$$tx_1 + (1-t)X_2 = tX + tH + (1-t)X = X + tH$$

□

**Доказательство** (Инъективность?  $F$ ). Далее будем рассматривать  $F$  только на  $U$  (т. е. будем писать  $F := F|_U$ )

Возьмём  $X \in U$  и  $H \neq \mathbb{O}_n$ , такие что  $X + H \in U$

Докажем, что  $F(X + H) - F(X) \neq \mathbb{O}_n$ . Это и будет означать инъективность

Возьмём  $t \in [0, 1]$  и  $P(t) := F(X + tH) - tAH$

Это вектор-функция  $P : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{D}P(t) \stackrel{\text{def } P}{=} \mathcal{D}\left(F(X + tH)\right) - \mathcal{D}(tAH) \quad (72)$$

Положим  $q(t) := X + tH$

Теперь можно переписать (74):

$$\mathcal{D}P(t) = \mathcal{D}\left(F(q(t))\right) - \mathcal{D}(tAH) \quad (73)$$

**Напоминание.** Мы уже *где-то* доказали, что для  $Y \in \mathbb{R}^n$  и отображения  $t \mapsto tY$  выполнено  $\mathcal{D}(tY) = Y$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(tAH) &= AH, & \mathcal{D}q(t) &= H \\ \mathcal{D}F\left(q(t)\right) &= \mathcal{D}F\left(q(t)\right)\mathcal{D}q(t) = \mathcal{D}F(X + tH)H \end{aligned}$$

Подставим это в (75):

$$\mathcal{D}P(t) = \mathcal{D}F(X + tH)H - AH \quad (74)$$

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4 \|A^{-1}\|} \implies \|A^{-1}\| = \frac{1}{4\lambda}$$

Возьмём  $H \neq \mathbb{O}_n$

$$\begin{aligned} H = (A^{-1}A)H = A^{-1}AH &\implies \|H\| = \|A^{-1}(AH)\| \leq \|A^{-1}\| \|AH\| = \frac{1}{4\lambda} \|AH\| \implies \\ &\implies \|AH\| \geq 4\lambda \|H\| \end{aligned} \quad (75)$$

$$P(1) - P(0) \stackrel{\text{def } P}{=} F(X+H) - AH - F(X) = F(X+H) - F(X) - AH \quad (76)$$

Применим к  $P$  теорему Лагранжа для вектор-функции:

$$\begin{aligned} \exists c \in [0, 1] : \|P(1) - P(0)\| &\leq \|\mathcal{D}P(c)\| \cdot (1 - 0) = \|\mathcal{D}P(c)\| \stackrel{(76)}{=} \left\| \left( \mathcal{D}F(X+cH) - A \right) H \right\| \leq \\ &\leq \left\| \underbrace{\mathcal{D}F(X+cH)}_{\in U} - A \right\| \|H\| \stackrel{(73)}{\leq} 2\lambda \|H\| \stackrel{(77)}{\leq} \frac{1}{2} \|AH\| \end{aligned} \quad (77)$$

$$\|F(X+H) - F(X) - AH\| \stackrel{(78)}{=} \|P(1) - P(0)\| \stackrel{(79)}{\leq} \frac{1}{2} \|AH\| \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \|F(X+H) - F(X)\| &= \left\| AH + \left( F(X+H) - F(X) - AH \right) \right\| \geq \\ &\geq \|AH\| - \|F(X+H) - F(X) - AH\| \stackrel{(80)}{>} \|AH\| - \frac{1}{2} \|AH\| = \frac{1}{2} \|AH\| \stackrel{(77)}{\geq} 2\lambda \|H\| > 0 \end{aligned} \quad (79)$$

□

## 18. Теорема об обратимом отображении: отображение $F$ открыто

**Теорема 13.**  $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$ ,  $E$  открыто,  $X_0 \in E$ ,  $F : E \rightarrow \mathbb{R}^1$   
 $F \in \mathcal{C}^1(E)$ , т. е. все координатные функции  $\in \mathcal{C}^1$ ,  $Y_0 = F(X_0)$ ,  $\mathcal{D}F(X_0)$  обратима

$$\implies \exists U - \text{окрестность } X_0, V - \text{окрестность } Y_0 : \begin{cases} F|_U \text{ обратимо} \\ F(U) = V \\ \Phi = \left( F|_U \right)^{-1} \implies \Phi \in \mathcal{C}^1(V) \end{cases}$$

**Лемма 1.**  $U = B_r(X_0)$ ,  $X_1 \in U$ ,  $0 < \rho < r - \|X_0 - X_1\|$ ,  $S = B_\rho(X_1)$

**Замечание.** В силу последних двух условий,  $S \subset U$  (т. к.  $U \stackrel{\text{def}}{=} B_r(X_0)$ )

$$\begin{aligned} Y_1 = F(X_1) \\ \implies B_{\lambda\rho}(Y_1) \subset F(S) \end{aligned} \quad (80)$$

**Примечание.**  $r, \lambda, X_0, F$  из теоремы и первых двух шагов доказательства

**Доказательство.**  $X \in U$ ,  $X+H \in U$

$$\|F(X+H) - F(X)\| \geq 2\lambda \|H\| \quad (81)$$

(по соотношению (81) из второго шага доказательства)

$$(83) \iff \|F(X_2) - F(X_3)\| \geq 2\lambda \|X_2 - X_3\| \quad \forall X_2, X_3 \in U \quad (82)$$

По условию,  $Y_1 \in F(S)$  (т. к. это образ  $X_1$ )

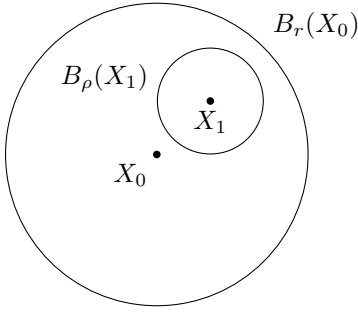


Рис. 2: Здесь  $r = 2$ ,  $\|X_0 - X_1\| = 1$ ,  $\rho = 0.7$

Возьмём  $Y \neq Y_1$ ,  $Y \in B_{\lambda\rho}(Y_1)$

$S$  – открытый шар

Рассмотрим функцию  $k(X) := \|F(X) - Y\|$ ,  $X \in \bar{S}$

$\bar{S}$  – замкнутый шар, а значит, компакт. Поэтому  $k \in \mathcal{C}(\bar{S})$

По второй теореме Вейерштрасса,  $k$  достигает минимального значения:

$$\exists X_* \in \bar{S} : k(X_*) \leq k(X) \quad \forall X \in \bar{S} \quad (83)$$

**Утверждение 5.**  $X_*$  не принадлежит границе  $\bar{S}$  (т. е.  $X_* \in S$ )

**Доказательство.** Действительно, если  $\|X_0 - X_1\| = \rho$  (т. е.  $X_0$  лежит на границе  $\bar{S}$ ), то

$$\implies \|F(X_0) - F(X_1)\| \underset{(84)}{\geq} 2\lambda \|X_1 - X_0\| = 2\lambda\rho$$

По определению,  $F(X_1) = Y_1$ . Подставим:

$$\|F(X_0) - Y_1\| \geq 2\lambda\rho \quad (84)$$

При этом,  $Y \in B_{\lambda\rho}(Y_1)$ . Значит,

$$\|Y - Y_1\| < \lambda\rho \quad (85)$$

$$\|F(X_0) - Y\| \underset{\triangle}{\geq} \|F(X_0) - Y_1\| - \|Y_1 - Y\| \underset{(86),(87)}{>} 2\lambda\rho - \lambda\rho = \lambda\rho$$

В обозначениях  $k$  можно записать:

$$\left. \begin{aligned} k(X_0) &\stackrel{\text{def } k}{=} \|F(X_0) - Y\| > \lambda\rho \\ k(X_1) &\stackrel{\text{def } k}{=} \|Y_1 - Y\| < \lambda\rho \end{aligned} \right\} \implies k(X_1) < k(X_0) \quad (86)$$

Взяли точку на границе диска (на сфере). Получили, что значение функции на границе строго больше, чем значение в центре. Значит, минимум ( $X_*$ ) не может лежать на границе, т. е.

$$X_* \in S \quad (87)$$

□

Рассмотрим функцию  $l(X) := k^2(X)$

Понятно, что её минимум совпадёт с минимумом  $k$ :

$$(85) \implies l(X_*) \leq l(X) \quad \forall X \in \bar{S} \quad (88)$$

$$l(X) \stackrel{\text{def } k}{=} \|F(X) - Y\|^2 \quad (89)$$

Пусть

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

В этих обозначениях,

$$(91) \implies l(X) = \sum_{i=1}^l \left( f_i(X) - y_i \right)^2 \quad (90)$$

По условию теоремы,  $F$ , а значит и его координатные функции гладкие ( $\in \mathcal{C}^1$ , т. е. имеют непрерывные частные производные). Нетрудно заметить, что

$$l \in \mathcal{C}^1(U) \quad (91)$$

Вспомним необходимое условие локального экстремума (из второго семестра):

**Напоминание.** Если функция имеет частный экстремум и она дифференцируема в этой точке, то все частные производные в этой точке равны нулю

Его можно применять только к внутренним точкам (именно для этого мы и проверяли, что  $X_* \in S$ )

$$(89), (90), (93) \implies l'_{x_j}(X_*) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (92)$$

Из соотношения (92) понятно, как выглядят частные производные:

$$l'_{x_j}(X_*) \stackrel{(92)}{=} \sum_{i=1}^n 2 \left( f_i(X_*) - y_i \right) f'_{ix_j}(X_*) \stackrel{(94)}{=} 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Поделим на 2:

$$\sum_{i=1}^n \left( f_i(X_*) - y_i \right) f'_{ix_j}(X_*) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (93)$$

Заметим, что здесь фигурирует матрица Якоби. Чтобы её записать, введём обозначение:

$$A := \left( f_1(X_*) - y_1, \dots, f_n(X_*) - y_n \right)$$

Очевидно, что.

$$A = \left( F(X_*) - Y \right)^T \quad (94)$$

Имеется  $n$  равенств. В них фигурируют элементы матрицы Якоби:

**Утверждение 6.**

$$(95) \iff ADF(X_*) = \mathbb{O}_n^T \quad (95)$$

**Доказательство.**

$$\mathcal{D}F(X_*) = \begin{pmatrix} f'_{1x_1}(X_*) & \dots & f'_{1x_n}(X_*) \\ \vdots & & \vdots \\ f'_{nx_1}(X_*) & \dots & f'_{nx_n}(X_*) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} ADF(X_*) &= \left[ \left( f_1(X_*) - y_1 \right) f'_{1x_1}(X_*) + \dots + \left( f_n(X_*) - y_n \right) f'_{nx_1}(X_*), \dots \right] = \\ &= \left[ \sum_{i=1}^n \left( f_i(X_*) - y_i \right) f'_{ix_1}(X_*), \dots \right] = (95) \end{aligned}$$

□

**Утверждение 7.**

$$\det \mathcal{D}F(X) \neq 0 \quad \forall X \in U \quad (96)$$



**Доказательство.** Вспомним соотношение из теоремы об отображении, близком к обратимому:

$$\|A\| = \frac{1}{\alpha}, \quad \|A - B\| = \beta < \alpha \quad \implies \|B^{-1}\| \leq \frac{1}{2\alpha}$$

Применим это к  $\alpha = 4\lambda$ ,  $\beta = 2\lambda$ :

$$\|\mathcal{D}F(X) - \mathcal{D}F(X_0)\| < 2\lambda$$

$$\|\mathcal{D}F(X_0)\| = \frac{1}{4\lambda}$$

Отсюда следует, что  $\mathcal{D}F(X_0)$  обратима и для неё выполняется неравенство:

$$\left\| \left( \mathcal{D}F(X) \right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{2\lambda}$$

Это значит, что она неособенна ( $\det \neq 0$ ) □

(98) позволяет нам взять обратную матрицу к  $\mathcal{D}F(X_*)$ :

$$\left. \begin{aligned} \left( A\mathcal{D}F(X_*) \right) \left( \mathcal{D}F(X_*) \right)^{-1} &\stackrel{(97)}{=} \mathbb{O}_n^T \left( \mathcal{D}F(X_*) \right)^{-1} = \mathbb{O}_n^T \\ \left( A\mathcal{D}F(X_*) \right) \left( \mathcal{D}F(X_*) \right)^{-1} &\stackrel{\text{асс.}}{=} A \left( \mathcal{D}F(X_*) \right) \left( \mathcal{D}F(X_*) \right)^{-1} = AI = A \end{aligned} \right\} \implies A = \mathbb{O}_n^T$$

При этом,  $A \stackrel{(96)}{=} \left( F(X_*) - Y \right)^T$ , то есть  $F(X_*) - Y = \mathbb{O}_n$

Значит,  $F(X_*) = Y$  и  $Y \in F(S)$  □

**Определение 6.**  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  – открытое,  $M : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$

Будем говорить, что  $M$  – открытое отображение, если

$$\forall \omega \subset \Lambda \quad \omega - \text{откр.} \quad M(\omega) \text{ открытое}$$

(то есть, открытые отображения переводятся в открытые)

Приведём определение непрерывного отображения, которое используется в топологии (частный его случай для евклидова пространства):

**Определение 7.**  $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$  – открытое,  $M : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$

$M$  непрерывно, если прообраз любого открытого множества открыт

**Примечание.** Пустое множество открыто. Если прообраза у какого-то множества нет, то считаем, что прообраз пуст (а значит, открыт)

**Утверждение 8.** Приведённое определение непрерывности эквивалентно определению непрерывности, приведённому во втором семестре

**Доказательство** ( $F$  открыто). Применяем лемму

Докажем, что  $F$  – открытое отображение:

- По условию,  $V = F(U)$ . Докажем, что  $V$  – открытое множество:  
Возьмём  $Y_1 \in F(U)$ . Тогда  $\exists X_1 \in U : F(X_1) = Y_1$   
Возьмём  $0 < \rho < r - \|X_1 - X_0\|$   
Пусть  $S := B_\rho(X_1)$   
Тогда, по шагу 3,

$$B_{\lambda\rho}(Y_1) \subset F\left(B_\rho(X_1)\right) \subset V = F(U)$$

Это и есть определение открытого множества

$$\implies V - \text{откр.}$$

- Возьмём  $\omega \in U$  – открытое. Нужно доказать, что  $F(\omega)$  открыто:  
Возьмём  $Y_2 \in F(\omega)$   
Тогда  $\exists X_2 : F(X_2) = Y_2$   
Поскольку  $X_2 \in \omega$ ,

$$\exists \rho_1 > 0 : B_{\rho_1}(X_2) \subset \omega \subset U$$

Снова применяем шаг 3:

$$B_{\lambda\rho_1}(Y_2) \subset F\left(B_{\rho_1}(X_2)\right) \subset F(\omega)$$

Получили, что некоторый открытый шар полностью содержится в  $F(\omega)$ . Это и есть то, что требовалось доказать

□

## 19. Теорема об обратимом отображении: отображение $\Phi$ дифференцируемо $\forall y \in V$

**Теорема 14.**  $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$ ,  $E$  открыто,  $X_0 \in E$ ,  $F : E \rightarrow \mathbb{R}^1$   
 $F \in \mathcal{C}^1(E)$ , т. е. все координатные функции  $\in \mathcal{C}^1$ ,  $Y_0 = F(X_0)$ ,  $DF(X_0)$  обратима

$$\implies \exists U - \text{окрестность } X_0, V - \text{окрестность } Y_0 : \begin{cases} F|_U \text{ обратимо} \\ F(U) = V \\ \Phi = \left(F|_U\right)^{-1} \implies \Phi \in \mathcal{C}^1(V) \end{cases}$$

**Доказательство** (непрерывность  $\Phi$ ). На втором шаге мы выяснили, что  $F|_U$  – биекция. Для любой биекции можно определить обратное отображение:

$$\exists \Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n : \begin{cases} \Phi(V) = U \\ F(\Phi(Y)) = Y \quad \forall Y \in V \\ \Phi(F(X)) = X \quad \forall X \in U \end{cases}$$

Проверим, что  $\Phi \in \mathcal{C}(V)$ :

По определению из топологии, нужно доказать, что  $\forall \omega \subset U$  – откр. прообраз  $\omega$  открыт  
Напишем определение прообраза  $\omega$  при  $\Phi$ :

$$\omega^{-1} = \{ Y \in V : \Phi(Y) \in \omega \}$$

Если  $F$  – биекция, то и  $\Phi$  – биекция:

$$\Phi(Y) \in \omega \xLeftrightarrow[\text{биективность } \Phi] F(\Phi(Y)) \in F(\omega) \iff Y \in F(\omega)$$

Теперь можно переписать определение прообраза:

$$\omega^{-1} = \{ Y : Y \in F(\omega) \}$$

По шагу 4,  $F(\omega)$  открыто (как образ открытого при открытом отображении)

$\Phi$  дифференцируема в  $Y \quad \forall Y \in V$

Зафиксируем  $K$  такое, что  $Y + K \in V$ ,  $K \neq \mathbb{O}_n$

Обозначим  $\Phi(Y) := X$ ,  $\Phi(Y + K) := X + H$   
 Это эквивалентно тому, что  $Y = F(X)$ ,  $Y + K = F(X + H)$

$$K = Y + K - Y = F(X + H) - F(X) \quad (97)$$

На основании шага 5,

$$K \xrightarrow{H \rightarrow \mathbb{O}_n} \mathbb{O}_n, \quad H \xrightarrow{K \rightarrow \mathbb{O}_n} \mathbb{O}_n$$

Также, по соотношению (81) из шага 2,  $\|F(X + H) - F(X)\| \geq 2\lambda \|H\|$ , то есть

$$\|K\| \geq 2\lambda \|H\| \quad (98)$$

**Напоминание.** По условию,  $\mathcal{D}F(X)$  обратима и

$$\left\| \left( \mathcal{D}F(X) \right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{2\lambda} \quad (99)$$

(это мы выяснили в лемме, при доказательстве соотношения (98))

Обозначим  $B := \left( \mathcal{D}F(X) \right)^{-1}$

$$K = (99) = \mathcal{D}F(X)H + t(H) \quad (100)$$

$$\text{где } \frac{1}{\|H\|} t(H) \xrightarrow{H \rightarrow \mathbb{O}_n} \mathbb{O}_n$$

Домножим (102) на  $B$  слева:

$$\begin{aligned} BK &= B \left( \mathcal{D}F(X)H \right) + Bt(H) \stackrel{\text{def } B}{=} IH + Bt(H) = H + Bt(H) \\ \implies BK - Bt(H) &= H \stackrel{(99)}{=} \Phi(Y + K) - \Phi(Y) \end{aligned} \quad (101)$$

В силу биективности  $F$  и  $\Phi$ ,

$$K \neq \mathbb{O}_n \iff H \neq \mathbb{O}_n$$

$$\text{Значит, можно делить на } \|H\| \quad (102)$$

$$\frac{\|Bt(H)\|_n}{\|K\|_n} \leq \frac{\|B\| \cdot \|t(H)\|_n}{\|K\|_n} \stackrel{(101)}{\leq} \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{\|t(H)\|_n}{\|K\|_n} \stackrel{(104)}{=} \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{\|t(H)\|}{\|H\|} \cdot \frac{\|H\|}{\|K\|} \stackrel{(100)}{\leq} \frac{1}{4\lambda^2} \frac{\|t(H)\|}{\|H\|} \xrightarrow{K \rightarrow \mathbb{O}_n} 0 \quad (103)$$

$$(103), (105) \implies \Phi \text{ дифф. в } Y$$

**Напоминание.** Дифф.  $\Phi$  означает, что

$$\Phi(Y + K) - \Phi(Y) = \mathcal{D}\Phi(Y)K + r(K), \quad \frac{\|r(K)\|}{\|K\|} \xrightarrow{K \rightarrow \mathbb{O}_n} 0$$

(важно, что матрица Якоби единственна)

Значит, кроме дифференцируемости, мы установили, что

$$(103) \implies \mathcal{D}F(Y) = \left( \mathcal{D}F(X) \right)^{-1}, \quad X = \Phi(Y) \quad (104)$$

□

## 20. Теорема об обратимом отображении: $\Phi \in \mathcal{C}^1(V)$

**Теорема 15.**  $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$ ,  $E$  открыто,  $X_0 \in E$ ,  $F : E \rightarrow \mathbb{R}^1$   
 $F \in \mathcal{C}^1(E)$ , т. е. все координатные функции  $\in \mathcal{C}^1$ ,  $Y_0 = F(X_0)$ ,  $DF(X_0)$  обратима

$$\Rightarrow \exists U - \text{окрестность } X_0, V - \text{окрестность } Y_0 : \begin{cases} F|_U \text{ обратимо} \\ F(U) = V \\ \Phi = (F|_U)^{-1} \end{cases} \Rightarrow \Phi \in \mathcal{C}^1(V)$$

**Доказательство** ( $\Phi$  гладкое). Пользуясь формулой (106), запишем матрицу Якоби  $\Phi$  в следующем виде:

$$D\Phi(Y) = \left( DF(\Phi(Y)) \right)^{-1} \quad (105)$$

Из курса алгебры знаем, что обратимы только неособенные матрицы:

$$\det DF(X) \neq 0 \quad \forall X \in U$$

Матрица Якоби состоит из частных производных. Все они непрерывны по условию. Значит,

$$\det DF(X) \in \mathcal{C}(U)$$

Два последних выражения означают, что

$$\frac{1}{\det DF(X)} \in \mathcal{C}(U) \quad (106)$$

В силу шага 5,

$$(108) \Rightarrow \frac{1}{\det DF(\Phi(Y))} \in \mathcal{C}(V) \quad (107)$$

Алгебраические дополнения состоят из сумм и произведений частных производных в точке  $Y$ . Значит, они (дополнения) непрерывны, а значит

$$(107), (109) \Rightarrow DF(Y) \in \mathcal{C}(V) \iff \Phi \in \mathcal{C}^1(V)$$

□

## 21. Теорема об открытом отображении

**Теорема 16.**  $G \subset \mathbb{R}^n$  – открыто,  $F : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $F \in \mathcal{C}^1(G)$ ,  $\det DF(X) \neq 0 \quad \forall X \in G$   
 Тогда  $F$  открыто

**Замечание.** Ничего о взаимной однозначности  $F$  не говорится

**Доказательство.** Пусть  $\omega \subset G$  – открыто

Пусть  $S = F(\omega)$

Нужно доказать, что  $S$  открыто

Возьмём  $\forall Y \in S$

Поскольку  $S$  – это образ  $\omega$ ,

$$\exists X \in \omega : F(X) = Y \quad (X \text{ не обязательно единственный – берём любой})$$

Поскольку  $\omega$  открыто,

$$\exists r_0 > 0 : B_{r_0}(X) \subset \omega$$

Определим  $\lambda$  такое, что

$$\left\| \left( DF(X) \right)^{-1} \right\| = \frac{1}{4\lambda}$$

Возьмём  $r$ , такое что

$$\forall X_1 \in \underbrace{B_r(X)}_{\subset G} \quad \|\mathcal{D}F(X_1) - \mathcal{D}F(X)\| < 2\lambda$$

Возьмём  $0 < \rho < \min(r, r_0)$

Если мы проведём для  $B_\rho(X)$  рассуждения из шага 4, то получим, что

$$F\left(B_\rho(X)\right) \supset B_{\lambda\rho}\left(F(X)\right) = B_{\lambda\rho}(Y)$$

Понятно, что  $B_\rho(X) \subset \omega$

Таким образом,  $B_{\lambda\rho}(Y) \subset F(\omega)$

В силу произвольности  $Y$ , это означает, что  $S$  открыто

□

## 22. Теорема о неявной функции (отображении): линейный вариант

**TODO:** Надо выяснить, где там линейный вариант

## 23. Общий случай теоремы о неявной функции (отображении)

## 24. Вычисление матрицы Якоби отображения, заданного неявно

$$P(Y) = \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}, \quad g \in \mathcal{C}^1(W), \quad P \in \mathcal{C}^1(W)$$

По последнему утверждению из теоремы,

$$\begin{aligned} F\left(P(Y)\right) &= \mathbb{O}_n \quad \forall Y \in W \\ \implies \mathcal{D}\left(F(P(Y))\right) &= \mathbb{O}_{n \times m} \end{aligned}$$

Применим теорему о матрице Якоби суперпозиции:

$$\mathcal{D}F\left(P(Y)\right)\mathcal{D}P(Y) = \mathbb{O}_{n \times m} \quad (108)$$

$$\mathcal{D}P(Y) \stackrel{\text{def } P(Y)}{=} \begin{bmatrix} \mathcal{D}g(Y) \\ I_m \end{bmatrix} \quad (109)$$

Обозначим  $Z := P(Y)$

$$\mathcal{D}F(Z) = \begin{bmatrix} A(Z)B(Z) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{D}F(Z)\mathcal{D}P(Y) \stackrel{(111)}{=} \begin{bmatrix} A(Z)B(Z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{D}g(Y) \\ I_m \end{bmatrix} = A(Z)\mathcal{D}g(Y) + B(Z)I_m = A(Z)\mathcal{D}g(Y) + B(Z) \quad (110)$$

$$\stackrel{(110)}{\implies} A(Z)\mathcal{D}g(Y) + B(Z) = \mathbb{O}_{n \times m} \implies \mathcal{D}g(Y) = -A^{-1}(Z)B(Z)$$

## 25. Определение условного локального экстремума; теорема о множителях Лагранжа

**Определение 8.**  $E \subset \mathbb{R}^{n \geq 2}$ ,  $M \subset E$ ,  $X_0 \in M$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

Говорят, что  $X_0$  – точка локального экстремума  $f$  при условии  $M$ , если  $X_0$  – точка локального экстремума функции  $f|_M$

**Определение 9.**  $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$  – открытое,  $F : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $X_0 \in E$ ,  $f(X_0) = \mathbb{O}_n$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$   
 Говорят, что  $X_0$  – точка локального экстремума  $f$  при условии  $F(X) = \mathbb{O}_n$ , если  $X_0$  – точка локального экстремума  $f$  при условии  $\ker F$

**Теорема 17 (о множителях Лагранжа).**  $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$  – открытое,  $F \in \mathcal{C}^1(E)$   
 $\text{rk } \mathcal{D}F(X) = n \quad \forall X \in E, \quad X_0 \in E : \quad F(X_0) = \mathbb{O}_n$

$$\implies \exists ! \Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \quad \text{для } \varphi(X, \Lambda) := f(X) + \underset{\text{строка}}{\Lambda} \underset{\text{столбец}}{F(X)} \quad \nabla \varphi(X_0, \Lambda) = \underset{\text{строка}}{\mathbb{O}_{n+m}^T} \quad (111)$$

**Замечание.** Числа  $\lambda_i$  называются множителями Лагранжа

**Доказательство.**

- Существование

$$\text{Пусть } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

Запишем матрицу Якоби для  $F$ :

$$\mathcal{D}F(X) = \begin{bmatrix} F'_{1x_1}(X) & \dots & F'_{1x_{n+m}}(X) \\ \vdots & & \vdots \\ F'_{nx_1}(X) & \dots & F'_{nx_{n+m}}(X) \end{bmatrix}$$

По условию, её ранг равен  $n$  при любом  $X$ . НУО считаем, что не равен нулю “верхний левый” минор, в том числе при  $X_0$ :

$$\begin{vmatrix} F'_{1x_1}(X_0) & \dots & F'_{1x_n}(X_0) \\ \vdots & & \vdots \\ F'_{nx_1}(X_0) & \dots & F'_{nx_n}(X_0) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (112)$$

$$\text{Обозначим } X' := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

Определим матрицы  $A$  и  $B$  так же, как в теореме о неявном отображении, то есть так, что

$$\mathcal{D}F(X) = \begin{bmatrix} A(X) & B(X) \end{bmatrix}, \quad \det A(X_0) \neq 0$$

$$\text{Обозначим } X'_0 := \begin{bmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} x_{n+1}^0 \\ \vdots \\ x_{n+m}^0 \end{bmatrix}$$

По теореме о неявном отображении

$$\exists W \ni Y_0, \quad \exists ! g : W \rightarrow \mathbb{R}^n : \quad g \in \mathcal{C}^1(W), \quad F \left( \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix} \right) = \mathbb{O}_n \quad \forall Y \in W \quad (113)$$

Из единственности  $g$  следует, что

$$\exists U \subset E \subset \mathbb{R}^{n+m}, \quad X_0 \in U : \quad \forall X \in U \quad \left( F(X) = \mathbb{O}_n \iff X = \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}, \quad Y \in W \right)$$

$X$  из условия теоремы подходит под правое условие, значит,

$$\varphi(X, \Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} f(X) + \Lambda F(x) = f(X) + \Lambda \mathbb{O}_n = f(X)$$

$$\text{То есть, } X_0 \text{ – т. лок. экстремума функции } \varphi(X, \Lambda) \quad \forall \Lambda \text{ при условии } F(X) = \mathbb{O}_n \quad (114)$$

Возьмём  $Y \in W$   
Рассмотрим функцию

$$h(Y, \Lambda) := \varphi \left( \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}, \Lambda \right) = f \left( \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix} \right) + \Lambda F \left( \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix} \right), \quad Y_0 \in W \quad (115)$$

$$\varphi(X, \Lambda) \stackrel{\text{при } X \in U \text{ и } F(X) = \mathbb{O}_n}{=} h(Y, \Lambda), \quad \text{где } X = \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}$$

Вместе с (116) это означает, что  $Y_0$  – точка локального экстремума  $h(Y)$  (без условий)  
Для  $h$  действует необходимое условие локального экстремума:

$$\nabla h(Y_0, \Lambda) = \mathbb{O}_m^T$$

Рассмотрим теперь  $h$  как отображение в  $\mathbb{R}^1$   
Его градиент будет матрицей Якоби  $n \times 1$ :

$$\mathcal{D}h(Y_0, \Lambda) = \nabla h(Y_0, \Lambda) = \mathbb{O}_m^T \quad (116)$$

Определим отображение  $P(Y) := \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}$

Возьмём  $Y \in W$

$$\begin{aligned} h(Y, \Lambda) &\stackrel{(117)}{=} f \left( P(Y) \right) + \Lambda F \left( P(Y) \right) \\ \implies \mathcal{D}h(Y, \Lambda) &= \mathcal{D} \left( f(P(Y)) \right) + \Lambda \mathcal{D} \left( F(P(Y)) \right) \end{aligned} \quad (117)$$

Вспомним, чему равны матрицы Якоби суперпозиции:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D} \left( f(P(Y)) \right) &= \mathcal{D}f \left( P(Y) \right) \cdot \mathcal{D}P(Y) \\ \mathcal{D} \left( F(P(Y)) \right) &= \mathcal{D}F \left( P(Y) \right) \cdot \mathcal{D}P(Y) \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

При доказательстве теоремы о неявной функции мы получили, что

$$\mathcal{D}P(Y) = \begin{bmatrix} \mathcal{D}g(Y) \\ I_m \end{bmatrix} \quad (119)$$

$$\mathcal{D}F(X_0) = \begin{bmatrix} A(X_0)B(X_0) \end{bmatrix}$$

Подставим  $Y_0$  в (119) и (120):

$$P(Y_0) = X_0$$

Снова будем вместо матрицы Якоби писать градиент:

$$\mathcal{D}f(X_0) = \left( f'_{x_1}(X_0), \dots, f'_{x_{n+m}}(X_0) \right)$$

Запишем его как два градиента:

$$\begin{aligned} \nabla_1 f(X_0) &:= \left( f'_{x_1}(X_0), \dots, f'_{x_n}(X_0) \right), \quad \nabla_2 f(X_0) := \left( f'_{x_{n+1}}(X_0), \dots, f'_{x_{n+m}}(X_0) \right) \\ \mathcal{D}f(X_0) &= \left( \nabla_1 f(X_0), \nabla_2 f(X_0) \right) \end{aligned} \quad (120)$$

$$\begin{aligned}
(120) - (121) &\implies \mathbb{O}_m^T \stackrel{(118)}{=} Dh(Y_0, \Lambda) \stackrel{(119)}{=} \\
&= \underbrace{\left( \nabla_1 f(X_0), \nabla_2 f(X_0) \right)}_{(122)} \begin{bmatrix} \mathcal{D}g(Y_0) \\ I_m \end{bmatrix} + \Lambda \begin{bmatrix} A(X_0)B(X_0) \\ \mathcal{D}g(Y) \\ I_m \end{bmatrix} = \\
&= \nabla_1 f(X_0) \mathcal{D}g(Y_0) + \nabla_2 f(X_0) + \Lambda \left( A(X_0) \mathcal{D}g(Y_0) + B(X_0) \right) = \\
&= \underbrace{\left( \nabla_1 f(X_0) + \Lambda A(X_0) \right)}_{(121)} \mathcal{D}g(Y_0) + \nabla_2 f(X_0) + \Lambda B(X_0)
\end{aligned}$$

Хотим выбрать  $\Lambda$  так, чтобы скобка обратилась в 0:

$$\nabla_1 f(X_0) + \Lambda A(X_0) = \mathbb{O}_m^T$$

$$\Lambda = -\nabla_1 f(X_0) A^{-1}(X_0)$$

При таком  $\Lambda$  выделенная скобка равна 0, а значит из (123) остаётся только

$$\nabla_2 f(X_0) + \Lambda B(X_0) = \mathbb{O}_m^T$$

Вернёмся к полному градиенту:

$$\nabla f(X_0) + \Lambda \begin{bmatrix} A(X_0)B(X_0) \end{bmatrix} = \mathbb{O}_{n+m}^T$$

“Склеивая”  $A$  и  $B$ , получаем

$$\nabla f(X_0) + \Lambda \mathcal{D}F(X_0) = \mathbb{O}_{n+m}^T$$

- Единственность

Возьмём какой-то другой набор  $\Lambda$

$$\nabla_1 f(X_0) + \Lambda A(X_0) = \mathbb{O}_n^T$$

Так мы определяли  $\Lambda$ , а значит она единственна.

□

## 25.1. \_\_\_\_\_

**Теорема 18.**  $\mathbb{R}^{n \geq 1}, \quad \mathbb{R}^{m \geq 1}, \quad \mathbb{R}^{n+m}$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad Z = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$$

$$E \subset \mathbb{R}^{n+m} - \text{откр.}, \quad F : E \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad F \in \mathcal{C}^1(E)$$



$$Z_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \in E \text{ такая, что } \mathbf{F}(Z_0) = \mathbb{O}_n, \quad f_j(Z) = f_j \left( \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \right), \quad \det \mathcal{D}\mathbf{F}(Z_0) \neq 0$$

$$\Rightarrow \exists W(Y_0) \subset \mathbb{R}^n, \quad \exists ! g : W \rightarrow \mathbb{R}^n : \begin{cases} g \in \mathcal{C}^1(W) \\ g(Y_0) = X_0 \\ \forall Y \in W \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix} \in E \\ F \left( \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix} \right) = \mathbb{O}_n \end{cases} \end{cases}$$

**Доказательство.** Выпишем матрицу Якоби для  $F$ :

$$\mathcal{D}F(Z_0) = \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(Z_0) & \dots & f'_{1x_n}(Z_0) & f'_{1y_1}(Z_0) & \dots & f'_{1y_m}(Z_0) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{nx_1}(Z_0) & \dots & f'_{nx_n}(Z_0) & f'_{ny_1}(Z_0) & \dots & f'_{ny_m}(Z_0) \end{bmatrix}$$

1. Построение  $g, W, E$

$$\text{Определим отображение } \Phi(Z) := \begin{bmatrix} F(Z) \\ Y \end{bmatrix}$$

$$\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$$

$$\Phi(Z) = \Phi \left( \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} F \left( \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \right) \\ Y \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \varphi_1(Z) \\ \vdots \\ \varphi_{n+m}(Z) \end{bmatrix}$$

$$\text{Напоминание. } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$\varphi_k \left( \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \right) = \begin{cases} y_{k-n}, & k > n \\ f_k \left( \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \right), & 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

$$\Phi \in \mathcal{C}^1(E)$$

Временно обозначим  $x_{n+k} := y_k$

Напишем матрицу Якоби для  $\Phi$ :

$$\mathcal{D}\Phi \left( \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \right) = \frac{\begin{bmatrix} \varphi'_{1x_1}(Z) & \dots & \varphi'_{1x_{n+m}}(Z) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi'_{n+m x_1}(Z) & \dots & \varphi'_{n+m x_{n+m}}(Z) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \varphi'_{1x_1}(Z) & \dots & \varphi'_{1x_n}(Z) & \varphi'_{1y_1}(Z) & \dots & \dots & \varphi'_{1y_m}(Z) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ f'_{nx_1}(Z) & \dots & f'_{nx_n}(Z) & f'_{ny_1}(Z) & \dots & \dots & f'_{ny_m}(Z) \end{bmatrix}} =$$

$$= \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(Z) & \dots & f'_{1x_n}(Z) & f'_{1y_1}(Z) & \dots & \dots & f'_{1y_m}(Z) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ f'_{nx_1}(Z) & \dots & f'_{nx_n}(Z) & f'_{ny_1}(Z) & \dots & \dots & f'_{ny_m}(Z) \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(черта стоит после  $n$ -го ряда)

Обозначим

$$A(Z) := \begin{bmatrix} f'_{1x_1}(Z) & \dots & f'_{1x_n}(Z) \\ \vdots & & \vdots \\ f'_{nx_1}(Z) & \dots & f'_{nx_n}(Z) \end{bmatrix}, \quad B(Z) := \begin{bmatrix} f'_{1y_1}(Z) & \dots & f'_{1y_m}(Z) \\ \vdots & & \vdots \\ f'_{ny_1}(Z) & \dots & f'_{ny_m}(Z) \end{bmatrix}$$

В этих обозначениях

$$\mathcal{D}F(Z) = \begin{bmatrix} A(Z)B(Z) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{D}\Phi(Z) = \begin{bmatrix} A(Z) & B(Z) \\ \mathbb{O}_{m \times n} & I_m \end{bmatrix}$$

Найдём Якобиан  $\Phi$ :

Раскладывая по последней строке, получаем новую матрицу порядка  $(m-1) \times (n-1)$

Будем так делать, пока внизу стоит  $I_m$  (т. е.  $m$  раз)

Останется  $A(Z)$ :

$$\det \mathcal{D}F(Z) = \det A(Z), \quad \text{в частности, } \det \mathcal{D}F(Z_0) = \det A(Z_0) \neq 0 \text{ по усл.}$$

То есть, матрица Якоби в  $Z_0$  обратима. Значит, к  $\Phi$  можно применить теорему об обратном отображении

Будем верхним индексом к шарам обозначать, в каком пространстве они находятся

$$\exists \mathbb{B}_r^{n+m}(Z_0), \quad V := \Phi\left(\mathbb{B}_r^{n+m}(Z_0)\right), \quad \exists \Psi : V \rightarrow B_r^{n+m}(Z_0), \text{ такое что:}$$

$$\Psi \in \mathcal{C}^1(V)$$

$$\Phi \left( \Psi \left( \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \right) \right) = \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \quad \forall \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \in V, \quad S \in \mathbb{R}^n, \quad T \in \mathbb{R}^m \quad (122)$$

$$\Psi \left( \Phi \left( \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \right) \right) = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad \forall \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \in B_r^{n+m}(Z_0) \quad (123)$$

Обозначим

$$\Psi \left( \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \right) =: \begin{bmatrix} \psi \left( \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \right) \\ \lambda \left( \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \right) \end{bmatrix}$$

(где  $\psi$  задаёт первые  $n$  столбцов, а  $\lambda$  – оставшиеся  $m$ )

$$\Phi \left( \begin{bmatrix} \psi \left( \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \right) \\ \lambda \left( \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \right) \end{bmatrix} \right) \stackrel{\text{def } \Phi}{=} \begin{bmatrix} F \left( \begin{bmatrix} \psi \left( \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \right) \\ \lambda \left( \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \right) \end{bmatrix} \right) \\ \lambda \left( \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \right) \end{bmatrix} \stackrel{(124)}{=} \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \quad (124)$$

$$\implies \lambda \left( \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \right) = T \quad (125)$$

$$\Psi \left( \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \right) \stackrel{\text{def } \Psi, (127)}{=} \begin{bmatrix} \psi \left( \begin{bmatrix} S \\ T \end{bmatrix} \right) \\ T \end{bmatrix} \quad (126)$$

Рассмотрим случай, когда  $S = \mathbb{O}_n$ :

$$\Phi \left( \begin{bmatrix} \psi \left( \begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ T \end{bmatrix} \right) \\ T \end{bmatrix} \right) \stackrel{(128)}{=} \Phi \left( \Psi \left( \begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ T \end{bmatrix} \right) \right) \stackrel{(124)}{=} \begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ T \end{bmatrix}$$

При этом,

$$\Phi \left( \begin{bmatrix} \psi \left( \begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ T \end{bmatrix} \right) \\ T \end{bmatrix} \right) \stackrel{\text{def } \Phi}{=} \begin{bmatrix} F \left( \begin{bmatrix} \psi \left( \begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ T \end{bmatrix} \right) \\ T \end{bmatrix} \right) \\ T \end{bmatrix}$$

Из последних двух выражений следует, что

$$F \left( \left[ \psi \left( \begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ T \end{bmatrix} \right) \right] \right) = \mathbb{O}_n \quad (127)$$

Из того, что  $V$  открытое и  $\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \in V$ , следует, что

$$\exists \rho > 0 : \quad \mathbb{B}_\rho^{n+m} \left( \begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \right) \subset V$$

При этом, если  $Y \in \mathbb{B}_\rho^m(Y_0)$ , то

$$\begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y \end{bmatrix} \in \mathbb{B}_\rho^{n+m} \left( \begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \right)$$

Поэтому (129) выполнено при  $T \in \mathbb{B}_\rho^m(Y_0)$

Вспомним про отображение  $g$  из формулировки теоремы. Оно действует из некоторого  $W$

Возьмём

$$W := \mathbb{B}_\rho^m(Y_0), \quad E := \mathbb{B}_\rho^{n+m} \left( \begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \right), \quad g(Y) := \psi \left( \begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y \end{bmatrix} \right)$$

Тогда мы действительно имеем  $g : W \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$F \left( \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix} \right) \stackrel{\text{def } g}{=} F \left( \left[ \psi \left( \begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y \end{bmatrix} \right) \right] \right) \stackrel{(129)}{=} \mathbb{O}_n$$

2. Теперь надо выяснить, чему равно  $g(Y_0)$

$$\Phi \left( \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \right) = \left[ F \left( \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \right) \right] = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \quad (128)$$

$$\left. \begin{aligned} \Psi \left( \Phi \left( \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \right) \right) &\stackrel{(125)}{=} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \\ \Psi \left( \Phi \left( \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} \right) \right) &\stackrel{(130)}{=} \Psi \left( \begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \right) \stackrel{\text{def } \Psi}{=} \left[ \psi \left( \begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y_0 \end{bmatrix} \right) \right] \stackrel{\text{def } g}{=} \begin{bmatrix} g(Y_0) \\ Y_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(Y_0) = X_0$$

3. Осталось проверить единственность  $g$

**Пусть есть другое**  $g_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{B}_\rho^m(Y_0))$ , такое что

$$g_1(Y_0) = X_0, \quad F \left( \begin{bmatrix} g_1(Y) \\ Y \end{bmatrix} \right) = \mathbb{O}_n$$

$$(125) \Rightarrow \Psi \left( \left[ F \left( \begin{bmatrix} g_1(Y) \\ Y \end{bmatrix} \right) \right] \right) = \begin{bmatrix} g_1(Y) \\ Y \end{bmatrix}$$

При этом,

$$\Psi \left( \begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y \end{bmatrix} \right) = \left[ \psi \left( \begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ Y \end{bmatrix} \right) \right] = \begin{bmatrix} g(Y) \\ Y \end{bmatrix}$$

Правые части равны, а значит, и левые части равны

Значит,  $g_1(Y) = g(Y)$

□

## Часть II

# Функциональные последовательности и ряды

## 26. Определение равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда

**Определение 10.**  $X, d(x, y)$  – метрическое пространство  
 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$  – функции,  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad n = 1, \dots$   
 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$  – функциональная последовательность

**Определение 11.**  $\{v_n(x)\}_{n=1}^\infty$   
Функциональным рядом будем называть символ

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$$

**Определение 12.**  $x_0 \in X$

Будем называть  $x_0$  точкой сходимости последовательности  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ , если

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) \in \mathbb{R}$$

Точку  $x_1 \in X$  будем называть точкой расходимости последовательности  $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ , если предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_1)$  не существует или бесконечен

**Определение 13.** Определим сумму ряда  $\sum v_n(x)$ :

$$S_n(x) = v_1(x) + \dots + v_n(x)$$

Будем называть точку  $x_0 \in X$  точкой сходимости ряда, если существует конечный предел последовательности  $\{S_n(x)\}_{n=1}^\infty$

Аналогично определяется точка расходимости ряда

**Замечание.** Любая точка для фиксированной последовательности или фиксированного ряда является либо точкой сходимости, либо точкой расходимости

**Определение 14.** Множество всех точек сходимости функциональной последовательности или ряда будем называть *множеством сходимости*.

**Обозначение.**  $E_0$

Множество точек расходимости – множеством расходимости

**Обозначение.**  $E_1$

**Замечание.** Какое-то из них может быть пусто. Выполняются соотношения:

$$E_0 \cup E_1 = X, \quad E_0 \cap E_1 = \emptyset$$

**Определение 15.**  $f : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall x \in X \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$

Говорят, что функциональная последовательность **поточечно** сходится к  $f(x)$

**Определение 16.**  $S : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall x \in X \quad S_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S(x)$

Говорят, что функциональный ряд **поточечно** сходится к  $S$

**Замечание.** В этих определениях мы нигде не использовали метрику, так что можно говорить о функциональных последовательностях и рядах на более общих множествах. Однако, нам это не надо

**Определение 17.**  $f_n(x)$  **равномерно** на  $X$  сходится (стремится) к  $f(x)$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

**Обозначение.**  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} f(x)$

**Определение 18.** Будем говорить, что функциональный ряд **равномерно** сходится на  $X$  к сумме  $S(x)$ , если

$$S_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} S(x)$$

Тогда ряду приписывается значение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) := S(x)$$

## 27. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда

**Теорема 19.** Для того чтобы функциональная последовательность **равномерно** сходилась на  $X$  к некоторой функции  $f$ , **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n > N, m > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

**Доказательство.**

- Необходимость

Пусть  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} f(x)$

В таком случае, по определению равномерной сходимости,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Возьмём произвольный  $x \in X$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \xrightarrow[\pm f(x)]{} \left| \left( f_m(x) - f(x) \right) + \left( f(x) - f_n(x) \right) \right| \stackrel{\Delta}{\leq} |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- Достаточность

Фиксируем  $x \in X$

Получаем **числовую** последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$

По критерию Коши для числовых последовательностей, она имеет конечный предел:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$$

То есть, любая точка из  $X$  является точкой сходимости:

$$E_0 = X$$

Получается, что  $f_n(x)$  поточечно сходится к  $f(x)$  на  $X$ :

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x) \tag{129}$$

При фиксированных  $x$  и  $\varepsilon$  имеем

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Фиксируем  $\forall m > N$  и переходим к пределу по  $n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \xRightarrow{(131)} |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Т. к. мы брали  $\forall m > N$  и  $\forall x \in X$ , это и есть определение равномерной сходимости

□

**Теорема 20.** Имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x), \quad x \in X$$

Для того чтобы он **равномерно** сходиллся, **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall m > n > N \quad \forall x \in X \quad \left| \sum_{k=n+1}^m v_k(x) \right| < \varepsilon \quad (130)$$

**Доказательство.** По определению равномерная сходимость функционального ряда означает, что равномерно сходится последовательность  $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$

Применяя к ней критерий Коши, получаем, что для её равномерной сходимости необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall m > n > N \quad \forall x \in X \quad |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$$

Это и есть условие (132)

□

## 28. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов

**Теорема 21.** Имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \quad (131)$$

$$\exists c_n : \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ сходится} \quad (132)$$

$$|v_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in X \quad (133)$$

Тогда ряд (133) сходится **равномерно**

**Доказательство.** Вспомним критерий Коши для числовых рядов:

Возьмём  $\forall \varepsilon > 0$

$$(134) \implies \exists N : \quad \forall m > n > N \quad \sum_{k=n+1}^m c_k < \varepsilon \quad (134)$$

**Примечание.** Мы не ставим модуль, поскольку  $c_k$  положительные

Зафиксируем эти  $m, n, N$  и возьмём  $\forall x \in X$

$$(136) \implies \left| \sum_{k=n+1}^m v_k(x) \right| \stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{k=n+1}^m |v_k(x)| \stackrel{(135)}{\leq} \sum_{k=n+1}^m c_k \stackrel{(136)}{<} \varepsilon$$

Применяем критерий Коши для функционального ряда

□

## 29. Признак Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов

**Теорема 22.** Имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) v_n \quad (135)$$

$$b_n \text{ монотонна по } n \quad \forall \text{ фиксированного } x \in X \quad (136)$$

**Примечание.** Она может возрастать при одних  $x$  и убывать при других

$$b_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} 0 \quad (137)$$

**Примечание.** Имеется в виду функция  $0_X : X \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что  $0_X(x) = 0 \quad \forall x \in X$

$$\exists c > 0 : \quad \forall n \quad \forall x \in X \quad \left| \sum_{k=1}^n v_k(x) \right| \leq c \quad (138)$$

Тогда ряд (137) **равномерно** сходится на  $X$

**Доказательство.** Возьмём  $\forall \varepsilon > 0$

$$(139) \implies \exists N : \quad \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |b_n(x)| < \varepsilon \quad (139)$$

$$\forall m > n \geq 1 \quad \left| \sum_{k=n+1}^m v_k(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^m v_k(x) - \sum_{k=1}^n v_k(x) \right| \leq \sum_{k=1}^m |v_k(x)| - \sum_{k=1}^n |v_k(x)| \stackrel{(140)}{\leq} c + c = 2c \quad (140)$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=n+1}^m b_k(x) v_k(x)$$

Определим

$$V_n(x) := 0$$

$$V_{n+1}(x) := v_{n+1}(x)$$

.....

$$V_l(x) = v_{n+1}(x) + \dots + v_l(x), \quad n+1 < l \leq m$$

Тогда  $v_k(x) = V_k(x) - V_{k-1}(x), \quad k \geq n+1$

Перепишем нашу сумму:

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^m b_k(x) v_k(x) &= \sum_{k=n+1}^m b_k(x) (V_k(x) - V_{k-1}(x)) = \\ &= \sum_{k=n+1}^m b_k(x) V_k(x) - \sum_{k=n+1}^m b_k(x) V_{k-1}(x) \stackrel{\text{во второй сумме заменим } k-1 \text{ на } k}{=} \\ &= \sum_{k=n+1}^m b_k(x) V_k(x) - \sum_{k=n}^{m-1} b_{k+1}(x) V_k(x) \stackrel{V_n \stackrel{\text{def}}{=} 0}{=} b_m(x) V_m(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1} (b_k(x) - b_{k+1}(x)) V_k(x) \end{aligned} \quad (141)$$

$$(142) \implies |V_k(x)| \leq 2c \quad \forall k \quad (142)$$

Возьмём  $N$  из (141),  $m > n > N$  и  $\forall x \in X$

$$\begin{aligned}
 (143) \implies \left| \sum_{k=n+1}^m b_k(x) v_k(x) \right| &\leq |b_m(x)| \cdot |V_m(x)| + \sum_{k=n+1}^{m-1} |b_k(x) - b_{k+1}(x)| \cdot |V_k(x)| < \\
 < \varepsilon \cdot 2c + 2c \sum_{k=n+1}^{m-1} |b_k(x) - b_{k+1}(x)| &\stackrel{(138)}{=} 2c\varepsilon + 2c \left| \sum_{k=n+1}^{m-1} (b_k(x) - b_{k+1}(x)) \right| = 2c\varepsilon + 2c|b_{n+1}(x) - b_m(x)| \leq \\
 &\leq 2c\varepsilon + 2c \left( \underbrace{|b_{n+1}(x)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|b_m(x)|}_{< \varepsilon} \right) < 6c\varepsilon
 \end{aligned}$$

Можно применить критерий Коши

□

## 30. Признак Абеля равномерной сходимости функциональных рядов

**Теорема 23.** Имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) v_n(x) \quad (143)$$

$$b_n(x) \text{ монотонна по } n \quad \forall x \in X \quad (144)$$

$$\exists c > 0 : \quad |b_n(x)| \leq c \quad \forall n \quad \forall x \in X \quad (145)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \text{ равномерно сходится на } X \quad (146)$$

$$\implies \text{ряд (149) равномерно сходится} \quad (147)$$

**Доказательство.** Применим необходимую часть критерия Коши к условию (148):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall m > n > N \quad \forall x \in X \quad \left| \sum_{k=n+1}^m v_k(x) \right| < \varepsilon \quad (148)$$

Возьмём какое-нибудь  $m_0 > n > N$

Соотношение (150) действует при  $m = n + 1, \dots, m_0$

Определим функции  $V_k(x)$  так же, как в доказательстве признака Дирихле

Там было доказано, что

$$\sum_{k=1}^{m_0} b_k(s) v_k(x) = \sum_{k=n+1}^{m_0-1} V_k(x) (b_k(x) - b_{k+1}(x)) + b_{m_0}(x) V_{m_0}(x) \quad (149)$$

$$\begin{aligned}
 (151), (150) \implies \left| \sum_{k=n+1}^{m_0} b_k(x) v_k(x) \right| &\leq \left| \sum_{k=n+1}^{m_0-1} V_k(x) (b_k(x) - b_{k+1}(x)) \right| + |b_{m_0}(x)| \cdot |V_{m_0}(x)| \leq \\
 &\leq \sum_{k=n+1}^{m_0-1} |V_k(x)| \cdot |b_k(x) - b_{k+1}(x)| + |b_{m_0}(x) V_{m_0}(x)| \leq \underbrace{|b_{m_0}(x)|}_{\leq c} \varepsilon + \varepsilon \sum_{k=n+1}^{m_0-1} |b_k(x) - b_{k+1}(x)| \leq \\
 &\leq c\varepsilon + \varepsilon \left| \sum_{k=n+1}^{m_0-1} (b_k(x) - b_{k+1}(x)) \right| = c\varepsilon + \varepsilon |b_{n+1}(x) - b_{m_0}(x)| \leq 3c\varepsilon \implies (149)
 \end{aligned}$$

□



### 31. Теорема о переходе к пределу в равномерно сходящейся функциональной последовательности

**Теорема 24.**  $X, d(x, y)$  – метрическое пространство,  $x_0 \in X$  – точка сгущения  $X$   
 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ ,  $f_n : X \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : X \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X \setminus \{x_0\}} f(x) \quad (150)$$

$$\forall x \in X \setminus \{x_0\} \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = a_n \quad (151)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (152)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \end{array} \right. \quad (153)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \end{array} \right. \quad (154)$$

**Доказательство.** Применим критерий Коши к (152):

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall m, n > N \quad \forall x \in X \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (155)$$

Зафиксируем всё, кроме  $x$ , а  $x$  устремим к  $x_0$ :

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad (156)$$

$$\xrightarrow{\lim_{s \rightarrow \infty} eq:42} |a_m - a_n| \leq \varepsilon \quad (157)$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$$

(154) доказано

Докажем (156) (из него будет следовать (155)):

Возьмём  $\forall \varepsilon > 0$

Выберем  $N_1$  такое, что

$$\forall n > N_1 \quad \forall x \in X \setminus \{x_0\} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (158)$$

Выберем  $N_2$  такое, что

$$\forall n > N_2 \quad |a_n - A| < \varepsilon \quad (159)$$

Выберем  $N_0 := \max \{N_1, N_2\} + 1$

**Замечание.**  $N_1, N_2, N_0$  зависят от  $\varepsilon$

Выберем  $\delta > 0$  такое, что

$$\forall y \in X \setminus \{x_0\} \quad \left( d(y, x_0) < \delta \Rightarrow |f_{N_0}(y) - A_{N_0}| < \varepsilon \right) \quad (160)$$

**Замечание.**  $\delta$  зависит **только** от  $\varepsilon$

$$f(y) - A \xrightarrow[\pm a_{N_0}]{\pm f_{N_0}(y)} f(y) - f_{N_0}(y) + f_{N_0}(y) - a_{N_0} + a_{N_0} - A$$

$$\Rightarrow |f(y) - A| \stackrel{\Delta}{\leq} \underbrace{|f(y) - f_{N_0}(y)|}_{\substack{< \varepsilon \\ (152)}} + \underbrace{|f_{N_0}(y) - a_{N_0}|}_{\substack{< \varepsilon \\ (162)}} + \underbrace{|a_{N_0} - A|}_{\substack{< \varepsilon \\ (161)}} < 3\varepsilon \Rightarrow (156)$$

□

## 32. Теорема о непрерывности в точке предела равномерно сходящейся функциональной последовательности и суммы равномерно сходящегося функционального ряда

**Следствие** (о непрерывности предельной функции равномерно сходящейся функциональной последовательности).  $X, \quad x_0 \in X, \quad f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} f(x) \quad (161)$$

$$f_n(x) \text{ непрерывна в } x_0 \quad \forall n \quad (162)$$

$$\implies f(x) \text{ непрерывна в } x_0 \quad \forall n \quad (163)$$

**Доказательство.** (164) означает, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \underbrace{f_n(x_0)}_{a_n} \in \mathbb{R}$$

То есть, выполнено второе условие из теоремы

$$(163) \implies f_n(x_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x_0) \quad (164)$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) \stackrel{(166)}{=} f(x_0)$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = f(x_0)$$

□

**Следствие.**  $X$  всюду плотно (т. е. все точки  $X$  являются точками сгущения)

$$f_n \in \mathcal{C}(X), \quad f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X} f(x)$$

$$\implies f \in \mathcal{C}(X)$$

**Теорема 25.**  $X$  – метрическое пространство,  $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , имеется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) = S(x) \quad (165)$$

$$1. \quad x_0 \in X \text{ – точка сгущения,} \quad (167) \text{ сходится равномерно на } X \setminus \{x_0\}, \quad \forall n \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} v_n(x) = c_n$$

$$\implies \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ сходится} \\ \exists \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) \end{cases}$$

$$2. \quad (167) \text{ сходится равномерно на всём } X, \quad v_n \text{ непр. в } x_0 \quad \forall n$$

$$\implies S(x) \text{ непр. в } x_0$$

$$3. \quad X \text{ всюду плотно,} \quad (167) \text{ сходится равномерно на всём } X, \quad v_n \in \mathcal{C}(X) \quad \forall n$$

$$\implies S \in \mathcal{C}(X)$$

**Доказательство.**  $S_n(x) = v_1(x) + \dots + v_n(x)$

Равномерная сходимость ряда (167) по определению означает, что

$$S_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in X \setminus \{x_0\}} S(x)$$

Применима аналогичная теорема для функциональных последовательностей  $\square$

### 33. Интегрирование равномерно сходящейся функциональной последовательности и равномерно сходящегося функционального ряда

**Теорема 26.**  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $f_n \in \mathcal{C}([a, b])$ ,  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in [a, b]} f(x)$

**Замечание.** В таком случае  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ , а значит  $f \in \mathcal{R}[a, b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f_n(x) dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_a^b f(x) dx$$

**Доказательство.** Равномерная сходимость означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n > N \quad \forall x \in [a, b] \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (166)$$

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \stackrel{(168)}{=} \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a)$$

Это и есть определение сходимости требуемой числовой последовательности  $\square$

**Теорема 27 (интегрирование функционального ряда).**  $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $v_n \in \mathcal{C}([a, b])$   
 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$  равномерно сходится на  $[a, b]$

$$\Rightarrow \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b v_n(x) dx$$

**Доказательство.** Обозначим

$$c_n := \int_a^b v_n(x) dx, \quad B_n := c_1 + \dots + c_n, \quad S_n(x) := v_1(x) + \dots + v_n(x), \quad S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$$

По определению равномерной сходимости ряда,

$$S_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in [a, b]} S(x)$$

Отсюда, по только что доказанной теореме,

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b S_n(x) dx &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_a^b S(x) dx \\ \int_a^b S_n(x) dx &= \int_a^b (v_1(x) + \dots + v_n(x)) dx = B_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow B_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_a^b S(x) dx$$

$\square$

### 34. Дифференцирование равномерно сходящейся функциональной последовательности и равномерно сходящегося функционально сходящегося функционального ряда

**Теорема 28.**  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $f_n \in \mathcal{C}([a, b])$ ,  $\forall n$

$$\forall x \in [a, b] \quad \exists f'_n(x) \quad (167)$$

**Примечание.** Непрерывность можно было бы не указывать – она следует из существования производной

$$\exists \varphi(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \quad f'_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in [a, b]} \varphi(x) \quad (168)$$

$$\exists x_0 \in [a, b] : \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) \in \mathbb{R} \quad (169)$$

$$\implies \exists f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \quad \begin{cases} f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in [a, b]} f(x) \\ \forall x \in [a, b] \quad \exists f'(x) \\ f'(x) = \varphi(x) \end{cases} \quad (170)$$

$$(171)$$

$$(172)$$

**Доказательство.**

- Возьмём  $m \neq n$

Определим функции:

$$P_{mn}(x) := f_m(x) - f_n(x) \quad (169) \implies \exists P'_{mn}(x) = f'_m(x) - f'_n(x) \quad (173)$$

Значит, к  $P_{mn}$  можно применить теорему Лагранжа:

$$\forall x \in [a, b] : x \neq x_0 \quad \exists c \in (x \text{ и } x_0) : \quad P_{mn}(x) - P_{mn}(x_0) = P'_{mn}(c)(x - x_0) \xrightarrow{(175)} = \left( f'_m(c) - f'_n(c) \right)(x - x_0) \quad (174)$$

К функциональной последовательности производных применим необходимую часть критерия Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 : \quad \forall m > n > N_1 \quad \forall x \in [a, b] \quad |f'_m(x) - f'_n(x)| < \varepsilon \quad (175)$$

$$\xrightarrow{(176)} \forall m > n > N_1 \quad \forall x \in [a, b], x \neq x_0 \quad |P_{mn}(x) - P_{mn}(x_0)| = |f'_m(c) - f'_n(c)| \cdot |x - x_0| < \varepsilon(b - a) \quad (176)$$

По условию (171) мы можем применить критерий Коши к  $f_n(x_0)$ :

$$\exists N_2 : \quad \forall m > n > N_2 \quad |f_m(x_0) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

Применим обозначение  $P_{mn}$ :

$$\forall m > n > N_2 \quad |P_{mn}(x_0)| < \varepsilon \quad (177)$$

Пусть  $N := \max \{ N_1, N_2 \}$ . При  $m > n > N$  действуют и (178), и (179):

$$\forall x \in [a, b], x \neq x_0 \quad |P_{mn}(x)| = |P_{mn}(x) - P_{mn}(x_0) + P_{mn}(x_0)| \stackrel{\Delta}{\leq} |P_{mn}(x) - P_{mn}(x_0)| + |P_{mn}(x_0)| < (b - a)\varepsilon + \varepsilon = (b - a + 1)\varepsilon$$

При  $x = x_0$  это тоже верно (т. к. у нас есть (179)), т. е.

$$\forall x \in [a, b] \quad |f_m(x) - f_n(x)| < (b - a + 1)\varepsilon$$

Значит, к функциональной последовательности  $f_n(x)$  можно применить критерий Коши:

$$\implies f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in [a, b]} f(x) \quad (178)$$

$$f_n \in \mathcal{C}([a, b]) \implies f \in \mathcal{C}([a, b])$$

- Фиксируем произвольный  $x \in [a, b]$   
Рассмотрим

$$\begin{aligned} g_n : [a, b] \setminus \{x\} : \quad g_n(y) &:= \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x}, \quad g : [a, b] \setminus \{x\} : \quad g(y) := \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \\ g_m(y) - g_n(y) &= \frac{f_m(y) - f_m(x) - (f_n(y) - f_n(x))}{y - x} = \frac{(f_m(y) - f_n(y)) - (f_m(x) - f_n(x))}{y - x} = \\ &= \frac{P_{mn}(y) - P_{mn}(x)}{y - x} \end{aligned} \quad (179)$$

Применим теорему Лагранжа:

$$\exists c_1 \in (y \setminus x) : \quad P_{mn}(y) - P_{mn}(x) = P'_{mn}(c_1)(y - x)$$

Подставим в (181):

$$g_m(y) - g_n(y) = P'_{mn}(c_1) \quad (180)$$

$$P'_{mn}(c_1) \stackrel{(175)}{=} f'_m(c_1) - f'_n(c_1)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 : \quad \text{выполнено (177)}$$

$$\stackrel{(182)}{\implies} \forall y \in [a, b] \setminus \{x\} \quad \forall m > n > N_1 \quad |g_m(y) - g_n(y)| < \varepsilon |y - x| \leq \varepsilon(b - a) \quad (181)$$

Применим критерий Коши:

$$\exists h : [a, b] \setminus \{x\} : \quad g_n(y) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{y \in [a, b] \setminus \{x\}} h(y) \quad (182)$$

Зафиксируем  $y \in [a, b] \setminus \{x\}$  и рассмотрим числовую последовательность:

$$\implies g_n(y) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} h(y) \quad (183)$$

$$g_n(y) \stackrel{\text{def } g_n}{=} \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x}$$

$$(180) \implies \begin{cases} f_n(y) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(y) \\ f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x) \end{cases} \quad (184)$$

$$(186) \implies g_n(y) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad (185)$$

$$(185), (187) \implies h(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad (186)$$

$$(184), (188) \implies \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{y \in [a, b] \setminus \{x\}} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad (187)$$

Вспомним, как мы определяли  $g_n(y)$  и  $g(y)$ :

$$\begin{aligned} &\implies g_n(y) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{y \in [a, b] \setminus \{x\}} g(y) \\ (169) \quad &\stackrel{\text{def } g_n}{\iff} \forall n \quad \exists \lim_{y \rightarrow x} g_n(y) = f'_n(x) \end{aligned} \quad (188)$$

К последним двум выражениям можно применить теорему о предельном переходе в функциональной последовательности:

$$\exists \lim_{y \rightarrow x} g(y) = A, \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad (189)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad (190)$$

$$(191) \stackrel{\text{def } g(y)}{\implies} \exists \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x) = A$$

$$\left. \begin{aligned} (191), (192) &\implies \exists f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \\ (170) &\implies \text{ для фиксированного } x \in [a, b] \quad f'_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi(x) \end{aligned} \right\} \implies \varphi(x) = f'(x)$$

□

У этой теоремы имеется вариант для функциональных рядов:

**Теорема 29** (о производной функционального ряда).  $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \quad v_n \in \mathcal{C}([a, b])$   
 $\forall x \in [a, b] \quad \exists v'_n(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v'_n(x) \text{ равномерно сходится на } [a, b] \quad (191)$$

$$\exists x_0 \in [a, b] : \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x_0) \text{ сходится} \quad (192)$$

$$\implies \left\{ \begin{aligned} &\forall x \in [a, b] \quad \exists \left( \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \right)' \\ &\left( \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} v'_n(x) \end{aligned} \right.$$

**Доказательство.** Рассмотрим частичные суммы:

$$S_n(x) = v_1(x) + \dots + v_n(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad \forall n$$

$$\exists S'_n(x) = v'_1(x) + \dots + v'_n(x)$$

$$(193) \implies \exists \varphi(x) : \quad S'_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$$

$$(194) \implies S_n(x_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A \in \mathbb{R}$$

К функциональной последовательности частичных сумм можно применить только что доказанную теорему □

## 35. Пример Ван дер Вардена

**Теорема 30.**  $\exists f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \nexists f'(x)$

**Доказательство** (построение ван дер Вардена). Рассмотрим функцию  $\varphi(x) := 1 - |x - 1|$  при  $x \in [0, 2]$  (рис. 3а)

При  $x \in [2k, 2k + 2]$ , где  $k \neq 0 \in \mathbb{Z}$ , полагаем  $\varphi(x) := \varphi(x - 2k)$  (рис. 3b)

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x) \quad (193)$$

- Проверим непрерывность  $f(x)$ :  
Воспользуемся признаком Вейерштрасса:

**Очевидно, что.**  $\varphi(4^n x) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$

При этом,  $0 \leq \varphi(x) \leq 1$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n |\varphi(4^n x)| = \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 4$$

Значит, ряд (195) равномерно сходится на  $\mathbb{R}$

Значит, и его сумма непрерывна

- Докажем, что производной не существует:  
Доказывать будем **от противного**. Пусть есть точка, в которой существует производная:

$$\exists x \in \mathbb{R} : \quad \exists f'(x) \quad (194)$$

Это эквивалентно тому, что она дифференцируема в этой точке:

$$f(y) - f(x) = f'(x)(y - x) + r(y) \quad (195)$$

$$\text{где } \frac{|r(y)|}{|y - x|} \xrightarrow{y \in x} 0 \quad (196)$$

$$(198) \stackrel{\text{def}}{\implies} \exists \delta > 0 : \quad \forall y \in [x - \delta, x + \delta] \quad \frac{|r(y)|}{|y - x|} \leq 1 \quad (197)$$

$$\begin{aligned} (197), (199) \implies \forall y \in [x - \delta, x + \delta] \quad |f(y) - f(x)| &\leq |f'(x)| \cdot |y - x| + |r(y)| \leq \\ &\leq \underbrace{(|f'(x)| + 1)}_{=: A} |y - x| = A|y - x| \end{aligned} \quad (198)$$

Рассмотрим  $x - \delta \leq y_1 \leq x \leq y_2 \leq x + \delta$

$$(200) \implies |f(y_2) - f(x)| \leq A(y_2 - x) \quad (199)$$

$$(200) \implies |f(x) - f(y_1)| \leq A(x - y_1) \quad (200)$$

$$\begin{aligned} (201), (202) \implies |f(y_2) - f(y_1)| &= \left| \left( f(y_2) - f(x) \right) + \left( f(x) - f(y_1) \right) \right| \stackrel{\triangle}{\leq} \\ &\leq |f(y_2) - f(x)| + |f(x) - f(y_1)| \leq A(y_2 - x) + A(x - y_1) = A(y_2 - y_1) \end{aligned}$$

Выберем  $m \geq 1$  так, что

$$4^m > \frac{1}{\delta}$$

Рассмотрим число  $4^m x$

Так как это какое-то конкретное вещественное число, то

$$\exists k \in \mathbb{Z}: \quad k \leq 4^m x < k + 1$$

$$\implies \underbrace{k \cdot 4^{-m}}_{=: a_m} \leq x < \underbrace{(k + 1) \cdot 4^{-m}}_{=: b_m} \quad (201)$$

$$b_m - a_m \stackrel{\text{def}}{=} 4^{-m} \quad (202)$$

– Возьмём  $n > m$

$$4^n x = 4^{n-m} \cdot 4^m x$$

(это справедливо для любого  $n$ )

Рассмотрим числа  $4^n a_m$  и  $4^n b_m$

$$\begin{aligned} 4^n a_m &= 4^{n-m} \cdot 4^m a_m = 4^{n-m} \cdot k \\ 4^n b_m &= 4^{n-m} \cdot 4^m b_m = 4^{n-m} (k + 1) = \underbrace{4^{n-m} k}_{4^n a_m} + \underbrace{4^{n-m}}_{\text{чётное}} \\ \implies \varphi(4^n b_m) &= \varphi(4^n a_m + \text{чётное}) = \varphi(4^n a_m) \end{aligned} \quad (203)$$

(т. к. у функции  $\varphi$  период 2)

– Если  $n = m$

$$\begin{aligned} 4^m a_m &= k, \quad 4^m b_m = k + 1 \\ \varphi(4^m b_m) - \varphi(4^m a_m) &= \varphi(k + 1) - \varphi(k) \end{aligned} \quad (204)$$

Посмотрев на график  $\varphi$ , видим, что для всякого целого  $k$

$$|\varphi(k + 1) - \varphi(k)| = 1 \quad (205)$$

– Пусть  $0 < n < m$

$$4^n b_m - 4^n a_m = 4^{n-m} 4^m (b_m - a_m) = 4^{n-m} \quad (206)$$

Запишем некоторые свойства  $\varphi(x)$ , которые видно из графика, но можно доказать и аналитически:

$$\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad |\varphi(y_2) - \varphi(y_1)| \leq |y_2 - y_1| \quad (207)$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} f(b_m) - f(a_m) &\stackrel{\text{def } f}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n b_m) - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n a_m) = \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\varphi(4^n b_m) - \varphi(4^n a_m)\right) + \left(\frac{3}{4}\right)^m \left(\varphi(4^m b_m) - \varphi(4^m a_m)\right) + \\ &\quad + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \underbrace{\left(\varphi(4^n b_m) - \varphi(4^n a_m)\right)}_{=0 \text{ по (205)}} = \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^m \left(\varphi(4^m b_m) - \varphi(4^m a_m)\right) + \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\varphi(4^n b_m) - \varphi(4^n a_m)\right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\Rightarrow |f(b_m) - f(a_m)| \geq \\
&\geq \left(\frac{3}{4}\right)^m |\varphi(4^m b_m) - \varphi(4^m a_m)| - \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n |\varphi(4^n b_m) - \varphi(4^n a_m)| \stackrel{(206), (209)}{\geq} \\
&\geq \left(\frac{3}{4}\right)^m |\varphi(k+1) - \varphi(k)| - \sum_{n=0}^{m-1} |4^n b_m - 4^n a_m| \stackrel{(207), (208)}{=} \left(\frac{3}{4}\right)^m \cdot 1 - \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 4^{n-m} = \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^m - 4^{-m} \sum_{n=0}^{m-1} 3^n \stackrel{\text{геом. прогр.}}{=} \left(\frac{3}{4}\right)^m - 4^{-m} \cdot \frac{3^m - 1}{3 - 1} > \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^m \quad (208)
\end{aligned}$$

При этом,  $a_m \leq x < b_m$ , поэтому

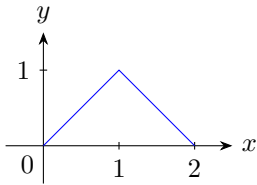
$$|f(b_m) - f(a_m)| \stackrel{(200)}{\leq} A(b_m - a_m) \stackrel{(204)}{=} A \cdot 4^{-m}$$

$$\stackrel{(210)}{\Rightarrow} 4^{-m} > \frac{1}{2} \cdot 3^m \cdot 4^{-m} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot 3^m < A$$

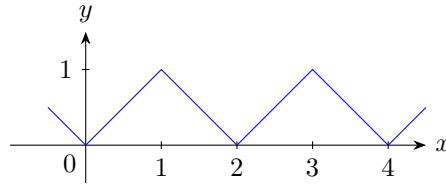
При этом,  $A$  не зависит от  $m$ , а условие на  $m$  позволяет нам брать произвольно большие  $m$ , в том числе такое, что

$$\frac{1}{2} \cdot 3^m > A - \frac{1}{2}$$

□



(a) Шаг 1



(b) Шаг 2

## 36. Определение равномерной сходимости семейства функций; критерий Коши равномерной сходимости семейства функций

**Определение 19.**  $E \neq \emptyset$  – произвольное множество,  $Y \subset \mathbb{R}^{n \geq 1}$   
 Функции  $f : E \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  будем называть семейством функций, заданных на  $E$

**Обозначение.**  $f(x, y), \quad x \in E, \quad y \in Y$

**Пример.** Функциональная последовательность  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  является частным случаем семейства функций при  $Y = \mathbb{N}$

**Определение 20.**  $y_0$  – т. сг.  $Y$ ,  $f : E \times Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_0 : E \rightarrow \mathbb{R}$   
 Будем говорить, что семейство функций **равномерно** сходится к  $f_0$  при  $y \rightarrow y_0$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ окрест. } U(y_0) : \quad \forall x \in E \quad \forall y \in \left( U(y_0) \cap Y \right) \setminus \{y_0\} \quad |f(x, y) - f_0(x)| < \varepsilon \quad (209)$$

**Обозначение.**  $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{x \in E} f_0(x)$

**Теорема 31** (Критерий Коши равномерной сходимости семейства функций).  $f : E \times Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_0$  – т. сг.  $Y$

Для того, чтобы семейство функций равномерно сходилось к некоторой функции  $f_0$  **необходимо и**

достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ окрест. } U(y_0) : \quad \forall y_1, y_2 \in \left( U(y_0) \cap Y \right) \setminus \{ y_0 \} \quad \forall x \in E \quad |f(x, y_2) - f(x, y_1)| < \varepsilon \quad (210)$$

**Доказательство.**

- Необходимость:

Пусть семейство функций  $f : E \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  равномерно сходится к  $f_0$  при  $y \rightarrow y_0$

По определению это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ окр. } U(y_0) : \quad \forall y_1, y_2 \in \left( U(y_0) \cap Y \right) \setminus \{ y_0 \} \quad |f(x, y_1, 2) - f_0(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \stackrel{\Delta}{\leq} |f(x, y_2) - f_0(x)| + |f_0(x) - f(x, y_1)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- Достаточность

Фиксируем  $x \in E$

Применяя критерий Коши к функции одного аргумента  $f(x, y)$ , получаем, что  $\exists \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) := f_0(x)$

Возьмём  $\forall \varepsilon > 0$ , выберем окрестность  $U(y_0)$

Возьмём  $\forall y_1, y_2 \in (U(y_0) \cap Y) \setminus \{ x_0 \}$  и зафиксируем  $y_1$

$$\lim_{y_2 \rightarrow y_0} |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq \varepsilon$$

$$|f_0(x) - f(x, y_1)| \stackrel{\text{def } f_0}{=} \left| \lim_{y_2 \rightarrow y_0} \left( f(x, y_2) - f(x, y_1) \right) \right| \stackrel{\text{непр. } |\cdot|}{=} \lim_{y_2 \rightarrow y_0} |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq \varepsilon$$

Значит,  $f(x, y)$  равномерно сходится к  $f_0(x)$  при  $y \rightarrow y_0$

□

## 37. Теорема о переходе к пределу в равномерно сходящемся семействе функций

**Теорема 32.**  $f : E \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Y \subset \mathbb{R}^{n \geq 1}$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  – т. сг.  $Y$

$$f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{x \in E} f_0(x) \quad (211)$$

$E, d(x_1, x_2)$  – метрическое пространство,  $x_0 \in E$  – т. сг.  $E$

$$\forall y \in Y \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y)$$

Тогда  $\exists \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y)$  и  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_0(x)$  и справедливо

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_0(x) \quad (212)$$

**Доказательство.** Возьмём любую последовательность  $\{ y_n \}_{n=1}^{\infty}$ ,  $y_n \in Y$ ,  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y_0$

Положим  $f_n(x) := f(x, y_n)$

$$f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{x \in E} f_0(x) \implies f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in E} f_0(x) \quad (213)$$

При этом, по условию теоремы для любого  $n$  имеем

$$\varphi(y_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_n) \stackrel{\text{def } f_n}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \quad (214)$$

Значит, можно применить теорему о переходе к пределу в равномерно сходящейся функциональной последовательности:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(y_n) \in \mathbb{R}, \quad \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_0(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(y_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_0(x)$$

В силу произвольности  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  и условий, наложенных на  $y_n$  в начале, последнее утверждение доказывает теорему  $\square$

### 38. Непрерывность предельной функции равномерно сходящегося семейства функций

**Теорема 33.**  $E, d$  – метрическое пространство,  $x_0 \in E$  – т. сг.,  $y_0$  – т. сг.  $Y \subset \mathbb{R}^n$

$$f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{x \in E} f_0(x), \quad \forall y \in Y \quad f(x, y) \text{ непр. в } x_0$$

Тогда  $f_0(x)$  непр. в  $x_0$

**Доказательство.** Применим предыдущую теорему:

По условию имеем  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) := \varphi(y) \quad \forall y \in Y$ , при этом  $\varphi(y) = f(x_0, y)$

По предыдущей теореме  $\exists \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y)$  и  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_0(x)$  и тогда

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_0(x)$$

Но  $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y) = f_0(x_0)$ , что и даёт непрерывность  $f_0$  в  $x_0$   $\square$

**Следствие.**  $f : E \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{x \in E} f_0(x)$ ,  $\forall y \in Y \quad f(x, y) \in \mathcal{C}(E)$

$$\implies f_0 \in \mathcal{C}(E)$$

### 39. Теорема о непрерывности интеграла, зависящего от параметра

**Теорема 34.**  $y_0$  – т. сг.  $Y$ ,  $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{x \in [a, b]} f_0(x)$

Тогда  $f_0 \in \mathcal{C}([a, b])$  и

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) \, dx \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \int_a^b f_0(x) \, dx \quad (215)$$

**Доказательство.** Непрерывность  $f_0$  следует из следствия к предыдущей теореме, поэтому интеграл в правой части (217) определён

По определению равномерной сходимости,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U(y_0) : \quad \forall y \in \left( U(y_0) \cap Y \right) \setminus \{y_0\} \quad |f(x, y) - f_0(x)| < \varepsilon$$

При таких  $y$  имеем

$$|I(y) - \int_a^b f_0(x) \, dx| = \left| \int_a^b (f(x, y) - f_0(x)) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y) - f_0(x)| \, dx \leq \int_a^b \varepsilon \, dx = \varepsilon(b - a)$$

$\square$

**Следствие.**  $Y = [p, q]$ ,  $f : [a, b] \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{C}([a, b] \times Y)$

$$\implies I(y) \in \mathcal{C}([p, q])$$

## 40. Теорема о производной интеграла, зависящего от параметра

**Теорема 35.**  $f : [a, b] \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Y = [p, q]$ ,  $f \in \mathcal{C}([a, b] \times Y)$

$$\forall (x, y) \in [a, b] \times Y \quad \exists f'_y(x, y), \quad f'_y(x, y) \in \mathcal{C}([a, b] \times Y)$$

$$\implies \forall y \in [p, q] \quad \exists I'(y), \quad I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) \, dx$$

**Доказательство.** Поскольку  $f'_y$  непрерывна, к ней применима теорема Кантора:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) : \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} < \delta \quad |f'_y(x_2, y_2) - f'_y(x_1, y_1)| < \varepsilon$$

Пусть  $0 < |h| < \delta$ , тогда

$$\exists c \in (y, y+h) : \quad f(x, y+h) - f(x, y) = f'_y(x, c)h$$

$$f(x, y+h) - f(x, y) = f'_y(x, y)h + \left( f'_y(x, c) - f'_y(x, y) \right)h := f'_y(x, y)h + r_h(x, y)h, \quad |r_h(x, y)| < \varepsilon \quad (216)$$

$$\begin{aligned} I(y+h) - I(y) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \left( f(x, y+h) - f(x, y) \right) \, dx \stackrel{(218)}{=} \\ &= \int_a^b f'_y(x, y)h \, dx + \int_a^b r_h(x, y)h \, dx = h \int_a^b f'_y(x, y) \, dx + h \int_a^b r_h(x, y) \, dx \\ \left| h \int_a^b r_h(x, y) \, dx \right| &\leq |h| \int_a^b |r_h(x, y)| \, dx \leq |h| \int_a^b \varepsilon \, dx = |h|\varepsilon(b-a) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $I(y)$  дифференцируема в  $y$  и выполнено утверждение теоремы  $\square$

## 41. Теорема об интегрировании по параметру интеграла, зависящего от параметра

**Теорема 36.**  $f \in \mathcal{C}([a, b] \times [p, q])$ ,  $I(y) := \int_a^b f(x, y) \, dx$ ,  $K(x) := \int_p^q f(x, y) \, dy$

$$\implies \int_p^q I(y) \, dy = \int_a^b K(x) \, dx$$

**Доказательство.** По теореме о непрерывности интеграла,  $I(y) \in \mathcal{C}([a, b])$

Положим

$$\varphi(y_0) := \int_p^{y_0} I(y) \, dy, \quad v(y) := \int_a^b l(x, y_0) \, dx, \quad l(x, y_0) := \int_p^{y_0} f(x, y) \, dy$$

$\varphi \in \mathcal{C}([p, q])$ , поскольку  $I(y) \in \mathcal{C}([p, q])$

Поскольку  $f \in \mathcal{C}([a, b] \times [p, q])$ , то она ограничена (по первой теореме Вейерштрасса), т. е.

$$\exists M : \quad \forall (x, y) \in [a, b] \times [p, q] \quad |f(x, y)| \leq M$$

Поэтому при  $y_1, y_2 \in [p, q]$  имеем

$$\begin{aligned} |f(x, y_2) - l(x, y_1)| &= \left| \int_p^{y_2} f(x, y) \, dy - \int_p^{y_1} f(x, y) \, dy \right| = \left| \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) \, dy \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{y_1}^{y_2} |f(x, y)| \, dy \right| \leq |M(y_2 - y_1)| = M|y_2 - y_1| \quad (217) \end{aligned}$$

При фиксированном  $y_0$  функция  $l(x, y_0) \in \mathcal{C}([a, b])$ , поэтому, с учётом (219) имеем

$$l(x, y_0) \in \mathcal{C}([a, b] \times [p, q])$$

По определению  $l$ , при фиксированном  $x$  получаем

$$\begin{aligned} l'_{y_0}(x, y) &= f(x, y_0) \\ \implies l'_{y_0}(x, y) &\in \mathcal{C}([a, b] \times [p, q]) \\ \implies \exists v'(y_0), \quad v'(y_0) &= \int_a^b l'_{y_0}(x, y_0) \, dx = \int_a^b f(x, y_0) \, dx = I(y_0) \end{aligned}$$

По определению  $\varphi$ ,

$$\exists \varphi'(y_0), \quad \varphi'(y_0) = I(y_0)$$

Из последних двух выражений следует, что

$$v'(y_0) = \varphi'(y_0), \quad y_0 \in [p, q]$$

Подставляя  $p$  вместо  $y_0$  получаем

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= \int_p^p I(y) \, dy = 0, \quad v(p) = \int_a^b l(x, p) \, dx \\ f(x, p) &= \int_p^p f(x, y) \, dy = 0 \implies v(p) = 0 \\ \implies \int_p^q I(y) \, dy &= \varphi(q) = \varphi(q) - \varphi(p) = \int_p^q \varphi'(y_0) \, dy_0 = \int_p^q v'(y_0) \, dy_0 = \\ &= v(q) - v(p) = v(q) = \int_a^b l(x, q) \, dx = \int_a^b K(x) \, dx \end{aligned}$$

□

## 42. Равномерная сходимость несобственного интеграла, зависящего от параметра; критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла от параметра

Пусть  $Y \subset \mathbb{R}^{n \geq 1}$ ,  $f : [a, \infty) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  – семейство функций

Предположим, что  $f \in \mathcal{C}([a, \infty) \times Y)$  и пусть  $A > a$

Определим функцию  $F : Y \times [a, \infty)$ :

$$f(y, A) := \int_a^A f(x, y) \, dx, \quad y \in Y, \quad A > a$$

Пусть

$$\forall y \in Y \quad \exists \lim_{A \rightarrow \infty} F(y, A) =: F_0(y)$$

**Определение 21.** Будем говорить, что несобственный интеграл  $\int_a^\infty f(x, y) \, dx$  равномерно сходится при  $y \in Y$ , если

$$F(y, A) \xrightarrow[A \rightarrow \infty]{y \in Y} F_0(y)$$

Применяя критерий Коши равномерной сходимости семейства функций, получаем следующее утверждение:

**Теорема 37.** Для того, чтобы несобственный интеграл  $\int_a^\infty f(x, y) \, dx$ , зависящий от параметра, рав-

номерно сходилась при  $y \in Y$ , **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists L > a : \quad \forall A_1, A_2 > L \quad \forall y \in Y \quad \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, y) \, dx \right| < \varepsilon$$

**Доказательство.** Заметим, что

$$F(y, A_2) - F(y, A_1) = \int_a^{A_2} f(x, y) \, dx - \int_a^{A_1} f(x, y) \, dx = \int_{A_1}^{A_2} f(x, y) \, dx$$

□

### 43. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла от параметра

**Теорема 38.**  $f \in \mathcal{C}([a, \infty) \times Y)$

$$\forall y \in Y \quad |f(x, y)| \leq g \quad (218)$$

$$\int_a^\infty g(x) \, dx < \infty$$

Тогда несобственный интеграл  $\int_a^\infty f(x, y) \, dx$  сходится равномерно при  $y \in Y$

**Доказательство.** Возьмём  $\forall \varepsilon > 0$ , выберем  $L$  так, чтобы  $\int_L^\infty g(x) \, dx < \varepsilon$ . Тогда

$$\forall A_1, A_2 > L \quad \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, y) \, dx \right| \leq \left| \int_{A_1}^{A_2} |f(x, y)| \, dx \right| \stackrel{(220)}{\leq} \left| \int_{A_1}^{A_2} g(x) \, dx \right| \leq \int_L^\infty g(x) \, dx < \varepsilon$$

при любом  $y \in Y$

По предыдущей теореме

$$\int_a^A f(x, y) \, dx \xrightarrow[A \rightarrow \infty]{y \in Y} \int_a^\infty f(x, y) \, dx$$

□

### 44. Признак Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла от параметра

**Теорема 39.**  $f : [a, \infty) \times Y, \quad Y \subset \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathcal{C}([a, \infty) \times Y), \quad g : [a, \infty) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$

$$\exists M : \quad |g(x, y)| \leq M \quad \forall x \in [a, \infty) \quad (219)$$

$g(x, y)$  монотонна по  $x$  при  $\forall y \in Y$

$$\int_a^\infty f(x, y) \, dx \text{ равномерно сх. при } y \in Y \quad (220)$$

$$\Rightarrow \int_a^\infty f(x, y)g(x, y) \, dx \text{ равномерно сх. при } y \in Y$$

**Доказательство.** Возьмём  $\forall \varepsilon > 0$  и воспользуемся критерием Коши для несобственных интегралов (условие (222)):

$$\exists A > a : \quad \forall A_2 > A_1 > A \quad \forall y \in Y \quad \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, y) \, dx \right| < \varepsilon \quad (221)$$

**Утверждение 9.** Вторая теорема о среднем справедлива, если  $f$  монотонна, а  $g$  интегрируема. Мы требовали дифференцируемости  $g$  для упрощения доказательства.

Применим её:

$$\begin{aligned} & \int_{A_1}^{A_2} f(x, y) g(x, y) \, dx = g(A_1, y) \int_{A_1}^c f(x, y) \, dx + g(A_2, y) \int_c^{A_2} f(x, y) \, dx \\ \Rightarrow & \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, y) g(x, y) \, dx \right| \leq |g(A_1, y)| \cdot \left| \int_{A_1}^c f(x, y) \, dx \right| + |g(A_2, y)| \cdot \left| \int_c^{A_2} f(x, y) \, dx \right| \stackrel{(221), (223)}{\leq} \\ & \leq M \cdot \varepsilon + M \cdot \varepsilon = 2M\varepsilon \end{aligned}$$

□

## 45. Признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла от параметра

**Теорема 40.**  $f \in \mathcal{C}([a, \infty) \times Y)$ ,  $g : [a, \infty) \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g$  монотонна по  $x$  при  $\forall y \in Y$

$$g(x, y) \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{y \in Y} 0 \quad (222)$$

$$\exists L > 0 : \quad \forall A > a \quad \forall y \in Y \quad \left| \int_a^A f(x, y) \, dx \right| \leq L \quad (223)$$

$$\Rightarrow \int_a^\infty f(x, y) g(x, y) \, dx \text{ сходится равномерно при } y \in Y$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \forall A_2 > A_1 > a \quad \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, y) \, dx \right| &= \left| \int_a^{A_2} f(x, y) \, dx - \int_a^{A_1} f(x, y) \, dx \right| \stackrel{\Delta}{\leq} \\ &\leq \left| \int_a^{A_2} f(x, y) \, dx \right| - \left| \int_a^{A_1} f(x, y) \, dx \right| \stackrel{(223)}{\leq} 2L \quad (224) \end{aligned}$$

По определению равномерной сходимости,

$$(224) \Rightarrow \exists A > a : \quad \forall A_1 > A \quad \forall y \in Y \quad |g(A_1, y)| < \varepsilon \quad (225)$$

Возьмём  $A_2 > A_1 > A$

Воспользуемся второй теоремой о среднем:

$$\exists c \in (A_1, A_2) : \quad \int_{A_1}^{A_2} f(x, y) g(x, y) \, dx = g(A_1, y) \int_{A_1}^c f(x, y) \, dx + g(A_2, y) \int_c^{A_2} f(x, y) \, dx \quad (226)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, y) g(x, y) \, dx \right| \leq |g(A_1, y)| \cdot \left| \int_{A_1}^c f(x, y) \, dx \right| + |g(A_2, y)| \cdot \left| \int_c^{A_2} f(x, y) \, dx \right| \stackrel{(226), (227)}{\leq} \\ & \leq 2L\varepsilon + 2L\varepsilon = 4L\varepsilon \end{aligned}$$

□

## 46. Предел несобственного интеграла, зависящего от параметра

**Теорема 41.**  $Y \subset \mathbb{R}^n$ ,  $y_0$  — т. сл.  $Y$  (не обязательно  $\in Y$ ),  $f \in \mathcal{C}([a, \infty) \times Y)$

$$I(y) := \int_a^\infty f(x, y) \, dx \text{ равномерно сходится при } y \in Y \quad (227)$$

$$\forall x \in [a, \infty) \quad \exists \varphi(x) : \quad f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{x \in [a, \infty)} \varphi(x) \quad (228)$$

$$\implies \int_a^\infty \varphi(x) \, dx \text{ сходится} \quad (229)$$

$$I(y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{} \int_a^\infty \varphi(x) \, dx \quad (230)$$

**Замечание.** Требование (230) можно ослабить:

$$\forall A > a, \quad A \text{ фикс.} \quad f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{x \in [a, A]} \varphi(x)$$

**Доказательство.** Рассмотрим функции:

$$F(A, y) := \int_a^A f(x, y) \, dx, \quad \Phi(A) := \int_a^A \varphi(x) \, dx$$

$$(230) \implies \varphi \in \mathcal{C}([a, \infty)) \quad (231)$$

Значит, функция  $\Phi$  корректно определена

$$(229) \iff F(a, y) \xrightarrow[A \rightarrow \infty]{y \in Y} I(y) \quad (232)$$

Можно применить теорему о функциональной сходимости функционального семейства:

$$(230) \implies \forall A > a \quad \int_a^A f(x, y) \, dx \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{} \int_a^A \varphi(x) \, dx \quad (233)$$

В обозначениях  $F, \Phi$  это означает, что

$$F(A, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{} \Phi(A) \quad (234)$$

Можно применить теорему о предельном переходе в функциональном семействе:

$$(234), (236) \implies \exists \lim_{y \rightarrow y_0} I(y) \quad (235)$$

и

$$\implies \exists \lim_{A \rightarrow \infty} \Phi(A) \quad (236)$$

и

$$\implies \lim_{A \rightarrow \infty} \Phi(A) = \lim_{y \rightarrow y_0} I(y) \quad (237)$$

При этом,

$$\int_a^\infty \varphi(x) \, dx \stackrel{\text{def } \Phi}{=} \lim_{A \rightarrow \infty} \Phi(A)$$

$$(238) \implies (231)$$

$$(239) \implies (232)$$

□



**Следствие** (непрерывность в точке).  $f \in \mathcal{C}([a, \infty) \times Y)$ ,  $y_0 \in Y$  – т. сг.  $Y$

$$f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{x \in [a, \infty)} f(x, y_0) \quad (238)$$

$$I(y) := \int_a^\infty f(x, y) \, dx \text{ равномерно сходится при } y \in Y \quad (239)$$

$$\implies I(y) \text{ непр. в } y_0$$

**Следствие.**  $f \in \mathcal{C}([a, \infty) \times Y)$ ,  $I(y)$  равномерно сходится при  $y \in Y$

$$\implies I(y) \in \mathcal{C}(Y)$$

Рассмотрим  $Y = [p, q]$ , а равномерную сходимость функционального семейства требовать не будем:

**Утверждение 10** (частный случай).  $f \in \mathcal{C}(Y = [p, q])$

$I(y) := \int_a^\infty f(x, y) \, dx$  равномерно сходится при  $y \in [p, q]$

$$\implies I(y) \rightarrow I(y_0)$$

**Доказательство.** Рассмотрим

$$F(A, y) := \int_a^A f(x, y) \, dx$$

Пусть  $y_0 \in [p, q]$

$f$  непрерывна на всём произведении, в частности  $f(x, y) \in \mathcal{C}([a, A] \times [p, q])$

Это – компакт. Значит,  $f$  равномерно непрерывна на  $[p, q]$

$$\implies f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{x \in [a, A]} f(x, y_0)$$

Применяя те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы, получаем, что

$$I(y) \rightarrow I(y_0)$$

□

## 47. Определённый интеграл от интеграла, зависящего от параметра

**Теорема 42.**  $f \in \mathcal{C}([a, \infty) \times [p, q])$

$$I(y) := \int_a^\infty f(x, y) \, dx \text{ равномерно сх. при } y \in [p, q]$$

По последнему следствию,  $I(y) \in \mathcal{C}([p, q])$ , и можно рассматривать  $\int_p^q I(y) \, dy$

$$K(y) := \int_p^q f(x, y) \, dy$$

$K(y)$  – собственный интеграл от параметра, значит  $k \in \mathcal{C}([a, \infty))$

$$\implies \int_a^\infty K(x) \, dx \text{ сходится} \quad (240)$$

$$\implies \int_p^q I(y) \, dy = \int_a^\infty K(x) \, dx \quad (241)$$

или

$$\int_p^q \left( \int_a^\infty f(x, y) \, dx \right) dy = \int_a^\infty \left( \int_p^q f(x, y) \, dy \right) dx$$

**Доказательство.** Рассмотрим функцию

$$F(A, y) = \int_a^A f(x, y) \, dx$$

$F \in \mathcal{C}([a, A] \times [p, q])$ , значит, по теореме об интегрировании “собственного” интеграла от параметра,

$$\int_p^q F(A, y) \, dy \stackrel{\text{def } F}{=} \int_p^q \left( \int_a^A f(x, y) \, dx \right) dy = \int_a^A \left( \int_p^q f(x, y) \, dy \right) dx \stackrel{\text{def } K}{=} \int_a^A K(x) \, dx \quad (242)$$

По условию,

$$F(y) \xrightarrow[A \rightarrow \infty]{y \in [p, q]} I(y) \xrightarrow[\text{т. о. переходе к пределу}]{\text{т. о. переходе к пределу}} \int_p^q F(y) \, dy \xrightarrow[A \rightarrow \infty]{} \int_p^q I(y) \, dy \quad (243)$$

$$\implies \exists \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A K(x) \, dx \stackrel{\text{def несобств. инт.}}{=} \int_a^\infty K(x) \, dx \quad (244)$$

$$(246) \implies (242)$$

$$(245), (246) \implies (243)$$

□

## 48. Производная несобственного интеграла, зависящего от параметра

**Теорема 43.**  $f \in \mathcal{C}([a, \infty) \times [p, q])$ ,  $\forall x \in [a, \infty) \quad \forall y \in [p, q] \quad \exists f'_y(x, y)$

$$f'_y(x, y) \in \mathcal{C}([a, \infty) \times [p, q])$$

$$\forall y \in [p, q] \quad \text{сходится } I(y) := \int_a^\infty f(x, y) \, dx$$

$$\int_a^\infty f'_y(x, y) \, dx \text{ равномерно сходится при } y \in [p, q] \quad (245)$$

$$\implies \forall y \in [p, q] \quad \exists I'(y), \quad I'(y) = \int_a^\infty f'_y(x, y) \, dx$$

**Доказательство.** Зафиксируем  $y_0 \in [p, q]$

Обозначим  $Y := [p, q] \setminus \{y_0\}$

Рассмотрим функции

$$F(A, y) := \int_a^A f(x, y) \, dx, \quad G(A, y) := \frac{F(A, y) - F(A, y_0)}{y - y_0}$$

$f$  удовлетворяет требованиям, которые накладывались на функцию в теореме о производной интеграла от параметра:

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} G(A, y) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{F(A, y) - F(A, y_0)}{y - y_0} \stackrel{\text{def } F'_y}{=} F'_y(A, y_0) \stackrel{\text{упомянутая теорема}}{=} \int_a^A f'_y(x, y_0) \, dx \quad (246)$$

(для любого фиксированного  $A > a$ )

**Утверждение 11.**

$$\exists \Phi(y), \quad y \in Y : \quad G(A, y) \xrightarrow[A \rightarrow \infty]{y \in Y} \Phi(y) \quad (247)$$

**Доказательство.** Докажем, используя критерий Коши (применяя его к условию (247)):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > a : \quad \forall A_2 > A_1 > A \quad \forall y \in [p, q] \quad \left| \int_{A_1}^{A_2} f'_y(x, y) \, dx \right| < \varepsilon \quad (248)$$

$$\begin{aligned} G(A_2, y) - G(A_1, y) &\stackrel{\text{def } G}{=} \frac{F(A_2, y) - F(A_2, y_0)}{y - y_0} - \frac{F(A_1, y) - F(A_1, y_0)}{y - y_0} = \\ &= \frac{\left( F(A_2, y) - F(A_1, y) \right) - \left( F(A_2, y_0) - F(A_1, y_0) \right)}{y - y_0} \stackrel{\text{def } F}{=} \frac{\int_{A_1}^{A_2} f(x, y) \, dx - \int_{A_1}^{A_2} f(x, y_0) \, dx}{y - y_0} \end{aligned} \quad (249)$$

Определим (учитывая, что  $A_1, A_2$  фиксированы)

$$\begin{aligned} V(y) &:= \int_{A_1}^{A_2} F(x, y) \, dx \\ \forall y \in [p, q] \quad \exists V'(y), \quad V'(y) &= \int_{A_1}^{A_2} f'_y(x, y) \, dx \end{aligned} \quad (250)$$

По теореме Лагранжа

$$\exists c \in (y, y_0) : \quad V(y) - V(y_0) = V'(c)(y - y_0) \quad (251)$$

$$\begin{aligned} G(A_2, y) - G(A_1, y) &\stackrel{\text{def } V}{\stackrel{(251)}}{=} \frac{V(y) - V(y_0)}{y - y_0} \stackrel{(253)}{=} \frac{V'(c)(y - y_0)}{y - y_0} = V'(c) \stackrel{(252)}{=} \int_{A_1}^{A_2} f'_y(x, c) \, dx \\ \implies |G(A_2, y) - G(A_1, y)| &= \left| \int_{A_1}^{A_2} f'_y(x, c) \, dx \right| \stackrel{(250)}{<} \varepsilon \end{aligned}$$

□

Применим теорему о предельном переходе в функциональном семействе:

$$(248), (249) \implies \begin{cases} \exists \lim_{y \rightarrow y_0} \Phi(y) \\ \exists \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f'_y(x, y_0) \, dx = \int_a^\infty f'_y(x, y_0) \, dx \\ \lim_{y \rightarrow y_0} \Phi(y) = \int_a^\infty f'_y(x, y_0) \, dx \end{cases} \quad (252)$$

$$G(A, y) \xrightarrow[A \rightarrow \infty]{\text{def } G, F} \frac{I(y) - I(y_0)}{y - y_0}$$

То есть,

$$\Phi(y) = \frac{I(y) - I(y_0)}{y - y_0}$$

Вместе с (254), получаем утверждение теоремы

□

## 49. Несобственный интеграл по параметру от несобственного интеграла от параметра

**Теорема 44.**  $f \in \mathcal{C}([a, \infty) \times [p, \infty))$ ,  $f(x, y) \geq 0$

$$\forall y \in [p, \infty) \quad \exists I(y) := \int_a^\infty f(x, y) \, dx$$

$$\forall x \in [a, \infty) \quad \exists K(x) = \int_p^\infty f(x, y) \, dy$$

Существует по крайней мере один из интегралов:

$$\int_p^\infty I(y) \, dy, \quad \int_a^\infty K(y) \, dx$$

Тогда существует и второй, и справедливо равенство:

$$\int_p^\infty I(y) \, dy = \int_a^\infty K(x) \, dx$$

то есть,

$$\int_p^\infty \left( \int_a^\infty f(x, y) \, dx \right) dy = \int_a^\infty \left( \int_p^\infty f(x, y) \, dy \right) dx$$

**Замечание.** Важность этой теоремы заключается в том, что в ней не требуется равномерная сходимость

**Доказательство.** Будет доказано в четвёртом семестре □

## 50. Вычисление интеграла Дирихле

**Теорема 45.**

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

**Доказательство.** Применим признак Абеля к

$$f(x, y) := \frac{\sin x}{x}, \quad x \in [0, \infty), \quad y \in [0, \infty)$$

Интеграл, не зависящий от  $y$  равномерно сходится:

$$\int_0^\infty f(x, y) \, dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx \text{ равн. сх. при } y \in [0, \infty) \quad (253)$$

$$g(x, y) := e^{-xy} \text{ монот. по } x \text{ при } y \in [0, \infty) \quad (254)$$

$$0 < e^{-xy} \leq 1 \quad (255)$$

$$(256), (257), (258) \implies I(y) := \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-xy} \, dx \text{ равн. сх. при } y \in [0, \infty) \quad (256)$$

$$h(x, y) := \frac{\sin x}{x} e^{-xy} \in \mathcal{C}([0, \infty) \times [0, \infty)) \quad (257)$$

По частному случаю перехода к пределу

$$(259), (260) \implies I(0) = \lim_{y \rightarrow +0} I(y) \quad (258)$$

Возьмём  $y \geq \delta > 0$

$$\left| \frac{\sin x}{x} e^{-xy} \right| \leq e^{-\delta x} \quad (259)$$

$$\implies h'_y(x, y) = -\sin x e^{-xy}$$

$$|h'_y(x, y)| \leq e^{-xy} \leq e^{-\delta x} \quad (260)$$

По только что доказанной теореме

$$(262), (263) \Rightarrow \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-xy} dx \text{ сходится} \\ \int_0^\infty h'_y(x, y) dx \text{ равномерно сходится} \end{cases} \quad (261)$$

$$(262) \quad (263) \Rightarrow \int_0^\infty h'_y(x, y) dx \text{ равномерно сходится} \quad (262)$$

То есть

$$\begin{aligned} & \forall A > \delta \quad \exists I'(y) \text{ при } y \in [\delta, A] \\ \Rightarrow & \forall y \geq \delta \quad \exists I'(y), \quad I'(y) = \int_0^\infty h'_y(x, y) dx = - \int_0^\infty \sin x e^{-xy} dx \end{aligned} \quad (263)$$

Проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} - \int_0^\infty \sin x e^{-xy} dx &= \int_0^\infty e^{-xy} (\cos x)' dx = e^{-xy} \cos x \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \cos x (e^{-xy})'_x dx = \\ &= -1 + y \int_0^\infty e^{-xy} \cos x dx \stackrel{\text{по частям}}{=} -1 + y \int_0^\infty e^{-xy} (\sin x)' dx = \\ &= -1 + y \left( \underbrace{e^{-xy} \sin x \Big|_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty \sin x (e^{-xy})' dx \right) = -1 + y^2 \int_0^\infty e^{-xy} \sin x dx \\ \Rightarrow & -(1 + y^2) \int_0^\infty e^{-xy} \sin x dx = -1 \\ & - \int_0^\infty e^{-xy} \sin x dx = -\frac{1}{1 + y^2} \\ \Leftrightarrow & I'(y) = -\frac{1}{1 + y^2} \end{aligned} \quad (264)$$

Применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$I(B) - I(\delta) = \int_\delta^B I'(y) dy \stackrel{(267)}{=} - \int_\delta^B \frac{dy}{1 + y^2} = - \operatorname{arctg} y \Big|_\delta^B = \operatorname{arctg} \delta - \operatorname{arctg} B \quad (265)$$

При  $B \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} |I(B)| &\leq \int_0^\infty e^{-Bx} dx = \frac{1}{B} \xrightarrow{B \rightarrow \infty} 0 \\ (268) \Rightarrow & 0 - I(\delta) = \operatorname{arctg} \delta - \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow & I(\delta) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \delta \\ \int_0^\infty \sin x dx &= I(0) = \lim_{\delta \rightarrow +0} I(\delta) = \lim \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \delta \right) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

□

## 51. Вычисление интеграла Эйлера—Пуассона

**TODO:** Интеграл Эйлера—Пуассона

## 52. Числовые и функциональные ряды с комплексными слагаемыми; абсолютная и равномерная сходимость; признак Вейерштрасса равномерной сходимости

**TODO:** Комплексные числовые и функциональные ряды

**Определение 22.**  $E$  — метрическое пространство,  $\{\gamma_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\gamma E \rightarrow \mathbb{C}$   
 Комплексным функциональным рядом называется символ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(x) \quad (266)$$

Частичной суммой называется  $w_n(x) := \gamma_1(x) + \dots + \gamma_n(x)$   
 Говорят, что ряд равномерно сходится на множестве  $E$ , если

$$\exists w : E \rightarrow \mathbb{C} : \quad w_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in E} w(x)$$

**Теорема 46 (критерий Коши).** Для того чтобы ряд (270) равномерно сходился на  $E$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall m > n > N \quad \forall x \in E \quad |\gamma_{n+1}(x) + \dots + \gamma_m(x)| < \varepsilon$$

**Определение 23.** Можно применить критерий Коши для комплексной функциональной последовательности

**Теорема 47 (признак Вейерштрасса).**

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad a_n > 0 : \quad |\gamma_n(x)| \leq a_n \quad \forall n \quad \forall x \in E \quad (267)$$

Ряд  $a_n$  сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad (268)$$

$\implies$  (270) сходится равномерно

**Доказательство.** Возьмём  $\forall \varepsilon > 0$

$$(272) \implies \exists N : \quad \forall m > n > N \quad a_{n+1} + \dots + a_m < \varepsilon \quad (269)$$

$$|\gamma_{n+1}(x) + \dots + \gamma_m(x)| \leq |\gamma_{n+1}(x)| + \dots + |\gamma_m(x)| \underset{a_n > 0}{\leq} a_{n+1} + \dots + a_m \underset{(273)}{<} \varepsilon$$

По критерию Коши получаем равномерную сходимость □

## 53. Степенные ряды; лемма Абеля

$$E = \mathbb{C}$$

$$\{c_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad c_n \in \mathbb{C}$$

$$z_0 \in \mathbb{C}$$

Положим  $\gamma_0(z) := c_0$ ,  $\gamma_n(z) := c_n(z - z_0)^n$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (270)$$

Такое выражение будем называть комплексным степенным рядом с центром  $z_0$  (рядом по степеням  $(z - z_0)$ )

**Замечание.**  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $c_n \rightarrow c \in \mathbb{C}$

$$\implies \exists M : \quad |c_n| \leq M \quad \forall n$$

**Доказательство.** Положим  $c_n = a_n + ib_n$ ,  $c = a + ib$

$$a_n \rightarrow a, \quad b_n \rightarrow b$$

Дальше применяем теорему из первого семестра

□

**Замечание** (необходимый признак сходимости комплексных числовых рядов).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{сх.} \implies \gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

**Доказательство.**  $c_n = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$

$$\left. \begin{array}{l} c_n \rightarrow c \\ c_{n-1} \rightarrow c \end{array} \right\} \implies \underbrace{c_n - c_{n-1}}_{\gamma_n} \rightarrow c - c = 0$$

□

**Следствие.**

$$\exists M : |\gamma_n| \leq M \quad \forall n$$

**Лемма 2** (Абеля).

$$\exists z_1 \neq z_0 : (274) \text{ сходится при } z_1$$

Обозначим  $R := |z_1 - z_0|$

$$\implies (274) \text{ сх.} \quad \forall z : |z - z_0| < R \quad (271)$$

$$\implies \forall 0 < r < R \quad (274) \text{ равн. сх. при } |z - z_0| \leq r \quad (272)$$

**Доказательство.** Докажем (276):

Обозначим  $0 < q := \frac{r}{R} < 1$

Сходимость при  $z_1$ , по первому замечанию, означает, что

$$c_n(z_1 - z_0)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (273)$$

Тогда, по следствию,

$$\exists M : |c_n(z_1 - z_0)^n| \leq M \quad (274)$$

$$\iff |c_n| \cdot |z_1 - z_0| \leq M \stackrel{\text{def } R}{\iff} |c_n| \leq \frac{M}{R^n} \quad (275)$$

$$|c_n(z - z_0)^n| = |c_n| \cdot |z - z_0|^n \stackrel{\text{усл. (275), (279)}}{\leq} \frac{M}{R^n} \cdot r^n = Mq^n \quad (276)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Mq^n = \frac{Mq}{1 - q}$$

Можно применить признак Вейерштрасса, тем самым доказывая (276)

$$(276) \implies (274) \text{ сх. абс. при } |z - z_0| < R$$

□

## 54. Определение радиуса сходимости и круга сходимости степенного ряда

**Определение 24.** 1. Пусть (274) сходится только при  $z = z_0$

Будем полагать радиус сходимости  $R := 0$ , круг сходимости  $B := \emptyset$

2. (274) сходится при всех  $z$

Полагаем  $R := +\infty$ ,  $B := \mathbb{C}$

3.  $\exists z_1 \neq z_0 : (274) \text{ сх. в } z_1, \quad \exists z_2 : (274) \text{ расх. в } z_2$

$$R := \sup \{ r \mid r = |z_* - z_0|, \quad (274) \text{ сх. в } z_* \}, \quad B := \{ z_0 \mid |z - z_0| < R \}$$

Положим  $r_1 := |z_1 - z_0|, \quad r_2 := |z_2 - z_0|$

По определению  $R$

$$R \geq r_1 > 0$$

Возьмём  $z_3 : r_3 := |z_3 - z_0| > r_2$

Если бы (274) сходилась при  $z_3$ , можно было бы применить к  $z_3$  лемму Абеля. Тогда бы (274) сходилась в  $z_2 - \not\downarrow$

То есть, в  $z_3$  ряд расходится

Значит,  $R \leq r_2, \quad r_1 < r_2$

## 55. Свойства круга сходимости

Рассматриваем только случай, когда  $0 < R < \infty$

**Теорема 48.**

$$(274) \text{ сх.} \quad \forall z \in B \quad (277)$$

$$(274) \text{ расх.} \quad \forall z_2 \in \mathbb{C} \setminus \bar{B} \quad (278)$$

**Доказательство.**

- Докажем (281):

Возьмём  $r := |z - z_0| < R$

По определению  $R$

$$\exists z_* : |z_* - z_0| > R, \quad (274) \text{ сх. в } z_*$$

По лемме Абеля (274) сх. в  $z$

- Докажем (282):

Возьмём  $\rho := |\hat{z} - z_0| > R$

Если ряд сходится, то  $\rho$  больше супремума, что невозможно

□

## 56. Вычисление радиуса сходимости

**Теорема 49.** Определим

$$t := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} \quad (279)$$

1.  $R = 0$ , если  $t = +\infty$

2.  $R = +\infty$ , если  $t = 0$

3.  $R = \frac{1}{t}$  иначе

**Доказательство.** Будем рассматривать только последний случай

Определим  $R_0 := \frac{1}{t}$

- Возьмём  $z_2 : |z_2 - z_0| > R_0$   
Обозначим  $\varepsilon := |z_2 - z_0| - R_0 > 0$   
Определим

$$\delta := \frac{\varepsilon t^2}{1 + \varepsilon t}$$

По определению верхнего предела

$$\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} : \sqrt[n_k]{c_{n_k}} > t - \delta \quad (280)$$



$$\begin{aligned}
& \Longleftrightarrow |c_{n_k}| > (t - \varepsilon)^{n_k} \\
& \Rightarrow |c_{n_k}(z_2 - z_0)^{n_k}| = |c_{n_k}| \cdot |z_2 - z_0|^{n_k} > (t - \delta)^{n_k} \cdot (R_0 + \varepsilon)^{n_k} = \left( (t - \delta)(R_0 + \varepsilon) \right)^{n_k} \\
& (t - \delta)(R_0 + \varepsilon) = \left( t - \frac{\varepsilon t^2}{1 + \varepsilon t} \right) \left( \frac{1}{t} + \varepsilon \right) = \frac{t + \varepsilon t^2 - \varepsilon t^2}{1 + \varepsilon t} \cdot \frac{1 + \varepsilon t}{t} = 1 \\
& \Rightarrow |c_{n_k}(z_2 - z_0)^{n_k}| \geq 1
\end{aligned} \tag{281}$$

По второму замечанию ряд в  $z_2$  расходится

- Возьмём  $z_1$  :  $|z_1 - z_0| < R_0$   
Пусть

$$\varepsilon_0 := R_0 - |z_1 - z_0|, \quad \delta_0 := \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0 t^2}{1 - \varepsilon_0 t}$$

По свойствам верхнего предела

$$\begin{aligned}
& \exists N : \quad \forall n > N \quad \sqrt[n]{|c_n|} < t + \delta_0 \\
& \Longleftrightarrow |c_n| < (t + \delta_0)^n \\
& \Rightarrow \forall n > N \quad |c_n(z_1 - z_0)^n| = |c_n| \cdot |z_1 - z_0|^n < (t + \delta_0)^n \cdot (R_0 - \varepsilon_0)^n = \left( (t + \delta_0)(R_0 - \varepsilon_0) \right)^n \\
& (t + \delta_0)(R_0 - \varepsilon_0) \stackrel{\text{def } \delta}{=} \left( t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0 t^2}{1 - \varepsilon_0 t} \right) \left( \frac{1}{t} - \varepsilon_0 \right) = \frac{t - \varepsilon_0 t^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 t^2}{1 - \varepsilon_0 t} \cdot \frac{1 - \varepsilon_0 t}{t} = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 t \\
& 0 < q := 1 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 t < 1 \\
& \Rightarrow |c_n(z_1 - z_0)^n| < q^n < 1
\end{aligned}$$

Значит, ряд сходится при  $z_1$

□

**Теорема 50.**  $c_n \neq 0 \quad \forall n, \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$   
Тогда этот предел и равен радиусу сходимости

## 57. Интервал сходимости вещественного степенного ряда, его свойства

**Определение 25.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{282}$$

Будем называть (286) вещественным степенным рядом, если  $x_0 \in \mathbb{R}, \quad a_n \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1, \quad x \in \mathbb{R}$

Можно найти радиус сходимости и круг сходимости соответствующего комплексного степенного ряда:

1.  $R = 0, \quad \mathbb{B} = \emptyset$   
Ряд сходится только при  $x = x_0$
2.  $R = \infty, \quad \mathbb{B} = \mathbb{C}$   
Ряд сходится при любых  $z \in \mathbb{C}$ , а значит, и при любых  $x \in \mathbb{R}$
3.  $0 < R < \infty, \quad \mathbb{B} \neq \emptyset, \mathbb{C}$   
Пусть  $I := \mathbb{B} \cap \mathbb{R}$

$$I = (x_0 - R, x_0 + R)$$

- $x \in I \Rightarrow x \in \mathbb{B} \Rightarrow$  ряд сходится в  $x$
- $x_1 \notin \bar{I} \Rightarrow x_1 \notin \bar{\mathbb{B}} \Rightarrow$  ряд расходится в  $x_1$

Пусть есть  $0 < r < R$

Рассмотрим промежуток  $[x_0 - r, x_0 + r] \subset B \implies$  ряд сходится равномерно на  $[x_0 - r, x_0 + r]$

При доказательстве теоремы о радиусе сходимости для комплексных рядов мы пользовались признаком Вейерштрасса. Если перейти к вещественным рядам, то при  $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$  будет равномерно сходиться ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x - x_0)^n|$$

## 58. Теорема Абеля о вещественном степенном ряде

Бывает, что при  $r = R$  ряд сходится

**Теорема 51 (Абеля).** Ряд (286) сходится при  $x_0 - R$  или при  $x_0 + R$

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (283)$$

Тогда ряд сходится равномерно на  $[x_0 - R, x_0]$  или  $[x_0, x_0 + R]$ , и

$$\implies \begin{cases} S \in \mathcal{C}([x_0 - R, x_0]) \\ S \in \mathcal{C}([x_0, x_0 + R]) \end{cases}$$

Если ряд сходится и при  $x_0 - R$ , и при  $x_0 + R$ , то верны оба утверждения

**Доказательство.** Докажем для  $[x_0 - R, x_0]$ :

Так как  $x_0 - R - x_0 = -R$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-R)^n \text{ сходится} \quad (284)$$

Пусть  $x_0 - R < x < x_0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(-R)^n \cdot \left( \frac{x - x_0}{-R} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-R)^n \cdot \left( \frac{x_0 - x}{R} \right)^n \quad (285)$$

Положим

$$u_n(x) := a_n(-R)^n, \quad v_n(x) := \left( \frac{x_0 - x}{R} \right)^n$$

Тогда  $\sum u_n(x)$  равномерно сходится на  $[x_0 - R, x_0]$  (т. к. он не зависит от  $x$ )

$$0 \leq v_n(x) \leq 1, \quad v_n(x) \text{ монотонн. по } n \quad \forall x \in [x_0 - R, x_0]$$

По признаку Абеля, последние два утверждения влекут, что

$$S(x) \stackrel{\text{def } u_n, v_n}{=} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x) \text{ равномерно сходится при } x \in [x_0 - R, x_0]$$

$$a_n(x - x_0)^n \in \mathcal{C}([x_0 - R, x_0])$$

Можно применить следствие о непрерывности ряда непрерывных функций □

## 59. Производная вещественного степенного ряда

**Теорема 52.** Имеется вещественный степенной ряд

$$S(x) := a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad R > 0 \quad (286)$$

$$T(x) := a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}, \quad R_0 \text{ — его радиус сх.} \quad (287)$$

$$\implies R_0 = R \quad (288)$$

**Замечание.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^n = (x - x_0) \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}, \quad x \neq x_0 \quad (289)$$

Ряды слева и справа сходятся или расходятся одновременно, так как они различаются умножением на ненулевую константу

**Доказательство.**

$$t = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \quad t_0 = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|na_n|}$$

Видно, что  $t_0 \geq t$

$$R = \frac{1}{t}, \quad R_0 = \frac{1}{t_0} \quad (290)$$

$$\implies R_0 \leq R \quad (291)$$

Нужно доказать, что они совпадают

Возьмём  $x$  такой, что  $|x - x_0| =: r < R$

Докажем, что при таком  $x$  будет сходиться ряд  $T(x)$ :

Возьмём  $r < \rho < R$ ,  $q := \frac{r}{\rho}$ ,  $0 < q < 1$

Докажем, что  $T(x)$  абсолютно сходится (из этого будет следовать, что он сходится):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^n = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\rho^n \cdot \left(n \frac{r^n}{\rho^n}\right) \stackrel{\text{def } q}{=} \sum |a_n|\rho^n \cdot (nq^n) \quad (292)$$

Рассмотрим  $\varphi(x) := xq^x$ ,  $x \geq 0$

Понятно, что  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

Найдём её максимум:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= q^x + x \ln q q^x \\ q^{x_0} + x_0 \ln q q^{x_0} &= 0 \\ x_0 &= -\frac{1}{\ln q} = \frac{1}{\ln \frac{1}{q}} =: M \end{aligned} \quad (293)$$

$$\implies nq^n \leq M \quad \forall n$$

$$\stackrel{(296)}{\implies} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\rho^n(nq^n) \leq \sum |a_n|\rho^n \cdot M \stackrel{S(x) \text{ сх.}}{<} \infty \quad (294)$$

$$\implies [x_0 - r, x_0 + r] \subset (x_0 - R_0, x_0 + R_0)$$

$$\stackrel{\text{в силу произвольности } r}{\implies} (x_0 - R, x_0 + R) \subset (x_0 - R_0, x_0 + R_0) \implies R \leq R_0 \stackrel{(295)}{\implies} (292)$$

□

**Следствие.** Обозначим  $u_n(x) := a_n(x - x_0)^n$

Тогда  $u'_n(x) = na_n(x - x_0)^{n-1}$

Если взять  $\forall 0 < r < R$ , то ряд  $T(x)$  сходится равномерно при  $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$

Ряд  $S(x)$  сходится равномерно там же

$$\implies \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] \quad \exists S'(x) = T(x)$$

Это верно при  $\forall x \in I$  (т. к. можно обозначить  $|x - x_0| =: r < R$ )

## 60. Старшие производные вещественного степенного ряда; степенной ряд как ряд Тейлора своей суммы

Рассмотрим ряд  $T(x)$  как первоначальный ряд.  
По теореме получаем, что радиус сходимости  $T'(x)$  будет таким же, то есть,

**Следствие.**

$$2a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} = \left(S'(x)\right)' = S''(x)$$

Это можно продолжать. Получаем следующую теорему:

**Теорема 53.**

$$\forall m \quad \forall x \in I \quad \exists S^{(m)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(x-x_0)^n\right)^{(m)} \quad (295)$$

## 61. Интегрирование вещественного степенного ряда

**Теорема 54** (об интегрируемости вещественного степенного ряда).

По-прежнему рассматриваем ряд  $S(x)$ ,  $p, q \in I$  (не обязательно  $p < q$ )

$$\Rightarrow \int_p^q S(x) dx = a_0(q-p) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(q-x_0)^{n+1} - (p-x_0)^{n+1}}{n+1} \quad (296)$$

**Доказательство.**  $S$  равномерно сходится на  $[p, q]$ .

Его можно интегрировать почленно, что и записано в теореме.  $\square$

**Утверждение 12.** В частности, при  $p = x_0$ ,  $q = y \in I$ ,

$$\int_{x_0}^y S(x) dx = a_0(y-x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(y-x_0)^{n+1}}{n+1} \quad (297)$$

## 62. Разложение в степенной ряд функций $\ln(1+x)$ и $\operatorname{arctg} x$

Рассмотрим ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \quad x \in (-1, 1)$$

Понятно, что при  $r < 1$  ряд сходится равномерно на  $[-r, r]$ .

Возьмём  $|y| \leq r$  и проинтегрируем по формуле (301):

$$\boxed{\ln(1+y)} = \int_0^y \frac{dx}{1+x} = y + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{n+1}}{n+1} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{y^n}{n}}$$

Радиус сходимости этого ряда равен 1. При  $y = 1$  он сходится. По теореме Абеля он сходится равномерно на  $[0, 1]$ .

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}} = \lim_{y \rightarrow 1} \ln(1+y) = \boxed{\ln 2}$$

Напишем в этом равенстве  $x^2$  вместо  $x$ :

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$$

Рассмотрим  $|y| < 1$ :

$$\boxed{\operatorname{arctg} y} = \int_0^y \frac{dx}{1+x^2} = y + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{2n-1}}{2n-1}}$$

При  $y = 1$  этот ряд сходится как знакочередующийся. По теореме абеля он непрерывен на  $[0, 1]$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}} = \lim_{y \rightarrow 1^-} \operatorname{arctg} y = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

### 63. Формула Тейлора с интегральным остатком

**Теорема 55.**  $f \in C^n((a, b))$ ,  $x, x_0 \in (a, b)$ ,  $x \neq x_0$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt \quad (298)$$

**Доказательство.** Докажем по индукции.

- База.  $n = 1$

$$f(x) \stackrel{?}{=} f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

Это — формула Ньютона—Лейбница.

- Переход.  $n \rightarrow n+1$

$$f \in C^{n+1}((a, b))$$

Проинтегрируем по частям по  $t$ :

$$\left( -\frac{(x-t)^n}{n} \right)'_t = (x-t)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \left( -\frac{(x-t)^n}{n} \right)' dt f^{(n)}(t) &= \left( -\frac{(x-t)^n}{n} f^{(n)}(t) \right) \Big|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x \left( -\frac{(x-t)^n}{n} \right) f^{(n+1)}(t) dt = \\ &= \frac{(x-x_0)^n}{n} f^{(n)}(x_0) + \frac{1}{n} \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n} f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xRightarrow{\text{предп.}} f(x) &= \\ &= f(x_0) \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n} f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

□

### 64. Разложение в степенные ряды $e^x$ , $\cos x$ , $\sin x$

Рассматриваем  $x_0 = 0$

1.  $e^x$

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(e^x)^{(n)} \Big|_{x=0} = 1$$

$$e^0 = 1$$

$$e^x \stackrel{T}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + e^c \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad c < |x|, \quad cx > 0 \quad (299)$$

$$\left| e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq e^{|x|} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\xRightarrow{(303)} \boxed{e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}}$$

При  $x = 1$  получаем

$$e = 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Взяв сумму до пятого слагаемого, получаем очень хорошее приближение — с точностью до  $\frac{1}{720}$

2.  $\cos x$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\cos x)'' = -\cos x$$

$$(\cos x)''' = \sin x$$

$$(\cos x)^{(4)} = \cos x$$

$$(\cos x)^{(2n-1)}|_{x=0} = 0$$

$$(\cos x)^{(2n)}|_{x=0} = (-1)^n$$

$$\cos x \stackrel{T}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \sin c \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\xRightarrow{\text{лемма}} \boxed{\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

3.  $\sin x$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\sin x)'' = -\sin x$$

$$(\sin x)''' = -\cos x$$

$$(\sin x)^{(4)} = \sin x$$

$$(\sin x)^{(2n)}|_{x=0} = 0$$

$$(\sin x)^{(2n-1)}|_{x=0} = (-1)^{n-1}$$

$$\sin x \stackrel{T}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \pm \sin c \cdot \frac{x^{2n}}{2n!}$$

$$\xRightarrow{\text{лемма}} \boxed{\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}}$$

## 65. Разложение в степенной ряд $(1+x)^r$

$(1+x)^r$ ,  $r \notin \mathbb{N}$ ,  $r \neq 0$  (чтобы была нетривиальность)

$$\left( (1+x)^r \right)' = r(1+x)^{r-1}$$

$$\left( (1+x)^r \right)'' = r(r-1)(1+x)^{r-2}$$

$$\left( (1+x)^r \right)^{(n)} = r(r-1)(r-2) \dots (r-n+1)(1+x)^{r-n}$$

$$\left( (1+x)^r \right)^{(n)}|_{x=0} = r(r-1) \dots (r-n+1)$$

Применим формулу Тейлора с остатком в форме Коши:

$$(1+x)^r = 1 + \frac{rx}{1!}x + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}x^n + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n r(r-1)\dots(r-n)(1+t)^{r-n-1} dt}_{I_n} \quad (300)$$

$$(x-t)^n(1+t)^{-n} = \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n$$

Всё это верно при  $0 \leq |t| \leq x$ ,  $tx \geq 0$

- $x > 0$

$$0 \leq \frac{x-t}{1+t} \leq x \quad (301)$$

- $x < 0$

$$\frac{x-t}{1+t} = \frac{-|x|+|t|}{1-|t|} \implies \left|\frac{x-t}{1+t}\right| = \frac{|x|-|t|}{1-|t|} \leq |x| \quad (302)$$

$$(305), (306) \implies \left|\frac{x-t}{1+t}\right| \leq |x|, \quad \text{при } |t| \leq |x|, \quad tx \geq 0 \quad (303)$$

$$\begin{aligned} \implies |I_n| &\leq \frac{|r(r-1)\dots(r-n)|}{n!} \left| \int_0^x \left|\frac{x-t}{1+t}\right|^n \cdot (1+t)^{r-1} dt \right| \leq \\ &\leq \frac{|r(r-1)\dots(r-n)|}{n!} |x|^n \underbrace{\left| \int_0^x (1+t)^{r-1} dt \right|}_{M(x)} \end{aligned} \quad (304)$$

Обозначим

$$\alpha_n := \frac{|r(r-1)\dots(r-n)|}{n!} |x|^n$$

Считаем, что  $n > r+1$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} &= \frac{1}{n+1} \cdot |r-n-1| \cdot |x| \\ |r-n+1| &= n+1-r \\ \implies \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} &= \frac{n+1-r}{n+1} \cdot |x| = \left(1 - \frac{r}{n+1}\right) |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x| \end{aligned} \quad (305)$$

Обозначим

$$q := \frac{1+|x|}{2}, \quad q < 1, \quad |x| < q$$

В новых обозначениях,

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \leq q \quad \forall n \geq \text{некоторого } n_0$$

Значит, при  $n > n_0$ ,  $\alpha_n > 0$ ,  $\alpha_n$  монотонно убывает

$$\implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n =: \alpha \geq 0 \quad (306)$$

$$(309) \iff \alpha_{n+1} = \alpha_n \left(1 - \frac{r}{n+1}\right) \cdot |x|$$

$$\xRightarrow{(310)} \alpha = \alpha |x| \implies \alpha = 0$$

$$\xRightarrow{(304)} (1+x)^r = 1 + \frac{rx}{1!} + \frac{r(r-1)x^2}{2!} + \dots + \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

## 66. Разложение в степенной ряд $\arcsin x$

**TODO:**  $\arcsin$

### Часть III

## Криволинейные интегралы

### 67. Спрямолинейные кривые, длина кривой, аддитивность длины кривой

**Определение 26.**  $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n \geq 2}$ ,  $\Gamma \in \mathcal{C}([a, b])$

$\Gamma$  будем называть разомкнутой кривой, если оно биективно

Образ  $\Gamma([a, b])$  будем называть кривой и обозначать  $\Gamma$

$$P \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

Множество точек  $\{\Gamma(t_k)\}_{k=1}^\infty$  будем называть разбиением

$$l\left(\{\Gamma(t_k)\}_{k=1}^\infty\right) := \sum_{k=0}^{m-1} \|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)\|_n$$

Рассмотрим величину

$$\sup_{\{\Gamma(t_k)\}} l\left(\{\Gamma(t_k)\}_{k=1}^\infty\right)$$

Если  $\sup < \infty$ , то  $\Gamma$  будем называть прямолинейной, а  $\sup$  — длиной  $\Gamma$

$$\Gamma_{[a,c]}(t) := \Gamma(t)|_{[a,c]}, \quad \Gamma_{[c,b]}(t) := \Gamma(t)|_{[c,b]}$$

**Утверждение 13.** Если  $\Gamma$  прямолинейна, то  $\Gamma_{[a,c]}$  и  $\Gamma_{[c,b]}$  тоже прямолинейны, и

$$l\left(\Gamma([a, b])\right) = l\left(\Gamma([a, c])\right) + l\left(\Gamma([c, b])\right)$$

**Доказательство.** Возьмём  $c \in (t_{k_0}, t_{k_0+1})$

$$\|\Gamma(t_{k_0+1}) - \Gamma(t_{k_0})\| \leq \|\Gamma(t_{k_0+1}) - \Gamma(c)\| + \|\Gamma(c) - \Gamma(t_{k_0})\|$$

$$l\left(\{\Gamma(t_k)\}_{k=1}^m\right) \leq l\left(\{\Gamma(t_k) \cup \Gamma(c)\}_{k=1}^\infty\right)$$

$$l\left(\{\Gamma(t_k) \cup \Gamma(c)\}\right) = l\left(\{\Gamma(t_k)\}_{k=1}^{k_0} \cup \Gamma(c)\right) + l\left(\{\Gamma(t_k)\}_{k=k_0+1}^m \cup \Gamma(c)\right)$$

**TODO:** Дописать доказательство

□

### 68. Непрерывность длины кривой как функции от параметра

**Определение 27.**  $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

Будем говорить, что  $\Gamma$  —  $C^1$ -кривая, если  $\Gamma \in \mathcal{C}^1([a, b])$

$$\Gamma(t) =: \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{bmatrix}$$



$\Gamma - C^1$  кривая, если  $\gamma_k \in \mathcal{C}^1([a, b]) \quad \forall k = 1, \dots, n$

$$\mathcal{D}\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma'_1(t) \\ \vdots \\ \gamma'_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\|\mathcal{D}\Gamma(t)\| = \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|_n$$

**TODO:** Тут нет про непрерывность

## 69. Вычисление длины гладкой кривой

**Лемма 3.**  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad F \in \mathcal{C}([a, b])$

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

Определим символ:

$$\int_a^b F(t) \, dt := \begin{bmatrix} \int_a^b f_1(t) \, dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(t) \, dt \end{bmatrix}$$

Тогда справедливо соотношение:

$$\left\| \int_a^b F(t) \, dt \right\| \leq \int_a^b \|F(t)\| \, dt$$

**Доказательство.** Будем считать, что  $\int_a^b F(t) \, dt \neq \mathbb{O}_n$  (иначе — очевидно)

Обозначим  $q := \left\| \int_a^b F(t) \, dt \right\| > 0$

Введём числа

$$\alpha_k := \int_a^b f_k(t) \, dt, \quad a_k := \frac{\alpha_k}{q}$$

Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^n a_k \alpha_k \stackrel{\text{def } a_k}{=} \sum \frac{\alpha_k}{q} \alpha_k = \frac{1}{q} \sum \alpha_k^2 \stackrel{\text{def } \alpha_k, q}{=} \frac{q^2}{q} = q \quad (307)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k \alpha_k \sum a_k \int_a^b f_k(t) \, dt &= \int_a^b \sum a_k f_k(t) \, dt \stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \int_a^b \left( \sum a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum f_k^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} \, dt = \\ &= \left( \sum a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \int_a^b \left( \sum f_k^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} \, dt = \left( \sum a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \int_a^b \|F(t)\| \, dt \quad (308) \end{aligned}$$

$$\sum a_k^2 \stackrel{\text{def } a_k}{=} \sum \frac{\alpha_k^2}{q^2} = \frac{1}{q^2} \sum \alpha_k^2 = \frac{q^2}{q^2} = 1 \quad (309)$$

$$(311), (312), (313) \implies \left\| \int_a^b F(t) \, dt \right\| = q \leq 1 \cdot \int_a^b \|F(t)\| \, dt$$

□

**Теорема 56.**  $\Gamma \in \mathcal{C}^1([a, b])$

$$\implies l(\Gamma) = \int_a^b \|\Gamma'(t)\| \, dt$$

### Доказательство.

- $l \leq \int$

Пусть имеется любое разбиение любой  $\Gamma$ :

$$\{\Gamma(t_k)\}_{k=1}^{\infty}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k) &= \begin{bmatrix} \gamma_1(t_{k+1}) - \gamma_1(t_k) \\ \vdots \\ \gamma_n(t_{k+1}) - \gamma_n(t_k) \end{bmatrix} \xlongequal[\text{ф. Ньютона—Лейбница}]{} \\ &= \begin{bmatrix} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \gamma'_1(t) \, dt \\ \vdots \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \gamma'_n(t) \, dt \end{bmatrix} \xlongequal[\text{def } \int F]{} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathcal{D}\Gamma(t) \, dt \\ \xRightarrow{\text{лемма}} \|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)\| &= \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathcal{D}\Gamma(t) \, dt \right\| \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| \, dt \\ \Rightarrow \sum_{k=0}^{m-1} \|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)\| &\leq \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| \, dt = \int_a^b \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| \, dt \end{aligned} \quad (310)$$

Перепишем в обозначениях длины:

$$l\left(\{\Gamma(t_k)\}_{k=1}^{\infty}\right) \leq \int_a^b \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| \, dt \Rightarrow l(\Gamma) \leq \int_a^b \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| \, dt$$

- $l \geq \int$

т. к.  $\Gamma \in C^1$ ,

$$\gamma'_k \in \mathcal{C}([a, b])$$

То есть,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall t'', t' \in [a, b] \quad \left( |t'' - t'| < \delta \Rightarrow |\gamma'_1(t'') - \gamma'_1(t')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \right), \quad k = 1, \dots, n \quad (311)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\gamma'_1(t'') - \gamma'_1(t')\right)^2 + \dots + \left(\gamma'_n(t'') - \gamma'_n(t')\right)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n}} \cdot n = \varepsilon \quad (312)$$

$$\Leftrightarrow \|\mathcal{D}\Gamma(t'') - \mathcal{D}\Gamma(t')\| < \varepsilon$$

$$\stackrel{\Delta}{\leq} \left| \|\mathcal{D}\Gamma(t'')\| - \|\mathcal{D}\Gamma(t')\| \right| \leq \|\mathcal{D}\Gamma(t'') - \mathcal{D}\Gamma(t')\| < \varepsilon \quad (313)$$

Возьмём разбиение  $\{\Gamma(t_k)\}_{k=1}^m$  такое, что  $t_{k-1} - t_k < \delta \quad k = 0, \dots, m-1$   
Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k) - (t_{k+1} - t_k)\mathcal{D}\Gamma(t_k) &= \begin{bmatrix} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \gamma'_1(t) \, dt \\ \vdots \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \gamma'_n(t) \, dt \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (t_{k+1} - t_k)\gamma'_1(t_k) \\ \vdots \\ (t_{k+1} - t_k)\gamma'_n(t_k) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\gamma'_1(t) - \gamma'_1(t_k)\right) \, dt \\ \vdots \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\gamma'_n(t) - \gamma'_n(t_k)\right) \, dt \end{bmatrix} \xlongequal[\text{def } \int F]{} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathcal{D}\Gamma(t) - \mathcal{D}\Gamma(t_k) \, dt \end{aligned} \quad (314)$$

Применим лемму:

$$\begin{aligned} \|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k) - (t_{k+1} - t_k)\mathcal{D}\Gamma(t_k)\| &\leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}\Gamma(t) + \mathcal{D}\Gamma(t_k)\| \, dt \stackrel{(316)}{\leq} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varepsilon \, dt = \varepsilon(t_{k+1} - t_k) \\ \Rightarrow \|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)\| &\stackrel{\Delta}{\geq} \|(t_{k+1} - t_k)\mathcal{D}\Gamma(t_k)\| - \varepsilon(t_{k+1} - t_k) \end{aligned} \quad (315)$$

$$(t_{k+1} - t_k) \|\mathcal{D}\Gamma(t_k)\| = \sqrt{(t_{k+1} - t_k)^2 \left(\gamma'_1(t_k)\right)^2 + \dots + (t_{k+1} - t_k)^2 \left(\gamma'_n(t_k)\right)^2} \quad (316)$$

Если взять  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ , то

$$\|\mathcal{D}\Gamma(t_k)\| \geq \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| - \|\mathcal{D}\Gamma(t_k) - \mathcal{D}\Gamma(t)\| > \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| - \varepsilon$$

Проинтегрируем:

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}\Gamma(t_k)\| \, dt &> \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| \, dt - \varepsilon \int_{t_k}^{t_{k+1}} dt \\ (t_{k+1} - t_k) \|\mathcal{D}\Gamma(t_k)\| &\geq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| \, dt - \varepsilon(t_{k+1} - t_k) \end{aligned} \quad (317)$$

$$(319), (320), (321) \Rightarrow \|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)\| > \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| \, dt - \varepsilon(t_{k+1} - t_k) \quad (318)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{m-1} \|\Gamma(t_{k+1}) - \Gamma(t_k)\| > \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| \, dt - \varepsilon \sum_{k=0}^{m-1} (t_{k+1} - t_k) = \int_a^b \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| \, dt - \varepsilon(b - a) \quad (319)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow l\left(\{\Gamma(t_k)\}_{k=0}^m\right) &> \int_a^b \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| \, dt - \varepsilon(b - a) \\ \Rightarrow l(\Gamma) &> \int_a^b \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| \, dt - \varepsilon(b - a) \\ \Rightarrow l(\Gamma) &\geq \int_a^b \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| \, dt \end{aligned}$$

□

## 70. Определение криволинейного интеграла первого рода; суммы Римана криволинейного интеграла первого рода; криволинейный интеграл первого рода как предел сумм Римана

**Определение 28.**  $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Gamma \in C^1$ ,  $f \in \mathcal{C}(\Gamma_{(\text{образ})})$

Криволинейным интегралом первого рода по кривой  $\Gamma$  называется

$$\int_{\Gamma f(M)} := d l(M) \int_a^b f(\Gamma(t)) \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| \, dt$$

**Определение 29.**  $\Gamma_\circ : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $c_0 = a < c_1 < \dots < c_m = b$

$\forall [c_k, c_{k+1}] \quad \Gamma_\circ([c_k, c_{k+1}]) - C^1\text{-кривая}$

$f \in \mathcal{C}(\Gamma_0)$

Криволинейный интеграл первого рода для “кусочной” кривой определяется как

$$\int_{\Gamma_0} f(M) \, dl(M) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\Gamma_0([c_k, c_{k+1}])} f(M) \, dl(M)$$

**Определение 30.**  $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  —  $C^1$ -кривая,  $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$   
 $\mathbf{T} = \{t_k\}_{k=1}^m$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$  — разбиение,  $\mathbf{P} = \{\tau_k\}_{k=1}^m$ ,  $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$  — оснащение

$$S_{\Gamma}(f, \mathbf{T}, \mathbf{P}) := \sum_{k=1}^m f(\Gamma(\tau_k)) l(\Gamma([t_{k-1}, t_k]))$$

**Теорема 57.**

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall \mathbf{T} : t_k - t_{k-1} < \delta \quad \forall \mathbf{P} \quad \left| S_{\Gamma}(f, \mathbf{T}, \mathbf{P}) - \int_{\Gamma} f(M) \, dl(M) \right| < \varepsilon$$

**Доказательство.**  $\Gamma([a, b])$  — компакт в  $\mathbb{R}^n$   
 $f \in \mathcal{C}(\Gamma) \xrightarrow[\text{т. Кантора}]{\text{т. Кантора}} f$  равномерно непрерывна на  $\Gamma$ , т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \lambda > 0 : \quad \forall M', M'' \in \Gamma : \quad \|M'' - M'\| < \lambda \implies |f(M'') - f(M')| < \varepsilon \quad (320)$$

$$\begin{aligned} \Gamma &\in \mathcal{C}^1([a, b]) \\ \Gamma(t) &= \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{bmatrix}, \quad \gamma'_k(t) \in \mathcal{C}([a, b]) \\ &\xrightarrow[\text{т. Вейерштрасса}]{\text{т. Вейерштрасса}} \exists c_1 : |\gamma'_k(t)| \leq c_1 \quad \forall t \in [a, b] \quad \forall k \end{aligned}$$

Рассмотрим любые два значения  $t', t'' \in [a, b]$ .

Применим теорему Лагранжа:

$$|\gamma_k(t'') - \gamma_k(t')| = |\gamma'_k(\tilde{t})(t'' - t')| \leq c_1 |t'' - t'| \quad (321)$$

$$\implies \sqrt{\left(\gamma_1(t'') - \gamma_1(t')\right)^2 + \dots + \left(\gamma_n(t'') - \gamma_n(t')\right)^2} \leq \sqrt{nc^2 |t'' - t'|^2} = \sqrt{nc_1} |t'' - t'| \quad (322)$$

$$\iff \|\Gamma(t'') - \Gamma(t')\| < \sqrt{nc_1} |t'' - t'| \quad (323)$$

Выберем  $\delta$ :

$$\delta := \frac{\lambda}{\sqrt{nc_1}}$$

$$(324), (326), (327), \text{def } \delta \implies \text{при } |t'' - t'| < \delta \quad |f(\Gamma(t'')) - f(\Gamma(t'))| < \varepsilon \quad (324)$$

Обозначим  $M_k := \Gamma(\tau_k)$

$$\begin{aligned} S_{\Gamma}(f, \mathbf{T}, \mathbf{P}) - \int_{\Gamma} f(M) \, dl(M) &= \sum_{k=1}^m f(\Gamma(c_k)) l(\Gamma([t_{k-1}, t_k])) - \sum_{\Gamma([t_{k-1}, t_k])} f(M) \, dl(M) = \\ &= \sum_{\Gamma([t_{k-1}, t_k])} f(M_k) \, dl(M) - \sum_{\Gamma([t_{k-1}, t_k])} f(M) \, dl(M) = \sum_{\Gamma([t_{k-1}, t_k])} (f(M_k) - f(M)) \, dl(M) \end{aligned} \quad (325)$$

$$(328) \implies |f(M_k) - f(M)| < \varepsilon \quad (326)$$

$$\begin{aligned}
(329), (330) \implies |S_\Gamma(f, \mathbf{T}, \mathbf{P}) - \int_\Gamma f(M) \, dl(M)| &\stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{k=1}^m \left| \int_{\Gamma([t_{k-1}, t_k])} (f(M_k) - f(M)) \, dl(M) \right| \\
&\leq \sum_{\Gamma([t_{k-1}, t_k])} \int |f(M_k) - f(M)| \, dl(M) \leq \sum_{\Gamma(t_{k-1}, t_k)} \int \varepsilon \, dl(M) = \varepsilon l(\Gamma([t_{k-1}, t_k])) = \varepsilon l(\Gamma)
\end{aligned}$$

□

## 71. Ориентация кривой, ориентированные кривые

**Определение 31.**  $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n \geq 2}$  — разомкнутая или замкнутая кривая.

$\Gamma(a)$  называется началом кривой,  $\Gamma(b)$  — концом.

Начало и конец задают ориентацию кривой.

$$a < c_1 < \dots < c_m < b$$

Точки  $\Gamma(a), \Gamma(c_1), \dots, \Gamma(c_m), \Gamma(b)$  проходятся в соответствии с выбранной ориентацией.

Рассмотрим образ кривой:

$$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$$

$$\Gamma(a) =: A, \quad \Gamma(b) =: B, \quad \Gamma(c_k) =: M_k$$

Точки  $A, M_1, \dots, M_m, B$  проходятся в соответствии с выбранной ориентацией.

Можно выбрать т. н. обратную ориентацию:

$$\Gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\Gamma_1(t) := \Gamma(a + b - t)$$

$$\Gamma_1(a) = \Gamma(b), \quad \Gamma_1(b) = \Gamma(a)$$

Справедливо следующее топологическое утверждение:

**Теорема 58.** Если имеется разомкнутая или замкнутая кривая в  $\mathbb{R}^n$  (здесь имеется в виду образ), то на ней можно ввести одну из двух ориентаций.

**Без доказательства.**

□

При определении длины кривой мы вводили следующие суммы (записанные теперь через образ):

$$\sum_{k=0}^m \|M_{k+1} - M_k\|$$

Рассмотрим противоположную ориентацию:

$$M'_k = M_{m+1-k}$$

Поменяем индексы:

$$\sum_{k=0}^m \|M_{k+1} - M_k\| = \sum_{k=0}^m \|M_{m+1-k} - M_{m-k}\| = \sum_{k=0}^m \|M'_{k+1} - M'_k\|$$

Таким образом мы доказали, что

**Утверждение 14.** Длина кривой не зависит от ориентации.

**Другая формулировка.** Длина кривой зависит только от её образа.

Рассмотрим  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  — образ замкнутой кривой.

Пусть даны разбиение  $\mathbf{T} = \{t_k\}$  и оснащение  $\mathbf{P} = \{\tau_j\}$ .

$$\Gamma(a) = A, \quad \Gamma(b) = B, \quad \Gamma(t_k) = M_k$$

$$A = B, \quad \Gamma(\tau_j) =: N_j$$

Можно переписать суммы Римана в новых обозначениях:

$$S(f, T, P) = \sum_{k=1}^m f(N_k) l\left(\Gamma(M_{k-1}, M_k)\right)$$

Они (при стремлении диаметра разбиения к нулю) стремились к интегралу первого рода.

Аналогично длине кривой, здесь можно поменять индексы определённым образом.

Таким образом верно следующее:

**Утверждение 15.** Криволинейный интеграл первого рода не зависит от ориентации кривой.

## 72. Определение криволинейного интеграла второго рода; суммы Римана криволинейного интеграла второго рода; криволинейный интеграл второго рода как предел интегральных сумм

**Определение 32.**

$$\overset{\curvearrowright}{\Gamma}(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{bmatrix} - C^1\text{-кривая}, \quad f \in \mathcal{C}(\Gamma)$$

Криволинейным интегралом второго рода по ориентированной кривой функции  $f$  называется

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M) \, dx_j := \int_a^b f(\Gamma(t)) \gamma'_j \, dt$$

**Определение 33.**

$$c_0 = a < c_1 < \dots < c_m < b = c_{m+1}$$

$$\overset{\curvearrowright}{\Gamma}[a, b], \quad \Gamma([c_{k-1}, c_k]) - C^1\text{-кривая при } k = 1, \dots, m+1$$

Тогда

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M) \, dx_j := \sum_{k=1}^{m+1} \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}([c_{k-1}, c_k])} f(M) \, dx_j$$

**Определение 34.**  $\Gamma - C^1$ -кривая,  $f \in \mathcal{C}(\Gamma)$ ,  $T = \{t_k\}_{k=0}^m$ ,  $P = \{\tau_k\}_{k=1}^m$ ,  $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$   
Суммой Римана для интеграла второго рода будем называть

$$S_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}}(f, T, P, j) = \sum_{k=1}^m f(\Gamma(\tau_k)) \left( \gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1}) \right)$$

**Теорема 59.**  $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} - C^1$ -кривая

$$\implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall T : t_{k+1} - t_k < \delta \quad \forall P \quad \left| S_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}}(f, T, P, j) - \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M) \, dx_j \right| < \varepsilon$$

**Доказательство.**  $\gamma'_\nu \in \mathcal{C}([a, b])$

$$c_1 > 0 \quad |\gamma'_n(t)| \leq c_1 \quad \forall t \in [a, b], \quad \nu = 1, \dots, n \quad (327)$$

$$\int_a^b f(\Gamma(t))\gamma'_j(t) \, dt \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\Gamma(t)) \, dt \quad (328)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbf{s}(\dots) - \int_a^b f(\Gamma(t))\gamma'_j(t) \, dt &\stackrel{\text{def S}}{=} \\ &= \sum_{k=1}^m \left( f(\Gamma(\tau_k))(\gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1})) - \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\Gamma(t))\gamma'_j(t) \, dt \right) \stackrel{\text{Ф. Ньютона-Лейбница}}{=} \\ &= \sum_{k=1}^m \left( f(\Gamma(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'_j(t) \, dt - \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\Gamma(t))\gamma'_j(t) \, dt \right) \stackrel{\text{в первом слагаемом вносим константу}}{\stackrel{\text{разность интегралов как интеграл разности}}{=}} \\ &= \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left( f(\Gamma(\tau_k)) - f(\Gamma(t)) \right) \gamma'_j(t) \, dt \quad (329) \end{aligned}$$

По теореме Кантора  $f$  равномерно непрерывна на  $\Gamma$ :

$$\exists \lambda > 0 : \quad \forall M', M'' \in \Gamma \quad \left( \|M'' - M'\| < \lambda \implies |f(M'') - f(M')| < \varepsilon \right) \quad (330)$$

В конце прошлой лекции мы выяснили, что

$$|t'' - t'| < \delta \implies \|\Gamma(t'') - \Gamma(t')\| \leq c_1 \sqrt{n} \delta \quad (331)$$

$c_1$  играло ту же роль, что сейчас  $\varepsilon$ .

Выберем  $\delta$  так, чтобы выполнялось

$$c_1 \sqrt{n} \delta = \lambda \quad (332)$$

Если  $t_k - t_{k-1} < 0$ , то при  $t \in [t_{k-1}, t_k]$ ,  $\tau \in [t_{k-1}, t_k]$  выполнено

$$|t - \tau| < \delta, \quad k = 1, \dots, m$$

Тогда

$$(334), (335), (336) \implies \left| f(\Gamma(\tau_k)) - f(\Gamma(t)) \right| < \varepsilon \quad (333)$$

$$\begin{aligned} \stackrel{(333)}{\implies} \left| \mathbf{s}_{\Gamma}(\dots) - \int_{\Gamma} f(M) \, dx_j \right| &\stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{k=1}^m \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left( f(\Gamma(\tau_k)) - f(\Gamma(t)) \right) \gamma'_j \, dt \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left| f(\Gamma(\tau_k)) - f(\Gamma(t)) \right| \cdot |\gamma'_j| \, dt < \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varepsilon |\gamma'_j(t)| \, dt = \\ &= \varepsilon \int_a^b |\gamma'_j(t)| \, dt \stackrel{|\gamma'_j(t)| \leq \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|_n}{\leq} \varepsilon \int_a^b \|\mathcal{D}\Gamma(t)\| \, dt = \varepsilon l(\Gamma) \end{aligned}$$

□

### 73. Зависимость криволинейного интеграла второго рода от ориентации кривой

**Следствие.**

$$\begin{aligned} \Gamma(t_k) =: M_k &= \begin{bmatrix} x_{1k} \\ \vdots \\ x_{nk} \end{bmatrix}, \quad \Gamma(\tau_k) =: N_k \\ \implies x_{jk} &= \gamma_j(t_k) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_{\Gamma}(f, T, P, j) = \sum_{k=1}^m f(N_k)(x_{jk} - x_{j_{k-1}})$$

$N_k$  лежит на дуге  $\Gamma(M_{k-1}, M_k)$

В этой формуле нет отображения. Есть только образ и ориентация.

Значит, криволинейный интеграл второго рода зависит только от образа и ориентации кривой.

**Свойство.** Определим  $t'_\nu := t_{m-\nu}$ ,  $\tau'_\nu := \tau_{m-\nu+1}$

$$T' := \{t_k\}_{k=0}^m, \quad P' := \{\tau_k\}_{k=1}^m, \quad M'_\nu = M_{m-\nu}, \quad N'_\nu = N_{m-\nu+1}$$

В соответствии с выбранной ориентацией проходились точки  $M_0, \dots, M_m$

Точки  $M'_0, \dots, M'_m$  — это те же самые точки, проходимые в обратном порядке. То есть мы имеем дело с противоположной ориентацией  $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}$

$$x'_{j\nu} = x_{j_{m-\nu}}$$

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \sum_{k=1}^m f(N'_k)(x'_{jk} - x'_{j_{k-1}}) = \boxed{S_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}}(f, T', P', j)} = \sum_{k=1}^m f(N_{m-k+1})(x_{j_{m-k}} - x_{j_{m-k+1}}) = \\ &= - \sum_{k=1}^m f(N_{m-k+1})(x_{j_{m-k+1}} - x_{j_{m-k}}) \stackrel{m-k+1:=\nu}{=} - \sum_{\nu=m}^1 f(N_\nu)(x_{j_\nu} - x_{j_{\nu-1}}) \stackrel{k:=\nu}{=} \boxed{-S_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}}(f, T, P, j)} \end{aligned}$$

## 74. Свойства криволинейного интеграла второго рода

**Свойства.**

$$1. \overset{\curvearrowright}{\Gamma} = \bigcup_{j=1}^l \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_j, \quad \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_j - C^1\text{-кривая}, \quad f \in \mathcal{C}(\Gamma)$$

$$\Rightarrow \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M) dx_j = - \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M) dx_j$$

$$2. \Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Gamma(t) \in \mathcal{C}([a, b]), \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}[a,b]} c dx_j = c(\gamma_j(b) - \gamma_j(a))$$

В частности, если  $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ , то

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} = dx_j 0$$

$$3. \overset{\curvearrowright}{\Gamma} = \bigcup_{\nu=1}^l \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_\nu, \quad f \in \mathcal{C}(\Gamma)$$

$$\left| \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M) dx_j \right| \leq \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} |f(M)| dl(M)$$

**Доказательство.**



1. • Докажем для  $C^1$ -кривой (не кусочной):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall T \quad \forall P : t_k - t_{k-1} < \delta \quad \left| \mathbf{S}_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}}(f, T, P, j) - \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M) \, dx_j \right| < \varepsilon$$

В силу важного свойства,

$$\left| \mathbf{S}_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}}(f, T', P', j) - \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M) \, dx_j \right| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M) \, dx_j + \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M) \, dx_j \right| &= \\ &= \left| \left( \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M) \, dx_j - \mathbf{S}_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}}(f, T, P, j) \right) + \left( \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M) \, dx_j - \mathbf{S}_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}}(f, T', P', j) \right) \right| \stackrel{\Delta}{\leq} \\ &\leq \left| \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M) \, dx_j - \mathbf{S}_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}}(f, T, P, j) \right| + \left| \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M) \, dx_j - \mathbf{S}_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}}(f, T', P', j) \right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

- Общий случай:

$$\overset{\curvearrowright}{\Gamma} = \bigcup_{\nu=1}^l \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_{\nu} \quad \Longleftrightarrow \quad \overset{\curvearrowright}{\Gamma} = \bigcup_{\nu=1}^l \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_{\nu}$$

$$\begin{aligned} \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M) \, dx_j &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^l \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_{\nu}} f(M) \, dx_j = \sum_{\nu=1}^l \left( - \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_{\nu}} f(M) \, dx_j \right) = \\ &= - \sum_{\nu=1}^l \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M) \, dx_j \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M) \, dx_j \end{aligned}$$

2. •  $C^1$ -кривая

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} \stackrel{\text{def}}{=} dx_j \int_a^b c \gamma'_j(t) \, dt \stackrel{\text{ф. Ньютона-Лейбница}}{=} c(\gamma_j(b) - \gamma_j(a))$$

- $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} = \bigcup_{\nu=1}^l \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_{\nu}$ ,  $\Gamma([t_{k-1}, t_k])$  —  $C^1$ -кривая

$$\int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} c \, dx_j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^l \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_{\nu} [t_{\nu-1}, t_{\nu}]} = dx_j \sum_{\nu=1}^l c(\gamma(t_{\nu}) - \gamma(t_{\nu-1})) = c(\gamma(t_l) - \gamma(t_0)) \stackrel{\text{def } t_0, t_l}{=} c(\gamma(b) - \gamma(a))$$

3. •  $\Gamma \in C^1$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(M) \, dx_j \right| &\stackrel{\text{def}}{=} \left| \int_a^b f(\Gamma(t)) \gamma'_j(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(\Gamma(t))| \cdot |\gamma'_j(t)| \, dt \leq \\ &\leq \int_a^b |f(\Gamma(t))| \|\mathcal{D}\Gamma(t)\|_n \, dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Gamma} f(M) \, dl(M) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \Upsilon = \bigcup_{\nu=1}^l \Upsilon_{\nu}, \quad \Upsilon_{\nu} - C^1\text{-кривая}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Upsilon} f(M) \, dx_j \right| &\stackrel{\text{def}}{=} \left| \sum_{\nu=1}^l \int_{\Upsilon_{\nu}} f(M) \, dx_j \right| \leq \sum_{\nu=1}^l \left| \int_{\Upsilon_{\nu}} f(M) \, dx_j \right| \stackrel{\Delta}{\leq} \\ &\leq \sum_{\nu=1}^l \int_{\Upsilon_{\nu}} |f(M)| \, dl(M) = \int_{\Upsilon} |f(M)| \, dl(M) \end{aligned}$$

□

## Часть IV

# Теория функции комплексной переменной

## 75. Определение аналитической в области функции

**Определение 35.**  $E \subset \mathbb{C}$  — область,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) : E \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $u, v : E^* \rightarrow \mathbb{R}$   
Будем говорить, что  $f \in C^1(E)$ , если  $u \in C^1(E^*)$  и  $v \in C^1(E^*)$

**Утверждение 16.**  $f \in C^1(E)$   
Тогда  $f$  дифференцируема в  $\forall z \in E$ .

**Доказательство.** По определению  $u, v \in C^1(E^*)$ , поэтому по достаточному условию дифференцируемости функции  $u, v$  дифференцируемы для  $\forall (x, y) \in E$ .  
Тогда, по определению,  $f^*(x, y)$  дифференцируема  $\forall (x, y) \in E$ .  
Значит,  $f$  дифференцируема для  $\forall z \in E$ . □

**Определение 36.**  $E \subset \mathbb{C}$  — область,  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$   
Функцию  $f$  будем называть аналитической, если

1.  $f \in C^1(E)$ ;
2.  $\forall z \in E \quad f'_{\bar{z}} = 0$ .

**Замечание.** По предыдущему утверждению  $f(z)$  дифференцируема  $\forall z \in E$ , поэтому для  $\forall z \in E$  определены  $f'_x(z), f'_y(z), f'_z(z), f'_{\bar{z}}(z)$ .

**Обозначение.** Множество всех функций, аналитических в  $E$ , будем обозначать  $A(E)$ .

## 76. Свойства частных производных комплекснозначных функций

**Свойства.**  $E \subset \mathbb{C}$  — область,  $z \in E$ ,  $f, g$  дифференцируемы в  $z$ ,  
 $\lambda$  — любой из символов  $x, y, z, \bar{z}$ .

1.  $\left( cf(z) \right)'_{\lambda} = cf'_{\lambda}(z)$
2.  $\left( f(z) + g(z) \right)'_{\lambda} = f'_{\lambda}(z) + g'_{\lambda}(z)$
3.  $\left( f(z)g(z) \right)'_{\lambda} = f'_{\lambda}(z)g(z) + f(z)g'_{\lambda}(z)$

$$4. f(z) \neq 0$$

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)'_{\lambda} = -\frac{f'_{\lambda}(z)}{f^2(z)}$$

$$5. f(z) \neq 0$$

$$\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right)'_{\lambda} = \frac{g'_{\lambda}(z)f(z) - g(z)f'_{\lambda}(z)}{f^2(z)}$$

**Доказательство.** Доказательства проводятся проверкой возникающих тождеств. Докажем для примера 4 при  $\lambda = x$  и при  $\lambda = \bar{z}$ .

Пусть  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $f'_x(z) = u'_x + iv'_x$  (далее не будем писать аргументы).

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{u + iv} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} = \frac{u}{u^2 + v^2} - i \frac{v}{u^2 + v^2}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{f}\right)'_x &= \left(\frac{u}{u^2 + v^2}\right)'_x - i \left(\frac{v}{u^2 + v^2}\right)'_x = \frac{u'_x(u^2 + v^2) - 2u(uu'_x + vv'_x)}{(u^2 + v^2)^2} - i \frac{v'_x(u^2 + v^2) - 2v(uu'_x + vv'_x)}{(u^2 + v^2)^2} = \\ &= \frac{u'_x v^2 - 2uvv'_x - u^2 u'_x - i(v'_x u^2 - 2uvu'_x - v^2 v'_x)}{(u^2 + v^2)^2} = \frac{(u'_x + iv'_x)(v^2 - u^2) - 2uv(v'_x - iu'_x)}{(u^2 + v^2)^2} = \\ &= \frac{f'_x(v^2 - u^2) + 2uvi(u'_x + iv'_x)}{(u^2 + v^2)^2} = f'_x \cdot \frac{v^2 - u^2 + 2uvi}{(u^2 + v^2)^2} = f'_x \cdot \frac{(v + iu)^2}{(u^2 + v^2)^2} = -f'_x \cdot \frac{(u - iv)^2}{(u^2 + v^2)^2} = \\ &= -f'_x \cdot \frac{((u - iv)^2)}{(u - iv)^2(u + iv)^2} = -f'_x \cdot \frac{1}{(u + iv)^2} = -\frac{f'_x}{f^2} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{1}{f}\right)'_x + i \left(\frac{1}{f}\right)'_y \right] = \frac{1}{2} \left( -\frac{f'_x}{f^2} - i \frac{f'_y}{f^2} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{f^2} (f'_x + if'_y) = -\frac{f'_{\bar{z}}}{f^2}$$

□

## 77. Формула для дифференцируемой функции

**Определение 37.** Пусть  $E \subset \mathbb{C}$  — область,  $z_0 \in E$ ,  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$   
 $u, v : E^* \rightarrow \mathbb{R}$

Будем говорить, что  $f$  дифференцируема в точке  $z_0$ , если  $f^*(x, y)$  дифференцируема в точке  $(x_0, y_0)$  в следующем смысле:  
 функции  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  дифференцируемы в точке  $(x_0, y_0)$ .

Пусть  $\sigma := s + it$ ,  $E \subset \mathbb{C}$  — область,  $z_0 \in E$ ,  $z_0 + \sigma \in E$ ,  $z_0 \leftrightarrow (x_0, y_0)$

Предположим, что  $f(z)$  дифференцируема в точке  $z_0$ .

Тогда

$$f(z_0 + \sigma) - f(z_0) = f^*(x_0 + s, y_0 + t) - f^*(x_0, y_0) = \left( u(x_0 + s, y_0 + t) - u(x_0, y_0) \right) + i \left( v(x_0 + s, y_0 + t) - v(x_0, y_0) \right) \quad (334)$$

В силу дифференцируемости  $f$

$$u(x_0 + s, y_0 + t) - u(x_0, y_0) = u'_x(x_0, y_0)s + u'_y(x_0, y_0)t + r_1(s, t), \quad \frac{|r_1(s, t)|}{\sqrt{s^2 + t^2}} = \frac{|r_1(s, t)|}{|\sigma|} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0$$

$$v(x_0 + s, y_0 + t) - v(x_0, y_0) = v'_x(x_0, y_0)s + v'_y(x_0, y_0)t + r_2(s, t), \quad \frac{|r_2(s, t)|}{|\sigma|} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (338) &= \left( u'_x(x_0, y_0)s + u'_y(x_0, y_0)t + r_1(s, t) \right) + i \left( v'_x(x_0, y_0)s + v'_y(x_0, y_0)t + r_2(s, t) \right) = \\ &= \left( u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0) \right) s + \left( u'_y(x_0, y_0) + iv'_y(x_0, y_0) \right) t + r_1(s, t) + ir_2(s, t) = \\ &= f'_x(z_0)s + f'_y(z_0)t + r_1(s, t) + ir_2(s, t) \end{aligned}$$

Положим  $\rho(\sigma) := r_1(s, t) + ir_2(s, t)$ . Тогда

$$\frac{|\rho(\sigma)|}{|\sigma|} = \frac{\sqrt{r_1^2(s, t) + r_2^2(s, t)}}{|\sigma|} = \sqrt{\left(\frac{r_1(s, t)}{|\sigma|}\right)^2 + \left(\frac{r_2(s, t)}{|\sigma|}\right)^2} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0 \quad (335)$$

Понятно, что

$$s = \frac{1}{2}(\sigma + \bar{\sigma}), \quad t = \frac{1}{2i}(\sigma - \bar{\sigma}) = -\frac{i}{2}(\bar{\sigma} - \sigma)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f(z_0 + \sigma) - f(z_0) &= f'_x(z_0) \cdot \frac{1}{2}(\sigma + \bar{\sigma}) + \frac{i}{2}f'_y(z_0)(\bar{\sigma} - \sigma) + \rho(\sigma) = \\ &= \frac{1}{2}\left(f'_x(z_0) - if'_y(z_0)\right)\sigma + \frac{1}{2}\left(f'_x(z_0) + if'_y(z_0)\right)\bar{\sigma} + \rho(\sigma) = f'_z(z_0)\sigma + f'_{\bar{z}}(z_0)\bar{\sigma} + \rho(\sigma) \end{aligned} \quad (336)$$

где для  $\rho(\sigma)$  выполнено (339).

## 78. Первые свойства и первые примеры аналитических функций

**Свойства.**  $f, g \in A(E), \quad c \in E$

1.  $cf \in A(E)$
2.  $f + g \in A(E)$
3.  $fg \in A(E)$
4.  $f(z) \neq 0$

$$\implies \frac{1}{f} \in A(E)$$

5.  $f(z) \neq 0$

$$\implies \frac{g}{f} \in A(E)$$

**Доказательство.** Следует из свойств частных производных, например, 4:

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)'_{\bar{z}} = -\frac{f'_{\bar{z}}(z)}{f^2(z)} = \frac{0}{f^2(z)} = 0$$

□

**Примеры.**

1.  $f(z) \equiv c, \quad c \in \mathbb{C}$

$$c'_x = c'_y \equiv 0 \implies c'_z \equiv 0$$

2.  $f(z) \equiv z$

Уже проверено, что  $z'_{\bar{z}} \equiv 0$

3. Пользуясь свойствами аналитических функций 1., 2., 3. и предыдущими примерами, получаем

$$z^2 \in A(\mathbb{C}), \quad z^3 \in A(\mathbb{C}), \quad \dots, \quad z^n \in A(\mathbb{C})$$

$$P(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n \in A(\mathbb{C})$$

4. Для  $z = x + iy$  положим  $e^z := e^y \cos y + ie^x \sin y$ . Тогда

$$(e^z)'_x = (e^x \cos y)'_x + i(e^x \sin y)'_x = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

$$(e^z)'_y = (e^x \cos y)'_y + i(e^x \sin y)'_y = -e^x \sin y + ie^x \cos y$$

$$(e^z)'_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left((e^z)'_x + i(e^z)'_y\right) = \frac{1}{2}\left(e^x \cos y + ie^x \sin y + i(-e^x \sin y + ie^x \cos y)\right) = 0$$

5. Пусть  $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$ ,  $Q(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m$ ,  $m \geq 1$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$  — все различные корни уравнения  $Q(z) = 0$ ,  $k \leq m$ .

Тогда по примеру 3. и свойству 5.

$$\frac{P(z)}{Q(z)} \in A(\mathbb{C} \setminus \bigcup_{j=1}^k \{\alpha_j\})$$

6. Пусть  $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , для  $z \in D$  пусть  $\varphi$  — аргумент  $z$ ,  $-\pi < \varphi < \pi$ .

Положим  $\ln z := \ln |z| + i\varphi$  для  $z \in D$ .

Если  $z = x + iy$ ,  $|z| > 0$ ,  $z \in D$ , то  $\varphi$  может быть определён разными формулами при  $x > 0$ , при  $y \geq 0$  или при  $y \leq 0$ .

Например, при  $x > 0$   $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$  и тогда

$$\ln z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = i \arctg \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = i \arctg \frac{y}{x}$$

Тогда

$$(\ln z)'_x = \left( \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right)'_x + i \left( \arctg \frac{y}{x} \right)'_x = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \left( -\frac{y}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$(\ln z)'_y = \left( \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right)'_y + i \left( \arctg \frac{y}{x} \right)'_y = \frac{y}{x^2 + y^2} + i \left( \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \right) = \frac{y}{x^2 + y^2} + i \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$(\ln z)'_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \left( (\ln z)'_x + i(\ln z)'_y \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} + i \left( \frac{y}{x^2 + y^2} + i \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \right) = 0$$

Аналогично,  $(\ln z)'_{\bar{z}} = 0$  при  $y \geq 0$  и при  $y \leq 0$ . Получаем

$$\ln z \in A(D)$$

**Утверждение 17** (ещё одно свойство аналитических функций).  $f \in A(E)$ ,  $E$  — область,  $z \in E$ ,  $\sigma \in \mathbb{C}$ ,  $z + \sigma \in E$

Тогда

$$f(z + \sigma) - f(z) = f'_z(z)\sigma + \rho(\sigma), \quad \frac{|\rho(\sigma)|}{|\sigma|} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0 \quad (337)$$

**Доказательство.** Из (340) и того, что  $f \in A(E)$  следует, что

$$f(z - \sigma) - f(z) = f'_z(z)\sigma + f'_{\bar{z}}(z)\bar{\sigma} + \rho(\sigma) = f'_z(z)\sigma + \rho(\sigma)$$

где выполнено (339). □

## 79. Эквивалентные определения аналитических функций

**Теорема 60.**  $E \subset \mathbb{C}$  — область,  $f \in C^1(E)$ ,  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

Следующие условия эквивалентны:

1.  $f'_{\bar{z}}(z) = 0 \quad \forall z \in E$
2.  $f(z + \sigma) = f'_z(z)\sigma + \rho(\sigma) \quad \forall z \in E, \quad \frac{|\rho(\sigma)|}{|\sigma|} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0$
3.  $\forall z = x + iy$  выполнены уравнения Коши—Римана:

$$\left. \begin{aligned} u'_x(x, y) &= v'_y(x, y) \\ u'_y(x, y) &= -v'_x(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (338)$$

4.

$$\forall z \in E \quad \exists \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{f(z + \sigma) - f(z)}{\sigma} \in \mathbb{C} \quad (339)$$

Предел в (349) называется комплексной производной функции  $f$  в точке  $z$  и обозначается  $f'(z)$ .

#### Доказательство.

- Из (346) следует, что  $1. \implies 2.$

- Если выполнено 2., то

$$\frac{f(z + \sigma) - f(z)}{\sigma} = f'_z(z) + \frac{\rho(\sigma)}{\sigma} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} f'_z(z),$$

поэтому  $2. \implies 4.$ , при этом получаем равенство

$$f'(z) = f'_z(z) \quad (340)$$

- Предположим, что выполнено 4.

Положим

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \sigma) - f(z)}{\sigma} &:= f'(z) + \delta(\sigma) \\ \implies f(z + \sigma) - f(z) &= f'(z)\sigma + \sigma\delta(\sigma) \end{aligned}$$

Положим  $\rho_o(\sigma) := \sigma\delta(\sigma)$ . Тогда

$$4. \implies \frac{|\rho_o(\sigma)|}{|\sigma|} = |\delta(\sigma)| \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0$$

Запишем для  $f$  формулу (340):

$$f(z + \sigma) - f(z) = f'_z(z)\sigma + f'_{\bar{z}}(z)\bar{\sigma} + \rho(\sigma), \quad \frac{|\rho(\sigma)|}{|\sigma|} \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} 0$$

Вычитая из неё предыдущую формулу, получаем

$$f'_z(z)\sigma + f'_{\bar{z}}(z)\bar{\sigma} + \rho(\sigma) - f'(z)\sigma - \rho_o(\sigma) = 0$$

Делим на  $\sigma$ :

$$f'_z(z) - f'(z) + f'_{\bar{z}}(z)\frac{\bar{\sigma}}{\sigma} + \frac{\rho(\sigma)}{\sigma} - \frac{\rho_o(\sigma)}{\sigma} = 0$$

или

$$\begin{aligned} f'_{\bar{z}}(z)\frac{\bar{\sigma}}{\sigma} &= f'(z) - f'_z(z) + \frac{\rho_o(\sigma)}{\sigma} - \frac{\rho(\sigma)}{\sigma} \\ f'(z) - f'_z(z) + \frac{\rho_o(\sigma)}{\sigma} - \frac{\rho(\sigma)}{\sigma} &\xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} f'(z) - f'_z(z) \end{aligned}$$

Следовательно, существует  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} f'_{\bar{z}}(z)\frac{\bar{\sigma}}{\sigma} =: A$ .

Если  $\sigma = s > 0$ , то  $\bar{\sigma} = \sigma$  и

$$a = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} f'_{\bar{z}}(z) \cdot 1 = f'_{\bar{z}}(z)$$

Если положить  $\sigma = it$ ,  $t > 0$ , то  $\bar{\sigma} = -it$ , и

$$A = \lim_{t \rightarrow 0^+} f'_{\bar{z}} \cdot \frac{-it}{it} = -f'_{\bar{z}}$$

$$\implies f'_{\bar{z}} = A = 0$$

То есть,  $4. \implies 1.$  и

$$f'_z(z) = f'(z)$$

- Далее,

$$f'_x(z) = u'_x(x, y) + iv'_x(x, y), \quad f'_y(z) = u'_y(x, y) + iv'_y(x, y)$$

$$\begin{aligned} f'_{\bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( f'_x(z) + if'_y(z) \right) = \frac{1}{2} \left( (u'_x(x, y) + iv'_x(x, y)) + i(u'_y(x, y) + iv'_y(x, y)) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( (u'_x(x, y) - v'_y(x, y)) + i(v'_x(x, y) + u'_y(x, y)) \right) \end{aligned}$$

Отсюда 1.  $\iff$  3. □

**Следствие.**  $f \in A(E)$

$$\implies f'(z) = f'_x(z), \quad z \in E$$

**Доказательство.** Имеем

$$\begin{aligned} f'_z &= \frac{1}{2} (f'_x - if'_y), \quad f'_{\bar{z}} = \frac{1}{2} (f'_x + if'_y) \\ \implies f'_x &= f'_z + f'_{\bar{z}} \\ f \in A(E) &\implies f'_z = f'_z + 0 = f'_z = f' \end{aligned}$$
□

## 80. Аналитичность суперпозиции аналитических функций; производная суперпозиции

**Теорема 61.**  $E, G \subset \mathbb{C}$  — области,  $f \in A(E)$ ,  $f(z) \in G \quad \forall z \in E$ ,  $\varphi \in A(G)$   
 $F : E \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $F(z) := \varphi(f(z))$   
 Тогда  $F \in A(E)$ .

**Доказательство.** По определению  $f \in \mathcal{C}^1(E)$ ,  $\varphi \in \mathcal{C}^1(G)$ .

Поэтому, по теореме о матрице Якоби, выполнено соотношение

$$F'(z) = \varphi'(f(z)) \in \mathcal{C}^1(E)$$

Фиксируем  $\forall z \in E$ .

Пусть  $\sigma \in \mathbb{C}$ ,  $\sigma \neq 0$ ,  $z + \sigma \in E$ .

Пусть  $w := f(z)$ ,  $w \in G$ .

Будем использовать теорему об эквивалентных определениях аналитических функций.

Пусть  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda \neq 0$ ,  $w + \lambda \in G$ .

Из условия следует соотношение

$$\varphi(w + \lambda) - \varphi(w) = \varphi'(w)\lambda + r(\lambda), \quad \frac{|r(\lambda)|}{|\lambda|} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$$

Положим  $r(\lambda) =: \lambda\delta(\lambda)$ . Тогда  $\delta(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$ .

Положим  $\delta(0) := 0$ . Тогда можно не рассматривать ограничение  $\lambda \neq 0$  при следующей записи:

$$\varphi(w + \lambda) - \varphi(w) = \varphi'(w)\lambda + \lambda\delta(\lambda)$$

(в этих формулах мы пользовались соотношением  $\varphi'_w(w) = \varphi'(w)$ ).

Положим  $\lambda := f(z + \sigma) - f(z)$ . Тогда  $f(z + \sigma) = f(z) + \lambda = w + \lambda$

$$\begin{aligned} F(z + \sigma) - F(z) &= \varphi(f(z + \sigma)) - \varphi(f(z)) = \varphi(w + \lambda) - \varphi(w) = \varphi'(w)\lambda + \lambda\delta(\lambda) = \\ &= \varphi'(w)\lambda + \left( f(z + \sigma) - f(z) \right) \delta \left( f(z + \sigma) - f(z) \right) \end{aligned}$$

$$\lambda = f(z + \sigma) - f(z) = f'(z)\sigma + \rho(\sigma), \quad \frac{|\rho(\sigma)|}{|\sigma|}$$

Получаем:

$$\begin{aligned} F(z + \sigma) - F(z) &= \varphi'(w) \left( f'(z)\sigma + \rho(\sigma) \right) + \left( f(z + \sigma) - f(z) \right) \delta \left( f(z + \sigma) - f(z) \right) = \\ &= \varphi'(2)f'(z)\sigma + \varphi'(w)\rho(\sigma) + \underbrace{\left( f(z + \sigma) - f(z) \right) \delta \left( f(z + \sigma) - f(z) \right)}_{R(\sigma)} \\ \frac{R(\sigma)}{\sigma} &= \varphi'(w) \frac{\rho(\sigma)}{\sigma} + \frac{f(z + \sigma) - f(z)}{\sigma} \delta \left( f(z + \sigma) - f(z) \right) \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} \varphi'(w) \cdot 0 + f'(z) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Значит,  $F \in A(E)$ . □

**Следствие.** Из последних двух выражений и теоремы о равносильных определениях аналитичности получаем равенство

$$F'(z) = \left( \varphi(f(z)) \right)' = \varphi'(f(z)) \cdot f'(z) \quad (341)$$

## 81. Вычисление $(e^z)'$ , $(\ln z)'$ , $(z^\alpha)'$

### Примеры.

1. Если  $P(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n$ , то  $e^{P(z)} \in A(\mathbb{C})$

2. Пусть  $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \neq 0$   
Уже проверено, что

$$\ln z \in A(D) \implies \alpha \ln z \in A(D) \implies e^{\alpha \ln z} \in A(D)$$

Далее полагаем при  $z \in D$   $z^\alpha := e^{\alpha \ln z}$ .

Рассмотрим случай  $\alpha = 1$ .

$$\ln z \stackrel{\text{def}}{=} \ln |z| + i\varphi$$

$$e^{\ln z} = e^{\ln |z| + i\varphi} \stackrel{\text{def}}{=} e^{\ln |z|} \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = z$$

Полагая  $\ln z = f(z)$ ,  $e^w = \varphi(w)$ , из (345) находим

$$(e^{\ln z})' = (e^w)' \cdot (\ln z)'$$

Пусть  $w = u + iv$

$$(e^w)' = (e^w)'_u = (e^u \cos v + ie^u \sin v)'_u = e^u \cos v + ie^u \sin v = e^w$$

Если  $w = \ln z$ , то

$$\begin{aligned} (e^w)' &= e^w = e^{\ln z} = z \\ \implies (e^{\ln z})' &= z(\ln z)' \end{aligned}$$

Но  $e^{\ln z} = z$

$$\implies (e^{\ln z})' = z' = z'_x = (x + iy)'_x = 1$$

Поэтому

$$z(\ln z)' = 1, \quad (\ln z)' = \frac{1}{z}, \quad z \in D \quad (342)$$



Находим при  $\alpha \neq 0, 1, \quad z \in D$ :

$$\begin{aligned} (z^\alpha)' &= (e^{\alpha \ln z})' = (e^w)'_{w=\alpha \ln z} \cdot (\alpha \ln z)' = e^{\alpha \ln z} \cdot (\alpha \ln z)'_x = \alpha e^{\alpha \ln z} \cdot (\ln z)'_x = \alpha e^{\alpha \ln z} \cdot (\ln z)' = \\ &= \alpha e^{\alpha \ln z} \cdot \frac{1}{z} = \alpha e^{\alpha \ln z} \cdot e^{-\ln z} = \alpha \cdot e^{(\alpha-1) \ln z} = \alpha z^{\alpha-1} \quad (343) \end{aligned}$$

Здесь использовалась формула  $\frac{1}{e^w} = e^{-w}$ . Действительно, если  $w = u + iv$ , то

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^w} &= \frac{1}{e^u(\cos v + i \sin v)} = e^{-u} \cdot \frac{1}{\cos v + i \sin v} = e^{-u} \cdot \frac{\cos v - i \sin v}{\cos^2 v + \sin^2 v} = \\ &= e^{-u} (\cos(-v) + i \sin(-v)) = e^{-u-iv} = e^{-w} \end{aligned}$$

## 82. Аналитичность суммы степенного ряда

**Теорема 62.** Пусть дан степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (344)$$

$R > 0$  — его радиус сходимости,  $B$  — круг сходимости,  $z \in B$ .

Тогда  $f \in A(B)$ .

Существует комплексная производная  $f'(z)$ :

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} \quad (345)$$

**Доказательство.**

- Рассмотрим сначала случай, когда  $z_0 = 0$ .

Поскольку  $|z| < R$ ,  $\exists r : |r| + r < R$ . Зафиксируем  $z$  и  $r$ .

Так как  $|z| + r < R$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c|(|z| + r)^n < \infty \quad (346)$$

и  $\bar{B}_r(z) \subset B$ , то есть

$$\forall w \in \mathbb{C} : |w| \leq r \quad z + w \in B \implies f(z + w) \text{ абс. сходится}$$

Докажем, что при  $w \rightarrow 0$  дробь  $\frac{f(z+w)-f(z)}{w}$  стремится к правой части (349) с  $z_0 = 0$ , то есть к сумме  $A := \sum n c_n z^{n-1}$ .

Для этого надо показать, что при  $w \rightarrow 0$  бесконечно мала разность

$$\Delta w := \frac{f(z+w) - f(z)}{w} - A = \frac{1}{w} \sum c_n ((z+w)^n - z^n) - A = \sum c_n \left( \frac{(z+w)^n - z^n}{w} - n z^{n-1} \right)$$

В полученном ряде слагаемые, соответствующие  $n = 0, 1$ , нулевые. Поэтому

$$|\Delta w| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} c_n \left( \frac{(z+w)^n - z^n}{w} - n z^{n-1} \right) \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} |c_n| \cdot \underbrace{\left| \frac{(z+w)^n - z^n}{w} - n z^{n-1} \right|}_{\rho_n(w)}$$

Теперь надо оценить разности  $\rho_n(w)$  при  $n \geq 2$ . Воспользуемся биномом Ньютона:

$$\rho_n(w) = \frac{1}{w} \left( \sum_{k=0}^n C_n^k z^{n-k} w^k - z^n \right) - n z^{n-1} = \frac{1}{w} \sum_{k=1}^n C_n^k z^{n-k} w^k - n z^{n-1} = \frac{1}{w} \sum_{k=2}^n C_n^k z^{n-k} w^k$$

Поскольку  $|w| \leq r$ , отсюда следует нужная нам оценка:

$$|rho_n(w)| = \left| w \sum_{k=2}^n C_n^k z^{n-k} w^{k-2} \right| \leq |w| \sum_{k=2}^n C_n^k |z|^{n-k} |w|^{k-2} \leq |w| \sum_{k=2}^n C_n^k |z|^{n-k} r^{k-2} \leq \frac{|w|}{r^2} (|z| + r)^n$$

Таким образом,

$$|\Delta w| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |\rho_n(w)| \leq \frac{|w|}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot (|z| + r)^n$$

Благодаря неравенству (350), отсюда вытекает, что  $\Delta w \xrightarrow{w \rightarrow 0} 0$ .

- Пусть теперь  $z_0 \neq 0$ .

Положим  $\tilde{z} := z - \tilde{z}_0$ .

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \tilde{z}^n =: \tilde{f}(\tilde{z}), \quad f(z + w) = \tilde{f}(\tilde{z} + w)$$

Ряд  $\tilde{f}(\tilde{z})$  — это первый случай. Продифференцируем его:

$$\frac{f(z + w) - f(z)}{w} = \frac{\tilde{f}(\tilde{z} + w) - \tilde{f}(\tilde{z})}{w} \xrightarrow{w \rightarrow 0} \tilde{f}'(\tilde{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n \tilde{z}^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}$$

□