Оглавление

Глава 1

ТФКП

1.1. Продолжаем свойства криволинейных интегралов

Свойство (6). $\overset{\curvearrowright}{\Gamma} \in \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{C}(\Gamma), \qquad c \in \overset{\curvearrowright}{\Gamma}, \qquad \overset{\curvearrowright}{\Gamma} = \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1 \cup \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_2, \qquad \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1 \cap \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_2 = \{\, c \,\}$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_2} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

Доказательство. Докажем для случая, когда Γ — гладкая кривая.

$$\overset{\curvearrowright}{\Gamma}([a,b]) : [a,b] \to \mathbb{C} \qquad \Longleftrightarrow \quad \overset{\curvearrowright}{\Gamma}^{*}([a,b])$$

$$t \in [a,b], \qquad \Gamma^* : M(t), \qquad M(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}^*} f\big(M(t)\big)\,\mathrm{d}\,x + i \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}^*} f\big(M(t)\big)\,\mathrm{d}\,y = \int_a^b f^*\big(M(t)\big)x'(t)\,\mathrm{d}\,t + i\int_a^b f^*\big(M(t)\big)y'(t)\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \int_a^b f^*\big(M(t)\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b f\big(z(t)\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big)\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \int_a^{t_0} f\big(z(t)\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big)\,\mathrm{d}\,t + \int_{t_0}^b f\big(z(t)\big)\big(x'(t) + iy'(t)\big)\,\mathrm{d}\,t$$

Прочитывая эти равенства теперь в обратном порядке, получаем, что это равно

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_1} f(z)\,\mathrm{d}\,z + \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}_2} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

Случай для кусочно-гладких кривых доказывается аналогично. □

По индукции получаем следующее утверждение:

Свойство. $c_1, \ldots, c_n \in \overset{\curvearrowright}{\Gamma}$

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{j=1}^{n+1} \overset{\curvearrowright}{\Gamma}_j f(z)$$

Свойство (7). $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma} \subset \mathbb{C}, \qquad f : \Gamma \to \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{C}\big(\Gamma\big), \qquad \Gamma \leftrightarrow \Gamma^*$

$$\left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(z)\,\mathrm{d}\,z \right| \le \int\limits_{\Gamma^*} |f^*(M)|\,\mathrm{d}\,l(M)$$

В дальнейшем мы будем такой интеграл называть обозначать $\int\limits_{\Gamma} |f(z)|\,|\,\mathrm{d}\,z|$.

Доказательство. $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}([a,b]) \to \mathbb{C}, \qquad \mathtt{T} = \{\, t_j \,\}_{j=0}^{n}, \qquad \mathtt{P} = \{\, \tau_j \,\}_{,=1}^{n} \qquad z_j = z(t_j), \qquad z_j' = z(\tau_j)$

$$\mathtt{S}(f,\mathtt{T},\mathtt{P}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} f(z_j')(z_j - z_{j-1})$$

$$|\mathtt{S}| \le \sum_{j=1}^{n} |f(z_j')| z_j - z_{j-1}|$$

Перейдём к плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$z(t) = x(t) + iy(t), \qquad M_j = \begin{bmatrix} x(t_j) \\ y(t_j) \end{bmatrix}, \qquad x_j(t) = x(t_j), \quad y_j = y(t_j)$$

$$M_j' = \begin{bmatrix} x(\tau_j) \\ y(\tau_j) \end{bmatrix}, \qquad x_j' = x(\tau_j), \quad y_j' = y(\tau_j)$$

$$\left\|\overline{M_j\ M_{j-1}}\right\| \rightleftharpoons \|\mathrm{dist}(M_j, M_{j-1})\| = |z_j - z_{j-1}|$$

$$\left\|\overline{M_{j-1}\ M_j}\right\| \le l\Gamma^*(M_{j-1}, M_j) \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{j=1}^{n} |f(z_j')| \cdot |z - z_{j-1}| \le \sum_{j=1}^{n} |f^*(M_j')| \cdot l\Gamma(M_{j-1}, M_j) =: \mathtt{S}^*(|f|,\mathtt{T},\mathtt{P})$$

$$|\mathtt{S}| \le \mathtt{S}^*$$

Перейдём к пределу:

$$\left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(z)\,\mathrm{d}\,z \right| \le \int\limits_{\Gamma} |f(z)|\,|\,\mathrm{d}\,z|$$

$\square$

Свойство (8). $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma} \subset \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{C}\big(\Gamma\big), \qquad \theta \in (0, 2\pi)$

$$\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_\theta \coloneqq e^{i\theta}\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}$$

То есть,

$$\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_\theta = \{\, z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i\theta}\zeta, \quad \zeta \in \Gamma \,\}$$

$$f_\theta(z) \coloneqq f\big(e^{-i\theta} z\big), \quad z \in \Gamma_\theta$$

$$\Longrightarrow \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta = e^{-i\theta} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}_\theta} f_\theta(z)\,\mathrm{d}\,z$$

Доказательство. $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}([a,b]) : [a,b] \to \mathbb{C}, \qquad \mathtt{T} = \{\, t_j \,\}_{,=0}^{n} \quad \mathtt{P} = \{\, \tau_j \,\}_{j=1}^{n}, \qquad z_j = z(t_j), \quad z_j' = z(\tau_j)$

$$\mathtt{S}_\Gamma(f,\mathtt{T},\mathtt{P}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} f(z_j')(z_j - z_{j-1}) = e^{-i\theta} \sum_{j=1}^{n} f\left(e^{-i\theta}(e^{i\theta})\right)(e^{i\theta} z_j - e^{i\theta} z_{j-1}) =$$

$$= e^{-i\theta} \sum_{j=1}^{n} f_\theta(e^{i\theta} z_j')(e^{i\theta} z_j - e^{i\theta} z_{j-1}) = e^{-i\theta} \mathtt{S}_{\Gamma_\theta}(f_\theta,\mathtt{T},\mathtt{P})$$

$\square$

1.2. Серия более общих утверждений

1.2.1. Теорема Коши для прямоугольника

Теорема 1. $G \subset \mathbb{C}, \qquad f \in A(G), \qquad Q = \{\, z = x + iy \mid a \le x \le b, \quad p \le y \le q \,\} \subset G$

Граница Q ориентирована в положительном направлении: $\overset{\circlearrowleft}{\partial Q}$.

$$\implies \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\partial Q}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0 \tag{1.1}$$

Примечание. Здесь ориентация роли не играет.

Доказательство. Обозначим

$$A = a + pi, \qquad B = b + pi, \qquad C = b + qi, \qquad D = a + qi$$

$$\int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\partial Q}} \cdots = \int\limits_{\overrightarrow{AB}} + \int\limits_{\overrightarrow{BC}} + \int\limits_{\overrightarrow{CD}} + \int\limits_{\overrightarrow{DA}} = \Bigg(\int\limits_{\overrightarrow{AB}} - \int\limits_{\overrightarrow{DC}}\Bigg) + \Bigg(\int\limits_{\overrightarrow{BC}} - \int\limits_{\overrightarrow{AD}}\Bigg)$$

Рассмотрим параметризацию AB:

$$\overrightarrow{AB} = \{\, t + pi \mid t \in [a, b] \,\}$$

$$\int\limits_{\overrightarrow{AB}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_a^b f(t + pi)\,\mathrm{d}\,t$$

Аналогично,

$$\overrightarrow{DC} = \{\, t + qi \,\}, \qquad \overrightarrow{BC} = \{\, b + it \,\}, \qquad \overrightarrow{AD} = a + ti$$

$$\int\limits_{\overrightarrow{DC}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_a^b f(t + qi)\,\mathrm{d}\,t, \qquad \int\limits_{\overrightarrow{BC}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = i\int_p^q f(b + ti)\,\mathrm{d}\,t, \qquad \int\limits_{\overrightarrow{AD}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = i\int_p^q f(a + ti)\,\mathrm{d}\,t$$

Всё это означает, что

$$\int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\partial Q}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \left(\int_a^b f(t + pi)\,\mathrm{d}\,t - \int_a^b f(t + qi)\,\mathrm{d}\,t\right) + \left(i\int_p^q f(b + ti)\,\mathrm{d}\,t - i\int_p^q f(a + ti)\,\mathrm{d}\,t\right) \tag{1.2}$$

Перейдём к плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$\int_a^b f^*(t, q)\,\mathrm{d}\,t - \int_a^b f^*(t, p)\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b \Big(f^*(x, q) - f^*(x, p)\Big)\,\mathrm{d}\,x$$

$f^* \in \mathcal{C}^1\big(G^*\big)$, значит, можно применить формулу Ньютона—Лейбница:

$$= \int_a^b \left(\int_p^q f_y^{*\prime}(x, y)\,\mathrm{d}\,y\right)\mathrm{d}\,x \tag{1.3}$$

Аналогично,

$$\int_p^q f^*(b, y) - f^*(a, y)\,\mathrm{d}\,y = \int_p^q \left(\int_a^b f_x^{*\prime}(x, y)\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,y \tag{1.4}$$

$$(1.2), (1.3), (1.4) \implies \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{\partial Q}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = -\int_a^b \int_p^q f_y^{*\prime}(x, y))\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x + i\int_p^q \int_a^b f_x^{*\prime}(x, y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y =$$

$$= \int_a^b \int_p^q -f_y^{*\prime} + i f_x^{*\prime}\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x = 2i\int_a^b \int_p^q \frac{1}{2}\Big(f_x^{*\prime} + i f_x^{*\prime}\Big)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x \overset{\text{def}}{=} 2i\int_a^b \int_p^q \underbrace{f_{\overline{z}}^{\prime}}_{0}\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x = 0$$

$\square$