САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т.М.Косовская

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 4
I. Пропозициональные формулы 7
I.1. Определение пропозициональной формулы 7
I.2. Таблицы истинности. Примеры построения таблиц 9
I.3. Тавтологичность, выполнимость, противоречивость и равносильность пропозициональных формул 12
I.4. Основные равносильности 14
I.5. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы 13
III. Исчисления высказываний 14
III.1. Секвенциальное исчисление высказываний 16
III.1.1. Обоснование секвенциального исчисления высказываний . . 18
III.1.2. Допустимые и производные правила вывода 21
III.2. Метод резолюций для исчисления высказываний 23
III.2.1. Основные понятия метода резолюций для исчисления высказываний 23
III.2.2. Доказательство логического следования методом резолюций для исчисления высказываний 24
IV. Формулы исчисления предикатов 26
IV.1. Основные определения 26
IV.2. Свободные и связанные вхождения предметных переменных . 28
IV.3. Интерпретации формул 29
IV.4. Истинность, ложность, выполнимость, общезначимость, противоречивость и равносильность предикатных формул . . . 31
IV.5. Терм, свободный для подстановки в формулу 32
IV.6. Предварённая нормальная форма 34
VI. Исчисления предикатов 36
VI.1. Секвенциальное исчисление предикатов 36
VI.2. Метод резолюций для исчисления предикатов 39
VI.2.1. Основные понятия метода резолюций для исчисления предикатов 39
VI.2.2. Приведение формулы исчисления предикатов к множеству предложений 41
VI.2.3. Доказательство логического следования методом резолюций для исчисления предикатов 43

A. ПРИМЕРЫ И УПРАЖНЕНИЯ 45
A.I.1. Примеры доказательств равносильности пропозициональных формул 45

A.I.2. Упражнения 47
A.II. Формализация рассуждений с помощью
пропозициональных формул 49
A.II.1. Немного о логической связке «импликация» 49
A.II.2. Логическое следование.
Примеры формализации рассуждений 51
A.II.3. Упражнения 54
A.III.1. Примеры построения вывода в секвенциальном
исчислении высказываний 60
A.III.2. Восстановление пропущенных посылок (энтимем) 63
A.III.3. Приведение формулы в конъюнктивную и
дизъюнктивную нормальные формы 64
A.III.4. Упражнения 66
A.III.5. Пример построения вывода методом резолюций
для исчисления высказываний 66
A.III.6. Примеры проверки правильности рассуждений путем
построения дерева опровержения методом резолюций
для исчисления высказываний 67
A.III.7. Упражнения 71
A.IV. Язык исчисления предикатов 71
A.IV.1. Упражнения 71
A.V. Формализация рассуждений с помощью предикатных формул . . 73
A.V.1. Совпадение наборов свободных переменных 73
A.V.2. Формулы, задающие стандартные сокращения 75
A.V.3. Примеры формализации рассуждений 80
A.V.4. Упражнения 82
A.VI.1. Примеры построения вывода в секвенциальном
исчислении предикатов 82
A.VI.2. Примеры доказательства правильности рассуждений
в секвенциальном исчислении предикатов. 89
A.VI.3. Примеры доказательств методом резолюций
для исчисления предикатов 91
A.VI.4. Примеры доказательства правильности рассуждений
методом резолюций для исчисления предикатов 95
A.VI.5. Упражнения 96
Список литературы 99

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии излагаются методы формализации рассуждений на естественном языке и даются способы проверки их правильности.

В повседневной жизни люди зачастую позволяют себе некоторые вольности как в формулировках своих утверждений, так и в обосновании правильности своих рассуждений. Это может быть простительно в житейских ситуациях. Но, к сожалению, эти вольности зачастую переходят и в служебные, а иногда даже в юридические тексты. В таких текстах в посылках рассуждения иногда опускаются утверждения, которые кажутся автору текста абсолютно истинными для всех. Однако находятся люди, для которых истинность этих утверждений сомнительна. Так, например, утверждение „Вася учится на мат-мехе" для студентов мат-меха означает, в частности, что Вася умён. Для студентов филфака это означает только то, что Вася изучает математику.

В речи люди часто опускают такие слова как „все", „некоторые", „иногда" и т.п. При этом в разных естественных языках сложились разные правила для такого рода пропуска слов. Так, например, в русском языке для того, чтобы не произносить слово „все", используется множественное число. Например, „люди смертны", „механизмы сложны для изучения", „жулики нечестны". В английском языке с той же целью используется единственное число с неопределённым артиклем a.

Идея формализации рассуждений с помощью символов принадлежит великому математику и государственному деятелю Готфриду Вильгельму Лейбницу (1646 – 1716), который писал: «Споры не придут к концу, если не отказаться от словесных рассуждений в пользу простого исчисления, если не заменить слова неясного и неопределённого смысла определёнными символами».

Частичное осуществление идей Лейбница началось в середине XIX века в работах ирландского математика Джорджа Буля (1815 — 1864). Это был существенный прорыв в области формализации рассуждений. Каждое простое высказывание предлагалось обозначать символом, а более сложные высказывания задавать с помощью операций над простыми.

Однако известный со времён Аристотеля силогизм «Все люди смертны. Сократ – человек. Значит, Сократ смертен.» не может быть формализован средствами, предложенными Булем, так как здесь использованы некоторые свойства („быть человеком" и „быть смертным"), а простые высказывания получаются записью этих свойств либо для любого объекта, либо для Сократа.

В конце XIX века немецкий математик Готлиб Фре́ге (1848 — 1925) и итальянский математик Джузеппе Пеано (1858 — 1932) развили не только язык высказываний, предложенный Дж. Булем, но и язык формальной логики Аристотеля (384 — 322 до н.э.), в которой можно было задавать свойства объектов, но не отношения между ними.

Фре́ге и Пеано ввели понятия символов для обозначения свойств объектов и отношений между ними, понятие предметной переменной, а также понятия кванторов, задающих такие слова, как „все", „некоторые"... . Эти обозначения были введены для логического обоснования арифметики (как важной составляющей части математики), но получили дальнейшее развитие и для формализации текстов на естественном языке.

Развитию теории доказательства в математической логике мы обязаны, в первую очередь, великому немецкому математику Давиду Гильберту (1862 — 1943). Он предложил программу формализации математики. В частности, согласно программе Гильберта всякое истинное утверждение математики должно быть доказано как формальное следствие из конечного набора утверждений, принятых как истинные (аксиом), с помощью конечного числа строго определённых правил (правил вывода).

Несмотря на то, что программа Гильберта не была реализована (была доказана невозможность её реализации), тем не менее, попытки её осуществления привели к созданию

— формальных теорий и исчислений,

— теории алгоритмов,

— логических методов решения задач искусственного интеллекта

и многих других теорий.

Для формального доказательства истинности логических формул (и, как следствие, правильности рассуждения, записанного с помощью таких формул) были построены исчисление высказываний и исчисление предикатов. Первые исчисления, называемые исчислениями Гильбертовского типа, имитировали способ рассуждения человека и базировались на правиле вывода *modus ponens*, имеющем вид

$$\frac{A \qquad A \to B}{B},$$

и означающем, что если мы сумели доказать справедливость утверждения A и справедливость того, что из A следует B ($A \to B$), то тем самым мы доказали, что верно утверждение B.

В этих исчислениях в случае необходимости доказать выводимость формулы B требуется УГАДАТЬ такую формулу A, что выводима и она, и формула $A \to B$. Даже при построении вывода человеком такое угадываний иногда весьма проблематично. С развитием же вычислительной техники и применением построения вывода к решению задач искусственного интеллекта потребовались принципиально другие правила вывода и формализованные методы доказательства.

В 30-е годы XX века благодаря выдающемуся немецкому математику Герхарду Карлу Эриху Генцену (1909 — 1945) появились различные варианты секвенциальных исчислений, которые принято называть исчислениями генценовского типа. Один из таких вариантов имеется в книге [1]. Ниже будет изложен один из вариантов секвенциального исчисления высказываний и секвенциального исчисления предикатов, опубликованный в [2], процесс построения вывода в котором является чисто механическим процессом и может быть легко запрограммирован даже не слишком опытными программистами.

Этот вариант исчисления стал возможен в результате доказательства теорем, позволяющих исключить из основных правил правило сечения, являющееся аналогом правила *modus ponens*. Много усилий в этом направлении было приложено и представителями Ленинградской школы математической логики, возглавляемой Николаем Александровичем Шаниным (1919 — 2011).

Кроме секвенциального исчисления высказываний будет изложен также метод резолюций, предложенный в 60-е годы XX века Дж.Робинсоном [4], для исчисления высказываний — формальный метод, специально разработанный для его реализации на компьютере.

I. ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

Простейшим случаем формализации рассуждений являются рассуждения, в которых участвуют высказывания, не содержащие ни утверждений о наличии одних и тех же свойств у разных объектов или одних и тех же отношений между разными совокупностями объектов, ни одновременно общих и частных утверждений с одними и теми же свойствами или отношениями.

Для формализации таких рассуждений удобно использовать пропозициональные формулы. Их название происходит от английского слова *proposition*, которое переводится как *предложение* или *утверждение*.

I.1 Определение пропозициональной формулы

Определение. *Высказыванием называется утверждение, относительно которого однозначно можно сказать, истинно оно или ложно.*

Примеры.

1. Первого сентября 2010 года в Санкт-Петербурге дождливо. — Высказывание, относительно истинности которого можно справиться в архивах.

2. В настоящий момент на улице светит солнце. — Высказывание, истинность которого можно проверить, выглянув в окно.

3. Сумма углов треугольника равна 180^0. — Высказывание, истинное в рамках евклидовой геометрии.

4. Утверждение, которое я сейчас написала, ложно. — Не является высказыванием, так как оно не может быть ни истинным, ни ложным. Это утверждение известно под названием *парадокс лжеца* и коротко формулируется „Я лгу“.

5. Ура! Да здравствуют студенты! — Не является высказыванием.

Определение. *Пропозициональной переменной называется переменная для высказываний.*

Значениями пропозициональных переменных являются логические константы И и Л. В разной литературе используются и другие обозначения для этих логических констант:

И	1	*true*	T	$\top$	0
Л	0	*false*	F	$\perp$	1

Для построения пропозициональных формул используются логические связки, как правило, соответствующие союзам естественного (например, русского) языка.

Унарная (одноместная) **логическая связка *отрицание***. Она соответствует частице *не* или словам *неверно, что…*. Для её обозначения в разных областях науки используются следующие обозначения $\neg$, $\sim$, $\overline{x}$.

Бинарные (двуместные) **логические связки**, как правило, соответствуют союзам естественного (например, русского) языка.

Конъюнкция соответствует союзу *и*. Для её обозначения используют один из символов: $\&$, $\wedge$, $\cdot$.

Дизъюнкция соответствует союзу *или*. Для её обозначения, как правило, используют символ $\vee$, а иногда $+$.

Импликация соответствует союзу *если…, то…*. Для её обозначения используют один из символов: $\to$, $\Rightarrow$, $\supset$.

Эквивалентность соответствует словам *… тогда и только тогда, когда …* или *… эквивалентно …*. Для её обозначения используют один из символов: $\leftrightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\equiv$, $\sim$.

Неэквивалентность, соответствующая словам *… и … разные* и **исключающее или**, соответствующее словам *либо …, либо … (но не оба вместе)* имеют одинаковый смысл и в различной литературе обозначаются $\not\leftrightarrow$, $\not\Leftrightarrow$, $\not\equiv$, $\not\sim$ или $\dot\vee$. Поскольку если логические константы И и Л интерпретируются как числа 1 и 0 соответственно, то арифметическая операция **сложение по модулю 2** приобретает тот же смысл, что и неэквивалентность, то ниже в качестве обозначения для этой логической связки будет использован символ $\oplus$.

Имеются ещё две очень важные бинарные логические связки — **символ Шеффера** и **стрелка Пирса**. Они не соответствуют напрямую никаким союзам естественного языка и обозначаются соответственно $|$ и $\downarrow$.

Приводимое ниже определение пропозициональной формулы является рекурсивным, то есть определяется через простейшие пропозициональные формулы с помощью соединения их с помощью логических связок.

Определение пропозициональной формулы.

1. *Логические константы являются пропозициональными формулами.*

2. *Пропозициональные переменные являются пропозициональными формулами.*

3. *Если A – пропозициональная формула, то $\neg A$ является пропозициональной формулой.*

4. *Если A и B – пропозициональные формулы, $*$ – бинарная логическая связка, то $(A * B)$ является пропозициональной формулой.*

5. *Никакие выражения, кроме полученных в результате применения п.п. 1 – 4 этого определения, не являются пропозициональными формулами.*

Несложно видеть, что пропозициональная формула (пока речь идёт только о таких формулах, будем в тексте опускать слово „пропозициональная“ и говорить просто „формула“), построенная в соответствии с этим определением, содержит очень много скобок. Для устранения „излишних“ скобок в формуле принято соглашение о приоритете логических связок: наивысший приоритет имеет отрицание $\neg$, следующий приоритет имеет конъюнкция $\&$. Остальные логические связки соединяют формулы (с опущенными скобками), стоящие слева и справа от них в порядке вхождения этих связок в формулу. Внешние скобки тоже можно опускать.

Пример. Формула $((x\&y) \leftrightarrow (x\&z))$, записанная в соответствии с определением, может быть записана в виде $x\&y \leftrightarrow x\&z$. Но в формуле $(x\&(y \leftrightarrow x)\&z)$ могут быть опущены только внешние скобки $x\&(y \leftrightarrow x)\&z$.

I.2. Таблицы истинности. Примеры построения таблиц

В предыдущем разделе было дано определение пропозициональной формулы. Следует отметить, что это чисто синтаксическое определение. То есть дано определение слова, которое построено по таким правилам, которые позволяют называть его пропозициональной формулой. Это сродни тому, как транслятор в первую очередь проверяет, является ли предложенный текст текстом программы, написанной на языке программирования, с которым он может работать.

Здесь будет показано, как вычисляется значение формулы в зависимости от значений переменных.

Как следует из определения высказывания, его значениями могут быть *истина* и *ложь*. Для обозначения этих значений в разных областях науки используются разные обозначения. Приведу известные мне обозначения, при этом в первой колонке будут записаны те обозначения, которые используются ниже (если не оговорено особо).

И	1	*true*	t	T	$\top$	0
Л	0	*false*	f	F	$\bot$	1

Обозначения 1 и 0 являются общепринятыми в технике. Обозначения 0 и 1 удобны в теории алгоритмов, поскольку „хорошим“ или „успешным“ результатом считается равенство нулю результата работы алгорит-

ма. Обозначения $\top$ и $\perp$ всё чаще используются в англоязычной литературе.

Значения формулы в зависимости от набора значений входящих в неё переменных определяется в соответствии с таблицами истинности логических связок.

Таблица значений для отрицания имеет вид:

x	$\neg x$
И	Л
Л	И

Таблицы истинности для бинарных логических связок имеют вид:

x	y	$x \& y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$	$x \oplus y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
И	И	И	И	И	И	Л	Л	Л
И	Л	Л	И	Л	Л	И	И	Л
Л	И	Л	И	И	Л	И	И	Л
Л	Л	Л	Л	И	И	Л	И	И

Для построения таблицы истинности произвольной формулы необходимо, прежде всего, установить порядок выполнения операций, определённый приоритетом логических связок.

Пример. Построить таблицу истинности для пропозициональной формулы

$$\neg x \& y \to \neg(x \vee y).$$

Порядок выполнения операций приведён в таблице:

$\neg$	x	$\&$	y	$\to$	$\neg$	$($x	$\vee$	$y)$
1		2		5	4		3	

При заполнении таблицы будем пользоваться следующими правилами для значений логических связок. (Это будет отражено в том, что внутри одного столбца те значения, которые записываются в первую очередь, будут писаться левее.)

Конъюнкция истинна в единственном случае: если оба аргумента истинны.

Дизъюнкция ложна в единственном случае: если оба аргумента ложны.

Если посылка (первый аргумент) импликации ложна, то сама импликация истинна. Если же её посылка истинна, то значение импликации совпадает с её заключением (со вторым аргументом).

x	y	$\neg x$	$1\&y$	$x \vee y$	$\neg\ 3$	$2 \to 4$
		1	2	3	4	5
И	И	Л	Л	И	Л	И
И	Л	Л	Л	И	Л	И
Л	И	И	И	И	Л	Л
Л	Л	И	Л	Л	И	И

I.3. Тавтологичность, выполнимость, противоречивость и равносильность пропозициональных формул

Определение. *Пропозициональная формула называется тавтологией, если она истинна при всех наборах значений своих переменных.*

Определение. *Пропозициональная формула называется противоречием, если она ложна при всех наборах значений своих переменных.*

Определение. *Пропозициональная формула называется выполнимой, если она истинна хоть на одном наборе значений своих переменных.*

Таким образом, в таблице истинности тавтологии в каждой строчке последнего столбца стоит значение И. Основные тавтологии:

$$x \vee \neg x,$$

$$x \to x,$$

$$x \leftrightarrow x.$$

В таблице истинности противоречия в каждой строчке последнего столбца стоит значение Л. Основные противоречия:

$$x \& \neg x,$$

$$x \oplus x.$$

Определение. *Пропозициональные формулы называются равносильными, если их значения совпадают при всех наборах значений их переменных.*

Тот факт, что формула A равносильна формуле B будем записывать $A \Leftrightarrow B$.

Несложно видеть, что для любых формул A и B:

$A \Leftrightarrow B$ тогда и только тогда, когда $A \leftrightarrow B$ является тавтологией.

I.4. Основные равносильности

1.	$A\&A$	$\Leftrightarrow$	A	Идемпотентность
2.	$A \vee A$	$\Leftrightarrow$	A	Идемпотентность
3.	$A\&B$	$\Leftrightarrow$	$B\&A$	Коммутативность
4.	$A \vee B$	$\Leftrightarrow$	$B \vee A$	Коммутативность
5.	$(A\&B)\&C$	$\Leftrightarrow$	$A\&(B\&C)$	Ассоциативность
			$A\&B\&C$	
6.	$(A \vee B) \vee C$	$\Leftrightarrow$	$A \vee (B \vee C)$	Ассоциативность
			$A \vee B \vee C$	
7.	$A\&(B \vee C)$	$\Leftrightarrow$	$A\&B \vee A\&C$	Дистрибутивность
8.	$A \vee B\&C$	$\Leftrightarrow$	$(A \vee B)\&(A \vee C)$	Дистрибутивность
9.	$A\&(A \vee B)$	$\Leftrightarrow$	A	Поглощение
10.	$A \vee A\&B$	$\Leftrightarrow$	A	Поглощение

11.	$\neg(A\&B)$	$\Leftrightarrow$	$\neg A \vee \neg B$	Правило де Моргана
12.	$\neg(A \vee B)$	$\Leftrightarrow$	$\neg A\&\neg B$	Правило де Моргана
13.	$A\&B \vee \neg A\&C$	$\Leftrightarrow$	$A\&B \vee \neg A\&C \vee B\&C$	Склеивание
14.	$(A \vee B)\&(\neg A \vee C)$	$\Leftrightarrow$	$(A \vee B)\&(\neg A \vee C)\&(B \vee C)$	Склеивание
15.	$\neg\neg A$	$\Leftrightarrow$	A	Двойное отрицание
16.	$A \to B$	$\Leftrightarrow$	$\neg A \vee B$	
17.	$A \leftrightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$(A \to B)\&(B \to A)$	
		$\Leftrightarrow$	$(\neg A \vee B)\&(\neg B \vee A)$	
		$\Leftrightarrow$	$(A\&B) \vee (\neg A\&\neg B)$	
18.	$A \oplus B$	$\Leftrightarrow$	$\neg(A \leftrightarrow B)$	
		$\Leftrightarrow$	$(A \vee B)\&(\neg B \vee \neg A)$	
		$\Leftrightarrow$	$(\neg A\&B) \vee (A\&\neg B)$	
19.	$A\|B$	$\Leftrightarrow$	$\neg(A\&B)$	
20.	$A \downarrow B$	$\Leftrightarrow$	$\neg(A \vee B)$	

Если T – тавтология, F – противоречие, то справедливы также следующие равносильности:

$$
\begin{array}{rrcl}
21. & A\&T & \Leftrightarrow & A \\
22. & A\vee T & \Leftrightarrow & T \\
23. & A\&F & \Leftrightarrow & F \\
24. & A\vee F & \Leftrightarrow & A \\
25. & A\to T & \Leftrightarrow & T \\
26. & A\to F & \Leftrightarrow & \neg A \\
27. & T\to A & \Leftrightarrow & A \\
28. & F\to A & \Leftrightarrow & T \\
29. & A\leftrightarrow T & \Leftrightarrow & A \\
30. & A\leftrightarrow F & \Leftrightarrow & \neg A
\end{array}
$$

Равносильности 25 – 30 удобны, но необязательны для запоминания, так как легко получаются из предыдущих.

I.5. Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы

Пусть x^α означает x, если $\alpha =$ И и $\neg x$, если $\alpha =$ Л.

Определение. *Элементарной конъюнкцией называется многократная конъюнкция переменных или их отрицаний.*

Точнее, элементарная конъюнкция – это слово вида $x_1^{\alpha_1}\ \&\ \ldots\ \&\ x_n^{\alpha_n}$, где $x_1,\ldots,x_n$ – пропозициональные переменные, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ – логические константы.

Определение. *Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется пропозициональная формула, являющаяся многократной дизъюнкцией элементарных конъюнкций.*

Точнее, если $K_1,\ldots,K_m$ – элементарные конъюнкции, то формула вида $K_1\vee\ldots\vee K_m$ является пропозициональной формулой в ДНФ.

Примеры.

1. Формулы x, $\neg z$, $x\&\neg y\&z$, $\neg x\&z$, $x\&y\&\neg z\&u\&v$ являются элементарными конъюнкциями.

2. Формулы x, $x\vee\neg x\&y$, $x\&y\&z\vee x\&\neg y\&\neg z\vee\neg x\&y$ представлены в виде ДНФ.

Теорема о ДНФ. *По всякой пропозициональной формуле, не являющейся противоречием, можно построить равносильную ей в ДНФ.*

Подробное доказательство этой теоремы имеется в [5].

Идея доказательства состоит в том, что в таблице истинности для формулы имеется по крайней мере одна строка, в которой в столбце значений стоит И. Для каждой такой строки, соотвествующей набору значений $(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i)$ $(i = 1, \ldots, m)$, выписываем элементарную конъюнкцию $K_i = x_1^{\alpha_1^i} \& \ldots \& x_n^{\alpha_n^i}$, значение которой равно И на наборе $(\alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i)$ и только на нём. Формула в ДНФ $K_1 \vee \ldots \vee K_m$ принимает значение И на выбранных строках и только на них и, следовательно, равносильна исходной формуле.

Так построенная формула насывается **совершенной ДНФ**.

Определение. *Элементарной дизъюнкцией называется многократная дизъюнкция переменных или их отрицаний.*

Точнее, элементарная дизъюнкция – это слово вида $x_1^{\alpha_1} \vee \ldots \vee x_n^{\alpha_n}$, где $x_1, \ldots, x_n$ – пропозициональные переменные, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – логические константы.

Определение. *Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется пропозициональная формула, являющаяся многократной конъюнкцией элементарных дизъюнкций.*

Точнее, если $D_1, \ldots, D_m$ – элементарные дизъюнкции, то формула вида $(D_1)\ \&\ \ldots\ \&\ (D_m)$ является пропозициональной формулой в КНФ.

Замечание. В КНФ каждая элементарная дизъюнкция обязательно должна быть заключена в скобки.

Примеры.

1. Формулы x, $\neg z$, $x \vee \neg y \vee z$, $\neg x \vee z$, $x \vee y \vee \neg z \vee u \vee v$ являются элементарными дизъюнкциями.

2. Формулы x, $(x \vee \neg y) \& y$, $(x \vee y \vee z) \& (x \vee \neg y \vee \neg z) \& (\neg x \vee y)$ представлены в виде КНФ.

Теорема о КНФ. *По всякой пропозициональной формуле, не являющейся тавтологией, можно построить равносильную ей в КНФ.*

Подробное доказательство этой теоремы имеется в [5].

Идея одного из возможных доказательств состоит в том, что отрицание этой формулы не является противоречием и, следовательно, можно построить формулу в ДНФ, равносильную этому отрицанию. Отрицанием формулы в ДНФ после использования правил де Моргана является формула в КНФ.

Одним из достоинств формул в ДНФ (или КНФ) является то, что имеются хорошо разработанные методы как по их „упрощению“ (преобразованию к равносильной, имеющей меньшую длину записи), так и по построению совершенной ДНФ (или КНФ), каждый дизъюнктивный член которой содержит все переменные, и которая единственна для каждой формулы (с точностью до порядка дизъюнктивных членов и порядка переменных в элементарных конъюнкциях).

III. Исчисления высказываний

В конце XIX века знаменитый математик Давид Гильберт выдвинул программу формализации математики. По его мнению, в основе математики должна лежать система аксиом, а все остальные математические утверждения должны получаться (выводиться) из них на основе строго зафиксированных правил, называемых правилами вывода.

Для реализации этой программы были построены исчисления, которые позволили доказывать все истинные общелогические утверждения. В настоящем пособии рассматриваются только пропозициональные формулы и поэтому будут описываться только исчисления высказываний.

Для того, чтобы задать исчисление, достаточно задать

1. Алфавит (т.е. конечное множество символов $A = \{a_1, ..., a_p\}$).
2. Множество формул (множество слов в алфавите A, для которых существует эффективная процедура проверки, является ли слово формулой).
3. Множество аксиом (эффективно проверяемое подмножество множества формул).
4. Правила вывода (конечное множество отношений над формулами, для каждого из которых все аргументы, кроме последнего, называются посылками правила, а последний аргумент – заключением правила).

Определение. *Формула B непосредственно выводима из формул A_1, ... , A_q, если имеется $q + 1$-местное отношение R, задающее одно из правил вывода, такое что $R(A_1, ..., A_q, B)$.*

Определение. *Выводом в исчислении называется последовательность формул, каждая из которых либо является аксиомой, либо непосредственно выводима из некоторых предыдущих.*

Определение. *Последняя формула любого вывода в заданном исчислении называется выводимой в нём (или теоремой этого исчисления).*

Тот факт, что формула P выводима в исчислении C, будем записывать как $\models_C P$. Если исчисление зафиксировано, то указание на него будем опускать и писать $\models_C P$.

Определение. *Формула B выводима в исчислении из множества формул Σ, если найдётся последовательность формул, заканчивающаяся формулой B, каждая из которых либо является аксиомой, либо* *входит в множество Σ, либо непосредственно выводима из некоторых предыдущих.*

Тот факт, что формула P выводима в исчислении C из множества формул Σ, будем записывать как $\Sigma \models_C P$. Если исчисление зафиксировано, то указание на него будем опускать и писать $\Sigma \models_C P$.

Определение. *Исчисление называется полным, если всякая истинная формула этого исчисления выводима в нём.*

Определение. *Исчисление называется непротиворечивым, если не существует такой формулы этого исчисления, что выводима она сама и её отрицание.*

Следует отметить, что для формул полных и непротиворечивых исчислений понятия истинности и выводимости совпадают.

Первые исчисления, называемые исчислениями Гильбертовского типа, имитировали способ рассуждения человека и базировались на правиле вывода *modus ponens*, имеющем вид

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}.$$

В этих исчислениях в случае необходимости доказать выводимость формулы B требуется УГАДАТЬ такую формулу A, что выводима и она, и формула $A \to B$. Даже при построении вывода человеком такое угадывание иногда весьма проблематично. С развитием же вычислительной техники и применением построения вывода к решению задач искусственного интеллекта потребовались принципиально другие правила вывода и формализованные методы доказательства.

В 30-е годы XX века появились различные варианты секвенциальных исчислений, которые принято называть исчислениями генценовского типа. Ниже будет изложен один из вариантов секвенциального исчисления высказываний, процесс построения вывода в котором является чисто механическим процессом и может быть легко запрограммирован даже не слишком опытными программистами.

Кроме секвенциального исчисления высказываний в пособии будет изложен также метод резолюций, предложенный в 60-е годы XX века Дж. Робинсоном, для исчисления высказываний – формальный метод, специально разработанный для его реализации на компьютере.

III.1. Секвенциальное исчисление высказываний

Основным понятием секвенциального исчисления высказываний является понятие секвенции (от английского слова *sequent* – следующий, являющийся следствием).

Определение. *Секвенцией называется выражение вида* $\Gamma \vdash \Delta$, *где* Γ *и* Δ *— списки (быть может пустые) формул,* $\vdash$ *— знак секвенции*[1].

Список формул Γ *называется антецедентом секвенции, список формул* Δ *— сукцедентом (или консеквентом) секвенции.*

Секвенция $A_1\ \ldots\ A_n \vdash B_1\ \ldots\ B_m$ читается как „Из того, что верны все формулы A_1, ..., A_n следует, что верна хоть одна из формул $B_1, \ldots, B_m$.

В соответствии с вышесказанным каждой секвенции можно поставить в соответствие формулу, которая называется формульным образом секвенции:

$$\Phi(A_1\ \ldots\ A_n \vdash B_1\ \ldots\ B_m) = A_1 \ \&\ \ldots\ \&\ A_n \to (B_1 \vee \ldots \vee B_m).$$

Или в равносильной форме

$$\Phi(A_1\ \ldots\ A_n \vdash B_1\ \ldots\ B_m) \Leftrightarrow \neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B_1 \vee \ldots \vee B_m.$$

Формальное описание излагаемого здесь варианта секвенциального исчисления высказываний следующее.

1. Алфавит: множество символов для записи имен пропозициональных переменных, объединённое с множеством логических связок $\{\&\ , \neg\}$[2], символа секвенции и скобок.

2. Формулы исчисления: секвенции, содержащие пропозициональные формулы в выбранном алфавите.

3. Аксиомы исчисления: единственная схема аксиом

$$\Gamma_1\ A\ \Gamma_2 \vdash \Delta_1\ A\ \Delta_2,$$

   то есть для того, чтобы секвенция была аксиомой, необходимо и достаточно, чтобы среди формул как её антецедента, так и сукцедента, присутствовала одна и та же формула.

4. Правила вывода[3]

[1] Часто вместо знака $\vdash$ используется знак $\to$, если он не занят для обозначения импликации.

[2] Можно использовать любую полную систему логических связок, например, & и $\neg$, так как по всякой пропозициональной формуле можно построить равносильную ей, содержащую только эти две логические связки.

[3] Если в алфавите присутствуют не все логические связки, то основными правилами вывода будут только правила для выбранных связок. Остальные правила будут допустимыми.

$$(\vdash\neg)^4\frac{\Gamma_1\;\; A\;\; \Gamma_2\vdash\Delta_1\;\;\Delta_2}{\Gamma_1\;\;\Gamma_2\vdash\Delta_1\;\;\neg A\;\;\Delta_2}\quad(\neg\vdash)\frac{\Gamma_1\;\;\Gamma_2\vdash\Delta_1\;\; A\;\;\Delta_2}{\Gamma_1\;\;\neg A\;\;\Gamma_2\vdash\Delta_1\;\;\Delta_2}$$

$$(\vdash\&)\frac{\Gamma\vdash\Delta_1\;\; A\;\;\Delta_2\qquad \Gamma\vdash\Delta_1\;\; B\;\;\Delta_2}{\Gamma\vdash\Delta_1\;\;(A\,\&\,B)\;\;\Delta_2}\quad(\&\;\vdash)\frac{\Gamma_1\;\; A\;\; B\;\;\Gamma_2\vdash\Delta}{\Gamma_1\;\;(A\,\&\,B)\;\;\Gamma_2\vdash\Delta}$$

$$(\vdash\vee)\frac{\Gamma\vdash\Delta_1\;\; A\;\; B\;\;\Delta_2}{\Gamma\vdash\Delta_1\;\;(A\vee B)\;\;\Delta_2}\quad(\vee\vdash)\frac{\Gamma_1\;\; A\;\;\Gamma_2\vdash\Delta\qquad \Gamma_1\;\; B\;\;\Gamma_2\vdash\Delta}{\Gamma_1\;\;(A\vee B)\;\;\Gamma_2\vdash\Delta}$$

$$(\vdash\rightarrow)\frac{\Gamma_1\;\; A\;\;\Gamma_2\vdash\Delta_1\;\; B\;\;\Delta_2}{\Gamma_1\Gamma_2\vdash\Delta_1(A\rightarrow B)\Delta_2}\quad(\rightarrow\vdash)\frac{\Gamma_1\;\;\Gamma_2\vdash\Delta_1\;\; A\;\;\Delta_2\qquad \Gamma_1\;\; B\;\;\Gamma_2\vdash\Delta_1\;\;\Delta_2}{\Gamma_1(A\rightarrow B)\Gamma_2\vdash\Delta_1\Delta_2}$$

$$(\vdash\leftrightarrow)\frac{\Gamma_1\;\; A\;\;\Gamma_2\vdash\Delta_1\;\; B\;\;\Delta_2\qquad \Gamma_1\;\; B\;\;\Gamma_2\vdash\Delta_1\;\; A\;\;\Delta_2}{\Gamma_1\Gamma_2\vdash\Delta_1(A\leftrightarrow B)\Delta_2}\quad(\leftrightarrow\vdash)\frac{\Gamma_1\;\;\Gamma_2\vdash\Delta_1\;\; A\;\; B\;\;\Delta_2\qquad \Gamma_1\;\; A\;\; B\;\;\Gamma_2\vdash\Delta_1\;\;\Delta_2}{\Gamma_1(A\leftrightarrow B)\Gamma_2\vdash\Delta_1\Delta_2}$$

$$(\vdash\oplus)\frac{\Gamma_1\;\;\Gamma_2\vdash\Delta_1\;\; A\;\; B\;\;\Delta_2\qquad \Gamma_1\;\; A\;\; B\;\;\Gamma_2\vdash\Delta_1\;\;\Delta_2}{\Gamma_1\Gamma_2\vdash\Delta_1(A\oplus B)\Delta_2}\quad(\oplus\vdash)\frac{\Gamma_1\;\; A\;\;\Gamma_2\vdash\Delta_1\;\; B\;\;\Delta_2\qquad \Gamma_1\;\; B\;\;\Gamma_2\vdash\Delta_1\;\; A\;\;\Delta_2}{\Gamma_1(A\oplus B)\Gamma_2\vdash\Delta_1\Delta_2}$$

В качестве упражнения можете написать правила вывода для символа Шеффера и стрелки Пирса.

III.1.1. Обоснование секвенциального исчисления высказываний

Для секвенциального исчисления высказываний справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Формульный образ аксиомы является тавтологией.*

Доказательство. Пусть аксиома имеет вид $P_1\;\ldots\;P_k\;A\;Q_1\;\ldots\;Q_l\vdash R_1\;\ldots\;R_m\;A\;T_1\;\ldots\;T_n$. Её формульным образом является формула $P_1\,\&\ldots\,P_k\,\&\,A\,\&\,Q_1\,\&\,\ldots\,\&\,Q_l\vdash R_1\vee\ldots\vee R_m\vee A\vee T_1\vee\ldots\vee T_n$, которая равносильна элементарной дизъюнкции $\neg P_1\vee\ldots\neg P_k\vee\neg A\vee\neg Q_1\vee\ldots\vee\neg Q_l\vee R_1\vee\ldots\vee R_m\vee A\vee T_1\vee\ldots\vee T_n$, содержащей контрарную пару $\neg A\;\vee\;A$ и, следовательно, является тавтологией.

Теорема 2. *Для каждого правила вывода формульный образ его заключения равносилен конъюнкции формульных образов посылок этого правила.*

Доказательство проведём для правила введения конъюнкции в сукцедент $(\vdash\&)$, поскольку это правило 2-посылочное. Для трёх остальных основных правил доказательство совсем очевидно.

[4] Название правила $(*\vdash)$ читается „правило введения логической связки $*$ в антецедент“, правила $(\vdash *)$ – „правило введения логической связки $*$ в сукцедент“.

Формульные образы посылок правила ($\vdash \&$)

$$P_1 \ldots\ P_k \vdash R_1\ \ldots\ R_m\ A\ T_1\ \ldots\ T_n$$

$$P_1 \ldots\ P_k \vdash R_1\ \ldots\ R_m\ B\ T_1\ \ldots\ T_n$$

равносильны соответственно

$$\neg P_1\ \vee \ldots\ \neg P_k \vee R_1 \vee\ \ldots\ \vee R_m\ \vee A\ \vee T_1 \vee\ \ldots\ \vee T_n$$

$$\neg P_1\ \vee \ldots\ \neg P_k \vee R_1 \vee\ \ldots\ \vee R_m\ \vee B\ \vee T_1 \vee\ \ldots\ \vee T_n.$$

Учитывая коммутативность дизъюнкции

$$\neg P_1\ \vee \ldots\ \neg P_k \vee R_1 \vee\ \ldots\ \vee R_m \vee T_1 \vee\ \ldots\ \vee T_n\ \vee A$$

$$\neg P_1\ \vee \ldots\ \neg P_k \vee R_1 \vee\ \ldots\ \vee R_m\ \vee T_1 \vee\ \ldots\ \vee T_n\ \vee B.$$

С учётом дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции имеем

$$\neg P_1\ \vee \ldots\ \neg P_k \vee R_1 \vee\ \ldots\ \vee R_m \vee T_1 \vee\ \ldots\ \vee T_n\ \vee A \,\&\, B,$$

Что является формульным образом секвенции

$$P_1 \ldots\ P_k \vdash R_1\ \ldots\ R_m\ A \,\&\, B\ T_1\ \ldots\ T_n.$$

Теорема 3. *Секвенция выводима в секвенциальном исчислении высказываний тогда и только тогда, когда её формульный образ является тавтологией.*

Необходимость: ($\models S$) $\Longrightarrow$ ($\Phi(S)$ является тавтологией).

Доказательство методом возвратной математической индукции по длине вывода секвенции S.

База индукции: длина вывода $= 1$. В этом случае секвенция является аксиомой и по теореме 1 её формульный образ – тавтология.

Индукционный переход. Пусть формульный образ любой секвенции, длина вывода которой меньше n, является тавтологией. Докажем, что формульный образ секвенции, длина вывода которой равна n, является тавтологией.

Рассмотрим последнее применение правила вывода, по которому была получена секвенция n. Пусть она была получена из S_1 (или из S_1 и S_2, если правило двухпосылочное). Длина вывода S_1 (и S_2) меньше n, т.к. они находятся раньше S в последовательности, определяющей вывод. По индукционному предположению формульный образ S_1 (и S_2) –

тавтология. По теореме 2 $\Phi(S) \Leftrightarrow \Phi(S_1)$ ($\Phi(S) \Leftrightarrow \Phi(S_1)$ & $\Phi(S_2)$, если правило двухпосылочное). Следовательно, $\Phi(S)$ является тавтологией.

Достаточность: ($\Phi(S)$ является тавтологией) $\Longrightarrow$ ($\models S$).

Доказательство методом математической индукции по количеству логических связок в секвенции S.

База индукции: секвенция не содержит логических связок. В этом случае S имеет вид $p_1 \ \ldots \ p_k \vdash q_1 \ \ldots \ q_m$, где $p_1, \ \ldots, \ p_k, q_1, \ \ldots, \ q_m$ – пропозициональные переменные. Формульный образ этой секвенции равносилен $\neg p_1 \vee \ldots \vee \neg p_k \vee q_1 \vee \ldots \vee q_m$ и является тавтологией. Если каждая переменная $p_1, \ \ldots, \ p_k$ отлична от любой переменнной $q_1, \ \ldots, \ q_m$, то на наборе значений (И, ... , И, Л, ... , Л) этот формульный образ имеет значение Л, что противоречит тому, что он – тавтология. Значит, среди переменных $p_1, \ \ldots, \ p_k$ имеется переменная, входящая в $q_1, \ \ldots, \ q_m$, S является аксиомой и, следовательно, выводима.

Индукционный переход. Пусть для всякой секвенции, содержащей n логических связок, и чей формульный образ является тавтологией, она выводима. Докажем, что всякая секвенция S, содержащая $n+1$ логическую связку, и чей формульный образ является тавтологией, выводима.

Рассмотрим произвольную внешнюю связку $*$ секвенции S. Секвенция S может быть получена по правилу ($\vdash *$) или ($* \ \vdash$) (в зависимости от того, входит ли формула с внешней связкой $*$ в антецедент или сукцедент) из одной S_1 или двух S_1 и S_2 секвенций, содержащих n логических связок. При этом по теореме 2 $\Phi(S) \Leftrightarrow \Phi(S_1)$ & $\Phi(S_2)$ и, следовательно, $\Phi(S_1)$ & $\Phi(S_2)$ – тавтология. Из чего следует, что $\Phi(S_1)$ – тавтология и $\Phi(S_2)$ – тавтология. По индукционному предположению они выводимы.

Для получения вывода секвенции S достаточно объединить их выводы и добавить соответствующее правило вывода для $*$.

Определение. *Пропозициональная формула P называется выводимой в секвенциальном исчислении высказываний, если в нём выводима секвенция $\vdash P$.*

Следствие теоремы 3. *Секвенциальное исчисление высказываний полно и непротиворечиво.*

Полнота. Полнота секвенциального исчисления высказываний непосредственно следует из достаточности в теореме 3.

Пусть P – тавтология. Так как $P \Leftrightarrow \Phi(\vdash P)$, то $\Phi(\vdash P)$ тоже тавтология и, следовательно $\vdash P$ выводима.

Непротиворечивость. Непротиворечивость секвенциального исчисления высказываний непосредственно следует из необходимости в теореме 3.

Пусть в секвенциальном исчислении высказываний выводимы секвенции $\vdash P$ и $\vdash \neg P$. Тогда их формульные образы P и $\neg P$ являются тавтологиями. Что невозможно.

Кроме того, по аналогии с доказательством теоремы 3 можно доказать следующее полезное утверждение.

Утверждение. *Формульный образ секвенции равносилен конъюнкции формульных образов секвенций, из которых она выводима.*

III.1.2. Допустимые и производные правила вывода

Определение. *Правило вывода называется допустимым в исчислении, если по всякому выводу, содержащему применение этого правила, можно построить вывод с той же конечной формулой, не соержащий применения этого правила.*

Например, если в языке секвенциального исчисления высказываний имеется только 2 логические связки $\neg$ и $\&$ [5], то основными правилами вывода в нём являются $(\vdash \neg)$, $(\neg \vdash)$, $(\vdash\ \&)$ и $(\&\ \vdash)$.

Утверждение. *Если в языке секвенциального исчисления высказываний имеется только 2 логические связки* $\neg$ *и* $\&$ *и основными правилами вывода в нём являются* $(\vdash\ \neg)$, $(\neg\ \vdash)$, $(\vdash\ \ \&)$ *и* $(\&\ \ \vdash)$, *то остальные правила вывода являются допустимыми в нём.*

Покажем допустимость остальных правил вывода на примере правила $(\to \vdash)$.

Так как в языке нет логической связки $\to$, то формула $A \to B$ будет записана в виде равносильной ей $\neg(A \ \&\ \neg B)$. Поэтому правило $(\to \vdash)$ примет вид

$$\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1 \quad \Gamma_2{\vdash}\Delta_1 \quad A \quad \Delta_2\\ \Gamma_1 \quad B \quad \Gamma_2{\vdash}\Delta_1 \quad \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1 \neg(A \ \&\ \neg B)\Gamma_2 \vdash \Delta_1\Delta_2.}$$

Пусть имеется вывод с применением правила $(\to \vdash)$. Количество применений этого правила в выводе конечно, т.к. сам вывод конечен. Для каждого применения правила $(\to \vdash)$ обозначим 3 секвенции в правиле посредством S_1, S_2 и S_3 сответственно. То есть в выводе имеется конечная последовательность секвенций вида $S_1, \ldots, S_2 \ldots, S_3$.

Но S_3 может быть получена по правилу $(\neg \vdash)$ из

$$S' \quad \text{вида} \quad \Gamma_1\Gamma_2 \vdash \Delta_1(A \ \&\ \neg B)\Delta_2.$$

[5] Исходя из основных равносильностей докажите, что по всякой пропозициональной формуле можно построить равносильную ей, содержащую только $\neg$ и $\&$

S' может быть получена по правилу $(\vdash \&)$ из S_1 и

$$S'' \quad \text{вида} \quad \Gamma_1\Gamma_2 \vdash \Delta_1 \neg B\ \Delta_2.$$

S'' может быть получена по правилу $(\vdash \neg)$ из S_2.

Таким образом, для каждого применения правила $(\rightarrow \vdash)$ последовательность секвенций вида $S_1, \ldots, S_2 \ldots, S_3$ будет замененна на последовательность секвенций вида $S_1, \ldots, S_2, S'' \ldots, S', S_3$.

Наличие только двух логических связок и, соответственно, четырёх правил вывода в языке секвенциального исчисления помогает легче доказывать всевозможные теоремы об этом исчислении. Однако при построении вывода секвенции разумно использовать все логические связки и допустимые правила для них.

Утверждение. *Следующие правила являются допустимыми в секвенциальном исчислении высказываний.*

Правила перестановки.

$$\frac{\Gamma_1\ P\ \Gamma_2\ Q\ \Gamma_3 \vdash \Delta}{\Gamma_1\ Q\ \Gamma_2\ P\ \Gamma_3 \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1\ P\ \Delta_2\ Q\ \Delta_3}{\Gamma \vdash \Delta_1\ Q\ \Delta_2\ P\ \Delta_3}.$$

Правила добавления.

$$\frac{\Gamma_1 \quad \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1\ P\ \Gamma_2 \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1 \quad \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1\ P\ \Delta_2}.$$

Правила сокращения повторений.

$$\frac{\Gamma_1\ P\ \Gamma_2\ P\ \Gamma_3 \vdash \Delta}{\Gamma_1\ P\ \Gamma_2 \quad \Gamma_3 \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1\ P\ \Delta_2\ P\ \Delta_3}{\Gamma \vdash \Delta_1\ P\ \Delta_2 \quad \Delta_3}.$$

Достаточно странным выглядит правило добавления. Но если вспомнить, как читается секвенция, то эта странность исчезает. Действительно, если из истинности всех формул из Γ_1 и Γ_2 следует, что истинна одна из формул из Δ, то добавление лишнего условия P не повлияет на это следование. Аналогично во втором правиле добавления формула P добавляется в виде «или».

Утверждение. *Правила исключения логических связок являются допустимыми в секвенциальном исчислении высказываний.*

Правила исключения логических связок для однопосылочных правил введения выглядят как «перевёрнутые» исходные правила. Для двухпосылочных правил введения всегда имеют место два правила исключения. Так, например, для ($\vdash$ &) и (& $\vdash$) обратные правила выглядят следующим образом.

$$(\vdash \&_1^-)\frac{\Gamma \vdash \Delta_1 \ \ (A \ \& \ B) \ \ \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1 \ \ A \ \ \Delta_2} \qquad (\&^- \ \vdash)\frac{\Gamma_1 \ \ (A \ \& \ B) \ \ \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1 \ \ A \ \ B \ \ \Gamma_2 \vdash \Delta}$$

$$(\vdash \&_2^-)\frac{\Gamma \vdash \Delta_1 \ \ (A \ \& \ B) \ \ \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1 \ \ B \ \ \Delta_2}$$

Благодаря наличию правил исключения логических связок изложенный выше вариант секвенциального исчисления высказываний часто называют секвенциальным исчислением высказываний с обратимыми правилами.

III.2. Метод резолюций для исчисления высказываний

III.2.1. Основные понятия метода резолюций для исчисления высказываний

Метод резолюций для исчислений высказываний и предикатов был разработан Дж. Робинсоном в 60-е годы XX века как машинно-ориентированное исчисление. Поскольку основной целью при доказательстве справедливости рассуждения с помощью метода резолюций является приведение к противоречию, он, по сути дела, является методом доказательства от противного.

Основным понятием метода резолюций для исчисления высказываний является понятие предложения (или клоза: калька с английского слова *clause* — предложение).

Предложением в методе резолюций для исчисления высказываний называется элементарная дизъюнкция.

Важную роль играет пустое предложение, которое Дж. Робинсон обозначил посредством *nill* (в литературе в качестве его обозначения часто используют $\emptyset$ - стандартное обозначение для пустого множества, Λ - стандартное обозначение для пустого слова, или даже число 0).

Формальное описание метода резолюций для исчисления высказываний следующее.

1. Алфавит: множество символов для записи имен пропозициональных переменных, объединённое с множеством из двух логических связок $\vee$ и $\neg$.

2. Формулы: предложения.

3. Аксиомы: отсутствуют.

4. Правила вывода:

   Правило сокращения повторений $D_1 \vee x \vee D_2 \vee x \vee D_3$

   $$D_1 \vee x \vee D_2 \vee D_3,$$

   Правило резолюции

   $$\underline{D_1 \vee x \vee D_2} \qquad \underline{D_3 \vee \neg x \vee D_4}$$

   $$\underline{D_1 \vee D_2 \vee D_3 \vee D_4}.$$

Определение. *Множество предложений называется неудовлетворимым, если из него выводимо пустое предложение nill .*

Следующая теорема может быть доказана методом возвратной математической индукции по количеству применений правила резолюции (необходимость) и по количеству предложений (достаточность).

Теорема. *Для того, чтобы множество предложений было неудовлетворимо необходимо и достаточно, чтобы их конъюнкция являлась противоречием.*

III.2.2. Доказательство логического следования методом резолюций для исчисления высказываний

Метод резолюций работает с предложениями. Как же доказывать тавтологичность формулы, или логическое следование, или правильность рассуждения, формализованного с помощью пропозициональных формул?

Пусть требуется доказать логическое следование

$$A_1 \ \ ... \ \ A_n \Rightarrow B_1 \ \ ... \ \ B_m.$$

Это означает, что формула

$$A_1 \ \& \ ... \ \& \ A_n \Rightarrow B_1 \vee ... \vee B_m$$

является тавтологией, что имеет место тогда и только тогда, когда

$$\neg A_1 \vee ... \vee \neg A_n \vee B_1 \vee ... \vee B_m$$

является тавтологией. То есть её отрицание

$$\neg(\neg A_1 \vee ... \vee \neg A_n \vee B_1 \vee ... \vee B_m)$$

является противоречием. В соответствии с правилами де Моргана это означает, что

$$A_1 \mathbin{\&} ... \mathbin{\&} A_n \mathbin{\&} \neg B_1 \mathbin{\&} ... \mathbin{\&} \neg B_m$$

является противоречием. Если K_{A_1},..., K_{A_n}, $K_{\neg B_1}$, ..., $K_{\neg B_m}$ — КНФ для формул A_1, ..., A_n, $\neg B_1$, ..., $\neg B_m$ соответственно, то мы имеем, что

$$K_{A_1} \mathbin{\&} ... \mathbin{\&} K_{A_n} \mathbin{\&} K_{\neg B_1} \mathbin{\&} ... \mathbin{\&} K_{\neg B_m}$$

является противоречием. И, следовательно, множество предложений, составляющих эту КНФ, неудовлетворимо (из него выводимо пустое предложение *nill*).

Таким образом, для того, чтобы доказать логическое следование

$$A_1 \ \ ... \ \ A_n \Rightarrow B_1 \ \ ... \ \ B_m$$

достаточно

1. каждую из формул A_1, ..., A_n привести в КНФ и удалить знак & ,
2. каждую из формул $\neg B_1$, ..., $\neg B_m$ привести в КНФ и удалить знак & ,
3. доказать неудовлетворимость полученного множества предложений путём вывода из него пустого предложения *nill*.

IV. ФОРМУЛЫ ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ

Выше были рассмотрены способы формализации рассуждений на языке исчисления высказываний и доказательства их правильности. Для многих рассуждений такая формализация не является естественной и очень громоздка. Это происходит в случаях, когда имеются некоторые общие высказывания (например, „Все люди смертны“, „Некоторые любят всех“) и частные высказывания, использующие те же свойства объектов или отношения между ними (например, „Сократ человек“ и „Сократ смертен“, „Петя любит Лену“ и „Лена любит Петю“).

В конце XIX века для записи такого рода утверждений были введены предикатные формулы (от слова *predicate* — сказуемое; то, что в суждении высказывается о предмете или субъекте суждения). Основой этих формул являются предикатные символы, которые могут интерпретироваться как свойства объектов (одноместные предикатные символы) или отношения между объектами (многоместные предикатные символы).

Огромным достижением XIX века было появление кванторов: квантора всеобщности $\forall$ (написание которого связано с английским словом *All* и который читается как „для всех“, „всякий“, „любой“, ...) и квантора существования $\exists$ (написание которого связано с английским словом *Exist* и который читается как „существует“, „для некоторых“, „некоторый“, ...).

IV.1. Основные определения.

Определение. *Имя предмета называется предметной константой.*

Определение. *Предметной переменной называется переменная, которая в качестве своих значений может принимать предметные константы.*

В англоязычной литературе эти переменные называются *objective variables*, то есть объектные переменные. Переменные, которые мы используем в математике — это предметные переменные, значениями которых могут являться натуральные числа, вещественные числа, комплексные числа, матрицы, элементы математической структуры и т.п. Если рассматриваются отношения между людьми, то предметные переменные могут принимать в качестве значений имена людей. При рассмотрении имущественных отношений значениями могут быть имена людей, названия предметов имущества и даже рациональные числа как обозначение стоимости имущества.

Важным понятием является такое понятие, как **терм**. Оно определяется с помощью понятия функционального символа и в качестве значений также может принимать предметные константы. Его определение является индуктивным.

Определение. [6]

1. *Предметная константа является термом.*

2. *Предметная переменная является термом.*

3. *Если t_1, ..., t_n — термы, f — n-местный функциональный символ, то выражение $f(t_1, ..., t_n)$ является термом.*

4. *Никакие выражения, кроме полученных в результате применения п.п. 1 – 3 этого определения, не являются термом.*

Это определение дано для случая, когда используется префиксная форма записи (т.е. имя функции стоит перед аргументами). Исторически сложилось так, что для некоторых функций общепринятой является инфиксная форма записи (т.е. имя функции стоит между аргументами, как, например для функций $+$, $-$, $\cdot$) или даже постфиксная форма записи (т.е. имя функции стоит после аргументов, как, например для функции возведения в квадрат ^{2}). Ниже в примерах не будут различаться эти случаи.

При формализации утверждений с помощью пропозициональных формул основными неделимыми единицами являются элементарные высказывания, обозначаемые посредством пропозициональных переменных. При формализации на языке предикатных формул основными логическими неделимыми единицами являются атомарные формулы.

Определение.

1. *Если t_1, ..., t_n – термы, P – n-местный предикатный символ, то $P(t_1, ..., t_n)$ является атомарной формулой.*

2. *Никакие выражения, кроме полученных в результате применения п. 1 этого определения не являются атомарной формулой.*

Предикатные формулы в значительной степени (кроме кванторов) строятся из атомарных по тем же правилам, что и пропозициональные формулы из пропозициональных переменных.

[6] Пункт 1 этого определения можно опустить, если в п. 3 считать, что n может быть равно 0.

Определение.

1. *Атомарная формула является предикатной формулой.*

2. *Если A — предикатная формула, то $\neg A$ является предикатной формулой.*

3. *Если A, B — предикатные формулы, $*$ — бинарная логическая связка, то $(A * B)$ является предикатной формулой.*

4. *Если A — предикатная формула, x — предметная переменная, то $\forall x A$ и $\exists x A$ являются предикатными формулами.*

5. *Никакие выражения, кроме полученных в результате применения п.п. 1 – 4 этого определения, не являются предикатными формулами.*

Так же как и при определении терма здесь используется префиксная форма записи атомарной формулы. Такие отношения как $=$, $<$ и т.п. в математике принято записывать в инфиксной форме. В примерах мы не будем различать различные формы записи, так как очень уж непривычна запись $=(x, y)$ вместо знакомой записи $x = y$.

Примеры.

1. $x + 2 \cdot y^x - (y - 3)/(z + 5)$ является термом. Если предметные переменные принимают значения из множества вещественных чисел (и $z \neq -5$), то это выражение принимает значения из того же множества.

2. $z = x + 2 \cdot y^x - (y - 3)/(z + 5)$ является атомарной формулой. Здесь имеется единственный предикатный символ $=$, и значением этого выражения в зависимости от значений предметных переменных может являться логическая константа И или Л.

3. $(x = 0) \vee \exists y(y \vdots x)$ является предикатной формулой, в которую в качестве подформул входят две атомарные.

IV.2. Свободные и связанные вхождения предметных переменных.

Определение. *Кванторным комплексом называется выражение вида $\forall x$ или $\exists x$, где x — имя предметной переменной.*

Определение. *Областью действия квантора называется формула, стоящая непосредственно вслед за кванторным комплексом, содержащем это вхождение квантора.*

Пример.

$$\forall x\,\underbrace{(P(x,y,z)\to\exists y\,\underbrace{\forall z\,\underbrace{Q(x,y,z)}_{3}}_{2})}_{1}$$

Цифрами 1, 2 и 3 отмечены области действия соответственно квантора всеобщности по переменной x, квантора существования по переменной y и квантора всеобщности по переменной z.

Определение. *Вхождение предметной переменной в формулу называется связанным, если оно находится в кванторном комплексе или в области действия квантора по этой переменной.*

Вхождения предметных переменных, не являющиеся связанными, называются свободными.

Определение. *Формула без свободных переменных называется замкнутой.*

Пример. В приведённой в предыдущем примере формуле переменные, связанные одним и тем же квантором, подчёркнуты одинаково.

$$\forall\underline{x}(P(\underline{x},y,z)\to\exists\underline{\underline{y}}\forall\underline{\underline{\underline{z}}}Q(\underline{x},\underline{\underline{y}},\underline{\underline{\underline{z}}}))$$

Первые два вхождения предметных переменных y и z являются свободными.

IV.3. Интерпретации формул.

Приведённое выше определение предикатной формулы является синтаксическим, то есть оно позволяет проверить, является ли выражение предикатной формулой, но не позволяет вычислить её значения в зависимости от значений переменных. Значение предикатной формулы можно вычислить, проинтерпретировав входящие в неё символы, т.е. задав содержательный смысл предметным константам, функциональным и предикатным символам.

Определение. *Для того, чтобы задать интерпретацию формулы достаточно*

— задать область интерпретации D — множество констант;

— каждому n-местному функциональному символу f поставить в соответствие конкретную функцию из D^n в D;

— каждому n-местному предикатному символу P поставить в соответствие конкретное отношение над D^n.

Значение атомарной формулы в заданной интерпретации на заданном наборе значений входящих в неё свободных переменных вычисляется в соответствии с заданной интерпретацией.

Если вычислены значения формул A и B в заданной интерпретации на заданном наборе значений входящих в них свободных переменных, то значения формул $\neg A$ и $A * B$ вычисляются в соответствии с таблицами истинности для логических связок $\neg$ и $*$.

Если $x, y_1..., y_m$ — список (быть может пустой) всех свободных переменных, входящих в формулу $P(x, y_1..., y_m)$, то для вычисления значения формулы $\forall x P(x, y_1..., y_m)$ (или $\exists x P(x, y_1..., y_m)$) на наборе значений $b_1..., b_m$ свободных переменных $y_1..., y_m$ достаточно вычислить значения постоянных формул $P(a, b_1..., b_m)$ при всех $a \in D$. Если при всех значениях $a \in D$ эти формулы истинны, то $\forall x P(x, b_1..., b_m)$ истинна, в противном случае она ложна (соответственно если при всех значениях $a \in D$ эти формулы ложны, то $\exists x P(x, b_1..., b_m)$ ложна, в противном случае она истинна.)[7]

Из способа вычисления значения предикатной формулы следует, что оно зависит только от значений свободных переменных. В частности, в каждой конкретной интерпретации

— замкнутая формула задаёт высказывание;

— формула с одной свободной переменной задаёт свойство объектов из D;

— формула с n свободными переменными задаёт n-местное отношение объектов из D.

Если область интерпретации I конечна, т.е. $D = \{a_1, ..., a_n\}$, то в этой интерпретации следующие формулы имеют одинаковые значения при любых значениях предметных переменных $y_1..., y_m$ (этот факт здесь обозначен посредством $\Leftrightarrow_{D=\{a_1,...,a_n\}}$):

$$\begin{aligned} \forall x P(x, y_1..., y_m) \Leftrightarrow_{D=\{a_1,...,a_n\}} & P(a_1, y_1..., y_m) \,\&\, P(a_2, y_1..., y_m) \\ & \&\, ... \,\&\, P(a_n, y_1..., y_m), \\ \exists x P(x, y_1..., y_m) \Leftrightarrow_{D=\{a_1,...,a_n\}} & P(a_1, y_1..., y_m) \vee P(a_2, y_1..., y_m) \\ & \vee ... \vee P(a_n, y_1..., y_m). \end{aligned}$$

[7]Процесс вычисления значений A и E формул $\forall x P(x, b_1..., b_m)$ и $\exists x P(x, b_1..., b_m)$ соответственно можно представить в виде выполнения циклов

```
A:=true;                      E:=false;
for a ∈ D do                  for a ∈ D do
if ¬P(a, b1..., bm) then      if P(a, b1..., bm) then
{A:=false; break}             {E:=true; break}
```

IV.4. Истинность, ложность, выполнимость, общезначимость, противоречивость и равносильность предикатных формул.

Определение. *Формула называется истинной (ложной) в заданной интерпретации, если она истинна (ложна) на всех наборах значений из области интерпретации, подставляемых вместо свободных вхождений предметных переменных этой формулы.*

Определение. *Формула называется выполнимой в заданной интерпретации, если она истинна хоть на одном наборе значений из области интерпретации, подставляемых вместо свободных вхождений предметных переменных этой формулы.*

Примеры. Рассмотрим формулу $\forall x P(x, f(y))$.

1. Интерпретация I_1: $D = \mathbf{N}$ (множество натуральных чисел), $f(y) = y+1$, $P(x,y) \Leftrightarrow x < y$.

В этой интерпретации формула запишется как $\forall x\ (x < y+1)$. Какое бы значение b для свободной переменной y мы ни взяли, при $x = b+1$ формула $(b+1 < b+1)$ ложна. Следовательно, эта формула ложна в интерпретации I_1.

2. Интерпретация I_2: $D = \mathbf{N}$, $f(y) = 0$, $P(x,y) \Leftrightarrow x \geq y$.

В этой интерпретации формула запишется как $\forall x\ (x \geq 0)$. При этом y становится фиктивной переменной и эта формула истинна в интерпретации I_2.

3. Интерпретация I_3: $D = \mathbf{N}$, $f(y) = y$, $P(x,y) \Leftrightarrow x \geq y$.

В этой интерпретации формула запишется как $\forall x\ (x \geq y)$. При $y = 0$ эта формула истинна. При остальных значениях y она ложна. Следовательно, эта формула выполнима в интерпретации I_3.

Определение. *Формула называется общезначимой (противоречием), если она истинна (ложна) в любой интерпретации.*

То есть общезначимая формула истинна в любой интерпретации на любом наборе значений свободных переменных из области интерпретации.

Определение. *Формула называется выполнимой, если она выполнима хоть в одной интерпретации.*

То есть формула выполнима, если хоть в одной интерпретации хоть на одном наборе значений свободных переменных из области интерпретации она истинна.

Определение. *Формула B логически следует из формул $A_1, ...A_n$,* *если в любой интерпретации на любом наборе значений свободных переменных, для которых все формулы $A_1, ...A_n$ истинны, формула B тоже истинна.*

Факт логического следования будем записывать $A_1, ...A_n \Rightarrow B$. При этом $A_1, ...A_n \Rightarrow B$ тогда и только тогда, когда формула $A_1 \;\&\; ... \;\&\; A_n \rightarrow B$ общезначима.

Определение. *Формулы A и B называются равносильными, если в любой интерпретации на любом наборе значений свободных переменных их значения совпадают.*

Факт равносильности будем записывать $A \Leftrightarrow B$. При этом $A \Leftrightarrow B$ тогда и только тогда, когда формула $A \leftrightarrow B$ общезначима.

Все равносильности, справедливые для пропозициональных формул, справедливы и для предикатных формул. Кроме того, имеют место следующие равносильности для работы с кванторами. Все эти равносильности имеют место при условии, что предметная переменная x не входит свободно в формулу B и предметная переменная y не входит в формулу C. В равносильностях использовано также обозначение $[P]_t^x$ — результат подстановки терма t в формулу P вместо всех свободных вхождений предметной переменной x.

1.	$\neg\forall xA$	$\Leftrightarrow$	$\exists x\neg A$	
2.	$\neg\exists xA$	$\Leftrightarrow$	$\forall x\neg A$	
3.	$\forall xB$	$\Leftrightarrow$	B	x не входит свободно в B
4.	$\exists xB$	$\Leftrightarrow$	B	x не входит свободно в B
5.	$\forall xC$	$\Leftrightarrow$	$\forall y[C]_y^x$	y не входит в C
6.	$\exists xC$	$\Leftrightarrow$	$\exists y[C]_y^x$	y не входит в C
7.	$\forall xA \& B$	$\Leftrightarrow$	$\forall x(A \& B)$	x не входит свободно в B
8.	$\exists xA \& B$	$\Leftrightarrow$	$\exists x(A \& B)$	x не входит свободно в B
9.	$\forall xA \vee B$	$\Leftrightarrow$	$\forall x(A \vee B)$	x не входит свободно в B
10.	$\exists xA \vee B$	$\Leftrightarrow$	$\exists x(A \vee B)$	x не входит свободно в B
11.	$B \rightarrow \forall xA$	$\Leftrightarrow$	$\forall x(B \rightarrow A)$	x не входит свободно в B
12.	$B \rightarrow \exists xA$	$\Leftrightarrow$	$\exists x(B \rightarrow A)$	x не входит свободно в B
13.	$\forall xA \rightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$\exists x(A \rightarrow B)$	x не входит свободно в B
14.	$\exists xA \rightarrow B$	$\Leftrightarrow$	$\forall x(A \rightarrow B)$	x не входит свободно в B

IV.5. Терм, свободный для подстановки в формулу.

Как уже было показано, формула с n свободными переменными в каждой конкретной интерпретации задаёт n-местное отношение между объектами из области интерпретации. Подставляя значения констант вместо свободных переменных можно проверять, находятся ли они в этом отношении. Что произойдёт, если подставить не константу, а терм? Верно ли, что значение терма находится со значениями остальных переменных в том же отношении?

Определение. *Терм t называется свободным для подстановки в формулу A вместо свободных вхождений предметной переменной x, если он не содержит предметных переменных, в области действия кванторов по которым имеются свободные вхождения предметной переменной x.*

Пример. Рассмотрим формулу $\exists y P(x,y)$ в интерпретации I: $D = \mathbf{N}$, $P(x,y) \Leftrightarrow x = 2y$.

В этой интерпретации формула $\exists y(x = 2y)$ задаёт свойство объекта быть чётным натуральным числом „x чётно“. Рассмотрим термы $t_1 = z$, $t_2 = x + z$, $t_3 = x + y$.

Термы t_1 и t_2 свободны для подстановки в заданную формулу. Результат подстановки t_1 будет иметь вид $\exists y(z = 2y)$ и выражает в интерпретации I свойство „z чётно“. Результат подстановки t_2 будет иметь вид $\exists y(x + z = 2y)$ и в интерпретации I выражает свойство „$x + z$ чётно“.

Терм t_3 не является свободным для подстановки в эту формулу. Результат подстановки t_3 будет иметь вид $\exists y(x+y = 2y)$, что равносильно тому, что $\exists y(x = y)$ и выражает в интерпретации I тривиальное истинное свойство „x имеет равное ему число“ (это само число x). Никаких свойств терма $x + y$ эта формула не задаёт.[8]

Этот пример демонстрирует, что подстановка терма, не свободного для подстановки в заданную формулу вместо свободных вхождений предметной переменной, может совершенно изменить смысл этой формулы в рассматриваемой интерпретации.

Следствия из определения.

1. Любой постоянный терм свободен для подстановки в любую формулу вместо свободных вхождений любой предметной переменной.

2. Предметная переменная x свободна для подстановки в любую формулу вместо своих свободных вхождений.

3. Если предметная переменная x не имеет свободных вхождений в

[8]В программировании подстановке терма, не свободного для подстановки вместо свободных вхождений переменной x, соответствует, например, такая замена

```
for i:= 1 to n do        for i:= 1 to n do
P(x,i)                   P(i,i),
```

где $P(x,i)$ – тело цикла.

формулу A, то любой терм свободен для подстановки в формулу A вместо свободных вхождений предметной переменной x.

4. Если терм не содержит предметных переменных, входящих в формулу A (то есть все его переменные — абсолютно новые для A переменные), то он свободен для подстановки в формулу A вместо свободных вхождений любой предметной переменной.

IV.6. Предварённая нормальная форма.

Иногда бывает полезно иметь предикатную формулу в той или иной стандартизированной форме. Одной из таких форм является предварённая нормальная форма.

Определение. *Формула находится в предварённой нормальной форме, если она представляет собой последовательность кванторных комплексов, все переменные которых различны, и формулы, не содержащей кванторов.*

Для того, чтобы по предикатной формуле построить равносильную ей в предварённой нормальной форме достаточно

— переименовать связанные переменные таким образом, чтобы вслед за каждым вхождением квантора стояла предметная переменная со своим собственным именем (это возможно на основании равносильностей 5. и 6.);

— „вынести“ кванторы за скобки (на основании равносильностей 1, 2, 7 – 14).

Теорема. *По всякой предикатной формуле P можно построить формулу Q в предварённой нормальной форме такую, что $P \Leftrightarrow Q$.*

Пример. Привести в предварённую нормальную форму формулу

$$\forall x\ (\exists y\ P(x,y) \to \exists y\ P(y,y)).$$

1. Переименуем переменную y во втором вхождении квантора существования

$$\forall x(\exists y\ P(x,y) \to \exists z\ P(z,z)).$$

2. „Вынесем“ за скобки сначала первый квантор существования по переменной y

$$\forall x\ \forall y\ (P(x,y) \to \exists z\ P(z,z)),$$

а затем квантор существования по переменной z

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ (P(x,y) \to P(z,z)).$$

Замечание. В примере в п. 2 можно было сначала „вынести“ второй квантор существования по переменной z, а затем квантор существования по переменной y. В этом случае получим формулу

$$\forall x \; \exists z \; \forall y \; (P(x, y) \to P(z, z)).$$

Эти формулы равносильны, хоть для произвольной формулы Q формула $\forall x \; \forall y \; \exists z \; Q$ не равносильна формуле $\forall x \; \exists z \; \forall y \; Q$.

VI. ИСЧИСЛЕНИЯ ПРЕДИКАТОВ

Для доказательства тождественной истинности или тождественной ложности пропозициональной формулы можно воспользоваться таблицами истинности. Это громоздкое вычисление, но его можно проделать за конечное время. Для доказательства общезначимости или противоречивости предикатной формулы требуется доказать её истинность или ложность в ЛЮБОЙ интерпретации. Это, вообще говоря, бесконечный процесс. Были построены различные методы таких доказательств.

Наиболее широко распространены методы доказательства, основанные на построении вывода в том или ином исчислении предикатов. Основные понятия исчислений предикатов совпадают с таковыми для исчислений высказываний, поэтому здесь они не будут повторены.

В настоящем пособии будут изложены один из вариантов секвенциального исчисления предикатов [1, 2] и метод резолюций для исчисления предикатов [3].

VI.1. Секвенциальное исчисление предикатов

Как и в секвенциальном исчислении высказываний основным понятием секвенциального исчисления предикатов является понятие секвенции (от английского слова *sequent* – следующий, являющийся следствием).

Определение. *Секвенцией называется выражение вида* $\Gamma \vdash \Delta$, где Γ и Δ — списки (быть может пустые) формул, $\vdash$ — знак секвенции[9].

Список формул Γ секвенции $\Gamma \vdash \Delta$ называется её антецедентом, а список формул Δ – её сукцедентом (или консеквентом).

Формальное описание излагаемого здесь варианта секвенциального исчисления предикатов следующее.

1. Алфавит: множество символов для записи имен предметных переменных и констант, функциональных и предикатных символов, объединённое с множеством логических связок[10], кванторов, запятой, символа секвенции и скобок.

2. Формулы исчисления: секвенции, содержащие предикатные формулы в выбранном алфавите.

[9] Часто вместо знака $\vdash$ используется знак $\to$, если он не занят для обозначения импликации.

[10] Можно использовать любую полную систему логических связок, например, & и $\neg$, так как по всякой пропозициональной формуле можно построить равносильную ей, содержащую только эти две логические связки.

3. Аксиомы исчисления: единственная схема аксиом

$$\Gamma_1\ A\ \Gamma_2 \vdash \Delta_1\ A\ \Delta_2,$$

то есть для того, чтобы секвенция была аксиомой, необходимо и достаточно, чтобы среди формул как её антецедента, так и сукцедента, присутствовала одна и та же формула.

4. Правила вывода[11] для логических связок такие же как в секвенциальном исчислении высказываний, но добавлены ещё четыре правила для кванторов и правила сокращения повторений

$$(\vdash \neg)^{12}\frac{\Gamma_1\ \ A\ \ \Gamma_2 \vdash \Delta_1\ \ \Delta_2}{\Gamma_1\ \ \Gamma_2 \vdash \Delta_1\ \ \neg A\ \ \Delta_2} \quad (\neg \vdash)\frac{\Gamma_1\ \ \Gamma_2 \vdash \Delta_1\ \ A\ \ \Delta_2}{\Gamma_1\ \ \neg A\ \ \Gamma_2 \vdash \Delta_1\ \ \Delta_2}$$

$$(\vdash \&)\frac{\begin{array}{c}\Gamma \vdash \Delta_1\ \ A\ \ \Delta_2\\ \Gamma \vdash \Delta_1\ \ B\ \ \Delta_2\end{array}}{\Gamma \vdash \Delta_1\ \ (A \,\&\, B)\ \ \Delta_2} \quad (\&\ \vdash)\frac{\Gamma_1\ \ A\ \ B\ \ \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1\ \ (A \,\&\, B)\ \ \Gamma_2 \vdash \Delta}$$

$$(\vdash \vee)\frac{\Gamma \vdash \Delta_1\ \ A\ \ B\ \ \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1\ \ (A \vee B)\ \ \Delta_2} \quad (\vee \vdash)\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1\ \ A\ \ \Gamma_2 \vdash \Delta\\ \Gamma_1\ \ B\ \ \Gamma_2 \vdash \Delta\end{array}}{\Gamma_1\ \ (A \vee B)\ \ \Gamma_2 \vdash \Delta}$$

$$(\vdash\rightarrow)\frac{\Gamma_1\ \ A\ \ \Gamma_2 \vdash \Delta_1\ \ B\ \ \Delta_2}{\Gamma_1\Gamma_2 \vdash \Delta_1(A \rightarrow B)\Delta_2} \quad (\rightarrow\vdash)\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1\ \ \Gamma_2 \vdash \Delta_1\ \ A\ \ \Delta_2\\ \Gamma_1\ \ B\ \ \Gamma_2 \vdash \Delta_1\ \ \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1(A \rightarrow B)\Gamma_2 \vdash \Delta_1\Delta_2}$$

$$(\vdash\leftrightarrow)\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1\ \ A\ \ \Gamma_2 \vdash \Delta_1\ \ B\ \ \Delta_2\\ \Gamma_1\ \ B\ \ \Gamma_2 \vdash \Delta_1\ \ A\ \ \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1\Gamma_2 \vdash \Delta_1(A \leftrightarrow B)\Delta_2} \quad (\leftrightarrow\vdash)\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1\ \ \Gamma_2 \vdash \Delta_1\ \ A\ \ B\ \ \Delta_2\\ \Gamma_1\ \ A\ \ B\ \ \Gamma_2 \vdash \Delta_1\ \ \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1(A \leftrightarrow B)\Gamma_2 \vdash \Delta_1\Delta_2}$$

$$(\vdash \oplus)\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1\ \ \Gamma_2 \vdash \Delta_1\ \ A\ \ B\ \ \Delta_2\\ \Gamma_1\ \ A\ \ B\ \ \Gamma_2 \vdash \Delta_1\ \ \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1\Gamma_2 \vdash \Delta_1(A \oplus B)\Delta_2} \quad (\oplus \vdash)\frac{\begin{array}{c}\Gamma_1\ \ A\ \ \Gamma_2 \vdash \Delta_1\ \ B\ \ \Delta_2\\ \Gamma_1\ \ B\ \ \Gamma_2 \vdash \Delta_1\ \ A\ \ \Delta_2\end{array}}{\Gamma_1(A \oplus B)\Gamma_2 \vdash \Delta_1\Delta_2}$$

[11] Если в алфавите присутствуют не все логические связки, то основными правилами вывода будут только правила для выбранных связок. Остальные правила будут допустимыми.

[12] Название правила $(* \vdash)$ читается „правило введения логической связки $*$ в антецедент“, правила $(\vdash *)$ – „правило введения логической связки $*$ в сукцедент“.

Кванторные правила

$$(\vdash \exists)\frac{\Gamma \vdash \Delta_1 \;\; [A]^x_T \;\; \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1 \;\; \exists x\, A \;\; \Delta_2} \qquad (\forall \vdash)\frac{\Gamma_1 \;\; [A]^x_T \;\; \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1 \;\; \forall x\, A \;\; \Gamma_2 \vdash \Delta}$$

где терм T свободен для подстановки в формулу A вместо свободных вхождений предметной переменной x.

$$(\exists \vdash)\frac{\Gamma_1 \;\; [A]^x_y \;\; \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1 \;\; \exists x\, A \;\; \Gamma_2 \vdash \Delta} \qquad (\vdash \forall)\frac{\Gamma \vdash \Delta_1 \;\; [A]^x_y \;\; \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1 \;\; \forall x\, A \;\; \Delta_2}$$

где переменная y не входит свободно в заключение правила и свободна для подстановки в формулу A вместо свободных вхождений предметной переменной x.

Правила сокращения повторений

$$\frac{\Gamma_1 \;\; P \;\; \Gamma_2 \;\; P \;\; \Gamma_3 \vdash \Delta}{\Gamma_1 \;\; P \;\; \Gamma_2 \;\; \Gamma_3 \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta_1 \;\; P \;\; \Delta_2 \;\; P \;\; \Delta_3}{\Gamma \vdash \Delta_1 \;\; P \;\; \Delta_2 \;\; \Delta_3}$$

Замечание. Правила сокращения повторений являются допустимыми в секвенциальном исчислении высказываний, но должны быть включены в основные правила секвенциального исчисления предикатов.

Примером секвенции, формульный образ которой общезначим, но которая не выводима без использования правила сокращения повторений может служить секвенция $\vdash \forall x \forall y \exists z((P(x) \vee P(y)) \to P(z))$. В качестве упражнения можно проверить, что без использования правила сокращения повторений эта секвенция не выводима, в то время как секвенция $\vdash \forall x \forall y \exists z((P(x) \vee P(y)) \to P(z)) \quad \forall x \forall y \exists z((P(x) \vee P(y)) \to P(z))$ выводима. Применение правила сокращения повторений ко второй из них даёт вывод исходной секвенции.

Для секвенциального исчисления предикатов справедливы следующие теоремы. Здесь они приведены без доказательства.

Важным понятием при формулировке теоремы 1 является следующее.

Определение. *Секвенция называется чистой, если ни одна переменная не имеет одновременно свободных и связанных вхождений.*

Теорема 1. *Чистая секвенция выводима в секвенциальном исчислении предикатов тогда и только тогда, когда её формульный образ общезначим.*

Примером секвенции, формульный образ которой общезначим, но она не выводима в секвенциальном исчислении предикатов, является, например, такая (проверьте в качестве упражнения)

$$\forall x \forall y (B(y) \& A(x)) \vdash A(y).$$

Теорема 2. *Секвенциальное исчисление предикатов полно и непротиворечиво.*[13]

VI.2. Метод резолюций для исчисления предикатов

VI.1.1. Основные понятия метода резолюций для исчисления предикатов.

Метод резолюций был предложен Дж.Робинсоном как машинно ориентированное исчисление предиктов [4]. Основным понятием метода резолюций является предложение (или клоз: калька с английского слова *clause* — предложение). Предложением в методе резолюций для исчисления предикатов называется элементарная дизъюнкция атомарных формул. Важную роль играет пустое предложение, которое Дж.Робинсон обозначил посредством *nill* (в литературе в качестве его обозначения часто используют $\emptyset$ - стандартное обозначение для пустого множества, Λ - стандартное обозначение для пустого слова, или даже число 0).

Применение правила резолюции использует понятие общего унификатора формул.

Определение. *Общим унификатором формул Q и R называется такая подстановка $\lambda = |^{x_1\ \dots\ x_n}_{t_1\ \dots\ t_n}$ термов $t_1\ \dots\ t_n$ вместо свободных вхождений предметных переменных $x_1\ \dots\ x_n$, что результаты этой подстановки в формулы Q и R графически совпадают. ($Q|^{x_1\ \dots\ x_n}_{t_1\ \dots\ t_n} \circeq R|^{x_1\ \dots\ x_n}_{t_1\ \dots\ t_n}$).*

Пример. Рассмотрим пример нахождения попарных общих унификаторов для трёх формул. $R_1 = P(x, y, z)$, $R_2 = P(a, f(x), y)$, $R_3 = P(f(x), z, y)$, где P – имя 3-местного предиката, a – имя константы, x, y, z – имена предметных переменных, f – имя функции.

Пусть $\lambda_{1\ 2} = |^{x\ \ y\ \ z}_{t_1\ t_2\ t_3}$ — общий унификатор формул R_1 и R_2. Тогда

[13] Несоблюдение ограничений на применение кванторных правил может привести к тому, что будет „доказана“ формула, не являющаяся общезначимой.

$R_1|^{x\ y\ z}_{t_1\ t_2\ t_3} \circeq R_2|^{x\ y\ z}_{t_1\ t_2\ t_3}$, то есть $P(t_1, t_2, t_3) \circeq P(a, f(t_1), t_2)$. Это возможно в случае, если

$$\begin{cases} t_1 & \circeq & a \\ t_2 & \circeq & f(t_1) \\ t_3 & \circeq & t_2 \end{cases}.$$

Решением этой системы будут термы $t_1 \circeq a$, $t_2 \circeq f(a)$, $t_3 \circeq f(a)$.

Действительно, каждая из формул $R_1|^{x\ y\ z}_{t_1\ t_2\ t_3}$ и $R_2|^{x\ y\ z}_{t_1\ t_2\ t_3}$ графически совпадает с формулой $P(a, f(a), f(a))$.

Пусть $\lambda_{2\ 3} = |^{x\ y\ z}_{t_1\ t_2\ t_3}$ — общий унификатор формул R_2 и R_3. Тогда $R_2|^{x\ y\ z}_{t_1\ t_2\ t_3} \circeq R_3|^{x\ y\ z}_{t_1\ t_2\ t_3}$, то есть $P(a, f(t_1), t_2) \circeq P(f(t_1), t_3, t_2)$. Это возможно в случае, если

$$\begin{cases} f(t_1) & \circeq & a \\ f(t_1) & \circeq & t_3 \\ t_2 & \circeq & t_2 \end{cases}.$$

Первое уравнение этой системы не имеет решения, так как имя константы не может начинаться с имени функции.

Следовательно, R_2 и R_3 не унифицируемы.

Пусть $\lambda_{1\ 3} = |^{x\ y\ z}_{t_1\ t_2\ t_3}$ — общий унификатор формул R_1 и R_3. Тогда $R_1|^{x\ y\ z}_{t_1\ t_2\ t_3} \circeq R_3|^{x\ y\ z}_{t_1\ t_2\ t_3}$, то есть $P(t_1, t_2, t_3) \circeq P(f(t_1), t_3, t_2)$. Это возможно в случае, если

$$\begin{cases} t_1 & \circeq & f(t_1) \\ t_2 & \circeq & t_3 \\ t_3 & \circeq & t_2 \end{cases}.$$

Первое уравнение этой системы не имеет решения, так как длина записи терма t_1 по крайней мере на три символа меньше, чем длина записи терма $f(t_1)$.

Следовательно, R_1 и R_3 не унифицируемы.

Формальное описание метода резолюций для исчисления предикатов следующее.

1. Алфавит: множество символов для записи имен предметных переменных и констант, имен предикатных и функциональных символов, объединённое с множеством из двух логических связок $\vee$ и $\neg$, скобок (и), а также символа запятой.

2. Формулы: предложения.

3. Аксиомы: отсутствуют.

4. Правила вывода:

   Правило резолюции

$$\underline{D_1 \vee R_1 \vee D_2} \qquad\qquad \underline{D_3 \vee \neg R_2 \vee D_4}$$

$$\underline{[D_1 \vee D_2 \vee D_3 \vee D_4]\lambda}$$

   где λ — общий унификатор формул R_1 и R_2.

Правило сокращения повторений $D_1 \vee R \vee D_2 \vee R \vee D_3$

$$D_1 \vee R \vee D_2 \vee D_3,$$

Определение. *Множество предложений называется неудовлетворимым, если из него выводимо пустое предложение nill .*

Теорема. *Для того, чтобы множество предложений было неудовлетворимо необходимо и достаточно, чтобы их конъюнкция являлась противоречием.*

VI.2.2. Приведение формулы исчисления предикатов к множеству предложений

Метод резолюций работает с предложениями. Как по формуле построить множество предложений, неудовлетворимость которого равносильна противоречивости формулы?

Прежде, чем привести алгоритм приведения формулы к множеству предложений, дадим два определения.

Определение. *Ско́лемовской константой (функцией) называется константа (функция), существование которой утверждается в формуле, но её значение (определение) может быть неизвестно.*

Алгоритм приведения формулы к множеству предложений.[14]

Формулируя этот алгоритм одновременно будем демонстрировать его работу на примере формулы

$$\forall x(P(x) \to (\forall y(P(y) \to P(f(x,y))) \;\&$$

$$\neg\forall y(Q(x,y) \to P(y)))).$$

[14] Это именно **алгоритм**, в котором порядок выполнения операций менять нельзя.

1. *Исключение из формулы всех логических связок, кроме* $\&$, $\vee$ *и* $\neg$.

$$\forall x(\neg P(x) \vee (\forall y(\neg P(y) \vee P(f(x,y))) \;\&$$
$$\neg\forall y(\neg Q(x,y) \vee P(y)))).$$

Используются равносильности для логических связок.

2. *Уменьшение области действия знаков отрицания.*

Используются равносильности, задающие правила пронесения отрицания через кванторы и правила де Моргана.

$$\forall x(\neg P(x) \vee (\forall y(\neg P(y) \vee P(f(x,y))) \;\&$$
$$\exists y(Q(x,y) \;\&\; \neg P(y)))).$$

3. *Стандартизация переменных.*

Переименование всех связанных вхождений предметных переменных таким образом, чтобы вслед за каждым вхождением квантора стояла переменная со своим собственным именем, отличным от имен других переменных.

$$\forall x(\neg P(x) \vee (\forall y(\neg P(y) \vee P(f(x,y))) \;\&$$
$$\exists z(Q(x,z) \;\&\; \neg P(z)))).$$

4. *Исключение квантора существования.*

Приведём пары формул, выполнимых одновременно:

$\exists x\ P(x)$	$P(a)$ для некоторой константы a
$\forall y\ \exists x\ P(x,y)$	$\forall y\ P(f(y),y)$ для некоторой функции f
	$\vdots$
$\exists x_0 \forall y_1 \exists x_1 ... \forall y_n \exists x_n$ $P(x_0, x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$	$\forall y_1 ... \forall y_n P(a, f_1(y_1), ...$ $f_n(y_1, ..., y_n), y_1, ..., y_n)$ для некоторых функций

Таким образом, чтобы исключить квантор существования достаточно каждое вхождение связанной им переменной заменить термом со сколемовской функцией от переменных, в области действия кванторов всеобщности по которым находится данный квантор существования.

$$\forall x(\neg P(x) \vee (\forall y(\neg P(y) \vee P(f(x,y))) \;\&$$

$$(Q(x, g(x)) \mathbin{\&} \neg P(g(x))))),$$

где g — сколемовская функция и терм $g(x)$ подставляется вместо переменной z, которая находится в области действия квантора всеобщности по переменной x.

5. *Приведение к предварённой нормальной форме.*

   Так как в формуле присутствуют только кванторы всеобщности по различным переменным, и формула содержит только связки $\&$, $\vee$ и $\neg$, то этот процесс заключается просто в вынесении всех кванторов всеобщности в начало формулы.

$$\forall x \forall y(\neg P(x) \vee ((\neg P(y) \vee P(f(x, y))) \mathbin{\&}$$
$$(Q(x, g(x)) \mathbin{\&} \neg P(g(x))))).$$

6. *Исключение кванторов всеобщности.*

   Так как на данном этапе все переменные в формуле являются связанными квантором всеобщности, то эти кванторы можно явно не указывать.

$$\neg P(x) \vee ((\neg P(y) \vee P(f(x, y))) \mathbin{\&} Q(x, g(x)) \mathbin{\&} \neg P(g(x))).$$

7. *Приведение бескванторной формулы в КНФ.*

$$(\neg P(x) \vee \neg P(y) \vee P(f(x, y))) \mathbin{\&} (\neg P(x) \vee Q(x, g(x))) \mathbin{\&}$$
$$(\neg P(x) \vee \neg P(g(x))).$$

8. *Исключение конъюнкции.*

$$(\neg P(x) \vee \neg P(y) \vee P(f(x, y)))$$
$$(\neg P(x) \vee Q(x, g(x)))$$
$$(\neg P(x) \vee \neg P(g(x))).$$

VI.2.3. Доказательство логического следования методом резолюций для исчисления предикатов

Как же доказывать общезначимость формулы, или логическое следование, или правильность рассуждения, формализованного с помощью формул исчисления предикатов?

Пусть требуется доказать логическое следование

$$A_1 \ \dots \ A_n \Rightarrow B_1 \ \dots \ B_m.$$

Это означает, что формула

$$A_1 \ \& \ \dots \ \& \ A_n \to B_1 \vee \dots \vee B_m$$

общезначима, что равносильно тому, что её замыкание квантором всеобщности $\forall$ общезначимо

$$\widetilde{\forall}(A_1 \ \& \ \dots \ \& \ A_n \to B_1 \vee \dots \vee B_m),$$

что имеет место тогда и только тогда, когда

$$\widetilde{\forall}(\neg A_1 \vee \dots \ \vee \neg A_n \vee B_1 \vee \dots \vee B_m)$$

общезначима. То есть её отрицание

$$\neg\widetilde{\forall}(\neg A_1 \vee \dots \ \vee \neg A_n \vee B_1 \vee \dots \vee B_m)$$

является противоречием. По правилам пронесения отрицания через кванторы и правилам де Моргана это означает, что

$$\widetilde{\exists}(A_1 \ \& \ \dots \ \& \ A_n \ \& \ \neg B_1 \ \& \ \dots \ \& \ \neg B_m)$$

является противоречием.

Удалим кванторы существования, заменив все свободные переменные формулы $A_1 \ \& \ \dots \ \& \ A_n \ \& \ \neg B_1 \ \& \ \dots \ \& \ \neg B_m$ на сколемовские константы. Обозначим полученную формулу посредством $\widetilde{A_1} \ \& \ \dots \ \& \ \widetilde{A_n} \ \& \ \neg\widetilde{B_1} \ \& \ \dots \ \& \ \neg\widetilde{B_m}$. Противоречивость полученной формулы (при некоторых значениях сколемовских констант) равносильна противоречивости предыдущей выделенной формулы.

Если $K_{\widetilde{A_1}}, \dots, K_{\widetilde{A_n}}, K_{\neg\widetilde{B_1}}, \dots, K_{\neg\widetilde{B_m}}$ — множества предложений для формул $\widetilde{A_1}, \dots, \widetilde{A_n}, \neg\widetilde{B_1}, \dots, \neg\widetilde{B_m}$ соответственно, то мы имеем, что множество предложений

$$\{K_{\widetilde{A_1}}, \dots, K_{\widetilde{A_n}}, K_{\neg\widetilde{B_1}}, \dots, K_{\neg\widetilde{B_m}}\}$$

неудовлетворимо (из него выводимо пустое предложение $nill$).

Таким образом,

для того, чтобы доказать логическое следование

$$A_1 \ \dots \ A_n \Rightarrow B_1 \ \dots \ B_m$$

достаточно

1. заменить все свободные вхождения предметных переменных в формулы A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_m на сколемовские константы (вместо одной и той же переменной, входящей в разные формулы, подставляется одна и та же константа, вместо различных переменных подставляются различные константы), получив при этом логическое следование $\widetilde{A_1}$ ... $\widetilde{A_n} \Rightarrow \widetilde{B_1}$ ... $\widetilde{B_m}$,

2. каждую из формул $\widetilde{A_1}$, ..., $\widetilde{A_n}$ привести к множеству предложений,

3. каждую из формул $\neg\widetilde{B_1}$, ..., $\neg\widetilde{B_m}$ привести к множеству предложений,

4. доказать неудовлетворимость полученного множества предложений путём вывода из него пустого предложения *nill*.

А. ПРИМЕРЫ И УПРАЖНЕНИЯ

А.I.1. Примеры доказательств равносильности пропозициональных формул

Для доказательства равносильности пропозициональных формул достаточно привести их к одинаковому виду, используя основные равносильности. При этом удобно следовать такой инструкции (это не обязательно, так как после приобретения опыта проведения равносильных преобразований формул каждый может решить для себя, какими правилами ему лично удобно пользоваться и в каком порядке):

1. исключить все бинарные логические связки, кроме & и $\vee$, используя равносильности 16 – 20;

2. используя правила де Моргана преобразовать формулу так, чтобы все отрицания $\neg$ находились непосредственно перед переменными;

3. пользуясь правилами дистрибутивности привести формулу в ДНФ (или КНФ);

4. учитывая то, что $x\&\neg x$ является противоречием, а $x \vee \neg x$ — тавтологией, воспользоваться равносильностями 21 – 24;

5. построить сокращенную (или совершенную) ДНФ.

Пример 1. Проверить равносильность формул

$$A = \neg x \& y \to \neg(x \vee y)$$

$$B = y \to x$$

$A = \neg x\&y \to \neg(x \vee y) \Leftrightarrow$ [15] $\neg(\neg x\&y) \vee \neg(x \vee y) \Leftrightarrow$ [16] $(x \vee \neg y) \vee \neg(x \vee y) \Leftrightarrow$ [17] $x \vee \neg y \vee \neg x\&\neg y \Leftrightarrow$ [18] $x \vee \neg y$

$B = y \to x \Leftrightarrow$ [19] $\neg y \vee x \Leftrightarrow$ [20] $x \vee \neg y$

Так как обе формулы равносильны одной и той же формуле, то исходные формулы тоже равносильны.

Следующий пример несколько более сложен.

Пример 2. Проверить равносильность формул

$$A = (x\&y \to \neg x\&z)\&((y \to x) \to y\&\neg z)$$

$$B = \neg(y \to x)$$

$A = \underline{(x\&y \to \neg x\&z)}\&(\underline{(y \to x)} \to y\&\neg z) \Leftrightarrow$ [21]

$(\neg(x\&y) \vee \neg x\&z)\&\underline{((\neg y \vee x) \to y\&\neg z)} \Leftrightarrow$ [22]

$(\underline{\neg(x\&y)} \vee \neg x\&z)\&(\underline{\neg(\neg y \vee x)} \vee y\&\neg z) \Leftrightarrow$ [23]

$(\underline{\neg x} \vee \neg y \vee \underline{\neg x\&z})\&(y\&\neg x \vee y\&\neg z) \Leftrightarrow$ [24]

$(\neg x \vee \neg y)\&(y\&\neg x \vee y\&\neg z) \Leftrightarrow$ [25]

$\neg x\&y \vee \neg x\&y\&\neg z \vee \underbrace{\neg y\neg x\&y}_{F} \vee \underbrace{\neg y\&y\&\neg z}_{F} \Leftrightarrow$ [26]

$\neg x\&y \vee \neg x\&y\&\neg z \Leftrightarrow$ [27]

$\neg x\&y$

$B = \neg(y \to x) \Leftrightarrow$ [28]

$\neg(\neg y \vee x) \Leftrightarrow$ [29]

$y\&\neg x \Leftrightarrow$ [30]

$\neg x\&y$

Так как обе формулы равносильны одной и той же формуле, то исходные формулы тоже равносильны.

[15] по правилу 21 исключения импликации

[16] по правилу де Моргана 11 для конъюнкции

[17] по правилу де Моргана 12 для дизъюнкции

[18] по правилу поглощения 10

[19] по правилу 21 исключения импликации

[20] по правилу 4 коммутативости дизъюнкции

[21] по правилу 21 исключения импликации, примененному дважды (к каждой из подчеркнутых формул)

[22] по правилу 21 исключения импликации

[23] по правилам де Моргана 11 и 12

[24] по правилу поглощения 10

[25] по правилу дистрибутивности 7

[26] по правилу 23

[27] по правилу поглощения 10

[28] по правилу 21 исключения импликации

[29] по правилу де Моргана 12

[30] по правилу 3 коммутативости конъюнкции

Пример 3. Проверить равносильность формул

$$A = x \to (y \to z)$$

$$B = (x \to y) \to z$$

$A = x \to (y \to z) \Leftrightarrow$ [31] $x \to (\neg y \vee z) \Leftrightarrow$ [32] $\neg x \vee (\neg y \vee z) \Leftrightarrow$ [33] $\neg x \vee \neg y \vee z$

Эта формула представлена в виде совершенной ДНФ и ложна на единственном наборе значений переменных: $x =$И, $y =$И, $z =$Л.

$B = (x \to y) \to z \Leftrightarrow$ по правилу 21 исключения импликации $(\neg x \vee y) \to z \Leftrightarrow$ [34] $\neg(\neg x \vee y) \vee z \Leftrightarrow$ [35] $x \& \neg y \vee z$

Эта формула ложна на трёх наборах значений переменных, например, при $x =$Л, $y =$Л, $z =$Л, на котором формула A истинна.

Таким образом, формулы не равносильны.

Равносильные преобразования позволяют также доказывать тавтологичность или противоречивость формул.

Пример 4. Проверить, является ли формула тавтологией или противоречием.

$$A = (x \to y) \& (y \to z) \to (x \to z)$$

$A = (x \to y) \& (y \to z) \to (x \to z) \Leftrightarrow$ [36]

$(\neg x \vee y) \& (\neg y \vee z) \to (\neg x \vee z) \Leftrightarrow$ [37]

$\neg((\neg x \vee y) \& (\neg y \vee z)) \vee (\neg x \vee z) \Leftrightarrow$ [38]

$\neg(\neg x \vee y) \vee \neg(\neg y \vee z) \vee (\neg x \vee z) \Leftrightarrow$ [39]

$\underline{x \& \neg y} \vee y \& \neg z \vee \underline{\neg x} \vee z \Leftrightarrow$ [40]

$x \& \neg y \vee \underline{y \& \neg z} \vee \neg x \vee \underline{z} \vee \neg y \Leftrightarrow$ [41]

$x \& \neg y \vee y \& \neg z \vee \neg x \vee z \vee \underbrace{\neg y \vee y}_{T}$

Эта формула является тавтологией по правилу 22.

A.I.2. Упражнения

[31] по правилу 21 исключения импликации
[32] по правилу 21 исключения импликации
[33] убирая необязательные скобки
[34] по правилу 21 исключения импликации
[35] по правилу де Моргана 12
[36] по правилу 21 исключения импликации, примененному трижды
[37] по правилу 21 исключения импликации
[38] по правилу де Моргана
[39] по правилу де Моргана
[40] по правилу склеивания для подчеркнутых членов
[41] по правилу склеивания для подчеркнутых членов

Проверить равносильность формул A и B двумя способами: построив их таблицы истинности; приведя их к одинаковому виду с помощью равносильных преобразований.

1. $A = ((p \vee q) \vee r) \to ((p \vee q) \ \& \ (p \vee r))$; $\quad B = (p \leftrightarrow r)$
2. $A = (x \to y) \to z$; $\quad B = x \to (y \to z)$
3. $A = ((x \oplus y) \to (x \vee y) \ \& \ ((x \to y) \to (x \oplus y))$; $\quad B = x \mid y$
4. $A = \neg((x \to y) \vee ((x \to z) \ \& \ y))$; $\quad B = x \ \& \ \neg y \ \& \ (\neg y \to x \ \& \ \neg z)$
5. $A = (\neg x \ \& \ \neg z) \vee x \ \& \ y \vee z \ \& \ \neg z$; $\quad B = x \ \& \ \neg(y \ \& \ z) \vee \neg x \ \& \ z$
6. $A = (x \to y) \to ((x \ \& \ \neg y) \oplus (x \leftrightarrow \neg y))$; $\quad B = (x \vee y) \ \& \ (\neg x \vee \neg y)$
7. $A = x \to (x \ \& \ y \to ((x \to y) \to y) \ \& \ z)$; $\quad B = y \to (x \to z)$
8. $A = (x \vee y) \ \& \ (x \vee z) \ \& \ (y \vee u) \ \& \ (z \vee u)$; $\quad B = (x \ \& \ u) \vee (y \ \& \ z)$
9. $A = x \vee (y \leftrightarrow z)$; $\quad B = (x \vee y) \leftrightarrow (x \vee z)$
10. $A = x \to (y \leftrightarrow z)$; $\quad B = (x \to y) \leftrightarrow (x \to z)$
11. $A = x \ \& \ (y \leftrightarrow z)$; $\quad B = (x \ \& \ y) \leftrightarrow (x \ \& \ z)$
12. $A = x \to (y \vee z)$; $\quad B = (x \to y) \vee (x \to z)$
13. $A = x \to (y \ \& \ z)$; $\quad B = (x \to y) \ \& \ (x \to z)$
14. $A = x \oplus (y \to z)$; $\quad B = (x \oplus y) \to (x \oplus z)$
15. $A = x \to (y \to z)$; $\quad B = (x \to y) \to (x \to z)$

Проверить, является ли формула тавтологией или противоречием двумя способами: построив ее таблицу истинности; упростив ее с помощью равносильных преобразований.

16. $(x \to y) \to ((x \vee z) \to (y \to z))$
17. $((x \oplus y) \leftrightarrow z) \ \& \ (x \to y \ \& \ z)$
18. $((\neg x \vee \neg y) \downarrow (x \oplus \neg y)) \oplus (\neg(x \to \neg y) \to (\neg x \vee y))$
19. $((x \vee \neg y) \ \& \ z \to ((x \leftrightarrow z) \oplus y)) \ \& \ (x \ \& \ y \ \& \ z)$
20. $((x \to y) \to ((x \to (y \to z)) \to (x \to z)))$
21. $((x \to z) \to ((y \to z) \to ((x \vee y) \to z)))$
22. $((x \to y) \to ((x \to \neg y) \to \neg x))$
23. $((\neg y \to \neg x) \to ((\neg y \to x) \to y))$
24. $((q \to r) \to ((p \vee q) \to (p \vee r)))$
25. $(((p \to q) \to p) \to p)$
26. $(p \to q) \ \& \ (q \to r) \leftrightarrow (\neg r \to \neg q)$

А.II. ФОРМАЛИЗАЦИЯ РАССУЖДЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫХ ФОРМУЛ

Язык исчисления высказываний, основой которого являются пропозициональные формулы, был введен для формализации рассуждений. Идея такой формализации принадлежит ещё Г.Лейбницу. При её реализации, в первую очередь, выделяют элементарные высказывания, составляющие всё рассуждение, затем для каждого из них вводят пропозициональную переменную и, наконец, записывают формулу для каждого предложения, подставляя вместо союзов и вспомогательных слов соответствующие связки.

Как правило, рассуждение на естественном языке состоит из некоторого множества предложений (посылок рассуждения), вслед за которым идёт заключение, которое, по мнению рассуждающего, следует из только что сказанного. Таким образом, всё рассуждение целиком оформляется в виде логического следования $A_1 \ ...A_n \Rightarrow B$, где $A_1 \ ...A_n$ — формулы, реализующие посылки рассуждения, B — формула, реализующая заключение.

Следует заметить, что естественные языки богаты синонимами, носящими эмоциональные оттенки. При формализации с помощью пропозициональных формул эти оттенки, как правило, теряются. Так, например, союзы „и“, „а“,“но“, „однако“ и т.п. формализуются одной и той же логической связкой конъюнкция &. Разговорная речь достаточно свободна и очень часто произносятся далеко не все посылки рассуждения. Кроме того, иногда союзы не произносятся или подменяются другими, не совсем того же смысла. Наиболее сложным для студентов союзом является союз „..., только если ...“

А.II.1. Немного о логической связке "импликация"

Таблица истинности для логической связки $\rightarrow$ имеет вид

x	y	$x \rightarrow y$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Эта таблица в первых двух строчках соответствует нашему интуитивному представлению о союзах *„если ... , то ...“* . Однако третья, а особенно четвертая, у некоторых вызывает недоверие к тому, что наше понимание союзов *„если ... , то ...“* в точности соответствует таблице истинности для импликации.

Рассмотрим выражение „Если $x \vdots 4$, то $x \vdots 2$“. Его истинность при любом значении x не вызывает ни у кого сомнения. На его примере, подставляя различные значения x, можно продемонстрировать соответствие трех строк (первой, третьей и четвертой) таблицы истинности для импликации нашему интуитивному представлению. Действительно,

x	A	B	$A \to B$
$x = 4$	$4 \vdots 4$ И	$4 \vdots 2$ И	Если $4 \vdots 4$, то $4 \vdots 2$ И
$x = 6$	$6 \vdots 4$ Л	$6 \vdots 2$ И	Если $6 \vdots 4$, то $6 \vdots 2$ И
$x = 3$	$3 \vdots 4$ Л	$3 \vdots 2$ Л	Если $3 \vdots 4$, то $3 \vdots 2$ И

Можно самостоятельно привести огромное количество аналогичных примеров, если рассматривать теорему, для которой обратная неверна. Любая такая теорема записывается выражением вида *„если ... , то ...“* и ей соответствует формула с логической связкой $\to$. Наше же недоверие к приведенной таблице вызвано тем, что при использовании теоремы (истинного утверждения) мы пользуемся только первой строкой таблицы истинности, так как нас интересует, истинно ли заключение теоремы. Это однозначно можно утверждать только в случае, если посылка (условие) теоремы верна. Если же посылка ложна, то заключение может оказаться как истинным, так и ложным. Вышесказанное обычно формулируют так:

ИЗ ИСТИНЫ СЛЕДУЕТ ТОЛЬКО ИСТИНА,
А ИЗ ЛЖИ ВСЁ, ЧТО УГОДНО.

... ЕСЛИ ТОЛЬКО ...

Как в математической литературе, так и в обыденной жизни мы часто встречаемся с выражением вида *„... если только ...“* или *„ ... только когда ...“*.

В математической литературе такое выражение обычно встречается в теоремах, устанавливающих необходимые и достаточные условия, и появляются в виде „A тогда и только тогда, когда B“. Каждый математик при этом понимает, что здесь записаны два утверждения: „A тогда , когда B“ и „A только тогда, когда B“.

Слова „ *тогда, когда*“ прячут за собой прямую теорему „A, если B“. (Формулу $B \to A$.) Слова „ *... только тогда, когда ...*“ прячут обратную теорему „B, если A“. (Формулу $A \to B$.)

Является ли это просто математическим термином, который математики привыкли использовать, но он не имеет ничего общего с обычным житейским языком, либо же мы и в обыденной жизни слова „**... если только ...**“ понимаем не просто как обычную импликацию?

Если мама говорит ребенку: „Ты пойдешь гулять, только если сделаешь уроки“, то это вовсе не означает, что если он сделает уроки, то обязательно пойдет гулять, так как может пойти дождь, прийти в гости приятели или после приготовления уроков просто не захочется идти на прогулку. Но это означает, что если ребенок не сделает уроки, то гулять он не пойдет.

Таким образом, выражение „A, только если B“ при формализации запишется формулой $\neg B \to \neg A$ или, что равносильно, $A \to B$.

Многие юридические законы имеют очень сложную и запутанную при первом прочтении формулировку. Иногда создаётся впечатление, что они написаны так специально, чтобы читатель-неюрист не смог в них разобраться. Огромное количество таких законов в своих формулировках используют союз „..., только если ...“. Все эти формулировки в точности соответствуют только что описанной формализации.

В обыденной жизни человеку свойственно формулировать свою мысль не совсем точно, а именно недосказывать некоторую информацию, которая ему кажется известной или понятной всем, к кому он обращается. В частности, многие употребляют слова „ *... если только ...*“ в смысле эквивалентности двух высказываний, которые эти слова соединяют. Поэтому если Вам требуется проверить правильность некоторых (не математических, а житейских) рассуждений, в формулировке которых присутствуют слова „*... если только ...*“, и импликация, точно соответствующая этим словам, не позволяет установить такую правильность, то можно предположить, что человек подразумевал эквивалентность и проверить правильность рассуждения в этом предположении.

A.II.2. Логическое следование. Примеры формализации рассуждений

Как было сказано, рассуждение на естественном языке формализуется в виде логического следования заключения рассуждения (записанного формулой B) из посылок рассуждения (записанных формулами A_1,

... , A_n), то есть в виде $A_1 \ ...A_n \Rightarrow B$. Такое логическое следование читается как „из того, что верны все формулы A_1, ..., A_n следует, что верна формула B“ и может быть записано с помощью одной формулы $A_1\&...\&A_n \to B$, которая является тавтологией тогда и только тогда, когда имеет место это логическое следование.

Из описанных ранее в настоящем пособии методов доказательства тавтологичности формулы для этих целей подходят как построение таблиц истинности, так и равносильные преобразования, приводящие к одной из известных основных тавтологий. При этом, если формула содержит k переменных и m вхождений логических связок, то таблица истинности для неё имеет 2^k строк и $m + k$ столбцов. При больших k и m эта таблица огромна. Равносильные преобразования большой формулы также весьма затруднительны.

В разделе „Исчисления высказываний“ будут даны другие методы доказательства логического следования. Здесь же будут приведены примеры построения пропозициональных формул, формализующих рассуждения.

Пример 1. Записать следующее рассуждение в виде логического следования формул.

Если наступит мир, то возникнет депрессия, разве что страна проведет программу перевооружения либо осуществит грандиозную программу внутренних капиталовложений в области образования, охраны окружающей среды, борьбы с бедностью и т.п. Невозможно договориться о целях такой грандиозной программы внутренних капиталовложений. Значит, если наступит мир и не будет депрессии, то непременно будет осуществляться программа перевооружения.

Обозначим элементарные высказывания в этом рассуждении. Обозначения для элементарных высказываний могут быть любыми, но удобно использовать мнемоничные обозначения, вызывающие некоторые ассоциации с высказыванием.

P – „Наступил мир“,

D – „Возникла депрессия“,

G – „Страна проводит программу перевооружения“,

K – „Страна осуществляет грандиозную программу внутренних капиталовложений в области образования, охраны окружающей среды, борьбы с бедностью и т.п.“

При этих обозначениях первое предложение „Если наступит мир, то возникнет депрессия, разве что страна проведет программу перевооружения либо осуществит грандиозную программу внутренних капиталовложений в области образования, охраны окружающей среды, борьбы с бедностью и т.п.“ примет вид

„(Если P, то D), разве что (G либо K).“

Союзу „если ... , то“ соответствует импликация $\rightarrow$. Здесь также присутствуют термины „либо“ и „разве что“, которым не ставилось прямое соответствие логических связок. Исходя из контекста термин „либо“ здесь соответствует союзу „или“ (а не „исключающему или“, которое обычно даже в текстах естественного языка записывается как „либо ... , либо ...“). Подставим эти две логические связки:

„($P \rightarrow D$), разве что ($G \vee K$).“

Фраза „A, разве что B“ означает, что „если $\neg B$, то A“. В результате первое предложение запишется формулой

$(\neg(G \vee K) \rightarrow (P \rightarrow D))$.

Второе предложение „Невозможно договориться о целях такой грандиозной программы внутренних капиталовложений“ означает отрицание того, что "Страна осуществляет грандиозную программу внутренних капиталовложений в области образования, охраны окружающей среды, борьбы с бедностью и т.п.". Поэтому второе предложение запишется формулой

$\neg K$.

Заключение рассуждения формулируется предложением „если наступит мир и не будет депрессии, то непременно будет осуществляться программа перевооружения“. Здесь все союзы стандартным образом соответствуют логическим связкам и мы получаем

$(P \,\&\, \neg D \rightarrow G)$.

Таким образом, заданное рассуждение запишется в виде логического следования:

$$(\neg(G \vee K) \rightarrow (P \rightarrow D)) \;\; \neg K \Rightarrow (P \,\&\, \neg D \rightarrow G).$$

Пример 2. Формализовать следующие рассуждения полицейского детектива.

Джонс не встречал этой ночью Смита, только если либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Смит не был убийцей, только если Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство имело место после полуночи. Если убийство имело место после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Следовательно, Смит был убийцей.

Обозначим элементарные высказывания в этом рассуждении.

M – „Джонс не встречал этой ночью Смита“,

K – „Смит был убийцей“,

L – „Джонс лжет",

N – „убийство имело место после полуночи".

При этих обозначениях первое предложение „Джонс не встречал этой ночью Смита, только если либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет" примет вид

„M, только если (либо K, либо L)".

Как было показано в предыдущем разделе фраза вида „A, только если B" записывается формулой $A \to B$. Слова „либо ... , либо ..." обычно трактуются как „исключающее или", хоть в этом контексте это вызывает сомнение. Запишем здесь „исключающее или", а в следующих разделах проверим, при каком трактовании этих слов рассуждение верно (если оно верно хоть при одном трактовании).

В результате первое предложение запишется формулой

$M \to (K \oplus L)$.

Второе предложение „Смит не был убийцей, только если Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство имело место после полуночи" при введённых обозначениях примет вид

„(Неверно, что K), только если (M и N).„

Воспользовавшись логическими связками получаем формулу для второго предложения

$\neg K \to (M \& N)$.

Третье предложение посылки рассуждения „Если убийство имело место после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет" запишется в виде

„Если N, то (либо K, либо L)."

С логическими связками имеем

$N \to (K \oplus L)$.

Заключение рассуждения „Смит был убийцей" записывается формулой

K.

Таким образом, заданное рассуждение запишется в виде логического следования:

$$M \to (K \oplus L) \quad \neg K \to M \& N \quad N \to (K \oplus L) \Rightarrow K.$$

A.II.3. Упражнения

Записать следующие рассуждения в виде логического следования формул.

1. Я заплатил бы за ремонт этого телевизора, только если бы он стал работать. Он же не работает. Поэтому я платить не буду.

2. Если бы он ей не сказал, она ни за что бы не узнала. А не спроси она его, он бы и не сказал ей. Но она узнала. Значит, она его спросила.

3. Если он принадлежит компании, то он храбр и на него можно положиться. Он не принадлежит компании. Значит, он не храбр или же на него нельзя положиться.

4. Если он автор этого слуха, то он глуп или беспринципен. Он не глуп и не лишен принципов. Значит, не он автор этого слуха.

5. Если подозреваемый совершил эту кражу, то либо она была тщательно подготовлена, либо он имел соучастника. Если бы кража была подготовлена тщательно, то, если бы был соучастник, то украдено было бы значительно больше. Значит, подозреваемый невиновен.

6. Намеченная атака удастся, только если захватить противника врасплох или же его позиции плохо защищены. Захватить его врасплох можно, только если он беспечен. Он не будет беспечен, если его позиции плохо защищены. Значит, атака не удастся.

7. Если клапан вентиляции пропускает воздух и кингстон пропускает воду, то, если подводная лодка в аварийном состоянии, она не всплывет. Кингстон пропускает воду. Значит, лодка не всплывет.

8. Если трюмы судна заполнены горохом и внутрь попадёт вода, то корпус разрушится. Корпус нашего судна, трюмы которого заполнены горохом, разрушился, Значит, в трюмы попала вода.

9. Если баржа утонула в устье реки с песчаным дном, где сильное течение, то через месяц её полностью замоет песком. В устье реки утонула баржа, и через месяц её корпус всё ещё лежал на дне. Значит, у этой реки не песчаное дно или сила течения невелика.

10. Если $x+3=\sqrt{3-x}$, то $x^2+6x+9=3-x$. Но $x^2+6x+9=3-x$ тогда и только тогда, когда $(x+6)(x+1)=0$, что имеет место в том и только том случае, когда $x=-6$ или $x=-1$. Значит, только числа -6 и -1 могут быть корнями уравнения $x+3=\sqrt{3-x}$, то есть $x+3=\sqrt{3-x}$ влечет $x=-6$ или $x=-1$.

11. Если Игорь ляжет сегодня поздно, то он утром будет в отупении. Если он ляжет не поздно, то он не успеет выучить доказательства. Следовательно, или Игорь будет завтра в отупении, или он не будет знать доказательств (что одинаково пагубно для экзамена).

12. Если 2 – простое число, то это наименьшее простое число. Если 2 – наименьшее простое число, то 1 – не простое число. Число 1 не является простым. Значит, 2 – наименьшее простое число.

13. Олег или переутомился, или болен. Когда он переутомляется, то он раздражён. Он не раздражён. Значит, он болен.

14. Если завтра будет холодно, я надену теплое пальто, только если рукав будет починен. Завтра будет холодно, а рукав не будет починен. Значит, тёплое пальто я не надену.

15. Салли старше Боба или они одного возраста. Если Салли и Боб одного возраста, то Нэнси и Боб не одного возраста. Если Салли и Боб не одного возраста, то Боб старше Уолтера. Следовательно, если Нэнси и Боб ровесники, то Боб старше Уолтера.

16. Если 6 – составное число, то и 12 – составное число. Если 12 – составное число, то существует простое число, большее,чем 12. Если существует простое число, большее,чем 12, то существует составное число, большее 12. Если 6 делится на 2, то 6 – составное. Число 12 составное. Значит, 6 – составное.

17. Если я поеду автобусом, а автобус опоздает, то я пропущу назначенное свидание. Если я пропущу это свидание и начну огорчаться, то мне не следует ехать домой. Если я не получу эту работу, то начну огорчаться и мне следует поехать домой. Следовательно, если я поеду автобусом и автобус опоздает, то я получу эту работу.

18. Если Смит победит на выборах, то он будет доволен, а если он будет доволен, то он плохой борец в предвыборной кампании. Но если он провалится на выборах, то потеряет доверие партии. Он плохой борец в предвыборной кампании, если он потеряет доверие партии. Если он плохой борец в предвыборной кампании, то ему следует выйти из партии. Смит или победит на выборах, или провалится. Следовательно, ему нужно выйти из партии.

19. Контракт будет выполнен тогда и только тогда, когда судно придет за грузом не позднее 15 февраля. Если судно придет не позднее 15 февраля, то мы должны оформить документы сейчас. Если мы не сможем оформить документы сейчас, то нам придется платить неустойку. Если же контракт не будет выполнен, то нам всё равно придется платить неустойку. Мы не будем платить неустойку. Следовательно, контракт будет выполнен.

20. A является рыцарем в том и только том случае, когда B – рыцарь. Если B – рыцарь, то и C – рыцарь. Если D – лжец, то и C – лжец. Если A – лжец, то D – рыцарь. Следовательно, D – рыцарь.

21. Джон скуп в том и только том случае, когда Мэри расточительна. Если Мэри расточительна, то Джон беден. Если Джон беден, то Мэри богата. Если Мэри бедна, то Джон скуп. Следовательно, Мэри богата.

22. На контрольной работе Аня списывает тогда и только тогда, когда списывает Борис. Если Сергей решает сам, то сам решает и Борис. Если Сергей списывает, то Дима решает сам. Аня списывает или Дима решает сам. Следовательно, Дима решает сам.

23. Цветы хорошо приживутся, только если за ними ухаживать или будет тёплое лето. Мы сможем ухаживать за цветами, только если не будем загружены работой. На работе будет много дел, если лето будет тёплым. Значит, цветы не приживутся.

24. Собака бывает кусачей только от жизни собачьей. Если же собака не кусачая, то детям с ней хорошо играть. Значит, у собаки не собачья жизнь, только если с ней хорошо играть детям.

25. Если мне попадется плохой билет, то я сдам экзамен только если повезёт. Я вытащил очень плохой билет, а везение покинуло меня. Поэтому экзамен я не сдам.

26. Если я получу двойку на экзамене, то придется засесть за учебники или уйти из института. Если я засяду за учебники или уйду из института, то весёлая жизнь кончится. Я хочу и дальше жить весело. Поэтому двойку на экзамене я не получу.

A.III.1. Примеры проверки правильности рассуждений путем построения вывода в секвенциальном исчислении высказываний

Пример 1. Доказать правильность приведенного рассуждения, построив вывод в секвенциальном исчислении высказываний.

Если наступит мир, то возникнет депрессия, разве что страна проведет программу перевооружения либо осуществит грандиозную программу внутренних капиталовложений в области образования, охраны окружающей среды, борьбы с бедностью и т.п. Невозможно договориться о целях такой грандиозной программы внутренних капиталовложений. Значит, если наступит мир и не будет депрессии, то непременно будет осуществляться программа перевооружения.

В разделе II.2. для этого рассуждения были введены обозначения

P – "Наступил мир

D – "Возникла депрессия

G – "Страна проводит программу перевооружения

K – "Страна осуществляет грандиозную программу внутренних капиталовложений в области образования, охраны окружающей среды, борьбы с бедностью и т.п."

При этих обозначениях заданное рассуждение было записано следующей секвенцией:

$$(\neg(G \vee K) \to (P \to D)) \;\; \neg K \vdash ((P \mathbin{\&} \neg D) \to G)$$

Проверим, является ли эта секвенция выводимой.

1. $(\neg(G \vee K) \to (P \to D)) \;\; \neg K \vdash ((P \mathbin{\&} \neg D) \to G)$ – Из 2 по $(\neg\vdash)$
2. $(\neg(G \vee K) \to (P \to D)) \vdash ((P \mathbin{\&} \neg D) \to G) \;\; K$ – Из 3 по $(\vdash\to)$
3. $(\neg(G \vee K) \to (P \to D)) \;\; (P \mathbin{\&} \neg D) \vdash G \;\; K$ – Из 4 по $(\& \vdash)$
4. $(\neg(G \vee K) \to (P \to D)) \;\; P \;\; \neg D \vdash G \;\; K$ – Из 5 по $(\neg\vdash)$
5. $(\neg(G \vee K) \to (P \to D)) \;\; P \vdash G \;\; K \;\; D$ – Из 6, 7 по $(\to\vdash)$
6. $(P \to D) \;\; P \vdash G \;\; K \;\; D$ – Из 8, 9 по $(\to\vdash)$
7. $P \vdash G \;\; K \;\; D \;\; (\neg(G \vee K))$ – Из 10 по $(\vdash\neg)$
8. $D \;\; P \vdash G \;\; K \;\; D$ – Аксиома
9. $P \vdash G \;\; K \;\; D \;\; P$ – Аксиома
10. $(G \vee K) \;\; P \vdash G \;\; K \;\; D$ – Из 11 по $(\vee\vdash)$
11. $G \;\; K \;\; P \vdash G \;\; K \;\; D$ – Аксиома

Так как последовательность секвенций 11 — 1 является выводом в секвенциальном исчислении высказываний, то формульный образ секвенции 1 является тавтологией. Следовательно, при любом интерпретировании значений пропозициональных переменных, в частности при том, который выбран нами при введении обозначений для простейших высказываний, формульный образ секвенции 1 истинен, что означает, что приведенное рассуждение верно. (О значениях самих переменных нам ничего не известно.)

Пример 2. Проверить правильность рассуждения полицейского детектива, построив вывод в секвенциальном исчислении высказываний.

Джонс не встречал этой ночью Смита, только если либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Смит не был убийцей, только если Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство имело место после полуночи. Если убийство имело место после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Следовательно, Смит был убийцей.

В разделе II.2. для этого рассуждения были введены обозначения

M – Джонс не встречал этой ночью Смита

K – Смит был убийцей

L – Джонс лжет

N – убийство имело место после полуночи

При этих обозначениях заданное рассуждение было записано следующей секвенцией:

$$M \to (K \oplus L) \quad \neg K \to M\&N \quad N \to (K \oplus L) \vdash K.$$

При этом в процессе формализации было не понятно, какую именно логическую связку – дизъюнкцию или неэквивалентность – подразумевал полицейский, говоря „либо ..., либо ...“. Мы записали связку $\oplus$. Проверим, является ли эта секвенция выводимой.

1. $M \to (K \oplus L) \quad \neg K \to M\&N \quad N \to (K \oplus L) \vdash K$ – по $(\to\vdash)$ из 2., 3.
2. $K \oplus L \quad \neg K \to M\&N \quad N \to (K \oplus L) \vdash K$ – по $(\to\vdash)$ из 4., 5.
3. $\neg K \to M\&N \quad N \to (K \oplus L) \vdash K \;\; M$ – по $(\to\vdash)$ из 6., 7.
4. $K \oplus L \quad M\&N \quad N \to (K \oplus L) \vdash K$ – по $(\&\vdash)$ из 8.
5. $K \oplus L \;\; N \to (K \oplus L) \vdash K \;\neg K$ – по $(\vdash\neg)$ из 9.
6. $M\&N \quad N \to (K \oplus L) \vdash K \;\; M$ – по $(\&\vdash)$ из 10.
7. $N \to (K \oplus L) \vdash K \;\; M \;\; \neg K$ – по $(\vdash\neg)$ из 11.
8. $K \oplus L \quad M \;\; N \quad N \to (K \oplus L) \vdash K$ – – по $(\to\vdash)$ из 12., 13.
9. $K \oplus L \;\; N \to (K \oplus L) \;\; K \vdash K$ – аксиома
10. $M \;\; N \quad N \to (K \oplus L) \vdash K \;\; M$ – аксиома
11. $N \to (K \oplus L) \;\; K \vdash K \;\; M$ – аксиома
12. $K \oplus L \quad M \;\; N \quad K \oplus L \vdash K$ – по $(\oplus\vdash)$ из 14., 15.
13. $K \oplus L \quad M \;\; N \vdash K \quad N$ – аксиома
14. $K \quad M \;\; N \quad K \oplus L \vdash K \;\; L$ – аксиома
15. $L \quad M \;\; N \quad K \oplus L \vdash K \;\; K$ – по $(\oplus\vdash)$ из 16., 17.
16. $L \quad M \;\; N \quad K \vdash K \;\; K \;\; L$ – аксиома
17. $L \quad M \;\; N \quad L \vdash K \;\; K \;\; K$

Таким образом, если полицейский детектив имел ввиду исключающее или, то всё его рассуждение равносильно тому, что $L \,\&\, M \,\&\, N \to K$. То есть „если Джонс лжет и Джонс не встречал этой ночью Смита, а также убийство имело место после полуночи, то Смит был убийцей“.

Если же полицейский детектив имел ввиду обычное или, то все его рассуждение формализуется секвенцией

$$M \to (K \vee L) \quad \neg K \to (M\&N) \quad N \to (K \vee L) \vdash K.$$

Начало процесса построения её вывода (вплоть до секвенции 12.) может может быть таким же, как и в предыдущем случае. После этого он будет изменён следующим образом.

12. $K \vee L \quad M \;\; N \quad K \vee L \vdash K$ – по $(\vee\vdash)$ из 14'., 15'.

14’. $K \quad M \quad N \quad K \vee L \vdash K$ – аксиома
15’. $L \quad M \quad N \quad K \vee L \vdash K$ – по $(\vee \vdash)$ из 16’., 17’.
16’. $L \quad M \quad N \quad K \vdash K$ – аксиома
17’. $L \quad M \quad N \quad L \vdash K$

То есть, независимо от того, как понимать слова „либо ..., либо ...“ в этом рассуждении, оно равносильно несложному рассуждению „если Джонс лжет и Джонс не встречал этой ночью Смита, а также убийство имело место после полуночи, то Смит был убийцей“.

А.III.4. Примеры построения вывода в секвенциальном исчислении высказываний

Пример. Пусть P, Q и R – пропозициональные формулы. Доказать выводимость секвенции, построив вывод.

$$(P \to (Q \to R)) \vdash (P \,\&\, Q \to R)$$

Первый пример будет разобран сначала очень (даже, быть может, слишком) подробно, а затем записан в более сжатой форме с комментариями, вполне достаточными, чтобы процесс построения вывода был понятен.

В эту секвенцию входят две формулы. Одна в антецедент и одна в сукцедент. Рассмотрим самые внешние вхождения логических связок в эти формулы. Это вхождения $\to$, расположенные на следующих местах (отмечено подчеркиванием) $(P\underline{\to}(Q \to R)) \vdash (P \,\&\, Q\underline{\to}R)$. Следовательно, эта секвенция может быть получена либо по правилу $(\to\vdash)$, либо по правилу $(\vdash\to)$. Выберем первое внешнее вхождение логической связки. $(P\underline{\to}(Q \to R)) \vdash (P \,\&\, Q \to R)$. При этом выборе исходная секвенция может быть получена по правилу $(\to\vdash)$ из двух секвенций (назовем их 2. и 3.).

2. $(Q \to R) \vdash (P \,\&\, Q \to R)$
3. $(\vdash (P \,\&\, Q \to R)\ P$

В каждую из этих секвенций также входит по две формулы, но в секвенции 2. имеется два внешних вхождения логической связки, а в секвенцию 3. – только одно, так как формула P не содержит явно выписанных логических связок.

Секвенция 2. $(Q\underline{\to}R) \vdash (P \,\&\, Q\underline{\to}R)$ (подчеркнуты внешние вхождения логических связок) может быть получена либо по правилу $(\to\vdash)$, либо по правилу $(\vdash\to)$. Выберем первое внешнее вхождение логической связки. $(Q \underline{\to} R) \vdash (P \mathbin{\&} Q \to R)$. При этом выборе секвенция 2. может быть получена по правилу $(\to \vdash)$ из двух секвенций (назовем их 4. и 5.).

4. $R \vdash (P \mathbin{\&} Q \to R)$

5. $\vdash (P \mathbin{\&} Q \to R)\ Q$

Секвенция 3. $(\vdash (P \mathbin{\&} Q \underline{\to} R)\ P$ может быть получена из одной секвенции (назовем ее 6.) по правилу $(\vdash \to)$.

6. $(P \mathbin{\&} Q) \vdash R\ P$

Секвенция 4. $R \vdash (P \mathbin{\&} Q \underline{\to} R)$ имеет только одно внешнее вхождение логической связки и может быть полученно по правилу $(\vdash \to)$ из одной секвенции (назовем ее 7.).

7. $R\ (P \mathbin{\&} Q) \vdash R$

Секвенция 5. $\vdash (P \mathbin{\&} Q \underline{\to} R)\ Q$ имеет только одно внешнее вхождение логической связки и может быть полученно по правилу $(\vdash \to)$ из одной секвенции (назовем ее 8.).

Секвенция 6. $(P \mathbin{\&} Q) \vdash R\ P$ имеет только одно внешнее вхождение логической связки и может быть полученно по правилу $(\& \ \vdash)$ из одной секвенции (назовем ее 9.).

9. $P\ Q \vdash R\ P$ Эта секвенция является аксиомой, так как в антецеденте и в сукцеденте секвенции имеется формула P.

Секвенция 7. $R\ (P \mathbin{\&} Q) \vdash R$ имеет только одно внешнее вхождение логической связки и может быть полученно по правилу $(\& \ \vdash)$ из одной секвенции (назовем ее 10.).

10. $R\ P\ Q \vdash R$ Эта секвенция является аксиомой, так как в антецеденте и в сукцеденте секвенции имеется формула R.

Секвенция 8. $(P \mathbin{\&} Q) \vdash R\ Q$ имеет только одно внешнее вхождение логической связки и может быть полученно по правилу $(\& \ \vdash)$ из одной секвенции (назовем ее 11.).

11. $P\ Q \vdash R\ Q$ Эта секвенция является аксиомой, так как в антецеденте и в сукцеденте секвенции имеется формула Q.

Таким образом, последовательность секвенций 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 и исходная является выводом в секвенциальном исчислении высказываний.

Вывод с разметкой, указывающей какие правила и с помощью каких секвенций обеспечивают выводимость каждой секвенции, кратко записывается следующим образом.

1. $(P \to (Q \to R)) \vdash (P \mathbin{\&} Q \to R)$ Получена из 2., 3. по $(\to \vdash)$
2. $(Q \to R) \vdash (P \mathbin{\&} Q \to R)$ Получена из 4., 5. по $(\to \vdash)$
3. $(\vdash (P \mathbin{\&} Q \to R)\ P$ Получена из 6. по $(\vdash \to)$
4. $R \vdash (P \mathbin{\&} Q \to R)$ Получена из 7. по $(\vdash \to)$

5. $\vdash (P \mathbin{\&} Q \to R)\ Q$ Получена из 8. по $(\vdash\to)$
6. $(P \mathbin{\&} Q) \vdash R\ P$ Получена из 9. по $(\& \vdash)$
7. $R\ (P \mathbin{\&} Q) \vdash R$ Получена из 10. по $(\& \vdash)$
8. $(P \mathbin{\&} Q) \vdash R\ Q$ Получена из 11. по $(\& \vdash)$
9. $P\ Q \vdash R\ P$ Аксиома
10. $R\ P\ Q \vdash R$ Аксиома
11. $P\ Q \vdash R\ Q$ Аксиома

Доказана выводимость секвенции $(P \to (Q \to R)) \vdash (P \mathbin{\&} Q \to R)$, но в исходной секвенции и в секвенции 2. были произвольно выбраны самые первые из внешних вхождений логических связок. Что произойдет, если мы будем выбирать другие вхождения внешней логической связки? Рассмотрим один из таких случаев (всего их по крайней мере четыре). А именно, будем в первую очередь выбирать то внешнее вхождение логической связки, которое могло появиться в результате применения однопосылочного правила. Для исходной секвенции это правило $(\vdash\to)$.

1. $(P \to (Q \to R)) \vdash (P \mathbin{\&} Q \to R)$ — Получена из 2. по $(\vdash\to)$
2. $(P \to (Q \to R))\ (P \mathbin{\&} Q) \vdash R$ — Получена из 3. по $(\& \vdash)$
3. $(P \to (Q \to R))\ P\ Q \vdash R$ — Получена из 4.,5. по $(\to\vdash)$
4. $(Q \to R)\ P\ Q \vdash R$ — Получена из 6.,7. по $(\to\vdash)$
5. $P\ Q \vdash R\ P$ — Аксиома
6. $R\ P\ Q \vdash R$ — Аксиома
7. $P\ Q \vdash R\ Q$ — Аксиома

Как видим, при этом вывод становится короче. Сформулируем следующую рекомендацию:

Для получения более короткого вывода в исчислении высказываний, при поиске вывода удобно в первую очередь применять однопосылочные правила вывода для внешних вхождений логических связок.

Чтобы понять причину появления такого правила, приведем еще одну форму записи вывода, в которой при использовании двухпосылочного правила вывода посылки будут записываться под заключением в два столбца.

1. $(P \to (Q \to R)) \vdash (P \mathbin{\&} Q \to R)$ Получена из 2., 3. по $(\to\vdash)$

2. $(Q \to R) \vdash (P \mathbin{\&} Q \to R)$ Получена из 4., 5. по $(\to\vdash)$	3. $(\vdash (P \mathbin{\&} Q \to R)\ P$ Получена из 6. по $(\vdash\to)$

4. $R \vdash (P \mathbin{\&} Q \to R)$ 5. $\vdash (P \mathbin{\&} Q \to R)\ Q$ 6. $(P \mathbin{\&} Q) \vdash R\ P$

Из 7. по ($\vdash\to$)	Из 8. по ($\vdash\to$)	Из 9. по ($\&\ \vdash$)
7. $R\ (P\ \&\ Q) \vdash R$ Из 10. по ($\&\ \vdash$)	8. $(P\ \&\ Q) \vdash R\ Q$ Из 11. по ($\&\ \vdash$)	9. $P\ Q \vdash R\ P$ Аксиома
10. $R\ P\ Q \vdash R$ Аксиома	11. $P\ Q \vdash R\ Q$ Аксиома	

A.III.2. Восстановление пропущенных посылок (энтимем)

Так как формульный образ заключения каждого правила равносилен конъюнкции формульных образов посылок, то в случае, если секвенция невыводима, ее формульный образ равносилен конъюнкции формульных образов всех тех секвенций, которые при попытке построить вывод не являются аксиомами и не могут быть получены ни по одному из правил вывода (так как не содержат логических связок). Это позволяет восстановить те посылки в рассуждении, которые не оговорены явно, но предполагаются очевидными (такие посылки называются энтимемами). Поясним это на примере.

Пример.

Я сдал бы экзамен, но преподаватель очень следил, чтобы студенты не списывали. Поэтому я получил двойку.

Обозначим простейшие высказывания в этом рассуждении:

A – „я сдал экзамен“,

B – „преподаватель очень следил, чтобы студенты не списывали“,

C – „я получил двойку“.

Прежде всего рассмотрим, какой же формуле может соответствовать высказывание вида „Было бы верно A, но B“. Обычно сослагательное наклонение подразумевает, что утверждение справедливо при некотором условии (в данном случае при условии $\neg B$). Союз **но** показывает, что это условие не выполнено (в данном случае выполнено B). Таким образом, первое предложение формализуется двумя формулами (одновременное выполнение которых подразумевается): $\neg B \to A$ и B.

Вследствие сказанного при наших обозначениях исходное рассуждение запишется секвенцией

$$\neg B \to A \ \ B \vdash C.$$

Попытаемся построить вывод этой секвенции

1. $\neg B \to A \;\; B \vdash C$ – Из 2, 3 по ($\to\vdash$)
2. $A \;\; B \vdash C$
3. $B \vdash C \;\; \neg B$ Из 4 по ($\vdash \neg$)
4. $B \;\; B \vdash C$

Секвенции 2 и 4 не являются аксиомами и не могут быть получены ни по одному из исходных правил, так как не содержат логических связок. Но они могут быть получены из секвенции $B \vdash C$ по правилу добавления в антецедент. Формульный образ этой секвенции $B \to C$. Таким образом, все исходное рассуждение равносильно фразе "Если преподаватель следит, чтобы студенты не списывали, то я получаю двойку". Это и есть энтимема в рассматриваемом утверждении. Добавим ее в рассуждение.

«Я сдал бы экзамен, но преподаватель очень следил, чтобы студенты не списывали. Если преподаватель следит, чтобы студенты не списывали, то я получаю двойку. Поэтому я получил двойку.»

Теперь можно доказать правильность этого рассуждения, построив вывод секвенции

$$\neg B \to A \;\; B \;\; B \to C \vdash C.$$

1. $\neg B \to A \;\; B \;\; B \to C \vdash C$ Из 2, 3 по ($\to\vdash$)
2. $A \;\; B \;\; B \to C \vdash C$ Из 4, 5 по ($\to\vdash$)
3. $B \;\; B \to C \vdash C \;\; \neg B$ Из 6, 7 по ($\to\vdash$)
4. $A \;\; B \;\; C \vdash C$ Аксиома
5. $A \;\; B \;\; \vdash C \;\; B$ Аксиома
6. $B \;\; C \vdash C \;\; \neg B$ Аксиома
7. $B \;\; \vdash C \;\; \neg B \;\; B$ Аксиома

Рассуждение восстановлено.

A.III.3. Приведение формулы в конъюнктивную и дизъюнктивную нормальные формы

Так как формульный образ заключения каждого правила равносилен конъюнкции формульных образов посылок, то в случае, если секвенция не выводима, ее формульный образ равносилен конъюнкции формульных образов всех тех секвенций, которые при попытке построить вывод не являются аксиомами и не могут быть получены ни по одному из правил вывода (так как не содержат логических связок). Это позволяет привести формулу в конъюнктивную нормальную форму. Каждая секвенция, не являющаяся аксиомой и не содержащая логических связок, будет представлена элементарной дизъюнкцией. Переменные, входящие в антецедент, будут представлены в ней с отрицанием, а переменные, входящие в сукцедент, будут представлены в ней без отрицания. Если переменная имеет несколько вхождений в секвенцию, то в соответствующую элементарную дизъюнкцию она войдет только один раз.

Пример 1.

Привести в КНФ формулу

$$((p \to q) \to (r \to \neg p)) \to (\neg q \to \neg r)$$

с помощью процедуры построения вывода в секвенциальном исчислении высказываний.

1. $\vdash ((p \to q) \to (r \to \neg p)) \to (\neg q \to \neg r)$ – Из 2 по $(\vdash\to)$
2. $((p \to q) \to (r \to \neg p)) \vdash (\neg q \to \neg r)$ – Из 3 по $(\vdash\to)$
3. $((p \to q) \to (r \to \neg p)) \;\; \neg q \vdash \neg r$ – Из 4 по $(\neg \vdash)$
4. $((p \to q) \to (r \to \neg p)) \vdash \neg r \;\; q$ – Из 5 по $(\vdash \neg)$
5. $((p \to q) \to (r \to \neg p)) \;\; r \vdash q$ – Из 6, 7 по $(\to\vdash)$
6. $(r \to \neg p) \;\; r \vdash q$ – Из 8, 9 по $(\to\vdash)$
7. $\vdash (p \to q) \;\; rq$ – Из 10 по $(\vdash\to)$
8. $\neg p \;\; r \vdash q$ – Из 11 по $(\neg \vdash)$
9. $r \vdash q \;\; r$ – Аксиома
10. $p \vdash q \;\; r \;\; q$ – Секвенция не является аксиомой и не содержит логических связок.
11. $r \vdash q \;\; p$ – Секвенция не является аксиомой и не содержит логических связок.

Получили, что исходная формула равносильна конъюнкции формульных образов секвенций 10 и 11. То есть КНФ для нее имеет вид

$$(\neg p \vee q \vee r) \;\&\; (\neg r \vee q \vee p).$$

Так как отрицание КНФ в соответствии с правилами де Моргана легко приводится в ДНФ, то для приведения формулы P в ДНФ с помощью процедуры построения вывода в секвенциальном исчислении высказываний, достаточно привести формулу $\neg P$ в КНФ, а затем взять ее отрицание, то есть каждая секвенция, не содержащая логических связок и не являющаяся аксиомой, будет представлена элементарной конъюнкцией, причем переменные, входящие в антецедент, войдут в эту конъюнкцию без отрицания, а переменные, входящие в сукцедент, войдут в эту конъюнкцию с отрицанием. Так как при попытке построить вывод секвенции $\vdash \neg P$ на первом же шаге будет применено правило $\vdash \neg$, то с самого начала процедуры приведения формулы P в ДНФ, можно начинать с секвенции $P \vdash$.

Пример 2.

Привести в ДНФ формулу

$$((p \to q) \to (r \to \neg p)) \to (\neg q \to \neg r)$$

с помощью процедуры построения вывода в секвенциальном исчислении высказываний.

1. $((p \to q) \to (r \to \neg p)) \to (\neg q \to \neg r) \vdash$ – Из 2, 3 по $(\to\vdash)$
2. $(\neg q \to \neg r) \vdash$ – Из 4, 5 по $(\to\vdash)$
3. $\vdash ((p \to q) \to (r \to \neg p))$ – Из 6 по $(\vdash\to)$
4. $\neg r \vdash$ – Из 7 по $(\neg \vdash)$
5. $\vdash \neg q$ – Из 8 по $(\vdash \neg)$
6. $(p \to q) \vdash (r \to \neg p)$ – Из 9 по $(\vdash\to)$
7. $\vdash r$ – Не является аксиомой и не содержит логических связок.
8. $q \vdash$ – Не является аксиомой и не содержит логических связок.
9. $(p \to q)\ \ r \vdash \neg p$ – Из 10 по $(\vdash \neg)$
10. $(p \to q)\ \ r\ \ p \vdash$ – Из 11, 12 по $(\to\vdash)$
11. $q\ \ r\ \ p \vdash$ – Не является аксиомой и не содержит логических связок.
12. $\ \ r\ \ p \vdash p$ – Аксиома

В этой последовательности секвенций имеется три секвенции, не являющиеся аксиомами и не содержащими логических связок: 7, 8, 11. Они будут представлены в ДНФ элементарными конъюнкциями $\neg r$, q, $q \mathbin{\&} r \mathbin{\&} p$ соответственно. ДНФ для исходной формулы будет иметь вид

$$\neg r \lor q \lor q \mathbin{\&} r \mathbin{\&} p.$$

A.III.4. Упражнения

Проверить правильность рассуждений, приведённых в разделе A.II.3, построив вывод в секвенциальном исчислении высказываний.

A.III.5. Пример построения вывода методом резолюций для исчисления высказываний

Рассмотрим тот же пример, который был рассмотрен в разделе A.III.1.

Пример. Пусть P, Q и R – пропозициональные формулы. Доказать логическое следование методом резолюций.

$$(P \to (Q \to R)) \Rightarrow (P \mathbin{\&} Q \to R)$$

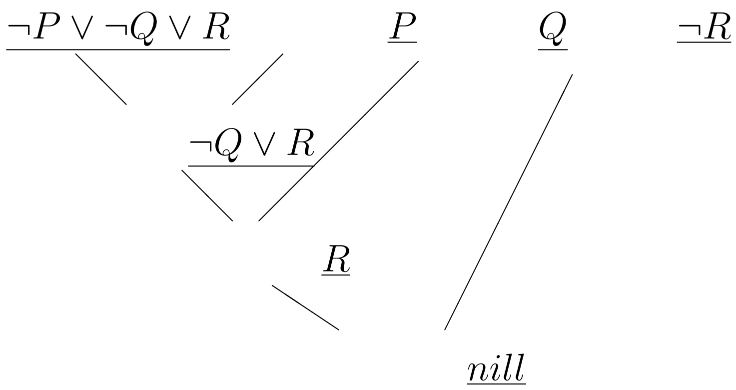
Приведём формулы $(P \to (Q \to R))$ и $\neg(P \mathbin{\&} Q \to R)$ в КНФ.

$(P \to (Q \to R)) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee R$

$\neg(P \mathbin{\&} Q \to R) \Leftrightarrow \neg(\neg(P \mathbin{\&} Q) \vee R) \Leftrightarrow P \mathbin{\&} Q \mathbin{\&} \neg R$

В результате имеем следующее множество предложений $\{\neg P \vee \neg Q \vee R, P, Q, \neg R\}$.

Построим вывод пустого предложения *nill*.



A.III.6. Примеры проверки правильности рассуждений путем построения дерева опровержения методом резолюций для исчисления высказываний

Пример 1. Доказать правильность приведенного рассуждения методом резолюций для исчислении высказываний.

Если наступит мир, то возникнет депрессия, разве что страна проведет программу перевооружения либо осуществит грандиозную программу внутренних капиталовложений в области образования, охраны окружающей среды, борьбы с бедностью и т.п. Невозможно договориться о целях такой грандиозной программы внутренних капиталовложений. Значит, если наступит мир и не будет депрессии, то непременно будет осуществляться программа перевооружения.

В разделе II.2. для этого рассуждения были введены обозначения

P – "Наступил мир

D – "Возникла депрессия

G – "Страна проводит программу перевооружения

K – "Страна осуществляет грандиозную программу внутренних капиталовложений в области образования, охраны окружающей среды, борьбы с бедностью и т.п."

При этих обозначениях заданное рассуждение было записано в виде следующего логического следования:

$$(\neg(G \vee K) \to (P \to D)) \;\; \neg K \Rightarrow ((P \,\&\, \neg D) \to G)$$

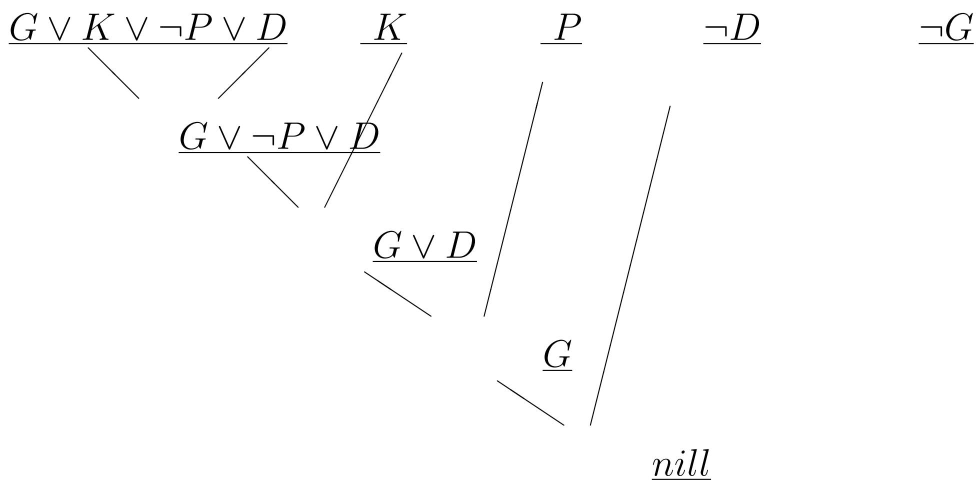
Каждую из формул $(\neg(G \vee K) \to (P \to D))$, $\neg((P \,\&\, \neg D) \to G)$, $\neg K$ приведём в КНФ.

$\neg(G \vee K) \to (P \to D) \Leftrightarrow ((G \vee K) \vee (\neg P \vee D)) \Leftrightarrow G \vee K \vee \neg P \vee D$

$\neg K$

$\neg((P \,\&\, \neg D) \to G) \Leftrightarrow \neg(\neg(P \,\&\, \neg D) \vee G) \Leftrightarrow P \,\&\, \neg D \,\&\, \neg G$

Получили множество предложений $\{G \vee K \vee \neg P \vee D,\ K,\ P,\ \neg D,\ \neg G\}$. Построим для него дерево опровержения



Пример 2. Доказать правильность рассуждения полицейского детектива методом резолюций для исчислении высказываний.

Джонс не встречал этой ночью Смита, только если либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Смит не был убийцей, только если Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство имело место после полуночи. Если убийство имело место после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Следовательно, Смит был убийцей.

В разделе II.2. для этого рассуждения были введены обозначения

M – Джонс не встречал этой ночью Смита

K – Смит был убийцей

L – Джонс лжет

N – убийство имело место после полуночи

При этих обозначениях заданное рассуждение было записано в виде логического следования:

$$M \to (K \oplus L) \quad \neg K \to (M \& N) \quad N \to (K \oplus L) \Rightarrow K.$$

При этом в процессе формализации было не понятно, какую именно логическую связку – дизъюнкцию или неэквивалентность – подразумевал полицейский, говоря „либо ..., либо ...“. Мы записали связку $\oplus$.

Каждую из формул $M \to (K \oplus L)$, $\neg K \to (M \& N)$, $N \to (K \oplus L)$, $\neg K$ приведём в КНФ.

$M \to (K \oplus L) \Leftrightarrow \neg M \vee (K \oplus L) \Leftrightarrow \neg M \vee (K \vee L) \mathbin{\&} (\neg K \vee \neg L) \Leftrightarrow (\neg M \vee K \vee L) \mathbin{\&} (\neg M \vee \neg K \vee \neg L)$

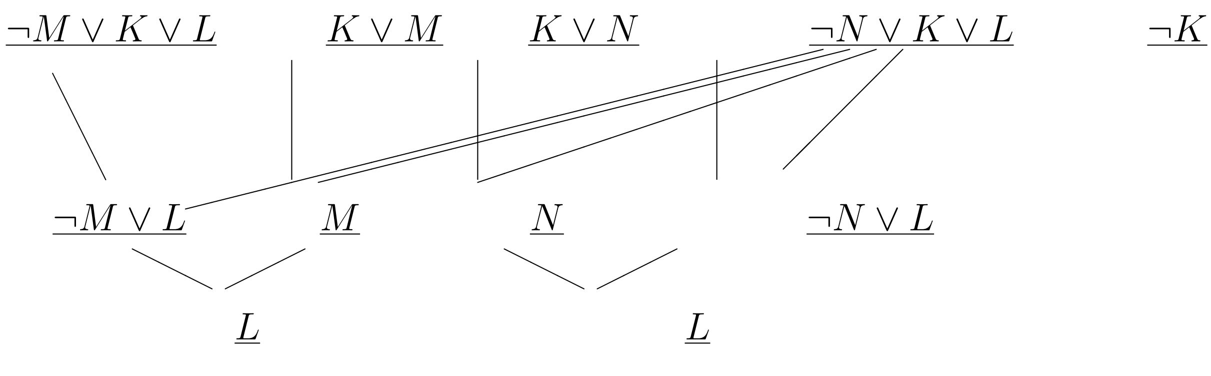
$\neg K \to (M \mathbin{\&} N) \Leftrightarrow K \vee (M \mathbin{\&} N) \Leftrightarrow (K \vee M) \mathbin{\&} (K \vee N)$

$N \to (K \oplus L) \Leftrightarrow \neg N \vee (K \oplus L) \Leftrightarrow \neg N \vee (K \vee L) \mathbin{\&} (\neg K \vee \neg L) \Leftrightarrow (\neg N \vee K \vee L) \mathbin{\&} (\neg N \vee \neg K \vee \neg L)$

$\neg K$

Получили множество предложений $\{(\neg M \vee K \vee L),\ (\neg M \vee \neg K \vee \neg L),\ (K \vee M),\ (K \vee N),\ (\neg N \vee K \vee L),\ (\neg N \vee \neg K \vee \neg L),\ \neg K\}$.

Учитывая то, что предложение $\neg K$ поглощает каждое из предложений $(\neg M \vee \neg K \vee \neg L$ и $\neg N \vee \neg K \vee \neg L$, построенное множество предложений неудовлетворимо тогда и только тогда, когда неудовлетворимо множество $\{(\neg M \vee K \vee L),\ (K \vee M),\ (K \vee N),\ (\neg N \vee K \vee L),\ \neg K\}$. Попытаемся вывести из него пустое предложение *nill*.



Никакие другие применения правила резолюции невозможны. Конъюнкция всех этих предложений в силу закона поглощения равносильна конъюнкции $L \mathbin{\&} M \mathbin{\&} N \mathbin{\&} \neg K$. Следовательно она является противоречием тогда и только тогда, когда $L \mathbin{\&} M \mathbin{\&} N \mathbin{\&} \neg K$ — противоречие, то есть $\neg L \vee \neg M \vee \neg N \vee K$ — тавтология. Мы пришли к тому же результату, что и попытке доказать правильность рассуждения в секвенциальном исчислении высказываний: всё рассуждение полицейского детектива равносильно тому, что $L \,\&\, M \,\&\, N \to K$. То есть „если Джонс лжет и Джонс не встречал этой ночью Смита, а также убийство имело место после полуночи, то Смит был убийцей“.

Рассмотрим пример из раздела III.1.5.

Пример 3.

Я сдал бы экзамен, но преподаватель очень следил, чтобы студенты не списывали. Поэтому я получил двойку.

Обозначим простейшие высказывания в этом рассуждении:

A – "Я сдал экзамен"

B – "Преподаватель очень следил, чтобы студенты не списывали"

C – "Я получил двойку"

При введённых обозначениях исходное рассуждение запишется в виде логического следствия

$$\neg B \to A \;\; B \Rightarrow C.$$

$\neg B \to A \Leftrightarrow B \vee A$

B

$\neg C$

$$B \vee A \qquad\qquad B \qquad \neg C$$

К этому множеству предложений применение правила резолюции невозможно, но если к нему добавить пропущенную энтимему, например, „Если преподаватель следит, то я не могу списать, а если я не списываю, то получаю двойку“, то доказательство правильности рассуждения сведётся к доказательству

$$\neg B \to A \;\; B \;\; (B \to D) \,\&\, (D \to C) \Rightarrow C.$$

Получаем множество предложений $\{B \vee A,\;\; B,\;\; \neg B \vee D,\;\; \neg D \vee C \;\; \neg C\}$.

$$\underline{B \vee A} \qquad \underline{B} \qquad \underline{\neg B \vee D} \qquad \underline{\neg D \vee C} \qquad \underline{\neg C}$$

$$\underline{D} \qquad\qquad \underline{\neg D}$$

$$nill$$

A.III.7. Упражнения

Проверить методом резолюций для исчисления высказываний правильность рассуждений, приведённых в разделе A.II.3.

A.IV. Язык исчисления предикатов.

A.IV.1. Упражнения.

1. При условии, что буквами f, g, h обозначены функциональные символы, а P_i^k — k-местные предикатные символы, определить, какие из выражений являются термами, какие предикатными формулами, а какие ни тем, ни другим.

а. $g(f(g(x,y),g(x,x))$
б. $\forall x P_1^2(x, P_1^1(x)) \vee \exists y P_1^2(y, f(x))$
в. $\exists x P_1^1(g(x,y)) \to P_1^2(x, g(x,x))$
г. $P_1^2(x, g(x,y)) \to \forall f(x) P_1^2(x, f(x))$
д. $\forall x P_1^2(y, g(y,y)) \vee \exists x P_1^1(f(g(x,y)))$
е. $g(y, f(g(f(x),y)))$ ж. $\forall f(x)\ P_1^1(f(x)) \vee \exists y\ P_1^2(x, g(x,y))$
з. $P_1^1(f(g(x,y))) \vee \exists y P_1^1(g(x,x))$
и. $g(f(x), P_1^1(f(x)))$
к. $g(f(x), g(x, g(y,z)))$
л. $P_1^1(P_1^2(x, g(x,y))) \to \exists z P_1^1(x)$
м. $\forall y(P_1^2(x, g(x,y))\ \&\ \exists y P_1^1(y))$
н. $g(f(a), g(x, f(y)))$
о. $\exists x P_1^1(g(x,y)) \to \forall x P_1^2(f(x), g(x,y))$
п. $\forall f(x)\ P_1^1(f(x))\ \&\ P_1^2(P_1^1(x), f(x))$
р. $g(f(x), g(x, f(y)))$
с. $\exists y P_1^1(g(x, f(x))) \vee \forall x P_1^2(y, g(y,y))$
т. $\exists P_1^1(x)\ (P_1^2(x,y) \to P_1^1(x))$
у. $\forall y P_1^2(g(y,x), g(x,y)) \to \exists x P_1^1(g(y, f(x)))$
ф. $\forall y P_1^2(f(x), P_1^2(x,y))\ \&\ \exists x P_1^2(g(y,x))$
х. $g(f(x), P_1^1(y) \vee P_1^1(x,y))$
ц. $\forall x(\exists y P_1^2(g(x,x), f(x)) \vee \exists x P_1^1(g(x,y)))$
ч. $g(f(f(x)), g(x,y))$
ш. $P_1^1(g(x,y)) \to \forall f(x) P_1^2(f(x), f(x))$
щ. $\exists x(P_1^2(x, f(y)) \vee \forall y \exists x P_1^1(g(x, f(y))))$
э. $g(f(x), f(g(a,y)))$

ю. $P_1^2(f(x), P_1^1(y)) \to \exists f(x)\ P_1^2)x, f(x))$

я. $f(x) \vee g(f(x), g(x, y))$

b. $P_1^2(x, f(y)) \to \neg P_1^1(g(x, f(x))) \vee \forall y P_1^1(f(x))$

d. $f(g(f(x), g(x, y)))$

2. При условии, что P, Q, A — предикатные формулы проверить, является ли формула выполнимой, но не общезначимой (то есть для каждой формулы привести пример двух интерпретаций, в одной из которых она истинна хоть на одном наборе значений свободных переменных, а в другой ложна хоть на одном наборе значений свободных переменных).

а. $\forall x(P \to Q) \leftrightarrow (\forall xP \to \forall xQ)$

б. $\exists x(P \to A) \leftrightarrow (\exists xP \to A)$

в. $(\forall xP \to \forall xQ) \to \forall x(P \to Q)$

г. $\forall x(P \vee Q) \to (\forall xP \vee \forall xQ)$

д. $\exists x(A \to P) \leftrightarrow (A \to \forall xP)$

е. $\exists x(A \to P) \leftrightarrow (A \to \exists xP)$

ж. $\exists x(P \to A) \leftrightarrow (\forall xP \to A)$

3. Какие из термов $t_1 = a$, $t_2 = f(x)$, $t_3 = f(y)$, $t_4 = f(z)$, $t_5 = f(u)$, $t_6 = g(x, y)$, $t_7 = g(x, z)$, $t_8 = g(z, y)$, $t_9 = g(x, u)$, $t_{10} = h(x, y, z)$ свободны для подстановки в формулы вместо свободных вхождений предметных переменных x, y, z.

а. $\forall x\ (P(x, y) \to \exists y\ Q(x, y, z)) \vee \forall y\ P(x, y)$

б. $\exists y\ (Q(x, y, z)\ \&\ \forall z\ P(x, z))\ \&\ \exists y\ P(x, y)$

в. $\forall z\ (P(x, z) \to \forall x\ Q(x, y, z)) \to \exists x\ P(x, y)$

г. $\forall x\ (P(x, z) \leftrightarrow \exists x\ \exists y\ Q(x, y, z)) \vee P(x, x)$

д. $(P(x, y) \to \forall x\ \exists z\ Q(x, y, z)) \to \forall y\ P(x, y)$

е. $\forall x\ \exists y\ (Q(x, y, z) \to \exists x\ (P(x, y) \vee P(x, z)))$

ж. $\exists z\ (\forall y\ Q(x, y, z) \vee \exists x\ P(x, y))$

4. Привести формулу в предварённую нормальную форму.

а. $\forall x\ (P(x, y) \to \exists y\ Q(x, y, z)) \vee \forall y\ P(x, y)$

б. $\exists y\ (Q(x, y, z)\ \&\ \forall z\ P(x, z))\ \&\ \exists y\ P(x, y)$

в. $\forall z\ (P(x, z) \to \forall x\ Q(x, y, z)) \to \exists x\ P(x, y)$

г. $\forall x\ (P(x, z) \leftrightarrow \exists x\ \exists y\ Q(x, y, z)) \vee P(x, x)$

д. $(P(x, y) \to \forall x\ \exists z\ Q(x, y, z)) \to \forall y\ P(x, y)$

е. $\forall x\ \exists y\ (Q(x, y, z) \to \exists x\ (P(x, y) \vee P(x, z)))$

ж. $\exists z\ (\forall y\ Q(x, y, z) \vee \exists x\ P(x, y))$

A.V. ФОРМАЛИЗАЦИЯ РАССУЖДЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРЕДИКАТНЫХ ФОРМУЛ

Для формализации рассуждений с помощью предикатных формул необходимо, прежде всего, выделить и обозначить посредством предикатов те свойства объектов и отношения между ними, на основании которых в дальнейшем будут строиться формулы. Следует помнить, что очень часто в текстах и повседневной жизни кванторы не проговариваются явно, а лишь подразумеваются.

Так, в русском языке обычно вместо конструкции, соответствующей квантору всеобщности, используют множественное число. Мы говорим „Натуральные числа неотрицательны", подразумевая „Все натуральные числа неотрицательны"; „Студенты должны сдавать сессию", подразумевая „Все студенты должны сдавать сессию".

Ещё хуже обстоит с квантором существования. Можно встретить запись „x чётно, если $x = 2k$ при $k \in \mathbf{N}$". Не говоря уже про слово „если", которое в определениях всегда подменяет словосочетание „тогда и только тогда, когда", что может означать „при $k \in \mathbf{N}$"? То, что равенство $x = 2k$ выполняется при всех натуральных k? Или только при некоторых?

A.V.1. Совпадение наборов свободных переменных.

Важный момент при определении сложного свойства или отношения посредством элементарных — это совпадение наборов свободных переменных в определяемом понятии и в задающей его формуле. Рассмотрим несколько примеров.

Пусть в качестве элементарных понятий, которые мы можем использовать (сигнатуры наших формул), выступают: константы — натуральные числа 0, 1, 2, ...; функции — сложение $+$, умножение $\cdot$; предикат равенства $=$. Для задания свойств и отношений между числами можно использовать все средства построения предикатных формул с указанными константами, функциональными и предикатным символом.

1. Записать формулу, задающую свойство натурального числа быть чётным, то есть предикат „x чётно" (или $x \vdots 2$).

Очень часто студенты предлагают запись $x = 2 \cdot k$. В этой формуле имеются две свободные переменные x и k. То есть чтобы для конкретного числа проверить, является ли оно чётным, необходимо вычислить значение формулы на наборе из двух чисел. Где взять второе?

Ещё хуже запись „$x = 2 \cdot k$ при $k \in \mathbf{N}$" или „$x = 2 \cdot k,\ k \in \mathbf{N}$", так как, во-первых, это не предикатные формулы, во-вторых, в записи присутствует предикат $\in$, которого нет в нашей сигнатуре, и, в-третьих, мы по-прежнему имеем две свободные переменные. Кроме того, область нашей интерпретации — $\mathbf{N}$, поэтому нет необходимости указывать это в формуле.

Переменная k должна иметь связанное вхождение. Какой же из двух кванторов должен быть записан? $\forall k\ (x = 2 \cdot k)$ или $\exists k\ (x = 2 \cdot k)$? Первая из этих двух формул окажется истинной, если $(x = 2 \cdot 0)$ и $(x = 2 \cdot 1)$ и $(x = 2 \cdot 2)$ и ..... . Очевидно, что такого натурального числа нет. Вторая формула окажется истинной для чётных значений x и ложной – для нечётных

$$x \vdots 2 \Leftrightarrow \exists k\ (x = 2 \cdot k).$$

2. Записать формулу, задающую отношение между натуральными числами „не больше“, то есть предикат „$x \le y$ “.

Заметим, что „$x \le y$ “, если „$x + z = y$ при некотором z“. Следовательно, по аналогии с предыдущим примером

$$x \le y \Leftrightarrow \exists z\ (x + z = y).$$

3. Записать формулу, задающую отношение между натуральными числами „меньше“, то есть предикат „$x < y$ “.

Очевидно, что „$x < y$ “, если „$x + z = y$ при некотором положительном z“. Так как мы имеем дело с натуральными числами, которые в математической логике включают в себя и число 0, то положительность числа z означает, что $z \neq 0$. В общепринятых математических обозначениях (не являющихся предикатными формулами) получаем $x < y \Leftrightarrow \exists z \neq 0\ (x + z = y)$. В следующем разделе будет подробно описано, как по этой записи получить равносильность

$$x < y \Leftrightarrow \exists z\ (z \neq 0\ \&\ x + z = y).$$

4. Записать формулу, задающую высказывание „уравнение $x^2 + 2x - 3 = 0$ имеет ровно один корень“.

Прежде всего отметим, что это действительно высказывание, так как в нём нет свободных переменных. Переменная x, присутствующая в выражении, не является свободной переменной, так как слова „уравнение $x^2 + 2x - 3 = 0$“ можно заменить словами „квадратное уравнение с коэффициентами 1, 2, -3“.

Заданное высказывание означает, что уравнение имеет корень, и всякое другое число корнем не является. В общепринятых математических обозначениях (не являющихся предикатными формулами) можно записать $\exists! x\ (x^2+2x-3=0)$, или более развёрнуто $\exists x\ (x^2+2x-3=0\ \&\ \forall y \neq x\ (y^2+2y-3\neq 0))$.

В следующем разделе будет подробно описано, как по этой записи получить формулу

$$\exists x\ (x^2+2x=3\ \&\ \forall y\ (\neg(y=x)\to\neg(y^2+2y=3)).$$

A.V.2. Формулы, задающие стандартные сокращения.

Ограниченный квантор всеобщности. Нам уже известно, что формула вида $\forall x A(x)$ истинна тогда и только тогда, когда постоянная формула $A(a)$ истинна для любой константы a из области интерпретации. Примерами утверждений, записываемых такой формулой, могут быть „Все люди смертны“, „Каждый день солнце поднимается над горизонтом“, „Все студенты в сессию сдают экзамены“ при интерпретации формулы $A(x)$ как „Человек x смертен“, „В день x солнце поднимается над горизонтом“, „Студент x в сессию сдает экзамены“ соответственно.

Зачастую требуется формализовать утверждения, описывающие ограниченную всеобщность, то есть формула $A(x)$ должна быть справедлива не для всех констант из области интерпретации, а лишь для тех, которые удовлетворяют некоторому условию $P(x)$. Такого рода утверждения часто встречаются в формулировках математических определений и теорем. „Для всякого положительного ε ...“, „Для всякой невырожденной матрицы ...“, „Для всякого простого числа ...“ и тому подобное. Математические традиции сложились так, что кванторы очень часто используются как некие удобные стенографические значки, причем они прочно вошли в описания определений теории пределов. Однако они используются не в полном соответствии с формальным определением формулы исчисления предикатов.

Так, например, в определении предела, возникает запись $\forall\varepsilon>0\ \exists\ldots$. Такая запись стала привычной, легко читаемой и, казалось бы, понятной (хоть формально вслед за квантором должна стоять переменная, а затем только формула, но не сразу формула $\varepsilon>0$). Если попросить студента-первокурсника объяснить, что же здесь означает „>0“, далеко не каждый сумеет ответить, что эта запись утверждает, что если мы возьмем положительное ε, то следующая далее формула обязана быть истинной, если же взято отрицательное или нулевое ε, то следующая далее формула может иметь любое значение, в частности, быть ложной, так как этот случай нас не интересует.

Рассмотрим другой, нематематический, пример. Истинность утверждения „Все петербурженки прекрасны“ означает, что какую бы константу нашей предметной области (то есть человека) мы ни взяли, если она является петербурженкой, то она прекрасна, если же это москвичка, или петербуржец, или кто угодно ещё, то этот человек может быть как прекрасен, так и уродлив. Введем в рассмотрение предикаты, задающие свойства: $P(x) \Leftrightarrow$ „x – женщина, проживающая в Петербурге“, $B(x) \Leftrightarrow$ „x прекрасен“. Вышесказанное позволяет нам утверждать, что фраза „Все петербурженки прекрасны“ может быть переформулирована так: „Всякий человек, если это петербурженка, прекрасен (про остальных ничего сказать не могу)“ и запишется формулой $\forall x(P(x) \to B(x))$. В традиционных математически-стенографических обозначениях эта „формула“ (ни в коем случае не являющаяся предикатной формулой!!!) будет выглядеть так $\forall x_{P(x)} B(x)$, или так $\forall x\ (P(x)) : B(x)$, или, ещё хуже, так $\forall (P(x)) : B(x)$.

Рассмотрим ещё раз примеры, приведенные выше, при большей детализации, то есть введя более подробные предикаты.

„Все люди смертны“. Предикаты: $H(x) \Leftrightarrow$ „x – человек“, $S(x) \Leftrightarrow$ „x смертен“. В терминах этих предикатов наша фраза может быть переформулирована так: „Каждый, являющийся человеком, смертен“ и записана „стенографической формулой“ $\forall x_{H(x)} S(x)$ или формулой исчисления предикатов $\forall x(H(x) \to S(x))$.

„Все студенты в сессию сдают экзамены“. Предикаты: $S(x) \Leftrightarrow$ „x – студент“, $E(x) \Leftrightarrow$ „x сдает экзамены в сессию“. В терминах этих предикатов фраза может быть переформулирована так: „Каждый, являющийся студентом, в сессию сдает экзамены“ и записана „стенографической“ формулой $\forall x_{S(x)} E(x)$ или формулой исчисления предикатов $\forall x(S(x) \to E(x))$.

Из сказанного уже видно, что ограниченный квантор всеобщности перед формулой, „стенографически“ записываемый

$$\forall x_{P(x)}\ A(x),$$

и означающий фразу „Для всякого x, удовлетворяющего ограничению $P(x)$, справедлива формула $A(x)$“ формализуется формулой исчисления предикатов

$$\forall x(P(x) \to A(x)).$$

Ограниченный квантор существования. Формулы с квантором существования вида $\exists x A(x)$ истинны тогда и только тогда, когда постоянная формула $A(a)$ истинна хоть для одной константы a из области интерпретации. Примерами утверждений, записываемых такой формулой, могут быть „Некоторые люди гениальны", „Иногда солнце скрыто за тучами", „Бывают студенты, которые в сессию сдают экзамены только на отличные оценки" при интерпретации формулы $A(x)$ как „Человек x гениален", „В день x солнце скрыто за тучами", „Студент x в сессию сдает экзамены только на отличные оценки" соответственно.

Зачастую требуется формализовать утверждения, описывающие ограниченное существование, то есть формула $A(x)$ должна быть справедлива не просто для некоторой константы из области интерпретации, а для такой константы, которая удовлетворяют ещё и некоторому условию $P(x)$.

Такого рода утверждения часто встречаются в формулировках математических определений и теорем. „... существует положительное δ ...", „Для некоторой невырожденной матрицы ...", „Найдется простое число ..." и тому подобное. Как уже говорилось при обсуждении ограниченных кванторов всеобщности, кванторы очень часто используются как некие удобные стенографические значки, причем они используются не в полном соответствии с формальным определением формулы исчисления предикатов.

Так, в определении, например, предела, возникает запись ...$\exists\delta > 0$ .... Эта запись привычна, легко читаема и, казалось бы, понятна (хоть формально вслед за квантором $\exists$ должна стоять переменная, а затем только формула, но не сразу формула $\delta > 0$). Но так же, как и в случае с $\forall\varepsilon > 0$, не каждый студент сумеет ответить, что эта запись утверждает, существование числа δ, которое одновременно должно быть и положительным, и удовлетворять следующей далее формуле.

Рассмотрим другой, нематематический, пример. Истинность утверждения „Некоторые москвички прекрасны" означает, что некоторая константа нашей предметной области (то есть человек) является и москвичкой, и прекрасной одновременно. Введем в рассмотрение предикаты, задающие свойства: $P(x) \Leftrightarrow$ „x – женщина, проживающая в Москве", $B(x) \Leftrightarrow$ „x прекрасен". Вышесказанное позволяет нам утверждать, что фраза „Некоторые москвички прекрасны" может быть переформулирована так: „Существуют люди, которые являются москвичками, и прекрасны" и запишется формулой $\exists x(P(x)\ \&\ B(x))$. В традиционных математически-стенографических обозначениях эта „формула" будет выглядеть так $\exists x_{P(x)} B(x)$, или так $\exists x\ (P(x)) : B(x)$, или, ещё хуже, так $\exists(P(x)) : B(x)$.

Рассмотрим ещё раз примеры, приведенные выше, при большей детализации, то есть введя более подробные предикаты.

„Некоторые люди гениальны“. Предикаты: $H(x) \Leftrightarrow$ „x – человек“, $G(x) \Leftrightarrow$ „x гениален“. В терминах этих предикатов наша фраза может быть переформулирована так: „Некто, являющийся человеком, гениален“ и записана „стенографической формулой“ $\exists x_{H(x)}G(x)$ или формулой исчисления предикатов $\exists x(H(x)\ \&\ G(x))$.

„Бывают студенты, которые сессию сдают экзамены только на отличные оценки“. Предикаты: $S(x) \Leftrightarrow$ „x – студент“, $E(x) \Leftrightarrow$ „x сдает экзамены в сессию только на отличные оценки“. В терминах этих предикатов фраза может быть переформулирована так: „Некто, являющийся студентом, в сессию сдает экзамены только на отличные оценки“ и записана „стенографической формулой“ $\exists x_{S(x)}E(x)$ или формулой исчисления предикатов $\exists x(S(x)\ \&\ E(x))$.

Из сказанного видно, что ограниченный квантор существования перед формулой, „стенографически“ записываемый

$$\exists x_{P(x)}\ A(x),$$

и означающий фразу „Для некоторого x, удовлетворяющего ограничению $P(x)$, справедлива формула $A(x)$“ формализуется формулой исчисления предикатов

$$\exists x(P(x)\ \&\ A(x)).$$

Пронесение отрицания через ограниченные кванторы. Известны равносильности для пронесения отрицания через кванторы всеобщности и существования: $\neg\forall xA \Leftrightarrow \exists x\neg A$ и $\neg\exists xA \Leftrightarrow \forall x\neg A$. Покажем, что аналогичные равносильности имеют место и для ограниченных кванторов

$$\neg\forall x_P A \Leftrightarrow \exists x_P\neg A$$

$$\neg\exists x_P A \Leftrightarrow \forall x_P\neg A.$$

Действительно,

$\neg\forall x_P A \Leftrightarrow \neg\forall x(P \to A) \Leftrightarrow \neg\forall x(\neg P \vee A) \Leftrightarrow \exists x\neg(\neg P \vee A) \Leftrightarrow \exists x(P\ \&\ \neg A) \Leftrightarrow \exists x_P\neg A$,

$\neg\exists x_P A \Leftrightarrow \neg\exists x(P\ \&\ A) \Leftrightarrow \forall x\neg(P\ \&\ A) \Leftrightarrow \forall x(\neg P \vee \neg A) \Leftrightarrow \forall x(P \to \neg A) \Leftrightarrow \forall x_P\neg A$.

Пример, показывающий полезность полной записи ограниченных кванторов с помощью формул исчисления предикатов. Определения линейной зависимости и линейной независимости векторов.

Вектора $X_1, ..., X_n$ называются линейно зависимыми, если существует набор чисел $\alpha_1, ..., \alpha_n$, не равных нулю одновременно, такой что $\alpha_1 X_1 + ... + \alpha_n X_n = 0$.

Запишем это определение формулой. „$X_1, ..., X_n$ линейно зависимы“ $\Leftrightarrow$

$$\exists \alpha_1 ... \alpha_n ({\alpha_1}^2 + ... + {\alpha_n}^2 \neq 0 \quad \& \quad \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_n X_n = 0).$$

Линейная независимость определяется как отрицание линейной зависимости. „X_1, ..., X_n линейно независимы“ $\Leftrightarrow \neg$ „$X_1, ..., X_n$ линейно зависимы“ $\Leftrightarrow$

$\neg \exists \alpha_1 ... \alpha_n ({\alpha_1}^2 + ... + {\alpha_n}^2 \neq 0 \quad \& \quad \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_n X_n = 0) \Leftrightarrow$
$\forall \alpha_1 ... \alpha_n \neg ({\alpha_1}^2 + ... + {\alpha_n}^2 \neq 0 \quad \& \quad \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_n X_n = 0) \Leftrightarrow$
$\forall \alpha_1 ... \alpha_n ({\alpha_1}^2 + ... + {\alpha_n}^2 = 0 \vee \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_n X_n \neq 0). \qquad (*).$

Поскольку в начале формулы стоит квантор всеобщности, то для того, чтобы прочитать ее связным (литературным) текстом, было бы неплохо преобразовать бескванторную часть формулы так, чтобы явно получился ограниченный квантор всеобщности. То есть в бескванторной части должна стоять импликация. Воспользуемся тем, что $(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \to Q) \Leftrightarrow (\neg Q \to P)$.

В первом случае формула $(*)$ равносильна

$$\forall \alpha_1 ... \alpha_n ({\alpha_1}^2 + ... + {\alpha_n}^2 \neq 0 \to \alpha_1 X_1 + ... + \alpha_n X_n \neq 0)$$

и читается „Для всякого ненулевого набора чисел $\alpha_1, ..., \alpha_n$ выполняется $\alpha_1 X_1 + ... + \alpha_n X_n \neq 0)$“.

Во втором случае формула $(*)$ равносильна

$$\forall \alpha_1 ... \alpha_n (\alpha_1 X_1 + ... + \alpha_n X_n = 0 \to {\alpha_1}^2 + ... + {\alpha_n}^2 = 0)$$

и читается „Все коэффициенты нулевой комбинации векторов $X_1, ..., X_n$ одновременно равны нулю". Или "Из равенства нулю линейной комбинации векторов $X_1, ..., X_n$ следует, что все коэффициенты этой линейной комбинации равны нулю“.

Как видите, мы получили два равносильных определения линейно независимых векторов, совершенно не вдаваясь в детали о природе векторов, из какого они пространства и т.п.

Единственность. Среди математиков для обозначения того, что не просто существует объект, удовлетворяющий некоторой формуле $A(x)$, но этот объект единственен, часто используется запись $\exists ! x A(x)$. Такое выражение не является формулой исчисления предикатов. Какая же формула соответствует этому выражению?

Что означает выражение „существует единственный объект ...“? По-русски это можно выразить несколькими способами:

„Существует объект, удовлетворяющий ... , и никакой другой объект этому условию не удовлетворяет.“

„Существует объект, удовлетворяющий ... , и всякий другой объект этому условию не удовлетворяет.“

„Существует объект, удовлетворяющий ... , и всякий объект, удовлетворяющий этому условию, совпадает с этим первым.“

Легко видеть, что все эти фразы выражают одно и тоже. Выпишем формулы, которыми они будут записываться.

$$\exists x(A(x) \;\&\; \neg\exists y((y \neq x) \;\&\; A(y)))$$

$$\exists x(A(x) \;\&\; \forall y((y \neq x) \to \neg A(y)))$$

$$\exists x(A(x) \;\&\; \forall y(A(y) \to (y = x)))$$

Эти три формулы равносильны, что легко проверить, используя равносильности $(P \to Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$, $\forall x P \Leftrightarrow \neg\exists x \neg P$ и $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \;\&\; \neg Q)$, как это было сделано при пронесении отрицания через ограниченные кванторы.

Какую из этих трех формул использовать — это дело вкуса каждого конкретного человека. К тому же наверняка можно придумать еще какую-нибудь равносильную формулировку (а следовательно и формулу), которая будет соответствовать стилю мышления конкретного человека.

A.V.3. Примеры формализации рассуждений.

Записать логическое следование предикатных формул, соответствующее рассуждению.

1. *Все студенты хоть иногда посещают занятия. Вася ни разу не был на занятиях. Значит, Вася – не студент.*

Прежде всего определим свойства объектов и константы, присутствующие в этом рассуждении, и введём для них обозначения. Это свойства „быть студентом“ и „посещать занятия“, а также константа Вася.

Предикат или константа	Описание	Обозначение
быть студентом	x – студент	$S(x)$
посещать занятия	x хоть иногда посещает занятия	$L(x)$
константа	Вася	V

Первое предложение содержит ограниченный квантор всеобщности и записывается формулой $\forall x\ (S(x) \to L(x)$. Второе предложение описывает свойство константы V и записывается формулой $\neg L(V)$. Третье предложение тоже описывает свойство константы V и записывается формулой $\neg S(V)$. Всё рассуждение запишется в виде логического следования

$$\forall x\ (S(x) \to L(x) \quad \neg L(V) \quad \Rightarrow \quad \neg S(V).$$

2. *У него только гениальные идеи. Некоторые его идеи неверны. Ни что неверное не может быть гениальным. Значит, некоторые его идеи просто бредовы.*

Предикат или константа	Описание	Обозначение
быть его идеей	x – его идея	$I(x)$
быть гениальным	x гениально	$G(x)$
быть неверным	x неверно	$W(x)$
быть бредовым	x бредово	B(x)

Первое предложение содержит опасное слово “только“, исключение которого из текста даёт нам фразу „Все его идеи гениальны“. Эта фраза формализуется с использованием ограниченного квантора всеобщности: $\forall x_{I(x)}\ G(x)$ или формулой $\forall x\ (I(x) \to G(x))$.

Второе предложение формализуется с использованием ограниченного квантора существования $\exists x_{I(x)}\ W(x))$ или формулой $\exists x\ (I(x)\ \&\ W(x))$.

Третье предложение означает „Не бывает неверного и гениального“ и записывается формулой $\neg\exists x\ (W(x)\ \&\ G(x))$.

Заключение рассуждения опять формализуется с использованием ограниченного квантора существования $\exists x_{I(x)} B(x))$ или формулой $\exists x\ (I(x)\ \&\ B(x))$.

Всё рассуждение запишется в виде логического следования

$$\forall x\ (I(x) \to G(x))\ \ \exists x\ (I(x)\ \&\ W(x))\ \ \neg\exists x\ (W(x)\ \&\ G(x)) \Rightarrow$$

$$\exists x\ (I(x)\ \&\ B(x)).$$

A.V.4. Упражнения.

Ввести предикаты, задающие свойства и отношения, и константы, используемые в рассуждениях. Записать каждое предложение предикатной формулой, а всё рассуждение в виде их логического следования.

1. Всякий, кто может решить эту задачу – математик. Ни один математик не может её решить. Значит, эта задача неразрешима.

2. Если какое-нибудь из чисел, лежащих строго между 1 и 101 делит 101, то простое число, меньшее 11, делит 101. Ни одно простое число, меньшее 11, не делит 101. Значит, ни одно число между 1 и 101 не делит 101.

3. Тот, кто распускает этот слух, должен быть ловким и беспринципным. Игорь не ловок, а Тарас не лишен принципов. Значит, ни Игорь, ни Тарас не распускают этот слух.

4. Никто не поймет этого сообщения, если только кто-нибудь не разгадает код. Значит, есть кто-то, кто может понять это сообщение, если только разгадает код.

5. Человек – это животное. Значит, голова человека является головой животного.[42]

6. Отношение „быть отцом“ антисимметрично. Значит, ни один человек не является собственным отцом.

7. Взрослых пускали только с детьми. Меня пустили. Значит, я либо ребёнок, либо пришел с ребёнком.

8. Все любят Женю. Женя любит кого-то. Значит, есть два человека, которые любят друг руга.

9. Только глупец способен на это. Я не способен. Значит, я не глупец.

10. Никто не сможет сдать этот экзамен, только если кто-нибудь не сделает хорошую шпаргалку. Я экзамен сдал. Значит, кто-то сделал такую шпаргалку.

11. У разгильдяев есть двойки. Ни один отличник не имеет двоек. Значит, все отличники прилежны.

A.VI.1. Примеры построения вывода в секвенциальном исчислении предикатов.

При построении вывода в секвенциальном исчислении предикатов для проверки того, что секвенция является аксиомой, потребуется отношение

[42] Для формализации заключения полезно переформулировать его в виде „Всякая голова всякого человека является головой некоторого животного“ или „Всякая голова, являющаяся головой некоторого человека, является головой некоторого животного“

графического равенства двух слов. Для этой цели неудобно использовать обозначение $=$, так как оно может восприниматься как то, что значения формул совпадают (на некоторых или на всех наборах значений переменных). Графическое же равенство предполагает, что разными буквами обозначено одно и то же слово. Введём обозначение

$$A \circeq B$$

для указания на то, что слово, обозначенное буквой A, графически равно слову, обозначенному буквой B.

Пример 1.

Пусть P – формула исчисления предикатов. Доказать выводимость секвенции, построив вывод

$$\exists x \forall y P \vdash \forall y \exists x P.$$

Как мы видели, в исчислении высказываний порядок выбора логической связки влияет только на длину вывода. То есть, если секвенция выводима, то в каком бы порядке ни выбирались внешние связки на каждом шаге построения вывода, вывод будет получен. На этом примере продемонстрируем, что с кванторами дело обстоит иначе.

1. $\exists x \forall y P \vdash \forall y \exists x P$ – Из 2. по $(\exists \vdash)$

2. $\forall y [P]^x_u \vdash \forall y \exists x P$ – Из 3. по $(\forall \vdash)$ (Переменная u свободна для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной x и не входит свободно в секвенцию 1.)

3. $[P]^{xy}_{ut} \vdash \forall y \exists x P$ – Из 4. по $(\vdash \forall)$ (Терм t свободен для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной y)

4. $[P]^{xy}_{ut} \vdash \exists x [P]^y_v$ – Из 5. по $(\vdash \exists)$ (Переменная v свободна для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной y и не входит свободно в секвенцию 3.)

5. $[P]^{xy}_{ut} \vdash [P]^{yx}_{vs}$ (Терм s свободен для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной x)

Секвенция 5 является аксиомой, если $[P]^{x\ y}_{u\ t} \circeq [P]^{x\ y}_{s\ v}$. То есть, если как переменная x, так и переменная y входят свободно в формулу P, то терм $s \circeq u$, а терм $t \circeq v$. Перепишем построенную последовательность секвенций, заменив термы t и s на переменные v и u соответственно.

1. $\exists x \forall y P \vdash \forall y \exists x P$ – Из 2. по $(\exists \vdash)$

2. $\forall y [P]^x_u \vdash \forall y \exists x P$ – Из 3. по $(\forall \vdash)$ (Переменная u свободна для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной x и не входит свободно в секвенцию 1. так как мы можем выбрать в качестве u новую переменную)

3. $[P]^{xy}_{uv} \vdash \forall y \exists x P$ – Из 4. по $(\vdash \forall)$ (Переменная v свободна для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной y так как мы можем выбрать в качестве v новую переменную)

4. $[P]^{xy}_{uv} \vdash \exists x [P]^{y}_{v}$ (Переменная v свободна для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной y, но входит свободно в секвенцию 3, что нарушает ограничение на применение правила $(\vdash \forall)$.)

Таким образом, полученная последовательность секвенций не является выводом в секвенциальном исчислении предикатов, так как нарушено ограничение на применение правила $(\vdash \forall)$.

Известно, что имеет место логическое следование, отраженное в этой секвенции, то есть формульный образ секвенции общезначим. По теореме о полноте исчисления предикатов эта секвенция должна быть выводимой. Продолжим наши попытки построить вывод.

Если бы переменная v появилась в процессе построения вывода позже, чем терм t, то, возможно, полученной неприятности удалось бы избежать. Попробуем применять сначала те кванторные правила, которые требуют больших ограничений (если это возможно), то есть правила $(\vdash \forall)$ и $(\exists \vdash)$.

1. $\exists x \forall y P \vdash \forall y \exists x P$ – Из 2'. по $(\exists \vdash)$

2'. $\forall y [P]^{x}_{u} \vdash \forall y \exists x P$ – Из 3'. по $(\vdash \forall)$ (Переменная u свободна для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной x и не входит свободно в секвенцию 1.)

3'. $\forall y [P]^{x}_{u} \vdash \exists x [P]^{y}_{v}$ – Из 4'. по $(\vdash \forall)$ (Переменная v свободна для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной y и не входит свободно в секвенцию 1.)

4'. $[P]^{xy}_{ut} \vdash \exists x [P]^{y}_{v}$ – Из 5'. по $(\vdash \exists)$ (Терм t свободен для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной y)

5'. $[P]^{xy}_{ut} \vdash [P]^{yx}_{vs}$ (Терм s свободен для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной x)

Как видно, секвенции 5 и 5' совпадают и являются аксиомами при одних и тех же условиях, а именно терм s совпадает с переменной u, а терм t совпадает с переменной v. Перепишем построенный вывод, заменив термы t и s на переменные v и u соответственно.

1. $\exists x \forall y P \vdash \forall y \exists x P$ – Из 2'. по $(\exists \vdash)$

2'. $\forall y [P]^{x}_{u} \vdash \forall y \exists x P$ – Из 3'. по $(\vdash \forall)$ (Переменная u свободна для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной x и не входит свободно в секвенцию 1.)

3'. $\forall y [P]^{x}_{u} \vdash \exists x [P]^{y}_{v}$ – Из 4'. по $(\vdash \forall)$ (Переменная v свободна для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной y и не входит свободно в секвенцию 1.)

4'. $[P]^{xy}_{uv} \vdash \exists x[P]^{y}_{v}$ – Из 5'. по $(\vdash \exists)$ (Терм v, являющийся переменной, свободен для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной y)

5'. $[P]^{xy}_{uv} \vdash [P]^{yx}_{vu}$ (Терм u, являющийся переменной, свободен для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной x)

На этот раз все ограничения на применения кванторных правил выполнены и последовательность секвенций 5', 4', 3', 2', 1 является выводом.

Пример 2.

Пусть P – формула исчисления предикатов. Проверить, выводима ли секвенция

$$\forall x\exists yP \vdash \exists y\forall xP.$$

Если секвенция не выводима при произвольной формуле P, то указать, при каких ограничениях на формулу P она является выводимой.

В примере 1. было показано, что порядок выбора внешнего квантора существенен при доказательстве выводимости секвенции в исчислении предикатов. В этом примере будем выбирать квантор, который может быть введен с помощью правила, требующего больших ограничений (т.е. $(\exists \vdash)$ или $(\vdash \forall)$) каждый раз, когда это возможно. На первом шаге правила, по которым могут быть введены каждый из внешних кванторов, требуют малого количества ограничений. Выберем первый из внешних кванторов.

1. $\forall x\exists yP \vdash \exists y\forall xP$ – Из 2. по $(\forall \vdash)$

2. $\exists y[P]^{x}_{t} \vdash \exists y\forall xP$ – Из 3. по $(\exists \vdash)$ (Терм t свободен для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной x. Выбор правила $(\exists \vdash)$ обусловлен количеством ограничений на его применение)

3. $[P]^{xy}_{tu} \vdash \exists y\forall xP$ – Из 4. по $(\vdash \exists)$ (Переменная u свободна для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной y и не входит свободно в секвенцию 2. Выбор правила $(\vdash \exists)$ однозначен.)

4. $[P]^{xy}_{tu} \vdash \forall x[P]^{y}_{s}$ – Из 5. по $(\vdash \forall)$ (Терм s свободен для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной y.)

5. $[P]^{xy}_{tu} \vdash [P]^{yx}_{sv}$ (Переменная v свободна для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной y и не входит свободно в секвенцию 4.)

Секвенция 5 является аксиомой, если $[P]^{x\ y}_{t\ u} = [P]^{x\ y}_{v\ s}$. Это возможно в четырех случаях:

а) Терм s совпадает с переменной u, а терм t совпадает с переменной v.

$$s \mathrel{\underline{\circ}} u, \quad t \mathrel{\underline{\circ}} v$$

б) Терм s совпадает с переменной u, а переменная x не имеет свободных вхождений в формулу P.

$$s \mathrel{\underline{\circ}} u, \quad \text{переменная } x \text{ не имеет свободных вхождений в } P$$

в) Терм t совпадает с переменной v, а переменная y не имеет свободных вхождений в формулу P.

$$t \mathrel{\underline{\circ}} v, \quad \text{переменная } y \text{ не имеет свободных вхождений в } P$$

г) Ни переменная x, ни переменная y не имеют свободных вхождений в формулу P.

Перепишем построенную последовательность секвенций для случая а), заменив термы t и s на переменные v и u соответственно.

1. $\forall x \exists y P \vdash \exists y \forall x P$ – Из 2. по $(\forall \vdash)$

2а. $\exists y [P]^x_v \vdash \exists y \forall x P$ – Из 3. по $(\exists \vdash)$ (Терм v,являющийся переменной, свободен для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной x. Выбор правила $(\exists \vdash)$ обусловлен количеством ограничений на его применение)

3а. $[[P]^x_v]^y_u \vdash \exists y \forall x P$ – Из 4. по $(\vdash \exists)$ (Переменная u свободна для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной y и не входит свободно в секвенцию 2. Выбор правила $(\vdash \exists)$ однозначен.)

4а. $[[P]^x_v]^y_u \vdash \forall x [P]^y_u$ – Из 5. по $(\vdash \forall)$ (Терм u свободен для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной y.)

5а. $[[P]^x_v]^y_u \vdash [[P]^y_u]^x_v$ (Переменная v свободна для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной y но входит свободно в секвенцию 4.)

Таким образом, полученная последовательность секвенций не является выводом в секвенциальном исчислении предикатов, так как нарушено ограничение на применение правила $(\vdash \forall)$.

Проверим, является ли последовательность секвенций 5, 4, 3, 2, 1 выводом в случае б). Заметим, что в этом случае $[P]^x_t \mathrel{\underline{\circ}} P$ для любого терма t.

1. $\forall x \exists y P \vdash \exists y \forall x P$ – Из 2. по $(\forall \vdash)$

2б. $\exists y [P]^x_t \vdash \exists y \forall x P$ – Из 3. по $(\exists \vdash)$, то есть

$\exists y P \vdash \exists y \forall x P$ – Из 3. по $(\exists \vdash)$ (Терм t свободен для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной x. Это условие выполнено, так если переменная не входит свободно в формулу, то всякий тем свободен для подстановки в эту формулу вместо её свободных вхождений.)

3б. $[P]^y_u \vdash \exists y \forall x P$ – Из 4. по $(\vdash \exists)$ (Переменная u свободна для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной y и не входит свободно в секвенцию 2. Выбор правила $(\vdash \exists)$ однозначен.)

4б. $[P]^y_u \vdash \forall x [P]^y_u$ – Из 5. по $(\vdash \forall)$ (Терм u свободен для подстановки в формулу P вместо свободных вхождений переменной y, если u – новая переменная.)

5б. $[P]^y_u \vdash [P]^{yx}_{sv}$, то есть

$[P]^y_u \vdash [P]^y_u$ (Эта секвенция является аксиомой.)

Аналогичный результат получается для случая в) и, тем более, для случая г).

При попытке построить вывод секвенции $\forall x \exists y P \vdash \exists y \forall x P$ мы получили, что она выводима в случае, если переменная x или переменная y (или и та и другая) не входит свободно в формулу P. В противном случае вывод построить не удалось.

Поскольку даже в нашем случае было четыре возможности для порядка применения правил вывода (а в общем случае их число может быть огромным), то полезно показать, что формульный образ рассматриваемой секвенции не общезначим, то есть привести пример интерпретации, в которой антецедент секвенции истинен, а сукцедент ложен.

Рассмотрим интерпретацию I: $D = \mathbf{N}$, $P(x, y) \Leftrightarrow x \leq y$.

$\forall x\ \exists y\ (x \leq y)$ истинно, так как для всех значений $x = n$ в качестве y можно брать число n.

$\exists y\ \forall x\ (x \leq y)$ ложно, так как какое бы значение для y мы ни взяли, при значении x на единицу большем мы получим ложь.

Пример 3.

Пусть A и B – формулы исчисления предикатов. Проверить, выводима ли секвенция

$$\vdash (\forall x B \to A) \leftrightarrow \exists x (B \to A).$$

Если секвенция не выводима при произвольных формулах A и B, то указать, какая из двух импликаций (если рассматривать эквивалентность как конъюнкцию двух импликаций) общезначима, а какая имеет место при ограничениях на формулы A и B.

На первом шаге построения вывода рассматриваемая здесь секвенция $\vdash (\forall x B \to A) \leftrightarrow \exists x (B \to A)$ получается из секвенций 2. и 3.

2. $\forall x B \to A \vdash \exists x (B \to A)$

3. $\exists x(B \to A) \vdash \forall x B \to A$,

вывод каждой из которых будем строить отдельно.

2. $\forall x B \to A \vdash \exists x(B \to A)$ из 4. и 5. по ($\to\vdash$)

4. $A \vdash \exists x(B \to A)$ из 6. по ($\vdash \exists$)

5. $\vdash \exists x(B \to A)\;\; \forall x B$ из 7. по ($\vdash \forall$) (это кванторное правило применяется в первую очередь.)

6. $A \vdash [B]^x_t \to [A]^x_t$ из 8. по ($\vdash\to$)

терм t свободен для подстановки в формулу $B \to A$ вместо свободных вхождений предметной переменной x.

7. $\vdash \exists x(B \to A)\;\; [B]^x_u$ из 9. по ($\vdash \exists$)

переменная u свободна для подстановки в формулу B вместо свободных вхождений предметной переменной x и

переменная u не входит свободно в секвенцию 5., являющуюся заключением этого применения правила ($\vdash \forall$).

8. $A\;\; [B]^x_t \vdash [A]^x_t$ является аксиомой, если $t \,\underline{\circ}\, x$, что не нарушает ограничения на применение правила ($\vdash \exists$) при получении секвенции 6.

9. $\vdash [B]^x_{t_1} \to [A]^x_{t_1}\;\; [B]^x_u$ из 10. по ($\vdash\to$)

терм t_1 свободен для подстановки в формулу $\exists x(B \to A)$ вместо свободных вхождений предметной переменной x.

10. $[B]^x_{t_1} \vdash [A]^x_{t_1}\;\; [B]^x_u$ является аксиомой, если $t_1 \,\underline{\circ}\, u$, что не нарушает ограничения на применение правила ($\vdash \exists$) при получении секвенций 7. и 9., если, например, в качестве предметной переменной u взять „новую“ переменную, не входящую в исходную секвенцию.

Следовательно, секвенция 2. выводима при любых формулах A и B.

3. $\exists x(B \to A) \vdash \forall x B \to A$ из 11. по ($\vdash\to$)

11. $\exists x(B \to A)\;\; \forall x B \vdash A$ из 12. по ($\exists \vdash$)

12. $[B]^x_v \to [A]^x_v\;\; \forall x B \vdash A$ из 13. по ($\forall \vdash$)

переменная v свободна для подстановки в формулу $B \to A$ вместо свободных вхождений предметной переменной x и

переменная v не входит свободно в секвенцию 11. (заключение в этом применении правила ($\exists \vdash$)).

13. $[B]^x_v \to [A]^x_v\;\; [B]^x_{t_2} \vdash A$ из 14. и 15. по ($\to\vdash$)

терм t_2 свободен для подстановки в формулу B вместо свободных вхождений предметной переменной x.

14. $[A]^x_v\;\; [B]^x_{t_2} \vdash A$ является аксиомой, если $[A]^x_v \,\underline{\circ}\, A$, что выполняется в каждом из двух случаев: а) $v \,\underline{\circ}\, x$; б) x не входит свободно в формулу A. В случае а) если x входит свободно в формулу A, то нарушено второе ограничение на применение правила ($\exists \vdash$) при получении

секвенции 12. В случае б) это ограничение выполнено.

15. $[B]^x_{t_2} \vdash A \ [B]^x_v$ является аксиомой, если $[B]^x_u \mathrel{\overline{\circ}} [B]^x_v$, что выполняется, в частности, при $t_2 \mathrel{\overline{\circ}} v$, что не нарушает ограничения на применение правил $(\exists \vdash)$ и $(\vdash \forall)$ при получении секвенций 12. и 13., если, например, в качестве предметной переменной v взять „новую“ переменную, не входящую в исходную секвенцию.

Так как последовательность секвенций 15., 14., ..., 11 , 3. является выводом тогда и только тогда, когда обе секвенции 15 и 14 являются аксиомами, то секвенция 3 выводима при ограничении, что переменная x не входит свободно в формулу A.

Покажем, что формульный образ секвенции 3. $\exists x(B \to A) \to (\forall x B \to A)$ не общезначим. Для этого приведём пример интерпретации, в которой он ложен хоть при одном значении свободных переменных.

Пусть I: $D = \mathbf{N}$, $A \Leftrightarrow x \vdots 2$, $B \Leftrightarrow x + 1 > 0$ (т.е. в этой интерпретации B истинна).

Посылка импликации $\exists x(B \to A)$ в этой интерпретации имеет вид $\exists x(true \to x \vdots 2) \Leftrightarrow \exists x(x \vdots 2) \Leftrightarrow true$.

Заключение импликации $\forall x B \to A$ в этой интерпретации имеет вид $\forall x(true) \to x \vdots 2 \Leftrightarrow true \to x \vdots 2 \Leftrightarrow x \vdots 2$, что ложно при $x = 1$.

A.VI.2. Примеры доказательства правильности рассуждений в секвенциальном исчислении предикатов.

Рассмотрим примеры доказательства правильности рассуждений, формализованных в разделе V.3, путём построения вывода в секвенциальном исчислении предикатов.

1. *Все студенты хоть иногда посещают занятия. Вася ни разу не был на занятиях. Значит, Вася – не студент.*

Это рассуждение формализовано в виде секвенции

$$\forall x \ (S(x) \to L(x)) \quad \neg L(V) \quad \vdash \quad \neg S(V),$$

где $S(x) \Leftrightarrow$ „x – студент“, $L(x) \Leftrightarrow$ „x хоть иногда посещает занятия“, V — константа Вася.

Построим вывод этой секвенции в секвенциальном исчислении предикатов.

1. $\forall x \ (S(x) \to L(x)) \quad \neg L(V) \quad \vdash \quad \neg S(V)$ из 2. по $(\vdash \neg)$
2. $\forall x \ (S(x) \to L(x)) \quad \neg L(V) \quad S(V) \quad \vdash$ из 3. по $(\neg \vdash)$
3. $\forall x \ (S(x) \to L(x)) \quad S(V) \quad \vdash \quad L(V)$ из 4. по $(\forall \vdash)$

4. $S(t) \to L(t) \quad S(V) \ \vdash \ L(V)$ из 5. и 6. по $(\to\vdash)$

терм t свободен для подстановки в формулу $S(x) \to L(x)$ вместо свободных вхождений предметной переменной x. Поскольку $S(x) \to L(x)$ не содержит кванторов, то терм может быть любым.

5. $L(t) \quad S(V) \ \vdash \ L(V)$

6. $S(V) \ \vdash \ L(V) \quad S(t)$

Секвенция 5. является аксиомой, если $L(t) \,\overline{\circ}\, L(V)$, что возможно только в случае, если $t \,\overline{\circ}\, V$, что не нарушает ограничения на секвенцию 5.

Секвенция 6. является аксиомой, если $S(t) \,\overline{\circ}\, S(V)$, что возможно только в случае, если $t \,\overline{\circ}\, V$, что не нарушает ограничения на секвенцию 5.

Таким образом, исходная секвенция 5. выводима, и рассуждение верно.

Замечание. Определение того, подстановка какого же именно терма обеспечивает выводимость секвенции, соответствует стандартному использованию общих утверждений (в данном случае *Все студенты хоть иногда посещают занятия.*) при доказательстве частных.

2. *У него только гениальные идеи. Некоторые его идеи неверны. Ни что неверное не может быть гениальным. Значит, некоторые его идеи просто бредовы.*

Это рассуждение формализовано в виде секвенции

$$\forall x\ (I(x) \to G(x)) \quad \exists x\ (I(x)\ \&\ W(x)) \ \ \neg\exists x\ (W(x)\ \&\ G(x)) \vdash$$

$$\exists x\ (I(x)\ \&\ B(x)),$$

где $I(x) \Leftrightarrow$ „x – его идея“, $G(x) \Leftrightarrow$ „x гениально“, $W(x) \Leftrightarrow$ „x неверно“, $B(x) \Leftrightarrow$ „x бредово“.

Построим вывод этой секвенции в секвенциальном исчислении предикатов.

1. $\forall x\ (I(x) \to G(x)) \quad \exists x\ (I(x)\ \&\ W(x)) \quad \neg\exists x\ (W(x)\ \&\ G(x)) \vdash \ \exists x\ (I(x)\ \&\ B(x))$ из 2. по $(\neg\vdash)$

2. $\forall x\ (I(x) \to G(x)) \quad \exists x\ (I(x)\ \&\ W(x))\ \exists x\ (W(x)\ \&\ G(x)) \ \vdash \exists x\ (I(x)\ \&\ B(x)) \quad \exists x\ (W(x)\ \&\ G(x))$ из 3. по $(\exists\vdash)$

3. $\forall x\ (I(x) \to G(x)) \quad I(y)\ \&\ W(y)\ \exists x\ (W(x)\ \&\ G(x)) \ \vdash \exists x\ (I(x)\ \&\ B(x)) \quad \exists x\ (W(x)\ \&\ G(x))$ из 4. по $(\exists\vdash)$

переменная y свободна для подстановки в формулу $I(x)\ \&\ W(x)$ вместо свободных вхождений переменной x (поскольку $I(x)\ \&\ W(x)$ не содержит кванторов, то это условие выполнено для любого терма) и не входит свободно в секвенцию 3. (поскольку все формулы в секвенции 2. замкнуты, то это условие тоже выполнено для любой переменной).

4. $\forall x\ (I(x) \to G(x))$ $\ I(y)\ \&\ W(y)$ $\ W(z)\ \&\ G(z) \vdash \exists x\ (I(x)\ \&\ B(x))$ $\exists x\ (W(x)\ \&\ G(x))$ из 5. по $(\forall \vdash)$

переменная z свободна для подстановки в формулу $W(x)\ \&\ G(x)$ вместо свободных вхождений переменной x (поскольку $W(x)\ \&\ G(x)$ не содержит кванторов, то это условие выполнено для любого терма) и не входит свободно в секвенцию 4. (поскольку секвенция 3. содержит единственную свободную переменную y, то это условие выполняется, если $\neg(z \circeq y)$).

5. $I(t) \to G(t)$ $\ I(y)\ \&\ W(y)$ $\ W(z)\ \&\ G(z) \vdash \exists x\ (I(x)\ \&\ B(x))$ $\exists x\ (W(x)\ \&\ G(x))$ из 6. по $(\vdash \exists)$

терм t свободен для подстановки в формулу $I(x) \to G(x)$ вместо свободных вхождений переменной x (поскольку $I(x) \to G(x)$ не содержит кванторов, то это условие выполнено для любого терма).

6. $I(t) \to G(t)$ $\ I(y)\ \&\ W(y)$ $\ W(z)\ \&\ G(z) \vdash I(t1)\ \&\ B(t1)$ $\exists x\ (W(x)\ \&\ G(x))$ из 7. по $(\vdash \exists)$

терм $t1$ свободен для подстановки в формулу $I(x)\ \&\ B(x)$ вместо свободных вхождений переменной x (поскольку $I(x)\ \&\ B(x)$ не содержит кванторов, то это условие выполнено для любого терма).

7. $I(t) \to G(t)$ $\ I(y)\ \&\ W(y)$ $\ W(z)\ \&\ G(z) \vdash I(t1)\ \&\ B(t1)$ $W(t2)\ \&\ G(t2)$ из 8. по $(\ \&\ \vdash)$

терм $t2$ свободен для подстановки в формулу $W(x)\ \&\ G(x)$ вместо свободных вхождений переменной x (поскольку $W(x)\ \&\ G(x)$ не содержит кванторов, то это условие выполнено для любого терма).

8. $I(t) \to G(t)$ $\ I(y)$ $\ W(y)$ $\ W(z)\ \&\ G(z) \vdash I(t1)\ \&\ B(t1)\ W(t2)\ \&\ G(t2)$ из 9. по $(\ \&\ \vdash)$

9. $I(t) \to G(t)$ $\ I(y)$ $\ W(y)$ $\ W(z)$ $\ G(z) \vdash I(t1)\ \&\ B(t1)\ W(t2)\ \&\ G(t2)$ из 10. и 11. по $(\to\vdash)$

10. $G(t)$ $\ I(y)$ $\ W(y)$ $\ W(z)$ $\ G(z) \vdash I(t1)\ \&\ B(t1)\ W(t2)\ \&\ G(t2)$ из 12. и 13. по $(\vdash\ \&\ )$

11. $\underline{I(y)}$ $\ W(y)$ $\ W(z)$ $\ G(z) \vdash I(t1)\ \&\ B(t1)\ W(t2)\ \&\ G(t2)$ $\ \underline{I(t)}$ является аксиомой, если $t \circeq y$.

12. $G(t)$ $\ I(y)$ $\ \underline{W(y)}$ $\ W(z)$ $\ G(z) \vdash I(t1)\ \&\ B(t1)\ \underline{W(t2)}$ является аксиомой, если $t2 \circeq y$.

13. $\underline{G(t)}$ $\ I(y)$ $\ W(y)$ $\ W(z)$ $\ \underline{G(z)} \vdash I(t1)\ \&\ B(t1)\ \underline{G(t2)}$ является аксиомой, если $t2 \circeq t$ или $t2 \circeq z$.

Таким образом, если в качестве термов $t1$ и $t2$ взять переменную y, то последовательность секвенций 13, 12, ..., 1 является выводом.

Замечание. Если в процессе вывода не применять никакие правила вывода к формуле $\exists x\ (I(x)\ \&\ B(x))$, то вывод всё равно будет построен (можно проделать это в качестве упражнения). То есть в действительности можно построить вывод секвенции

$$\forall x\ (I(x) \to G(x)) \quad \exists x\ (I(x)\ \&\ W(x)) \quad \neg\exists x\ (W(x)\ \&\ G(x)) \vdash$$

с пустым сукцедентом. Это означает, что посылки секвенции приводят к противоречию. А, как известно, из лжи следует что угодно.

A.VI.3. Примеры доказательств методом резолюций для исчисления предикатов

Пример 1.

Пусть $P(x, y)$ — формула исчисления предикатов со свободными переменными x и y. Доказать методом резолюций для исчисления предикатов логическое следование

$$\exists x \forall y P(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x, y).$$

В этом логическом следовании нет свободных переменных, поэтому их замены на сколемовские константы не требуется.

Приведём формулу $\exists x \forall y P(x, y)$ к множеству предложений, подробно комментируя возможность применения каждого пункта алгоритма.

Логических связок нет.

Отрицания нет.

Переменные стандартизированы.

Исключаем квантор существования, вводя сколемовскую константу a
$\forall y P(a, y)$.

Формула находится в предварённой нормальной форме, исключаем квантор всеобщности
$P(a, y)$.

Получено предложение.

Приведём формулу $\neg\forall y \exists x P(x, y)$ к множеству предложений, подробно комментируя возможность применения каждого пункта алгоритма.

Логических связок нет.

Уменьшаем область действия отрицания
$\exists y\ \forall x\ \neg P(x, y)$.

Исключаем квантор существования, вводя сколемовскую константу b
$\forall x\ \neg P(x, b)$.

Формула находится в предварённой нормальной форме, исключаем квантор всеобщности

$\neg P(x, b)$.

Получено предложение.

Покажем неудовлетворимость полученного множества предложений $\{P(a, y), \neg P(x, b)\}$.

$$\begin{array}{ccc} \underline{P(a, y)} & & \underline{\neg P(x, b)} \\ & & \Big|^{x\ y}_{a\ b} \\ & \underline{nill} & \end{array}$$

Пример 2.

Пусть $P(x, y)$ – формула исчисления предикатов со свободными переменными x и y. Проверить методом резолюций для исчисления предикатов логическое следование

$$\forall x \exists y P(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x P(x, y).$$

В этом примере не будем делать столь подробных комментариев как в предыдущем. Между формулами, получаемыми в результате применения шагов алгоритма будем ставить знак $\Leftrightarrow^*$

$\forall x \exists y P(x, y) \Leftrightarrow^* \forall x P(x, f(x)) \Leftrightarrow^* P(x, f(x))$.

$\neg \exists y \forall x P(x, y) \Leftrightarrow^* \forall y \exists x \neg P(x, y) \Leftrightarrow^* \forall y \neg P(g(y), y) \Leftrightarrow^* \neg P(g(y), y)$.

Полученное множество предложений $\{P(x, f(x)), \neg P(g(y), y)\}$ не является неудовлетворимым, так как формулы $P(x, f(x))$ и $P(g(y), y)$ не имеют общего унификатора.

Действительно, если существует их общий унификатор $\lambda = |^{x\ y}_{t_1 t_2}$ такой, что $P(t_1, f(t_1)) \mathrel{\underline{\circ}} P(g(t_2), t_2)$, то система словарных уравнений

$$\begin{cases} t_1 & \underline{\circ} & g(t_2) \\ f(t_1) & \underline{\circ} & t_2 \end{cases}$$

должна иметь решение. В частности, длины записей слов, стоящих в левой и правой частях уравнений, должны быть равны

$$\begin{cases} \|t_1\| & = & \|g(t_2)\| \\ \|f(t_1)\| & = & \|t_2\| \end{cases}.$$

Но для любого терма t и функционального символа h верно неравенство $\|t\| \leq \|h(t)\| - 3$ (два символа для записи скобок и по крайней мере один символ для записи имени функции h).

Таким образом, имеем $\|t_1\| \leq \|f(t_1)\| - 3 = \|t_2\| - 3 \leq \|g(t_2)\| - 6 = \|t_1\| - 6$, что невозможно (т.к. неравенство $x \leq x - 6$ не имеет решения).

Пример 3.

Пусть $A(x)$ и $B(x)$ – формулы исчисления предикатов. Проверить методом резолюций общезначимость формулы

$$(\forall x B(x) \to A(x)) \leftrightarrow \exists x(B(x) \to A(x)).$$

Заметим, что при приведении к множеству предложений формулы, содержащей внешнюю связку $\leftrightarrow$, это множество содержит очень много формул достаточно большой длины записи (проверьте это в качестве упражнения). Поэтому вместо заданной формулы будем доказывать два логических следования, заменив свободные вхождения предметной переменной x на сколемовскую константу a:

$$\forall x B(x) \to A(a) \Rightarrow \exists x(B(x) \to A(x)),$$

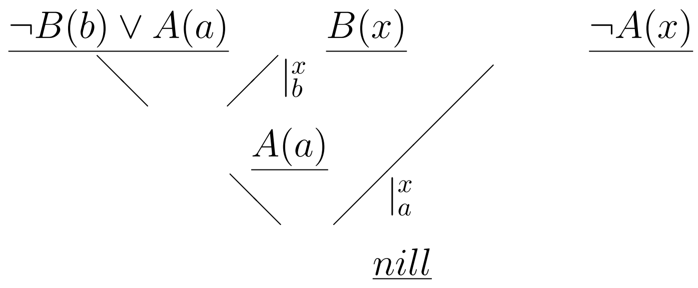
$$\forall x B(x) \to A(a) \Leftarrow \exists x(B(x) \to A(x)).$$

Случай $\forall x B(x) \to A(a) \Rightarrow \exists x(B(x) \to A(x))$:

$\forall x B(x) \to A(a) \Leftrightarrow^* \neg\forall x B(x) \vee A(a) \Leftrightarrow^* \exists x \neg B(x) \vee A(a) \Leftrightarrow^* \neg B(b) \vee A(a)$

$\neg\exists x(B(x) \to A(x)) \Leftrightarrow^* \neg\exists x(\neg B(x) \vee A(x)) \Leftrightarrow^* \forall x(B(x) \mathbin{\&} \neg A(x)) \Leftrightarrow^* B(x) \mathbin{\&} \neg A(x) \Leftrightarrow^* \{B(x), \neg A(x)\}$.

Докажем неудовлетворимость полученного множества предложений $\{\neg B(b) \vee A(a), B(x), \neg A(x)\}$.



Следовательно, логическое следование $\forall x B(x) \to A(x) \Rightarrow \exists x(B(x) \to A(x))$ имеет место.

Случай $\exists x(B(x) \to A(x)) \Rightarrow \forall x B(x) \to A(a)$:

$\exists x(B(x) \to A(x)) \Leftrightarrow^* \exists x(\neg B(x) \vee A(x)) \Leftrightarrow^* \neg B(c) \vee A(c)$

$\neg(\forall x B(x) \to A(a)) \Leftrightarrow^* \neg(\neg\forall x B(x) \vee A(a)) \Leftrightarrow^* \forall x B(x) \mathbin{\&} \neg A(a) \Leftrightarrow^* B(x) \mathbin{\&} \neg A(a) \Leftrightarrow^* \{B(x), \neg A(a)\}$

Проверим неудовлетворимость полученного множества предложений $\{\neg B(c) \vee A(c), B(x), \neg A(a)\}$.

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\neg B(c) \vee A(c)} & \underline{B(x)} \;\big|^{x}_{c} & \underline{\neg A(a)} \\
\multicolumn{2}{c}{\underline{A(c)}} &
\end{array}$$

Никакие другие пары предложений не содержат атомарных формул, которые можно унифицировать (так как ни $A(a)$, ни $A(c)$ не содержат переменных, вместо которых можно было бы подставить терм).

Итак, логическое следование $\exists x(B(x) \to A(x)) \Rightarrow \forall x B(x) \to A(x)$ не имеет места, и исходная формула не общезначима.

A.VI.4. Примеры доказательства правильности рассуждений методом резолюций для исчисления предикатов.

Рассмотрим примеры доказательства правильности рассуждений, которые были формализованы в разделе V.3, построив дерево опровержения методом резолюций для исчисления предикатов.

1. *Все студенты хоть иногда посещают занятия. Вася ни разу не был на занятиях. Значит, Вася – не студент.*

Это рассуждение формализовано в виде логического следования

$$\forall x\ (S(x) \to L(x)) \quad \neg L(V) \quad \Rightarrow \quad \neg S(V),$$

где $S(x) \Leftrightarrow$ „x – студент“, $L(x) \Leftrightarrow$ „x хоть иногда посещает занятия“, V — константа Вася.

$\forall x\ (S(x) \to L(x)) \Leftrightarrow^{*} \forall x\ (\neg S(x) \vee L(x)) \Leftrightarrow^{*} \neg S(x) \vee L(x)$

$\neg L(V)$

$\neg\neg S(V) \Leftrightarrow^{*} S(V)$

$$\begin{array}{ccc}
\underline{\neg S(x) \vee L(x)} & \underline{\neg L(V)} \;\big|^{x}_{V} & \underline{S(V)} \\
\multicolumn{2}{c}{\underline{\neg S(V)}} & \\
\multicolumn{3}{c}{\underline{nill}}
\end{array}$$

2. *У него только гениальные идеи. Некоторые его идеи неверны. Ни что неверное не может быть гениальным. Значит, некоторые его идеи просто бредовы.*

Это рассуждение формализовано в виде логического следования

$$\forall x\ (I(x) \to G(x)) \quad \exists x\ (I(x)\ \&\ W(x)) \quad \neg\exists x\ (W(x)\ \&\ G(x)) \Rightarrow$$

$$\exists x\ (I(x)\ \&\ B(x)),$$

где $I(x) \Leftrightarrow$ „x – его идея“, $G(x) \Leftrightarrow$ „x гениально“, $W(x) \Leftrightarrow$ „x неверно“, $B(x) \Leftrightarrow$ „x бредово“.

$\forall x\ (I(x) \to G(x)) \Leftrightarrow^* \forall x\ (\neg I(x) \vee G(x)) \Leftrightarrow^* \neg I(x) \vee G(x)$

$\exists x\ (I(x)\ \&\ W(x)) \Leftrightarrow^* I(a)\ \&\ W(a) \Leftrightarrow^* \{I(a), W(a)\}$

$\neg\exists x\ (W(x)\ \&\ G(x)) \Leftrightarrow^* \forall x\ (\neg W(x) \vee \neg G(x)) \Leftrightarrow^* \neg W(x) \vee \neg G(x)$

$\neg\exists x\ (I(x)\ \&\ B(x)) \Leftrightarrow^* \forall x\ (\neg I(x) \vee \neg B(x)) \Leftrightarrow^* \neg I(x) \vee \neg B(x)$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\underline{\neg I(x)\vee G(x)} \arrow[dr, no head] & & \underline{I(a)} \arrow[dl, no head, "\big|^x_a"'] & \underline{W(a)} \arrow[dr, no head] & & \underline{W(x)\vee\neg G(x)} \arrow[dl, no head, "\big|^x_a"] & \underline{\neg I(x)\vee\neg B(x)} \\
& \underline{G(a)} \arrow[drr, no head] & & & \underline{\neg G(a)} \arrow[dl, no head] & & \\
& & & \underline{nill} & & &
\end{tikzcd}$$

Замечание. Несложно видеть, что заключение логического следования не участвует в построении дерева опровержения. Это означает, что посылки приводят к противоречию. А, как известно, из лжи следует что угодно.

A.VI.5. Упражнения.

I. Пусть A и B – формулы исчисления предикатов. Для заданных секвенций

а) проверить выводимость в секвенциальном исчислении предикатов. Если секвенция не выводима при произвольных формулах A и B, то указать, какая из двух импликаций (если рассматривать эквивалентность как конъюнкцию двух импликаций) общезначима, а какая имеет место при ограничениях на формулы A и B. Доказать необщезначимость той импликации, которая не выводима (если такая есть).

б) проверить соответствующие логические следования методом резолюций для исчисления предикатов, заменив обозначения A и B на $A(x)$ и $B(x)$ соответственно.

1. $\vdash\ (B \to \exists x A) \leftrightarrow \exists x (B \to A)$

2. $\vdash\ (\exists x A \to B) \leftrightarrow \forall x(A \to B)$

3. $\vdash\ (B \to \forall x A) \leftrightarrow \forall x(B \to A)$

4. $\vdash\ (\forall x A \to B) \leftrightarrow \exists x(A \to B)$

5. $\vdash\ (B \vee \exists x A) \leftrightarrow \exists x(B \vee A)$

6. $\vdash\ (\forall x A \vee B) \leftrightarrow \forall x(A \vee B)$

7. $\vdash\ (B \vee \forall x A) \leftrightarrow \forall x(B \vee A)$

8. $\vdash\ (\exists x A \mathbin{\&} B) \leftrightarrow \exists x(A \mathbin{\&} B)$

9. $\vdash\ (B\&\forall x A) \leftrightarrow \forall x(B\&A)$

10. $\vdash\ (\forall x A \vee \forall x B) \leftrightarrow \forall x(A \vee B)$

11. $\vdash\ (\exists x A \mathbin{\&} \exists x B) \leftrightarrow \exists x(A \mathbin{\&} B)$

12. $\vdash\ \exists x(B \to C) \leftrightarrow (\forall x B \to \exists x C)$

13. $\vdash\ \forall x(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\forall x A \leftrightarrow \forall x B)$

14. $\vdash\ \forall x(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\exists x A \leftrightarrow \exists x B)$

15. $\vdash\ \exists x(B \to C) \leftrightarrow (\forall x B \to \exists x C)$

16. $\vdash\ \forall x A \to \forall x B \leftrightarrow \forall x(A \to B)$

II. Введя необходимые элементарные свойства и отношения формализовать следующие рассуждения и проверить их справедливость

а) построив вывод в секвенциальном исчислении предикатов;

б) методом резолюций для исчисления предикатов.

1. Ни один банкир не любит должников. Все, не погасившие в срок кредит в банке — должники. Следовательно, ни один банкир не любит никого, кто не погасил в срок кредит в банке.

2. Всякое рациональное число есть вещественное число. Существуют рациональные числа. Следовательно, существуют действительные числа.

3. Все рациональные числа являются вещественными. Некоторые рациональные числа – целые числа. Следовательно, некоторые вещественные числа являются целыми.

4. Все первокурсники встречаются со всеми второкурсниками. Ни один первокурсник не встречается ни с одним студентов предпоследнего курса. Существуют второкурсники. Следовательно, ни один второкурсник не является студентом предпоследнего курса.

5. Некоторые первокурсники боятся всех преподавателей. Ни один первокурсник не боится никого из второкурсников. Следовательно, ни один преподаватель не является второкурсником.

6. Некоторым нравится Пётр. Некоторые не любят никого, кому нравится Пётр. Следовательно, некоторых любят не все.

7. Каждый любит сам себя. Значит, кто-то кого-нибудь любит.

8. Перья есть только у птиц. Ни одно млекопитающее не является птицей. Значит, все млекопитающие без перьев.

9. Имеются прилежные студенты. Ни один студент не лишен способностей. Значит, некоторые студенты, не лишенные способностей, прилежны.

10. У неё только преданные друзья. Некоторые из её друзей – лицемеры. Ни один лицемер не может быть преданным. Значит, все её друзья – проходимцы.

11. Ничто плодотворное не легко. Некоторые легкие вещи общедоступны. Значит, некоторые общедоступные вещи не плодотворны.

12. Если бы кто-нибудь мог решить эту задачу, то и какой-нибудь математик мог бы. Сергей – математик, а не может её решить. Значит, проблема неразрешима.

13. Всякий математик может решить эту задачу, если кто-нибудь может её решить. Сергей – математик, а не может её решить. Значит, задача неразрешима.

14. Всякий, кто может решить эту задачу – математик. Ни один математик не может её решить. Значит, эта задача неразрешима.

15. Если какое-нибудь из чисел, лежащих строго между 1 и 101 делит 101, то простое число, меньшее 11, делит 101. Ни одно простое число, меньшее 11, не делит 101. Значит, ни одно число между 1 и 101 не делит 101.

16. Тот, кто распускает этот слух, должен быть ловким и беспринципным. Игорь не ловок, а Тарас не лишен принципов. Значит, ни Игорь, ни Тарас не распускают этот слух.

17. Никто не поймет этого сообщения, если только кто-нибудь не разгадает код. Значит, есть кто-то, кто может понять это сообщение, если только разгадает код.

18. Человек — это животное. Значит, голова человека является головой животного.

19. Отношение "быть отцом"антисимметрично. Значит, ни один человек не является собственным отцом.

20. Взрослых пускали только с детьми. Меня пустили. Значит, я либо ребёнок, либо пришел с ребёнком.

21. Все любят Женю. Женя любит кого-то. Значит, есть два человека, которые любят друг руга.

22. Только глупец способен на это. Я не способен. Значит, я не глупец.

23. Никто не сможет сдать этот экзамен, только если кто-нибудь не сделает хорошую шпаргалку. Я экзамен сдал. Значит, кто-то сделал та-

кую шпаргалку.

24. У разгильдяев есть двойки. Ни один отличник не имеет двоек. Значит, все отличники прилежны.

Список литературы

[1] Клини С.К. Математическая логика. М.: Мир, 1973. 480 с.

[2] Косовский Н.К. Элементы математической логики и её приложения к теории субрекурсивных алгоритмов. Л.: Изд. Ленинградского университета, 1981. 192 с.

[3] Нильсон Н. Искусственный интеллект. М.: Мир, 1973. 270 с.

[4] Робинсон Дж. Машинно ориентированная логика, основанная на методе резолюций // Кибернетический сборник, новая серия. 1970. Вып. 7. С. 194–218.

[5] Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука. 1986. 384 с.