Оглавление

Глава 1

Вероятностное пространство

Вероятностное пространство: $\{\,\Omega = \{\,\omega\,\}, \mathscr{F} = \{\,A, B, C, \dots\,\}, \mathsf{P}(A)\,\}$.

Ω — множество *элементарных исходов*.

$\mathscr{F}$ — σ-алгебра *событий*. В $\mathscr{F}$ входит Ω — *достоверное* событие; вместе с событиями $A_1, \dots, A_k$ входит $\bigcup A_k$; вместе с A входит и $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

P — *вероятностная мера*:

1. $\mathsf{P}(A) \geq 0$;
2. $\mathsf{P}(\Omega) = 1$;
3. $\mathsf{P}(\bigcup A_k) = \sum \mathsf{P}(A_k)$ для несовместных событий.

Свойства.

1. $\mathsf{P}(A \cup \overline{A}) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\overline{A}) \implies (\overline{A}) = 1 - \mathsf{P}(A)$;
2. Пусть $A \supset B$.
$$A = B \cup (A \setminus B) \geq 0 \implies P(A) \geq P(B)$$
3. $\mathsf{P}(\emptyset) = 1 - \mathsf{P}(\Omega) = 0$;
4. Для двух произвольных событий $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(AB)$
$$\mathsf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathsf{P}(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} \mathsf{P}(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n+1} \mathsf{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$
5. Отсюда следует, что $\mathsf{P}(A \cup B) \leq \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B)$
$$P(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i \mathsf{P}(A_i)$$
6. Пусть $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, и пусть $A = \bigcup A_i$. Тогда
$$\mathsf{P}(A) = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}(A_n)$$
7. Пусть $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ и $B = \bigcap B_i$. Тогда
$$\mathsf{P}(B) = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}(B_n)$$

1.1. Полная группа событий

Определение 1. Говорят, что $A_1, A_2, \dots$ — *полная группа несовместных событий*, если их объединение представляет собой достоверное событие.

Свойство. Если $A_1, A_2, \ldots$ — конечный или счётный набор событий, образующих полную группу несовместных событий, то

$$\sum \mathtt{P}(A_i) = 1$$

Также верно *неравенство Бонферрони*:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathtt{P}(A_k) - \sum_{1<k<l<n} \mathtt{P}(A_k A_l) \leq \mathtt{P}(\sum_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathtt{P}(A_k)$$

1.2. Условные вероятности

Требуется найти вероятность события A при условии B.

Пусть событие B уже произошло. Тогда вероятности остальных событий переопределились (подробнее см. конспект). Тогда вероятность A имеет вид:

$$\mathtt{P}_B(A) = \mathtt{P}(A\overline{B}) \cdot 0 + \frac{\mathtt{P}(AB)}{\mathtt{P}(B)} = \frac{\mathtt{P}(AB)}{\mathtt{P}(B)}$$

Определение 2. Пусть A, B — события, $P(B) > 0$. *Условной вероятностью* $\mathtt{P}(A|B)$ называется отношение

$$\mathtt{P}(A|B) = \frac{\mathtt{P}(AB)}{\mathtt{P}(B)}$$

Проверим, что условная вероятность действительно является вероятностью:

Доказательство.

1. Очевидно, что условные вероятности неотрицательны.
2. $$\mathtt{P}(\Omega|B) = \frac{\mathtt{P}(\Omega B)}{\mathtt{P}(B)} = \frac{\mathtt{P}(B)}{\mathtt{P}(B)} = 1$$
3. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — набор попарно несовместных событий.

$$\mathtt{P}(\bigcup_k A_k|B) = \frac{\mathtt{P}\big(B \cap (\bigcup_k A_k)\big)}{\mathtt{P}(B)} = \frac{\mathtt{P}\big(\bigcup_k A_k B\big)}{\mathtt{P}(B)} = \frac{\sum_k \mathtt{P}(A_k B)}{\mathtt{P}(B)} = \sum_k \mathtt{P}(A_k|B)$$

□