# Оглавление

# Часть I

# Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

# Глава 1

# Уравнения первого порядка, разрешённые относительно производной

## 1.1. Основные понятися и результаты

### 1.1.1. Объект изучения

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, разрешённое относительно проиводной:

$$\frac{\mathrm{d}\, y(x)}{\mathrm{d}\, x} = f\big(x, y(x)\big), \qquad \text{или в краткой записи } y' = f(x, y) \tag{1.1}$$

где $x$ – это независимая переменная, $y = y(x)$ – искомая функция, а $f(x, y)$, если не оговорено иное, – вещественная функция, определённая и непрерывная на множестве $\widetilde{G} = G \cup \widehat{G}$, где:

- $G \subset \mathbb{R}^2$ – область;
- $\widehat{G} \subseteq \partial G$ – (возможно пустое) множество, на котором $f(x, y)$ непрерывна или может быть доопределена с сохранением непрерывности.

**Обозначение.** $G^* \coloneqq \partial G \setminus \widehat{G}$

### 1.1.2. Решения дифференциального уравнения

**Обозначение.** Символ $\langle$ подразумевает одну из скобок: ( или [, а символ $\rangle$ – скобку ) или ].

На вещественной оси рассмотрим непустое связное множество, не являющееся точкой. Это будет промежуток $\langle a, b\rangle$.

**Определение 1.** Функция $y = \varphi(x)$, заданная на промежутке $\langle a, b\rangle$ называется *решением дифференциального уравнения* (1.1), если для любого $x \in \langle a, b\rangle$ выполняются следующие три условия:

1. функция $\varphi(x)$ дифференцируема;
2. точка $\big(x, \varphi(x)\big) \in \widetilde{G}$;
3. $\varphi'(x) = f\big(x, \varphi(x)\big)$.

**Замечание.** График решения по определению не может состоять из одной точки.

**Замечание.** Первые два условия являются вспомогательными и позволяют записать третье.

**Замечание.** Любое решение является функцией не просто дифференцируемой, а гладкой, т. е.

$$\varphi(x) \in \mathcal{C}^1\big(\langle a, b\rangle\big)$$

**Доказательство.** Функция $\varphi(x)$ дифференцируема (по условию 1). Значит, она непрерывна в любой точке $x \in \langle a, b \rangle$
Значит, правая часть тождества из условия 3 непрерывна (как композиция непрерывных функций)
Значит, и левая часть непрерывна
При этом, если решение задано на отрезке $[a, b]$, то на его концах существуют и непрерывны односторонние производные $\square$

**Замечание.** Поскольку решение – гладкая функция, то через любую точку $\big(x, \varphi(x)\big)$ плоскости можно провести касательную под таким углом $\alpha(x)$ с осью абсцисс, что $\operatorname{tg}\alpha(x) = f\big(x, \varphi(x)\big) = \varphi'(x)$
Поэтому графики решений, имеющие общую точку соприкасаются в ней ("пересекаются под нулевым углом")

**Определение 2.** Решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1), заданное на промежутке $\langle a, b \rangle$ будем называть:

- внутренним, если $\big(x, \varphi(x)\big) \in G$ для любого $x \in \langle a, b \rangle$;
- граничным, если $\big(x, \varphi(x)\big) \in \widehat{G}$ для любого $x \in \langle a, b \rangle$;
- смешанным, если найдутся такие $x_1, x_2 \in \langle a, b \rangle$, что точка $\big(x_1, \varphi(x_1)\big) \in G$, а точка $\big(x_2 \varphi(x_2)\big) \in \widehat{G}$.

**Лемма 1** (о записи решения в интегральном виде)**.** Для того чтобы определённая на промежутке $\langle a, b \rangle$ функция $y = \varphi(x)$ была решением дифференциального уравнения (1.1), необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(x)$ была непрерывна на $\langle a, b \rangle$, её график лежал в $\widetilde{G}$ и при некотором $x_0 \in \langle a, b \rangle$ выполнялос тождество

$$\varphi(x) \overset{\langle a,b \rangle}{\equiv} \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big) \, \mathrm{d}\, s \tag{1.2}$$

**Доказательство.**

- Необходимость
  Пусть функция $y = \varphi(x)$ на $\langle a, b \rangle$ является решением уравнения (1.1)
  Тогда, по определению, справедливо тождество $f\big(x, \varphi(x)\big) \overset{\langle a,b \rangle}{\equiv} \varphi'(x)$
  Интегрируя его при любом фиксированном $x_0 \in \langle a, b \rangle$ по $s$ от $x$ до $x_0$ и перенося $\varphi(x_0)$ в правую часть, получаем тождество (1.2):
  $$\int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big) \, \mathrm{d}\, s \overset{\langle a,b \rangle}{\equiv} \int_{x_0}^{x} \varphi'(s) \, \mathrm{d}\, s = \varphi(x) - \varphi(x_0)$$
- Достаточность
  Пусть непрерывная на промежутке $\langle a, b \rangle$ функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет тождеству (1.2)
  Тогда $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на $\langle a, b \rangle$ (поскольку по (1.2) она равна интегралу с переменным верхиним пределом от композиции непрерывных функций)
  Дифференцируя (1.2), заключаем, что выполняется и третье условие из определения решения

$\square$

### 1.1.3. Задача Коши

**Задача 1.** Для любой точки $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ задача Коши с начальными данными $x_0, y_0$ заключается в том, чтобы найти все решения $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1), заданные на промежутках $\langle a, b \rangle \ni x_0$, в том числе внутренние, граничные или смешанные, такие что $\varphi(x_0) = y_0$
При этом говорят, что задача Коши поставлена в точке $(x_0, y_0)$, а найденные решения – это решения поставленной задачи Коши

**Определение 3.** Решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными анными $x_0, y_0$ существует, если существует такое решение $y = \varphi(x)$, определённое на промежутке $\langle a, b \rangle \ni x_0$, что $\varphi(x_0) = y_0$

**Определение 4.** Внутреннее (граничное, смешанное) решение задачи Коши с начальными данными

$x_0, y_0$ существует, если точка $(x_0, y_0) \in G(\widehat{G}, \widetilde{G})$ и найдутся промежуток $\langle a, b\rangle \ni x_0$ и определённое на нём внутреннее (граничное, смешанное) решение $y = \varphi(x)$ такие, что $\varphi(x_0) = y_0$

**Определение 5.** Задачу Коши, поставленную в точке $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ будем называть

- внутренней, если $(x_0, y_0) \in G$
- граничной, если $(x_0, y_0) \in \widehat{G}$

### 1.1.4. О существовании решения внутренней задачи Коши

**Напоминание.** Компакт в $\mathbb{R}^n$ – замкнутое ограниченное множество

**Алгоритм (Пеано).** Очевидно, что для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ найдутся такие константы $a, b > 0$, что прямоугольник

$$\overline{R} = \{\, (x, y) : |\, x - x_0| \leq a,\ \ |y - y_0| \leq b \,\}$$

являющийся компактом, лежит в области $G$

Сразу исключим из рассмотрения простейший случай, когда $f(x, y) \equiv 0$ на $\overline{R}$, в котором уравнение (1.1) имеет решение $y(x) \equiv y_0$ при $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$

По второй теореме Вейерштрасса, $f(x, y)$ достигает своего максимума на $\overline{R}$. Положим

$$M := \max_{(x,y)\in\overline{R}} |f(x, y)| > 0, \qquad h = \min\left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \quad (h > 0)$$

**Определение 6.** Отрезок $\overline{P_h}(x_0, y_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$ называется отрезком Пеано, постоенным для точки $(x_0, y_0) \in G$

Отрезки $\overline{P_h^+}(x_0, y_0) = [x_0, x_0 + h]$ и $\overline{P_h^-} = [x_0 - h, x_0]$ называются соответственно правым и левым отрезками Пеано

**Теорема 1 (Пеано, о существовании внутреннего решения).** Пусть правая часть уравнения (1.1) непрерывна в области $G$.

Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ и для любого отрезка Пеано $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ существует по крайней мере одно решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными $x_0, y_0$, определённое на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

**Доказательство.** Будет доказано в §2 □

### 1.1.5. Продолжимость решения

**Определение 7.** Пусть $y = \varphi(x)$ – решение уравнения (1.1) на $\langle a, b\rangle$. Если этот промежуток произвольным образом сузить, то на новом промежутке функция $y = \varphi(x)$ останется решением, которое называют сужением исходного решения

**Определение 8.** Решение уравнения (1.1), заданное на промежутке $\langle a, b)$ продолжимо вправо в точку $b$ или на границу, если найдётся такое решение $y = \widetilde{\varphi}(x)$, определённое на промежутке $\langle a, b]$, что сужение $\widetilde{\varphi}(x)$ на $\langle a, b)$ совпадает с $\varphi(x)$

**Определение 9.** Решение уравнения (1.1), заданное на промежутке $\langle a, b\rangle$ продолжимо вправо за точку $b$ или за границу, если найдутся такие $\widetilde{b} > b$ и решение $y = \widetilde{\varphi}(x)$, определённое на промежутке $\left\langle a, \widetilde{b}\right\rangle$, что сужение $\widetilde{\varphi}(x)$ на $\langle a, b\rangle$ совпадает с $\varphi(x)$

**Теорема 2 (о продолжимости решения на границу).** $\varphi(x)$ – решение уравнения (1.1) на промежутке $\langle a, b)$, $\quad b < +\infty$

Для того чтобы это решение было продолжимо вправо в точку $b$ необходимо и достаточно, чтобы существовали последовательность $\{ x_k \}_{k=1}^{\infty}$ и число $\eta \in \mathbb{R}^1$ такие, что

$$\forall k \quad \begin{cases} x_k \in \langle a, b) \\ \Big(x_k, \varphi(x_k)\Big) \xrightarrow[k\to\infty]{} (b, \eta) \in \widetilde{G} \end{cases} \tag{1.3}$$

Аналогично формулируется условие для продолжиомсти влево

**Доказательство.**

- Достаточность
  Пусть выполняется условие (1.3)

  **Утверждение 1.** В силу того, что функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}$, найдутся такие $c > 0$ и $M \geq 1$, что

  $$\forall (x, y) \in \widetilde{G} \cap \overline{B_c}(b, \eta) \quad |f(x, y)| \leq M$$

  **Доказательство.**

  – $(b, \eta) \in G$, т. е. является внутренней
    Тогда существует $\overline{B_c}(b, \eta) \subset G$ – компакт, и на нём функция ограничена

  – $(b, \eta) \subset \widetilde{G}$ и "вблизи" находятся точки "плохой" границы
    Приведём рассуждение **от противного**:
    Допустим, $|f(b, \eta)| = M - 1$ и существует последовательность $c_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ $(c_m > 0)$ и последовательность точек $(x_m, y_m) \in \widetilde{G} \cap \overline{B_{c_m}}(b, \eta)$ такие, что $|f(x_m, y_m)| > M$
    Тогда $(x_m, y_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} (b, \eta)$, а это значит, что функция $|f(x, y)|$ терпит разрыв в точке $(b, \eta)$, так как $|f(x_m, y_m)| - |f(b, \eta)| > 1$ для любого $m$

  $\square$

  Докажем, что существует $\lim\limits_{x\to b-} \varphi(x)$ и он равен $\eta$:
  Для этого покажем, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta \in \langle a, b)$, что

  $$\forall x \in [\delta, b) : |\varphi(x) - \eta| < \varepsilon \tag{1.4}$$

  Зафиксируем произвольный $0 < \varepsilon \leq c$
  Тогда $|f(x, y)| \leq M$ для любой точки $(x, y) \in \widetilde{G} \cap \overline{B_\varepsilon}(b, \eta)$ и по условию (1.3) найдётся такой номер $m$, что выполняются равентсва

  $$b - x_m > \frac{\varepsilon}{2M}, \qquad |\varphi(x_m) - \eta| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.5}$$

  По формуле Ньютона-Лейбница для всякого $x \in [x_m, b)$ имеем:

  $$|\varphi(x) - \varphi(x_m)| = \left| \int_{x_m}^{x} \varphi'(s)\,\mathrm{d}\,s \right| = \left| \int_{x_m}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big)\,\mathrm{d}\,s \right| \leq \int_{x_m}^{x} \left|f\big(s, \varphi(s)\big)\right| \mathrm{d}\,s \leq$$
  $$\leq M(x - x_m) < M(b - x_m) \underset{(1.5)_1}{<} \frac{\varepsilon}{2} \qquad (x_m \leq x < b)$$

  Поэтому

  $$|\varphi(x) - \eta| \leq |\varphi(x) - \varphi(x_m)| + |\varphi(x_m) - \eta| \underset{(1.5)_2}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

  Неравенство (1.4) верно при $\delta = x_m$, а значит, $\varphi(x) \xrightarrow[x\to b^{-0}]{} \eta$
  Доопределим функцию $y = \varphi(x)$ в точке $b$, положив $\varphi(b) = \eta$
  Согласно (1.2) $\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big)\,\mathrm{d}\,s$ для любых $x_0, x \in \langle a, b)$
  В этом тождестве можно перейти к пределу при $x \to b^{-0}$, получая равенство $\eta = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big)\,\mathrm{d}\,s$, так как по условию точка $(b, \eta) \in \widetilde{G}$, а занчит, функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в этой точке

В результате функция

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \langle a, b) \\ \eta & x = b \end{cases}$$

по определению является продолжением решения $y = \varphi(x)$ на $\langle a, b]$

- Необходимость
Допустим, что на промежутке $\langle a, b]$ существует решение $y = \widetilde{\varphi}(x)$ такое, что $\widetilde{\varphi}(x) \equiv \varphi(x)$ на $\langle a, b)$
Поскольку $\widetilde{\varphi}(x)$ непрерывна, то $\widetilde{\varphi}(x) = \eta = \lim\limits_{x \to b} \widetilde{\varphi}(x)$
Но тогда $\eta = \lim\limits_{x \to b^-} \varphi(x)$ и требуемая послеовательность точек $x_k$ существует, причём по порделению решения точка $(b, \eta) \in \widetilde{G}$

□

**Лемма 2** (о продолжимости решения за границу отрезка)**.** Пусть решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1) определено на промежутке $\langle a, b]$ и точка $\big(b, \varphi(b)\big) \in G$
Тогда это решение продолжимо вправо за точку $b$ на полуотрезок Пеано, построенный для точки $\big(b, \varphi(b)\big)$

**Доказательство.** По теореме Пеано (теор. 1) на отрезке Пеано $\overline{P_h}\big(b, \varphi(b)\big)$ существует внутреннее решение $y = \psi(x)$ задачи Коши с начальными данными $\big(b, \varphi(b)\big)$
Тогда функция $y = \widetilde{\varphi}(x)$, где

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \langle a, b] \\ \psi(x), & x \in [b, b + h] \end{cases}$$

по определению является решением уравнения (1.1) на $\langle a, b + h]$
В самом деле, в точке $b$ производная функции $\widetilde{\varphi}(x)$ существует, так как

$$\widetilde{\varphi}'_-(b) = \varphi'_-(b) = f\big(b, \varphi(b)\big) = \psi'_+(b) = \widetilde{\psi}'_+(b)$$

А выполнение других условий из определения решения для $\widetilde{\varphi}(x)$ очевидно □

Утверждение о продолжимости решения, определённого на промежутке $[a, b\rangle$, влево за точку $a$ формулируется аналогично

**Следствие.** Если решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1) определено на промежутке $\langle a, b]$ и не продолжимо вправо за точку $b$, то $\big(b, \varphi(b)\big) \in \widehat{G}$
А если оно определено на промежутке $[a, b\rangle$ и не продолжимо влево за точку $a$, то $\big(a, \varphi(a)\big) \in \widehat{G}$

**Доказательство.** Предположение противного противоречит лемме □

Из теоремы о продолжимости решения на границу и последней леммы вытекает следующее утверждение:

**Лемма 3** (о продолжимости решения на границу интервала)**.** Пусть решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1) определено на промежутке $\langle a, b)$, существует число $\eta = \lim\limits_{x \to b^-} \varphi(x)$ и точка $(b, \eta) \in G$
Тогда это решение продолжимо вправо за точку $b$

Утверждение о продолжимости решения, заданного на $(a, b\rangle$, влево за точку $a$ формулируется аналогично

### 1.1.6. Полное решение, интегральная кривая

**Определение 10.** Решение называется полным, или максимально продолженным, или непродолжимым в случае, если его нельзя продолжить ни влево, ни вправо, или что то же самое, когда оно не является сужением никакого другого решения

**Определение 11.** Внутреннее (граничное) решение называется полным, если его нельзя продолжить ни влево, ни вправо так, чтобы оно осталось внутренним (граничным)

**Определение 12.** Промежуток, на котором определено полное решение, бедм называть максимальным интервалом существования и обозначим $I_{\max}$, а если для полного решения была поставлена задача Коши с начальными данными $x_0, y_0$, то $I(x_0, y_0)$

Из леммы о продолжимости решения за границу отрезка с очевидностью вытекает следующий факт:

**Утверждение 2.** Максимальный интервал существования любого внутреннего решения – это интервал

**Теорема 3** (о существовании полного решения). Любое решение уравнения (1.1) может быть продолжено до полного решения

**Другая формулировка.** Любое решение уравнения (1.1), не являющееся полным, является сужением некоторого полного решения

**Доказательство.** Приведено в дополнении $1_4$ □

**Определение 13.** График полного решения будем называть интегральной кривой уравнения (1.1)
Дуга интегральной кривой – это график решения, заданного на любом промежутке $\langle a, b\rangle \subsetneq I_{\max}$

Таким образом, интегральные кривые уравнения (1.1) лежат в $\widetilde{G}$, не могут иметь вертикальных касательных и не могут пересекаться под ненулевым углом, т. е. могут только соприкасаться

**Теорема 4** (о поведении интегральной кривой полного внутреннего решения). Предположим, что внутреннее решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1) определено на промежутке $\langle a, \beta)$ и не продолжимо вправо. Тогда для любого компакта $\overline{H} \subset G$ найдётся такое число $\delta \in \langle a, \beta)$, что для всякого $x \in (\delta, \beta)$ точка $\big(x, \varphi(x)\big) \in G \setminus \overline{H}$

**Другая формулировка.** При стремлении аргумента полного внутреннего решения к границе максимального интервала существования дуга интегральной кривой покидает любой компакт, лежащий в области $G$, и никогда в него не возвращается

**Доказательство.** Переходя в условиях теоремы на язык последовательностей, докажем, что для любого компакта $\overline{H} \subset G$ и для любой последовательности $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \beta$, $x_k \in \langle a, \beta)$ существует $K > 0$ такое, что $\big(x_k, \varphi(x_k)\big) \in G \setminus \overline{H}$ при всех $k > K$
Рассуждая **от противного**, допустим, что существуют компакт $\overline{H}_* \subset G$ и последовательность $x_k \to \beta$, $x_k \in \langle a, \beta)$ такие, что $\big(x_k, \varphi(x_k)\big) \in \overline{H}_*$ для $k = 1, 2, \ldots$
Отсюда сразу же вытекает, что $\beta < +\infty$, так как в противном случае найдётся такой индекс $k^*$, что точка $\big(x_{k^*}, \varphi(x_{k^*})\big)$ будет лежать вне компакта в силу его ограниченности
НУО считаем, что последовательность $x_k$ – сходящаяся (иначе перейдём к сходящейся подпоследовательности)
Пусть $(\beta, \eta) = \lim\limits_{k\to\infty} \big(x_k, \varphi(x_k)\big)$
Тогда предельная точка $(\beta, \eta)$ также принадлежит компакту $\overline{H}_*$, а значит, выполняются условия теоремы о продолжимости решения (теор. 2), согласно которой решение $y = \varphi(x)$ продолжимо на промежуток $\langle a, \beta]$ – $\lightning$ с условием теоремы □

Аналогичный результат имеет место для внутреннего решения, определённого на $(\alpha, b\rangle$ и непродолжимого влево

### 1.1.7. Вопросы, связанные с единственностью решения

**Определение 14.** Точка $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ называется точкой неединственности, если существуют такие решения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными $x_0, y_0$, определённые на промежутке $\langle a, b\rangle$, и такая последовательность $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$, $x_k \in \langle a, b\rangle$, что $\varphi_1(x_k) \neq \varphi_2(x_k) \quad (k = 1, 2, \ldots)$
В противном случае точка $(x_0, y_0)$ называется точкой единственности

**Замечание.** Любая точка граничного множества $\widehat{G}$, в которой решение задачи Коши отсутствует, по определению будет точкой единственности

**Определение 15.** Точка $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ называется точкой неединственности, если найдутся такие решения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными $x_0, y_0$, определённые на $\langle a, b\rangle$, что

$$\forall(\alpha, \beta) \ni x_0 \quad \exists\, x^* \in (\alpha, \beta) \cap \langle a, b\rangle : \quad \varphi_1(x^*) \neq \varphi_2(x^*)$$

**Утверждение 3.** Определения точки неединственности равносильны

**Доказательство.**

- опр. 14 $\implies$ опр. 15
  Из опр. 14 вытекает, что для всякого интервала $(\alpha, \beta) \ni x_0$ найдётся такой индекс $k^*$, что $x_{k^*} \in (\alpha, \beta)$, поэтому в опр. 15 $x^* = x_{k^*}$
- опр. 15 $\implies$ опр. 14
  Можно выбрать последовательность интервалов $(\alpha_k, \beta_k)$, которая с ростом $k$ стягивается в точку $x_0$. Тогда по опр. 15 для всякого $k$ найдётся $x_k^* \in (\alpha_k, \beta_k) \cap \langle a, b\rangle$, что $\varphi_1(x_k^*) \neq \varphi_2(x_k^*)$, т. е. $x_k^*$ – последовательность из опр. 14

□

Отрицая опр. 15, получаем "прямое" определение точки единственности:

**Определение 16.** Точку $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ будем называть точкой единственности в следующих случаях:

1. задача Коши уравнения (1.1) с начальными данными $x_0, y_0$ не имеет решений
2. для любых двух решений $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ этой задачи Коши, определённых на некотором промежутке $\langle a, b\rangle$, найдётся интервал $(\alpha, \beta) \ni x_0$ такой, что

$$\forall x \in (\alpha, \beta) \cap \langle a, b\rangle \quad \varphi_1(x) = \varphi_2(x)$$

**Примечание.** Здесь надо иметь в виду следующее:

- Если $(x_0, y_0) \in G$:
  - Случай 1 не может возникнуть
  - По теореме Пеано (теор. 1) все решения задачи Коши определены на отрезке Пеано $[x_0 - h, x_0 + h]$ $(h > 0)$
    Поэтому в определении точки единственности для любых двух решений достаточно требовать наличия интервала $(\alpha, \beta) \ni x_0$, на котором они совпадают
- Если $(x_0, y_0) \in \widehat{G}$ и, например, решение нельзя продолжить за точку $x_0$ вправо, то в определнии для любых двух решений задач Коши при их наличии надо потребовать существования промежутка $(\alpha, x_0]$, на котором они совпадают

**Определение 17.** Решение задачи Коши уравнения (1.1), поставленной в точке $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ называется:

- неединственным, если $(x_0, y_0)$ – точка неединственности
- единственным в точке, если оно сущетвует и $(x_0, y_0)$ – точка единственности

**Определение 18.** Решение внутренней задачи Коши уравнения (1.1), поставленной в точке $(x_0, y_0)$ называется локально единственным, если существует интервал $(\alpha, \beta) \ni x_0$ такой, что все решения этой задачи продолжимы на $(\alpha, \beta)$ и для любых двух её решений $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, при необходимости произвольным образом продолженных на $(\alpha, \beta)$, имеем $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$ на $(\alpha, \beta)$

**Теорема 5** (о локальной единственности решения внутренней задачи Коши)**.** Пусть $(x_0, y_0) \in G$ – это точка единственности
Тогда решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными $x_0, y_0$ является локально единственным

**Доказательство.** Будет доказано позже $\square$

**Следствие.** Из этой теоремы вытекает, что для внутренней задачи Коши понятия единственности решения в точке и локальной единственности равносильны

### 1.1.8. Достаточные условия единственности

**Определение 19.** Будем говорить, что решение задачи Коши $y = \varphi(x)$, поставленное в точке $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ и определённое на промежутке $\langle a, b\rangle \ni x_0$, единственно на этом промежутке, или, просто, единственно, если для любого $x \in \langle a, b\rangle$ точка $\big(x, \varphi(x)\big)$ является точкой локальной единственности

**Определение 20.** Область $G^\circ \subset G$ будем называть областью единственности для уравнения (1.1), если каждая точка $G^\circ$ является точкой единственности. Множество $\widetilde{G^\circ} = G^\circ \cup \widehat{G^\circ}$, в котором $\widehat{G^\circ}$ – это множество граничных точек $G^\circ$, являющихся точками единственности, будем называть множеством единсвтенности

**Теорема 6** (о единственности; слабая)**.** Пусть в уравнении (1.1) функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области $G$, а частная производная $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ определена и непрерывна в области $G^\circ \subset G$
Тогда $G^\circ$ является областью единственности

**Доказательство.** Эта теорема является следствием более сильных теорем о единственности, которые будут свормулированы и доказаны в §4, п. 4°, причём не только для области $G$, а для всего множества $\widetilde{G}$ $\square$

### 1.1.9. Частные и особые решения

**Определение 21.** Решение уравнения (1.1), заданное на промежутке $\langle a, b\rangle$, будем назвыать частным (особым), если его график состоит только из точек единственности (неединственности) и это решение является полным в том смысле, что не может быть продолжено ни влево, ни вправо так, чтобы его график состоял только из точек единственности (неединственности). В этом случае промежуток $\langle a, b\rangle$ будем называть максимальным интервалом существования частного (особого) решения

### 1.1.10. Понятие общего решения

**Определение 22.** Общим решением уравнения (1.1) на некотором связном множестве $A^*$, лежащем в области единственности $G^\circ$, называется функция $y = \varphi(x, C)$, определённая и непрерывная по совокупности аргументов на множестве $Q_{A^*} = \{\, (x, C) \mid x \in \langle a(C), b(C)\rangle\,, \quad C \in \langle C_1, C_2\rangle \,\}$, если выполняются следующие два условия:

1. для любой точки $(x_0, y_0) \in A^*$ уравнение $y_0 = \varphi(x_0, C)$ имеет единственное решение $C = C_0$
2. функция $y = \varphi(x, C_0)$ – это решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными $x_0, y_0$, определённое на промежутке $\langle a(C_0), b(C_0)\rangle$

**Теорема 7** (о существовании общего решения)**.** Для произвольной точки $(x_0^*, y_0^*)$ из области единственности $G^\circ$ уравнения (1.1) найдётся связное множество $A^* : (x_0^*, y_0^*) \in A^* \subset G^\circ$, на котором существует общее решение

**Доказательство.** Приведено в §5 $\square$

### 1.1.11. Поле направлений и метод изоклин

**Определение 23.** Отрезок проивольной длины с центром в точке $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ и тангенсом угла наклона, равным $f(x_0, y_0)$, будем называть отрезком поля направлений, построенным в точке $(x_0, y_0)$
Само множество $\widetilde{G}$, запоненное отрезками поля направлений будем называть полем направлений, ин-

дуцированным уравнением (1.1)

Кривая, лежащая в $\widetilde{G}$, является интегральной тогда и только тогда, когда она гладкая и в каждой точке направление касательной к ней совпадает с направлением поля в этой точке

**Определение 24.** Изоклиной уравнения (1.1) называется любая кривая, расположенная во множестве $\widetilde{G}$, в каждой точке которой направление поля имеет один и тот же угол наклона

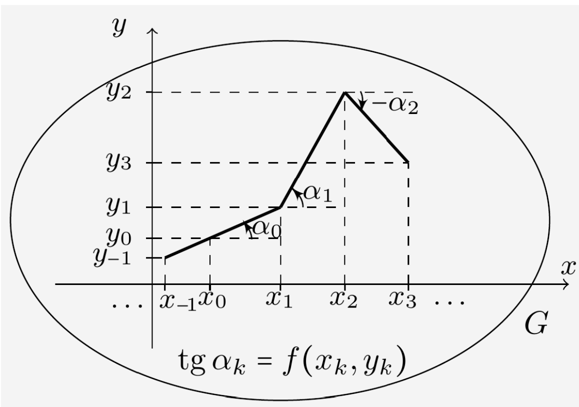
**Замечание.** Все изоклины задаются уравнением $f(x,y) = k$, где $k$ – любое вещественное число из области значений $f(x,y)$

Метод изоклин заключается в том, чтобы, нарисовав достаточное число изоклин и отрезков поля на них, начертить характерные интегральные кривые, которые, опадая на очередную изоклину, должны касаться отрезков поля направлений, построенных на ней

## 1.2. Существование решения внутренней задачи Коши

В этом параграфе будет доказана теорема Пеано о существовании решения внутренней задачи Коши уравнения (1.1) $y' = f(x,y)$ (теор. 1), т. е. будет рассматриваться задача Коши, поставленная в любой внутренней точке $\widetilde{G}$, и строиться решение этой задачи, график которого лежит в области $G$
Будем строить решение при помощи “метода ломаных Эйлера”

### 1.2.1. Ломаные Эйлера




Выберем в области $G$ произвольную точку $(x_0, y_0)$ и построим в ней отрезок поля направлений столь малой длины, что он целиком лежит в $G$, начинаясь в какой-то точке $(x_{-1}, y_{-1})$ и заканчиваясь в точке $(x_1, y_1)$
Проведём вправо через точку $(x_1, y_1)$ и влево через точку $(x_{-1}, y_{-1})$ полуотрезки поля, лежащие в $G$ и заканчивающиеся в точках $(x_2, y_2)$ и $(x_{-2}, y_{-2})$ соответственно, и так далее
Этот процесс можно продолжать любое конечное число шагов $N$, поскольку область $G$ – открытое множество
График полученной таким образом непрерывной кусочно-линейной функции $y = \psi(x)$ называется ломаной Эйлера
Итак, установлено, что ломаная Эйлера лежит в области $G$, проходит через точку $(x_0, y_0)$ и абсциссы её угловых точек равны $x_j$ $(j = \overline{-N, N})$

**Определение 25.** Рангом дробления ломаной Эйлера назовём число, равное

$$\max_{j=\overline{1-N,N}} \{\, x_j - x_{j-1} \,\}$$

Формула, реккурентно задающая ломаную Эйлера $y = \psi(x)$, иммеет вид: $\psi(x_0) = y_0$ и далее при $j = 0, 1, ..., N-1$ для любого $x \in (x_j, x_{j+1}]$ или при $j = 0, -1, ..., 1-N$ для любого $x \in [x_{j-1}, x_j)$

$$\psi(x) = \psi(x_j) + f\big(x_j, \psi(x_j)\big)(x - x_j) \tag{1.6}$$

В частности, при $j = 0$ отрезок ломаной Эйлера определён для любого $x \in [x_{-1}, x_1]$ и, делясь на два полуотрезка, проходит через точку $(x_0, y_0)$ под углом, тангенс которого равен $f(x_0, y_0)$
Из формулы (1.6) вытекает, что для всякого $j = \overline{0, N-1}$ производная $\psi'(x) = f\big(x_j, \psi(x_j)\big)$ при $x \in (x_j, x_{j+1})$, а в точке $x_{j+1}$ она не определна, как и в точках $x_{j-1}$ при $j \le 0$
Доопределим $\psi'(x)$ в точках разрыва как левостороннюю производную при $x > x_0$ и как правостороннюю производную при $x < x_0$, положив

$$\psi'(x_j) = \psi'_{\mp}(x_j) \lim_{x \to x_j^{\mp 0}} \frac{\psi(x) - \psi(x_j)}{x - x_j} \qquad (j = \pm 1 ...., \pm N)$$

А при $j = 0$ существует полная производная $\psi'(x_0) = f(x_0, y_0)$
Таким образом, для любого $x \in (x_j, x_{j+1}]$ $(j = 0, 1, ..., N-1)$ или для любого $x \in [x_{j-1}, x_j)$ $(j = 0, -1, ..., 1-$

$N$), дифференцируя равенство (1.6) по $x$, получаем

$$\psi'(x) = f\big(x_j, \psi(x_j)\big), \qquad j \in \{\, 1 - N, ..., N - 1 \,\} \tag{1.7}$$

### 1.2.2. Лемма о $\varepsilon$-решении

Покажем, что на некотором промежутке всегда можно построить функцию, график которой проходит через заданную точку области $G$, такую, что при подстановке этой функции в уравнение (1.1) окажется, что разность между левой и правой частями уравнения по модулю не превосходит любого сколь угодно малого наперёд заданного положительного числа

**Определение 26.** Для всякого $\varepsilon > 0$ непрерывная и кусочно-гладкая на отрезке $[a, b]$ функция $y = \psi(x)$ называется $\varepsilon$-решением уравнения (1.1) на $[a, b]$, если для любого $x \in [a, b]$ точка $\big(x, \psi(x)\big) \in G$ и

$$\big|\psi'(x) - f\big(x, \psi(x)\big)\big| \leq \varepsilon \tag{1.8}$$

**Лемма 4** (о ломаных Эйлера в роли $\varepsilon$-решения)**.** Для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ и для любого отрезка Пеано $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ имеем:

1. Для любого $\delta > 0$ на $\overline{P_h}$ можно построить ломаную Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления, не превосходящим $\delta$, график которой лежит в прямоугольнике $\overline{R}$ из определения отрезка Пеано

2. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что всякая ломаная Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления, не превосходящим $\delta$, является $\varepsilon$-решением уравнения (1.1) на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

**Доказательство.**

1. Для произвольной точки $(x_0, y_0)$ из $G$ построим прямоугольник $\overline{R} \subset G$ с центром в $(x_0, y_0)$ и два лежащих в нём равнобедренных треугольника $\overline{T^-}, \overline{T^+}$ с общей вершиной в точке $(y_0, x_0)$ и основаниями, параллельными оси ординат, как это было сделано при построении отрезка Пеано
   При этом зафиксируются константы $a, b, M, h$
   Выберем $\delta_* < \delta$ так, чтобы число $\frac{h}{\delta_*} =: N \in \mathbb{N}$
   Положим $x_{j+1} := x_j + \delta_*$ $(j = \overline{0, N-1})$, тогда $x_N = x_0 + h$
   Для всякого $x > x_0$ будем последовательно строить отрезки ломаной Эйлера $y = \psi(x)$ с узлами в точках $x_j$
   Для любого $j = 0, ..., N$ это сделать возможно, так как модуль тангенса укла наклона каждого отрезка равен $\big|f\big(x_j, \psi(x_j)\big)\big|$, а тангенсы углов наклона боковых сторон треугольника $\overline{T^+}$ по построению равны $\pm M$, где $M = \max |f(x, y)|$ на компакте $\overline{R}$
   Поэтому любой отрезок ломаной Эйлера, начиная с первого, не может пересечь боковую стенку $\overline{T^+}$, а значит, содержится в нём
   В результате для всех $x \in [x_0, x_0 + h]$ точка $\big(x, \psi(x)\big) \in \overline{T^+}$ и требуемая ломаная Эйлера построена на $[x_0, x_0 + h]$
   Для левого полуотрезка Пеано всё аналогично

2. Зафиксируем теперь произвольное положительное число $\varepsilon$
   Функция $f(x, y)$ непрерывна на компакте $\overline{R}$, следовательно, по теореме Кантора $f$ равномерно непрерывна на нём. По определнию это занчит, что существует такое $\delta_1 > 0$, что для любых двух точек $(x'y')$ и $(x'', y'')$ из прямоугольника $\overline{R}$ таких, что $|x' - x''| \leq \delta_1$ и $|y' - y''| < \delta_1$, выполняется неравенство $|f(x', y') - f(x'', y'')| \leq \varepsilon$
   Положим $\delta := \min\left\{\, \delta_1, \frac{\delta_1}{M} \,\right\}$ и покажем, что для любой ломаной Эйлера $y = \psi(x)$ с рангом дробления меньшим, чем $\delta$ на отрезке Пеано $\overline{P_h}(x_0, y_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$, справедливо неравенство (1.8):
   Возьмём любую точку $x$ из отрезка Пеано, например справа от $x_0$
   Найдётся индекс $j \in \{\, 0, ..., N - 1 \,\}$ такой, что $x \in (x_j, x_{j+1}]$, т. е. $x_j$ – ближайшая к $x$ левая угловая точка ломаной Эйлера
   Согласно (1.7)
   $$\psi'(x) - f\big(x, \psi(x)\big) = f\big(x_j, \psi(x_j)\big) - f\big(x, \psi(x)\big)$$
   Оценим близость аргументов функции $f$:

По выбору $\delta$ и $j$ имеем

$$|x - x_j| \le \delta \le \delta_1, \qquad |\psi(x) - \psi(x_j)| \xlongequal[(1.6)]{} \big|f\big(x_j, \psi(x_j)\big)\big| \cdot |x - x_j| \le M\delta \overset{\mathrm{def}\,\delta}{\le} \delta_1$$

Поэтому из равномерной непрерывности функции $f$ вытекает, что

$$\big|f\big(x_j, \psi(x_j)\big) - f\big(x, \psi(x)\big)\big| \le \varepsilon$$

А значит, неравенство (1.8) из определения $\varepsilon$-решения выполняется на отрезке Пеано

□

### 1.2.3. Лемма Арцела-Асколи

Пусть последовательность функций $\{\, h_n(x) \,\}_{n=1}^{\infty}$ задана на $[a, b]$

**Определение 27.** Каждая из функций последовательности $\{\, h_n(x) \,\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена на $[a, b]$, если

$$\forall n \ge 1 \quad \exists K_n > 0: \quad \forall x \in [a, b] \quad |h_n(x)| \le K_n$$

**Определение 28.** Последовательность $\{\, h_n(x) \,\}_{n=1}^{\infty}$ **равномерно** ограничена на отрезке $[a, b]$, если

$$\exists \boldsymbol{K > 0}: \quad \forall n \ge 1 \quad \forall x \in [a, b] \quad |h_n(x)| \le K$$

**Определение 29.** Каждая из функций последовательности $\{\, h_n(x) \,\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, значит, согласно теореме Кантора, равномерно непрерывна на $[a, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \ge 1 \quad \exists \delta_n > 0: \quad \forall x', x'' \in [a, b] \quad \Big(|x' - x''| \le \delta_n \implies |h_n(x') - h_n(x'')| \le \varepsilon\Big)$$

**Определение 30.** Последовательность $\{\, h_n(x) \,\}_{n=1}^{\infty}$ **равностепенно** непрерывна на отрезке $[a, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \boldsymbol{\delta > 0}: \quad \forall n \ge 1 \quad \forall x', x'' \in [a, b] \quad \Big(|x' - x''| \le \delta \implies |h_n(x') - h_n(x'')| \le \varepsilon\Big)$$

**Определение 31.** Последовательность функций $\{\, h_n(x) \,\}_{n=1}^{\infty}$ поточечно сходится к некоторой функции $h(x)$ на отрезке $[a, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad \exists N_x > 0: \quad \forall i, j \ge N_x \quad |h_i(x) - h_j(x)| \le \varepsilon$$

**Определение 32.** Последовательность $\{\, h_n(x) \,\}_{n=1}^{\infty}$ **равномерно** сходится к некоторой функции $h(x)$ на отрезке $[a, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \boldsymbol{N > 0}: \quad \forall i, j \ge N \quad \forall x \in [a, b] \quad |h_i(x) - h_j(x)| \le \varepsilon$$

**Обозначение.** Для любого $x \in [a, b]$ поточечная сходимость обозначается $h_n(x) \to h(x)$

**Обозначение.** Равномерная относительно $[a, b]$ сходимость обозначается $h_n(x) \xrightarrow[x \to \infty]{[a,b]} h(x)$

**Замечание.** В определениях 28 и 30 слова "равномерно" и "равностепенно" означают, что константы $K, \delta$ не зависят от выбора $n$, а в 32 – что номер $N$ не зависит от выбора $x$

**Лемма 5** (Арцела-Асколи; о существовании равномерно сходящейся подпоследовательности)**.** Из любой ограниченной и равностепенно непрерывной на $[a, b]$ последовательности функций $\{\, h_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить равномерно сходящуюся на $[a, b]$ подпоследовательность

**Доказательство.** Рациональные числа образуют счётное всюду плотное множество на любом промежутке вещественной прямой

Счётность множества рациональных чисел, расположенных на отрезке $[a, b]$ означает, что их можно перенумеровать: $r_1, r_2, ...$
В точке $r_1$ числовая последовательность $\{ h_n \}_{n=1}^{\infty}$ по предположению сходится, поэтому из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, т. е. существует такая последовательность натуральных чисел

$$n^{(1)} = \left\{ n_i^{(1)} \right\}_{i=1}^{\infty}, \qquad n_i^{(1)} < n_{i+1}^{(1)}$$

что последовательность значений $\left\{ h_{n_i^{(1)}}(r_1) \right\}_{i=1}^{\infty}$ сходится
В точке $r_2$ последовательность $\left\{ h_{n_i}^{(1)}(r_2) \right\}_{i=1}^{\infty}$ также ограничена, и из ней можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, т. е. у последовательности индексов $n^{(1)}$ имеется такая подпоследовательность индексов $n^{(2)} = \left\{ n_i^{(2)} \right\}_{i=1}^{\infty}$, что последовательность значений $\left\{ h_{n_i^{(2)}}(r_2) \right\}_{i=1}^{\infty}$ тоже сходится. При этом она сходится и в точке $r_1$ как подпоследовательность сходящейся последовательности
Продолжаем этот процесс
Введём последовательность индексов $\left\{ n_i^{(i)} \right\}_{i=1}^{\infty}$ $\quad (n_i^{(i)} < n_{i+1}^{(i)})$, где $n_i^{(i)}$ – $i$-й член подпоследовательности $n^{(i)}$
Функциональная подпоследовательность $\left\{ h_{n_i}^{(i)}(x) \right\}_{i=1}^{\infty}$ сходится во всех рациональных точках $[a, b]$, поскольку в любой рациональной точке $r_k$ последовательность $\left\{ h_{n_i^{(k)}}(x) \right\}_{i=1}^{\infty}$ сходится по построению, а любая другая с меньшим верхним индексом является её подпоследовательностью
Покажем, что $\{ h_{i_*}(x) \}_{i=1}^{\infty}$, где $i_* = n_i^{(i)}$ является искомой подпоследовательностью:
Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$
По условию леммы последовательность $\{ h_{i_*}(x) \}_{i=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна, следовательно, по выбранному $\varepsilon$ найдётся такое число $\delta > 0$, что

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \forall x', x'' \in [a, b] : \quad \left( |x' - x''| < \delta \implies |h_{i_*}(x') - h_{i_*}(x'')| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right)$$

По построению последовательность функций $\{ h_{i_*}(x) \}_{i=1}^{\infty}$ сходится поточечно во всех рациональных точках $r_k$ из $[a, b]$
Поэтому по выбранному $\varepsilon$ для любого $k \in \mathbb{N}$ найдётся такой номер $N_{r_k} > 0$, что $|h_{i_*}(r_k) - h_{j_*}(r_k)| \leq \varepsilon/3$ для любых $i_*, j_* > N_{r_k}$
Последовательность индексов $N_{r_1}, N_{r_2}, ...,$ – счётная, поэтому она может стремиться к бесконечности. Перейти к конечной подпоследовательности позволяет использование появившейся из определения равностепенной непрерывности универсальной константы $\delta$ и плотности множества рациональных чисел:
Разобьём отрезок $[a, b]$ на непересекающиеся промежутки, длина которых не превосходит $\delta$. Пусть их окажется $l$ штук
Множество рациональных чисел всюду плотно, поэтому в каждом промежутке можно выбрать по рациональному числу: $r_1^*, ..., r_l^*$
Пусть $N = \max \{ N_{r_1^*}, ..., N_{r_l^*} \}$, где константы $N_r$ взяты из определения поточечной сходимости последовательности $\{ h_{i_*}(x) \}_{i=1}^{\infty}$
Возьмём произвольное число $x \in [a, b]$. Предположим, что оно попало в промежуток с номером $p$. Тогда для любых $i_*, j_* > N$ получаем:

$$|h_{i_*}(x) - h_{j_*}(x)| \overset{\triangle}{\leq} |h_{i_*}(x) - h_{i_*}(r_p^*)| + |h_{i_*}(r_p^*) - h_{j_*}(r_p^*)| + |h_{j_*}(r_p^*) - h_{j_*}(x)| \leq \varepsilon$$

так как $|x - r_p^*| \leq \delta$ и верна оценка из определения равномерной сходимости
Итак, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое $N$, что для любых $i_*, j_* \geq N$ и $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $|h_{i_*}(x) - h_{j_*}(x)| \leq \varepsilon$ $\square$

**Замечание.** При выполнении условий леммы Арцела-Асколи она позволяет "объявить о рождении" функции $h(x)$, определённой на отрезке $[a, b]$ и предельной для некоторой подпоследовательности функций $h_n(x)$
При этом, по теореме Стокса-Зайделя предельная функция непрерывна на $[a, b]$

**Примечание.** Теорема Стокса-Зайделя – некоторое обобщение формулы Ньютона-Лейбница

### 1.2.4. Теорема о существовании решения ВЗК

Докажем теорему 1:

**Теорема 8.** Пеано; о существовании внутреннего решения Пусть правая часть уравнения (1.1) непрерывна в области $G$
Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ и для любого отрезка Пеано $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ существует по крайней мере одно решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными $x_0, y_0)$, определённое на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

**Доказательство.** Возьмём произвольную точку $(x_0, y_0)$ из области $G$ и построим какой-либо отрезок Пеано $\overline{P_h}(x_0, y_0)$
Выберем произвольную последовательность положительных чисел $\varepsilon_n$, стремящуюся к нулю при $n \to \infty$
Тогда по лемме об $\varepsilon$-решении для всякого $n$ можно построить ломаную Эйлера $\psi_n(x)$, проходящую через точку $(x_0, y_0)$, определённую на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ и являющуюся $\varepsilon_n$-решением уравнения (1.1) на отрезке $\overline{P_j}(x_0, y_0)$
Поэтому для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in \overline{P_h}(x_0, y_0)$ точка $\Big(x, \psi_n(x)\Big) \in \overline{R}$ и выполняется неравенство (1.8) $|\psi_n'(x) - f\big(x, \psi_n(x)\big)| < \varepsilon_n$
Покажем, что последовательность ломаных Эйлера $\{\, \psi_n(x) \,\}_{n=1}^{\infty}$ на отрезке Пеано удовлетворяет лемме Арцела-Асколи
Последовательность $\{\, \psi_n(x) \,\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена, так как график любой функции $y = \psi_n(x)$ лежит в прямоугольнике $\overline{R}$, а значит, $|\psi_n(x)| \le |y_0| + b$ для любого $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$
Для доказательства равностепенной непрерывности зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$
Положим $\delta = {}^{\varepsilon}\!/_{M}$, где $M = \max\limits_{(x,y)\in\overline{R}} |f(x,y)|$
Тогда для любых $n \in \mathbb{N}$ и $x', x'' \in \overline{P_h}(x_0, y_0)$ таких, что $|x'' - x'| \le \delta$, получаем:

$$|\psi_n(x'') - \psi_n(x')| = \left| \int_{x_0}^{x''} \psi_n'(s)\,\mathrm{d}\,s - \int_{x_0}^{x'} \psi_n'(s)\,\mathrm{d}\,s \right| = \left| \int_{x'}^{x''} \psi_n'(s)\,\mathrm{d}\,s \right| \underset{(1.7)}{\le}$$
$$\le \left| \int_{x'}^{x''} \max_{j=1-N,\dots,N-1} \left| f\big(x, \psi_n(x_j)\big) \right| \mathrm{d}\,s \right| \le M|x'' - x'| \le M\delta = \varepsilon$$

Действительно, интегрируя кусочно-постоянную функцию $\psi'(x)$ по $s$ от $x_0$ до $x$, для любого $x \in [x_{-N}, x_N]$ имеем: $\psi(x) = \psi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \psi'(s)\,\mathrm{d}\,s$, где

$$\int_{x_0}^{x} \psi(s)\,\mathrm{d}\,s = \sum_{k=0}^{j-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \psi'(s)\,\mathrm{d}\,s + \int_{x_j}^{x} \psi'(s)\,\mathrm{d}\,s, \qquad x \in (x_j, x_{j+1}], \quad j \in \{\, 0, \dots, N-1 \,\}$$

$$\int_{x_0}^{x} \psi'(s)\,\mathrm{d}\,s = \sum_{k=j+1}^{-1} \int_{x_{k+1}}^{x_k} \psi'(s)\,\mathrm{d}\,s + \int_{x_{j+1}}^{x} \psi'(s)\,\mathrm{d}\,s, \qquad x \in [x_j, x_{j+1}), \quad j \in \{\, -N, \dots, -1 \,\}$$

В результате последовательность ломаных Эйлера $\psi_n(x)$ удовлетворяет условиям леммы Арцела-Асколи, и из неё можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{\, \psi_{i_*}(x) \,\}_{i_*=1}^{\infty}$
Пусть $\psi_{i_*} \xrightarrow[i_* \to \infty]{x \in \overline{P_h}} \varphi(x)$
Тогда, согласно замечанию после леммы Арцела-Асколи функция $y = \varphi(x)$ непрерывна на отрезке Пеано
Поскольку $\psi_{i_*}(x)$ по построению является $\varepsilon_{i_*}$-решением, из неравенства (1.8) вытекает, что

$$\forall x \in \overline{P_h}(x_0, y_0) \quad \forall i_* \in \mathbb{N}: \quad \psi_{i_*}'(x) = f\big(x, \psi_{i_*}(x)\big) + \Delta_{i_*}(x), \qquad |\Delta_{i_*}(x)| \le \varepsilon_{i_*}$$

Интегрируя это равенство по $s$ от $x_0$ до $x$ получаем:

$$\psi_{i_*}(x) - \psi_{i_*}(x_0) = \int_{x_0}^{x} f\big(s, \psi_{i_*}(s)\big)\,\mathrm{d}\,s + \int_{x_0}^{x} \Delta_{i_*}(s)\,\mathrm{d}\,s \tag{1.9}$$

причём $\psi_{i_*}(x_0) = y_0$ и $\left| \int_{x_0}^{x} \Delta_{i_*}(s)\,\mathrm{d}\,s \right| \le \varepsilon_{i_*}|x - x_0| \xrightarrow[i_* \to \infty]{} 0$, так как $|x - x_0| \le h$

Кроме того, $f\big(s, \psi_{i_*}(s)\big) \xrightarrow[i_* \to \infty]{s \in \overline{P_h}} f\big(s, \varphi(s)\big)$, поскольку любая точка $\big(s, \psi_{i_*}(s)\big) \in \overline{R}$ и $f(x, y)$ по теореме Кантора равномерно непрерывна на $\overline{R}$

**Утверждение 4.** Поэтому можно осуществить предельный переход под знаком интеграла:

$$\int_{x_0}^{x} f\big(s, \psi_{i_*}(s)\big)\, \mathrm{d}\, s \xrightarrow[i_* \to \infty]{} \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big)\, \mathrm{d}\, s$$

**Доказательство.** Действительно, зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$
Из равномерной непрерывности функции $f(x, y)$ на компакте $\overline{R}$ вытекает, что по выбранному $\varepsilon$ найдётся такое $\delta$, что для любых $(x, \widetilde{y}), (x, \widehat{y}) \in \overline{R}$ выполнено $|\widehat{y} - \widetilde{y}| < \delta \implies |f(x, \widehat{y}) - f(x, \widetilde{y})| < {}^{\varepsilon}\!/_{h}$
Теперь из равномерной относительно $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ сходимости последовательности функций $\psi_{i_*}(x)$ к функции $\varphi(x)$ вытекает, что для найденного $\delta$ существует такой номер $N$, что $|\psi_{i_*}(x) - \varphi(x)| < \delta$ для любых $i_* \geq N$ и $x \in \overline{P_h}(x_0, y_0)$, причём графики $y = \psi_{i_*}(x)$ и $y = \varphi(x)$ по доказанному лежат в $\overline{R}$
Следовательно, $\Big|f\big(x, \psi_{i_*}(x)\big) - f\big(x, \varphi(x)\big)\Big| < {}^{\varepsilon}\!/_{h}$, и при $i_* \geq N$ имеем:

$$\left|\int_{x_0}^{x} f\big(s, \psi_{i_*}(s)\big)\, \mathrm{d}\, s - \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big)\, \mathrm{d}\, s\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} \Big|f\big(s, \psi_{i_*}(s)\big) - f\big(s, \varphi(s)\big)\Big|\, \mathrm{d}\, s\right| < \frac{\varepsilon|x - x_0|}{h} \leq \varepsilon$$

$\square$

Переходя в обеих частях равенств (1.9) к пределу при $i_* \to \infty$, получаем тождество (1.2):

$$\varphi(x) \overset{[x_0 - h, x_0 + h]}{\equiv} \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big)\, \mathrm{d}\, s$$

Поэтому, согласно лемме о записи решения в интегральном виде, предельная функция $y = \varphi(x)$ является решением ВЗК$(x_0, y_0)$ уравнения (1.1) на отрезке Пеано $[x_0 - h, x_0 + h]$ $\square$

**Замечание.** Теорема Пеано не даёт информации о количестве решений, проходящих через заданную точку области $G$

**Замечание.** Для точек неединственности существуют решения, которые нельзя приблизить ломаными Эйлера

## 1.3. Существование решения граничной задачи Коши

В этом параграфе будут указаны условия, при которых существует решение ГЗК уравнения (1.1), поставленной в произвольной точке $(x_0, y_0) \in \widehat{G} \subset \partial G$, и условия, при которых такое решение отсутсвует. Поставленная задача решается путём выделения тех случаев, в которых возможно построение аналогов треугольника и отрезка Пеано, с последующим применением метода ломаных Эйлера.
Для упрощения обозначений и формул, используемых в дальнейшем при решении граничной задачи Коши, НУО будем считать, что задача всегда ставится в начале координат и функция $f$ там равна нулю, т. е. уравнение (1.1) имеет вид

$$y' = f_0(x, y) \tag{1.10}$$

где функция $f_0$ определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G} = G \cup \widehat{G}$, точка $O = (0, 0) \in \widetilde{G}$, $f_0(0, 0) = 0$ и поставлена граничная задача Коши с начальными данными $0, 0$

**Доказательство (НУО).** В самом деле, пусть для уравнения (1.1) $y' = f(x, y)$ задача Коши поставлена в точке $(x_0, y_0) \in \widehat{G}$. Тогда замена

$$x = u + x_0, \qquad y = v + y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

сводит уравнение (1.1) к уравнению $v' = f_0(u, v)$, в котором

$$f_0(u, v) = f\Big(u + x_0, v + f(x_0, y_0)u + y_0\Big)$$

При этом для $x = x_0$, $y = y_0$ получаем:

$$u = u_0 = 0, \qquad v = v_0 = 0, \qquad f_0(0,0) = 0$$

$\square$

### 1.3.1. Граничные кривые и порождаемые ими множества

Ключевую роль для существования или отсутсвия решения ГЗК уравнения (1.10) будет играть структура граничного множества в $\widehat{G}$ в малой окрестности точки $O$ и значения функции $f_0$ на нём, а также расположение всего множества $\widetilde{G}$ по отношению к оси абсцисс

**Определение 33.** Функцию $y = b^+_{a,u}(x)$ заданную на отрезке $[0,a]$ будем называть верхнеграничной, если для неё выполняются следующие пять условий:

1. $b^+_{a,u}(x) \in \mathcal{C}^1\big([0,a]\big)$
2. $b^+_{a,u}(0) = 0$
3. ${b^+_{a,u}}'(0) \geq 0$
4. $b^+_{a,u}$ вогнута на $[0,a]$, если ${b^+_{a,u}}'(0) = 0$
5. Правая верхнеграничная кривая $\gamma^+_{a,u} = \big\{\, x \in [0,a], \quad y = b^+_{a,u}(x) \,\big\} \subset \widehat{G}$

**Примечание.** Условие 3 допускает случай, когда ${b^+_{a,u}}'(0) = +\infty$
В условии 4 вогнутость понимается в нестрогом смысле, т. е. допускается тождество $b^+_{a,u}(x) \equiv 0$

Аналогично вводится правая нижнеграничная функция $y = b^+_{a,l}(x)$, и правая нижнеграничная кривая $\gamma^+_{a,l}$ – график $b^+_{a,l}(x)$. Только в условии 3 предполагаем, что ${b^+_{a,l}}'(0) \leq 0$, и допускаем случай, когда ${b^+_{a,l}}'(0) = -\infty$, а в условии 4 предполагаем, что $b^+_{a,l}(x)$ выпукла
Введём две ключевые константы:

$$\tau_u = \frac{{b^+_{a,u}}'(0)}{2}, \qquad \tau_u = 1, \text{ если } {b^+_{a,u}}'() = +\infty$$

$$\tau_l = -\frac{{b^+_{a,l}}'(0)}{2}, \qquad \tau_l = -1, \text{ если } {b^+_{a,l}}'(0) = -\infty$$

НУО будем считать, что выполняются условия:

$$\begin{cases} b^+_{a,u}(a) \leq a \quad \text{при } \tau_u = 0 \\ \forall x \in [0,a] \quad {b^+_{a,u}}'(x) \geq \tau_u \quad \text{при } \tau_u > 0 \\ -b^+_{a,l}(a) \leq a \quad \text{при } \tau_l = 0 \\ \forall x \in [0,a] \quad -{b^+_{a,l}}'(x) \geq \tau_l \quad \text{при } \tau_l > 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

поскольку непостредственно из определения вытекает, что для любой правой граничной функции $b^+_a(x)$ функция $b^+_{\breve{a}}(x)$, являющаяся её сужением на произвольный отрезок $[a, \breve{a}]$ с $\breve{a} < a$, остаётся правой граничной.
В результате $\gamma^+_{a,u}$ – гладкая кривая из $\widehat{G}$, параметризованная неубывающей с учётом (1.11) функцией $b^+_{a,u}(x)$. Она расположена в первой четверти и содержит точку $O$. $\gamma^+_{a,l}$ – гладкая кривая из $\widehat{G}$, параметризованная невозрастающей функцией $b^+_{a,l}(x)$. Она расположена в четвёртой четверти и содержит точку $O$
Для всякого $c > 0$ рассмотрим правую *c-окрестность* (это не окрестность – она не открыта) точки $O$:

$$N^+_c := \{\, (x,y) \mid x \in (0,c], \quad |y| \leq c \,\}$$

В прямоугольнике $N^+_c$ длина верхней стороны выбирается так, чтобы каждая "выходящая" из точки $O$ правая граничная кривая, при наличии хотя бы одной, имела пересечение с одной из его сторон. При этом "поведение" гранчных кривых после первого попадания на границу $N^+_c$ интереса не представляет.
Любое последующее уменьшение $c$ ситуацию не меняет, разве что отсекаются части граничных кривых, попавших в прямоугольник снаружи.
В частности, неравенства $b^+_{a,u}(a) \leq a$ или $-b^+_{a,l}(a) \leq a$ из (1.11) при всех $c \leq a$ гарантируют пересечение правых граничных кривых $\gamma^+_a$ именно с боковой стороной прямоугольника $N^+_c$.

Всегда в дальнейшем, “обрезая” при необходимости кривые $\gamma_a^+$, будем считать, что правый конец $\big(a, b_a^+(a)\big)$ любой из них – это первая точка выхода граничной кривой на границу прямоугольника $N_c^+$
Выделим для уравнения (1.10) четыре варианта расположения граничных кривых в малой окрестности точки $O$ при $x > 0$:

**Определение 34.** Будем говорить, что

1. реализуется случай $(W^+)$, если

$$\exists\, c_W > 0 : \quad W_{c_W}^+ \cap \widehat{G} = \emptyset, \qquad W_{c_W}^+ = N_{c_W}^+$$

2. реализуется случай $(U^+)$, если

$$\exists\, c_U > 0 : \quad U_{c_U}^+ \cap \widehat{G} = \gamma_{a,u}^+ \setminus \{\, O \,\}$$

$$U_{c_U}^+ \coloneqq \left\{ (x, y) \;\middle|\; \Big( x \in (0, a], \quad -c_u \le y \le b_{a,u}^+(x) \Big) \cup \Big( x \in (a, c_U], \quad y \le c_U \Big) \right\}$$

3. реализуется случай $(O^+)$, если

$$\exists\, c_O > 0 : \quad O_{c_O}^+ \cap \widehat{G} = \gamma_{a,l}^+ \setminus \{\, O \,\}$$

$$O_{c_O}^+ \coloneqq \left\{ (x, y) \;\middle|\; \Big( x \in (0, a], \quad b_{a,l}^+(x) \le y \le c_O \Big) \cup \Big( x \in (a, c_O], \quad |y| \le c_O \Big) \right\}$$

4. реализуется случай $(B^+)$, если

$$\exists\, c_B > 0 : B_{c_B}^+ \cap \widehat{G} = \big(\gamma_{a,u}^+ \cup \gamma_{a,l}^+\big) \setminus \{\, O \,\}, \qquad B_{c_B}^+ \coloneqq U_{c_B}^+ \cap O_{c_B}^+$$

**Обозначение.** $(X^+)$ и $(X_{c*}^+)$ будут обозначать далее, что реализуется любой из четырёх описанных выше случаев на соответствующем множестве

В случае $(X^+)$ или $(X_{c*}^+)$ имеет место одна из двух возможностей:

1. $X_{c*}^+ \cap G \neq \emptyset$, что равносильно тому, что $X_{c*}^+$ без входящих в него граничных кривых лежит в $G$
2. $X_{c*}^+ \cap G = \emptyset$

В результате случай $(X^+)$ в зависимости от расположения множества $X_{c*}$ распадается на два подслучая, которые будем обозначать $(X_1^+)$ и $(X_2^+)$
А дополнительный индекс $>, =, <$, при его наличии в обозначении любого из шести возникших случаев (кроме $(W_1^+)$ и $(W_2^+)$), будет уточнять знак производной соответсвующих правых граничных функций в нуле
В итоге, получаются случаи:

$\boldsymbol{U_1^+}$: $(U_{c_U}^+ \setminus \gamma_{a,u}^+) \subset G$, два подслучая:

$\boldsymbol{U_1^{+,>}}$: ${b_{a,u}^+}'(0) > 0$
$\boldsymbol{U_1^{+,=}}$: ${b_{a,u}^+}'(0) = 0$

$\boldsymbol{U_2^+}$: $U_{c_U}^+ \cap G = \emptyset$, подслучаи те же

$\boldsymbol{O_1^+}$: $(O_{c_O}^+ \setminus \gamma_{a,l}^+) \subset G$, два подслучая:

$\boldsymbol{O_{1,<}^+}$: ${b_{a,l}^+}'(0) < 0$
$\boldsymbol{O_{1,=}^+}$: ${b_{a,l}^+}'(0) = 0$

$\boldsymbol{O_2^+}$: $O_{c_O}^+ \cap G = \emptyset$, подслучаи те же

$\boldsymbol{B_1^+}$: $\Big(B_{c_B}^+ \setminus (\gamma_{a,u}^+ \cup \gamma_{a,l}^+)\Big) \subset G$, четыре подслучая:

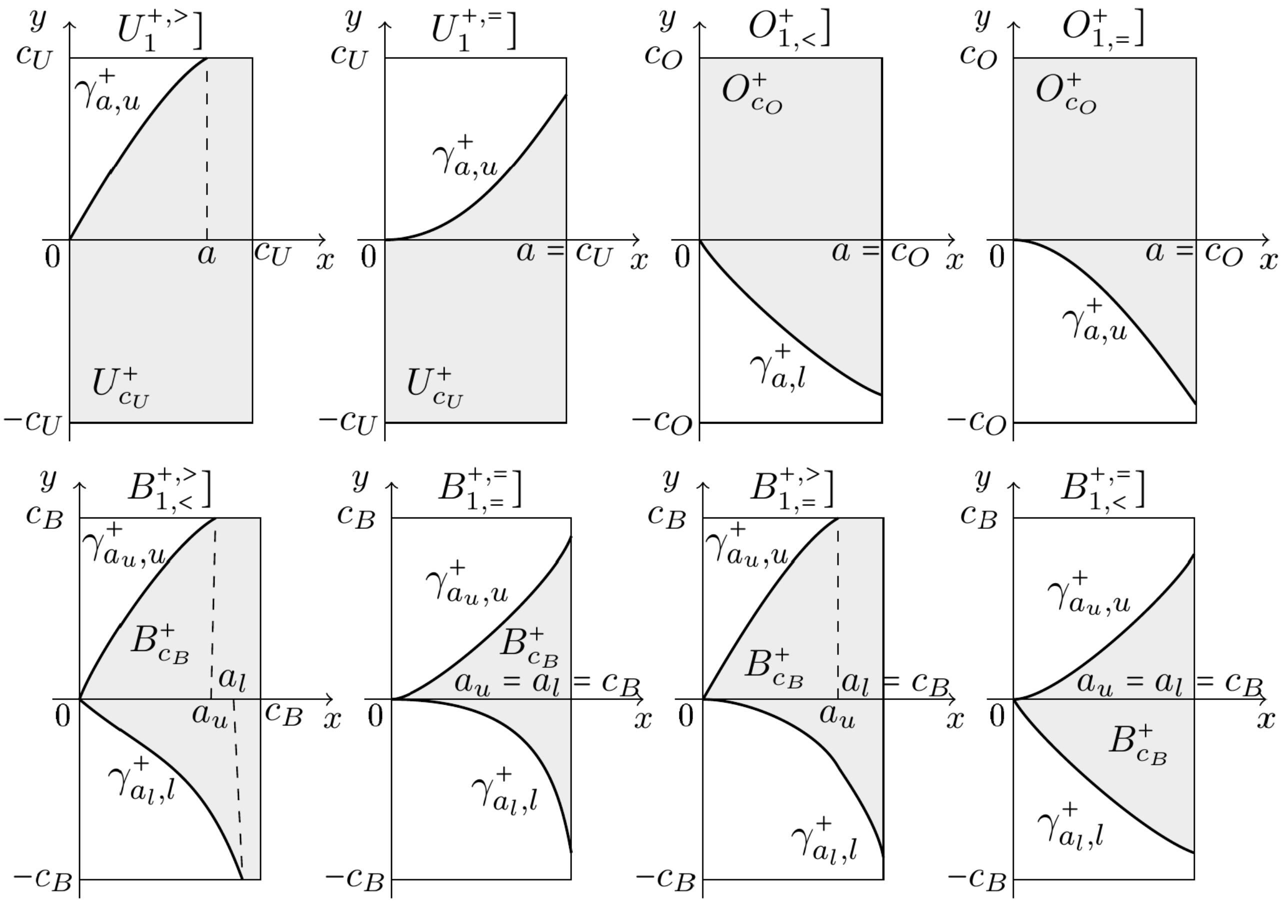
$B_{1,<}^{+,>}$: ${b_{a,u}^+}'(0) > 0, \quad {b_{a,l}^+}'(0) < 0$

$B^{+,=}_{1,=}$: $b^+_{a,u}{}'(0) = 0, \quad b^+_{a,l}{}'(0) = 0$

$B^{+,>}_{1,=}$: $b^+_{a,u}{}'(0) > 0, \quad b^+_{a,l}{}'(0) = 0$

$B^{+,=}_{1,<}$: $b^+_{a,u}{}'(0) = 0, \quad b^+_{a,l}{}'(0) < 0$

$\boldsymbol{B_2^+}$: $B^+_{c_B} \cap G = \emptyset$, подслучаи те же




**Замечание.** Прямоугольник $N_c^+$ может содержать более одной нижнеграничной и более одной нижнеграничной кривой. Но наличие или отсутсвие граничных кривых в $N_c^+$ вне множества $X_c^+$ не влияет на существование решения ГЗК$(x_0, y_0)$

**Замечание.** При наличии в $N_c^+$ единственной граничной кривой, дежащей на оси абсцисс, будем считать, что имеет место случай $(U_1^{+,=})$ с $b^+_{a,u} \equiv 0$, а не $(O^+_{2,=})$ с $b^+_{a,l} \equiv 0$. То же касается случаев $(O^+_{1,=})$ и $(U_2^{+,=})$

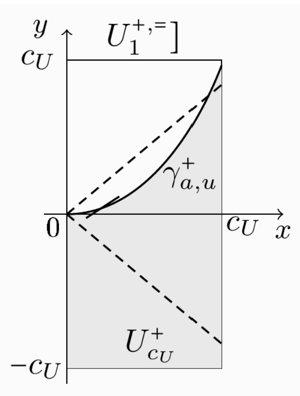
### 1.3.2. Граничный треугольник и граничный отрезок Пеано

Для доказательства существования решения ГЗК$(O = (0,0) \in \widehat{G})$, график которого расположен, скажем, в правой полуплоскости, в первую очередь следует выделить так называемый правый граничный отрезок Пеано $\overline{P_h+}^+(O) = [0, h^+]$ $(h^+ > 0)$. А для этого необходимо построить правый граничный треугольник $\overline{T_b^+}$, во многом аналогичный треугольнику $\overline{T^+}$ из определения отрезка Пеано для внутренней задачи Коши, высота которого как раз и здадаёт константу $h^+$. Осуществить это удаётся в случаях $(N_1^+), (U_1^+), (O_1^+), (B_1^+)$ при дополнительных предположениях о поведении функции $f_0$ на тех граничных кривых, которые в нуле имеют нулевую производную

При построении будет использоваться непрерывность функции $f_0(xy)$ в граничной точке $O$, где по условию $f_0$ равна нулю, означающая, что

$$\forall \tau > 0 \quad \exists\, \delta_\tau > 0: \quad \forall (x,y) \in \overline{V}_{\delta_\tau} \cap \widetilde{G} \quad |f_0(x,y)| \le \tau, \qquad \overline{V}_{\delta_\tau} := \{\, (x,y) \mid |x| \le \delta_\tau, \quad |y \le \delta_\tau \,\} \tag{1.12}$$

В простейшем случае $(W_1^+)$, когда весь прямоугольник $N_{c_W}^+$ лежит в $G$ (граничные кривые в $c_W$-окрестности точки $O$ могут быть расположены только на оси ординат или в левой полуплоскости), правый треугольник $\overline{T_b^+}$ и правый отрезок Пеано $[0, h^+]$ строятся стандартно:
Выберем, например, $\tau = 1$. Тогда, согласно (1.12) найдётся $\delta_1 > 0$ такое, что $|f_0(x, y)| \le 1$ на множестве $\overline{V}_{\delta_1} \cap \widetilde{G}$
Положим $\widetilde{c} \coloneqq \min\{\, c_W, \delta_1 \,\}$
Построим в прямоугольнике $N_{\widetilde{c}}^+$, не содержащем граничных кривых, с добавленной к нему точкой $O$, прямоугольный равнобедренный треугольник $\overline{T_b}^+$ с вершинами в точках $(0, 0), (\widetilde{c}, \widetilde{c}), (\widetilde{c}, -\widetilde{c})$. Тогда длина его высоты $h^+$ равна $\widetilde{c}$, а его боковые стороны имеют углы наклона, равные $\pm\frac{\pi}{4}$, поэтому любая ломаная Эйлера, "выпущенная" из начала координат, в силу выбора $\tau = 1$ в (1.12) будет продолжима до точки $(h^+, y_*)$, лежащей на основании $\overline{T_b^+}$, совпадающем в данном случае с правой стороной $N_{\widetilde{c}}^+$
Похожие построения будут проведены для случаев $(U_1^{+,>})$, $(O_{1,<}^+)$, $(B_{1,<}^{+,>})$
В остальных пяти случаях из-за того, что в каждом производная хотя бы одной из граничных функций в нуле равна нулю, может оказаться, что не все ломанные Эйлера могут быть продолжены до основания любого "классического" правого треугольника Пеано. Дело в том, что часть граничной кривой вблизи точки $O$ такой граничной функции будет обязательно лежать внутри треугольника со сколь угодно малым углом при вершине $O$. Поэтому может найтись точка на этой части границы, в которой модуль угла наклона касательной будет меньше значения функции $f_0$ в этой точке, а значит, при попадании ломаной в эту точку её продолжение вправо должно будет покинуть множество $\widetilde{G}$, что невозможно




> **Примечание.** На рисунке описанная ситуация возникает в случае $(U_1^{+,=})$
> Действительно, каким бы малым ни выбрать $\tau$ в формуле (1.12), всегда найдётся константа $c \le \min\{\, c_I, \delta_\tau \,\}$ такая, что в прямоугольнике $N_{\widetilde{c}^+}$ с $\widetilde{c} = \min\{\, c_U, \delta_\tau \,\}$ часть правой верхнеграничной кривой $\gamma_{\widetilde{c},u}^+$, примыкающая к точке $O$, будет лежать под верхней боковой стороной прямоугольника $T_b^+$, имеющей угол наклона $\operatorname{arctg}\tau$. Поэтому ломаная Эйлера, которая не может покидать $\widetilde{G}$, попадая в какой-то точке $\big(x_*, b_{\widetilde{c},u}^+(x_*)\big)$ $(x_* < \widetilde{c})$ на $\gamma_{\widetilde{c},u}^+$, не сможет быть продолжена вправо, если вы этой точке отрезок поля направлений будет иметь угол наклона, не превосходищий $\operatorname{arctg}\tau$, но больший угла наклона касательной к $\gamma_{\widetilde{c},u}^+$

Для устранения этой проблемы во всех точках кривых $\gamma_{a,u}^+$ и $\gamma_{a,l}^+$ введём ограничения на функцию $f_0$ в случаях $(U_1^{+,=}), (O_{1,=}^+), (B_{1,=}^{+,=}), (B_{1,=}^{+,>})$ и $(B_{1,<}^{+,=})$:

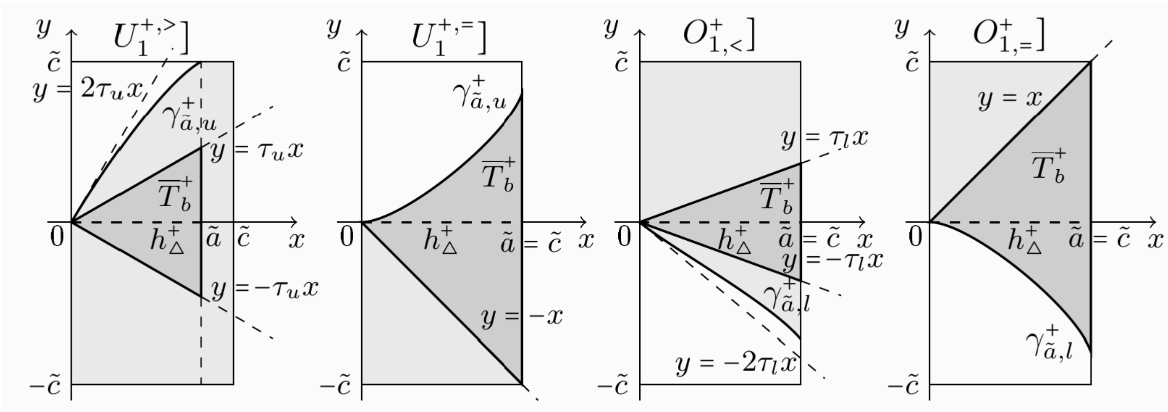
$$\forall x \in (0, a] \quad \begin{cases} f_0\big(x, b_{a,u}^+(x)\big) \le {b_{a,u}^+}'(x), & \text{если } {b_{a,u}^+}'(0) = 0 \\ f_0\big(x, b_{a,l}^+(x)\big) \ge {b_{a,l}^+}'(x), & \text{если } {b_{a,l}^+}'(0) = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

означающие, что в любой точке $\gamma_{a,u}^+$ и $\gamma_{a,l}^+$ правый полуотрезок поля направлений уравнения (1.10) направлен внутрь или по границе области $G$
Построим отрезок Пеано в восьми случаях $(X_1^+)$:

$\boldsymbol{U_1^{+,>}}$. Пусть $\widetilde{c} = \min\{\, c_U, \delta_{\tau_u} \,\}$, где $\tau_u$ из (1.11), а $\delta_{\tau_u}$ задана в (1.12).
Тогда $U_{\widetilde{c}}^+ \setminus \gamma_{\widetilde{a},u}^+ \subset G$, где $\widetilde{a}$ – точка пересечения $\gamma_{a,u}^+$ с верхней или боковой $(\widetilde{a} = \widetilde{c})$ границей $N_{\widetilde{c}}^+$, $|f_0(x, y)| \le \tau_u$ при $(x, y) \in U_{\widetilde{c}}^+$ и $h^+ = \widetilde{a}$
Геометрически надо из точки $O$ провести лучи с тангенсами углов наклона, равными $\pm\tau$, до пересечения с вертикальной прямой $x \equiv \widetilde{a}$. В полученном равнобедренном треугольнике $\overline{T_b^+}$ высота $h_\Delta^+ = \widetilde{a}$. При этом $\overline{T_b^+} \setminus \{\, O \,\} \subset U_{\widetilde{c}}^+$ (и расположен под кривой $\gamma_{\widetilde{a},u}^+$) в силу выбора $\widetilde{a}$, так как согласно (1.11) верно неравенство $b_{\widetilde{a},u}^+(x) \ge \tau_u x$ при $x \in [0, \widetilde{a}]$

$\boldsymbol{U_1^{+,=}}$. Пусть в (1.12) $\tau = 1$, $\widetilde{c} = \min\{\, c_U, \delta_1 \,\}$. Тогда $U_{\widetilde{c}}^+ \setminus \gamma_{\widetilde{a},u}^+ \subset G$, причём $\widetilde{a} = \widetilde{c}$, так как правый конец $\gamma_{\widetilde{a},u}^+$ с учётом (1.11) заканчивается на боковой стороне $N_{\widetilde{c}}^+$, $|f_0(x,y)| \le 1$ при $(x,y) \in U_{\widetilde{c}}^+$ и $h^+ = \widetilde{c}$
Геометрически надо соединить точки $O$ и $(\widetilde{c}, -\widetilde{c})$. Тогда полученный отрезок вместе с кривой $\gamma_{\widetilde{a},u}^+$ и отрезком боковой стороны $N_{\widetilde{c}}^+$ образует криволинейный треугольник $\overline{T_b^+}$ с высотой $h_\Delta^+ = \widetilde{c}$, при этом $\overline{T_b^+} \setminus O \subset U_{\widetilde{c}}^+$

$\boldsymbol{O_{1,<}^+, O_{1,=}^+}$. Аналогично, только на рисунке для случая $(O_{1,<}^+)$ кривая $\gamma_{\widetilde{a},l}^+$, над которой расположен треугольник $\overline{T_b^+}$, пересекается не с нижней, а с боковой стороной прямоугольника $N_{\widetilde{c}^+}$

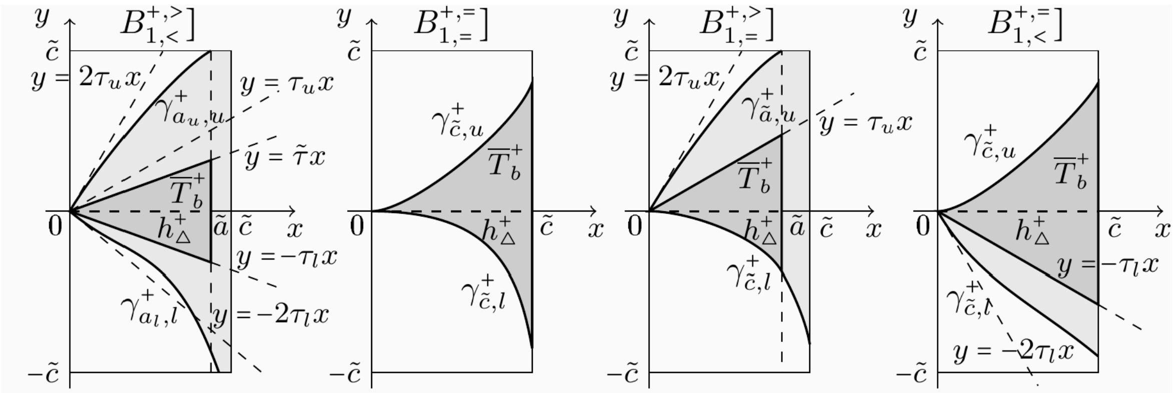



$\boldsymbol{B_{1,<}^{+,>}}$. Пусть $\widetilde{c} = \min\{\, c_B, \delta_{\widetilde{\tau}} \,\}$, где $\widetilde{\tau} = \min\{\, \tau_u, \tau_l \,\}$ (см. (1.11)). Тогда $B_{\widetilde{c}^+} \setminus \left(\gamma_{a_u,u}^+ \cup \gamma_{a_l,l}^+\right) \subset \gamma$, $|f_0(x,y)| \le \widetilde{\tau}$ при $(x,y) \in B_{\widetilde{c}}^+$ и $h^+ = \widetilde{a} = \min\{\, a_u, a_l \,\}$
Геометрически надо из точки $O$ провести лучи с тангенсами углов наклона $\pm\widetilde{\tau}$ до пересечения с вертикальной прямой $x \equiv \widetilde{a}$. В полученном треугольнике $\overline{T_b^+}$ высота $h_\Delta^+ = \widetilde{a}$. При этом $\overline{T_b^+} \setminus O \subset B_{\widetilde{c}}^+$ в силу выбора $\widetilde{a}$

$\boldsymbol{B_{1,=}^{+,=}}$. По определению множества $B_{c_B}^+$ и условию (1.11) правые концы кривых $\gamma_{a_u,u}^+, \gamma_{a_l,l}^+$ лежат на боковой стороне прямоугольнкиа $N_{\widetilde{c}}^+$ с $\widetilde{c} = c_B$, поэтому $a_u = a_l = \widetilde{c}$, $B_{\widetilde{c}}^+ \setminus \left(\gamma_{a_u,u}^+ \cup \gamma_{a_l,l}^+\right) \subset G$ и $h^+ = \widetilde{c}$
Геометрически само множество $B_{\widetilde{c}}^+$ образует криволинейный треугольник $\overline{T_b^+}$ с высотой $h_\Delta^+ = \widetilde{c}$

$\boldsymbol{B_{1,=}^{+,>}}$. Пусть $\widetilde{c} = \min\{\, c_B, c_O, \delta_{\tau_u} \,\}$, где $\tau_u$ из (1.11), а $\delta_{\tau_u}$ – из (1.12). Тогда $B_{\widetilde{c}^+} \setminus \left(\gamma_{\widetilde{a},u}^+ \cup \gamma_{\widetilde{c},l}^+\right) \subset G$, $|f_0(x,y)| \le \tau_u$ при $(x,y) \in B_{\widetilde{c}}^+$ и $h^+ = \widetilde{a}$
Геометрически надо из точки $O$ провести луч с таненсом угла наклона, равным $\tau_u$, до пересечения с прямой $x \equiv \widetilde{a}$, где $\widetilde{a}$ – точка пересечения $\gamma_{\widetilde{a},u}^+$ с верхней или боковой $(\widetilde{a} = \widetilde{c})$ границей $N_{\widetilde{c}}^+$. Третьей стороной криволинейного треугольника $\overline{T_b^+}$ является кривая $\gamma_{\widetilde{a},l}^+$. При этом в треугольнике высота $h_\Delta^+ = \widetilde{a}$ и $\overline{T_b^+} \setminus O \subset B_{\widetilde{c}}^+$ в силу выбора $\widetilde{a}$

$\boldsymbol{B_{1,<}^{+,=}}$. Аналогично




### 1.3.3. Теоремы о существовании или отстутствии решений ГЗК

**Теорема 9** (о существовании решения граничной задачи Коши). Предположим, что в уравнении (1.10) функция $f_0$ определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}$.
Тогда в каждом из случаев $(N_1^+)$, $(U_1^{+,>})$, $(O_{1,<}^+)$, $(B_{1,<}^{+,>})$ и в каждом из случаев $(U_1^{+,=})$, $(O_{1,=}^+)$, $(B_{1,=}^{+,=})$, $(B_{1,=}^{+,>})$, $(B_{1,<}^{+,=})$ при условиях (1.13) на любом правом граничном отрезке Пеано существует по крайней мере одно решение граничной задачи Коши с начальными данными $(0,0)$

**Доказательство.** Рассмотрим, например, случай $(B_{1,=}^{+,>})$
Согласно (1.11) (первые два неравенства) правая верхнеграничная функция $b_{a,u}^+(x)$, параметризующая кривую $\gamma_{a_u,u}^+{}'(x) \geq \tau_u$ для любого $x \in (0, a_u]$. А у правой нижнеграничной привой $\gamma_{a_l,l}^+$ константа $a_l = c_O$ в силу (1.11) (последние два нераенства)
Пусть $c_* := \min\{\, c_U, c_O \,\}$, тогда множество $B_{c_*}^+ \setminus \left(\gamma_{a_u,u}^+ \cup \gamma_{a_l,l}^+\right) \subset G$
Далее, для $\tau_u$ найдётся (см. (1.12)) такая $\delta_{\tau_u}$, что $|f_0(x,y)| \leq \tau_u$ в любой точке $\delta_{\tau_u}$-окрестности начала координат, принадлежащей $\widetilde{G}$
Положим $\widetilde{c} := \min\{\, c_*, \delta_{\tau_u} \,\}$, тогда на множестве $B_{\widetilde{c}}^+$ для функции $|f_0|$ справедлива та же оценка
Построим теперь лежащий в $B_{\widetilde{c}}^+$ криволинейный треугольник $\overline{T_b^+}$, как это было сделано при описании случая $(B_{1,=}^{+,>})$. Его высота $h^+ = \widetilde{a}$
Поскольку отрезок оси абсцисс $[0, h^+]$ лежит в $\widetilde{G}$ и является отрезком поля направлений в точке $O \in \widehat{G}$, из точки $O$ вправо можно начать строить ломаную Эйлера с проивольным рангом дробления
Ломаная Эйлера не может покинуть $\overline{T_b^+}$ через верхнюю боковую сторону, лежащую на прямой $y = \tau_u x$, так как в любой её точке $|f_0(x,y)| \leq \tau_u$. Аналогично при попадании ломаной Эйлера при $x = x_* > 0$ на нижнюю боковую сторону, являющуюся частью правой нижнеграничной кривой $\gamma_{\widetilde{a},l}^+$, по условию (1.13) (второе неравенство) $f_0\left(x_*, b_{\widetilde{a},l}^+(x_*)\right) \geq b_{\widetilde{a}}^+{}'(x_*)$, а значит, при $x > x_*$ следующий отрезок ломаной будет либо лежать на $\gamma_{\widetilde{a},l}^+$, либо внутри треугольника в силу выпуклости $\gamma_{\widetilde{a},l}^+$. Поэтому ломаная Эйлера с произвольным выбранным рангом дробления может быть продолжена на весь правый граничный отрезок Пеано $[0, h^+]$
Дальше дословно повторяется доказательство теоремы Пеано (теор. 1)
Аналогичные рассуждения проводятся и в остальных случаях □

Рассмотренные в теореме 9 девять случаев не исчерпывают все ситуации, в которых можно доказать существование решения ГЗК уравнения (1.10). Это удаётся сделать ещё в ряде случаев, но уже другим методом.
Все новые случаи предполагают наличие двух граничных функций, которые будем обозначать $b_a^{+,u}$ и $b_a^{+,l}$, а их графики – $\gamma_a^{+,u}$ и $\gamma_a^{+,l}$. Например, $\gamma_{a,u}^{+,l}$ – это нижняя верхнеграничная кривая. При этом в определении граничных функций можно отказаться от условия о выпуклости, требуя от них только отсутсвия общих точек, кроме точки $O$
Для функций $b_a^{+,*}(x)$ ($*$ – это $u$ или $l$) положим $\tau^* := \dfrac{b_a^{+,*}{}'(0)}{2}$
Будем использовать два варианта сравнительного поведения правых граничных функций $b_a^{+,*}{}'(x)$ и функции $f_0(x, b_a^{+,*})$ на отрезке $[0,a]$:

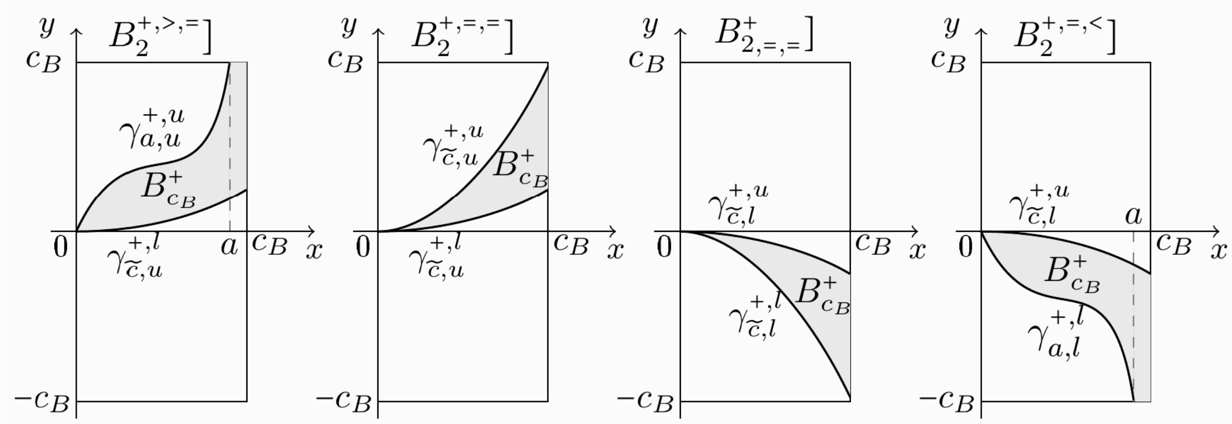
$$\left[\begin{array}{ll} f_0\left(x, b_a^{+,u}(x)\right) \leq b_a^{+,u}{}'(x), & f_0\left(x, b_a^{+,l}(x)\right) \leq b_a^{+,l}{}'(x) \\ f_0\left(x, b_a^{+,u}(x)\right) \geq b_a^{+,u}{}'(x), & f_0\left(x, b_a^{+,l}(x)\right) \geq b_a^{+,l}{}'(x), \quad \tau^u \cdot \tau^l = 0 \end{array}\right. \tag{1.14}$$

Иными словами, в первом варианте построенные на обеих границах отрезки поля направлений напрвалены (с увеличением $x$) по границе или внутрь области $G$, лежащей между граничными кривыми, а во втором варианте – наружу. Кроме того, во втором варианте требуется, чтобы хотя бы одна граничных кривых имела в начале координат горизонтальную касательную

**Теорема 10** (о существовании решения граничной задачи Коши). Пусть в уравнении (1.10) функция $f_0$ определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}$ и имеет место один из вариантов из условия (1.14), тогда на отрезке $[0,a]$ существует по крайней мере одно решение ГЗК(0, 0)

**Доказательство.** Без доказательства □

Перечислим и опишем новые случаи в привычных обозначениях:
Во-первых, ими являются три знакомых случая $(B_{1,=}^{+,=})$, $(B_{1,=}^{+,>})$, $(B_{1,<}^{+,=})$, но с иным поведением отрезков поля направлений на граничных кривых
Следующие два случая – подслучаи $(U_2^{+,=})$, где стало существенно наличие второй верхнеграничной кривой и расположение области $G$ между кривыми. Обозначим их $(B_2^{+,>,=})$, $(B_2^{+,=,=})$ по аналогии со случаем $(B_{1,=}^{+,=})$
Последние два случая, обозначаемые $(B_{2,=,=}^+)$ и $(B_{2,<,=}^+)$ относятся к $(O_{2,=}^+)$




Изучим теперь нигде пока не рассмотренные случаи $(U_2^{+,>})$, $(O_{2,<}^{+})$, $(B_{2,<}^{+,>})$ и вырожденный случай $(N_2^{+})$: $\exists\, c>0: \quad G\cap N_c^{+}=\emptyset$, в котором отсутсвуют граничные кривые, имеющие в точке $O$ горизонтальную касательную:

**Теорема 11** (об отсутствии решений граничной задачи Коши)**.** В каждом из случаев $(U_2^{+,>})$, $(O_{2,<}^{+})$, $(B_{2,<}^{+,>})$, $(N_2^{+})$ граничная задача Коши с начальными данными $(0,0)$ не имеет решений в правой полуплоскости

**Доказательство.** Допустим, что в каждом случае из условия теоремы на некотором отрезке $[0,a]$ существует решение $y=\varphi(x)$ задачи Коши уравнения (1.10) с начальными данными $(0,0)$, т. е. $\varphi(0)=0$. Тогда $\varphi'(0)=f_0\big(0,\varphi(0)\big)=0$. Но график любого решения должен лежать в $\widetilde{G}$, а значит, располагаться не ниже правой верхнеграничной кривой, у которой в точке $O$ тангенс угла наклона согласно (1.11) равен $2\tau_u>0$, или не выше правой нижнеграничной кривой, имеющей в точке $O$ тангенс угла наклона, равный $-2\tau_l<0$. Поэтому $\varphi'(0)\neq 0$ – $\lightning$ $\square$

**Замечание.** Теоремы, подобные приведённым, можно сформулировать для левой полуплоскости

## 1.4. Единственность решения задачи Коши

### 1.4.1. Теорема о локальной единственности решения внутренней задачи Коши

В этом разделе будет доказана теорема 5 (о локальной единственности решения внутренней задачи Коши)

**Лемма 6** (о продолжимости решений на отрезок Пеано)**.** Пусть $y=\varphi(x)$ – это решение внутренней задачи Коши с начальными данными $x_0,y_0$, определённое на $\overline{P_h}(x_0,y_0)$.
Тогда любое другое решение уравнения (1.1) $y=\psi(x)$ этой же задачи Коши, определённое на промежутке $\langle a,b\rangle\subsetneq[x_0-h,x_0+h]$, продолжимо на $\overline{P_h}(x_0,y_0)$

**Доказательство.** Докажем, например, продолжимость решения $y=\psi(x)$ с $\psi(x_0)=y_0$ на правый полуотрезок Пеано:
Если $\langle a,b\rangle=\langle a,b)$ (т. е. $b\le x_0+h$), то график решения $y=\psi(x)$ при $x\in[x_0,b)$ лежит в треугольнике $\overline{T^+}$, построенном для решения $y=\varphi(x)$. Поэтому у любой последовательности $x_k\in[x_0,b)$ и $x_k\xrightarrow[k\to\infty]{}b$ точки $\big(x+k,\psi(x_k)\big)\in\overline{T^+}\subset\overline{R}$, а значит, найдётся сходящаяся последовательность $\big(x_{k_l},\psi(x_{k_l})\big)$. Её предел – точка $(b,\eta)\in\overline{T^+}$
Следовательно, по теореме о продолжимости решения (теор. 2) $y=\psi(x)$ продолжимо на $[x_0,b]$, хотя могло быть там сразу и задано

- Если теперь $b=x_0+h$, то лемма доказана
- Пусть $b<x_0+h$. Построим равнобедренный треугольник $\overline{T_1^+}$ с вершиной в точке $(b,\eta)$, боковыми сторонами, имеющими тангенсы углов наклона $\pm M$, и основанием, лежащим на основании треугольника $\overline{T^+}$ с абсциссой $x_0+h$. Тогда $\overline{T_1^+}\subset\overline{T^+}$ и по теореме Пеано (теор. 1) на $[b,x_0+h]$ существует решение задачи Коши с начальными данными $(b,\eta)$, продолжающее $\psi(x)$ до точки

$x_0 + h$ включительно

$\square$

По лемме для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ и для любого $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ любое решение задачи Коши уравнения (1.1) с начальными данными $x_0, y_0$ продолжимо на $[x_0 - h, x_0 + h]$. Поэтому, НУО будем считать, что все решения поставленной ЗК определены на выбранном отрезке $\overline{P_h}(x_0, y_0)$. В частности, в определении локальной единственности решения (опр. 18) в качестве $(\alpha, \beta)$ можно будет выбрать любой интервал из $\overline{P_h}(x_0, y_0)$
Пусть $(x_0, y_0) \in G$, $\quad \overline{P_h}(x_0, y_0)$ – некий отрезок Пеано и $\{\, \chi_k(x) \,\}_{k=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность решений ЗК$(x_0, y_0)$ уравнения (1.1), определённых на $[x_0 - h, x_0 + h]$

**Утверждение 5.** Для любых $k \in \mathbb{N}$, $\quad x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ функции

$$\chi_k^l(x) \coloneqq \min\{\, \chi_1(x), ..., \chi_k(x) \,\}, \qquad \chi_k^u(x) \coloneqq \max\{\, \chi_1(x), ..., \chi_k(x) \,\}$$

также являются решениями поставленной задачи на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$

**Доказательство.** Действительно, эти функции удовлетворяют всем трём условиям из определения решения, поскольку для любого $x_* \in [x_0 - h, x_0 + h]$ найдётся такой индекс $1 \le \boldsymbol{j} \le k$, что, например, $\chi_k^l(x_*) = \chi_j(x_*)$, и если $\chi_j(x_*) = \chi_m(x_*)$, то $\chi_j'(x_*) = \chi_m'(x_*) = f\big(x_*, \chi_k^l(x_*)\big)$ $\square$

**Лемма 7** (о нижнем и верхнем решениях)**.** Существуют решения ЗК$(x_0, y_0)$ $y = \chi^l(x)$ и $y = \chi^u(x)$ уравнения (1.1) такие, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [x_0 - h, x_0 + h] : \quad \begin{cases} \chi^l(x) \le \chi_k^l(x) \\ \chi^u(x) \ge \chi_k^u(x) \end{cases} \tag{1.15}$$

**Доказательство.** Рассмотрим, например, последовательность решений $\{\, x_k^l(x) \,\}_{k=1}^{\infty}$ на отрезке $[x_0, x_0 + h]$. Поскольку все их графики лежат в треугольнике $\overline{T^+}$, полученном при построении отрезка Пеано, эта последовательность равномерно ограничена и равностепенно ограничена (см. док-во теоремы Пеано). Следовательно, по лемме Арцела-Асколи из неё можно выделить равномерно на $\overline{P_h}(x_0, y_0)$ сходящуюся подпоследовательность, предел которой тоже будет решением уравнения (1.1) на отрезке Пеано
Но последовательность $\chi_k^l(x)$ монотонно убывает, поэтому она сама будет сходиться к нижнему решению $y = \chi^l(x)$, для которого, очевидно, будет верно неравенство (1.15)
Рассуждения для отрезка аналогичны так же, как и доказательство сходиомости функции $\chi_k^u(x)$ к верхнему решению $y = \chi^u(x)$ $\square$

**Теорема 12** (о локальной единственности решения внутренней ЗК)**.** Пусть $(x_0, y_0) \in G$ – это точка единственности.
Тогда решение ЗК$(x_0, y_0)$ уравнения (1.1) является локально единственным

**Доказательство. От противного**
Построим какой-нибудь отрезок Пеано $\overline{P_h(x_0, y_0)}$ и допустим, что для любого интревала $(\alpha, \beta)$ такого, что $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset [x_0 - h, x_0 + h]$, существуют такие решения ЗК $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, не совпадающие на $(\alpha, \beta)$
Тогда для всякого $k = 1, 2, ...$ найдутся решения $y = \varphi_k(x)$ и $y = \psi_k(x)$ ЗК, определённые на отрезке Пеано, такие, что

$$\exists\, x_k \in \left(x_0 - \frac{h}{k}, x_0 + \frac{h}{k}\right) : \quad \varphi_k(x_k) < \psi_k(x_k)$$

Согласно утверждению 5 функция $\varphi_k^l = \min\{\, \varphi_1(x), ..., \varphi_k(x) \,\}$ и функция $\psi_k^u(x)$, удовлетворяющие неравенства типа (1.15)
В результате $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$ и справедливы неравенства

$$\forall k = 1, 2, ... \quad \varphi^l(x_k) \le \varphi_k(x_k) < \psi_k(x_k) \le \psi^u(x_k)$$

означающие, что $(x_0, y_0)$ – точка единственности – $\lightning$ $\square$

### 1.4.2. Лемма Гронуолла

**Лемма 8** (Гронуолла; об интегральной оценке функции сверху). Пусть функция $h(x) \in \mathcal{C}\big(\langle a,b\rangle\big)$ и существуют такие $x_0 \in \langle a,b\rangle\,, \quad \lambda \geq 0, \quad \mu > 0$, что

$$\forall x \in \langle a,b\rangle \quad 0 \leq h(x) \leq \lambda + \mu\left|\int_{x_0}^{x} h(s)\,\mathrm{d}\,s\right| \tag{1.16}$$

Тогда для любого $x \in \langle a,b\rangle$ справедливо неравенство

$$h(x) \leq \lambda e^{\mu|x-x_0|} \tag{1.17}$$

**Доказательство.**

- Предположим, что $x \geq x_0$
  Введём в рассмотрение функцию $g(x) = \int_{x_0}^{x} h(s)\,\mathrm{d}\,s$

  $$\Longrightarrow \quad g(x_0) = 0, \qquad g(x) \geq 0, \qquad g(x) \in \mathcal{C}^1\big([x_0,b\rangle\big), \qquad g'(x) = h(x) \geq 0$$

  Подставим $g(x)$ в (1.16):

  $$g'(x) \leq \lambda + \mu g(x) \quad \Longrightarrow \quad g'(x) - \mu g(x) \leq \lambda \quad \Longrightarrow \quad e^{-\mu(x-x_0)}\Big(g'(x) - \mu g(x)\Big) \leq \lambda e^{-\mu(x-x_0)}$$

  При этом,

  $$\Big(g(x)e^{-\mu(x-x_0)}\Big)' = g'(x)e^{-\mu(x-x_0)} - \mu e^{-\mu(x-x_0)}g(x) = e^{-\mu(x-x_0)}\Big(g'(x) - \mu g(x)\Big)$$

  Отсюда

  $$\Big(g(x)e^{-\mu(x-x_0)}\Big)' \leq \lambda$$

  Проинтегрируем по $s$ от $x_0$ до $x$:

  $$g(x)e^{-\mu(x-x_0)} - \underbrace{g(x_0)}_{0} \leq \lambda\int_{x_0}^{x} e^{-\mu(s-x_0)}\,\mathrm{d}\,s = -\frac{\lambda}{\mu}(e^{-\mu(x-x_0)} - 1)$$

  Умножим на $e^{\mu(x-x_0)}$:

  $$g(x) \leq \frac{\lambda}{\mu}(e^{\mu(x-x_0)} - 1)$$

  Подставим в (1.16):

  $$h(x) \leq \lambda + \mu g(x) \leq \lambda e^{\mu(x-x_0)}$$

  Таким образом, неравенство доказано для всех $x \in [x_0, b\rangle$

- Если $x \leq x_0$, то в (1.16)

  $$h(x) \leq \lambda - \mu\int_{x_0}^{x} h(s)\,\mathrm{d}\,s, \qquad g(x) \leq 0$$

  Дальнейшее доказательство аналогично

$\square$

**Следствие.** Если $\lambda = 0$, то есть

$$0 \leq h(x) \leq \mu\left|\int_{x_0}^{x} h(s)\,\mathrm{d}\,s\right|$$

то $h(x) \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} 0$

### 1.4.3. Условия Липшица

Бывает, что требование дифференцируемости функции оказывается чрезмерным. Тогда его заменяют “локальным условием Липшица”, которое не допускает более чем линейного роста функции по этой переменной в малой окрестности каждой точки из некоторого множества

**Определение 35.** Функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по $y$ глобально на множестве $D \subset \mathbb{R}^2$, если

$$\exists\, L > 0 : \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \tag{1.18}$$

**Обозначение.** $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(D)$

**Определение 36.** Функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по $y$ локально на множестве $\widetilde{G}$, если для любой точки $(x_0, y_0) \in \widetilde{G}$ найдётся замкнутая $c$-окрестность $\overline{B}_c(x_0, y_0)$ такая, что функция $f$ удовлетворяет условию Липшица по $y$ глобально на множестве $U_c = \widetilde{G} \cap \widetilde{B}_c(x_0, y_0)$

**Обозначение.** $y \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(\widetilde{G})$

### 1.4.4. Теоремы о глобальной единственности решений

**Теорема 13** (о множестве единственности)**.** Пусть в уравнении (1.1) функция $f(x, y)$ определна и непрерывна на множестве $\widetilde{G}$ и удовлетворяет условию Липшица по $y$ локально на множестве $\widetilde{G^\circ} = G^\circ \cup \widehat{G^\circ}$, где $G^\circ \subseteq G$ – область, а $\widehat{G^\circ} \subset \partial G^\circ \cap \widehat{G}$.
Тогда $\widetilde{G^\circ}$ – множество единственности для уравнения (1.1)

**Доказательство.** Возьмём любую точку $(x_0, y_0)$ из множества $\widetilde{G^\circ}$ и покажем, что она является точкой единственности.
Поскольку $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(\widetilde{G^\circ})$, найдутся $\overline{B}_c(x_0, y_0)$ и $L > 0$ такие, что $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(U_c)$ с константой $L$, где $U_c = \widetilde{G^\circ} \cap \overline{B}_c(x_0, y_0)$

- Если $(x_0, y_0) \in G^\circ$, то найдётся $c > 0$ такое, что $U_c = \overline{B}_c(x_0, y_0)$, решение ЗК$(x_0, y_0)$ существует на некотором интервале $(a, b) \ni x_0$ и для любого решения этой задачи, уменьшая при необходимости $(a, b)$, можно добиться, чтобы его график лежал в $U_c$

- Пусть $(x_0, y_0) \in \widehat{G^\circ}$

  – Если решение ЗК$(x_0, y_0)$ отсутсвует, то $(x_0, y_0)$ – это точка единственности по определению

  – Пусть решение существует на некотром промежутке $\langle a, b\rangle$ таком, что $x_0 \in \langle a, b\rangle \subset [x_0 - c, x_0 + c]$

    **Утверждение 6.** Тогда, уменьшая $\langle a, b\rangle$ при необходиости можно добиться, чтобы график решения лежал в $U_c$

    **Доказательство.** Действительно, очевидно, что с уменьшением $\langle a, b\rangle$ график решения попадает в $\overline{B}_c(x_0, y_0)$. А ситуация, когда при $x < x_0$ и (или) $x > x_0$ график, оставаясь в $\widetilde{G}$, не принадлежит $\widetilde{G^\circ}$, преодолевается за счёт выбора константы $c_1 > c$ такой, что в $\overline{B}_{c_1}(x_0, y_0)$ юудет выполняться глобальное условие Липшица с константой, скажем, $L_1 \coloneqq L + 1$. В результате с учётом непрерывности функции $f(x, y)$ бласть $\widetilde{G^\circ}$ увеличиться, включив в себя дугу интегральной кривой в малой окрестности точки $(x_0, y_0)$ □

Рассмотрим любые два решения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ ЗК$(x_0, y_0)$, которые определены по крайней мере на некотором общем промежутке $\langle \alpha, \beta\rangle$ таком, что $x_0 \in \langle \alpha, \beta\rangle \subset [x_0 - c, x_0 + c]$
Как установлено выше, уменьшая при необходимости $\langle \alpha, \beta\rangle$, можно добиться, чтобы для всякого $x \in \langle \alpha, \beta\rangle$ точки $\big(x, \varphi_1(x)\big), \big(x, \varphi_2(x)\big) \in U_c$
По лемме о записи решения в интегральном виде $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ удовлетворяют тождеству (1.2) на $\langle \alpha, \beta\rangle$, т. е. для любого $x \in \langle \alpha, \beta\rangle$ справедливо

$$\varphi_j(x) = \varphi_j(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi_j(s)\big)\, \mathrm{d}\, s, \qquad j = 1, 2$$

Поэтому
$$\varphi_2(x)-\varphi_1(x)=\int_{x_0}^{x}\Big(f\big(s,\varphi_2(s)\big)-\big(s,\varphi_1(s)\big)\Big)\,\mathrm{d}\,s$$
точки $\big(s,\varphi_j(s)\big)\in U_c$ и для них выполнено неравенство (1.18). Тогда
$$|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|\le\left|\int_{x_0}^{x}\left|f\big(s,\varphi_2(s)\big)-f\big(s,\varphi_1(s)\big)\right|\,\mathrm{d}\,s\right|\le\left|\int_{x_0}^{x}L\left|\varphi_2(s)-\varphi_1(s)\right|\,\mathrm{d}\,s\right|$$
К последнему неравенству можно применить следствие к лемме Гроноулла (лемма 8), где $h(x)=|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|,\quad\lambda=0,\quad\mu=L$

Тогда $|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|\overset{\langle\alpha,\beta\rangle}{\equiv}0$, т. е. решения $y=\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ ЗК$(x_0,y_0)$ совпадают в каждой точке $\langle\alpha,\beta\rangle\ni x_0$. Поэтому по определению $(x_0,y_0)$ – это точка единственности □

**Частный случай** Предположим, что в уравнении (1.1) функция $f(x,y)$ непрерывна в области $G$ и удовлетворяет условию Липшица по $y$ локально в области $G^\circ\subset G$.
Тогда $G^\circ$ – это область единственности

**Теорема 14** (о множестве единственности; слабая). Предположим, что в уравнении (1.1) функция $f(x,y)$ определена и непрерывна на множестве $\widetilde{G}$, функция $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ определена и непрерывна в области $G^\circ\subset G$.
Тогда множество $\widetilde{G^\circ}=G^\circ\cup\widehat{G^\circ}$, где $\widehat{G^\circ}\subset\partial G^\circ\cap\widehat{G}$ и состоит из точек, в которых $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ может быть доопределена по непрерывности, является множеством единственности для уравнения (1.1), если при этом для любой точки $(x_0,y_0)\in\widehat{G^\circ}$ найдётся $\overline{B}_c(x_0,y_0)$ такая, что множество $\widetilde{G^\circ}\cap\overline{B}_c(x_0,y_0)$ выпукло по $y$

**Примечание.** Выпуклость множетсва по $y$ означает, что множеству принадлежит отрезок, соединяющий любые две его точки с одинаковой абсциссой

**Примечание.** Существование функции $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ предполагается только в области, а на границе её приходится доопределять, поскольку для определения частной производной обычно требуется, чтобы функция $f$ была задана в полной окрестности этой точки

**Примечание.** В последнем пердположении теоремы говорится о произвольной точке границы множества $\widetilde{G^\circ}$, поскольку для любой точки из области $G^\circ$ требуемое условие выполняется автоматически

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную точку $(x_0,y_0)\in\widetilde{G^\circ}$. Поскольку функция $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывна в точке $(x_0,y_0)$, существует такое $\delta$, что $0\le\delta\le c$, где $c$ берётся из формулировки теоремы, и для любой точки $(x,y)\in U_\delta:=\widetilde{G^\circ}\cap\overline{B}_\delta(x_0,y_0)$ верно неравенство
$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right|\le 1$$
Таким образом, установлено, что $U_\delta$ выпукло по $y$ и
$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\le L:=\left|\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right|+1\quad\forall(x,y)\in U_\delta$$
По теореме Лагранжа для любых двух точек $(x,y_1),(x<y_2)\in U_\delta,\quad y_1<y_2$,
$$\exists\,y^*(x)\in(y_1,y_2):\quad f(x,y_2)-f(x,y_1)=\frac{\partial f\big(x,y*(x)\big)}{\partial y}(y_2-y_1)$$
Здесь точка $\big(x,y^*(x)\big)\in U_\delta$, так как множество $U_\delta$ выпукло по $y$. Поэтому в $U_\delta$ верно неравенство
$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\le L|y_2-y_1|$$
означающее, что $f\in\mathrm{Lip}_y^{gl}(U_\delta)$. Тогда по определению выполнено локальное условие Липшица, а значит, по теореме о единственности $\widetilde{G^\circ}$ – это множество единственности □

Не только гладкость функции $f$ по $y$, но и локальное условие Липшица не является необходимым:

**Теорема 15** (Осгуда; о единственности в области; сильная)**.** Пусть в уравнении (1.1) функция $f(x, y)$ непрерывна в области $G$ и

$$\forall\ (x, y_1), (x, y_2) \in G \quad |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \le h\big(|y_2 - y_1|\big) \tag{1.19}$$

где функция $h(s)$ определена, непрерывна и положительна для всякого $s \in (0, +\infty)$ и

$$\int_\varepsilon^a h^{-1}(s)\,\mathrm{d}\,s \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \infty, \qquad a > \varepsilon > 0$$

Тогда $G$ – это область единственности для уравнения (1.1)

**Доказательство.** Без доказательства □

**Замечание.** В качестве $h(s)$ можно выбрать линейную функцию $Ls$. Тогда неравенство (1.19) окажется глобальным условием Липшица, а теорема о единственности будет вытекать из теоремы Осгуда

## 1.5. Существование общего решения

В этом параграфе будет доказана теорема о существовании общего решения (теор. 7)

### 1.5.1. Область существования общего решения

Опишем множество $A^*$, в котором можно построить общее решение, поскольку гарантировать его существование во всей области единственности $G^\circ$ нельзя, какой бы малой она ни была
В этом параграфе в роли $A^*$ будет выступать вводимый ниже компакт $\overline{A}$

**Алгоритм** (построения $\overline{A}$)**.** Пусть $G^\circ$ – область единственности для уравнения (1.1)
Возьмём любую точку $(x_0^*, y_0^*) \in G^\circ$
Поскольку $G^\circ$ является открытым множеством, существует такое $\delta > 0$, что $\overline{B}_{2\delta}(x_0^*, y_0^*) \subset G^\circ$
Пусть числа $y_1, y_2$ таковы, что

$$\begin{cases} 0 < y_0^* - y_1 < \delta \\ 0 < y_2 - y_0^* < \delta \end{cases}$$

и найдётся отрезок $[a, b] \ni x_0^*$ такой, что графики решений ЗК$(x_0^*, y_1)$ $y = \varphi_1(x)$ и ЗК$(x_0^*, y_2)$ $y = \varphi_2(x)$ лежат в $\overline{B}_c$ при $x \in [a, b]$. Тогда в $\overline{B}_\delta$ содержится компакт

$$\overline{A} = \{\ (x, y) \mid a \le x \le b, \quad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\ \} \tag{1.20}$$

При этом $A$ (то же самое, со строгими неравенствами) – это область, так как по построению $\varphi_1(x_0^*) = y_1 < y_2 = \varphi_2(x_0^*)$, а значит, $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ для всякого $x \in [a, b]$, поскольку в области единственности $G^\circ$ дуги интегральных кривых не могут соприкасаться и разбивать $A$ на несвязные подмножества

**Лемма 9** (о поведении решений на компакте $\overline{A}$)**.** Для любой точки $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ решение ЗК$_{(1.1)}(x_0, y_0)$ $y = \varphi(x)$ продолжимо на отрезок $[a, b]$

**Доказательство.** Для любой точки $(x_0^*, y_0^*) \in G^\circ$ построим компакт $\overline{A}$ вида (1.20), тогда $\overline{A} \subset \overline{B}_\delta \subset \overline{B}_{2\delta} \subset G^\circ$
Возьмём произвольную точку $(x_0, y_0) \in \overline{A}$. Тогда прямоугольник

$$\overline{R} \coloneqq \{\ (x, y) \mid |x - x_0| \le \delta, \quad |y - y_0| \le \delta\ \} \quad \subset \overline{B}_{2\delta}$$

Пусть $M \coloneqq \max_{\overline{B}_{2\delta}} |f(x, y)| > 0$ (при $M = 0$ лемма очевидна)
Положим $h \coloneqq \min\left\{\delta, {}^{\delta}\!/_{M}\right\}$. Тогда $P_h(x_0, y_0) = [x_0 - h, x_0 + h]$ – отрезок Пеано, построенный для произвольной точки $(x_0, y_0) \in \overline{A}$
Следовательно, по теореме Пеано решение ЗК$(x_0, y_0)$ $y = \varphi(x)$ определено на отрезке Пеано $[x_0 - h, x_0 + h]$, длина которого неизменна для всех точек $(x_0, y_0) \in \overline{A}$

- Рассмотрим функцию $\varphi(x)$ при $x > x_0$:

– Если $x_0+h < b$, то $\varphi_1(x_0+h) \le \varphi(x_0+h) \le \varphi_2(x_0+h)$, а значит, точка $x_0+h$, $\big(x_0+h, \varphi(x_0+h)\big)$ Выбрав эту точку в качестве начальной, решение $y - \varphi(x)$ можно продолжить вправо на полуотрезок Пеано $[x_0+h, x_0-h]$

  * Если $x_0+2h \ge b$, то лемма доказана
  * Иначе сделаем очередное продолжение решения вправо на длину $h$
    В результате за конечное число шагов будет продолжено вправо до точки $b$ включительно

- Аналогично $y = \varphi(x)$ можно продолжить влево до точки $a$

□

### 1.5.2. Формула общего решения

Для любой точки $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ обозначим через $y = y(x, x_0, y_0)$ решение ЗК$_{(1.1)}(x_0, y_0)$
Тогда $y(x_0, x_0, y_0) = y_0$, и по лемме о поведении решений на компакте (лемма 9) решение $y = (x, x_0, y_0)$ определено для всякого $x \in [a, b]$
Для произвольной точки $\zeta \in [a, b]$ рассмотрим функцию

$$\varphi(xC) = y(x, \zeta, C), \qquad (\zeta, C) \in \overline{A} \tag{1.21}$$

на прямоугольнике $\overline{Q} = \overline{Q}_{\overline{A}} \coloneqq \{\, (x, C) \mid a \le x \le b, \quad \varphi_1(\zeta) \le C \le \varphi_2(\zeta) \,\}$, который является частным случаем множества $Q_{A^*}$ из определения общего решения (опр. 22)
В самом деле, $\varphi_1(\zeta) \le C \le \varphi_2(\zeta)$ по построению $\overline{A}$. А по лемме решение $y = y(x, \zeta, C)$ определено для любого $x \in [a, b]$ и при $x = \zeta$ по определению решения ЗК $\varphi(\zeta, C) = y(\zeta, \zeta, C) = C$

**Теорема 16** (о существовании общего решения)**.** Введённая в формуле (1.21) функция $y = \varphi(x, C)$ является общим решением уравнения (1.1) на компакте $\overline{A}$ из (1.20), построенном в окрестности произвольной точки из области единственности $G^\circ$

**Доказательство.** Покажем, что функция $y = \varphi(x, C)$ удовлетворяет определению общего решения уравнения (1.1):

1. Возьмём произвольную точку $(x_0, y_0) \in \overline{A}$ и рассмотрим уравнение $y_0 = \varphi(x_0, C)$ или согласно (1.21) уравнение
   $$y_0 = y(x_0, \zeta, C) \tag{1.22}$$
   Наличие у него решения $C = C_0$ фактически означает, что "выпущенное" из точки $(\zeta, C_0) \in \overline{A}$ решение уравнения (1.1) в момент $x_0$ попадает в точку $(x_0, y_0) \in \overline{A}$
   Покажем, что решение уравнения (1.22) сущетсувует и единственно:
   "Выпустим" из точки $(x_0, y_0)$ решение $y = y(x, x_0, y_0)$, которое по лемме 9 определено на всём отрезке $[a, b]$ и, в частности, при $x = \zeta \in [a, b]$ по определению (1.21)
   Пусть $C_0 = y(\zeta, x_0, y_0)$. Тогда $(\zeta, C)$ – это точка единственности, так как принадлежит графику решения $y = y(x, x_0, y_0)$
   Поэтому решение ЗК$(\zeta, C)$ $y = u(x, \zeta, C_0)$ с начальными данными $\zeta, C_0$ по лемме о поведении решений на компакте $\overline{A}$ (лемма 9) продолжимо на $[a, b]$ и совпадает с решением $y = y(x, x_0, y_0)$
   Следовательно, $y_0 = y(x_0, \zeta, C)$, т. е. график функции $y = y(x, \zeta, C_0)$ проходит через точку $(x_0, y_0)$. Другими словами, дуга интегральной кривой, проходящая через точки $(x_0, y_0)$, $(\zeta, C_0)$, имеет на отрезке $[a, b]$ две параметризации $y = y(x, x_0, y_0)$ и $y = (x, \zeta, C_0)$
   Итак, установлено, что уравнение (1.22) имеет единственное решение $C = C_0 = y(\zeta, x_0, y_0)$, т. е. $y_0 = y\big(x_0, \zeta, y(\zeta, x_0, y_0)\big)$

2. Функция $y = \varphi(x, C_0)$ является решением ЗК$_{(1.1)}(x_0, y_0)$, поскольку согласно (1.21) и (1.22) $\varphi(x_0, C_0) = y(x_0, \zeta, C_0) = y_0$

3. Осталось доказать, что функция $y = \varphi(x, C)$ из (1.21) непрерывна на компакте $\overline{Q}$ по совокупности переменных:

   - Поскольку для всякого $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ функция $y = \varphi(x, C)$ – это решение уравнения (1.1), она непрерывна по $x$ при $x \in [a, b]$
   - Покажем, что для всякого $x \in [a, b]$ функция $y = \varphi(x, C)$ непрерывна по $C$ при $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$:
     Допуская **противное**, предположим, что найдутся $\widetilde{\varepsilon} > 0$, $\widetilde{x} \in [a, b]$ и последовательность

$C_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \widetilde{C}$, $C_k \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ такие, что $\left|\varphi(\widetilde{x}, C_k) - \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C})\right| \geq \widetilde{\varepsilon}$ при всех $k \geq 1$. Это значит, что при $x = \widetilde{x}$ функция $\varphi(\widetilde{x}, C)$ терпит разрыв в точке $\widetilde{C} \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$, поскольку любой компакт, в частности отрезок $[\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$, содержит все свои предельные точки. В этом случае, кстати, $\widetilde{x} \neq \zeta$, так как по определению $\varphi(\zeta, C_k) = C_k \xrightarrow[k\to\infty]{} C = \varphi(\zeta, C)$

Выпуская из точек $(\zeta, C_k) \in \overline{A}$ дуги интегральных кривых, получаем последовательность решений $y = y(x, \zeta, C_k) = \varphi(x, C_k)$. Поскольку из любой сходящейся последовательности можно выдулить монотонную подпоследовательность, НУО считаем, что последовательность $C_k$ монотонно возрастает, т. е. $C_k < C_{k+1} < \widetilde{C}$ для любого $k \geq 1$

В области $G^\circ$ интегральные кривые не имеют общих точек, поэтому последовательность $\varphi(\widetilde{x}, C_k)$ тоже монотонно возрастает и ограничена, так как $\varphi(\widetilde{x}, C_k) \leq \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C}) - \widetilde{\varepsilon}$ по предположению. Но любая ограниченная монотонная последовательность имеет предел

Пусть $\widetilde{y} = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi(\widetilde{x}, C_k)$, тогда $\widetilde{y} \leq \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C}) - \widetilde{\varepsilon}$

Выберем произвольную точку $y^*$ из интервала $\left(\widetilde{y}, \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C})\right)$

Рассмотрим определённое на $[a, b]$ решение ЗК$(\widetilde{x}, y^*)$, обозначаемое $y = y(x, \widetilde{x}, y^*)$

Пусть $C^* = y(\zeta, \widetilde{x}, y^*)$. Тогда $C^* < \widetilde{C}$, так как $y^* < \varphi(\widetilde{x}, \widetilde{C}) = y(\widetilde{y}, \zeta, \widetilde{C})$

Дугу интегральной кривой решения $y = y(x, \widetilde{x}, y^*)$ на $[a, b]$, как было установлено, параметризует также решение с начальными данными $\zeta, C^*$, имеющее согласно формуле (1.21) вид $y = \varphi(x, C^*)$, причём $\varphi(\widetilde{x}, C^*) = y^*$

Однако существует индекс $k^*$ такой, что член $C^{k*}$ сходящейся к $\widetilde{C}$ последовательности $C_k$ будет больше, чем $C^*$

В результате получилось так, что дуги интегральных кривых решений $y = \varphi(x, C_{k*})$ и $y = \varphi(x, C^*)$ пересекаются в некоторой точке $x^*$, лежащей между $\zeta$ и $\widetilde{x}$, поскольку $\varphi(\zeta, C_{k*}) = C_{k*} > C^* = \varphi(\zeta, C^*)$, а $\varphi(\widetilde{x}, C_{k*}) < \widetilde{y} < y^* = y(\widetilde{x}, \zeta, C^*) = \varphi(\widetilde{x}, C^*)$ – $\lightning$ с тем, что $G$ – область единственности

Итак, доказано, что функция $y = \varphi(x, C)$ непрерывна по каждой из переменных в прямоугольнике $\overline{Q}$. Но этого недостаточно для её непрерывности по совокупности переменных

Воспользуемся ещё одним свойством функции $\varphi$:

Поскольку $y = \varphi(x, C)$ при любой константе $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ есть решение уравнения (1.1), то $\frac{\partial \varphi(x,C)}{\partial x} \equiv f\big(x, \varphi(x, C)\big)$ на $[a, b]$

Но $\big(x, \varphi(x, C)\big) \in \overline{A}$, когда точка $(x, C) \in \overline{Q}$, а на компакте $\overline{A}$ выполняется неравенство $|f(x, y)| \leq M$. Следовательно, функция $\left|\frac{\partial \varphi(x,C)}{\partial x}\right|$ ограничена на $[a, b]$

С учётом теоремы Лагранжа заключаем, что для любой константы $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi(\zeta)]$ и для любых $x_1, x_2 \in [a, b],\ x_1 < x_2$ найдётся такое $x_C \in (x_1, x_2)$, что $\varphi(x_2, C) - \varphi(x_1, C) = \frac{\partial \varphi(x_C, C)}{\partial x}(x_2 - x_1)$

Этого достаточно, чтобы непрерывность функции $y = \varphi(x, C)$ по $x$ на $[a, b]$, равномерная относительно $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$ в силу признака Вейрештрасса с $\delta = {}^{\varepsilon}\!/\!_{M}$, стала очевидной

Последнее свойство функции $\varphi$ наряду с её поточечной непрерывностью по $C$ гранатирует непрерывность $\varphi(x, C)$ по совокупности переменных в прямоугольнике $\overline{Q}$

Действительно, возьмём произвольную точку $(x_0, C_0) \in \overline{Q}$ и покажем, что функция $\varphi(x, C)$ непрерывна в этой точке:

Для этого зафиксируем любое число $\varepsilon > 0$. Тогда в силу непрерывности функции $\varphi$ по $C$ найдётся такое $\delta_{x_0} > 0$, что

$$\forall C \quad \left(|C - C_0| < \delta_{x_0} \implies |\varphi(x_0, C) - \varphi(x_0, C_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

А из равномерной непреывности $\varphi(x, C)$ по $x$ относительно $C$ вытекает, что

$$\exists\, \delta_0 > 0: \quad \forall C \in [x\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)] \quad \forall x \quad \left(|x - x_0| < \delta_0 \implies |\varphi(x, C) - \varphi(x_0, C)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

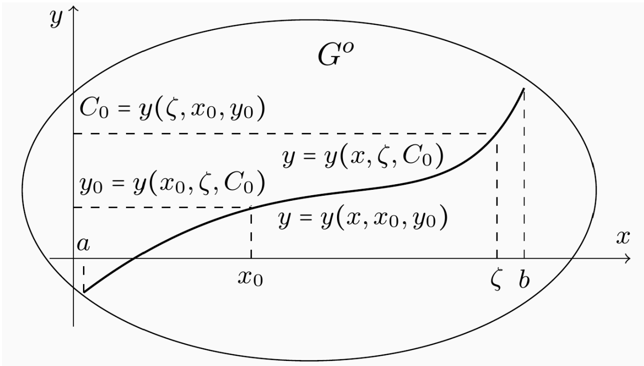
Выберем число $\delta \coloneqq \min\{\, \delta_{x_0}, \delta_0 \,\}$, тогда для любой точки $(x, C)$ получаем:

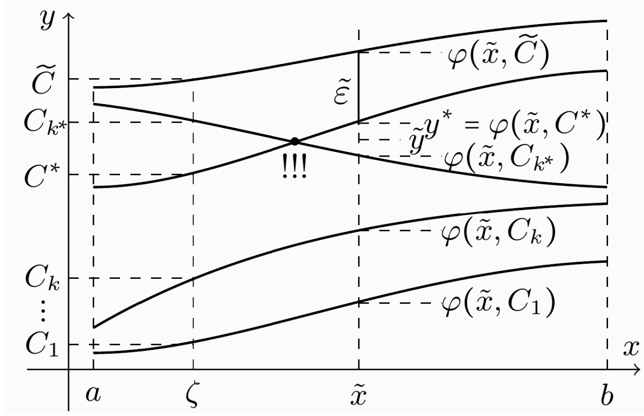
$$\|(x, C) - (x_0, C_0)\| \coloneqq \max\{\ |\ x - x_0|, |C - C_0|\ \} < \delta$$

Следовательно,

$$|\varphi(x, C) - \varphi(x_0, C_0)| \overset{\triangle}{\leq} |\varphi(x, C) - \varphi(x_0, C)| + |\varphi(x_0, C) - \varphi(x_0, C_0)| = \varepsilon$$

$\square$




**Определение 37.** Общее решение $y = \varphi(x, C)$, определённое формулой (1.21), будем называть общим решением в форме Коши или классическим общим решением уравнения первого порядка (1.1)

**Теорема 17** (о дифференцируемости общего решения)**.** Пусть на компакте $\overline{A}$ из (1.20) при некотором $\zeta \in [a, b]$ формула (1.21) задаёт общее решение $y = \varphi(x, C)$, и в уравнении (1.1) $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема по $y$ в некоторой окрестности $\overline{A}$

$$\Longrightarrow \qquad \forall (x, C) \in \overline{Q}: \quad \frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial x} = \exp\left(\int_\zeta^x \frac{\partial f\big(t, \varphi(t, C)\big)}{\partial y}\, \mathrm{d}\, t\right) \tag{1.23}$$

**Доказательство.** Зафиксируем произвольным образом константу $C \in [\varphi_1(\zeta), \varphi_2(\zeta)]$, после чего для всякого $x \in [a, b]$ положим $\Delta\varphi = \varphi(x, C + \Delta C) - \varphi(x, C)$, где $\Delta C$ – приращение аргумента $C$ Поскольку при фиксированной $C$ функция $y = \varphi(x, C)$ является решением уравнения (1.1), справедлива цепочка равенств:

$$\frac{\mathrm{d}(\Delta\varphi)}{\mathrm{d}\, x} = f\Big(x, \varphi(x, C + \Delta C)\Big) - f\Big(x, \varphi(x, C)\Big) = \int_0^1 \mathrm{d}\,\Big(f\big(x, \varphi(x,) + \Delta\varphi \cdot s\big)\Big) =$$

$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\, f\Big(x, \varphi(x, C) + \Delta\varphi \cdot s\Big)}{\mathrm{d}\, s}\, \mathrm{d}\, s = p(x, \Delta C)\Delta\varphi, \qquad p(x, \Delta C) \coloneqq \int_0^1 \frac{\partial f\Big(x, \varphi(x, C) + \Delta\varphi \cdot s)}{\partial y}\, \mathrm{d}\, s$$

- Пусть $\Delta C \neq 0$, тогда, поделив первое и последнее выражение в цепочке на $\Delta C$, убеждаемся, что функция $\psi(x, \Delta C) \coloneqq \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta C}$ является решением ЗК$(\zeta, 1)$ линейного однородного уравнения $\frac{\mathrm{d}\, u}{\mathrm{d}\, x} = p(x, \Delta C)u$, так как

$$\psi(\zeta, \Delta C) = \frac{\varphi(\zeta, C + \Delta C) - \varphi(\zeta, C)}{\Delta C} \underset{(1.21)}{=\!=} \frac{C + \Delta C - C}{\Delta C} = 1$$

  Следовательно, $\psi(x, \Delta C) = \exp\left(\int_\zeta^x p(t, \Delta C)\, \mathrm{d}\, t\right)$

- Но $p(x, \Delta C)$ существует и при $\Delta C = 0$:

$$p(x, 0) = \frac{\partial f\Big(x, \varphi(x, C)\Big)}{\partial y}$$

Поэтому

$$\frac{\partial \varphi(x, C)}{\partial C} = \lim_{\Delta C \to 0} \psi(x, \Delta C) = \exp\left(\lim_{\Delta C \to 0} \int_\zeta^x p(t, \Delta C)\, \mathrm{d}\, t\right)$$

В результате частная производная общего решения $y = \varphi(x, C)$ по $C$ существует, непрерывна и вычисляется по формуле (1.23) $\square$

**Замечание.** В теореме доказано, что если в уравнении (1.1) правая часть непрерывно дифференцируема по $y$, то решение $y = y(x, x_0, y_0)$, рассматриваемое как функция трёх переменных, имеет непрерывную положительнею производную по $y_0$

# Глава 2

# Уравнения первого порядка в симметричной форме

## 2.1. Существование и единственность решения

### 2.1.1. Объект изучения

Уравнение первого порядка в симметрической форме имеет вид

$$M(x,y)\,\mathrm{d}\,x + N(x,y)\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{2.1}$$

и в нём вещественные функции $M$ и $N$ определены и непрерывны на связном множестве $\widetilde{B} = B \cup \widehat{B} \cup \breve{B}$, где $B$ – это область в $\mathbb{R}^2$, в которой

$$M^2(x,y) + N^2(x,y) \neq 0 \tag{2.2}$$

а множества $\widehat{B}, \breve{B}$, возможно пустые, состоят из граничных точек области $B$, причём для точек из множества $\widehat{B}$ условие (2.2) выполняется, а лдя точек из множества $\breve{B}$ – нет
Таким образом, ни в одной из точек множеств $B$ и $\widehat{B}$ функции $M$ и $N$ могут одновременно обратиться в нуль, а для любой точки $(x,y) \in \breve{B}$ справедливы равенства $M(x,y) = N(x,y) = 0$
Кроме того, в каждой точке граничного множества $B^* = \partial B \setminus (\widehat{B} \cup \breve{B})$ хотя бы одна из функций $M$ или $N$ не определена или разрывна

**Определение 38.** Точки из множества $\breve{B}$ будем называть особыми, а точки из множества $B \cup \widehat{B}$ – обыкновенными или неособенными

Уравнение (2.2) будет рассматриваться и решаться на множестве обыкновенных точек, поскольку в особых точках оно фактически вырождается

### 2.1.2. Решение уравнения в симметричной форме

Выделим замкнутые множества нулей функций $M$ и $N$:

$$\overline{M^\circ} \coloneqq \left\{ (x,y) \in \widetilde{B} \;\middle|\; M(x,y) = 0 \right\}, \qquad \overline{N^\circ} \coloneqq \left\{ (x,y) \in \widetilde{B} \;\middle|\; N(x,y) = 0 \right\}$$

Обозначим через $\widetilde{B_N}$ и $\widetilde{B_M}$ произвольные компоненты связности соответсвенно множества $\dfrac{\widetilde{B}}{\overline{N^\circ}}$, на котором $N(x,y) \neq 0$ и множества $\dfrac{\widetilde{B}}{\overline{M^\circ}}$, на котором $M(x,y) \neq 0$. Введём также множество $\widetilde{B}_{MN} = \widetilde{B}_M \cap \widetilde{B}_N$
Очевидно, что все три разновидности введённых множеств могут иметь общие границы и состоят из обыкновенных точек
Уравнение (2.1) на любом из множеств $\widetilde{B}_N$ равносильно уравнению, разрешённому относительно производной

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \tag{2.3}$$

на множествах $\widetilde{B}_M$ оно равносильно еревёрнутому уравнению

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)} \tag{2.4}$$

а на любом из множеств $\widetilde{B}_{MN}$ уравнение в симметричной форме (2.1) равносильно каждому из уравнений (2.3), (2.4)
Но на любом пожмножестве множества $\widetilde{B}_N$, содержащем хотя бы одну точку из $\overline{M^\circ}$, можно перейти только к уравнению (2.3). Аналогично обстоит дело в случае, когда $\widetilde{B}_M \cap \overline{N^\circ} \neq \emptyset$
Это приводит к вынужденному обобщению понятия решения:

**Определение 39.** Решением уравнения (2.1) называется определённая на некотром промежутке $\langle a, b\rangle$ функция $y = \varphi(x)$ или функция $x = \psi(y)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. функция $\varphi(x)$ или $\psi(y)$ дифференцируема на $\langle a, b\rangle$
2. точка $\big(x, \varphi(x)\big) \in \widetilde{B} \setminus \breve{B}$ для любого $x \in \langle a, b\rangle$ или
   точка $\big(\psi(y), y\big) \in \widetilde{B} \setminus \breve{B}$ для любого $y \in \langle a, b\rangle$
3. $M\big(x, \varphi(x)\big) + N\big(x, \varphi(x)\big)\varphi'(x) \equiv 0$ на $\langle a, b\rangle$ или
   $M\big(\psi(y), y\big)\psi'(y) + N\big(\psi(y), y\big) \equiv 0$ на $\langle a, b\rangle$

При этом решения уравнения (2.1) подразделяются на внутренние, граничные и смешанные в соответствии с аналогичным подразделением решений уравнения (1.1)

**Замечание.** По определению график любого решения состоит только из обыкновенных точек

**Замечание.** По аналогии с уравнением (1.1) для уравнения (2.1) вводится понятие полного решения, в котором максимальный интервал указывается либо для решения $y = \varphi(x)$, график которого лежит в $\widetilde{B}_N$, любо для решения $x = \psi(y)$ с графиком из $\widetilde{B}_M$

**Определение 40.** Точка $(x_0, y_0) \in \widetilde{B} \setminus \breve{B}$ называется точкой неединственности уравнения (2.1), если хотя бы для одного из уравнений (2.3), (2.4) она окажется точкой неединственности. В противном случае точка $(x_0, y_0)$ – это точка единственности

**Замечание.** Решения уравнения (2.1) могут быть частными или особыми точкно так же, как это происходит с решениями уравнения, разрешённого относительно производной

### 2.1.3. Интегральные кривые

Уравнение в симметричной форме позволяет обобщить понятие интегральной кривой. Действительно, через каждую точку мноежства $\widetilde{B} \setminus \breve{B}$, используя одно из разрешённых уравнений, можно провести отрезок поля, построив, тем самым, поле направлений уравнения (2.1)
Наличие поля направлений позволяет сохранить геометрическое определение интегральной кривой, а именно

**Определение 41.** Интегральной кривой уравнения (2.1) на множестве $\widetilde{B} \setminus \breve{B}$ назовём любую гладкую кривую, лежащую в этом множестве, напраление касательной к которой в каждой точке совпадает с направлением поля в этой точке

В результате локально интегральная кривая задаётся или функцией $y = \varphi(x)$, или $x = \psi(y)$

### 2.1.4. Существование и единственность решения

Поскольку уравнение (2.1) в некоторой окрестности любой неособой точки сводится к одному из разрешённых уравнений, то все локальные определения и теоремы из главы 1 остаются верными

**Замечание.** В дальнейшем уравнение (2.1) юудет рассматриваться только в области $B$, в которой по определению рассматриваются только особые точки
В результате по определению все решения будут внутренними и их максимальные интервалы существования всегда будут интервалами

**Теорема 18** (о существовании решения)**.** Пусть в уравнении (2.1) функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывны в области $B$
Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in B$ и для любого отрезка Пеано $P_h(x_0, y_0)$, построенного для одного из

уравнений (2.3), (2.4), определённого в некоторой окрестности $B_c(x_0, y_0) \subset B$, существует по крайней мере одно решение ЗК$_{(2.1)}(x_0, y_0)$, заданное на $P_h(x_0 y_0)$

**Теорема 19** (о единственности в области; слабая). Пусть в уравнении (2.1) функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывны в области $B$, а в области $B^\circ \subset B$ верно хотя бы одно из двух условий:

- $N(x, y) \neq 0, \quad$ существуют и непрерывны частные производные $M'_y(x, y)$, $N'_y(x, y)$
- $M(x, y) \neq 0, \quad$ существуют и непрерывны чатсные производные $M'_x(x, y), N'_x(x, y)$

Тогда $B^\circ$ – это область единственности

**Доказательство.** Действительно, при выполнении первого условия, например, в области $B^\circ$ уравнение (2.1) равносильно уравнению (1.1) с $F = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$, и частная производная $\frac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{M\frac{\partial N}{\partial y} - N\frac{\partial M}{\partial y}}{N^2}$ непрерывна, а значит, верна слабая теорема о единственности (теор. 6) □

**Следствие.** Область $B$ будет областью единственности, если найдётся открытое покрытие её областями, для каждой их которых выполняется хотя бы одно из приведённых в формулировке теоремы условий

## 2.2. Интергал уравнения в симметричной форме

### 2.2.1. Определение интеграла

Интегральные кривые уравнения в симметричной форме по определению могут иметь любые касательные. Параметризуют их непрерывные неявные функции $U(x, y) = 0$. Именно в таком виде будем искать решение уравнения (2.1), называя их при этом интегралами. Аналог общего решения будем называть общим интегралом

**Определение 42.** Непрерывную в области $B \subset \mathbb{R}^2$ функцию $U(x, y)$ будем называть допустимой, если для любой точки $(x_0, y_0) \in B$ найдётся такая непрерывная функция $y = \xi(x)$ или $x = \eta(y)$, определённая на интервале $(\alpha, \beta)$, содержащем точку $x_0$ или $y_0$, что:

1. $y_0 = \xi(x_0)$ или $x_0 = \eta(y_0)$
2. точка $\big(x, \xi(x)\big) \in B$ для любого $x \in (\alpha, \beta)$ или
   точка $\big(\eta(y), y\big) \in B$ для любого $y \in (\alpha, \beta)$
3. $y = \xi(x)$ или $x = \eta(y)$ – единственное решение уравнения

$$U(x, y) = U(x_0, y_0) \tag{2.5}$$

**Замечание.** Условие 3 означает, что выполняется по крайней мере одно из тождеств:

$$\left[\begin{array}{l} U\big(x, \xi(x)\big) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} U(x_0, y_0) \\ U\big(\eta(y), y\big) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} U(x_0, y_0) \end{array}\right.$$

В дальнейшем будем всегда предполагать, что $B$ – это область единственности, так как общий интеграл может быть построен только в области единственности

**Определение 43.** Допустимая функция $U(x, y)$назыается интегралом уравнения (2.1) в области единственности $B^\circ$, если для любой точки $(x_0, y_0) \in B^\circ$ единственная функция $y = \xi(x)$ или $x = \eta(y)$ из определения допустимой функции – это решение ЗК$_{(2.1)}(x_0, y_0)$ на $(\alpha, \beta)$, т. е. удовлетворяет тождеству З$_1$ или З$_2$ из определения решения

### 2.2.2. Характеристической свойство интеграла

**Примечание.** В математике часто характеристическим свойством назвыают другое определение того же объекта

**Теорема 20** (о характеристическом свойстве интеграла). Для того чтобы допустимая функция $U(x, y)$ была интегралом уравнения в симметричной форме (2.1) в области единственности $B^\circ$, **необходимо и достаточно**, чтобы $U(x, y)$ обращалась в постоянную вдоль любого решения (2.1), т. е. чтобы:

- $U\big(x, \varphi(x)\big) \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} C$ для любого решения $y = \varphi(x)$, определённого на $\langle a, b\rangle$
- $U\big(\psi(y), y\big) \overset{\langle a,b\rangle}{\equiv} C$ для любого решения $x = \varphi(y)$, определённого на $\langle a, b\rangle$

**Доказательство.**

- Необходимость:
  Пусть $U(x, y)$ – интеграл уравнения (2.1) в области единственности $B^\circ$, и пусть, например, $y = \varphi(x)$ – какое-либо решение уравнения (2.1), определённое на промежутке $\langle a, b\rangle$
  НУО[1]будем считать, что $\langle a, b\rangle = (a, b)$
  Возьмём произвольную точку $x_0 \in (a, b)$ и положим $y_0 \coloneqq \varphi(x_0)$
  Точка $(x_0, y_0) \in B^\circ$, поэтому по определению допустимой функции уравнение (2.5) $U(x, y) = U(x_0, y_0)$ однозначно разрешимо или относительно $x$, или относительно $y$:

  – Пусть (2.5) однозначно разрешимо относительно $y$, т. е. существует такая единственная функция $y = \xi(x)$, заданная на некотором $(\alpha, \beta) \ni x_0$, что $U\big(x, \xi(x)\big) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} U(x_0, y_0)$
  Эта функция по опреелению интеграла является решением ЗК$_{(2.1)}(x_0, y_0)$
  Поскольку $B^\circ$ – область единственности, $\varphi(x) \overset{(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})}{\equiv} \xi(x)$, где $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = (a, b) \cap (\alpha, \beta)$. Следовательно,

  $$U\big(x, \varphi(x)\big) \overset{(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})}{\equiv} U(x_0, y_0) \tag{2.6}$$

  – Пусть (2.5) однозначно разрешимо относительно $x$, т. е. на некотором интервале $(\alpha, \beta) \ni y_0$ существует единственная функция $x = \eta(y)$ такая, что $\eta(y_0) = x_0$ и $U\big(\eta(y), y\big) \equiv U(x_0, y_0)$ на $(\alpha, \beta)$
  Тогда по определению интеграла $x = \eta(y)$ на $(\alpha, \beta)$ является решением ЗК$_{(2.1)}(y_0, x_0)$, а значит, единственное решение этой ЗК имеет два представления: $y = \varphi(x)$ и $x = \eta(y)$. Поэтому дуга интегральной кривой такого решения в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0)$, не имея вертикальных и горизонтальных касательных, может быть параметризована как функцией $y = \varphi(x)$, так и функцией $x = \eta(x)$
  Иными словами, сущетвуют такие интервалы $(\widetilde{a}, \widetilde{b})$ и $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$, что

  $$x_0 \in (\widetilde{a}, \widetilde{b}) \subset (a, b), \quad y_0 \in (\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \subset (\alpha, \beta), \qquad y \overset{(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})}{\equiv} \varphi\big(\eta(y)\big), \quad x \overset{(\widetilde{a},\widetilde{b})}{\equiv} \eta\big(\varphi(x)\big)$$

  Поэтому справедлива доказывающая (2.6) цепочка равенств:

  $$U\big(x, \varphi(x)\big) \overset{)\widetilde{a},\widetilde{b}}{\equiv} U\Big(\eta\big(\varphi(x)\big), \varphi(x)\Big) \overset{(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})}{\equiv} U\big(\eta(y), y\big) \overset{(\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta})}{\equiv} U(x_0, y_0)$$

  – Осталось показать, что (2.6) выполняется на всём интервале $(a, b)$:
  **Допустим**, что $\widetilde{\beta} < b$ и найдутся такие $x_1, x_2 \in [\widetilde{\beta}, b)$, $(x_1 < x_2)$, что $U\big(x, \varphi(x)\big) \overset{(\widetilde{\alpha},x_1]}{\equiv} U(x_0, y_0)$, $\quad U\big(x, \varphi(x)\big) \ne U(x_0, y_0)$ для любого $x \in (x_1, x_2)$
  При $y_1 = \varphi(x_1)$ в последнем тождестве $U(x_1, y_1) = U(x_0, y_0)$. По определению решения точка $(x_1, y_1) \in B^\circ$, поэтому для неё верны все рассуждения, касающщиеся точки $(x_0, y_0)$
  Пусть $y = \xi_1(x)$ – единственное на $(\alpha_1, \beta_1)$, $\Big(x_! \in (\alpha_1, \beta_1) \subset (x_0, x_2)\Big)$ решение уравнения $U(x, y) = U(x_1, y_1)$, т. е. $U\big(x, \xi_1(x)\big) \equiv U(x_1, y_1)$ на $(\alpha_1, \beta_1)$, и оно же по определению интеграла является единственным решением ЗК$(x_1, y_1)$. Тогда $\xi_1(x) \equiv \varphi(x)$ на $(\alpha_1, \beta_1)$, и $U\big(x, \varphi(x)\big) \overset{[x_1,\beta_1)}{\equiv} U(x_1, y_1) = U(x_0, y_0)$ – $\lightning$
  Ситуация с точками $x_1, x_2 \in (a, \widetilde{\alpha}]$ рассматривается аналогично

  – Достаточность:
  Пусть допустимая функция $U(x, y)$ обращается в постоянную на любом решении уравнения (2.1). Покажем, что в таком случае $U(x, y)$ – интеграл этого уравнения в области единстввенности $B^\circ$

Возьмём произвольную точку $(x_0, y_0) \in B^\circ$. Тогда существует единственное решение ЗК$(x_0, y_0)$ вида $y = \varphi(x)$ на $(a, b) \ni x_0$, или $x = \psi(y)$ на $(a, b) \ni y_0$
Пусть, например, $x = \psi(y)$ является решением уравнения (2.1). Тогда по условию теоремы $U\big(\psi(y), y\big) \equiv U(x_0, y_0)$ на $(a, b)$
Если функция $U(x, y)$, будучи допустимой, однозначно разрешима относительно $x$, т. е. на некотором $(\alpha, \beta) \ni y_0$ существует и единственна функция $x = \eta(y)$ такая, что $U\big(\eta(y), y\big) \equiv U(x_0, y_0)$ на $(\alpha, \beta)$, то $\psi(y) \equiv \eta(y)$ на $(a, b) \cap (\alpha, \beta)$. А если уравнение (2.5) однозначно разрешимо относительно $y$, то можно показать, как и при доказательстве необходимости, что функция $y = \xi(x)$ – решение уравнения (2.1), поскольку является обратной к решению $x = \psi(y)$
В результате допустимая функция $U(x, y)$ – это интеграл уравнения (2.1) в области единственности $B^\circ$

□

Действительно, если $\langle a, b\rangle = [a, b]$, то по лемме о продолжимости решения, решение может быть продолжено на интервал $(a_1, b_1) \supset [a, b]$

### 2.2.3. Характеристическое свойство гладкого интеграла

**Определение 44.** Гладкую функцию $U(x, y)$ будем называть галдкой допустимой в области $B$, если $U_x'^2 + U_y'^2 > 0$ для любой точки $(x, y) \in B$

**Определение 45.** Интеграл $U(x, y)$ уравнения (2.1) будем называть гладким, если $U$ – гладкая допустимая функция

**Теорема 21** (о характеристическом свойстве гладкого интеграла)**.** Для того чтобы гладкая допустимая функция $U(x, y)$ была гладким интегралом уравнения (2.1) в области единственности $B^\circ$, **необходимо и достаточно**, чтобы выполнялось тождество

$$N(x, y)U_x'(x, y) - M(x, y)U_y'(x, y) \overset{B^\circ}{\equiv} 0 \tag{2.7}$$

**Доказательство.**

- Необходимость
  Пусть $U(x, y)$ – это гладкий интеграл уравнения (2.1). Возьём любую точку $(x_0, y_0) \in B^\circ$
  Тогда $M^2(x_0, y_0) + N^2(x_0, y_0) \neq 0$. Пусть, например, $N(x_0, y_0) \neq 0$
  Тогда $(x_0, y_0) \in B_N^\circ$, где $B_N^\circ$ – некая компонента связности открытого множества $B^\circ \setminus \overline{N}_0$ (см. п. 2.1.2), в которой $N(x, y) \neq 0$ и уравнение (2.1) равносильно уравнению (2.3)
  Пусть $y = \varphi(x)$ – решение ЗК$_{(2.1),(2.3)}(x_0, y_0)$, определённое на некотором интервале $(a, b) \ni x_0$
  Тогда по определению решениия

  $$\varphi'(x) \equiv -\frac{M\big(x, \varphi(x)\big)}{N\big(x, \varphi(x)\big)} \quad \text{на } (a, b)$$

  По теореме о характеристическом свойстве интегала имеем:

  $$U\big(x, \varphi(x)\big) \overset{(a,b)}{\equiv} U(x_0, y_0)$$

  Продиффиренцируем по $x$:

  $$U_x'\big(x, \varphi(x)\big) + U_y'\big(x, \varphi(x)\big)\varphi'(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0$$

  Подставляя $\varphi'(x)$ и домножая на $N$, получаем:

  $$N\big(x, \varphi(x)\big)U_x'\big(x, \varphi(x)\big) - M\big(x, \varphi(x)\big)U_y'\big(x, \varphi(x)\big) \overset{(a,b)}{\equiv} 0$$

  Положим $x = x_0$, тогда $\varphi(x_0) = y_0$, и для любой точки $(x_0, y_0) \in B^\circ$ получаем равенство (2.7)

- Достаточность
  Пусть в $B^\circ$ выполняется тождество (2.7)
  Возьмём любую точку $(x_0, y_0) \in B^\circ$, и пусть, например, $U'_y(x_0, y_0) \neq 0$
  Тогда $U'_y(x, y) \neq 0$ в некоторой окрестности $V(x_0, y_0)$ и в ней уравнение (2.5) $U(x, y) = U(x_0, y_0)$ однозначно разрешимо относительно $y$, т. е. существует и единственна функция $y = \xi(x)$, определённая на нектором интервале $(\alpha, \beta) \ni x_0$ такая, что $\xi(x_0) = y_0, \quad \xi \in \mathcal{C}^1\big((\alpha, \beta)\big)$ и $U\big(x, \xi(x)\big) \equiv U(x_0, y_0)$ на $(\alpha, \beta)$
  Дифференцируя последнее тождество, получаем

$$U'_x\big(x, \xi(x)\big) + U'_y\big(x, \xi(x)\big)\xi'(x) \overset{(\alpha,\beta)}{\equiv} 0, \qquad \big(x, \xi(x)\big) \in V$$

  а значит, $\xi'(x) \equiv -\dfrac{U'_x\big(x, \xi(x)\big)}{U'_y\big(x, \xi(x)\big)}$
  Покажем, что $y = \xi(x)$ является решением уравнения (2.1), т. е. на интервале $(a, b)$, например, удовлетворяет тождеству $З_1$ из определения решения. Подставляя $\xi(x)$ в левую часть этого тождества, получаем:

$$M\big(x, \xi(x)\big) + N\big(x, \xi(x)\big)\xi'(x) \equiv \frac{M\big(x, \xi(x)\big)U'_y\big(x, \xi(x)\big) - N\big(x, \xi(x)\big)U'_x\big(x, \xi(x)\big)}{U'_y\big(x, \xi(x)\big)} \overset{(2.7)}{\equiv} 0$$

□

**Следствие.** Гладкая допустимая функция $U(x, y)$ есть гладкий интеграл уравнения (1.1) $y' = f(x, y)$ в области единственности $G^\circ$ **тогда и только тогда**, когда верно тождество

$$U'_x(x, y) + f(x, y)U'_y(x, y) \overset{G^\circ}{\equiv} 0$$

### 2.2.4. Существование интеграла, связь между интегралами

**Теорема 22** (о существовании непрерывнорго ингеграла). Для любой точки $(x_0, y_0)$ из области единственности $B^\circ$ найдётся окрестность $S \subset B^\circ$, в которй уравнение (2.1) имеет интеграл $U(x, y)$

**Доказательство.** Пусть $(x_0, y_0)$ — это произвольная точка из области едлинственности $B^\circ$ и, например, $N(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда найдётся окрестность $B^\circ_N$, в которой $N(x, y) \neq 0$, а значит, в ней уравнение в симметричной форме (2.1) равносильно уравнению (2.3) $y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$
Согласно теореме о существовании общего решения в области

$$A = \{\ (x, y) \mid a < x < b, \quad \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\ \} \subset B^\circ_N$$

существует общее решение $y = \varphi(x, C)$ уравнения (2.3)
По определению общего решения уравнение $y = \varphi(x, C)$ однозанчно разрешимо относительно $C$ для любой точки $(x, y) \in A$, т. е. $C = U(x, y)$, причём $U\big(x, \varphi(x, C)\big) \overset{(a,b)}{\equiv} C$
В результате уравнение $U(x, y) = C$ однозначно разрешимо относительно $y$, а значит, функция $U$ – допустимая и постоянна вдоль любого решения, график которого лежит в области $A$
По теореме о характеристическом свойстве интеграла функция $U(x, y)$ является интегралом уравнения (2.1) в области $A$ □

**Определение 46.** $U(x, y)$ – интеграл уравнения (2.1) в области единственности $B^\circ$
Тогда равенство $U(x, y) = C$ называется общим интегралом уравнения (2.1)

**Теорема 23** (о существовании гладкого интеграла).
В уравнении (2.1) функции $M(x, y),\ N(x, y) \in \mathcal{C}^1\big(B\big)$
Тогда для любой точки $(x_0, y_0)$ из области $B$ существует её окрестность $A \subset B$, в которой уравнение (2.1) имеет гладкий интеграл $U(x, y)$

**Доказательство.** По слабюой теореме о единственности в области множество $B$ является областью единственности

Возьмём любую точку $(x_0, y_0)$ из $B$. И пусть, например, $N(x_0, y_0) \neq 0$, $B_N$ — окрестность $(x_0, y_0)$, в которой $N(x, y) \neq 0$ и уравнение (2.1) равносильно уравнению (2.3) $y' = f_*(x, y)$ с $f_* := -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$. При этом по условию теоремы в области $B_N$ определена и непрерывна частная производная $\frac{\partial f_*(x,y)}{\partial y}$
Пусть $A := \{\, (x, y) \mid a < x < b, \quad \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x) \,\}$ — окрестность точки $(x_0, y_0)$, лежащая в $B_N$ вместе со своим замыканием. По теореме о существовании общего решения в $A$ существует общее решение $y = \varphi(x, C)$ уравнения $y' = f_*(x, y)$, задаваемое формулой (1.21) $\varphi(x, C) = y(x, \xi C)$, в которой $\xi \in (a, b)$ выбирается произвольным образом, $(\xi, C) \in \overline{A}$, т. е. $C \in [\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)]$, а $y(x, \xi, C)$ — решение ЗК$(\xi, C)$
Положим $\xi = x_0$. Согласно (1.23)

$$\frac{\partial\varphi(x, C)}{\partial C} = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f_*\big(t, \varphi(t, C)\big)}{\partial y}\,\mathrm{d}\,t\right), \qquad \frac{\partial\varphi(x_0, C)}{\partial C} = 1 \quad \forall C \in [\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)]$$

Следовательно, по теореме о неявной функции уравнение $\varphi(x, C) - y = 0$ однозначно разрешимо относительно $C$. Его решение $C = U(x, y)$, как установлено в доказательстве теоремы о существовании непрерывного интеграла, является интегралом уравнения (2.1) и непрерывно дифференцируемо по $y$ в области $A$.
Остаётся заметить, что функция $U(x, y)$ является также гладкой по $x$, (т. к. обратная к ней $y = \varphi(x, C)$ гладкая по определнию общего решения).
Поэтому $U(x, y)$ — гладкая допустимая функция, а значит, и гладкий интеграл.
Случай, когда $N(x_0, y_0) = 0$, $M(x_0, y_0) \neq 0$ рассматривается аналогично. □

**Теорема 24** (о связи между интегралами). $U(x, y)$ — интеграл уравнения (2.1) в некоторой области $A$. Тогда:

1. если $U_1(x, y)$ — ещё один интеграл в $A$, то существует функция $\Phi(x)$ такая, что $U_1(x, y) \overset{A}{\equiv} U(x, y)$;

   **Доказательство.** Пусть интеграл $U(x, y)$ построен в области $A$ при помощи общего решения $\varphi(x, C)$. Тогда $U\big(x, \varphi(x, C)\big) \overset{(a,b)}{\equiv} C$.
   Поскольку $U_1(x, y)$ — тоже интеграл в $A$, то

   $$\forall C \in \mathbb{R} \quad U_1\big(x, \varphi(x, C)\big) \overset{(a,b)}{\equiv} \Phi\Big(U\big(x, \varphi(x, C)\big)\Big)$$

   Но точки $\big(x, \varphi(x, C)\big)$ заполняют всю область $A$m поэтому в $A$ справедливо тождество $U_1(x, y) \equiv \Phi\big(U(x, y)\big)$. □

2. если функци $\Phi\big(U(x, y)\big)$ допустима, то $U_1(x, y) \overset{A}{\equiv} \Phi\big(U(x, y)\big)$ — это интеграл уравнения (2.1) в области $A$.

   **Доказательство.** Пусть $\Phi$ — произвольная вещественная функция такая, что функция $\Phi\big(u(x, y)\big)$ допустима.
   Положим $U_1(x, y) := \Phi\big(U(x, y)\big)$. Тогда функция $U_1$ допустима и обращается в постоянную вдоль любого решения (т. к. по предположению, $U$ — это интеграл). Поэтому $U_1$ является интегралом. □

### 2.2.5. Уравнение с разделяющимися переменными

**Определение 47.** Уравнением с разделяющимися переменными в симметрической форме будем называть уравнение (2.1) вида

$$g_1(x)h_2(y)\,\mathrm{d}\,x + g_2(x)h_1(y)\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{2.8}$$

в котором $g_1(x),\ g_2(x) \in \mathcal{C}\big(\langle a, b\rangle\big), \quad h_1(y),\ h_2(y) \in \mathcal{C}\big(\langle c, d\rangle\big)$, причём

$$(a, b) \setminus (g_1^\circ \cup g_2^\circ) = \bigcup_{k=1}^{k_*} (a_k, b_k), \qquad (c, d) \setminus (h_1^\circ \cup h_2^\circ) = \bigcup_{l=1}^{l_*} (c_l, d_l) \tag{2.9}$$

$$\forall x \in (a, b) \quad g_1^2(x) + g_2^2(x) \neq 0, \qquad \forall y \in (c, d) \quad h_1^2(y) + h_2^2(y) \neq 0 \tag{2.10}$$

где $g_i^\circ = \{ \, x \in \langle a, b \rangle \mid g_i(x) = 0 \, \}$, $\quad h_i^\circ = \{ \, y \in \langle c, d \rangle \mid h_i(y) = 0 \, \}$ — замкнутые множества нулей функций $g$ и $h$

Таким образом,

$$M(x,y) = g_1(x)h_2(y) \in \mathcal{C}\big(\widetilde{R}\big), \qquad N(x,y) = g_2(x)h_2(y) \in \mathcal{C}\big(\widetilde{R}\big)$$

где прямоугольник $\widetilde{R} = \{ \, (x,y) \mid x \in \langle a,b \rangle, \quad y \in \langle c,d \rangle \, \}$
Условие (2.9) позволяет избежать “экзотических” ситуаций, типа канторовых множеств.
Условие (2.10) означает, что $\widetilde{R}$ не пересекают ни горизонтальные, ни вертикальные прямые, состоящие из особых точек и “разрезающие” его на части. Только любой из четырёх отрезков, ограничивающих $\widetilde{R}$ может целиком состоять из особых точек. Рассмотрим

$$H_i \coloneqq \{ \, (x,y) \mid x \in g_i^\circ, \quad h_i^\circ \, \}, \qquad i = 1, 2$$

Тогда $H_i$ может состоять из не более чем счётного объединения точек, отрезков и четырёхугольников. Кроме того, $H_1 \cap H_2$ может содержать только вершины $\widetilde{R}$.
В результате уравнение (2.8) рассматриваем на множестве $\widetilde{B} = B \cup \widehat{B} \cup \breve{B}$, в котором

$$B = R \setminus (H_1 \cup H_2), \qquad \breve{B} = (H_1 \cup H_2) \cap \partial B, \qquad \widehat{B} = \partial B \setminus \breve{B}, \qquad R = \{ \, (x,y) \mid x \in (a,b), \quad y \in (c,d) \, \}$$

Для любых $x_2 \in g_2^\circ$ и $y_2 \in h_2^\circ$ функции $N(x_2, y) \equiv M(x, y_2) \equiv 0$. Поэтому функции $x(y) = x_2$ при $y \in (c,d)$ и $y(x) = y_2$ при $x \in (a,b)$ удовлетворяют уравнению, являясь полными внутренними решениями соответственно на всех интервалах $(c_l, d_l) \subset (c,d) \setminus g_2^\circ$ и $(a_k, b_k) \subset (a,b) \setminus g_2^\circ$.
Остаётся решить уравнение в каждой из областей

$$B_{kl} \coloneqq \{ \, (x,y) \mid x \in (a_k, b_k), \quad y \in (c_l, d_l) \, \} \setminus (H_1 \cup H_2), \qquad \bigcup_{k,l \geq 1} B_{kl} \eqqcolon B$$

причём для любой точки $(x,y) \in B_{kl}$ справедливы условия

$$g_2(x) \neq 0, \qquad h_2(y) \neq 0, \qquad g_1^2(x) + h_1^2(y) \neq 0 \tag{2.11}$$

Покажем, что любая область $B_{kl}$ — это область единственности:
Возьмём произвольную точку $(x_k, y_l) \in B_{kl}$ и рассмотрим случай, когда $h_1(y_l) \neq 0$:
Существует интеграл $(\widetilde{c}, \widetilde{d}) \subset c_l, d_l$ такой, что $h_1(y) \neq 0$ для всякого $y \in (\widetilde{c}, \widetilde{d})$. Поэтому в области

$$G^\circ \coloneqq \Big\{ \, (x,y) \mid x \in (a_k, b_k), \quad y \in (\widetilde{c}, \widetilde{d}) \, \Big\}$$

уравнение (2.8) равносильно уравнению (1.1) вида

$$y' = g(x)h(y) \tag{2.12}$$

в котором в данном случае $g = -g_1(x)g_2^{-1}(x)$, $\quad h = h_2(y)h_1^{-1}(y) \neq 0$, и $f(x,y) = g(x)h(y)$ непрерывна в прямоугольной области $G^\circ$

**Определение 48.** Уравнение (2.12), в котором $g \in \mathcal{C}\big((a_k, b_k)\big)$, $\quad h \in \mathcal{C}\big((\widetilde{c}, \widetilde{d})\big)$, называют уравнением с разделяющимися переменными, разрешённым относительно производной

Покажем, что $G^\circ$ — область единственности для уравнения (2.12). Этого достаточно, чтобы произвольным образом выбранная точка $(x_k, y_l)$ из $B_{kl}$ оказаласть точкой единственности для уравнения (2.8).
Пусть $H(y) \coloneqq \int h^{-1}(y) \, \mathrm{d}\, y$, и, для определённости, функция $h(y) > 0$ при $y \in (\widetilde{c}, \widetilde{d})$. Тогда $H(y)$ — гладкая, строго возрастающая функция.
Сделаем в уравнени (2.12) замену $u \coloneqq H(y)$. Для этого продифференцируем тождество $u(x) = H\big(y(x)\big)$ по $x$ в силу уравнения (2.12), получая

$$\frac{\mathrm{d}\, u(x)}{\mathrm{d}\, x} = \frac{|diH\big(y(x)\big)}{\mathrm{d}\, y} \cdot \frac{\mathrm{d}\, y(x)}{\mathrm{d}\, x} = h^{-1}\big(y(x)\big) \cdot g(x) \cdot h\big(y(x)\big) = g(x)$$

$$u' = g(x)$$

Это уравнение определно в области

$$G_u^\circ = \Big\{ \, (x,y) \mid x \in (a,b), \quad u \in \big(H(\widetilde{c}), H(\widetilde{d})\big) \, \Big\}$$

Его общее решение:

$$u(x, C) = \int g(x)\,\mathrm{d}\,x + C$$

Область $G_u^\circ$ является областью единственности для уравнения $u' = g(x)$, так как интегральные кривые в ней не могут иметь общих точек. Они получены параллельными переносами одной и той же первообразной. А поскольку замена $u = H(y)$ обратима, $G^\circ$ оказывается областью единственности для уравнения (2.12). В результате установлено, что $B_{kl}$ — область единственности для уравнения (2.8), и в ней (2.8) с учётом (2.11) равносильно уравнению с разделёнными переменными:

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)}\,\mathrm{d}\,x + \frac{h_1(y)}{h_2(y)}\,\mathrm{d}\,y = 0 \tag{2.13}$$

Рассмотрим в любой области $B_{kl}$ гладкую функцию

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{g_1(s)}{g_2(s)}\,\mathrm{d}\,s + \int_{y_0}^{y} \frac{h_1(s)}{h_2(s)}\,\mathrm{d}\,s, \qquad x_0, y_0 \in B_{kl} \tag{2.14}$$

Тогда

$$U_x'(x, y) = \frac{g_1(x)}{g_2(x)}, \qquad U_y'(x, y) = \frac{h_1(y)}{h_2(y)}$$

$$\underset{(2.11)}{\Longrightarrow} U_x'^2 + U_y'^2 \neq 0$$

$U$ — гладкая допустимая функция и для неё, очевидно, выполняется тождество (2.7), а значит, по теореме о характеристическом свойстве гладкого интеграла функция $U(x, y)$ является интегралом уравнения (2.13). В результате, доказана следующая теорема:

**Теорема 25** (об интеграле уравнения с разделяющимися переменными). Любая область $B_{kl}$ с учётом условий (2.11) является областью еджинственности уравнения (2.8), и в ней функция $U(x, y)$ является гладким интегралом уравнения (2.8)

## 2.3. Уравнение в полных дифференциалах, интегрирующий множитель

### 2.3.1. Уравнение в полных дифференциалах

**Определение 49.** Уравнение (2.1) называется уравнением в полных дифференциалах (УПД) в области $B$, если существует функция $U(x, y) \in \mathcal{C}^1\big(B\big)$ такая, что для всякой точки $(x, y) \in B$,

$$U_x'(x, y) = M(x, y), \qquad U_y'(x, y) = N(x, y) \tag{2.15}$$

В этом случае, очевидно, $\mathrm{d}\,U(x, y) \equiv M(x, y)\,\mathrm{d}\,x + N(x, y)\,\mathrm{d}\,y$

**Теорема 26** (об интеграле УПД). $U(x, y)$ — это гладкий интеграл УПД в $B$

**Доказательство.** Пусть существует гладкая функция $U(x, y)$, для которой в $B$ выолняются равенства (2.15). Тогда $U_x'^2 + U_y'^2 \neq 0$, а значит, по определению $U$ — гладкая допустимая функция.
При этом, в $B$ очевидым образом выполняется тождество (2.7), следовательно, по теореме о характеристическом свойстве гладкого интеграла функция $U(x, y)$ явлется глдаким интегралом в $B$.
Остаётся показать, что $B$ — это область единственности.
Возьмём произвольную точку $(x_0, y_0) \in B$ и произвольное решение $y = \varphi(x)$ ЗК$_{(2.1)}(x_0, y_0)$ на каком-либо интервале $(a, b) \ni x_0$. Тогда $\varphi(x_0) = y_0$, и по определению решения

$$M\big(x, \varphi(x)\big) + N\big(x, \varphi(x)\big)\varphi'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

$$\Longrightarrow \mathrm{d}\,U\big(x, \varphi(x)\big) = U_x'\big(x, \varphi(x)\big)\,\mathrm{d}\,x + U_y'\big(x, \varphi(x)\big)\,\mathrm{d}\,\varphi(x) = 0$$

$$\Longrightarrow U\big(x, \varphi(x)\big) \overset{(a,b)}{\equiv} U\big(x_0, \varphi(x_0)\big)$$

В результате любое решение поставленной ЗК$_{\text{УПД}}$ удовлетворяет уравнению (2.5) в некоторой окрестности точки $x_0$. А функция $U$, будучи допустимой, однозначно разершима, следоваетельно, в $B$ не существует двух различных решений одной и той же ЗК. $\square$

**Теорема 27** (об УПД; локальная). Предположим, что для уравнения (2.1) выолняются условия:

1. прямоугольник $R = \{\, (x, y) \mid x \in (a, b), \quad y \in (c, d) \,\} \subset B$;
2. в $B$ существуют и непрерывны частные производные $M'_y, N'_y$;
3. верно тождество

$$M'_y(x, y) - N'_x(x, y) \equiv 0 \tag{2.16}$$

Тогда (2.1) — УПД в $R$, и для любых $x_0, x \in (a, b), \quad y_0, y \in (c, d)$ его интегралами являются функции

$$U_1(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(s, y_0) \,\mathrm{d}\, s + \int_{y_0}^{y} N(x, s) \,\mathrm{d}\, s \tag{2.17}$$

$$U_2(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(s, y) \,\mathrm{d}\, s + \int_{y_0}^{y} N(x_0, s) \,\mathrm{d}\, s$$

**Доказательство.** Возьмём, например, гладкую функцию $U_1(x, y)$ и покажем, что она удовлетворяет равенствам (2.15) для любой точки $(x, y) \in R$. Этого достаточно, чтобы (2.1) было УПД в $R$.
Дифференцируя (2.17) сначала по $y$, а затем по $x$, получаем:

$$\frac{\partial U_1(x, y)}{\partial y} = N(x, y), \qquad \frac{\partial U_1(x, y)}{\partial x} = M(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial N(x, s)}{\partial x} \,\mathrm{d}\, s$$

Теперь во втором равенстве испольуем тождество (2.16):

$$\frac{\partial U_1(x, y)}{\partial x} = M(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial M(x, s)}{\partial y} \,\mathrm{d}\, s = M(x, y)$$

$\square$

### 2.3.2. Интегриующий множитель

**Определение 50.** Функция $\mu(x, y)$, определённая, непрерывная и не обращающаяся в ноль в области $B$, называется интегрирующим множителем дифференциального уравнения (2.1), если уравнение

$$\mu(x, y)M(x, y) \,\mathrm{d}\, x + \mu(x, y)N(x, y) \,\mathrm{d}\, y = 0 \tag{2.18}$$

является УПД в $B$.

**Теорема 28** (о существовании интегрирующего множителя). Если в области единственности $B^\circ \subset B$ уравнение (2.1) имеет гладкий интеграл, тогда в $B^\circ$ существует интегрирующий множитель.

**Доказательство.** Пусть $U(x, y)$ — гладкий интеграл уравнения (2.1) в области $B^\circ$.
Тогда из тождества (2.7) вытекает, что в $B^\circ$

$$\frac{U'_x(x, y)}{M(x, y)} = \frac{U'_y(x, y)}{N(x, y)}$$

причём числитель и значенатель в одной из частей равенства могут одновременно обращаться в ноль.
Поэтому функция

$$\mu(x, y) := \frac{U'_x(x, y)}{M(x, y)} = \frac{U'_y(x, y)}{N(x, y)}$$

удовлетворяет определнию интегриующего множителя. $\square$

Если (2.18) — УПД, то сголасно тождеству (2.16) $(\mu M)'_y - (\mu N)'_x = 0$.
Перегруппируем:

$$\mu'_x N - \mu'_y M - (M'_y - N'_x)\mu \tag{2.19}$$

**Теорема 29** (о нахождении интегрирующего множителя).
Пусть нашлась такая функция $\omega(x, y) \in \mathcal{C}^1\big(B\big)$, что

$$\frac{M'_y(x,y) - N'_x(x,y)}{\omega'_x(x,y)N(x,y) - \omega'_y(x,y)M(x,y)} = \psi(\omega) \tag{2.20}$$

Тогда уравнение (2.1) имеет интегрирующий множитель $\mu(\omega) = \exp\bigg(\int \psi(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega\bigg)$

**Доказательство.** Будем искать $\mu$ как функцию $\omega$.
В этом случае уравнение (2.19) примет вид

$$\frac{\mathrm{d}\,\mu}{\mathrm{d}\,\omega}\omega'_x N - \frac{\mathrm{d}\,\mu}{\mathrm{d}\,\omega}\omega'_y M = (M'_y - N'_x)\mu$$

или с учётом предположения (2.20):

$$\frac{\mathrm{d}\,\mu(\omega)}{\mathrm{d}\,\omega} = \psi(\omega)\mu(\omega)$$

Функция $\mu(\omega) = C\exp\bigg(\int \psi(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega\bigg)$ является общим решением этого линейного однородного уравнения. Можно выбрать $C = 1$. $\square$

### 2.3.3. Линейные уравнения

**Определение 51.** Уравнение, разрешённое относительно производной, вида

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad p(x), q(x) \in \mathcal{C}\big((a,b)\big) \tag{2.21}$$

называется линейным диффренциальным уравнением первого порядка.

Найдём общее решение уравнения (2.21) и решение ЗК$(x_0, y_0)$, используя интегрирующий множитель, для чего перепишем уравнение (2.21) в симметричной форме:

$$\Big(p(x)y - q(x)\Big)\,\mathrm{d}\,x + \mathrm{d}\,y = 0 \tag{2.22}$$

Очевидно, что в $G$ существуют и непрерывны $M'_y, N'_x$.
Будем искать $\mu$ как функцию $x$, т. е. $\omega(x, y) = x$.
Тогда в формуле (2.20) $\psi(x) = p(x)$ и по теореме о нахождении интегрирующего множителя для любого $x_0 \in (a, b)$ имеем:

$$\mu(x) = e^{P(x)} \neq 0, \qquad P(x) \coloneqq \int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}\,t$$

Умножая (2.22) на $\mu$, получаем УПД:

$$e^{P(x)}\Big(p(x)y - q(x)\Big)\,\mathrm{d}\,x + e^{P(x)}\,\mathrm{d}\,y = 0$$

При $y_0 = 0$ из (2.17) находим

$$U = -\int_{x_0}^{x} e^{P(s)}q(s)\,\mathrm{d}\,s + \int_{0}^{y} e^{P(x)}\,\mathrm{d}\,s$$

Это — интеграл уравнения (2.21).
Тогда равенство

$$e^{P(x)}y - \int_{x_0}^{x} e^{P(s)}q(s)\,\mathrm{d}\,s = C$$

является общим интегралом уравнения (2.22). Отсюда

$$y = \varphi(x, C) = e^{-P(x)}\bigg(C + \int_{x_0}^{x} e^{P(s)}q(s)\,\mathrm{d}\,s\bigg)$$

является классическим общим решением линейного уравнения (2.21), а формула

$$y = y(x, x_0, y_0) = \exp\bigg(-\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}\,t\bigg)\bigg[y_0 + \int_{x_0}^{x} \exp\bigg(\int_{x_0}^{s} p(t)\,\mathrm{d}\,t\bigg)\,\mathrm{d}\,s\bigg]$$

задаёт решение ЗК$(x_0, y_0)$, определённое на $(a, b)$ и называется формулой Коши.

# Часть II

# Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

# Глава 3

# Нормальные системы ОДУ

## 3.1. Основные понятия

### 3.1.1. Виды систем

В общем виде система из $n$ ОДУ с $n$ неизвестными выглядит так:

$$\begin{cases} F_1\big(x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(m_1)},\ \ldots\ldots\ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}\big) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n\big(x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(m_1)},\ \ldots\ldots\ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}\big) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Решением системы будем называть $n$ функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, определённых на некотором промежутке $\langle a, b \rangle$, таких, что подстановка из в систему (3.1) обращает её в $n$ тождеств на $\langle a, b \rangle$.
Если удаётся систему разрешить относительно старших производных, то она принимает вид

$$\begin{cases} y_1^{(m_1)} = f_1\big(x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(m_1-1)},\ \ldots\ldots\ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}\big) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(m_1)} = f_n\big(x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(m_1-1)},\ \ldots\ldots\ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n-1)}\big) \end{cases} \tag{3.2}$$

Рассмотрим два важнейших частных случая последней системы:

1. $m_1 = \cdots = m_n = 1$

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}, \qquad f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}\big(G\big), \qquad G \subset \mathbb{R}^{n+1} \tag{3.3}$$

> **Определение 52.** Эта система называется нормальной системой ОДУ порядка $n$.

2. $n = 1 \quad (m_1 = m)$

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(m-1)}) \tag{3.4}$$

> **Определение 53.** Это уравнение называется ОДУ порядка $m$, разрешённым относительно старшей производной.

Оно является частным случаем системы (3.3) порядка $m$, так как это уравнение всегда можно свести к системе заменой

$$y = y_1, \quad y' = y_2, \quad \ldots, \quad y^{(m-1)} = y_m \tag{3.5}$$

Последовательно дифференцируя эти равенства, а затем подставляя в последнее из них правую часть (3.4), получаем нормальную систему

$$y_1' = y_2, \quad \ldots, \quad y_{m-1}' = y_m, \quad y_m' = f(x, y_1, \ldots, y_m) \tag{3.6}$$

Если $y = \varphi(x)$ является решением уравнения, то решение системы — это вектор

$$\big(\varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(m-1)}(x)\big)$$

и наоборот.

### 3.1.2. Решения нормальной системы и векторная запись

**Определение 54.** Решением нормальной системы (3.3) называются $n$ непрерывных на промежутке $\langle a, b\rangle$ функций $y_1 = \varphi_1(x), \quad \dots, \quad y_n = \varphi_n(x)$, для вяского $x \in \langle a, b\rangle$ удовлетворяющих следующим условиям:

1. функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — дифференцируемые;
2. точка $\big(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\big) \in G$;
3. $\varphi_i'(x) = f_i\big(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\big), \quad i = \overline{1, n}$

Из условия 3, в частности, вытекает, что все функции $\varphi_i(x)$ гладкие.
Любое решение нормальной системы является внутренним.
Нормальную систему удобнее записывать в векторном виде:

$$y' = f(x, y), \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}, \qquad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Будем использовать норму, заданную как $\|y\| \coloneqq \max\{\ |y_1|, \dots, |y_n|\ \}$

### 3.1.3. Обощение определений и рещультатов главы 1

Следующие результаты переносятся на системы без изменений:

1. Лемма о записи решения в интегральном виде (лемма 1).
2. Постановка ЗК (внутренней), определение начальных данных, решения (внутреннего) ЗК и его существование.
3. Определение отрезка Пеано и теорема Пеано (теор. 1)
4. Определение продолжимоси решения.
   Доказательство достаточности в теореме о продолжимости решения на границу упрощается за счёт наличия замкнутой $c$-окрестности точки $(b, \eta) \in G$, также лежащей в области $G$, на которой функция $\|f(x, y)\|$ достигает максимума.
5. Определения полного решения, максимальноготь интервала существования решения, всегда являеющегося интегралом, интегральной кривой, теорема о существовании полного решения (теор. 7), лемма о продолжимости решения на отрезок Пеано, теорема о поведении интегральной кривой полного внутреннего решения:

   **Теорема 30** (о поведении интегральной кривой полного решения)**.**
   Пусть в системе (3.3) $f(x, y) \in \mathcal{C}\big(G\big)$.
   Тогда при стремлении аргумента любого полного решения к границе своего максимального интервала существования дуга интегральной кривой стремится к границе области $G$, т. е. покидает любой компакт $\overline{H} \subset G$ и никогда в него не возвращается.

   **Следствие.** Пусть $G = (a, b) \times D$, где область $D \subset \mathbb{R}^n$.
   Тогда

   - или полное решение $y = \varphi(x)$ системы (3.3) определно на всём интервале $(a, b)$,
   - или при стремлении аргумента $x$ к границе максимального интервала существования его интегральная кривая покидает любой компакт $\overline{D}_1 \subset D$ и никогда в него не возвращается.

   **Доказательство.** Если, например, у максимального интервала существования $(\alpha, \beta)$ решения $y = \varphi(x)$ правый конец $\beta < b$, то $\beta$ конечно.
   Если допустить, что найдётся $\overline{D}_1 \subset D$ такая, что $\varphi(x) \in \overline{D}_1$ для любого $x \in [\delta, \beta)$, то $\big(x, \varphi(x)\big) \in [\delta, \beta] \times \overline{D}_1 \subset G$ □

6. Определния точек единственности и неединственности упрощаются, поскольку все точки — внутренние:

**Определение 55.** Точка $(x_0, y_0) \in G$ называется точкой неединственности, если существуют такие решения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ ЗК$_{(3.3)}(x_0, y_0)$, что для любого интервала $(\alpha, \beta) \ni x_0$ найдётся $x^* \in (\alpha, \beta)$ такое, что $\varphi_1(x^*) \neq \varphi_2(x^*)$.
Иначе — точка единственности.

7. Что касается вопросов глобально единственности, то требуется обобщение теоремы Лагранжа. Также требуется установить связь между локальным и глобальным условиями Липшица. Само определение области $G^\circ$ переносится дословно.

8. Обобщим понятие общего решения:

**Определение 56.** Общим решением системы (3.3) в области $A \subset G^\circ$ называется непрерывная по совокупности аргументов вектор-функция $y = \varphi(x, C)$, где $C = (c_1, \ldots, C_n)$, определённая в области $Q_A$, елис для любой точки $(x_0, y^\circ) \in A$ существует и единственно решение $C = C^\circ$ алгебраичекой системы

$$y_i^\circ = \varphi_i(x_0, C), \qquad i = \overline{1, n}$$

такое, что функция $y = \varphi(x, C^\circ)$ есть решение ЗК$_{(3.3)}(x_0, y^\circ)$

### 3.1.4. Системы в симметричной форме

**Определение 57.** Систему дифференциальных уравнений порядка $n$

$$\frac{\mathrm{d}\, x_1}{X_1(x_1, \ldots, x_{n+1})} = \cdots = \frac{\mathrm{d}\, x_{n+1}}{X_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1})} \tag{3.7}$$

где $X_1, \ldots, X_{n+1}$ определены и непрерывны в области $G$ пространства $(x_1, \ldots, x_{n+1})$, называют системой в симметричной форме.

**Определение 58.** Точка $x^\circ = (x_1^\circ, \ldots, x_{n+1}^\circ)$ из области $G$ называется особой для системы (3.7), если $X_i(x^\circ) = 0$ для всякого $i = \overline{1, n+1}$.
Иначе — обыкновенной.

**Теорема 31** (о связи системы в симметричной форме и нормальной системы)**.** *Для всякой обыкновенной точки $x^\circ \in G$ существует окрестность $V(x^\circ)$, в которой система в симметричной форме (3.7) эквивалентна нормальной системе (3.3) порядка $n$.*

**Доказательство.** Пусть $x^\circ$ — обыкновенная точка для системы (3.7). Тогда, например, $X_{n+1}(x^\circ) \neq 0$ (иначе можно перенумеровать переменные).
Поскольку функция $X_{n+1}$ непрерывна в области $G$, то найдётся такая окрестность $V(x^\circ) \subset G$, что для всякого $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in V(x^\circ)$ функция $X_{n+1}(x) \neq 0$. Теперь в окрестности $V(x^\circ)$ систему (3.7) можно переписать в виде

$$\frac{\mathrm{d}\, x_1}{\mathrm{d}\, x_{n+1}} = \frac{X_1(x_1, \ldots, x_{n+1})}{X_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1})}, \quad \ldots, \quad \frac{\mathrm{d}\, x_n}{\mathrm{d}\, x_{n+1}} = \frac{X_n(x_1, \ldots, x_{n=1})}{x_1, \ldots, x_{n+1}}$$

получая нормальную систему, правые части которой непрерывны в $V(x^\circ)$ □

## 3.2. Формула конечных приращений, условия Липшица

### 3.2.1. Лемма Адамара

Пусть $x = x(x_1, \ldots, x_l), \quad y = (y_1, \ldots, y_m)$, скалярная функция $f(x, y)$ определена и непрерывна всесте с частынми производными по $y_1, \ldots, y_m$ в некоей области $G \subset \mathbb{R}^{l+m}$, которая выпукла по $y$.
То есть для любых двух точек $(x, \widetilde{y})$, $(x, \widehat{y}) \in G$ для всякого $s \in [0, 1]$ точка $\big(x, u(s)\big) \in G$, где $u(s) \coloneqq \widetilde{y} + s(\widehat{y} - \widetilde{y})$.
Тогда

$$f(x, \widehat{y}) - f(x, \widetilde{y}) = f\big(x, u(1)\big) - f\big(x, u(0)\big) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\, f\big(x, u(s)\big)}{\mathrm{d}\, s}\, \mathrm{d}\, s$$

Но $u(s) = \begin{bmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_m(s) \end{bmatrix}$, поэтому

$$\frac{\mathrm{d}\, f\big(x, u(s)\big)}{\mathrm{d}\, s} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f\big(x, u(s)\big)}{\partial y_j} \cdot \frac{\mathrm{d}\, u_j(s)}{\mathrm{d}\, s}, \qquad \frac{\mathrm{d}\, u_j(s)}{\mathrm{d}\, s} = \widehat{y}_j - \widetilde{y}_j$$

В результате получаем формулу конечных приращений для скалярной функции векторного аргумента:

$$f(x, \widehat{y}) - \overset{x,\widetilde{y}}{=} \sum_{j=1}^{m} \int_0^1 \frac{\partial f\big(x, u(s)\big)}{\partial y_j}\, \mathrm{d}\, s \cdot (\widehat{y}_j - \widetilde{y}_j) \tag{3.8}$$

Пусть теперь $f(x, y) = \begin{bmatrix} f(x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m) \end{bmatrix}$.

Полученная формула справедлива для любой компоненты $f_i$. Для функции $f(x, y)$ формула имеет вид:

$$d(x, \widehat{y}) - f(x, \widetilde{y}) = \int_0^1 \frac{\partial f\big(x, u(s)\big)}{\partial y}\, \mathrm{d}\, s \cdot (\widehat{y} - \widetilde{y})$$

**Лемма 10** (Адамара)**.** Если вектор-функция $f(x, y)$ непрерывна вместе с частной производной по $y$ в выуклой области $G$, то для любых $(x, \widetilde{y})$, $(x, \widehat{y}) \in G$ существуют непрерывные вектор-функции $h^{(1)}(x, \widetilde{y}, \widehat{y}), \ldots, h^{(m)}(x, \widetilde{y}, \widehat{y})$ такие, что

$$f(x, \widehat{y}) - f(x, \widetilde{y}) = \sum_{j=1}^{m} h^{(j)}(x, \widetilde{y}, \widehat{y}) \cdot (\widehat{y}_j - \widetilde{y}_j)$$

**Доказательство.** Действительно,

$$h^{(j)}(x, \widetilde{y}, \widehat{y}) = \int_0^1 \frac{\partial f\big(x, u(s)\big)}{\partial y_j}\, \mathrm{d}\, s$$

□

### 3.2.2. Локальное и глобальное условия Липшица

Пусть $x$ — скалярная переменая, $y$ — вектор размерности $n$, $f(x, y)$ — вектор-функция размерности $n$, непрерывная в области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$

**Определение 59.** Функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиб Липшица глобально по $y$ на множестве $B \subset G$, если найдётся такая константа $L = L_B > 0$, что

$$\forall (x, \widetilde{y}), (x, \widehat{y}) \in B \quad \|f(x, \widehat{y}) - f(x, \widetilde{y})\| \le L\, \|\widehat{y} - \widetilde{y}\| \tag{3.9}$$

**Обозначение.** $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(B)$

**Определение 60.** Функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица локально по $y$ в области $G$, если для любой точки $(x_\circ, y^\circ) \in G$ существуют окрестность $V(x_\circ, y^\circ) \subset G$ и константа Липшица $L = L_V > 0$ такие, что для любых двух точек $(x, \widetilde{y}), (x, \widehat{y}) \in V(x_\circ, y^\circ)$ выолняется неравенство (3.9).

**Обозначение.** $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$

**Лемма 11** (о связи между локальным и глобальным условиями Липшица)**.** Если $f(x, y) \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$, то для любого компакта $\overline{H} \subset G$ выполнено $f(x, y) \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(\overline{H})$

**Доказательство.** Рассуждая **от противного**, допустим, что существует компакт $\overline{H} \in G$, в котором $f(x,y) \notin \mathrm{Lip}_y^{gl}(\overline{H})$.
Это значит, что найдутся такие последовательности точек $(x_k, \widetilde{y}^{(k)}), (x_k, \widehat{y}^{(k)}) \in \overline{H}$ и костант $L_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$, что

$$\forall k \geq 1 \quad \left\| f(x_k, \widehat{y}^{(k)}) - f(x_k, \widetilde{y}^{(k)}) \right\| \geq L_k \left\| \widehat{y}^{(k)} - \widetilde{y}^{(k)} \right\| \tag{3.10}$$

Надо показать, что при каком-то $k$ это неравенство нарушается.
Разряжая при необходимости два раза подряд последовательность инексов $k$ и пользуясь принципом выбора Больцано—Вейерштрасса, выберем такую подпоследовательность индексов $k_l \xrightarrow[l\to\infty]{} \infty$, что $(x_k, \widetilde{y}^{(k_l)}) \to (x_\circ, \widetilde{y}^{(\circ)}), \quad (x_{k_l}, \widehat{y}^{(k_l)}) \to (x_\circ, \widehat{y}^{(\circ)})$. При этом обе точки $(x_\circ, \widetilde{y}^{(\circ)}), (x_\circ, \widehat{y}^{(\circ)}) \in \overline{H}$, поскольку замкнутое множество содержит все свои предельные точки.
В результате векторы $\widetilde{y}^{(0)}$ и $\widehat{y}^{(0)}$ либо совпадают, либо нет.

- $\widetilde{y}^{(0)} \neq \widehat{y}^{(0)}$
  Тогда можно ввести в рассмотрение функцию
  $$h(x, \widetilde{y}, \widehat{y}) := \frac{\| f(x, \widehat{y}) - f(x, \widetilde{y}) \|}{\| \widehat{y} - \widetilde{y} \|}$$
  определённую в некоторой окрестности точки $(x_\circ, \widetilde{y}^{(0)}, \widehat{y}^{(0)})$.
  Положим $h(x_\circ, \widetilde{y}^{(0)}, \widehat{y}^{(0)}) =: L_\circ$. Тогда существует окрестность $V(x_0, \widetilde{y}^{(0)}, \widehat{y}^{(0)})$, в которой $h$ непрерывна и $h(x, \widetilde{y}, \widehat{y}) < L_\circ + 1$.
  $$\implies \exists K > 0 : \quad \forall k_l > K \quad (x_{k_l}, \widetilde{y}^{(k_l)}, \widehat{y}^{(k_l)}) \in V(x_\circ, \widetilde{y}^{(0)}, \widehat{y}^{(0)})$$
  а значит, $h(x_{k_l}, \widetilde{y}^{(k_l)}, \widehat{y}^{(k_l)}) < L_\circ + 1$, или
  $$\left\| f(x_{k_l}, \widehat{y}^{(k_l)}) - f(x_{k_l}, \widetilde{y}^{(k_l)}) \right\| < (L_\circ + 1) \left\| \widehat{y}^{(k_l)} - \widetilde{y}^{(k_l)} \right\|$$
  Однако это неравенство при $l = l^*$ противоречит неравенству (3.10), поскольку всегда найдётся индекс $l^*$ такой, что $L_{k_{l^*}} > L_\circ + 1$, т. к. $L_{k_l} \xrightarrow[l\to\infty]{} +\infty$.

- $y^{(0)} := \widetilde{y}^{(0)} = \widehat{y}^{(0)}$
  Тогда точка $(x_\circ, y^{(0)}) \in \overline{H} \subset G$. В этом случае используем предположение о том, что функция $f$ удовлетворяет локальному условию Липшица.
  По определению для точки $(x_\circ, y^{(0)})$ существуют лежащая в $G$ окрестность $V(x_\circ, y^{(0)})$ т константа Липшица $L > 0$ такие, что для любых двух точек $(x, \widetilde{y}), (x, \widehat{y}) \in V(x_\circ, y^{(0)})$ верно неравенство (3.9). При этом обе подпоследовательности — $(x_{k_l}, \widetilde{y}^{(k_l)})$ и $(x_{k_l}, \widehat{y}^{(k_l)})$ — имеют общий предел — точку $(x_\circ, y^{(0)})$.
  Поэтому найдётся такое число $K > 0$, что для всякого $k_l > K$ точки $(x_{k_l}, \widetilde{y}^{(k_l)})$ и $(x_{k_l}, \widehat{y}^{(k_L)}) \in V(x_\circ, y^{(0)})$, а значит, выполняется неарвенство (3.9). Но существует такой индекс $l^*$, что $L_{k_{l^*}} > L$. Следовтельно, неравенства (3.9) и (3.10) несовместны при $l = l^*$.

□

### 3.2.3. Связь между дифференцируемостью и локальным условием Липшица

**Лемма 12** (о достаточном условии локальной липшицевости)**.** Если вектор-функция $f(x,y)$ непрерывна всесте со своими частными производными по $y_1, \ldots, y_n$ в области $G$, то она удовлетворяет условию Липшица по $y$ локально в $G$.

**Доказательство.** Пусть $V$ — окрестнгость произвольной точки из области $G$. Очевидно, что её можно выбрать выпуклой по $y$ и такой, что $\overline{V} \subset G$. Для этого достаточно в качестве $V$ взять куб с центром в выбранной точке и достаточно маленьким ребром.
Покажем, что $f(x,y) \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(V)$:
По формуле конечных приращений имеем:

$$\forall (x, \widetilde{y}), (x, \widehat{y}) \in V \quad f(x, \widehat{y}) - f(x, \widetilde{y}) = \sum_{j=1}^{n} h^{(j)}(x, \widetilde{y}, \widehat{y}) \cdot (\widehat{y}_j - \widetilde{y}_j)$$

где

$$h^{(j)} := \int_0^1 \frac{\partial f\big(x, u(s)\big)}{\partial y_j}\,\mathrm{d}\,s, \qquad u(s) := \widetilde{y} + s(\widehat{y} - \widetilde{y}) \quad \forall s \in [0,1]$$

При этом $\big(x, u(s)\big) \in V$ в силу выпуклостти окрестности по $y$.
Поскольку чатсные производные $f$ по $y$ непрерывны в $g$ и их конечное число, а компакт $\overline{V} \subset G$ по построению, то

$$\exists\, M > 0: \quad \forall s \in [0,1] \quad \forall j = \overline{1,n} \qquad \left\| \frac{\partial f\big(x, u(s)\big)}{\partial y_j} \right\| \le M$$

Поэтому

$$\|f(x,\widehat{y}) - f(x,\widetilde{y})\| \le \sum_{j=1}^{n} \left\| \int_0^1 \frac{\partial f\big(x,u(s)\big)}{\partial y_j}\,\mathrm{d}\,s \cdot (\widehat{y}_j - \widetilde{y}_j) \right\| \le \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \left\| \frac{\partial f\big(x,u(s)\big)}{\partial y_j} \right\| \mathrm{d}\,s \cdot |\widehat{y}_j - \widetilde{y}_j| \le$$
$$\le Mn \cdot \max j = \overline{1,n} |\widehat{y}_j - \widetilde{y}_j| = nM\,\|\widehat{y} - \widetilde{y}\|$$

и верно неравенство (3.9) с глобальной константой Липшица $L = nM$, обслуживающей окрестность $V$ произвольной точки из области $G$. □

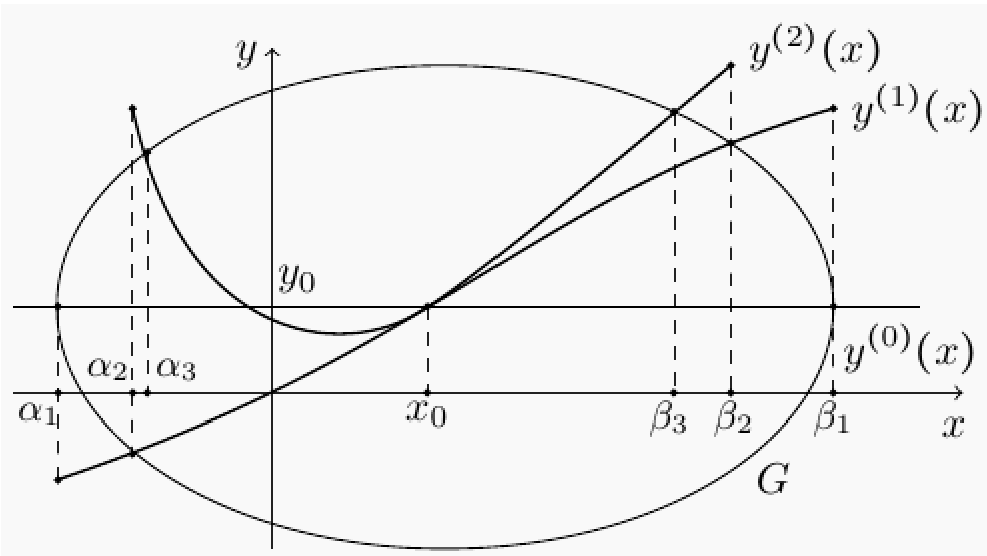
## 3.3. Метод последовательных приближений Пикара

### 3.3.1. Теорема Пикара

Рассмотрим нормальную систему $y' = f(x,y)$ с $f \in \mathcal{C}\big(G\big)$. Наша задача заключается в построении решения $\text{ЗК}_{(3.3)y=y(x)}((x_\circ, y^\circ) \in G \subset \mathbb{R}^{n+1})$, определённого на каком-нибудь отрезке, содержащем точку $x_\circ$.

Решение будем строить при помощи последовательных приближений Пикара , которые будут определяться рекуррентно.

Зафиксируем произвольную точку $(x_\circ, y^\circ) \in G$.




В качестве нулевого приближения возьмём функцию $y^{(0)}(x) \equiv y^\circ$. Очевидно, что она определена для любого $x \in \mathbb{R}$, но возможно не при всех значениях аргумента точка $\big(x, y^{(0)}(x)\big)$ окажется в области $G$. Однако существует интервал $(\alpha_1, \beta_1)$ такой, что $x_\circ \in (\alpha_1, \beta_1)$ и для всякого $x \in (\alpha_1, \beta_1)$ точка $\big(x, y^{(0)}(x)\big) \in G$, а значит, функция $f\big(x, y^{(0)}(x)\big)$ определна и непрерывна на $(\alpha_1, \beta_1)$.

Теперь в качестве первого пикаровского приближения можно выбрать функцию

$$y^{(1)}(x) := y^\circ + \int_{x_0}^{x} f\big(s, y^{(0)}(s)\big)\,\mathrm{d}\,s,$$

и оно определено и непрерывно как композиция непрерывных функций на $(\alpha_1, \beta_1)$.

Но, опять-таки, возможно не при всех $x$ точка $\big(x, y^{(1)}(x)\big)$ попадёт в область $G$. В этом случае $(\alpha_1, \beta_1)$ придётся уменьшить.

Сущетвует интервал $(\alpha_2, \beta_2) \subset (\alpha_1, \beta_1)$ такой, что $x_0 \in (\alpha_2, \beta_2)$ и для всякого $x \in (\alpha_2, \beta_2)$ точка $\big(x, y^{(1)}(x)\big) \in G$, а значит, функция $f\big(x, y^{(1)}(x)\big)$ определена и непрерывна на $(\alpha_2, \beta_2)$. И так далее.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Предположим, что пикаровское приближение $y^{(k)}(x)$ определено и непрерывно на некотором интервале $(\alpha_k, \beta_k) \ni x_\circ$, и $y^{(k)}(x_\circ) = y^\circ$. Тогда существует такой интервал $(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}) \subset (\alpha_k, \beta_k)$, что $x_\circ \in (\alpha_{k+1}, \beta_{k+1})$ и для всякого $x \in (\alpha_{k+1}, \beta_{k+1})$ точка $\big(x, y^{(k)}(x)\big) \in G$.

Введём $(k+1)$-е приближение по Пикару:

$$y^{(k+1)}(x) = y^\circ + \int_{x_0}^{x} f\big(s, y^{(k)}(s)\big)\, \mathrm{d}\, s. \tag{3.11}$$

Оно определено и непрерывно на интервале $(\alpha_{k+1}, \beta_{k+1})$.

Таким образом каждое пикаровское приближение определено в некоторой окрестности точки $x_\circ$ и $y^{(k)}(x_\circ) = y^\circ$ при любом $k \geq 0$.

Но последовательность вложенных интервалов $(\alpha_k, \beta_k)$ при их пересечении может стянуться в точку $x_\circ$, т. е. общий интервал для всех пикаровских приближений, вообще говоря, может отсутсвовать. Также чожет оказаться, что вектор-функции $y^{(k)}(x)$ не будут равномерно ограничены сверху по норме. Каждая из этих возможностей мешает получить предельную функцию.

**Теорема 32** (Пикара). $f(x,y) \in \mathcal{C}\big(G\big), \quad f(x,y) \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$

Для любой точки $(x_\circ, y^\circ) \in G$ последовательные приближения Пикара $y^{(k)}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ с начальными данными $x_\circ, y^\circ$ определены на некотором отрезке $[\alpha, \beta]$, причём существует такой компакт $\overline{H} \subset G$, что для любых $k \geq 0$ и $x \in [\alpha, \beta]$ точка $\big(x, y^{(k)}(x)\big) \in \overline{H}$.

Тогда функции $y^{(k)}(x)$ равномерно относительно $[\alpha, \beta]$ стремятся при $k \to \infty$ к предельной функции $y(x)$, являющейся решением $\text{ЗК}_{(3.3)}(x_\circ, y^\circ)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$.

**Доказательство.** Возьмём произвольную точку $(x_\circ, y^\circ) \in G$

По условию теоремы для этой точки надётся отрезок $[\alpha, \beta] \ni x_\circ$ и компакт $\overline{H} \subset G$ такие, что можно построить последовательные пикаровские приближения

$$y^{(k)}(x) = y^\circ + \int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y^{(k-1)}(s)\big)\, \mathrm{d}\, s, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

определённые для всякого $x \in [\alpha, \beta]$ такие, что их графики, т. е. точки $\big(x, y^{(k)}(x)\big)$, при всех $x$ и $k$ принадлежат $\overline{H}$.

Наличие компакта позволяет ввести на нём две глобальные константы:

- Обозначим через $L > 0$ константу Липшица, обслуживающую $\overline{H}$. Она существует по лемме о связи между условиями Липшица (лемма 11), согласно которой $f(x,y) \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(\overline{H})$.
- Положим $M \coloneqq \max\limits_{\overline{H}} \|f(x,y)\|$.

Нужно установить равномерную сходимость последовательности пикаровских отображений. Сделаем это при помощи функциональных рядов:

Введём последовательность функций $\varphi^{(k)}(x)$, определённых на отрезке $[\alpha, \beta]$:

$$\varphi^{(0)}(x) \coloneqq y^{(0)}(x), \quad \varphi^{(1)}(x) \coloneqq y^{(1)}(x) - y^{(0)}(x), \quad \ldots, \quad \varphi^{(k)}(x) \coloneqq y^{(k)}(x) - y^{(k-1)}(x), \quad \ldots$$

Рассмотрим функциональный ряд

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^{(k)}(x)$$

По определению $\varphi^{(k)}$,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi^{(k)}(x) = y^{(n)}(x)$$

Поэтому сходимость ряда $\varphi(x)$ равносильна сходимости последовательности пикаровских приближений $y^{(k)}(x)$.

Построим для ряда $\varphi(x)$ мажорантный ряд, оценив сверху по норме методом **индукции** члены $\varphi^{(k)}(x)$:

- **База.**

Для всякого $x \in [\alpha, \beta]$ имеем:

$$\left\|\varphi^{(0)}(x)\right\| = \left\|y^{(0)}(x)\right\|,$$

$$\left\|\varphi^{(1)}(x)\right\| = \left\|y^{(1)}(x) - y^{(0)}(x)\right\| = \left\|\int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y^{(0)}(s)\big)\;\mathrm{d}\,s\right\| \le \left|\int_{x_\circ}^{x} \left\|f\big(s, y^{(0)}(s)\big)\right\|\;\mathrm{d}\,s\right|$$

Но по условию теоремы любая точка $\big(s, y^{(0)}(s)\big)$ лежит в $\overline{H}$, т. к. $[x_\circ \between x] \subset [\alpha, \beta]$. Следовательно,

$$\left\|y^{(1)}(x)\right\| \le M|x - x_\circ|.$$

Далее,

$$\left\|\boldsymbol{\varphi^{(2)}(x)}\right\| \le \left|\int_{x_\circ}^{x} L\left\|y^{(1)}(s) - y^{(0)}(s)\right\|\;\mathrm{d}\,s\right| = L\left|\int_{x_\circ}^{x}\left\|\varphi^{(1)}(s)\right\|\;\mathrm{d}\,s\right| \le$$
$$\le L\left|\int_{x_\circ}^{x} M|s - x_\circ|\;\mathrm{d}\,s\right| \le LM\frac{|x - x_\circ|^2}{2} = \boldsymbol{\frac{M}{L}\cdot\frac{(L|x - x_\circ|)^2}{2!}}$$

- **Предположим**, что для любых $k \ge 2$ и $x \in [\alpha, \beta]$

$$\left\|\varphi^{(k)}(x)\right\| \le \frac{M}{L}\cdot\frac{(L|x - x_\circ|)^2}{2!}. \tag{3.12}$$

- **Переход.** Оценим $\varphi^{(k+1)}(x)$:

$$\left\|\varphi^{(k+1)}(x)\right\| = \left\|y^{(k+1)}(x) - y^{(k)}(x)\right\| = \left\|\int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y^{(k)}(s)\big)\;\mathrm{d}\,s - \int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y^{(k-1)}(s)\big)\;\mathrm{d}\,s\right\| \le$$
$$\le \left|\int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y^{(k)}(s)\big) - f\big(s, y^{(k-1)}(s)\big)\;\mathrm{d}\,s\right|.$$

Поскольку аргументы $f \in \overline{H}$, используем для оценок глобальное условие Липшица:

$$\left\|\varphi^{(k+1)}(x)\right\| \underset{\text{Lip}}{\le} \left|\int_{x_\circ}^{x} L\left\|y^{(k)}(s) - y^{(k-1)}(s)\right\|\;\mathrm{d}\,s\right| = L\left|\int_{x_\circ}^{x}\left\|\varphi^{(k)}(s)\right\|\;\mathrm{d}\,s\right| \underset{\textbf{предп.}}{\le}$$
$$\le L\left|\int_{x_\circ}^{x}\frac{M}{N}\cdot\frac{(L|s - x_\circ|)^k}{k!}\;\mathrm{d}\,s\right| \le \frac{M}{N}\cdot\frac{(L|x - x_\circ|^{k+1})}{(k+1)!}$$

Таким образом, **индукцонное предположение** доказано.

Поскольку $|x - x_\circ| \le \beta - \alpha$, справедлива равномерная оценка членов ряда $\varphi(x)$:

$$\left\|\varphi^{(k)}(x)\right\| \le \frac{M}{N}\cdot\frac{\big(L(\beta - \alpha)\big)^k}{k!} \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Мажорантный для $\varphi(x)$ числовой ряд

$$\|y^\circ\| + \frac{M}{L}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\big(L(\beta - \alpha)\big)^k}{k!}$$

сходится при любых конечных $\alpha, \beta$.

По признаку Вейерштрасса функциональный ряд $\sum \varphi^{(k)}(x)$ сходится равномерно на $[\alpha, \beta]$, а значит, последовательноть $y^{(k)} \underset{k\to\infty}{\overset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows}} y(x)$.

Для всякого $x \in [\alpha, \beta]$ предельная функция $y(x)$ непрерывна по теореме Стокса—Зайделя и точка $\big(x, y(x)\big)$, являясь предельной, содержится в $\overline{H}$. Следовательно, $\int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y(s)\big)\;\mathrm{d}\,s$ существует.

Рассмотрим равенство (3.11), устремив в нём $k$ к бесконечности. Тогда слева получим $y(x)$, а справа

$$\int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y^{(k)}(s)\big)\;\mathrm{d}\,s \to \int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y(s)\big)\;\mathrm{d}\,s,$$

т. е. возможен переход к пределу под знаком интеграла.

Таким образом, в правой части (3.11) тоже можно перейти к пределу, получая формулу

$$y(x) = y^\circ + \int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y(s)\big)\,\mathrm{d}\,s \quad \forall x \in [\alpha, \beta],$$

т. е. $y(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению, что равносильно тому, что $y(x) \in$ (является решением) ЗК$_{(3.3)}(x_\circ, y^\circ)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$. □

**Следствие.** Имеет место следующая оценка остатка:

$$\left\| y(x) - y^{(k)}(x) \right\| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{(L|x - x_\circ)^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{\big(L(\beta - \alpha)\big)^{k+1}}{(k+1)!}$$

**Доказательство. Индукция.**

- **База.** $k = 0$

$$\left\| y(x) - y^{(0)}(x) \right\| \leq \left\| \int_{x_\circ}^{x} f\big(s, y(s)\big)\,\mathrm{d}\,s \right\| \leq M|x - x_\circ| \leq \frac{M}{L} \cdot L(\beta - \alpha)$$

- **Переход.**

$$\left\| y(x) - y^{(k+1)}(x) \right\| \leq \left\| \int_{x_\circ}^{x} \Big( f\big(s, y(s)\big) - f\big(s, y^{(k)}(s)\big) \Big)\,\mathrm{d}\,s \right\| \leq \left| \int_{x_\circ}^{x} L \left\| y(s) - y^{(k)}(s) \right\| \mathrm{d}\,s \right| \leq$$
$$\leq L \left| \int_{x_\circ}^{x} \frac{M}{L} \cdot \frac{\big(L|s - x_\circ|\big)^{k+1}}{(k+1)!}\,\mathrm{d}\,s \right| \leq \frac{M}{L} \frac{\big(L|x - x_\circ|\big)^{k+2}}{(k+2)!} \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{\big(L(\beta - \alpha)\big)^{k+2}}{(k+2)!} \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

□

### 3.3.2. Существование и единственность решений системы

Из теоремы Пикара следует, что для доказательства существования решения системы (3.3), проходящего через точку $(x_\circ, y^\circ)$, остаётся найти отрезок, на котором будут определены все пикаровские приближения, и компакт, в котором будут лежать все их графики.

**Теорема 33** (о существовании и единственности решения)**.** Пусть в системе (3.3) $f(x, y)$ непрерывна и $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$.

Тогда для любой точки $(x_0, y^0) \in G$ и для любого отрезка Пеано $P_h(x_0, y^0)$ на этом отрезке существует и единственно решение ЗК$(x_0, y^0)$.

**Доказательство.**

- Существование.

  Возьмём любую точку $(x_0, y^0) \in G$ и найдём для неё отрезок $[\alpha, \beta]$ и компакт $\overline{H}$ из теоремы Пикара.

  Сначала построим отрезок Пеано с центром в т. $x_0$. Для этого возьмём такие $a, b > 0$, что компакт $\overline{R} = \left\{ (x, y) \mid |\, x - x_0| < a,\ \left\| y - y^0 \right\| \leq b \right\} \subset G$.

  Положим
  $$M = \max_{(x,y) \in \overline{R}} \|f(x, y)\|, \quad h = \min\left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \alpha = x_0 - h, \quad \beta = x_0 + h$$

  Тогда $[\alpha, \beta]$ — это искомый отрезок Пеано $P_h(x_0, y^0)$.

  Выберем $\overline{H} = \left\{ (x, y) \mid \alpha \leq x \leq \beta,\ \left\| y - y^0 \right\| \leq b \right\}$. Тогда $\overline{H} \subset \overline{R}$.

  Докажем **индукцией** по $k = 0, 1, \ldots$, что

  $$\forall x \in [\alpha, \beta] \quad \left\| y^{(k)}(x) - y^0 \right\| \leq b \tag{3.13}$$

Тогда точка $\left(x, y^{(k)}(x)\right)$ попадёт в компакт $\overline{H}$, что позволит определить пикаровское приближение $y^{(k+1)}$ на всём отрезке Пеано $[\alpha, \beta]$.

- По определению, $({}^{(0)}x) \equiv y^0$, поэтому **база** очевидна.
- Допустим, что неравенство (3.13) верно. Тогда для любого $x \in [\alpha, \beta]$

$$\left\|y^{(k+1)}(x) - y^0\right\| = \left\|\int_{x_0}^{x} f\left(s, y^{(k)}(s)\right) \mathrm{d}\, s\right\| \leq \left|\int_{x_0}^{x} \left\|f\left(s, y^{(k)}(s)\right)\right\| \mathrm{d}\, s\right|$$

Но согласно (3.13) точка $\left(s, y^{(k)}(s)\right) \in \overline{H} \subset \overline{R}$, поэтому под знаком интеграла $\|f\| \leq M$ и $\left\|y^{(k+1)}(x) - y^0\right\| \leq M|x - x_0| \leq Mh \leq b$.

- Единственность
  Докажем **от противного**.
  Предположим, что существует ещё одно решение $\widetilde{y}(x)$ с теми же начальными данными, т. е. $\widetilde{y}(x_0) = y^0$, определённое на некотором интервале $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \ni x_0$.

  Пусть $[a, b]$ — отрезок, на котором определены оба решения. Достаточно показать, что на $(a, b)$ решения $y(x)$ и $\widetilde{y}(x)$ совпадают.

  Используя интегральную формулу (1.2), для любого $x \in (a, b)$ запишем разность этих решений:

$$y(x) - \widetilde{y}(x) = \int_{x_0}^{x} \Big(f\left(s, y(s)\right) - f\left(s, \widetilde{y}(s)\right)\Big) \mathrm{d}\, s$$

  При этом, существует такой компакт $\overline{H} \subset G$, что для всякого $s \in [a, b]$ точки $\left(s, y(s)\right)$, $\left(s, \widetilde{y}(s)\right) \in \overline{H}$.

  По условию теоремы в области $G$ для функции $f(x, y)$ выполняется локальное условие Липшица. А значит, по лемме о связи между локальным и глобальным условиями Липшица функция $f \in \mathrm{Lip}_y^{gl}(\overline{H})$ и $L$ — глобальная константа Липшица. Поэтому

$$\|y(x) - \widetilde{y}(x)\| \leq \left|\int_{x_0}^{x} \left\|f\left(s, y(s)\right) - f\left(s, \widetilde{y}(s)\right)\right\| \mathrm{d}\, s\right| \leq L\left|\int_{x_0}^{x} \|y(s) - \widetilde{y}(s)\| \mathrm{d}\, s\right|$$

  Применяя следствие из теоремы Гронуолла с $\mu = L$ заключаем, что $\|y(x) - \widetilde{y}(x)\| \overset{(a,b)}{\equiv} 0$. Тогда $y(x) - \widetilde{y}(x) \overset{(a,b)}{\equiv} 0$.

$\square$

**Следствие.** $G$ является областью единственности.

## 3.4. Линейные системы. Введение

### 3.4.1. Существование и единственность решений

**Определение 61.** Система (3.3) называется *линейной*, если она имеет вид

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(x)y_1 + \dots + p_{1n}(x)y_n + q_1(x) \\ \dots \\ y_n' = p_{n1}(x)y_1 + \dots + p_{nn}(x)y_n + q_n(x) \end{cases} \tag{3.14}$$

или в векторной записи

$$y' = P(x)y + q(x)$$

где функции $p_{ij}(x)$ и $q_i(x) \in \mathcal{C}\left((a, b)\right)$.

**Другая формулировка.** Нормальная система является линейной, если $f(x, y) = P(x)y + q(x)$, а $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$.

**Определение 62.** Линейная система (3.14) называется *однородной (ЛОС)*, если в ней $q(x) \overset{(a,b)}{=\!=\!=} 0$. В противном случае система называется *неоднородной (ЛНС)*.

Функция $q(x)$ — это *неоднородность* системы (3.14).

**Определение 63.** Линейная система (3.14) называется *вещественной*, если коэффициенты $p_{ij}(x)$, $q_i(x)$ принимают только вещественные значения.

В дальнейшем, если не оговорено иное, будем рассматривать только вещественные системы.

Исходя из структуры области $G$, начальные данные для ЗК — это произвольная точка $x_0$ из интервала $(a,b)$ и произвольный вектор $y^0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0)$ из пространства $\mathbb{R}^n$.

**Теорема 34** (о существовании и единственности решений линейных систем)**.** Для любой точки $x_0 \in (a,b)$, для любого вектора $y^0 \in \mathbb{R}^n$ и для любого отрезка Пеано $P_h(x_0, y^)$ существует и единственно решение ЗК$_{(3.14)}(x_0, y^0)$, определённое на $P_h(x_0, y^0)$.

**Доказательство.** Поскольку функция $f(x,y) \in \mathcal{C}\big(G\big)$ и $f'_y(x,y) = P(x) \in \mathcal{C}\big(G\big)$, а значит, $f \in \mathrm{Lip}_y^{loc}(G)$, к системе (3.14) применима предыдущая теорема. □

### 3.4.2. О продолжимости решений линейных систем

**Определение 64.** Система (3.3) называется *почти линейной*, если $f(x,y) \in \mathcal{C}\big(G\big)$, где $G = (a,b) \times \mathbb{R}^n$, и существуют непрерывные и неотрицательные на $(a,b)$ функции $L(x)$, $M(x)$ такие, что $\|f(x,y)\| \le L(x) + M(x)\,\|y\|$ для любой точки $(x,y) \in G$.

**Теорема 35** (о продолжимости решений почти линейных систем)**.** Любое решение почти линейной системы продолжимо на интервал $(a,b)$.

**Доказательство.** Рассмотрим произвольное решение почти линейной системы $y = \varphi(x)$, заданное на максимальном интервале существования $(\alpha, \beta)$. Для всякого $x_0 \in (\alpha,\beta)$ по интегральной формуле, аналогичной (1.2),

$$\varphi(x) \overset{(\alpha,\beta)}{=\!=\!=} \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\big(s, \varphi(s)\big)\,\mathrm{d}\,s$$

$$\implies \|\varphi(x_0)\| + \left|\int_{x_0}^{x} \big\|f\big(s,\varphi(s)\big)\big\|\,\mathrm{d}\,s\right| < \|\varphi(x_0)\| + \left|\int_{x_0}^{x} \Big(L(s) + M(s)\,\|\varphi(s)\|\Big)\,\mathrm{d}\,s\right|$$

Если $\beta < b$, то отрезок $[x_0, \beta] \subset (a,b)$, и в силу непрерывности функций $L$ и $M$ имеем:

$$L(x) \le L_0, \quad M(x) \le M_0 \qquad \forall x \in [x_0, \beta]$$

Поэтому

$$\|\varphi(x)\| \le \|\varphi(x_0)\| + L_0(\beta - x_0) + M_0\left|\int_{x_0}^{x} \|\varphi(s)\|\,\mathrm{d}\,s\right|$$

По лемме Гроноулла

$$\|\varphi(x)\| \le \Big(\|\varphi(x_0)\| + L_0(\beta - x_0)\Big)e^{M_0(\beta - x_0)} \quad \forall x \in [x_0, \beta],$$

что **противоречит** теореме о поведении интегральной кривой полного решения.

Аналогично рассматривается случай, когда $\alpha > a$. □

**Теорема 36** (о продолжимости решений линейных систем)**.** Любое решение линейной системы (3.14) продолжимо на интервал $(a,b)$.

**Доказательство.** Покажем, что линейная система является почти линейной. Положим

$$p_0(x) \coloneqq \max_{i,j=\overline{1,n}} \{\ |p_{ij}(x)|\,\}, \qquad q_0 \coloneqq \max_{i=\overline{1,n}} \{\ |q_i(x)|\,\}$$

Тогда функции $p_0(x), q_0(x) \in \mathcal{C}\big(a,b\big)$.

Оценим сверху компоненты правой части системы (3.14):

$$|f_i(x,y)| = |p_{i1}(x)y_1 + \dots + p_{in}(x)y_n + q_i(x)| \le \sum_{j=1}^{n} |p_{ij}(x)| \cdot |y_j| + |q_i(x)| \le$$
$$\le \sum_{j=1}^{n} p_0(x)|y_j| + q_0(x) \le np_0(x) \max_{j=\overline{1,n}} |y_j| + q_0(x)$$

По определению нормы $\|f(x,y)\| \le np_0(x)\,\|y\| + q_0(x)$, т. е. система (3.14) почти линейна. □

### 3.4.3. Комплекснозначные линейные системы

Если в линейной системе (3.14) $p_{ij}(x)$ и $q_i(x)$ — комплекснозначные функции вещественного аргумента $x$, то решение системы (3.14) $y = y(x)$ также будет иметь комплексные значения.

Пусть $y = u(x) + iv(x)$, $\quad P = R(x) + iS(x)$, $\quad q = g(x) + ih(x)$. Тогда согласно определению решения, подставляя $y(x)$ в систему (3.14), получаем тождество на интервале $(a,b)$:

$$u' + iv' \equiv (R + iS)(u + iv) + g + ih$$

Выделяя в нём вещественную и мнимую части, заключаем, что вектор-функция $\big(u(x), v(x)\big)$ удовлетворяют вещественной линейной системе из $2n$ уравнений с $2n$ неизвестными:

$$u' \equiv Ru - Sv + q, \qquad v' \equiv Su + Rv + h,$$

к которой можно применить теоремы о существовании и единственности и продолжимости решений.

## 3.5. Зависимость решения системы от начальных данных и параметра

### 3.5.1. Постановка задач

Рассмотрим нормальную систему (3.3), зависящую от параметра $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$:

$$y' = f(x, y, \mu), \tag{3.15}$$

где вещественная функция $f(x,y,\mu)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по $y$ локально в некоторой области $F \subset \mathbb{R}^{1+n+m}$.

**Примечание.** Эти ограничения на $f$ минимальны и в дальнейшем будут усиливаться.

По теореме о существовании и единственности решения для любого $\widetilde{\mu}$ множество

$$G_{\widetilde{\mu}} = \{\, (x,y) \mid (x,y,\widetilde{\mu}) \in F \,\},$$

если оно не пусто, является областью единственности для нормальной системы вида (3.3) $y' = f(x,y,\widetilde{\mu})$.

Фактически система (3.15) представляет собой семейство систем, каждая из которых отвечает своему значению вектора $\mu$. Понятно, что не может идти и речи о нахождении общего решения системы (3.15), поскольку даже приближённое интегрирование осуществимо только для дискретных значений параметра.

Пусть функция $y = y(x, x_0, y^0, \mu)$, $\quad y(x_0, x_0, y^0, \mu) = y^0$ обозначает решение ЗК$_{(3.15)}$, заданное на множестве

$$D = \left\{\, (x, x_0, y^0, \mu) \mid x \in I(x_0, y^0, \mu), \quad (x_0, y^0, \mu) \in F \,\right\},$$

где $I$ — максимальный интервал существования решения.

Множество $D$ является областью.

Особое место среди систем (3.15) занимает т. н. *порождающая* (*невозмущённая*) система

$$y' = f(x, y, \widehat{\mu}), \tag{3.16}$$

в которой $\widehat{\mu}$ — числовой вектор *расчётных* значений параметров, например, средних или наиболее вероятных. (3.15) можно трактовать как *возмущённую* систему.

Зафиксируем расчётные значения начальных данных $x_0 = \widehat{x}_0$, $y^0 = \widehat{y}^0$ так, чтобы $(\widehat{x}_0, \widehat{y}^0, \widehat{\mu}) \in F$.

Рассмотрим решение ЗК $\varphi(x) = y(x, \widehat{x}_0, \widehat{y}^0, \widehat{\mu})$, $\quad \varphi(\widehat{x}_0) = \widehat{y}^0$ системы (3.16) на максимальном интервале существования $(\alpha, \beta)$, и выберем произвольный отрезок $[a,b] : \widehat{x}_0 \in [a,b] \subset (\alpha, \beta)$.

Решение $y = \varphi(x)$ при $x \in [a, b]$ будем также называть расчётным. Оно описывает расчётное (модельное) движение материальной точки в пространственно-временном континууме. Это решение предполагается известным.

Понятно, что реальное движение материальной точки, описываемое решением $y(x, x_0, y^0, \mu)$ возмущённой системы (3.15) с начальными данными $x_0 \in [a, b],\ y^0$, по норме близким к $\varphi(x_0)$, и вектором параметров $\mu$, близким к $\widehat{\mu}$, юудет определено в некоторолй окрестности точки $x_0$ и будет отличаться от расчётного движения. Вопрос в том, можно ли это решение продолжить на весь отрезок $[a, b]$, и насколько велико окажется отличие.

Введём следующие обозначения:

$$\overline{U}_d^{x,y}(\varphi, \widehat{\mu}) \coloneqq \{\, (x, y, \mu) \mid x \in [a, b], \quad \|\, y - \varphi(x)\| \le d, \quad \|\mu - \widehat{\mu}\| \le d \,\} \tag{3.17}$$