

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Ряды Фурье</b>	<b>2</b>
1.1	Разложение в ряд Фурье элемента из замыкания линейной оболочки ОНС . . . . .	2
1.2	Классические ряды Фурье . . . . .	4

# Глава 1

## Ряды Фурье

### 1.1. Разложение в ряд Фурье элемента из замыкания линейной оболочки ОНС

**Замечание.**  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  — базис.  
Тогда  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  — полная система (т. е.  $\overline{\mathcal{L}\{e_n\}} = X$ ).

**Замечание.**  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  — базис.  
Тогда  $X$  сепарабельно.

**Следствие.**  $H$  — гильбертово,  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  — полная ОС.  
Тогда  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  — базис.

**Доказательство.** Уже доказано, что

$$x \in H, \quad x \in \overline{\mathcal{L}\{e_n\}} \implies x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$$

Проверим единственность разложения

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$$

Рассмотрим частичную сумму:

$$\sigma_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, \quad \lim \sigma_n = x$$

$$(\sigma_n, e_k) = \alpha_k \text{ при } n \geq k \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n, e_k) = \alpha_k$$

При этом,

$$\lim(\sigma_n, e_k) \stackrel{\text{непр. ск. произв.}}{=} (x, e_k) \implies \alpha_k = (x, e_k)$$

□

**Теорема 1.**  $H$  — сепарабельное гильбертово пространство.  
Тогда в  $H$  существует ОНБ.

**Доказательство.** Существует всюду плотное  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , т. е.  $\overline{\{x_n\}} = H$ . Значит,  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — полная, т. е.  $\overline{\mathcal{L}\{x_n\}} = H$ .

Положим  $x_1 = \dots = x_{n_1-1} = 0$ ,  $x_{n_1} \neq 0$ ,  $z_1 := x_{n_1}$ ,  $L_1 = \mathcal{L}\{z_1\}$ .

$$L_1 = \mathcal{L}\{x_1, \dots, x_{n_1}\}$$

$$x_{n_1+1} \in L_1, \dots, x_{n_2-1} \in L_1, \quad x_{n_2} \notin L_1, \quad z_2 := x_{n_2}, \quad L_2 = \mathcal{L}\{z_1, z_2\}$$

И так далее по индукции.

$$z_1, z_2, \dots, z_m, \quad z_m = x_{n_m}$$

- Если  $x_k \in L_m \quad \forall k > m$ , то  $\dim H = m$ .
- Если  $x_{n_m+1}, \dots, x_{n_{m+1}-1} \in L_m, \quad \exists x_{n_{m+1}} \notin L_m$ , то  $z_{m+1} := x_{n_{m+1}}$ .

$\{z_m\}_{m=1}^\infty$  ЛНЗ

$$\mathcal{L}\{z_1, \dots, z_n\} = \mathcal{L}\{x_1, \dots, x_{n_m}\} \implies \mathcal{L}\{z_m\} = \mathcal{L}\{x_n\}$$

Значит,  $\{z_m\}$  — полная ЛНЗ система. Применим к ней процесс ортогонализации Грама—Шмидта, получим набор  $\{e_j\}$ .

$$\mathcal{L}\{e_j\} = \mathcal{L}\{z_j\} \implies \{e_j\} \text{ — полная ОНС}$$

□

**Проблема Банаха (1936).**  $X$  — сепарабельное банахово пространство. Верно ли, что в нём существует базис?

П. Энфло в 1973 году построил контрпример.

**Теорема 2.** Все бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства линейно изометрически (с сохранением нормы) изоморфны друг другу.

**Доказательство.**  $H$  — сепарабельное гильбертово пространство. Докажем, что оно линейно изометрически изоморфно  $l^2$ .

Известно, что в  $H$  существует ОНБ  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ .

$$x \in H \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, f_n) f_n$$

Определим оператор  $T : H \rightarrow l^2$ :

$$Tx = \{(x, e_n)\}_{n=1}^\infty$$

В  $l^2$  мы попадаем в силу равенства Парсеваля:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \implies \begin{cases} Tx \in l^2, \\ T \text{ — изометрия, т. е. } \|Tx\|_2 = \|x\|_H. \end{cases}$$

Из свойств скалярного произведения очевидно, что  $T \in \mathcal{L}in(H, l^2)$ .

$$\|Tx\| = \|x\| \implies \|T\| = 1, \quad T \in \mathcal{B}(H, l^2)$$

Проверили, что  $T(H) \subset l^2$ . Докажем равенство.

Возьмём  $y = \{y_n\}_{n=1}^\infty \in l^2$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 = \|y\|_2^2 < +\infty$$

$$g_n := \sum_{j=1}^n y_j f_j \in H$$

Проверим, что  $\{g_n\}$  фундаментальна.

Применим критерий Коши к  $\sum |y_n|^2 < +\infty$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall m > n \geq N \quad \|y_{n+1}\|^2 + \dots + \|y_m\|^2 < \varepsilon$$

$$\|g_m - g_n\|^2 = \left\| \sum_{j=n+1}^m y_j f_j \right\|^2 = \sum_{j=n+1}^m |y_j|^2 < \varepsilon$$

Значит,  $\{g_n\}$  фундаментальна.

$$\xrightarrow[H-\text{гильбертово}} \exists g = \lim g_n \implies g = \sum_{j=1}^{\infty} y_j f_j \xrightarrow[\text{разложение единственно}} e_j = (g, f_j) \implies T(g) = y$$

□

## 1.2. Классические ряды Фурье

**Теорема 3 (Вейерштрасс).**  $f \in \tilde{\mathcal{C}}[-\pi, \pi]$ , т. е.  $f(-\pi) = f(\pi)$ ,  $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=0}^n (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)) : \quad \|f - T_n\|_{\infty} < \varepsilon$$

**Без доказательства.**

□

**Примеры.**

1.  $L^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi]$ ,  $dx$  — мера Лебега

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$$

Докажем, что  $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$  — полная ОС.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi$$

$f \in L^2[-\pi, \pi]$ ,  $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$  плотно в  $L^2[-\pi, \pi]$

$$\exists g \in \mathcal{C}[-\pi, \pi] : \quad \|f - g\|_2 < \varepsilon$$

Утверждается, что  $g$  можно сделать  $2\pi$ -периодической, не сильно испортив её норму в  $l^2$ .

$$\exists \delta > 0 : \quad \left( \int_{\pi-\delta}^{\pi} |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

$$h(x) := \begin{cases} g(x), & x \in [-\pi, \pi - \delta], \\ h(\pi) = g(-\pi), \\ \text{по непрерывности иначе} \end{cases}$$

$$\exists T_n : \quad \|h - T_n\|_{\infty} < \varepsilon \implies \left( \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|h(x) - T_n(x)|^2}_{< \varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \sqrt{2\pi}$$

$$\|f - h\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2$$

$$\|f - T_n\|_2 \leq \underbrace{\|f - g\|_2}_{< \varepsilon} + \|g - T_n\|_2 < \varepsilon + \|g - h\|_2 + \|h - T_n\|_2 < 3\varepsilon + \varepsilon \sqrt{2\pi}$$

Базис:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Коэффициенты Фурье:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Ряд Фурье сходится в функции в пространстве  $L^2$ :

$$\forall f \in L^2[-\pi, \pi] \quad \|f - S_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

То есть,

$$\lim \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

2.  $L_{\mathbb{C}}^2[-\pi, \pi], \quad f \in L_{\mathbb{C}}^2[-\pi, \pi]$

$$f = u + iv, \quad u, v \in L_{\mathbb{R}}^2[-\pi, \pi]$$

Аналогично,  $\{1, \cos(nx), \sin(nx)\}_{n \in \mathbb{N}}$  — полная ОНС в  $L_{\mathbb{C}}^2$ .

3.  $L_{\mathbb{C}}^2[-\pi, \pi]$

Докажем, что  $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  — полная ОС в  $L_{\mathbb{C}}^2$ .

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 2\pi, & n = m \end{cases}$$

Получаем коэффициенты:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- $c_0 = a_0$ ;
- $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n);$$

- $n \in \mathbb{N}$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

$$S_n := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = a_0 + \sum (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

ОНБ:

$$\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

4.  $L_{\mathbb{R}}^2[0, \pi]$

Докажем, что  $\{1, \cos(nx)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  — ОС в  $L^2$ .

$$f \in L_{\mathbb{R}}^2[0, \pi], \quad f(-x) := f(x) \implies f \in L^2[-\pi, \pi]$$

$$\|f - S_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum a_k \cos(kx)|^2 dx \rightarrow 0 \implies \int_0^{\pi} |f(x) - \sum a_k \cos(kx)|^2 dx \rightarrow 0$$