Оглавление

1 Мера Лебега **2**

Глава 1

Мера Лебега

Все утверждения, приведённые здесь без доказательств, легко проверяются в случае $\mathbb{R}$ при помощи картинок.

Мера в нашем случае будет обозначать меру Лебега.

Определение 1. Имеется некоторое непустое множество множеств $\mathscr{R}$. Будем называть его *кольцом*, если

1. $A \in \mathscr{R},\ B \in \mathscr{R} \implies A \cup B \in \mathscr{R}$;
2. $\dots \implies A \setminus B \in \mathscr{R}$.

В частности, $A \setminus A = \emptyset \in \mathscr{R}$.

Вследствие того, что $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$, $A \cap B \in \mathscr{R}$.

Определение 2. $\mathscr{R}$ называется *σ-кольцом*, если

$$\{\, A_n \,\}_{n=1}^{\infty}, \quad A_n \in \mathscr{R} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$$

Можно проверить, что

$$A_1 \setminus \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) \right) = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\implies \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$$

$\mathbb{R}^{m \geq 1}, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \qquad a \leq b$

Будем обозначать $\langle a, b \rangle$, где $\langle$ — это (или [, а $\rangle$ — это) или].

Рассмотрим $m \geq 2, \quad A \in \mathbb{R}^m, \quad B \in \mathbb{R}^m$. $\langle A, B \rangle$ будем также называть *промежутком* в $\mathbb{R}^m$, где $A = (a_1, \dots, a_m),\ B = (b_1, \dots, b_m), \quad a_j \leq b_j$.

Замечание. Вообще, это параллелепипед.

Определение 3. *Мерой* промежутка будем называть

$$\mathrm{m}\left(\langle A, B \rangle \right) = \prod_{j=1}^{m} (b_j - a_j)$$

Определение 4. *Элементарным множеством* будем называть конечное объединение промежутков:

$$I = \bigcup_{k=1}^{N} \langle A_k, B_k \rangle$$

Обозначение. $\mathscr{E}$ — множество всех элементарных множеств.

Утверждение 1. $I \subset \mathscr{E}$. Тогда I можно представить в виде объединения промежутков, таких что

$$\langle A_k, B_k \rangle \cap \langle A_l, B_l \rangle = \emptyset \quad \forall k \neq l$$

Определение 5. *Мерой* элементарного множества будем называть

$$\mathrm{m}\, I = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{m}\left(\langle A_k, B_k \rangle \right)$$

Утверждение 2. Определение множества элементарного множества **корректно**, то есть, мера не зависит от способа разбиения.

Определение 6. Промежуток будем называть *открытым*, если все символы $\langle$ и $\rangle$ обозначают (и).

Обозначение. (a_k, b_k)

Определение 7. Элементарное множество будем называть *открытым*, если $I = \bigcup (a_k, b_k)$.

Пусть имеется некоторое множество $E \subset \mathbb{R}^m$. Обозначим через $U(E)$ множество следующих открытых элементарных множеств:

$$U(E) = \{ \{ A_n \}_{n=1}^{\infty} \}, \qquad A_n \text{ — открытое элементарное множество,}$$

таких, что $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Замечание. Объединение может оказаться конечным.

Определение 8. *Внешней мерой* множества E называется

$$\mathrm{m}^* E = \inf_{\{ A_n \}_{n=1}^{\infty} \in U(E)} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}\, A_n \quad \leq +\infty$$

Если ряд расходится, приписываем внешней мере значение ∞.

Понятно, что m^* определена для любого множества. Также очевидно, что $\mathrm{m}^* \emptyset = 0$.

Свойства.

1. $\mathrm{m}^* E \geq 0$;
2. $E_1 \subset E_2 \implies \mathrm{m}^* E_1 \leq \mathrm{m}^* E_2$;
3. $I \in \mathscr{E} \implies \mathrm{m}^* I = \mathrm{m}\, I$;
4. $$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \implies \mathrm{m}^* E \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^* E_n. \tag{1.1}$$

Доказательство.

1. Очевидно.
2. $U(E_2) \subset U(E_1)$.
3. Очевидно.
4. Будем считать, что $\mathrm{m}^* E_n < \infty \quad \forall n$.
   Выберем $\forall \varepsilon > 0$, $\{ A_{n_k} \}_{k=1}^{\infty}$, $\quad A_{n_k} \in \mathscr{E}$, $\quad \{ A_{n_k} \} \subset U(E_n)$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}\, A_{n_k} < \mathrm{m}^* E_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{1.2}$$

Тогда

$$\{ A_{n_k} \}_{n=1}^{\infty}{}_{k=1}^{\infty} \in U(E)$$

$$\implies \mathrm{m}^* E \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}\, A_{n_k} \right)$$

(т. к. внешняя мера — это инфимум)

Применим теперь (1.2):

$$\sum \sum \mathrm{m}\, A_{n_k} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{m}^* E_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^* E_n + \varepsilon$$

□

Напоминание. $A \subset \mathbb{R}^m, \quad B \subset \mathbb{R}^m$

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Определим неотрицательное число

$$\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{m}^*(A \triangle B) \geq 0$$

Понятно, что $A \triangle \emptyset = A$, поэтому $\mathrm{d}(A, \emptyset) = \mathrm{m}^* A$.

Свойства.

1. $\mathrm{d}(A, B) = \mathrm{d}(B, A)$;
2. $\mathrm{d}(A, B) \leq \mathrm{d}(A, C) + \mathrm{d}(C, B)$;
3. $\mathrm{d}(A_1 \cup A_2,\ B_1 \cup B_2) \leq \mathrm{d}(A_1, B_1) + \mathrm{d}(A_2, B_2)$;
4. $\mathrm{d}(A_1 \cap A_2,\ B_1 \cap B_2) \leq \mathrm{d}(A_1, B_1) + \mathrm{d}(A_2, B_2)$;
5. $\mathrm{d}(A_1 \setminus A_2,\ B_1 \setminus B_2) \leq \mathrm{d}(A_1, B_1) + \mathrm{d}(A_2, B_2)$.

Доказательство. Все свойства основаны на теоретико-множественных соображениях. Например, 3 основано на включении

$$A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$$

Далее нужно воспользоваться свойством (1.1) внешней меры. □

Определение 9. Будем говорить, что множество $A \subset \mathbb{R}^m$ *конечно-измеримо (по Лебегу)*, если

$$\exists \{ A_n \}_{n=1}^{\infty}, \quad A_n \in \mathscr{E} : \quad \mathrm{d}(A_n, A) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \tag{1.3}$$

Обозначение. $\mathfrak{M}_F$ — множество всех конечно-измеримых множеств.

Понятно, что $\mathscr{E} \subset \mathfrak{M}_F$.

Определение 10. Множество $B \subset \mathbb{R}^m$ будем называть *измеримым (по Лебегу)*, если

$$\exists \{ A_n \}_{n=1}^{\infty}, \quad A_n \in \mathfrak{M}_F : \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \tag{1.4}$$

Понятно, что $\mathfrak{M}_F \subset \mathfrak{M}$.

Замечание. В множестве $\mathbb{R}^m$ **не все** подмножества измеримы: $2^{R^m} \neq \mathfrak{M}$ (в отличие от внешней меры).

Для $B \in \mathfrak{M}$ будем рассматривать $\mathrm{m}^* B$.

Теорема 1. Совокупность всех измеримых множеств является σ-кольцом.

Внешняя мера, определённая на $\mathfrak{M}$ обладает свойством *счётной аддитивности* (σ-*аддитивности*):

$$\{ B_n \}_{n=1}^{\infty}, \quad B_n \in \mathfrak{M}, \quad B_n \cap B_k = \emptyset \quad \Longrightarrow \mathrm{m}^* \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{m}^* B_n \tag{1.5}$$

Доказывать теорему не будем. Докажем, что $\mathfrak{M}_\mathbf{F}$ является кольцом, и мера на нём аддитивна.

Доказательство ($\mathfrak{M}_F$ — кольцо)**.** Пусть есть $A \in \mathfrak{M}_F$ и $B \in \mathfrak{M}_F$. Тогда

$$\exists\, A_n \in \mathscr{E}: \quad \mathrm{d}(A_n, A) \to 0$$

$$\exists\, B_n \in \mathscr{E}: \quad \mathrm{d}(B_n, B) \to 0$$

Тогда, по одному из свойств d,

$$\mathrm{d}(A_n \cup B_n,\ A \cup B) \le \mathrm{d}(A_n, A) + \mathrm{d}(B_n, B) \to 0$$

$$(\, A_n \setminus B_n,\ A \setminus B) \le \mathrm{d}(A_n, A) + \mathrm{d}(B_n, B) \to 0$$

Отсюда $A_n \cup B_n \in \mathscr{E}, \quad A_n \setminus B_n \in \mathscr{E}$.

$$\Longrightarrow\ A \cup B \in \mathfrak{M}_F, \quad A \setminus B \in \mathfrak{M}_F$$

□

Утверждение 3. $A, B \in \mathscr{E}$

$$\Longrightarrow\ \mathrm{m}(A \cup B) + \mathrm{m}(A \cap B) = \mathrm{m}\, A + \mathrm{m}\, B \tag{1.6}$$

В частности, при $A \cap B = \emptyset$,

$$\mathrm{m}(A \cup B) = \mathrm{m}\, A + \mathrm{m}\, B$$

Доказательство (аддитивность меры)**.** Пусть $A, B \in \mathfrak{M}_F, \quad A \cap B = \emptyset$. Тогда

$$\exists\, \{ A_n \}, \{ B_n \}: \quad \mathrm{d}(A_n, A) \to 0, \quad \mathrm{d}(B_n, B) \to 0$$

Отдельно будет доказано, что

Утверждение 4. Если $\mathrm{d}(C_n, C) \to 0$, то $\mathrm{m}^* C_n \to \mathrm{m}^* C$

В соотношении (1.6) можно поставить внешнюю меру вместо меры:

$$\mathrm{m}^*(A_n \cup B_n) + \mathrm{m}^*(A_n \cap B_n) = \mathrm{m}^* A_n + \mathrm{m}^* B_n$$

Из утв. 4, $\mathrm{m}^*(A_n \cup B_n) \to \mathrm{m}^*(A \cup B)$.

$$\mathrm{m}^*(A_n \cap B_n) \to \mathrm{m}^*(A \cap B) = 0$$

$$\mathrm{m}^* A_n \to \mathrm{m}^* A, \qquad \mathrm{m}^* B_n \to \mathrm{m}^* B$$

Это всё влечёт, что

$$\mathrm{m}^*(A \cup B) = \mathrm{m}^* A + \mathrm{m}^* B$$

□

Утверждение 5. $|\,\mathrm{m}^* A - \mathrm{m}^* B| \le \mathrm{d}(A, B)$

Доказательство. Пусть $\mathrm{m}^* A < \mathrm{m}^* B$. Тогда

$$\mathrm{m}^* B = d(B, \emptyset) \le \mathrm{d}(B, A) + \mathrm{d}(A, \emptyset) = \mathrm{d}(B, A) + \mathrm{m}^* A$$

□

Доказательство (утв. 4)**.** $|\,\mathrm{m}^* C_n - \mathrm{m}^* C| \le \mathrm{d}(C_n, C) \to 0$ □