Оглавление

Глава 1

Мера Лебега

1.1. Продолжение чего-то

Видимо, ещё конспекты потерялись. TODO: Надо поискать в конспектах Якова(?). Тут не хватает реально большого куска.

Свойства.

1,2. ...

1. $0 \le f \le +\infty, \quad f$ измерима. Пусть $f_0 \in B(f)$. Тогда по предыдущему пункту

$$I_A(f_0) = \int\limits_A f_0 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f_0 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \le \sum \varphi(A_n),$$

если в этом пункту имеем в виду $\varphi(A) = \int\limits_A f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$

$$\implies \varphi(A) = \sup \{\, I_a(f_0) \mid f_0 \in B(f) \,\} \le \sum \varphi(A_n) \tag{1.1}$$

Поскольку $f \in \mathscr{L}(E)$, то $\varphi(A) < +\infty$, $\varphi(A_n) < +\infty$.
Возьмём $\forall N$ и фиксируем $r > 0$. Напомним, что f определяется на всём множестве E.
Выберем $f_1, \dots, f_n$ — простые функции, $f_j \in B(f)$, удовлетворяющие условию

$$I_{A_j}(f_j) > \int\limits_{A_j} f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} - \frac{\varepsilon}{N}, \quad j = 1, \dots, N \tag{1.2}$$

Определим функцию $f_0 : E \to \mathbb{R}$:

$$f_0(x) = \begin{cases} f_j(x), & j \ge 2, \quad x \in A, \\ f_1(x), & x \in E \setminus \bigcup_{n=2}^N A_n \end{cases}$$

Тогда $f_0 \in B(f)$, $\bigcup_{n=1}^N A_n \subset A$ и по предыдущему пункту и (1.2)

$$\varphi(A) \ge \varphi\Big(\bigcup_{n=1}^N A_n\Big) \ge I_{\bigcup A_n}(f_0) = \sum_{n=1}^N I_{A_n}(f_0) = \sum I_{A_n}(f_n) > \sum \Big(\varphi(A_n) - \frac{\varepsilon}{N}\Big) = \sum \varphi(A_n) - \varepsilon$$

В силу произвольности N и $\varepsilon > 0$

$$\implies \varphi(A) \ge \sum \varphi(A_n)$$

$\underset{(1.1)}{\Longrightarrow}$ (**??**) для $f(x) \in \mathscr{L}(E)$, $\quad f(x) \ge 0$, а тогда и для $\forall f \in \mathscr{L}(E)$.

Доказательство.

1. ...

2. ...

   Тогда

$$\varphi(A) = \int\limits_A \sum_{j=1}^N c_j x_{F_j} \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = I_A\Big(\sum_{j=1}^N c_j x_{F_j}\Big) = \sum_{j=1}^N c_j \,\mathrm{m}(F_j \cap A)$$

$$\varphi(A_n) = I_{A_n}\Big(\sum c_j X_{F_j}\Big) = \sum c_j \,\mathrm{m}(F_j \cap A_n)$$

□

Из последнего свойства $\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = 0$, если $\mathrm{m}\, E = 0$. Получаем важное следствие:

Следствие. Пусть $f_1, f_2 \in \mathscr{L}(E)$ и $\mathrm{m}\,\{\, x \in E \mid f_1(x) \neq f_2(x) \,\} = 0$. Тогда

$$\int\limits_E f_1 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_E f_2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

Доказательство. Пусть $F = \{\, x \in E \mid f_1(x) \neq f_2(x) \,\}$, тогда

$$\int\limits_E f_1 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E\setminus F} f_1 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} + \int\limits_F f_1 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E\setminus F} f_1 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E\setminus F} f_2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E\setminus F} f_2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} + \int\limits_F f_2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_E f_2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

□

Определение 1. Пусть функции f_1, f_2 измеримы на E.
Говорят, что f_1 *эквивалентна* f_2, пишут $f_1 \sim f_2$, если $\mathrm{m}\,\{\, x \in E \mid f_1(x) \neq f_2(x) \,\} = 0$.

Примечание. Иногда говорят, что функции *равны почти всюду*.

Теорема 1. Пусть $f \in \mathscr{L}(E)$, тогда $|f| \in \mathscr{L}(E)$ и

$$\Big(\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}\Big) \leq \int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

Доказательство. Пусть $E_+ = \{\, x \in E \mid f(x) \geq 0 \,\}$, $\quad E_- = \{\, x \in E \mid f(x) < 0 \,\}$.
Тогда $\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E_+} + \int\limits_{E_-} = \int\limits_E f^+ \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} - \int\limits_E f^- \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$,

$$\int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E_+} + \int\limits_{E_-} = \int\limits_{E_+} f^+ \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} + \int\limits_{E_-} f^- \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_E f^+ \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} + \int\limits_E f^- \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

□

1.2. Дальнейшие свойства интеграла Лебега

Первых, видимо, не было.

Свойства.

1. Пусть $\exists\, c < \infty$ такая, что $|f(x)| \leq c$, $\quad x \in E$, $\quad f$ измерима на E и $\mathrm{m}\, E < +\infty$.
   Тогда $f \in \mathscr{L}(E)$.

2. Если f измерима, $\mathrm{m}\, E < \infty$, $\quad a \leq f(x) \leq b$, $\quad x \in E$, то

$$a \,\mathrm{m}\, E \leq \int_E f \,\mathrm{d}\, m \leq b \,\mathrm{m}\, E$$

3. Если $f, g \in \mathscr{L}(E)$ и $f(x) \le g(x), \quad x \in E$, то

$$\int_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \le \int g \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

4. $f \in \mathrm{L}(E), \quad c \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} cf \in \mathscr{L}(E), \\ \int\limits_E cf \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = c\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \end{cases}$$

5. Если $\mathrm{m}\, E = 0, \quad f$ измерима, то

$$\lim_E \mathrm{d}\,\mathrm{m} = 0$$

6. Если $f \in \mathscr{L}(E), \quad F \subset E, \quad F$ измеримо, то $f \in \mathscr{L}(F)$.
   В частности, если $E = E_0 \cup S, \quad E_0 \cap S = 0, \quad \mathrm{m}\, S = 0$, то

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E_0} f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} + \int\limits_S f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E_0} f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m},$$

   поскольку $\int\limits_S f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = 0$.

   Отсюда следует важное свойство интеграла Лебега:

7. Пусть $f \sim h, \qquad f \in \mathscr{L}(E)$. Тогда

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_E g \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

8. Пусть $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Тогда $f + g \in \mathscr{L}(E)$ и

$$\int\limits_E (f+g) \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} + \int\limits_E g \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

Доказательство.

1. Следует из того, что $f \in \mathscr{L}(E) \iff |f| \in (E)$ для любой простой функции $s: \ 0 \le s(x) \le |f(x)$ справедливо $s(x) \le c$, поэтому

$$\int\limits_E s \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \le \int\limits_E c \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = c\,\mathrm{m}\, E, \qquad \int |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \le c\,\mathrm{m}\, E$$

2. Аналогично.

3. Без доказательства.

4. Докажем для $f(x) \ge 0, \quad x \in E, \quad c > 0$. Пусть $s \in \mathcal{A}(F)$, т. е. s — простая функция, $\quad 0 \le s(x) \le f(x) \quad \forall x \in E$.
   Тогда $cs \in \mathcal{A}(cf)$,

$$\int\limits_E cs \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \sum_{j=1}^n ca_j \,\mathrm{m}\, F_j = c\sum_{j=1}^n a_j \,\mathrm{m}\, F_j = c\int\limits_E s \,\mathrm{d}\,\mathrm{m},$$

   если $s(x) = \sum a_j \xi_{F_j}(x), \quad F_j \cap F_k = \emptyset$.
   Переходя к супремуму, получаем нужное свойство.

5. Если $F_j \subset E$, то $0 \le \mathrm{m}\, F_j \le \mathrm{m}\, E = 0$, для любой простой функции $s \in \mathcal{A}(|f|)$ имеем $0 \le s(x) \le |f(1)| = 0, \quad s(x) = 0, \quad \int\limits_E s \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = 0$, поэтому $\int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = 0$

$$0 \le \int\limits_E f^+ \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \le \int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = 0, \qquad 0 \le \int\limits_E f^- \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \le \int |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = 0$$

$$\int\limits_E \mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_E f^+ \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} - \int\limits_E f^- \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = 0$$

6. Для $\forall s \in \mathcal{A}(|f|)$ на множестве F положим

$$s_0(x) = \begin{cases} s(x), & x \in F, \\ 0, & x \in E \setminus F \end{cases}$$

$$\int\limits_E s_0 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_F s \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \le \int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

$$\int\limits_F |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \le \int\limits_E |f| \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}, \qquad |f| \in \mathscr{L}(F)$$

7. Пусть $E_0 = \{\, x \in E \mid f(x) = g(x) \,\}, \quad S = E \setminus E_0$. Тогда $\mathrm{m}\, S = 0$,

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E_0} f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}, \qquad \int\limits_E g \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{E_0} g \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

□

1.3. Приложения интеграла Лебега

Теорема 2 (связь интеграла Римана и интеграла Лебега)**.** Пусть функция f интегрируема по Риману на промежутке (a, b).

Тогда она измерима по Лебегу на множестве $E = (a, b)$, суммируема, и справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, x = \int\limits_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$

Без доказательства. □

При этом, существуют функции, не интегрируемые по Риману, но интегрируемые по Лебегу. Например, функция Дирихле:

$$f_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a, b) \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in (a, b) \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\mathrm{m}\,\mathbb{Q} = 0$, поэтому $f_0 \sim 0$ на (a, b)

$$\int\limits_{(a,b)} f_0 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_{(a,b)} 0 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = 0$$

1.4. Пространства $\mathcal{L}^p(E)$