Оглавление

Глава 1

ТФКП

1.1. Продолжаем доказывать теорему Коши для конечносвязной области, ограниченной кусочно-гладкой кривой

Доказательство. Последняя формула была:

$$\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\sigma_\delta}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta + 2\pi i f(z) \tag{1.1}$$

В силу непрерывности

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall \zeta \in \sigma_\delta \quad |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon \tag{1.2}$$

$$\left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\sigma_\delta}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta \right| \le \int\limits_{\sigma_\delta} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|}\,|\,\mathrm{d}\,\zeta| \le \int\limits_{\sigma_\delta} \frac{\varepsilon}{\delta}\,|\,\mathrm{d}\,\zeta| = \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot 2\pi\delta = 2\pi\varepsilon \tag{1.3}$$

$$\underset{(1.1)}{\Longrightarrow} \left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta - 2\pi i f(z) \right| = \left| \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\sigma_\delta}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta \right| \le 2\pi\varepsilon \tag{1.4}$$

$$\Longrightarrow \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{S}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta - 2\pi i f(z) = 0$$

$\square$

Замечание (о прошедшем рассуждении).

$$(e^{i\theta})' = ie^{i\theta}$$

$$\cos\theta + i\sin\theta$$

$$z_0 = a + bi$$

$$\zeta = z_0 + re^{i\theta} = (a + r\cos\theta) + i(b + r\sin\theta)$$

$$(a + r\cos\theta)' + i(b + r\sin\theta)' = r(\cos\theta)' + ir(\sin\theta)' = -r\sin\theta + ir\cos\theta = ir(\cos\theta + i\sin\theta) = ire^{i\theta}$$

Замечание (о предстоящем рассуждении).

$$f'_z = \frac{1}{2}(f'_x - if'_y), \qquad f'_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f'_x + if'_y) = 0$$

$$f' = f'_z = f'_z + f'_{\bar{z}} = f'_x, \qquad f' = f'_z = f'_z - f'_{\bar{z}} = if'_y$$

$$f'_y = if'$$

$$z^\alpha, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

$$z^\alpha \overset{\text{def}}{=} e^{\alpha \ln z}$$

$z^n, \quad n \in \mathbb{N}$ определено при $z \in \mathbb{C}$
z^{-n} определено при $z \in \mathbb{C} \setminus \{ 0 \}$

$$(z^n)' = nz^{n-1}$$

$$(z^{-n})' = -nz^{-n-1}$$

$$\Big((z-a)^{-n}\Big)' = -n(z-a)^{-n-1}$$

$$\Big((z-a)^{-n}\Big)'_x = -n(z-a)^{-n-1}, \qquad \Big((z-a)^{-n}\Big)'_y = -in(z-a)^{-n-1}$$

$$\left(\frac{1}{z-a}\right)'_x = -\frac{1}{(z-a)^2}, \qquad \left(\frac{1}{z-a}\right)'_y = -i\frac{1}{(z-a)^2}$$

$$\implies \left(\frac{1}{a-z}\right)'_x = \frac{1}{(a-z)^2}, \qquad \left(\frac{1}{a-z}\right)'_y = \frac{i}{(a-z)^2}$$

$$\left(\frac{1}{a-z}\right)''_{xx} = \left(\frac{1}{(a-z)^2}\right)'_x = \frac{2}{(a-z)^3}, \qquad \left(\frac{1}{a-z}\right)''_{xy} = i\left(\frac{1}{(a-z)^2}\right) = \frac{2i}{(a-z)^3}$$

$$\left(\frac{1}{a-z}\right)''_{yy} = i\left(\frac{1}{(a-z)^2}\right)'_y = \frac{2i^2}{(a-z)^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{1}{a-z}\right)_{\underbrace{x\ldots x}_{m}\underbrace{y\ldots y}_{n}} = \frac{(m+n)!\,i^n}{(a-z)^{m+n+1}} \tag{1.5}$$

1.2. Бесконечная гладкость аналитической функции

Определение 1. $D \subset \mathbb{C}, \qquad f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

Будем говорить, что $f \in \mathcal{C}^r\big(D\big)$, где $r \geq 1$, если $u \in \mathcal{C}^r\big(D\big)$ и $v \in \mathcal{C}^r\big(D\big)$.

Будем говорить, что $f \in \mathcal{C}^\infty\big(D\big)$, если $f \in \mathcal{C}^r\big(D\big) \quad \forall r \geq 1$.

Теорема 1. $D \subset \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{A}(D) \qquad \implies \qquad f \in \mathcal{C}^\infty\big(D\big)$

Доказательство.

1. $D = \{ z \mid |z-a| < R \}$

   Выберем $0 < \rho < R$ и $\rho < r < R$. Обозначим $S = \{ z \mid |z-a| = r \}$. Применим формулу Коши:

   $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{S} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta$$

   При этом, $S = \big\{ z = a + re^{i\theta} \big\}$. Значит,

   $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})}{a+re^{i\theta}-z} ire^{i\theta}\,\mathrm{d}\,\theta \tag{1.6}$$

   При этом, $z = x + iy$.

   Утверждение 1. Теоремы о непрерывности интегралов от параметра и о производной интеграла от параметра остаются справедливыми, если функции комплекснозначные, а параметров несколько.

Применим их и воспользуемся формулой (1.5):

$$\Big(f(z)\Big)^{(m+n)}_{\underbrace{x\ldots x}_{m}\underbrace{y\ldots y}_{n}} = (m+n)!i^n \cdot \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})ir}{(a+re^{i\theta}-z)^{m+n+1}}\,\mathrm{d}\,\theta =$$

$$= (m+n)!i^n \cdot \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\circlearrowleft S} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{m+n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta \qquad (1.7)$$

$$\implies \big(f(z)\big)^{(m+n)}_{\underbrace{x\ldots x}_{m}\underbrace{y\ldots y_n}} \in \mathcal{C}\big(\{\, z \mid |\, z-a| \le \rho \,\}\big) \qquad (1.8)$$

В силу произвольности ρ это означает, что $f \in \mathcal{C}^{m+n}\big(\{\, z \mid |\, z-a| < R \,\}\big)$.
Значит, $f \in \mathcal{C}^\infty\big(|z-a| < R\big)$.

2. Произвольная область $D \subset \mathbb{C}$

   Возьмём $a \in D$

   $$\exists\, R: \quad \{\, z \mid |\, z-a| < R \,\} \subset D$$

   По только что доказанному $f \in \mathcal{C}^\infty\big(\{\, z \mid |\, z-a| < R \,\}\big)$.

   Поскольку класс $\mathcal{C}^\infty$ определяется локально, теорема доказана.

□

1.3. Аналитичность производной аналитичной функции

Теорема 2. $D \subset \mathbb{C}, \qquad f \in \mathcal{A}(D) \qquad \implies \qquad f' \in A(D)$

Доказательство. $f' = f'_x$
У f были все производные, а значит, и у f'_x есть все производные, то есть $f' \in \mathcal{C}^\infty\big(D\big)$.
Рассмотрим $D = \{\, z \mid |\, z-a| < R \,\}, \quad 0 < \rho < r < R$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\circlearrowleft S} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta$$

$$\implies f'(z) = f'_x(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\circlearrowleft S} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,\mathrm{d}\,\zeta \qquad (1.9)$$

Применим формулу (1.5):

$$\implies \big(f'_x(z)\big)'_x = 2\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\circlearrowleft S} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3}\,\mathrm{d}\,\zeta \qquad (1.10)$$

$$(1.9) \implies \big(f'_x(z)\big)'_y = 2i\cdot\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\circlearrowleft S} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3}\,\mathrm{d}\,\zeta \qquad (1.11)$$

$$(1.10), (1.11) \implies (f'_x)'_{\overline{z}} = 0 \qquad (1.12)$$

$$\underset{(1.9)}{\implies} \big(f'(z)\big)'_{\overline{z}} \equiv 0 \quad \text{при } |z-a| < \rho$$

В силу произвольности ρ

$$\big(f'(z)\big)'_{\overline{z}} = 0 \quad \text{при } |z-a| < R$$

Пусть теперь D — произвольная область

$$\exists\, R: \quad \{\, z \mid |\, z-a| < R \,\} \subset D$$

□

$$f \in \mathcal{A}(z \mid |z-a| < R), \qquad \rho < r < R, \qquad f'_x = f'$$

Но f' тоже аналитична.

$$(f')'_x = (f')'$$

Это называется второй комплексной производной: $f''(z)$.

$$(1.10) \implies f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int\limits_{\overset{\circlearrowleft}{S}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\,\zeta \tag{1.13}$$