Оглавление

Глава 1

Пространства

1.1. Компакты в метрических пространствах

Замечание. Если A вполне ограничено, то A ограничено.

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 1$.

$$\exists F = \{\, x_j \,\}_{j=1}^{n} \text{ — 1-сеть, т. е.} A \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathtt{B}_1(x_j) \implies A \text{ ограничено}$$

□

Примеры.

1. $A \subset \mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$)

   Докажем, что если A ограничено, то A вполне ограничено.

   A ограничено $\implies \exists M > 0 : \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in A \quad |x_j| \le M$. Пусть $Q = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid\ |x_j| \le M \,\}$.

   $$Q = \bigcup_{j=1}^{N} Q_j, \quad \operatorname{diam} Q_j < \varepsilon, \quad F = \{\, \text{вершины } Q_j \,\}$$

   $\implies F$ — ε-сеть.

2. l^2

   $$D = \left\{ x = \{\, x_j \,\}_{j=1}^{\infty} \;\middle|\; \|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le 1 \right\}$$

   D ограничено. Проверим, что оно **не** вполне ограничено.

   Рассмотрим $e_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0 \dots, 0)$.

   $$\|e_j - e_i\|_2 = \sqrt{2}$$

   Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

   $$\mathtt{B}_{\frac{1}{2}}(e_j) \cap \mathtt{B}_{\frac{1}{2}}(e_i) = \emptyset$$

   F — $\frac{1}{2}$-сеть для D.

   $$\implies \forall j \quad \exists f_j \in F \cap \mathtt{B}_{\frac{1}{2}}(e_j)$$

   $f \ne f_i \implies \{\, f_j \,\}_{j=1}^{\infty} \subset F \implies F$ бесконечно — $\lightning$ (бесконечной ε-сети не бывает).

3. l^2

   $$\Pi = \left\{ x = \{\, x_j \,\}_{j=1}^{\infty} \;\middle|\; |x_j| \le \frac{1}{2^j} \right\} \text{ — \textit{гильбертов кирпич}}$$

(в $\mathbb{R}^3$ так устроены кирпичи). Проверим, что Π вполне ограничено.

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N\in\mathbb{N}\quad\Big(\sum_{j=N+1}^{\infty}(\frac{1}{2^j})\Big)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon$$

$$\Pi^*=\left\{\,x=(x_1,\ldots,x_N,0,\ldots)\;\middle|\;|x_j|\le\frac{1}{2^j}\,\right\}$$

Можно считать, что $\Pi^*\subset\mathbb{R}^N$ (если отбросить нулевые координаты). Тогда $\mathbb{R}^N\subset l^2\implies\exists F$ — конечная ε-сеть, $F\subset\mathbb{R}^N$.

Проверим, что F — 2ε-сеть для Π. Возьмём $x\in\Pi$.

$$x=(x_1,\ldots,x_N,x_{N+1},\ldots)=\underbrace{(x_1,\ldots,x_N,0,\ldots)}_{y}+\underbrace{(0,\ldots,0,x_{N+1})}_{z}$$

$$\|z\|_2=\Big(\sum_{j=N+1}^{\infty}|x_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon\text{ в силу выбора }N$$

$$\exists f\in F:\quad\|y-f\|_2<\varepsilon\text{ т. к.}\,y\in\Pi^*$$

$$\|x-f\|_2=\|(y-f)+z\|_2\overset{\triangle}{\le}\|y-f\|+\|z\|<2\varepsilon$$

1.1.1. Свойства вполне ограниченных множеств

Свойства. (X,ρ)

1. $A\subset X$, A вполне ограничено $\implies\overline{A}$ вполне ограничено.
2. $A\subset Y\subset X$, A вполне ограничено в $X\implies A$ вполне ограничено в Y.
3. A вполне ограничено $\implies A$ сепарабельно.

Доказательство.

1. Пусть $\varepsilon>0$, F — конечная ε-сеть для A.
   Проверим, что F — 2ε-сеть для $\overline{A}$. Возьмём $x\in\overline{A}$. Пусть $x\in\overline{A}\implies\exists y\in A;\quad\rho(x,y)<\varepsilon$.
   $$\exists f\in F:\quad\rho(y,f)<\varepsilon\implies\rho(x,f)\overset{\triangle}{\le}\rho(x,y)+\rho(y,f)<2\varepsilon$$
2. Пусть $\varepsilon>0\implies\exists\{\,x_j\,\}_{j=1}^n$ — ε-сеть для A, т. е. $A\subset\bigcup_{j=1}^n\mathsf{B}_\varepsilon(x_j)$.
   Пусть $y_j\in A\cap\mathsf{B}_\varepsilon(x_j)$ (если $A\cap\mathsf{B}_\varepsilon(x_j)=\emptyset$, то забудем об этом j).
   $$E=\{\,y_j\,\}_{j=1}^n\text{ — }2\varepsilon\text{-сеть для }A,\quad E\subset A\subset Y$$
   Возьмём $x\in A$.
   $$\exists x_j:\rho(x,x_j)<\varepsilon,\quad\rho(x_j,y_j)<\varepsilon\implies\rho(x,y_j)\le\rho(x,x_j)+\rho(x_j,y_j)<2\varepsilon$$
3. Пусть F_n — конечная $\frac{1}{n}$-сеть. Пусть $E=\bigcup F_n\implies E$ всюду плотно в $A\implies A$ сепарабельно.

□

1.1.2. Лемма о разбиении

Лемма 1. (X,ρ), $\quad\varepsilon>0$, $\quad A\subset X$, $\quad\exists$ конченая ε-сеть для A.

$$\implies A=\bigcup_{j=1}^n C_j,\quad C_j\cap C_i=\emptyset,\quad C_j\ne\emptyset,\quad\operatorname{diam}C_j\le2\varepsilon$$

$(\operatorname{diam} B = \sup\limits_{x,y \in B} \rho(x,y))$

Доказательство.

$$\exists \{ x_j \}_{j=1}^n : \quad A \subset \bigcup_{j=1}^n \mathtt{B}_\varepsilon(x_j)$$

$$C_1 \coloneqq A \cap \mathtt{B}_\varepsilon(x_1)$$

$$C_2 \coloneqq \big(A \cap \mathtt{B}_\varepsilon(x_2)\big) \setminus C_1$$

$$\dots$$

$$C_j = \big(A \cap \mathtt{B}_\varepsilon(x_j)\big) \setminus \big(C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{j-1}\big)$$

Пустые C_j не рассматриваем. □

1.1.3. Теорема Хаусдорфа

Теорема 1 (описание компактных множеств в терминах вполне ограниченности). $(X, \rho), \quad A \subset X$

$$A \text{ — компакт} \iff \begin{cases} (A, \rho) \text{ — полное} \\ A \text{ вполне ограничено} \end{cases}$$

Доказательство.

- $\implies$
  - Проверим полноту.
    Пусть $\{ x_n \}_{n=1}^\infty$ фундаментальна в A. Т. к. A — компакт,

    $$\exists \{ x_{n_j} \}_{j=1}^\infty : \quad \exists \lim_{j \to \infty} x_{n_j} = a, \quad a \in A$$

    По одному из свойств фундаментальных последовательностей, $\lim x_n = a \implies (A, \rho)$ — полное.
  - Проверим вполне ограниченность.
    Возьмём $\varepsilon > 0$.

    $$A \subset \bigcup_{x \in A} \mathtt{B}_\varepsilon(x)$$

    A — компакт $\implies \exists \{ x_j \}_{j=1}^n,\ x_j \in A : \quad A \subset \bigcup_{j=1}^n \mathtt{B}_\varepsilon(x_j) \implies \{ x_j \}_{j=1}^n$ — ε-сеть.
- $\impliedby$

  Возьмём $\{ x_n \}_{n=1}^\infty,\ x_n \in A$. Докажем, что $\exists \{ x_{n_j} \} : \quad \exists \lim\limits_{j \to \infty} x_{n_j} = A$.

  Возьмём $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$. Воспользуемся леммой о разбиении:

  $$\exists \text{ конечная } \frac{1}{2}\text{-сеть} \implies \exists \left\{ C_j^{(1)} \right\}_{j=1}^{N_1} : \quad A = \bigcup_{j=1}^{N_1} C_j^{(1)}, \quad \operatorname{diam} C_j^{(1)} \le 1$$

  Существует $C_{j_1}^{(1)}$, содержащая бесконечное число элементов $\{ x_n \}_{n=1}^\infty$. Обозначим $A_1 = C_{j_1}^{(1)}$.
  Возьмём $\varepsilon_2 = \frac{1}{3}, \quad \exists$ конечная ε_2-сеть.

  $$A_1 = \bigcup_{j=1}^{N_2} C_j^{(2)}, \quad \operatorname{diam} C_j^{(2)} \le 2\varepsilon_2 = \frac{2}{3}$$

  Среди них есть $C_{j_2}^{(2)}$, содержащий бесконечное число элементов $\{ x_n \}$. Обозначим $A_2 = C_{j_2}^{(2)}$.

Получим $\{ A_m \}_{m=1}^{\infty}$, каждое из которых содержит бесконечное число элементов $\{ x_n \}$.

$$A_{m+1} \subset A_m, \quad \lim_{m\to\infty} \operatorname{diam} A_m = 0$$

Пусть $x_{n_1} \in A_1$.

$$\exists n_2 > n_1 : \quad x_{n_2} \in A_2, \quad \dots, \quad \exists n_> n_{m-1} : \quad x_{n_m} \in A_m$$

$$\implies \forall j > m \quad x_{n_j} \in A_m \implies \rho(x_{n_j}, x_{n_m}) \le \operatorname{diam} A_m \implies \{ x_{n_m} \} \text{ фундаментальна}$$

A — полное $\implies \exists \lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = a \in A \implies A$ — компакт.

□

Следствие. (X,ρ), $\quad A \subset X$, $\quad A$ относительно компактно.
Тогда A вполне ограничено.

Доказательство. A относительно компактно $\implies \overline{A}$ компактно $\xRightarrow[\text{теорема}]{} \overline{A}$ вполне ограничено $\implies A$ вполне ограничено. □

Следствие. (X,ρ) — полное, $\quad A$ вполне ограничено.
Тогда A относительно компактно.

Доказательство. (X,ρ) — полное $\implies \overline{A}$ — полное $\xRightarrow[\text{теорема, } A \text{ вполне ограничено}]{} \overline{A}$ — компакт $\implies A$ относительно компактно. □

Следствие. (X,ρ) — полное, $\quad A \subset X$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ относительно компактная } \varepsilon\text{-сеть для } A$$

$$\implies A \text{ относительно компактно (и вполне ограничено)}$$

Доказательство. Возьмём $\varepsilon > 0$. Пусть H_ε — относительно компактная ε-сеть для A.

$$\implies H_\varepsilon \text{ вполне ограничено} \implies \exists F \text{ — конечная } \varepsilon\text{-сеть для } H_\varepsilon \implies$$
$$\implies F \text{ — } \varepsilon\text{-сеть для } A \implies A \text{ вполне ограничено} \iff A \text{ относительно компактно}$$

□

1.2. Относительно компактные множества в $\mathcal{C}(K)$

(K,ρ) — метрический компакт, $\mathcal{C}(K) = \{ f : K \to \mathbb{C} \text{ (или } \mathbb{R}) \mid f \text{ непрерывна} \}$

Определение 1. $\Phi \subset \mathcal{C}(K)$.
Φ *равностепенно непрерывно*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall x, y \in K : \rho(x,y) < \delta \quad \forall f \in \Phi \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Теорема 2 (Асколи-Арцела)**.** $\Phi \subset \mathcal{C}(K)$.
Φ относительно компактно тогда и только тогда, когда

1. Φ ограничено в $\mathcal{C}(K)$;
2. Φ равностепенно непрерывно.

Доказательство. $\mathcal{C}(K)$ — полное. Значит,

$$\Phi \text{ относительно компактно} \iff \Phi \text{ вполне ограничено}$$

- $\implies$

Φ вполне ограничено $\implies$ Φ ограничено, т. е.

$$\exists M > 0: \quad \forall f \in \Phi \quad \forall x \in K \quad |f(x)| \le M$$

$\square$