

Оглавление

[russian]

Глава 1

ТФКП

1.1. Разложение аналитической функции в степенной ряд

В прошлый раз мы доказали, что $f \in A(D) \implies f' \in A(D) \implies f \in C^\infty(D)$.

$$D = \{ z \mid |z - z_0| < R \}, \quad 0 < \rho < r < R, \quad f \in \mathcal{A}(D), \quad S = \{ z \mid |z - z_0| = r \}$$

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_S \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta$$

Обозначение. Начиная с этого момента, все кривые полагаются положительно ориентированными.

$$f'''(z) = (f'')'(z) = (f'')'_x(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_S f(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z)^3} \right)'_x d\zeta = \frac{2 \cdot 3}{2\pi i} \int_S \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^4} d\zeta \quad (1.1)$$

Утверждение 1.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_S \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (1.2)$$

Доказательство. Доказывать будем по **индукции**. База уже доказана. Переход:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(z) &= (f^{(n)})'(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_S f(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}} \right)' d\zeta = \frac{n! \cdot (n+1)}{2\pi i} \int_S \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}} d\zeta = \\ &= \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_S \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+2}} d\zeta \end{aligned}$$

□

Теорема 1. $f \in \mathcal{A}(D)$

$$\implies f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (1.3)$$

То есть,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

где ряд сходится в D и $\forall \rho_1 < \rho < R$ ряд сходится равномерно на $\overline{D}_\rho = \{ z \mid |z - z_0| \leq \rho \}$.

Доказательство. $S_r = \{ z \mid |z - z_0| = r \}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \quad (1.4)$$

Обозначим $q(\zeta, z) = \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$.

$$|q| = \frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} \leq \frac{\rho}{r} =: q_0 < 1$$

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad (1.5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |q^n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} q_0^n = \frac{q_0}{1 - q_0} \quad (1.6)$$

(1.5), (1.6) $\implies 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n(z, \zeta)$ равномерно сходится при $\zeta \in S_r$, $z \in \overline{D}_\rho$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} f(\zeta) \frac{1}{\zeta - z_0} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \right) d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \end{aligned}$$

Обозначим $M(r) = \max_{z \in S_r} |f(z)|$.

$$\begin{aligned} |c_n| &= \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{S_r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{n+1}} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{S_r} \frac{M(r)}{r^{n+1}} |d\zeta| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{M(r)}{r^{n+1}} = \frac{M(r)}{r^n} \\ \implies |z - z_0|^n \cdot |c_n| &\leq \rho^n \cdot \frac{M(r)}{r^n} = M(r) q_0^n \end{aligned}$$

□

1.2. Теорема Лиувилля

Теорема 2.

$$\exists M : |f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (1.7)$$

$$\implies f(z) \equiv f(0)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \\ \forall R > 1 \quad f &\in \mathcal{A}(\{z \mid |z| < R\}), \quad r = \frac{R}{2} < R \\ f(z) &= f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \end{aligned} \quad (1.8)$$

Воспользуемся неравенством Коши:

$$M(r) \leq M \quad \forall r \quad (1.9)$$

$$|c_n| \leq \frac{M}{r^n} = \frac{2^n M}{R^n} \quad (1.10)$$

$$\lim_{[\rightarrow \infty]} R |c_n| \leq \lim_{[\rightarrow \infty]} R \frac{2^n M}{R^n} = 0 \quad \implies \quad |c_n| = 0 \quad n \geq 1$$

$$\stackrel{(1.8)}{\implies} f(z) = 0$$

□

Теорема 3. $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_j \in \mathbb{C}$

$$\implies \exists z_0 \in \mathbb{C} : \quad P(z_0) = 0 \quad (1.11)$$

Доказательство. Предположим, что **это не так**. Пусть $P(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Полином — это аналитическая функция.

Обозначим $f(z) = \frac{1}{P(z)}$.

$$\implies f \in \mathcal{A}(\mathbb{C}) \quad (1.12)$$

Возьмём $R_0 \geq 1, |z| \geq R_0$. Тогда

$$|z|^k \geq |z| \text{ при } k \geq 1, \quad |z| \geq 1$$

$$|P(z)| = |z|^n \left| 1 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right| \geq |z|^n \left(1 - \frac{|a_1|}{|z|} - \dots - \frac{|a_n|}{|z|^n} \right) \geq |z|^n \left(1 - \frac{|a_1| + \dots + |a_n|}{R_0} \right)$$

$$1 - \frac{|a_1| + \dots + |a_n|}{R_0} \geq \frac{1}{2}$$

$$\implies \forall |z| \geq R_0 \quad |f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} \leq \frac{2}{|z|^n} \leq \frac{2}{R_0^n} \quad (1.13)$$

Возьмём $M_1 = \max_{|z| \leq R_0} |f(z)|, \quad M = \max \left\{ M_1, \frac{2}{R_0^n} \right\}.$

$$(1.13) \implies |f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (1.14)$$

По теореме Лиувилля $f(z) \equiv f(0)$. То есть, $P(z) \equiv P(0)$.

□