

# Содержание

35 Теорема о разложении элемента гильбертова пространства в ряд Фурье, условие полноты ОНС	2
36 Существование ОНБ и изоморфность сепарабельных гильбертовых пространств	4
37 Классические ряды Фурье	5
38 Теорема Рисса о представлении линейного функционала для вещественного пространства. Продолжение линейного функционала с подпространства на линейную оболочку подпространства и вектора	7
39 Геометрический смысл линейного функционала. Теорема о норме линейного функционала	8
40 Формулировка теоремы Хана—Банаха о продолжении линейного функционала для вещественного пространства. Продолжение линейного функционала с подпространства на линейную оболочку подпространства и вектора	10
41 Лемма Цорна. Доказательство теоремы Хана—Банаха для вещественного пространства (без доказательства возможности продолжения линейного функционала с подпространства на линейную оболочку подпространства и вектора)	11
42 Обобщённый предел в пространстве ограниченных последовательностей	13
43 Теорема Боненблуста—Собчика о продолжении линейного функционала для комплексного пространства	14
44 Теорема Хана—Банаха для нормированного пространства. Следствия: о достаточном числе линейных функционалов, формула для нормы элемента пространства, формула для расстояния до подпространства, критерий полноты системы элементов	15
45 Сепарабельность пространства, у которого сопряжённое пространство сепарабельно	17
46 Принцип равномерной ограниченности. Сильная сходимостъ линейных операторов, оценка нормы сильного предела	18
47 Теоремы Банаха—Штейнгауза: критерий сходимости операторов	20
48 Обратный оператор к $I - A$ , где $A$ — сжатие. Множество обратных операторов открыто	21
49 Определение открытого отображения. Критерий открытости для линейного оператора. Условия существования непрерывного обратного оператора	23
50 Теорема Банаха об открытом отображении	24
51 Теорема Банаха об обратном операторе. Эквивалентность норм, в которых пространство банахово	25
52 Замкнутый оператор. Теорема о замкнутом графике. Пример замкнутого, но не непрерывного оператора	25
53 Сопряжённые пространства к пространствам последовательностей $C_0$ , $l^p$ , пространству $L^p$ для конечных $p$	27
54 Второе сопряжённое пространство. Каноническое вложение. Рефлексивность. Примеры	29
55 Существование и простейшие свойства эрмитово-сопряжённого оператора в нормированном пространстве	29
56 Теорема об интегральном операторе с ядром из $L^p$ и сопряжённом к нему	29

57	Существование и простейшие свойства эрмитово-сопряжённого оператора в гильбертовом пространстве	30
58	Теорема об интегральном операторе с ядром из $L^2$ и эрмитово-сопряжённом к нему	31
59	Теорема об образе и ядре оператора и его сопряжённого. Теорема об ортогональном дополнении инвариантного подпространства. Самосопряжённый оператор, примеры	32
60	Определение спектра и резольвенты оператора. Теорема о свойствах резольвенты	33
61	Теорема о компактности и непустоте спектра. Формула для спектрального радиуса. Следствие о спектре сопряжённого оператора	36
62	Компактные операторы. Компактность оператора конечного ранга. Размерность замкнутого подпространства образа компактного оператора. Следствия	37
63	Теорема об арифметических операциях с компактными операторами. Предел компактных операторов. Компактность эрмитово-сопряжённого оператора	38
64	Конечность числа линейно-независимых собственных векторов компактного оператора, соответствующих собственным числам, модули которых равномерно отделены от нуля. Следствия	40
65	Условие разрешимости уравнения Фредгольма. Замкнутость образа оператора Фредгольма	41
66	Альтернатива Фредгольма: инъективность оператора Фредгольма эквивалентна его сюръективности	43
67	Теорема о числе линейно-независимых решений однородного уравнения Фредгольма. Следствие о спектре компактного оператора	44
68	Простейшие свойства самосопряжённого оператора	46
69	Существование собственного числа, модуль которого равен норме компактного самосопряжённого оператора	47
70	Теорема Гильберта—Шмидта о представлении компактного самосопряжённого оператора в виде суммы ортогональных проекторов	48
71	Теорема Гильберта—Шмидта о существовании ОНБ из собственных векторов компактного самосопряжённого оператора	48
72	Компактность интегрального оператора с ядром из $L^2$	48

## 35. Теорема о разложении элемента гильбертова пространства в ряд Фурье, условие полноты ОНС

**Теорема 1.**  $H$  — гильбертово,  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  — ОНС

Следующие условия равносильны:

1.  $x \in \overline{\mathcal{L}\{e_n\}_{n=1}^\infty}$ ;
2.  $x = \sum_{n=1}^\infty (x, e_n)e_n$ ;
3. равенство Парсеваля:  $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |(x, e_n)|^2$ .

**Доказательство.**

- $1 \Rightarrow 2$

Возьмём  $\varepsilon > 0$ .

$$\exists y \in \mathcal{L}\{e_n\} : \|x - y\| < \varepsilon$$

$$y = \sum_{j=1}^m \alpha_j e_j$$

$$L_n = \mathcal{L} \{ e_j \}_{j=1}^n \implies y \in L_m$$

$$P_{L_m} x = \sum_{j=1}^m (x, e_j) e_j =: S_m$$

$$\|x - S_m\| = \min_{h \in L_m} \|x - h\| \leq \|x - y\| < \varepsilon$$

$$L_{m+1} \supset L_m \implies \rho(x, L_{m+1}) \leq \rho(x, L_m) = \|x - S_m\| < \varepsilon$$

$$\|x - S_{m+1}\| \leq \|x - S_m\| \implies \|x - S_n\| < \varepsilon \quad \forall n, m \implies \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = x$$

•  $2 \implies 1$

$$x = \lim S_m \implies x \in \overline{\mathcal{L} \{ e_j \}}$$

•  $2 \implies 3$

$$x = \lim S_n, \quad S_n = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j$$

$$(x, x) = \lim (S_n, S_n)$$

$$\|S_n\|^2 = (S_n, S_n) = \sum_{j=1}^n |(x, e_j)|^2 =: \sigma_n$$

$$\|x\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$$

•  $3 \implies 2$

$$x = S_n + (x - S_n), \quad w := x - S_n, \quad w \perp S_n$$

$$\implies \|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|x - S_n\|^2$$

$$\|S_n\|^2 = \sigma_n, \quad \lim \|S_n\|^2 = \|x\|^2$$

$$\implies \lim \|x - S_n\|^2 = 0 \implies \lim S_n = x$$

□

**Следствие.**  $H$  — гильбертово,  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  — полная ОНС

$$\forall x \in H \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$$

**Следствие.**  $H$  — гильбертово,  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  — полная ОС.

Тогда  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  — базис.

**Доказательство.** Уже доказано, что

$$x \in H, \quad x \in \overline{\mathcal{L} \{ e_n \}} \implies x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$$

Проверим единственность разложения

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$$

Рассмотрим частичную сумму:

$$\sigma_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, \quad \lim \sigma_n = x$$

$$(\sigma_n, e_k) = \alpha_k \text{ при } n \geq k \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n, e_k) = \alpha_k$$

При этом,

$$\lim(\sigma_n, e_k) \underset{\text{непр. ск. произв.}}{=} (x, e_k) \implies \alpha_k = (x, e_k)$$

□

## 36. Существование ОНБ и изоморфность сепарабельных гильбертовых пространств

**Теорема 2.**  $H$  — сепарабельное гильбертово пространство.

Тогда в  $H$  существует ОНБ.

**Доказательство.** Существует всюду плотное  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ , т. е.  $\overline{\{x_n\}} = H$ . Значит,  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — полная, т. е.  $\overline{\mathcal{L}\{x_n\}} = H$ .

Положим  $x_1 = \dots = x_{n_1-1} = 0$ ,  $x_{n_1} \neq 0$ ,  $z_1 := x_{n_1}$ ,  $L_1 = \mathcal{L}\{z_1\}$ .

$$L_1 = \mathcal{L}\{x_1, \dots, x_{n_1}\}$$

$$x_{n_1+1} \in L_1, \dots, x_{n_2-1} \in L_1, \quad x_{n_2} \notin L_1, \quad z_2 := x_{n_2}, \quad L_2 = \mathcal{L}\{z_1, z_2\}$$

И так далее по индукции.

$$z_1, z_2, \dots, z_m, \quad z_m = x_{n_m}$$

- Если  $x_k \in L_m \quad \forall k > m$ , то  $\dim H = m$ .
- Если  $x_{n_m+1}, \dots, x_{n_{m+1}-1} \in L_m$ ,  $\exists x_{n_{m+1}} \notin L_m$ , то  $z_{m+1} := x_{n_{m+1}}$ .

$\{z_m\}_{m=1}^\infty$  ЛНЗ

$$\mathcal{L}\{z_1, \dots, z_n\} = \mathcal{L}\{x_1, \dots, x_{n_m}\} \implies \mathcal{L}\{z_m\} = \mathcal{L}\{x_n\}$$

Значит,  $\{z_m\}$  — полная ЛНЗ система. Применим к ней процесс ортогонализации Грама—Шмидта, получим набор  $\{e_j\}$ .

$$\mathcal{L}\{e_j\} = \mathcal{L}\{z_j\} \implies \{e_j\} \text{ — полная ОНС}$$

□

**Теорема 3.** Все бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства линейно изометрически (с сохранением нормы) изоморфны друг другу.

**Доказательство.**  $H$  — сепарабельное гильбертово пространство. Докажем, что оно линейно изометрически изоморфно  $l^2$ .

Известно, что в  $H$  существует ОНБ  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ .

$$x \in H \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, f_n) f_n$$

Определим оператор  $T : H \rightarrow l^2$ :

$$Tx = \{(x, e_n)\}_{n=1}^\infty$$

В  $l^2$  мы попадаем в силу равенства Парсеваля:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \implies \begin{cases} Tx \in l^2, \\ T \text{ — изометрия, т. е. } \|Tx\|_2 = \|x\|_H. \end{cases}$$

Из свойств скалярного произведения очевидно, что  $T \in \mathcal{L}in(H, l^2)$ .

$$\|Tx\| = \|x\| \implies \|T\| = 1, \quad T \in \mathcal{B}(H, l^2)$$

Проверили, что  $T(H) \subset l^2$ . Докажем равенство.

Возьмём  $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 = \|y\|_2^2 < +\infty$$

$$g_n := \sum_{j=1}^n y_j f_j \in H$$

Проверим, что  $\{g_n\}$  фундаментальна.

Применим критерий Коши к  $\sum |y_n|^2 < +\infty$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall m > n \geq N \quad \|y_{n+1}\|^2 + \dots + \|y_m\|^2 < \varepsilon$$

$$\|g_m - g_n\|^2 = \left\| \sum_{j=n+1}^m y_j f_j \right\|^2 = \sum_{j=n+1}^m |y_j|^2 < \varepsilon$$

Значит,  $\{g_n\}$  фундаментальна.

$$\xRightarrow{H - \text{гильбертово}} \exists g = \lim g_n \implies g = \sum_{j=1}^{\infty} y_j f_j \xRightarrow{\text{разложение единственно}} e_j = (g, f_j) \implies T(g) = y$$

□

## 37. Классические ряды Фурье

**Теорема 4 (Вейерштрасс).**  $f \in \tilde{\mathcal{C}}[-\pi, \pi]$ , т. е.  $f(-\pi) = f(\pi)$ ,  $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=0}^n (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)) : \quad \|f - T_n\|_{\infty} < \varepsilon$$

**Без доказательства.**

□

**Примеры.**

1.  $L^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi]$ ,  $dx$  — мера Лебега

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$$

Докажем, что  $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$  — полная ОС.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi$$

$f \in L^2[-\pi, \pi]$ ,  $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$  плотно в  $L^2[-\pi, \pi]$

$$\exists g \in \mathcal{C}[-\pi, \pi] : \quad \|f - g\|_2 < \varepsilon$$

Утверждается, что  $g$  можно сделать  $2\pi$ -периодической, не сильно испортив её норму в  $l^2$ .

$$\exists \delta > 0 : \quad \left( \int_{\pi-\delta}^{\pi} |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

$$h(x) := \begin{cases} g(x), & x \in [-\pi, \pi - \delta], \\ h(\pi) = g(-\pi), \\ \text{по непрерывности иначе} \end{cases}$$

$$\exists T_n : \quad \|h - T_n\|_\infty < \varepsilon \implies \left( \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|h(x) - T_n(x)|^2}_{< \varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \sqrt{2\pi}$$

$$\|f - h\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2$$

$$\|f - T_n\|_2 \leq \underbrace{\|f - g\|_2}_{< \varepsilon} + \|g - T_n\|_2 < \varepsilon + \|g - h\|_2 + \|h - T_n\|_2 + \|h - T_n\|_2 < 3\varepsilon + \varepsilon \sqrt{2\pi}$$

Базис:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Коэффициенты Фурье:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Ряд Фурье сходится в функции в пространстве  $L^2$ :

$$\forall f \in L^2[-\pi, \pi] \quad \|f - S_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

То есть,

$$\lim \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$2. \quad L^2_{\mathbb{C}}[-\pi, \pi], \quad f \in L^2_{\mathbb{C}}[-\pi, \pi]$$

$$f = u + iv, \quad u, v \in L^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi]$$

Аналогично,  $\{1, \cos(nx), \sin(nx)\}_{n \in \mathbb{N}}$  — полная ОНС в  $L^2_{\mathbb{C}}$ .

$$3. \quad L^2_{\mathbb{C}}[-\pi, \pi]$$

Докажем, что  $\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  — полная ОС в  $L^2_{\mathbb{C}}$ .

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 2\pi, & n = m \end{cases}$$

Получаем коэффициенты:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- $c_0 = a_0$ ;

- $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n);$$

- $n \in \mathbb{N}$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

$$S_n := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = a_0 + \sum (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

ОНБ:

$$\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

4.  $L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi]$

Докажем, что  $\{1, \cos(nx)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  — ОС в  $L^2$ .

$$f \in L^2_{\mathbb{R}}[0, \pi], \quad f(-x) := f(x) \implies f \in L^2[-\pi, \pi]$$

$$\|f - S_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum a_k \cos(kx)|^2 dx \rightarrow 0 \implies \int_0^{\pi} |f(x) - \sum a_k \cos(kx)|^2 dx \rightarrow 0$$

### 38. Теорема Рисса о представлении линейного функционала для вещественного пространства. Продолжение линейного функционала с подпространства на линейную оболочку подпространства и вектора

**Теорема 5 (Рисс).**  $H$  — гильбертово пространство

1.  $y \in H$  — фиксирован,  $f_y : H \rightarrow \mathbb{C} : f_y(x) = (x, y)$

$$f_y \in H^*, \quad \|f_y\|_{H^*} = \|y\|_H$$

2.  $f \in H^*$

$$\exists! y \in H : f = f_y$$

**Доказательство.**

1.  $y \in H$

- Проверим, что  $f_y \in \mathcal{L}in(H, \mathbb{C})$

$$\alpha \in \mathbb{C}, \quad x, y \in H$$

$$f_y(\alpha x + z) = (\alpha x + z, y) = \alpha(x, y) + (z, y) = \alpha f_y(x) + f_y(z)$$

- Оценим  $\|f_y\|$

$$\|f_y\| = |(x, y)| \underset{K-B}{\leq} \|y\| \cdot \|x\| \implies \|f_y\| \leq \|y\| \implies f \in H^*$$

— Если  $y = 0$ , то  $f_y(x) = 0 \implies f_y = \mathbb{O}$ ,  $\|f_y\| = 0$

—  $y \neq 0$

$$\|f_y\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f_y(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f_y(y)|}{\|y\|} = \frac{(y, y)}{\|y\|} = \|y\|$$

2.  $f \in H^*$

- Если  $f = \mathbb{O}$ , т. е.  $f(x) \equiv 0$ , то  $f = f_0$

- $f \neq \mathbb{O}$

Рассмотрим  $N = \text{Ker } f \neq H$

$$H = N \oplus N^{\perp}, \quad N^{\perp} \neq \{0\}$$

Возьмём  $y_0 \in N^{\perp}$ . Докажем, что  $\dim N^{\perp} = 1$ .

$$f(y_0) \neq 0$$

$$v := \frac{y_0}{f(y_0)} \implies f(v) = 1$$

Возьмём  $z \in N^\perp$ . Докажем, что  $z$  пропорционально  $v$ .

$$u := z - f(z)v \implies u \in N^\perp$$

$$f(u) = f(z) - f(z) \underbrace{f(v)}_1 = 0 \implies u \in N$$

Значит,  $u = 0 \implies z = f(z)v$ .

Будем искать  $y$  в виде  $y = \alpha v$ , где  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

$$1 = f_y(v) = f_y(v) = (v, \alpha v) = \alpha \|v\|^2 \implies \alpha = \frac{1}{\|v\|^2} \implies y = \frac{v}{\|v\|^2}$$

- Проверим единственность

Пусть  $f = f_y$ ,  $f = f_z$ .

$$\forall x \in H \quad f_y(x) = f_z(x) \implies (x, y) = (x, z) \implies (x, y - z) = 0 \implies y - z \in H^\perp = \{0\}$$

□

**Замечание.**  $C : H \rightarrow H^* : C(y) = f_y$

Знаем, что  $\|f_y\|_{H^*} = \|y\|_H$ .

$$C(y + z) = f_{y+z}$$

$$\forall x \in H \quad f_{y+z}(x) = (x, y + z) = (x, y) + (x, z) = f_y + f_z$$

$$C(y + z) = C(y) + C(z)$$

Возьмём  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

$$C(\alpha y) = f_{\alpha y}$$

$$f_{\alpha y}(h) = (h, \alpha y) = \overline{\alpha}(h, y)$$

$C$  — сопряжённо-линейный изометрический изоморфизм между  $H$  и  $H^*$ . Говорят, что  $H^* = H$ , при этом имеют в виду, что  $C(H) = H^*$ .

**Примеры.**

1.  $l^2$

$$f \in (l^2)^* \iff \exists! y = \{y_n\}_{n=1}^\infty \in l^2 : \quad \forall x \in l^2 \quad f(x) = f_y(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n \overline{y_n}$$

2.  $(T, \mathcal{U}, \mu), \quad L^2(\mu)$

$$\Phi \in (L^2(T, \mu))^* \iff \exists! g \in L^2(\mu) : \quad \forall f \in L^2(\mu) \quad \Phi(f) = \int_T f(x) \overline{g(x)} d\mu$$

**TODO:** Продолжение линейного функционала

## 39. Геометрический смысл линейного функционала. Теорема о норме линейного функционала

**Теорема 6.**  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{K}$

1.  $f \in \mathcal{L}in(X, \mathbb{K}), \quad f \neq 0, \quad L = \text{Ker } f$

$$\text{codim } L = \dim(X/L) = 1$$

Это называется *коразмерность*  $L$ .



2.  $L \subset X$ ,  $\text{codim } L = 1$ ,  $x_0 \in X \setminus L$

$$\exists! f \in \mathcal{L}in(X, \mathbb{K}) : L = \text{Ker } f, \quad f(x_0) = 1$$

**Доказательство.**

1.  $f \neq \mathbb{O} \implies \exists y_0 \notin L$

$$v := \frac{y_0}{f(y_0)} \implies f(v) = 1$$

Возьмём  $x \in X$ .

$$\begin{aligned} u := x - f(x)v &\implies f(u) = f(x) - f(x)f(v) = 0 \implies u \in L \implies \bar{u} = \bar{0} \implies \bar{0} = \bar{x} - f(x)\bar{v} \implies \\ &\implies \bar{x} = f(x)\bar{v} \implies \bar{x} = f(x)\bar{v} \implies X/L = \{ \alpha \bar{v} \mid \alpha \in \mathbb{K} \} \implies \dim(X/L) = 1 \end{aligned}$$

2.  $L : \dim(X/L) = 1$

Возьмём  $x \in X$ .

$$\exists \alpha \in \mathbb{K} : \bar{x} = \alpha \cdot \bar{x}_0$$

Определим  $f(x) = \alpha$ .

$$\bar{x}_0 = 1 \cdot \bar{x}_0 \implies f(x_0) = 1$$

Проверим, что  $f \in \mathcal{L}in(X, \mathbb{K})$ . Возьмём  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $x, y \in X$ .

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \beta \bar{v} \\ \bar{y} &= \gamma \bar{v} \end{aligned} \right\} \implies \alpha \bar{x} + \bar{y} = (\alpha\beta + \gamma)\bar{v} \implies f(\alpha x + y) = \alpha\beta + \gamma = \alpha f(x) + f(y)$$

$$f(x) = 0 \iff \bar{x} = 0 \cdot \bar{v} = \bar{0} \iff x \in L \implies \text{Ker } f = L$$

Проверим единственность. Пусть  $\exists g \in \mathcal{L}in(X, \mathbb{K})$ ,  $\text{Ker } g = L$ ,  $g(x_0) = 1$ .

$$\forall x \in X \quad x = \alpha \cdot \bar{x}_0 \implies x = \alpha x_0 + y, \quad y \in L \implies \begin{cases} f(x) = \alpha \\ g(x) = \alpha \end{cases}$$

□

**Замечание.** В условиях второго пункта  $L = \text{Ker } f$ ,  $f(x_0) = 1$

$$f^{-1}(1) = x_0 + L = \{ x_0 + y \mid y \in L \}$$

**Доказательство.** Обозначим  $M = f^{-1}(1)$ .

- $z \in x_0 + L$ , т. е.  $z = x_0 + y$ ,  $y \in L$

$$f(z) = \underbrace{f(x_0)}_1 + \underbrace{f(y)}_0 = 1 \implies z \in M \implies x_0 + L \subset M$$

- $z \in M$

$$f(z) = 1 \implies f(z - x_0) = 0 \implies z - x_0 \in L \implies z - x_0 = y \implies z = x_0 + y \in x_0 + L \implies M \subset x_0 + L$$

□

**Теорема 7** (норма линейного функционала).  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $f \in X^*$ ,  $f \neq \mathbb{O}$ ,  $f(x_0) = 1$ ,  $L = \text{Ker } f$

$$\|f\| = \frac{1}{\rho(x_0, L)}$$

**Доказательство.** Обозначим  $d = \rho(x_0, L) = \inf \|x_0 - y\|$ .

•

$$1 = f(x_0) = f(x_0 - y) \leq \|f\| \cdot \|x_0 - y\| \quad \forall y \in L \implies 1 \leq \|f\| \inf \|x_0 - y\| = \|f\|d \implies \frac{1}{d} \leq \|f\|$$

•  $x \in X \setminus L, \quad f(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{f(x)}\right) = 1 &\implies f\left(x_0 - \frac{x}{f(x)}\right) \implies x_0 - \frac{x}{f(x)} \in L \implies \left\|x_0 - \left(x_0 - \frac{x}{f(x)}\right)\right\| \geq d \iff \\ &\iff \frac{\|x\|}{\|f(x)\|} \geq d \implies |f(x)| \leq \frac{1}{d}\|x\| \implies \|f\| \leq \frac{1}{d} \end{aligned}$$

□

**Замечание.** В обозначениях теоремы  $M = f^{-1}(1)$

$$\rho(x_0, L) = \rho(0, M)$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \rho(x_0, L) &= \inf \|x_0 - y\| \\ \rho(0, M) &= \rho(0, x_0 + L) = \inf \|x_0 + y\| = \inf \|x_0 - y\| = \rho(x_0, L) \end{aligned}$$

□

#### 40. Формулировка теоремы Хана—Банаха о продолжении линейного функционала для вещественного пространства. Продолжение линейного функционала с подпространства на линейную оболочку подпространства и вектора

**Определение 1.**  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{K}$

$p : X \rightarrow \mathbb{K}$  называется *выпуклым функционалом*, если

1.  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ ;
2.  $p(tx) = tp(x)$  при  $t \geq 0$ .

**Теорема 8 (Хан—Банах).**  $X$  — линейное над  $\mathbb{R}$ ,  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклый функционал,  $L$  — подпространство  $X$ ,  $f \in \mathcal{L}in(L, \mathbb{R})$ ,  $f(x) \stackrel{L}{\leq} p(x)$  (говорят, что  $f$  *подчинён*  $p$ )

$$\exists g \in \mathcal{L}in(X, \mathbb{R}) : \begin{cases} g|_L = f \\ g(x) \leq p(x) \end{cases}$$

**Доказательство.**

1. Возьмём  $z \in X \setminus L$

$$L_1 := \mathcal{L}\{L, z\} = \{tx + z \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Построим  $f_1 \in \mathcal{L}in(L_1, \mathbb{R})$  :  $f_1|_L = f, \quad f_1(y) \stackrel{L_1}{\leq} p(y)$ .

$$f_1(c) := c$$

Докажем, что можно выбрать такой  $c$ .

$$f_1(x + tz) = f(x) + tc$$

$$f_1(y) \stackrel{L_1}{\leq} p(y) \iff f(x) + tc f(x) + tc \iff \begin{cases} f(x) + tc \leq p(x + tz), & t > 0, \\ f(x) - tc \leq p(x - tz), & t > 0 \end{cases}$$

Разделим на  $t$ :

$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{t}\right) + c \leq p\left(\frac{x}{t} + z\right), \\ f\left(\frac{x}{t}\right) - c \leq p\left(\frac{x}{t} - z\right) \end{cases}$$

Обозначим  $u = \frac{x}{t}$ ,  $v = \frac{x}{t}$  (никак друг с другом не связанные).

$$\begin{cases} f(u) + c \leq p(u + z) & \forall u \in L, \\ f(v) - c \leq p(v - z) & \forall v \in L \end{cases}$$

$$f(v) - p(v - z) \leq c \leq p(u + z) - f(u)$$

Рассмотрим  $A = \{p(u + z) - f(u)\}_{u \in L} \subset \mathbb{R}$ ,  $B = \{f(v) - p(v - z)\}_{v \in L} \subset \mathbb{R}$ . Проверим, что  $\forall a \in B \quad \forall b \in A \quad b \leq a$ .

$$b \leq a \iff f(v) - p(v - z) \leq p(u + z) - f(u) \iff \underbrace{f(u) + f(v)}_{f(u+v) \in L} \leq p(u + z) + p(v - z)$$

$f$  подчинён  $p$ , значит,

$$f(u + v) \leq p(u + v) \underset{\text{выпуклость}}{\leq} p(u + z) + p(v - z) \implies \exists c \in \mathbb{R} : f_1(z) = c$$

□

#### 41. Лемма Цорна. Доказательство теоремы Хана—Банаха для вещественного пространства (без доказательства возможности продолжения линейного функционала с подпространства на линейную оболочку подпространства и вектора)

**Определение 2.**  $P$  полуупорядочено  
 $x$  — максимальный элемент  $P$ , если

$$\forall y \in P : x \leq y \quad x = y$$

**Лемма 1 (Цорн).**  $P$  частично упорядочено

Если для любой цепи имеется верхняя грань, то во всём множестве  $P$  существует максимальный элемент.

**Теорема 9 (Хан—Банах).**  $X$  — линейное над  $\mathbb{R}$ ,  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклый функционал,  $L$  — подпространство  $X$ ,  $f \in \mathcal{L}in(L, \mathbb{R})$ ,  $f(x) \leq^L p(x)$  (говорят, что  $f$  подчинён  $p$ )

$$\exists g \in \mathcal{L}in(X, \mathbb{R}) : \begin{cases} g|_L = f \\ g(x) \leq^X p(x) \end{cases}$$

**Доказательство.**

- $\mathcal{P} := \{(M, h)\}$ ,  $L \subset M \subset X$ ,  $M$  — подпр-во,  $h \in \mathcal{L}in(M, \mathbb{R})$ ,  $h|_L = f$ ,  $h(x) \leq^M p(x)$

Определим порядок:

$$(M, h) \leq (M_1, h_1) \iff \begin{cases} M \subset M_1, \\ h_1|_M = h \end{cases}$$

Пусть  $A$  — цепь в  $\mathcal{P}$ , т. е.

$$A = \{(M_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha \in I} : \quad \forall \alpha, \beta \in I \quad \begin{cases} (M_\alpha, h_\alpha) \leq (M_\beta, h_\beta) \\ (M_\beta, h_\beta) \leq (M_\alpha, h_\alpha) \end{cases}$$

Построим верхнюю грань для  $A$ .

$$M_0 := \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$$

Проверим, что  $M_0$  — подпространство. Пусть  $x, y \in M_0$ .

$$\exists \alpha, \beta : x \in M_\alpha, y \in M_\beta \implies \begin{cases} M_\alpha \subset M_\beta, \\ M_\beta \subset M_\alpha \end{cases}$$

Пусть выполняется первое.

$$\implies x, y \in M_\beta \text{ — подпространство} \implies ax + by \in M_\beta \subset M_0 \implies M_0 \text{ — подпространство}$$

Определим  $h_0 : M_0 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Возьмём  $x \in M_0$ .

$$\exists \alpha : x \in M_\alpha$$

Положим  $h_0(x) = h_\alpha(x)$ .

Проверим корректность. Пусть  $x \in M_\beta$ .

$$\begin{cases} (M_\alpha, h_\alpha) \leq (M_\beta, h_\beta), \\ (M_\beta, h_\beta) \leq (M_\alpha, h_\alpha) \end{cases}$$

Пусть выполнено первое.

$$x \in M_\alpha, x \in M_\beta \implies h_\beta(x) = h_\alpha(x) = h(x)$$

Можно проверить, что  $h_0 \in \mathcal{L}in(M_0, \mathbb{R})$ .

$$\forall \alpha \in I \quad (M_\alpha, h_\alpha) \leq (M_0, h_0) \implies (M_0, h_0) \text{ — верхняя грань для } A$$

По лемме Цорна, в  $\mathcal{P}$  существует максимальный элемент  $(M, h)$ .

$$L \subset M, \quad h|_L = f, \quad h(x) \stackrel{M}{\leq} p(x)$$

Докажем, что  $M = X$ . Пусть  $\exists z \in X \setminus M$ .

$$M_1 := \mathcal{L}in\{M, z\}$$

По первой части доказательства

$$\exists h_1 \in \mathcal{L}in(M_1, \mathbb{R}) : \quad h_1|_M = h, \quad h_1(x) \stackrel{M_1}{\leq} p(x)$$

$$\implies (M_1, h_1) \in \mathcal{P}$$

$$(M, h) \leq (M_1, h_1), \quad M \subsetneq M_1$$

Это **противоречит** максимальнойности  $(M, h)$ .

□

**Утверждение 1.**  $X$  линейно над  $\mathbb{R}$ ,  $p$  — выпуклый функционал,  $f \in \mathcal{L}in(X, \mathbb{R})$ ,  $f(x) \stackrel{X}{\leq} p(x)$

$$f(x) \geq -p(-x)$$

**Доказательство.**  $f(x) \leq p(x) \implies f(-x) \leq p(-x) \implies -f(x) \leq p(-x)$

□

**Утверждение 2.**  $p$  — полунорма,  $f(x) \stackrel{X}{\leq} p(x)$

$$|f(x)| \leq p(x)$$

**Доказательство.**  $p(-x) \underset{p - \text{полуорма}}{=} p(x) \implies f(x) \geq -p(x)$

□

## 42. Обобщённый предел в пространстве ограниченных последовательностей

**Теорема 10.**  $l_{\mathbb{R}}^{\infty} := \left\{ x = \{x_n \in \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty} \mid \|x\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}$   
 $\exists L \in (l^{\infty})^* : \|l\|_{(l^{\infty})^*} = 1, \quad \forall x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^{\infty} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq L(x) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$

В частности, если  $\exists \lim x_n = x_0$ , то  $L(x) = x_0$ .

**Доказательство.** Для  $x \in l^{\infty}$  положим  $p(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Докажем, что  $p$  — выпуклый функционал:

- $t > 0 \implies p(tx) = tp(x)$  — очевидно;
- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

$$\overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n \stackrel{?}{\leq} \overline{\lim} (x_n + y_n)$$

Вспомним определение верхнего предела:

$$a_n := \sup_{m \geq n} \{x_m\} \implies a_n \downarrow \implies \exists \lim a_n = a, \quad \overline{\lim} x_n := a$$

$$b_n = \sup_{m \geq n} y_m, \quad b = \overline{\lim} y_n$$

$$c_n = \sup \{x_m + y_m\}, \quad c = \overline{\lim} \{x_n + y_n\}$$

Зафиксируем  $n$ .

$$\forall m \geq n \quad x_m + y_m \leq a_n + b_n \implies c_n \leq a_n + b_n$$

Устремим  $n \rightarrow \infty$ :

$$c \leq a + b$$

$$C \subset l^{\infty}, \quad C := \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \exists \lim x_n = x_0\}$$

Определим  $f : C \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \lim x_n = x_0$ .

$$f(x) = \lim x_n \leq \overline{\lim} x_n \implies f(x) \stackrel{C}{\leq} p(x)$$

Применим теорему Хана—Банаха:

$$\exists g \in \mathcal{L}in(l^{\infty}, \mathbb{R}), \quad g(x) \stackrel{C}{=} f(x), \quad g(x) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

По утв. 1

$$g(x) \geq -p(-x) = -\overline{\lim}(-x_n) \underset{\text{задача из Демидовича}}{=} \lim x_n$$

$g = L$  — в теореме,  $g \in \mathcal{L}in(l^{\infty}, \mathbb{R})$ .

$$\left. \begin{array}{l} g(x) \leq \overline{\lim} x_n \leq \sup |x_n| \\ g(x) \geq \lim x_n \geq -\sup |x_n| \end{array} \right\} \implies |g(x)| \leq \|x\|_{\infty} \implies \|g\| \leq 1 \implies g \in (l^{\infty})^*$$

Возьмём  $x = \{1, 1, \dots\}$ .

$$\|x\| = 1, \quad |g(x)| = 1 \implies \|g\| \geq \frac{|g(x)|}{\|x\|} = 1 \implies \|g\| = 1$$

□

### 43. Теорема Боненблуста—Собчика о продолжении линейного функционала для комплексного пространства

**Теорема 11** (Боненблуст—Собчик).  $X$  линейно над  $\mathbb{C}$ ,  $p$  — полунорма,  $L$  — подпространство  $X$ ,  $f \in \mathcal{L}in(L, \mathbb{C})$ ,  $|f(x)| \stackrel{L}{\leq} p(x)$

$$\exists g \in \mathcal{L}in(X, \mathbb{C}) : \begin{cases} g|_L = f, \\ |g(x)| \stackrel{X}{\leq} p(x) \end{cases}$$

**Доказательство** (овеществление).  $X$  линейно и над  $\mathbb{R}$ , т. е.

$$\left. \begin{array}{l} a, b \in \mathbb{R} \\ x, y \in X \end{array} \right\} \implies ax + by \in X$$

Также,  $L$  — подпространство и в вещественном смысле.

$$f(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x), \quad u(x), v(x) \in \mathbb{R}$$

Проверим, что  $u, v \in \mathcal{L}in(L, \mathbb{R})$ . Пусть  $x, y \in L$ .

$$f(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x), \quad f(y) = u(y) + \mathrm{i}v(y)$$

$$f(x + y) = u(x + y) + \mathrm{i}v(x + y)$$

Сложим первые два равенства:

$$f(x + y) = (u(x) + u(y)) + \mathrm{i}(v(x) + v(y))$$

Вещественные и мнимые части равны:

$$u(x + y) = u(x) + u(y), \quad v(x + y) = v(x) + v(y)$$

Возьмём  $x \in X$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

$$f(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x)$$

$$f(ax) = u(ax) + \mathrm{i}v(ax)$$

$$f(ax) = af(x) = au(x) + \mathrm{i}av(x) \implies \begin{cases} u(ax) = au(x) \\ v(ax) = av(x) \end{cases}$$

$$\implies u, v \in \mathcal{L}in(L, \mathbb{R})$$

$$f \in \mathcal{L}in(X, \mathbb{C}) \implies f(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}f(x) \implies u(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}v(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}(u(x) + \mathrm{i}v(x)) \implies u(\mathrm{i}x) = -v(x)$$

Применим теорему Хана—Банаха к  $u$ , а  $v$  определим из этого тождества.

$$u(x) \leq |f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in L \xrightarrow[\text{т. Хана—Банаха}]{} \implies$$

$$\implies \exists \varphi \in \mathcal{L}in(X, \mathbb{R}) : \begin{cases} \varphi|_L = u, \\ \varphi(x) \stackrel{X}{\leq} p(x) \end{cases} \xrightarrow[p\text{-полунорма}]{} |\varphi(x)| \stackrel{L}{\leq} p(x)$$

$$x \in X \quad \psi(x) := -\varphi(\mathrm{i}x) \implies \psi \in \mathcal{L}in(X, \mathbb{R}) \tag{1}$$

$$g(x) := \varphi(x) + \mathrm{i}\psi(x) \implies g \in \mathcal{L}in(X, \mathbb{R}), \quad g(x) \stackrel{L}{=} f(x)$$

$$g(\mathrm{i}x) = \varphi(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}\psi(\mathrm{i}x) \stackrel{(1)}{=} \mathrm{i}(\varphi(x) + \mathrm{i}\psi(x)) \implies g \in \mathcal{L}in(X, \mathbb{C})$$

Проверим подчинение.

$$x \in X, g(x) \in \mathbb{C} \quad g(x) = re^{i\theta}, \quad r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$$

$$\implies |g(x)| = r = g(xe^{-i\theta}) = \varphi(xe^{-i\theta}) + i\psi(xe^{-i\theta})$$

Слева вещественное число, справа — комплексное, значит, мнимая часть равна нулю:

$$|g(x)| = \varphi(xe^{-i\theta}) \leq p(xe^{-i\theta}) \xrightarrow[p\text{ — полуорма}]{} p(x)$$

□

#### 44. Теорема Хана—Банаха для нормированного пространства.

**Следствия:** о достаточном числе линейных функционалов, формула для нормы элемента пространства, формула для расстояния до подпространства, критерий полноты системы элементов

**Теорема 12.**  $(X, \|\cdot\|)$  над  $\mathbb{K}$ ,  $L$  — подпространство  $X$  в алгебраическом смысле,  $f \in L^*$

$$\exists g \in X^* : \begin{cases} g|_L = f, \\ \|g\|_{X^*} = \|f\|_{L^*}. \end{cases}$$

**Доказательство.** Обозначим  $M = \|f\|_{L^*}$ .

$$p(x) := M \cdot \|x\| \implies p\text{ — норма на } X$$

Возьмём  $x \in L$ .

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^*} \|x\| = M \|x\| = p(x) \implies f \text{ подчинён } p$$

Применяем теорему Хана—Банаха или Бонеблуста—Собчика:

$$\exists g \in \mathcal{L}in(X, \mathbb{K}) : \begin{cases} g|_L = f, \\ |g(x)| \leq p(x) \end{cases}$$

$$\implies |g(x)| \stackrel{X}{\leq} M \cdot \|x\| \implies \|g\|_{X^*} \implies g \in X^*$$

$$\|g\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |g(x)| \geq \sup_{\substack{x \in L \\ \|x\| \geq 1}} |g(x)| = \|f\|_{L^*}$$

□

**Следствие** (о достаточном множестве линейных функционалов).  $(X, \|\cdot\|)$  над  $\mathbb{K}$ ,  $x_0 \in X$

1.

$$\exists g \in X^* : \begin{cases} \|g\| = 1, \\ g(x_0) = \|x_0\|; \end{cases}$$

2.  $\|x_0\| = \max\{|h(x_0)| \mid \|h\|_{X^*} \leq 1\}$ .

**Доказательство.**

- $x_0 \neq 0$

Рассмотрим  $L = \{\alpha x_0\}_{\alpha \in \mathbb{K}}$ . Определим  $f : L \rightarrow \mathbb{K} : f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\|$ .

Понятно, что  $f \in \mathcal{L}in(L, \mathbb{K})$ ,  $f(x_0) = \|x_0\|$ ,  $|f(\alpha x_0)| = |\alpha| \|x_0\|$ .

$$\implies \|f\|_{L^*} = 1$$

По теореме

$$\exists g \in X^* : \begin{cases} \|g\|_{X^*} = 1, \\ g(x_0) = \|x_0\|. \end{cases}$$

Рассмотрим  $h \in X^* : \|h\| \leq 1$ .

$$|h(x_0)| \leq \|h\| \|x_0\| \leq \|x_0\| \implies \sup_{\|h\| \leq 1} |h(x_0)| \leq \|x_0\|$$

$$\text{Но } \exists g : \begin{cases} \|g\| = 1, \\ |g(x_0)| = \|x_0\|. \end{cases}$$

- $x_0 = 0$

Возьмём  $g \in X^* : \|g\| = 1$ .

$$g(x_0) = 0$$

□

**Замечание.** Теперь имеем две похожие формулы:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$$

$$\|x\| = \max_{\|f\|_{X^*} \leq 1} |f(x)|$$

**Следствие** (расстояние до подпространства).  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $L$  — замкнутое подпространство  $X$ ,  $x_0 \in X \setminus L$ ,  $d := \rho(x_0, L)$

1.

$$\exists g \in X^* : \begin{cases} \|g\| = 1, \\ g(x_0) = d, \\ g|_L = 0; \end{cases}$$

2.  $d = \min\{|h(x_0)| \mid \|h\| \leq 1, h|_L = 0\}$ .

**Доказательство.**  $M := \mathcal{L}in(x_0, L) = \{\alpha x_0 + y \mid y \in L\}$

Определим  $f : M \rightarrow \mathbb{K} : f(\alpha x_0 + y) = \alpha$ .

$$\implies f(y) = 0 \quad \forall y \in L$$

$$f(x_0) = 1$$

Понятно, что  $f \in \mathcal{L}in(M, \mathbb{K})$ .

Воспользуемся теоремой о норме линейного функционала:

$$\|f\|_{M^*} = \frac{1}{d}$$

$$f_1 := df \implies \|f_1\| = 1, \quad f_1(x_0) = d$$

$$\exists g \in X^* : \begin{cases} \|g\| = 1, \\ g|_M = f_1 \end{cases} \implies g|_L = 0, \quad g(x_0) = d$$

Возьмём  $h \in X^* : \|h\| \leq 1, h|_L = 0$ .

$$|h(x_0)| = |h(x_0 - y)| \leq \|h\| \cdot \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - y\| \quad \forall y \in L$$

$$\implies |h(x_0)| \leq d \implies \sup_{\substack{\|h\| \leq 1 \\ h|_L = 0}} |h(x_0)| \leq d$$



$$\begin{aligned} \exists g : \quad & \begin{cases} g(x_0) = d, \\ g|_L = 0, \\ \|g\| \leq 1. \end{cases} \\ \implies d = & \max_{\substack{\|h\| \leq 1 \\ h|_L = 0}} |h(x_0)| \end{aligned}$$

□

**Замечание.** Если  $L = \{0\}$ , то получим предыдущее следствие.

**Следствие** (критерий полноты семейства элементов в нормированном пространстве).

$(X, \|\cdot\|), \quad \{x_\alpha \in X\}_{\alpha \in A}$

$\{x_\alpha\}$  — полная система элементов **тогда и только тогда**, когда

$$\left( f \in X^* \quad f(x_\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in A \right) \implies f = \mathbb{O}$$

**Доказательство.**  $L := \overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}}$

•  $\implies$

$\{x_\alpha\}$  — полное,  $f \in X^*, \quad f(x_\alpha) = 0$

$$x = \sum_{k=1}^n c_k x_{\alpha_k} \implies f(x) = 0$$

То есть,  $\forall x \in \mathcal{L}\{x_\alpha\} \quad f(x) = 0$ .

Возьмём  $x \in X$ .

$$\exists \{x_n \in \mathcal{L}\{x_\alpha\}\}_{n=1}^\infty : \quad \lim x_n = x$$

$f$  непрерывна  $\implies f(x) = \lim f(x_n) = 0 \implies f = \mathbb{O}$ .

•  $\Leftarrow$

Пусть  $L \subsetneq X$ , т. е.  $\exists x_0 \neq 0 \in X \setminus L$ . По первому следствию

$$\exists g \in X^* : \quad \begin{cases} \|g\| = 1, \\ g(x_0) = \|x_0\| \end{cases} \implies g \neq \mathbb{O}$$

При этом,  $g|_L = 0 \implies g(x_\alpha) = 0 \quad \nexists$ .

□

## 45. Сепарабельность пространства, у которого сопряжённое пространство сепарабельно

**Теорема 13.**  $(X, \|\cdot\|)$

Если  $X^*$  сепарабельно, то  $X$  сепарабельно.

**Доказательство.**  $X^*$  сепарабельно  $\iff \exists \{f_n\}_{n=1}^\infty : \quad f_n$  плотны в  $X^*$ , т. е.

$$\forall f \in X^* \quad \exists \{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty : \quad \lim \|f - f_{n_k}\| = 0$$

Пусть  $f \in X^*$ .

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \implies \exists x : \begin{cases} \|x\| = 1, \\ \|f\| \leq 2|f(x)| \end{cases}$$

Пусть теперь  $f \neq \mathbb{O}$ .

$$\exists x_n : \quad \|x_n\| = 1, \quad \|f_n\| \leq 2|f_n(x_n)|$$

Проверим, что  $\{x_n\}$  полна в  $X$  (по следствию 3). Пусть  $f \in X^*$ ,  $f(x_n) = 0 \quad \forall n$ .

$$\exists f_{n_k} \in X^* : \quad \lim \|f - f_{n_k}\| = 0$$

$$\frac{1}{2} \|f_{n_k}\| \leq |f_{n_k}(x_{n_k})| = \underbrace{|f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k})|}_0 \leq \|f - f_{n_k}\| \cdot \underbrace{\|x_{n_k}\|}_1$$

$$\implies \lim \|f_{n_k}\| = 0 \implies f = \mathbb{O} \implies \{x_n\} \text{ полна}$$

□

## 46. Принцип равномерной ограниченности. Сильная сходимость линейных операторов, оценка нормы сильного предела

**Лемма 2.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), U \in \mathcal{L}in(X, Y)$

$$\exists a \in X \exists \varepsilon > 0 \exists R > 0 : \quad U(B_\varepsilon(a)) \subset \overline{B_R(0)} \implies \begin{cases} U \in \mathcal{B}(X, Y), \\ \|U\| \leq \frac{2R}{\varepsilon} \end{cases}$$

**Доказательство.** Возьмём  $z \in X : \quad \|z\| < \varepsilon$ .

$$\begin{aligned} a + z \in B_\varepsilon(a) &\implies U(a + z) \in \overline{B_R(0)} \implies \begin{cases} \|U(a + z)\| \leq R, \\ \|U(a)\| \leq R \end{cases} \xrightarrow{z=(a+z)-a} \\ &\implies \|Uz\| \leq \|U(a + z)\| + \|U(a)\| \leq 2R \end{aligned}$$

Возьмём  $x \in X : \quad \|x\| < 1$ .

$$z = \varepsilon x \implies \|\varepsilon x\| < \varepsilon \implies \|U(\varepsilon x)\| \leq 2R \implies \|Ux\| \leq \frac{2R}{\varepsilon} \xrightarrow{\|U\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ux\|} \|U\| \leq \frac{2R}{\varepsilon}$$

□

**Теорема 14.**  $X$  — банахово,  $(Y, \|\cdot\|), \{U_\alpha \in \mathcal{B}(X, Y)\}_{\alpha \in A}, \forall x \sup_{\alpha \in A} \|U_\alpha x\| < +\infty$

$$\sup_{\alpha \in A} \|U_\alpha\| < +\infty$$

**Доказательство.** Нужно доказать, что  $\sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\alpha} \|U_\alpha x\| < +\infty$ .

$$Y_n := \{y \mid \|y\| \leq n\} \subset Y$$

$U_\alpha^{-1}(Y_n)$  замкнуто, т. к.  $U_\alpha$  непрерывен.

$$E_n = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha^{-1}(Y_n)$$

$E_n$  замкнуты.

Пусть  $x \in X$ .

$$\exists n \in \mathbb{N} : \quad \sup_{\alpha \in A} \|U_\alpha x\| < n \implies x \in U_\alpha^{-1}(Y_n) \xrightarrow{\forall \alpha \in A} x \in E_n \implies X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

Применим теорему Бэра о категориях:

$$\exists n_0 : \quad \text{Int } E_{n_0} \neq \emptyset$$

То есть,

$$\exists B_\varepsilon(a) \subset E_{n_0} \implies B_\varepsilon(a) \in U_\alpha^{-1}(Y_{n_0}) \quad \forall \alpha \in A \implies U_\alpha(B_\varepsilon(a)) \subset Y_{n_0} \xrightarrow{\text{лемма}} \|U_\alpha\| \leq \frac{2n_0}{\varepsilon} \quad \forall \alpha \in A$$

□

**Следствие** (Принцип фиксации особенности).  $X$  — банахово,  $(Y, \|\cdot\|)$ ,  $\{U_\alpha \in \mathcal{B}(X, Y)\}$ ,  $\sup_{\alpha \in A} \|U_\alpha\| = +\infty$

$$\exists x_0 \in X : \sup_{\alpha \in A} \|U_\alpha x_0\| = +\infty$$

**Определение 3.**  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $(Y, \|\cdot\|)$ ,  $\{U_n \in \mathcal{L}in(X, Y)\}_{n=1}^\infty$ ,  $\forall x \in X \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} U_n x =: Ux$   
 $U = \text{s-lim } U_n$  — *сильный (поточечный) предел*  $U_n$ .

**Свойства.**

$$1. U_n \in \mathcal{L}in(X, Y)$$

$$U = \text{s-lim } U_n \implies U \in \mathcal{L}in(X, Y)$$

$$2. U_n, U \in \mathcal{B}(X, Y)$$

$$\lim \|U - U_n\| = 0 \implies Ux = \text{s-lim } U_n x$$

**Доказательство.** Очевидно.

$x \in X$

$$\|Ux - U_n x\| \leq \underbrace{\|U - U_n\|}_{\rightarrow 0} \cdot \|x\| \implies \lim U_n x = Ux$$

□

**Замечание.** Если  $U = \text{s-lim } U_n$ ,  $U, U_n \in \mathcal{B}(X, Y)$ , то **не обязательно**  $\lim \|U - U_n\| = 0$ .

**Пример.**  $X = l^1$

$$x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^1$$

$$f_n(x) := x_n, \quad \|f_n(x)\| = |x_n| \leq \|x_n\|_1 \implies \|f_n\| \leq 1 \implies f_n \in (l^1)^*$$

Пусть  $e_n = (0, \dots, 0, \underset{n}{1}, 0, \dots, 0)$ .

$$f_n(e_n) = 1 \implies \|f_n\| \geq 1$$

Найдём сильный предел:

$$\lim x_n = 0 \implies \lim f_n(x) = 0 \quad \forall x \in l^1 \implies \mathbb{O} = \text{s-lim } f_n$$

$$\|f - \mathbb{O}\| = 1, \quad \lim \|f_n - \mathbb{O}\| = 1 \neq 0$$

**Следствие.**  $X$  — банахово,  $(Y, \|\cdot\|)$ ,  $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $U_n \in \mathcal{B}(X, Y)$ ,  $U = \text{s-lim } U_n$

$$U \in \mathcal{B}(X, Y), \quad \|U\| \leq \underline{\lim} \|U_n\|$$

**Доказательство.**

$$\exists \lim U_n x \implies \sup_{n \in \mathbb{N}} \|U_n x\| < +\infty \xrightarrow{\text{теорема}} \exists M > 0 : \quad \|U_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b := \underline{\lim} \|U_n\| \in \mathbb{R}, \quad b \leq M$$

$$\exists \{n_k\} : \quad b = \lim_{k \rightarrow \infty} \|U_{n_k}\| \implies Ux = \lim U_{n_k} x \quad \forall x \in X$$

$$\|Ux\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|U_{n_k} x\| \leq \lim \|U_{n_k}\| \cdot \|x\| = b \|x\| \implies \|U\| \leq b$$

□

**Замечание.**  $U = s\text{-}\lim U_n$

Возможно строгое неравенство (в примере так и было).

## 47. Теоремы Банаха—Штейнгауза: критерий сходимости операторов

**Теорема 15 (Банах—Штейнгауз).**  $X, Y$  — банаховы,  $\{U_n \in \mathcal{B}(X, Y)\}_{n=1}^{\infty}$

Существует сильный предел  $U_n$  тогда и только тогда, когда

1.  $\exists M > 0 : \|U_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N};$
2.  $\{U_n x\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальна для  $\forall x \in E \subset X$ , где  $E$  — полное в  $X$ , т. е.  $\overline{\mathcal{L}\{E\}} = X$ .

**Доказательство.**

•  $\Rightarrow$

1. уже доказано;
2. очевидно.

•  $\Leftarrow$

Проверим, что  $\forall x \in X \quad \{U_n x\}$  фундаментальна.

Обозначим  $L = \mathcal{L}\{E\}$ . Возьмём  $x \in L$ .

$$x = \sum_{k=1}^m c_k x_k, \quad x_k \in E$$

Пусть  $p > q \in \mathbb{N}$ .

$$\|U_p x - U_q x\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \underbrace{\|U_p x_k - U_q x_k\|}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{p, q \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow \{U_n x\}$  фундаментальна для  $x \in L$ .

Возьмём произвольный  $x \in X$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in L : \|x - z\| < \varepsilon$$

Воспользуемся тем, что  $\{U_n z\}$  фундаментальна:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > m \geq N \quad \|U_n z - U_m z\| < \varepsilon$$

$$\|U_n x - U_m x\| \leq \underbrace{\|U_n x - U_n z\|}_{\leq \|U_n\| \cdot \|x - z\| \leq M \|x - z\| < M\varepsilon} + \underbrace{\|U_n z - U_m z\|}_{< \varepsilon} + \underbrace{\|U_m z - U_m x\|}_{< M\varepsilon} < \varepsilon(2M + 1)$$

$\Rightarrow \{U_n x\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальна для  $\forall x \in X$ .

$$\xrightarrow[Y \text{ — банахово}]{} \exists \lim U_n x =: U \quad \forall x \in X, \quad U = s\text{-}\lim U_n$$

□

**Замечание.**  $\Rightarrow$  верно для банахова  $X$  и нормированного  $Y$ .

$\Leftarrow$  верно для нормированного  $X$  и банахова  $Y$ .

**Теорема 16 (Банах—Штейнгауз).**  $X$  — банахово,  $(Y, \|\cdot\|)$ ,  $\{U_n \in \mathcal{B}(X, Y)\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $U \in \mathcal{B}(X, Y)$

$U = s\text{-}\lim U_n$  тогда и только тогда, когда

1.  $\exists M > 0 : \|U_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N};$
2.  $\exists \lim U_n x \quad \forall x \in E \subset X$ , где  $E$  — полное в  $X$ .

**Доказательство.**

- $\Rightarrow$  — уже доказано.
- $L := \mathcal{L}\{E\}, \quad x \in L$

$$x = \sum_{k=1}^m c_k x_k, \quad x_k \in E$$

$$\exists \lim U_n x_k \quad \forall x_k \Rightarrow \exists \lim U_n x$$

Проверим, что  $\forall x \in X \quad \exists \lim U_n x$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in L : \quad \|x - z\| < \varepsilon$$

$$\exists N : \quad \forall n \geq N \quad \|Uz - U_n z\| < \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \|Ux - U_n x\| &\leq \underbrace{\|Ux - Uz\|}_{\leq \|U\| \cdot \|x - z\| < \|U\| \cdot \varepsilon} + \underbrace{\|Uz - U_n z\|}_{< \varepsilon} + \underbrace{\|U_n z - U_n x\|}_{\|U_n\| \cdot \|x - z\| < M\varepsilon} < \varepsilon(\|U\| + 1 + M) \\ &\Rightarrow \exists U_n x = Ux \end{aligned}$$

□

#### 48. Обратный оператор к $I - A$ , где $A$ — сжатие. Множество обратных операторов открыто

**Утверждение 3.**  $A, B \in \mathcal{B}(X)$

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

**Доказательство.**

$$\|A(Bx)\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|$$

□

**Теорема 17.**  $X$  — банахово,  $I$  — тождественный,  $A \in \mathcal{B}(X)$ ,  $\|A\| < 1$

$$\exists (I - A)^{-1}, \quad \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}, \quad (I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

**Доказательство.** Проверим, что сумма норм операторов сходится. По утв. 3

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|}$$

$X$  — банахово  $\Rightarrow \mathcal{B}(X)$  — банахово. Воспользуемся критерием полноты:

$$\Rightarrow \exists S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \in \mathcal{B}(X)$$

$$S_n := \sum_{k=0}^n A^k$$

$$\|S_n\| \leq \sum_{k=0}^n \|A\|^k < \frac{1}{1 - \|A\|}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|S - S_n\| = 0$$

$$\Rightarrow \|S\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

$$(I - A)S_n = (I - A) \sum_{k=0}^n A^k = \sum_{k=0}^n A^k - \sum_{k=0}^n A^{k+1} = I - A^{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^{n+1}\| = 0 \implies \lim(I - A^{n+1}) = I$$

$$\left. \begin{aligned} \lim(I - A)S_n &= I \\ \lim(I - A)S_n &= (I - A)S \end{aligned} \right\} \implies (I - A)S = I \left. \begin{aligned} S_n(I - A) &= I - A^{n+1} \implies S(I - A) = I \end{aligned} \right\} \implies S = (I - A)^{-1}$$

□

**Определение 4.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$

Определим множество обратимых операторов:

$$\text{In}(X, Y) = \{ A \in \mathcal{B}(X, Y) \mid \exists A^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \}$$

**Теорема 18.**  $X$  — банахово,  $(Y, \|\cdot\|)$

1.  $U \in \text{In}(X, Y), \quad V \in \mathcal{B}(X, Y),$

$$\|U - V\| < \frac{1}{\|U^{-1}\|}$$

$$\implies V \in \text{In}(X, Y),$$

$$\|V^{-1}\| \leq \frac{\|U^{-1}\|}{1 - \|U - V\| \cdot \|U^{-1}\|} \quad (2)$$

$$\|U^{-1} - V^{-1}\| \leq \frac{\|U^{-1}\|^2 \|U - V\|}{1 - \|U - V\| \cdot \|U^{-1}\|} \quad (3)$$

2.  $\varphi : \text{In}(X, Y) \rightarrow \text{In}(Y, X) : \quad \varphi(A) = A^{-1}$

Тогда  $\varphi$  непрерывно.

**Замечание.** В  $\frac{1}{\|U^{-1}\|}(U) \subset \text{In}(X, Y) \implies \text{In}(X, Y)$  открыто.

**Доказательство.**

1. Рассмотрим оператор  $W = U^{-1}(U - V)$ .

$$\|W\| \leq \|U^{-1}\| \cdot \|U - V\| < 1, \quad W \in \mathcal{B}(X)$$

Можно применить предыдущую теорему:

$$\exists (I - W)^{-1}, \quad \|(I - W)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|W\|} \leq \frac{1}{1 - \|U^{-1}\| \|U - V\|}$$

$$W = U^{-1}(U - V) = I - U^{-1}V \implies I - W = U^{-1}V$$

$$V = U(U^{-1}V) = U(I - W)$$

Каждый из них обратим, значит,

$$\exists V^{-1} = (I - W)^{-1}U^{-1}$$

$$\|V^{-1}\| \leq \|U^{-1}\| \cdot \|(I - W)^{-1}\| \leq \frac{\|U^{-1}\|}{1 - \|U^{-1}\| \cdot \|U - V\|}$$

Получили неравенство (2). Получим из него неравенство (3):

$$U^{-1} - V^{-1} = U^{-1}(V - U)V^{-1} \implies \|U^{-1} - V^{-1}\| \leq \|U^{-1}\| \|V - U\| \|V^{-1}\| \leq \frac{\|U^{-1}\|^2 \|U - V\|}{1 - \|U^{-1}\| \cdot \|U - V\|} \quad (2)$$

$$2. \varphi(U) = U^{-1}$$

$$\varphi(U) - \varphi(V) = U^{-1} - V^{-1} \xrightarrow{(3)} \lim_{\|U-V\| \rightarrow 0} \|\varphi(U) - \varphi(V)\| = 0$$

□

## 49. Определение открытого отображения. Критерий открытости для линейного оператора. Условия существования непрерывного обратного оператора

**Определение 5.**  $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$  — топологические пространства

Отображение  $U : X \rightarrow Y$  *открыто*, если оно переводит открытые множества в открытые:

$$G \subset X \text{ открыто} \implies U(G) \text{ открыто}$$

**Замечание.**  $U$  непрерывно, если **прообраз** открытого множества открыт.

**Утверждение 4.**  $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$  — топологические пространства,  $U : X \rightarrow Y$  — биекция

$$U \text{ открыто} \iff U^{-1} \text{ непрерывно}$$

**Доказательство.** Очевидно. □

**Утверждение 5.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), U \in \mathcal{L}in(X, Y)$

$$U \text{ открыт} \iff \exists r > 0 : B_r(0) \subset U(B_1(0))$$

**Доказательство.**

•  $\implies$

$$\left. \begin{array}{l} U(0) = 0 \\ U \text{ открыт} \implies U(B_1(0)) \text{ открыт} \end{array} \right\} \implies 0 \in U(B_1(0)) \implies \exists r > 0 : B_r(0) \subset U(B_1(0))$$

•  $\Leftarrow$

Возьмём  $G \subset X$  — открытое. Пусть  $y_0 \in U(G)$ .

$$\exists x_0 \in G : Ux_0 = y_0$$

$$\exists R > 0 : B_R(x_0) \subset G$$

$$B_r(0) \subset U(B_1(0)) \xrightarrow{\text{линейность}} B_{rR}(0) \subset U(B_R(0))$$

Сдвинем на  $U(x_0)$ :

$$\underbrace{Ux_0 + B_{rR}(0)}_{B_{rR}(Ux_0) \subset U(B_R(x_0)) \subset U(G)} \subset Ux_0 + U(B_R(0)) = U(x_0 + B_R(0)) = U(B_R(x_0))$$

$$\implies Ux_0 \text{ — внутренняя точка } U(G).$$

□

**Следствие.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), U \in \mathcal{L}in(X, Y)$

$$U \text{ открыт} \implies U(X) = Y, \text{ т. е. } U \text{ — сюръекция}$$

**Доказательство.** По критерию  $\exists r > 0 : B_r(0) \subset U(B_1(0))$ . Возьмём  $y \in Y$ .

$$\exists n \in \mathbb{N} : \|y\| < nr \implies y \in B_{nr}(0) \subset U(B_n(0)) \implies y \in U(X)$$

## 50. Теорема Банаха об открытом отображении

**Лемма 3 (редукция).**  $X$  — банахово,  $(Y, \|\cdot\|)$ ,  $U \in \mathcal{B}(X, Y)$ ,  $\exists r > 0$ :  $B_r(0) \subset \overline{U(B_1(0))}$

$$B_{\frac{r}{2}}(0) \subset U(B_1(0))$$

**Доказательство.** Пусть  $y \in B_{\frac{r}{2}}(0)$ , т. е.  $\|y\| < \frac{r}{2}$ . Докажем, что  $\exists x$ :  $\|x\| < 1$ ,  $Ux = y$ .

$$B_r(0) \subset \overline{U(B_1(0))} \implies \forall k \in \mathbb{N} \quad B_{\frac{r}{2^k}}(0) \subset \overline{U(B_{\frac{1}{2^k}}(0))}$$

- При  $k = 1$

$$\|y\| < \frac{r}{2} \implies y \in B_{\frac{r}{2}}(0) \subset \overline{U(B_{\frac{1}{2}}(0))}$$

$$\exists x_1 : \quad \|x_1\| < \frac{1}{2}, \quad \|y - Ux_1\| < \frac{r}{4}$$

- $k = 2$

$$y - Ux_1 \in B_{\frac{r}{4}}(0) \subset \overline{U(B_{\frac{1}{4}}(0))} \implies \exists x_2 : \quad \|x_2\| < \frac{1}{4}, \quad \|y - Ux_1 - Ux_2\| < \frac{r}{2^3}$$

...

- Построим  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  такую, что

$$\|x_n\| < \frac{1}{2^n}, \quad \|y - Ux_1 - \dots - Ux_n\| < \frac{r}{2^{n+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < 1 \xrightarrow{\text{критерий полноты}} \exists x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X, \quad \|x\| < 1$$

$$S_n := \sum_{k=1}^n x_k$$

$$\left. \begin{aligned} \lim S_n = x &\implies \lim US_n = Ux \\ \lim \|y - US_n\| = 0 &\implies \lim US_n = y \end{aligned} \right\} \implies Ux = y$$

□

**Теорема 19 (Банах).**  $X, Y$  — банаховы,  $U \in \mathcal{B}(X, Y)$

Если  $U(X) = Y$ , то  $U$  открыто.

**Доказательство.** Обозначим  $B = B_1(0)$ .

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (nB) \implies U(X) = Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} U(nB)$$

По теореме Бэра о категориях

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \text{Int } \overline{U(n_0 B)} \neq \emptyset$$

При этом,  $U(n_0 B) = n_0 U(B)$ .

$$\implies \text{Int } \overline{U(B)} \neq \emptyset \implies \exists a \in Y \exists y > 0 : \quad B_r(a) \subset \overline{U(B)}$$

Чтобы воспользоваться леммой, нужно сдвинуть точку  $a$  в 0.

Возьмём  $z \in X$ :  $\|z\| < r$ .

$$\left. \begin{aligned} a + z &\in B_r(a) \subset \overline{U(B)} \\ a \in \overline{U(B)} &\implies -a \in \overline{U(B)} \end{aligned} \right\} \implies z = (a + z) + (-a) \in \overline{U(B)} + \overline{U(B)} \subset \overline{U(2B)}$$



Воспользуемся подобием:

$$B_{\frac{r}{2}} \subset \overline{U(B)} \xRightarrow{\text{лемма}} B_{\frac{r}{4}}(0) \subset U(B)$$

□

## 51. Теорема Банаха об обратном операторе. Эквивалентность норм, в которых пространство банахово

**Теорема 20 (Банах).**  $X, Y$  — банаховы,  $U \in \mathcal{B}(X, Y)$  — биекция

$$U^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$$

**Доказательство.**

$$U(X) = Y \xRightarrow[\text{т. об. отк. отобра.}]{\text{т. об. отк. отобра.}} U \text{ открыто} \xRightarrow[\text{утв.}]{\text{утв.}} U^{-1} \text{ непрерывно}$$

□

**Теорема 21 (об эквивалентных нормах).**  $(X, \|\cdot\|_1)$  — банахово,  $(X, \|\cdot\|_2)$  — банахово,  $\exists C > 0$  :  
 $\|x\|_2 \leq C \|x\|_1$

$$\exists A > 0 : \|x\|_1 \leq A \|x\|_2$$

**Доказательство.** Обозначим  $X = (X, \|\cdot\|_1)$ ,  $Y = (X, \|\cdot\|_2)$ .

Определим оператор  $I : X \rightarrow Y$  :  $Ix = x$ . Понятно, что  $I$  — биекция и  $I \in \mathcal{L}in(X, Y)$ .

$$\|Ix\|_2 \leq C \|x\|_1 \implies I \in \mathcal{B}(X, Y)$$

По теореме Банаха об обратном операторе

$$I^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X) \implies \|I^{-1}x\|_1 \leq A \|x\|_2, \quad A = \|I^{-1}\|$$

$$\iff \|x\|_1 \leq A \|x\|_2$$

□

## 52. Замкнутый оператор. Теорема о замкнутом графике. Пример замкнутого, но не непрерывного оператора

**Определение 6.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|)$  над  $\mathbb{K}$

$X \times Y$  — линейное пространство:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

Определим норму на  $X \times Y$ :

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

**Замечание.** Сходимость по такой норме — покоординатная:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y) \iff \begin{cases} \lim x_n = x \\ \lim y_n = y \end{cases}$$

Если  $X, Y$  — банаховы, то  $X \times Y$  — банахово.

**Определение 7.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), U \in \mathcal{L}in(X, Y)$

Определим *график*  $U$ :

$$G_U = \{ (x, Ux) \}_{x \in X} \subset X \times Y$$

Оператор  $U$  называется *замкнутым*, если  $G_U$  замкнуто в  $X \times Y$ .

$$\Longleftrightarrow \left( \lim(x_n, Ux_n) = (x, y) \implies y = Ux \right)$$

$$\Longleftrightarrow \left( \lim x_n = x \right. \left. \lim Ux_n = y \right) \implies y = Ux$$

**Замечание.** Замкнутый оператор — это **не тот**, который переводит замкнутые множества в замкнутые.

**Замечание.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), U \in \mathcal{L}in(X, Y)$

1.  $\lim x_n = x$ ;
2.  $\lim Ux_n = y$ ;
3.  $y = Ux$ .

$$U \text{ замкнут} \Longleftrightarrow (1) + 2) \implies 3)$$

$$U \text{ непрерывен} \Longleftrightarrow (1) \implies 2) + 3)$$

Значит, если  $U$  непрерывен, то он замкнут.

**Теорема 22 (о замкнутом графике).**  $X, Y$  — банаховы,  $U \in \mathcal{L}in(X, Y)$  — замкнутый

$U$  непрерывен

**Доказательство.** Определим новую норму пространства  $X$ :

$$\|x\|_1 = \|x\|_X + \|Ux\|_Y$$

Проверим, что  $(X, \|\cdot\|_1)$  банахово. Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  фундаментальна в  $(X, \|\cdot\|_1)$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\|_1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lim(\|x_m - x_n\|_X + \|Ux_m - Ux_n\|_Y) = 0$$

Значит,  $\{x_n\}$  фундаментальна в  $(X, \|\cdot\|_X)$ , и  $\{Ux_n\}$  фундаментальна в  $Y$ . Оба эти пространства банаховы.

$$\implies \exists x \in X \exists y \in Y : \lim \|x_n - x\|_X = 0$$

$$\implies \begin{cases} \lim x_n = x \text{ в } (X, \|\cdot\|_X) \\ \lim Ux_n = y \text{ в } Y \end{cases} \xRightarrow{U \text{ замкнут}} y = Ux \implies \lim(\|x_n - x\|_X + \|Ux_n - Ux\|_Y) = 0$$

$$\implies \lim \|x_n - x\|_1 = 0 \implies (X, \|\cdot\|_1) \text{ банахово, } \|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Ux\|_Y = \|x\|_1 \xRightarrow{\text{т. об экв. норм}} \implies$$

$$\implies \exists A > 0 : \|x\|_1 \leq A\|x\|_X \implies \|x\|_X + \|Ux\|_Y \leq A\|x\|_X \implies \|Ux\| \leq A\|x\| \implies U \in \mathcal{B}(X, Y)$$

□

**Пример** ( $U$  замкнут, но не непрерывен).  $X = \{ \exists f' \in \mathcal{C}[0, 1] \}, \|f\|_X = \max_{[0,1]} |f(x)|$

$X \subset \mathcal{C}[0, 1]$  в алгебраическом смысле

$$Y = \mathcal{C}[0, 1], \|g\|_Y = \max_{[0,1]} |g(x)| = \|g\|_\infty$$

$$\mathcal{D}(f) = f', \quad \mathcal{D} \in \mathcal{L}in(X, Y), \quad \mathcal{D} \text{ замкнут}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{f_n \in X\}_{n=1}^\infty, \quad \lim f_n = f \iff f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[0,1]} f \\ \mathcal{D}(f_n) = f'_n, \quad \mathcal{D}(f_n) \rightarrow g \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{ДОК. В АНАЛИЗЕ}]{\iff} g = f' \implies g = \mathcal{D}(f) \iff f'_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{[0,1]} g$$

$$x^n \in X: \quad \|x^n\|_X = 1, \quad \mathcal{D}(x^n) = nx^{n-1}, \quad \|\mathcal{D}(x^n)\| = n$$

$$\implies \sup_{\|f\| \leq 1} \|\mathcal{D}(f)\| = +\infty \implies \mathcal{D} \notin \mathcal{B}(X, Y)$$

### 53. Сопряжённые пространства к пространствам последовательностей $C_0$ , $l^p$ , пространству $L^p$ для конечных $p$

**Теорема 23** (сопряжённые к  $l^p$ ).  $1 \leq p < +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$1. \quad y = \{y_n\}_{n=1}^\infty \in l^q, \quad F_y: l^p \rightarrow \mathbb{K}, \quad x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^p, \quad F_y(x) := \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$$

$$F_y \in (l^p)^*, \quad \|F_y\|_{(l^p)^*} = \|y\|_q$$

$$2. \quad F \in (l^p)^*$$

$$\exists! y: \quad F = F_y$$

**Доказательство.**

$$1. \quad y \in l^q, \quad x \in l^p$$

$$|F_y(x)| = \left| \sum_{n=1}^\infty x_n y_n \right| \underset{\text{нер-во Гёльдера}}{\leq} \|x\|_p \cdot \|y\|_q, \quad F_y \in (l^p, \mathbb{K})$$

$$\implies F_y \in \mathcal{B}(l^p, \mathbb{K}) = (l^p)^*, \quad \|F_y\|_{(l^p)^*} \leq \|y\|_q$$

$$2. \quad F \in (l^p)^*, \quad e_n = (0, \dots, 0, \underset{n}{1}, 0, \dots, 0) \text{ — базис } l^p$$

Определим  $y_n = F(e_n)$ .

$$x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^p \implies x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n \text{ — сходится в } l^p$$

$$S_n := \sum_{k=1}^n x_k e_k \implies F(S_n) = \sum_{k=1}^n x_k y_k \xrightarrow[F \text{ непрерывен}]{\iff}$$

$$\implies \lim S_n = x \implies \lim F(S_n) = F(x) \implies F(x) = \sum_{k=1}^\infty x_k y_k \implies F = F_y$$

Проверим, что  $y \in l^q$ .

•  $p > 1 \implies q < +\infty$  Рассмотрим пробные функции

$$x_k = \begin{cases} \frac{\overline{y_k}}{|y_k|} \cdot |y_k|^{q-1}, & y_k \neq 0, \\ 0, & y_k = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим последовательности

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^n x_k e_k = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$$

$$F(x^{(n)}) = \sum_{k=1}^n x_k y_k = \sum |y_k|^q$$

$$\|x^{(n)}\|_p^p = \sum_{k=1}^n |x_k|^p = \sum_{k=1}^n |y_k|^{p(q-1)} \xrightarrow{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow p+q=pq \Rightarrow pq-p=q} \sum_{k=1}^n |y_k|^q$$

$$\|F\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|F(x)|}{\|x\|_p} \geq \frac{F(x^{(n)})}{\|x^{(n)}\|} = \frac{\sum_{k=1}^n |y_k|^q}{\left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}} = \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \in l^q, \quad \|F\| \geq \|y\|_q, \quad F = F_y$$

Докажем единственность:

Пусть  $F = F_y$ ,  $F = F_z$ .

$$F(e_n) = y_n, \quad F(e_n) = z_n \Rightarrow y_n = z_n$$

$$\bullet \quad p = 1 \Rightarrow q = \infty$$

$$F(e_n) = y_n, \quad \|F\|_{(l^1)^*} \geq |y_n| \Rightarrow y \in l^\infty$$

$$\|F\| \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} |y_n| = \|y\|_\infty$$

□

**Замечание.**  $T : (l^q) \rightarrow (l^p)^* : T(y) = F_y$

Мы доказали, что, при  $1 \leq p < +\infty$ ,  $T$  — линейный изометрический изоморфизм. Говорят, что  $(l^p)^* = l^q$ .

**Теорема 24** (сопряжённое к  $C_0$ ).  $C_0 = \left\{ x = \{x_n \in \mathbb{K}\}_{n=1}^\infty \mid \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \right\}$

$$1. \quad y \in l^1, \quad x \in C_0, \quad F_y(x) := \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$$

$$F_y \in C_0^*, \quad \|F_y\| = \|y\|_1$$

$$2. \quad F \in C_0^*$$

$$\exists! y \in l^1 : \quad F = F_y$$

**Доказательство.**

$$1. \quad y \in l^1, \quad x \in C_0$$

$$|F_y(x)| = \left| \sum_{n=1}^\infty x_n y_n \right| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \cdot \sum_{n=1}^\infty |y_n| = \|x\|_\infty \cdot \|y\|_1$$

$$\Rightarrow F_y \in C_0^*, \quad \|F_y\| \leq \|y\|_1$$

$$2. \quad \{e_n\}_{n=1}^\infty \text{ — базис в } C_0. \text{ Рассмотрим } F \in C_0^*.$$

$$y_n := F(e_n)$$

$$x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in C_0 \Rightarrow x = \sum_{k=1}^\infty x_k e_k$$

$$S_n := \sum_{k=1}^n x_k e_k$$

$$F(S_n) = \sum_{k=1}^n x_k y_k \xrightarrow{F \text{ непрерывен}} \lim F(S_n) = F(x) \Rightarrow F(x) = \sum_{k=1}^\infty x_k y_k \text{ сходится} \Rightarrow F = F_y$$

Проверим, что  $y \in l^1$ .

□

## 54. Второе сопряжённое пространство. Каноническое вложение. Рефлексивность. Примеры

Обозначение.  $(T^*f)(x) = f(Tx)$

**Определение 8.**  $(X, \|\cdot\|), (Y, \|\cdot\|), \quad x \in X, \quad f \in X^*$

$$\langle f, x \rangle := f(x)$$

$$T \in \mathcal{B}(X, Y), \quad T^* : Y^* \rightarrow X^*$$

$$\langle T^*f, x \rangle = \langle f, Tx \rangle$$

$$\pi : X \rightarrow X^{**}, \quad f \in X^*, \quad x \in X$$

$$f(x) = \langle f, x \rangle, \quad \langle \pi(x), f \rangle = f(x)$$

Можно отождествить  $\pi(X)$  с  $X$ :

$$\langle x, f \rangle = f(x)$$

**Пример.**  $L^p(\mu), \quad L^q(\mu), \quad 1 < p < +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad f \in L^p, \quad g \in L^q$

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x)g(x) \, d\mu, \quad \langle g, f \rangle = \int_X f(x)g(x) \, d\mu$$

**TODO:** Ещё что-то про второе сопряжённое пространство?

## 55. Существование и простейшие свойства эрмитово-сопряжённого оператора в нормированном пространстве

**TODO:** Существование ...в нормированном пространстве

## 56. Теорема об интегральном операторе с ядром из $L^p$ и сопряжённом к нему

**Теорема 25.**  $(\mathbb{R}^n, \lambda_n), (\mathbb{R}^m, \lambda_m), \quad K(x, y) \in L^p(\mathbb{R}^{n+m}, \lambda_{n+m}), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m$

$$M := \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^m} |K(x, y)|^p \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

$$(\mathcal{K}f)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} K(x, y)f(y) \, dy$$

Тогда

$$1. \quad \mathcal{K} \in \mathcal{B}(L^q(\mathbb{R}^m), L^p(\mathbb{R}^n)), \quad \|\mathcal{K}\| \leq M;$$

$$2. \quad \mathcal{K}^* \in \mathcal{B}(L^q(\mathbb{R}^m), L^p(\mathbb{R}^m))$$

$$(\mathcal{K}^*g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} K^*(y, x)g(x) \, dx$$

$$\implies K^*(y, x) = K(x, y)$$

**Доказательство.**

1. Воспользуемся теоремой Фубини:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} |K(x, y)|^p dy \right) dx < +\infty \implies \text{для п. в. } x \quad \int_{\mathbb{R}^m} |K(x, y)|^p dy < +\infty$$

Возьмём  $f \in L^q(\mathbb{R}^m)$  и  $x$  такой, что внутренний интеграл конечен.

$$|(\mathcal{K}f)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^m} K(x, y) f(y) dy \right| \underset{\text{нер-во Гёльдера}}{\leq} \left( \int_{\mathbb{R}^m} |K(x, y)|^p dy \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \|f\|_q$$

Возведём в степень  $p$  и проинтегрируем по  $\mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |(\mathcal{K}f)(x)|^p dx &\leq \|f\|_q^p \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^m} |K(x, y)|^p dy \right) dx = M^p \implies \\ &\implies \|\mathcal{K}f\|_p \leq M \|f\|_q \quad \forall f \in L^q \implies \|\mathcal{K}\| \leq M, \quad \mathcal{K} \in \mathcal{B}(\dots) \end{aligned}$$

2.  $\mathcal{K}^* \in \mathcal{B}(L^q(\mathbb{R}^n), L^p(\mathbb{R}^m))$

$$\begin{aligned} g \in L^q(\mathbb{R}^n), \quad f \in L^p(\mathbb{R}^m) \\ \langle \mathcal{K}^*g, f \rangle = \langle g, \mathcal{K}f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \left( \int_{\mathbb{R}^m} K(x, y) f(y) dy \right) dx \stackrel{\text{т. Фубини}}{=} \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) g(x) dx \right) f(y) dy \end{aligned} \quad (4)$$

$$\langle \mathcal{K}^*g, y \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} K^*(y, x) g(x) dx$$

$$\langle \mathcal{K}^*g, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{\mathbb{R}^n} K^*(y, x) g(x) dx \right) f(y) dy \stackrel{(4)}{\implies} K^*(y, x) = K(x, y)$$

□

## 57. Существование и простейшие свойства эрмитово-сопряжённого оператора в гильбертовом пространстве

$H$  — гильбертово,  $T \in \mathcal{B}(H)$ ,  $y \in H$  — фиксирован,  $G_y : H \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \in H$ ,  $G_y(x) := (Tx, y)$

$$\implies G_y \in \mathcal{L}in(H, \mathbb{C})$$

Возьмём  $x \in H$ .

$$|G_y(x)| = |(Tx, y)| \leq \|Tx\| \cdot \|y\| \leq \|T\| \cdot \|y\| \cdot \|x\| \implies G_y \in H^*, \quad \|G_y\| \leq \|T\| \cdot \|y\|$$

Воспользуемся теоремой Рисса:

$$\exists! z \in H : \quad G_y(x) = (x, z), \quad \|z\| = \|G_y\|_{H^*}$$

**TODO:** Оформить существование эрмитово-сопряжённого

**Определение 9.**  $T^*y := z$

$$T^* \in \mathcal{B}(H), \quad \|T^*\| \leq \|T\|$$

**Свойства.**  $H$  — гильбертово,  $T \in \mathcal{B}(H)$

1.  $T^{**} = T$ ;
2.  $T^* \in \mathcal{B}(H)$ ,  $\|T^*\| = \|T\|$ ;
3.  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$ ;

4.  $T, S \in \mathcal{B}(H) \implies (T + S)^* = T^* + S^*$ ;
5.  $(TS)^* = S^*T^*$ ;
6. если  $T$  — биекция, то  $\exists T^{-1} \in \mathcal{B}(H)$ ,  $\exists (T^*)^{-1}$ , при этом  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ .

**Доказательство.**

1.  $(Tx, y) = (x, T^*y)$

$$\begin{aligned} (x, Ty) &= \overline{(Ty, x)} = \overline{(y, T^*x)} = (T^*x, y) = (x, T^{**}y) \quad \forall x \\ &\implies Ty = T^{**}y \quad \forall y \in H \end{aligned}$$

2.  $T^* \in \mathcal{B}(H)$ ,  $\|T^*\| \leq \|T\| \implies \|T^{**}\| \leq \|T^*\| \xrightarrow{T^{**}=T} \|T^*\| = \|T\|$

3.  $\alpha \in \mathbb{C}$

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \implies ((\alpha T)x, y) = (x, \bar{\alpha}T^*y) \implies (\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$$

4. Очевидно.

5. Очевидно.

6.  $\exists T^{-1}$

$$\left. \begin{aligned} T \cdot T^{-1} &= I \xRightarrow{5)} (T^{-1})^*T^* = (I^*) = I \\ T^{-1} \cdot T &= I \xRightarrow{5)} (T^*)(T^{-1})^* = I \end{aligned} \right\} \implies \exists (T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

□

**Замечание.**  $X, Y$  — банаховы,  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ ,  $\exists T^{-1} \in \mathcal{B}(Y, X)$

$$\exists (T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

**Без доказательства.**

□

## 58. Теорема об интегральном операторе с ядром из $L^2$ и эрмитово-сопряжённом к нему

**Теорема 26.**  $L^2(\mathbb{R}^n, \lambda_n)$ ,  $K(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ ,

$$M = \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x, y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(\mathcal{K}f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y)f(y) dy$$

Тогда

1.  $\mathcal{K} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$ ,  $\|\mathcal{K}\| \leq M$

2.  $\mathcal{K}^* \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$

$$(\mathcal{K}^*g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} K^*(y, x)g(x) dx$$

$$\implies K^*(y, x) = \overline{K(x, y)}$$

**Доказательство.**

1. Так же, как в предыдущей теореме.

2. Возьмём  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ .

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}^* g, f) &= (g, \mathcal{K} f) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \overline{\int_{\mathbb{R}^n} K(x, y) f(y) dy} dx \stackrel{\text{т. Фубини}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K(x, y)} g(x) \right) \overline{f(y)} dy = \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K(x, y)} g(x) dx, f \right) \\ \implies (\mathcal{K}^* g)(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K(x, y)} g(x) dx \implies K^*(y, x) = \overline{K(x, y)} \end{aligned}$$

□

## 59. Теорема об образе и ядре оператора и его сопряжённого. Теорема об ортогональном дополнении инвариантного подпространства. Самосопряжённый оператор, примеры

**Теорема 27.**  $H$  — гильбертово,  $T \in \mathcal{B}(H)$

$$H = (\text{Ker } T) \oplus \overline{T^*(H)}$$

$(\overline{T^*(H)})$  — замыкание образа  $T^*$

$$H = (\text{Ker } T^*) \oplus \overline{T(H)}$$

**Общее наблюдение.**  $L$  — подпространство в алгебраическом смысле,

$$M = L^\perp = \{ x \in H \mid x \perp y \quad \forall y \in L \}$$

$$(\overline{L})^\perp = M$$

$$\implies H = M \oplus \overline{L}$$

**Доказательство (теоремы).** В качестве  $L$  возьмём  $L = T^*(H)$ . Возьмём  $x \in L^\perp$ .

$$(x, T^* y) = 0 \iff (Tx, y) = 0 \iff Ty = 0 \iff y \in \text{Ker } T$$

$$\implies (T^*(H))^\perp = \text{Ker } T \implies H = \text{Ker } T \oplus \overline{T^*(H)}$$

Применим эту формулу к  $T^*$  (учитывая, что  $T^{**} = T$ ):

$$H = \text{Ker } T^* \oplus \overline{T(H)}$$

□

**Определение 10.**  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $T \in \mathcal{B}(X)$ ,  $Y \subset X$  — подпространство в алгебраическом смысле  
Будем говорить, что  $Y$  — *инвариантное подпространство* для  $T$ , если  $T(Y) \subset Y$  (т. е.  $T|_Y \in \mathcal{B}(Y)$ ).

**Замечание** (проблема инвариантного подпространства).

1.  $X$  — сепарабельно, банахово,  $T \in \mathcal{B}(X)$

Существует ли нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство?

Энфлю построил пример, доказывающий, что нет.

2.  $H$  — гильбертово,  $T \in \mathcal{B}(H)$



Неизвестно.

**Теорема 28.**  $H$  — гильбертово,  $T \in \mathcal{B}(H)$ ,  $Y$  — инвариантное подпространство для  $T$

$Y^\perp$  — инвариантное подпространство для  $T^*$

**Доказательство.**  $z \in Y^\perp$ ,  $y \in Y$

$$(y, T^*z) = (Ty, z) \underset{\substack{Ty \in Y \\ z \in Y^\perp}}{=} 0 \implies T^*z \in Y^\perp \implies T^*(Y^\perp) \subset Y^\perp$$

□

**Определение 11.**  $H$  — гильбертово,  $T \in \mathcal{B}(H)$

$T$  называется *самосопряжённым*, если  $T = T^*$ , то есть  $(Tx, y) = (x, Ty) \quad \forall x \in H$ .

**Следствие.**  $H$  — гильбертово,  $T \in \mathcal{B}(H)$ ,  $T$  — самосопряжённый

Если  $Y \subset H$  инвариантно для  $T$ , то  $Y^\perp$  тоже инвариантно.

**Пример.**  $M = \overline{M} \subset H$ ,  $M$  — подпространство

$$P \text{ — ортопроектор на } M \implies P = P^*$$

## 60. Определение спектра и резольвенты оператора. Теорема о свойствах резольвенты

**Определение 12.**  $X$  — банахово,  $T \in \mathcal{B}(X)$ ,  $I$  — тождественный оператор,  $\lambda \in \mathbb{C}$

Будем говорить, что  $\lambda$  — *регулярная точка*, если  $V(\lambda) := \lambda I - T$  — биекция.

По теореме Банаха об обратном операторе,

$$V^{-1}(\lambda) \in \mathcal{B}(X)$$

$$R(\lambda, T) = R(\lambda) = V^{-1}(\lambda)$$

$R$  называется *резольвентой*.

**Примечание** (касательно терминологии). Рассмотрим уравнение

$$\lambda x - Tx = h,$$

где  $h$  — дано,  $x$  — неизвестные.

Если  $\forall h \in X \exists x \in X : \lambda x - Tx = h$ , то уравнение разрешимо. То есть,  $x = R(\lambda)h$ .

**Определение 13.** Множество всех регулярных точек называется *резольвентным множеством*:

$$\rho(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ — регулярная} \}$$

**Определение 14.** Множество всех остальных точек назовём *спектром*  $T$ :

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$$

**Определение 15** (части спектра).

1.  $\sigma_p(T)$  — *точечный спектр*

$$\sigma_p(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda T - I \text{ не инъекция} \}$$

Для линейного оператора это означает, что  $X_\lambda = \text{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$ .

$$u \neq 0 \in X \implies Tu = \lambda u$$

$u$  — собственный вектор  $T$ , соответствующий с. ч.  $\lambda$ .  $X_\lambda$  — собственное подпространство.

2.  $\sigma_c(T)$  — непрерывный спектр

$$\sigma_c(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Ker}(\lambda I - T) = \{0\}, \quad \overline{V(\lambda)(X)} = X \right\}$$

(т. е. образ  $V(\lambda)$  всюду плотен в  $X$ ).

3.  $\sigma_r(T)$  — остаточный спектр

$$\sigma_r(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Ker}(\lambda I - T) = \{0\}, \quad \overline{V(\lambda)(X)} \subsetneq X \right\} = \sigma \setminus (\sigma_p \cup \sigma_c)$$

**Замечание.** В конечномерном случае  $\sigma = \sigma_p$ .

**Свойства.**  $X$  — банахово,  $T \in \mathcal{B}(H)$

1.  $\lambda, \mu \in \rho(T)$

$$\implies R(\lambda)R(\mu) = R(\mu)R(\lambda)$$

2. Тождество Гильберта:  $\lambda, \mu \in \rho(T)$

$$\implies R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)$$

3.  $\rho(T)$  открыто в  $\mathbb{C}$

Кроме того, если  $\mu \in \rho(T)$ , то

$$|\lambda - \mu| < \frac{1}{\|R(\mu)\|} \implies \lambda \in \rho(T)$$

4.  $\lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| > \|T\|$

$$\implies \lambda \in \rho(T)$$

5.  $R(\lambda)$  — непрерывная функция, т. е. если  $\mu \in \rho(T)$ , то

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mu} R(\lambda) = R(\mu), \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} R(\lambda) = 0$$

6.  $F \in (\mathcal{B}(X))^*, \quad \lambda \in \rho(T), \quad g(\lambda) := F(R(\lambda))$

$$\implies g(\lambda) \text{ аналитична в } \rho(T), \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} g(\lambda) = 0$$

**Доказательство.**

1.  $\lambda, \mu \in \rho(T)$

$$V(\lambda)V(\mu) = (\lambda I - T)(\mu I - T) = V(\mu)V(\lambda)$$

$$\exists (V(\lambda))^{-1}, (V(\mu))^{-1}, \quad R(\lambda) = (V(\lambda))^{-1}, \quad R(\mu) = (V(\mu))^{-1}$$

$$\implies (V(\mu))^{-1}(V(\lambda))^{-1} = (V(\lambda))^{-1}(V(\mu))^{-1}$$

2.  $\lambda, \mu \in \rho(T)$

$$V(\lambda) - V(\mu) = (\lambda I - T) - (\mu I - T) = (\lambda - \mu)I$$

Если  $A, B \in \mathcal{B}(X), \quad \exists A^{-1}, B^{-1}$ , то

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}$$

Возьмём  $A = V(\lambda)$ ,  $B = V(\mu)$ .

$$R(\lambda) - R(\mu) = R(\lambda)((\mu - \lambda)I)R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)$$

3. Известно, что  $\text{In}(X)$  (множество обратимых операторов) открыто:

$$\exists A^{-1} \quad \|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \implies \exists B^{-1}$$

$$\mu \in \rho(T), \quad A = V(\mu) \implies \exists R(\mu) = (V(\mu))^{-1}$$

$$V(\lambda) - V(\mu) = (\lambda - \mu)I \implies \|V(\lambda) - V(\mu)\| = |\lambda - \mu|$$

$$|\lambda - \mu| < \frac{1}{\|R(\mu)\|} \implies \|V(\lambda) - V(\mu)\| < \frac{1}{\|R(\mu)\|} \implies \exists (V(\lambda))^{-1} \implies \lambda \in \rho(T)$$

4.  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $|\lambda| > \|T\|$

Рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\lambda} T \right\| < 1 &\xrightarrow[\text{т. об. обр. опер., близкого к тожд.}]{=} \exists \left( I - \frac{1}{\lambda} T \right)^{-1} \implies \\ &\implies V(\lambda) = \lambda I - T = \lambda \left( I - \frac{1}{\lambda} T \right) \implies \exists R(\lambda) = (V(\lambda))^{-1} = \frac{1}{\lambda} \left( I - \frac{1}{\lambda} T \right)^{-1} \end{aligned}$$

5.  $\mu \in \rho(T)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mu} (V(\mu) - V(\lambda)) = \lim_{\lambda \rightarrow \mu} (\mu - \lambda)I = 0$$

По теореме об открытости  $\text{In}(A)$ ,

$$\varphi : A \rightarrow A^{-1}, \quad A \in \text{In}(X) \implies \varphi \text{ непрерывно}$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi(V(\lambda)) &= V(\lambda) \\ \lim_{\lambda \rightarrow \mu} V(\lambda) &= V(\mu) \end{aligned} \right\} \implies \lim_{\lambda \rightarrow \mu} R(\lambda) = R(\mu)$$

Пусть  $|\lambda| > \|T\|$ .

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( I - \frac{1}{\lambda} T \right) &= I \\ R(\lambda) &= \frac{1}{\lambda} \left( I - \frac{1}{\lambda} T \right)^{-1} \end{aligned}$$

По непрерывности,

$$\lim \left( I - \frac{1}{\lambda} T \right)^{-1} = I \implies \lim R(\lambda) = 0$$

6.  $\mu \in \rho(T)$ ,  $\lambda$  из некоторой окрестности  $\mu$

$$\frac{R(\lambda) - R(\mu)}{\lambda - \mu} \xrightarrow[\text{т-во Гильберта}]{=} \frac{(\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)}{\lambda - \mu} = -R(\lambda)R(\mu) \implies \exists \lim_{\lambda \rightarrow \mu} \frac{R(\lambda) - R(\mu)}{\lambda - \mu} = -(R(\mu))^2$$

Возьмём  $F \in (\mathcal{B}(X))^*$ ,  $F : \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ . Рассмотрим функцию  $g(\lambda) = F(R(\lambda))$  при  $\lambda \in \rho(T)$ .

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mu} \frac{g(\lambda) - g(\mu)}{\lambda - \mu} = \lim_{\lambda \rightarrow \mu} \frac{F(R(\lambda)) - F(R(\mu))}{\lambda - \mu} \xrightarrow[\text{лин. } F]{=} \lim F \left( \frac{R(\lambda) - R(\mu)}{\lambda - \mu} \right) \xrightarrow[\text{непр. } F]{=} -F((R(\mu))^2)$$

То есть,  $\exists g'(\mu) \quad \forall \mu \in \rho(T)$ .

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} R(\mu) = 0 \xrightarrow[\text{непр. } F]{=} \lim_{\mu \rightarrow \infty} F((R(\mu))^2) = 0$$

□

## 61. Теорема о компактности и непустоте спектра. Формула для спектрального радиуса. Следствие о спектре сопряжённого оператора

**Следствие.**  $X$  — банахово,  $T \in \mathcal{B}(X)$

$$\sigma(T) \text{ — компакт, } \sigma(T) \neq \emptyset$$

**Доказательство.**

1. Компактность

$$\rho(T) \text{ открыто} \implies \sigma(T) \text{ замкнуто}$$

$$|\lambda| > \|T\| \implies \lambda \in \rho(T)$$

Значит,

$$\lambda \in \sigma(T) \implies |\lambda| \leq \|T\|$$

То есть,

$$\sigma(T) \subset \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|T\| \} \implies \sigma(T) \text{ ограничено} \implies \sigma(T) \text{ — компакт}$$

2. Непустота

**Пусть**  $\sigma(T)$  пусто. Тогда  $\rho(T) = \mathbb{C}$ , то есть

$$\forall F \in (\mathcal{B}(X))^* \quad g(\lambda) = F(R(\lambda)) \text{ — аналитическая в } \mathbb{C} \text{ (целая)}$$

$$V(0) = -T \implies \exists T^{-1} \in \mathcal{B}(X) \xRightarrow{\text{сл. из т. Хана-Банаха}} \exists F \in (\mathcal{B}(X))^* : g(0) \neq 0$$

Выберем  $g(\lambda) = F(R(\lambda))$ .

Таким образом,  $g(z)$  — целая,  $g$  ограничена. Значит, по теореме Лиувилля,  $g \equiv \text{const} = \frac{1}{2}$  с  $\lim_{g \rightarrow 0} = 0$ .

□

**Пример.**  $Ix = x$

$$\sigma(I) = \{ 1 \} = \sigma_p(I)$$

$$(\lambda I - I) = (\lambda - 1)I \implies R(\lambda) = \frac{1}{\lambda - 1}I \quad \forall \lambda \neq 1$$

**Теорема 29** (спектр и резольвента сопряжённого оператора).

1.  $X$  — банахово,  $T \in \mathcal{B}(X)$

$$\implies \sigma(T^*) = \sigma(T)$$

Если  $\lambda \in \rho(T)$ , то

$$(R(\lambda, T))^* = R(\lambda, T^*)$$

2.  $H$  — гильбертово,  $T \in \mathcal{B}(H)$ ,  $T$  — эрмитово-сопряжённый

$$\implies \sigma(T^*) = \{ \lambda \mid \bar{\lambda} \in \sigma(T) \}$$

Если  $\lambda \in \rho(T)$ , то

$$R(\lambda, T^*) = (R(\bar{\lambda}, T))^*$$

**Доказательство.**

1.  $X$  — банахово,  $\lambda \in \rho(T)$

$$V(\lambda) = \lambda I - T \implies (V(\lambda))^* = \lambda I - T^*$$

$$\left((V(\lambda))^{-1}\right)^* = \left((V(\lambda))^*\right)^{-1}$$

2.  $X$  — гильбертово

$$(V(\lambda))^* = \bar{\lambda}I - T^*$$

□

## 62. Компактные операторы. Компактность оператора конечного ранга. Размерность замкнутого подпространства образа компактного оператора. Следствия

**Определение 16.**  $X, Y$  — банаховы,  $T \in \mathcal{L}in(X, Y)$

$T$  называется *компактным*, если  $T(B_1(0))$  относительно компактен.

**Обозначение.**  $\text{Com}(X, Y)$  — множество компактных операторов.

**Свойства.**

1.  $\text{Com}(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y)$

2.  $T \in \text{Com}(X, Y)$ ,  $A \subset X$  ограничено

$T(A)$  относительно компактно

3.  $T \in \text{Com}(X, Y)$  тогда и только тогда, когда

$$\{x_n \in X\}_{n=1}^\infty \text{ — ограниченная} \implies \exists \{n_k\}_{k=1}^\infty : \exists \lim_{k \rightarrow \infty} T_{n_k} \in Y$$

**Доказательство.**

1.  $T \in \text{Com}(X, Y)$

Обозначим  $B = B_1^X(0)$ .

$$\implies \overline{T(B)} \text{ — компакт} \implies T(B) \text{ ограничено} \implies T \in \mathcal{B}(X, Y)$$

□

**Определение 17.**  $X, Y$  — банаховы,  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$

Если  $\dim T(X) \leq +\infty$ , то  $T$  называется *оператором конечного ранга*.

**Пример.**  $X, Y$  — банаховы,  $f_1, \dots, f_n \in X^*$ ,  $y_1, \dots, y_n \in Y$

Для  $x \in X$  определим

$$Tx = \sum_{j=1}^n f_j(x)y_j$$

$$T(x) \subset \mathcal{L}\{y_j\}_{j=1}^n \implies \dim T(X) \leq n \implies T \text{ — конечного ранга}$$

Все операторы конечного ранга имеют такой вид.

**Утверждение 6.**  $X, Y$  — банаховы,  $T$  — конечного ранга

$$T \in \text{Com}(X, Y)$$

**Доказательство.**  $B := B_1^X(0)$

$T(B) \subset T(X) \implies T(B)$  — ограниченное множество в конечномерном пр-ве  $\implies T(B)$  относительно компактно

□

**Теорема 30.**  $X, Y$  — банаховы,  $T \in \text{Com}(X, Y)$ ,  $L \subset T(X)$  — замкнутое подпространство

$$\dim L < +\infty$$

**Доказательство.**

- $T(X)$  — замкнутое подпространство  $Y$

$T \in \mathcal{B}(X, T(X))$ ,  $T(X)$  — банахово  $\xRightarrow{\text{т. Банаха об откр. отобра.}} T$  открыто  $\implies$

$\exists r > 0 : B_r^{T(X)}(0) \subset \underbrace{T(B)}_{\text{отн. комп.}} \implies B_r^{T(X)}(0)$  относительно компактно  $\xRightarrow{\text{т. Рисса}} \dim T(X) < +\infty$

- $L \subset T(X)$  — замкнутое подпространство

Обозначим  $X_1 = T^{-1}(L)$  (прообраз)

$T \in \mathcal{B}(X, Y) \xRightarrow{L \text{ замкнуто}} T^{-1}(L) \text{ замкнуто в } X \implies X_1 \text{ замкнуто} \implies X_1 \text{ — банахово}$

По первой части доказательства

$$T(x_1) = L \implies \dim L < +\infty$$

□

**TODO:** Следствия?

### 63. Теорема об арифметических операциях с компактными операторами. Предел компактных операторов. Компактность эрмитово-сопряжённого оператора

**Теорема 31.**

1.  $X, Y$  — банаховы пространства

$\text{Com}(X, Y)$  — замкнутое подпространство  $\mathcal{B}(X, Y)$

2.  $X, Y, Z$  — банаховы,  $X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{S} Z$

(a)  $T \in \text{Com}(X, Y)$ ,  $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$

$$ST \in \text{Com}(X, Z)$$

(b)  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ ,  $S \in \text{Com}(Y, Z)$

$$ST \in \text{Com}(X, Z)$$

**Доказательство.** Обозначим  $B = B_1^X(0)$ .

1. •  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $T \in \text{Com}(X, Y) \implies \alpha T \in \text{Com}(X, Y)$  — очевидно

- Возьмём  $T, S \in \text{Com}(X, Y)$ .

$T(B)$  относительно компактно  $\implies T(B)$  вполне ограничено. Возьмём  $\varepsilon > 0$  и рассмотрим  $\varepsilon$ -сети:

$$\exists E \subset Y \text{ — конечная } \varepsilon\text{-сеть для } T(B)$$

$\exists F \subset Y$  — конечная  $\varepsilon$ -сеть для  $S(B)$

$E + F = \{ e + f \mid e \in E, f \in F \}$  — конечное,  $2\varepsilon$ -сеть для  $T(B) + S(B) \implies$   
 $\implies T(B) + S(B)$  относительно компактно

$(T+S)(B) \subset T(B) + S(B) \implies (T+S)(B)$  относительно компактно  $\implies T+S \in \text{Com}(X, Y)$

- $\{ T_n \in \text{Com}(X, Y) \}_{n=1}^\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0$

Возьмём  $\varepsilon > 0$ .

$$\exists n \in \mathbb{N} : \quad \|T - T_n\| < \varepsilon$$

При этом,  $T_n(B)$  относительно компактно.

$\implies \exists E$  — конечная  $\varepsilon$ -сеть для  $T_n(B)$

Проверим, что  $E$  —  $\varepsilon$ -сеть для  $T(B)$ . Возьмём  $x \in B$ .

$$\exists e \in E : \quad \|T_n x - e\| < \varepsilon$$

$$\|Tx - e\| \stackrel{\Delta}{\leq} \|Tx - T_n x\| + \|T_n x - e\| \leq \underbrace{\|T - T_n\|}_{< \varepsilon} \cdot \underbrace{\|x\|}_{< 1} + \varepsilon < 2\varepsilon$$

Значит,  $T(B)$  вполне ограничено и относительно компактно.

2.  $X, Y, Z$

(a)  $T \in \text{Com}(X, Y)$

$T(B)$  относительно компактно,  $S \in \mathcal{B}(Y, Z)$

$\xRightarrow[\text{непр. } S]{\quad} S(T(B))$  относительно компактно  $\implies ST \in \text{Com}(X, Z)$

(b)  $T \in \mathcal{B}(X, Y)$

$\implies T(B)$  ограничено,  $S \in \text{Com}(X, Y)$

$\implies S(T(B))$  относительно компактно

□

**Следствие.**  $X$  — банахово

Тогда  $\text{Com}(X)$  — двусторонний замкнутый идеал алгебры  $\mathcal{B}(X)$ .

**TODO:** Предел компактных операторов

**Теорема 32.**  $H$  — гильбертово

$$T \in \text{Com}(H) \iff T^* \in \text{Com}(H)$$

( $T^*$  — эрмитово сопряжённый)

**Доказательство.**

- $T \in \text{Com}(H)$

Возьмём  $x \in H$ .

$$\|T^* x\|^2 = (T^* x, T^* x) = (TT^* x, x) \stackrel{\text{К-Б}}{\leq} \|TT^* x\| \cdot \|x\| \quad (5)$$

Возьмём  $\{x_n \in H\}_{n=1}^\infty$  такую, что

$$\exists M > 0 : \quad \|x_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Проверим, что  $\exists \{n_k\} : \exists \lim T^* x_{n_k}$ .

$$\left. \begin{array}{l} T \in \text{Com}(H) \\ T^* \in \mathcal{B}(H) \end{array} \right\} \Rightarrow TT^* \in \text{Com}(H) \Rightarrow \exists \{n_k\} : \exists \lim TT^* x_{n_k} \Rightarrow \\ \Rightarrow \{TT^* x_{n_k}\} \text{ фундаментальна}$$

$$\|T^* x_{n_k} - T^* x_{n_j}\|^2 = \|T^*(x_{n_k} - x_{n_j})\|^2 \stackrel{(5)}{\leq} \underbrace{\|(TT^*)(x_{n_k}) - TT^* x_{n_j}\|}_{\xrightarrow[k, j \rightarrow \infty]{} 0} \cdot \underbrace{\|x_{n_k} - x_{n_j}\|}_{\leq 2M} \Rightarrow \\ \Rightarrow \{T^* x_{n_k}\} \text{ фундаментальна} \Rightarrow \exists \lim T^* x_{n_k} \Rightarrow T^* \in \text{Com}(H)$$

$$\bullet T^* \in \text{Com}(H) \Rightarrow T = T^{**} \in \text{Com}(H)$$

□

**Замечание.**  $X, Y$  — банаховы

$$T \in \text{Com}(X, Y) \iff T^* \in \text{Com}(Y^*, X^*)$$

**Без доказательства.**

□

## 64. Конечность числа линейно-независимых собственных векторов компактного оператора, соответствующих собственным числам, модули которых равномерно отделены от нуля. Следствия

**Замечание** (вспоминания из алгебры).  $X$  — линейное пространство,  $T \in \mathcal{L}in(X)$ ,  $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$  — с. ч.,  $Tx_j = \lambda_j x_j$ ,  $\lambda_j \neq \lambda_k$ ,  $x_j$  — с. в. ( $x_j \neq 0$ )

$$\Rightarrow \{x_j\} \text{ ЛНЗ}$$

**Теорема 33.**  $X$  — банахово,  $T \in \text{Com}(X)$ ,  $\lambda \in \sigma_p(T)$  — с. ч.,  $X_\lambda = \text{Ker}(\lambda I - T)$  — собств. подпр-во,  $\delta > 0$

$$\sum_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T) \\ |\lambda| \geq \delta}} \dim(X_\lambda) < +\infty$$

То есть, число линейно-независимых собственных векторов  $T$ , соответствующих собственным числам  $\lambda$ , таких, что  $|\lambda| \geq \delta$ , конечно.

**Доказательство.** Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — ЛНЗ с. в.:

$$Tx_n = \lambda_n x_n, \quad |\lambda_n| \geq \delta$$

Рассмотрим последовательность подпространств:

$$L_n = \mathcal{L}\{x_j\}_{j=1}^n, \quad L_n \subsetneq L_{n+1}$$

$$\xRightarrow[\text{лемма Рисса}]{} \exists \{y_n\}_{n=1}^\infty : \|y_n\| = 1, \quad \rho(y_{n+1}, L_n) = \inf_{x \in L_n} \|y_{n+1} - x\| \geq \frac{1}{2}$$

(т. к.  $\dim L_n = n$ , то  $\exists y_{n+1} : \rho(y_{n+1}, L_n) = 1$ )

Проверим, что  $\|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{\delta}{2}$ . Тогда не будет существовать фундаментальной подпоследовательности  $\{Ty_n\}$ , а значит, и последовательности  $\{n_k\}$  такой, что  $\exists \lim Ty_{n_k} = \zeta$  с  $T \in \text{Com}(X)$ .



Пусть  $y_n \in L_n$ ,  $y_n \notin L_{n-1}$ . Тогда  $y_n = \alpha_n x_n + u_n$ ,  $\alpha_n \neq 0$ ,  $u_n \in L_{n-1}$ .

$$Tx_n = \lambda_n x_n \implies Ty_n = \alpha_n \lambda_n x_n + Tu_n = \lambda_n (\alpha_n x_n + u_n) - \underbrace{\lambda_n u_n + Tu_n}_{=: v_n \in L_{n-1}} = \lambda_n y_n + v_n$$

Пусть  $n > m$ .

$$Ty_m \in L_n \subset L_{n-1}$$

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|\lambda_n y_n + v_n - Ty_m\| = |\lambda_n| \left\| y_n - \underbrace{\frac{1}{\lambda_n}(-v_n + Ty_m)}_{\in L_{n-1}} \right\| \geq \frac{\delta}{2}$$

Значит, последовательность  $y_n$  не содержит фундаментальных подпоследовательностей.  $\square$

**Следствие.**  $T \in \text{Com}$

1.  $\delta > 0$

$$|\{ \lambda \in \sigma_p(T) \mid |\lambda| \geq \delta \}| < +\infty$$

2.  $\lambda \in \sigma_p(T)$ ,  $\lambda \neq 0$ ,  $X_\lambda = \text{Ker}(\lambda I - T)$

$$\dim X_\lambda < +\infty$$

3.  $N$  — число собственных чисел.

Тогда

(а)  $0 \leq N \leq +\infty$  (т. е.  $\sigma_p(T)$  не более, чем счётно);

(б) если  $N = +\infty$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ .

Их можно занумеровать в порядке убывания модулей.

**Доказательство.**

1. Очевидно.

2. Очевидно.

3.  $E_n := \{ \lambda \in \sigma_n(T) \mid |\lambda| \geq \frac{1}{n} \}$ ,  $|E_n| < +\infty$

$$\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \implies \sigma_p(T) \text{ не более, чем счётно}$$

$$\forall \delta > 0 \quad \{ \lambda \in \sigma_p(T) \mid |\lambda| > \delta \} \text{ конечно} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$$

$\square$

**Замечание.**  $0 \in \sigma_p(T) \iff \text{Ker } T \neq \{0\} \iff T \text{ не инъекция.}$

Если  $T \in \text{Com}(X)$ ,  $\dim X = +\infty$ , то  $0 \in \sigma(T)$ .

**Доказательство.**

$$0 \in \rho(T) \iff \exists V(0) = -T, \quad \exists T^{-1} \implies T(X) = X \xRightarrow[T \in \text{Com}(X)]{} \dim X < +\infty$$

$\square$

## 65. Условие разрешимости уравнения Фредгольма. Замкнутость образа оператора Фредгольма

Будем изучать гильбертовы пространства, так как там проще доказательства. Всё это верно и для банаховых пространств.

**Определение 18.**  $H$  — гильбертово,  $T \in \text{Com}(H)$ ,  $S = I - T$   
 $S$  будем называть *оператором Фредгольма*

**Определение 19.** Рассмотрим серию уравнений:

1. уравнение Фредгольма:  $Sx = a$ ;
2. однородное уравнение Фредгольма:  $Sx = 0$ ;
3. сопряжённое уравнение Фредгольма:  $S^*y = h$ ;
4. однородное сопряжённое уравнение Фредгольма:  $S^*y = 0$ .

$$\lambda \in \mathbb{C} \neq 0, \quad V(\lambda) = \lambda I - T = \lambda \left( I - \frac{1}{\lambda} T \right)$$

$$\frac{1}{\lambda} \in \text{Com}(H) \implies I - \frac{1}{\lambda} T \text{ — оператор Фредгольма}$$

Значит, свойства  $S$  можно будет распространить на  $V(\lambda)$ .

**Теорема 34.**  $H$  — гильбертово,  $T \in \text{Com}(H)$ ,  $S = I - T$

1.  $S(H)$  замкнуто;
2.  $S^*(H)$  замкнуто;
3.  $H = S(H) \oplus \text{Ker } S^*$ ;
4.  $H = S^*(H) \oplus \text{Ker}(S)$ .

**Замечание.** 3. и 4. эквивалентны тому, что

Уравнение  $Sx = a$  разрешимо **для тех и только тех**  $a$ , которые ортогональны решениям однородного сопряжённого уравнения Фредгольма  $S^*y = 0$ .

**Лемма 4** (об ограниченных прообразах). В условиях теоремы  $\{y_n \in S(H)\}_{n=1}^\infty$  ограничена

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^\infty : \{x_n\} \text{ ограничена, } Sx_n = y_n$$

**Доказательство.**  $M = \text{Ker } S$ ,  $L = M^\perp$ ,  $H = M \oplus L$

$$S(M) = 0 \implies S(H) = S(L)$$

$$y \in S(H) \implies \exists! x \in L : Sx = y$$

$$\forall y_n \quad \exists x_n \in L : Sx_n = y_n$$

Проверим, что  $\{x_n\}$  ограничена. Пусть это не так, т. е.

$$\exists \{n_k\}_{k=1}^\infty : \lim \|x_{n_k}\| = +\infty$$

НУО будем считать, что сама последовательность  $\{x_n\}$  обладает таким свойством:

$$\lim \|x_n\| = +\infty$$

Возьмём последовательность

$$\left\{ \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\}_{n=1}^\infty$$

$$T \in \text{Com}(H) \implies \exists \{n_k\} : \exists \lim T\left(\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\right) =: z_0$$

$$\begin{aligned}
y_{n_k} = S(x_{n_k}) = x_{n_k} - T(x_{n_k}) &\implies \underbrace{\frac{y_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}}_{\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0} = \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} - \underbrace{T\left(\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\right)}_{\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} z_0} \implies \\
&\implies \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} \right) = z_0 \xRightarrow[T \in \mathcal{B}(H)]{} \lim_{k \rightarrow \infty} T\left(\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\right) = T(z_0) \implies \\
&\implies z_0 = T(z_0) \implies S(z_0) = z_0 - Tz_0 = 0 \implies z_0 \in M = \text{Ker } S
\end{aligned}$$

$$\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} \in L - \text{замкнуто}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} = z_0 \implies z_0 \in L, \quad \|z_0\| = 1$$

При этом,  $z_0 \in L \cap M \implies z_0 = 0 - \nmid$ .

□

**Доказательство (теоремы).**

1. Докажем, что  $S(H)$  замкнуто. Возьмём  $\{y_n \in S(H)\}_{n=1}^\infty : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_0$ .

$$\exists \lim y_n \implies \{y_n\} \text{ ограничена} \xRightarrow[\text{лемма}]{} \exists \{x_n \in H\} : \{x_n\} \text{ ограничена}, \quad Sx_n = y_n$$

$$T \in \text{Com}(H) \implies \exists \{n_k\} : \lim_{k \rightarrow \infty} T_{x_{n_k}} = z_0$$

$$\underbrace{y_{n_k}}_{\rightarrow y_0} = S(x_{n_k}) = x_{n_k} - \underbrace{T x_{n_k}}_{\rightarrow z_0}$$

$$\implies \exists \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0 \xRightarrow[T \in \mathcal{B}(H)]{} \lim_{k \rightarrow \infty} T(x_{n_k}) = T x_0$$

$$\implies z_0 = T x_0 \implies y_0 = x_0 - T x_0 = S(x_0) \implies y_0 \in S(H)$$

2.  $S^* = I - T^*$ ,  $T^* \in \text{Com}(H) \implies S^*(H)$  замкнуто.

3.

$$\begin{aligned}
\forall A \in \mathcal{B}(H) \quad H &= \overline{A(H)} \oplus \text{Ker } A^* \\
S(H) &= \overline{S(H)} \implies H = S(H) \oplus \text{Ker } S^*
\end{aligned}$$

4. Аналогично.

□

**TODO:** Замкнутость образа оператора Фредгольма?

## 66. Альтернатива Фредгольма: инъективность оператора Фредгольма эквивалентна его сюръективности

**Теорема 35.**

$$\text{Ker } S = \{0\} \iff S(H) = H$$

**Другая формулировка.** Оператор  $S$  — инъекция тогда и только тогда, когда  $S$  — сюръекция. Из любого из этих выражений следует, что  $S$  — биекция.

**Другая формулировка.**

- **Либо** уравнение Фредгольма разрешимо для любой правой части и решение единственно.
- **Либо** существует ненулевое решение уравнения Фредгольма.

**Лемма 5 (о стабилизации).**  $k \geq 0, \quad H_{k+1} := S(H_k)$

$$\exists n \geq 0 : \quad H_n = H_{n+1}$$

**Доказательство.** Допустим, что  $H_{k+1} \subseteq H_k$ .

$$\Rightarrow H_k = H_{k+1} \oplus \underbrace{H_{k+1}^\perp}_{\text{ортогональное дополнение в } H_k}$$

$$\Rightarrow \exists x_k \in H_k : \|x_k\| = 1, \quad x_k \perp H_{k+1}$$

Пусть  $n > m$ . Хотим оценить разность  $\|Tx_n - Tx_m\|$ .

$$Sx_n - Sx_m = x_n - Tx_n - x_m + Tx_m$$

$$Sx_n = x_n - Tx_n$$

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|x_n - Sx_n - x_m + Sx_m\| \geq 1$$

$$Sx_n \in H_{n+1}, \quad Sx_m \in H_{m+1}$$

$$x_n, Sx_n, Sx_m \in H_{m+1} \Rightarrow x_m \perp H_{m+1}$$

Значит, не существует  $\{Tx_{n_k}\} : \exists \lim Tx_{n_k}, \quad T \in \text{Com}(H) - \nexists$ . □

**Доказательство (теоремы).**

•  $\Rightarrow$

$\text{Ker } S = \{0\}$ , т. е.  $S$  — инъекция.

Докажем, что  $S(H) = H$ . Пусть  $S(H) \subsetneq H$ , т. е.  $\exists x \in H : x \notin S(H)$ .

Подействуем на  $x$  оператором  $S$ :

$$Sx \in S(H), \quad S(Sx) \notin S(H)$$

(т. к. прообраз у элемента ровно один, и это —  $Sx$ )

$$\Rightarrow Sx \in S(H) \setminus S^2(H)$$

И так далее для любого  $n$ :

$$S^n x \in S^n(H) \setminus S^{(n+1)}(H)$$

Это **противоречит** лемме.

•  $\Leftarrow$

$$\left. \begin{array}{l} S(H) = H \\ H = S(H) \oplus \text{Ker } S^* \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Ker } S^* = \{0\} \xrightarrow[S^* = I - T^*]{\quad \quad \quad}$$

$$\Rightarrow S^* \text{ — оператор Фредгольма} \xrightarrow[\text{только что доказано}]{\quad \quad \quad} S^*(H) = H$$

$$H = S^*(H) \oplus \text{Ker } S \Rightarrow \text{Ker } S = \{0\}$$

□

## 67. Теорема о числе линейно-независимых решений однородного уравнения Фредгольма. Следствие о спектре компактного оператора

**Теорема 36.**  $S = I - T, \quad T \in \text{Com}(H)$

$$\dim \text{Ker } S = \dim \text{Ker } S^* < +\infty$$

**Другая формулировка.** Однородные уравнения Фредгольма  $Sx = 0$  и  $S^*y = 0$  имеют одно и то же, и при том конечное, число ЛНЗ решений.

**Доказательство.** Пусть  $\dim \text{Ker } S = n < +\infty$  (уже доказано для банахова пространства).

$$\dim \text{Ker } S^* =: m < +\infty$$

Пусть  $n < m$ .

Выберем в этих пространствах ОНБ:

$$\{e_i\}_{i=1}^n - \text{ОНБ } \text{Ker } S, \quad \{f_j\}_{j=1}^m - \text{ОНБ } \text{Ker } S^*$$

Определим  $V : H \rightarrow \text{Ker } S^*$ :

$$x \in H \quad Vx = \sum_{k=1}^n (x, e_k) f_k$$

$$V(H) \subset \text{Ker } S^* \implies \dim(V(H)) < +\infty \implies V - \text{конечного ранга} \implies V \in \text{Com}(H)$$

$$U := S + V = I - \underbrace{(T - V)}_{\in \text{Com}(H)} \implies U - \text{оператор Фредгольма}$$

Для  $U$  верна теор. 35. Проверим, что  $\text{Ker } U = \{0\}$ . Пусть  $x \in \text{Ker } U$ .

$$Ux = 0 \implies Sx + Vx = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} Sx \in S(H) \\ Vx \in \text{Ker } S^* \end{array} \right\} \xrightarrow{S(H) \perp \text{Ker } S^*} Sx \perp Vx \implies \begin{cases} Sx = 0 \\ Vx = 0 \end{cases}$$

$$Vx = \sum_{k=1}^n (x, e_k) f_k = 0 \implies (x, e_k) = 0 \quad \forall k \implies x \perp \text{Ker } S \xrightarrow{x \in \text{Ker } S} x = 0$$

По 35  $U(H) = H$ . Проверим, что это невозможно для  $n + 1$ , т. е. что

$$f_{n+1} \notin U(H)$$

Возьмём  $x \in H$ .

$$Ux = Sx + Vx$$

$$f_{n+1} \in \text{Ker } S^* \implies f_{n+1} \perp S(H) \implies f_{n+1} \perp Sx$$

$$Vx = \sum (x, e_k) f_k \xrightarrow{f_{n+1} \perp f_k} f_{n+1} \perp Vx \implies f_{n+1} \in (U(H))^\perp = \{0\} - \nexists$$

Тем самым, мы доказали, что

$$\dim \text{Ker } S \geq \dim \text{Ker } S^* \geq \dim \text{Ker } S^{**} = \dim \text{Ker } S$$

□

**Следствие.**  $T \in \text{Com}(T)$

$$1. \lambda \notin 0, \quad \lambda \in \sigma(T)$$

$$\lambda \in \sigma_p(T)$$

$$2. \lambda \in \sigma_p(T), \quad H_\lambda = \text{Ker}(\lambda I - T), \quad Y_{\bar{\lambda}} = \text{Ker}(\bar{\lambda} I - T^*)$$

$$\dim H_\lambda = \dim Y_{\bar{\lambda}} < +\infty$$

3.

$$\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n\}_{n=1}^N$$

При этом, если  $N = +\infty$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$$

## 68. Простейшие свойства самосопряжённого оператора

**Свойства.**  $H$  — гильбертово,  $T \in \mathcal{B}(H)$ ,  $T = T^*$  (т. е.  $(Tx, y) = (x, Ty)$ )

1.  $(Tx, x) \in \mathbb{R} \quad \forall x$ ;
2.  $\lambda \in \sigma_p(T) \implies \lambda \in \mathbb{R}$ ;
3.  $\lambda, \mu \in \sigma_p(T), \quad Tu = \lambda u, \quad Tv = \mu v$   
 $u \perp v$
4.  $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)|$ ;

**Доказательство.**

1.

$$\left. \begin{aligned} (Tx, x) &= \overline{(x, Tx)} \\ (Tx, x) &= (x, Tx) \end{aligned} \right\} \implies (x, Tx) \in \mathbb{R}$$

2.

$$\lambda \in \sigma_p(T) \implies \exists u \neq 0$$

$$Tu = \lambda u \implies (Tu, u) = (\lambda u, u) \implies \lambda = \frac{(Tu, u)}{\|u\|^2} \in \mathbb{R}$$

3.  $Tu = \lambda u, \quad Tv = \mu v, \quad \lambda \neq \mu, \quad u, v \neq 0$

$$\left. \begin{aligned} (Tu, v) &= (\lambda u, v) = \lambda(u, v) \\ (Tu, v) &= (u, Tv) = (u, \mu v) \stackrel{\mu \in \mathbb{R}}{=} \mu(u, v) \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{вычитаем}} \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0}(u, v) = 0 \implies u \perp v$$

4.  $Q = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)|$

• Пусть  $x \in H, \quad \|x\| = 1$ .

$$|(Tx, x)| \stackrel{\text{К-Б}}{\leq} \|Tx\| \cdot \|x\| \leq \|T\| \cdot \underbrace{\|x\| \cdot \|x\|}_{=1} = \|T\| \quad \forall x: \|x\| = 1$$

$$\implies Q = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)| \leq \|T\|$$

• Пусть  $u \in H, \quad u \neq 0$ .

$$\left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| = 1 \implies \left| \left( T \left( \frac{u}{\|u\|} \right), \frac{u}{\|u\|} \right) \right| \leq Q \implies |(Tu, u)| \leq Q \|u\|^2 \quad \forall u \in H \quad (6)$$

Возьмём  $x, y \in H$ . Применим (6) к  $(x + y)$  и к  $(x - y)$ :

$$\begin{aligned} (T(x + y), x + y) &= (Tx, x) + (Tx, y) + (Ty, x) + (Ty, y) \leq Q \|x + y\|^2 \\ -(T(x - y), x - y) &= -((Tx, x) - (Tx, y) - (Ty, x) + (Ty, y)) \leq Q \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

Сложим эти два неравенства:

$$2((Tx, y) + (Ty, x)) \leq Q(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2)$$

К правой части применим тождество параллелограмма, а левую преобразуем:

$$\begin{aligned} (Tx, y) + (Ty, x) &= (Tx, y) + (y, Tx) = (Tx, y) + \overline{(Tx, y)} = 2\Re(Tx, y) \implies \\ &\implies 4\Re(Tx, y) \leq Q \cdot 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{aligned}$$

Выберем  $x : \|x\| = 1$  такой, что  $Tx \neq 0$ .

$$y := \frac{Tx}{\|Tx\|} \implies \|y\| = 1$$

Подставим  $x, y$  в неравенство:

$$4\Re\left(Tx, \frac{Tx}{\|Tx\|}\right) \leq 4Q \implies \|Tx\| \leq Q \quad \forall x : \|x\| = 1 \implies \|T\| \leq Q$$

□

## 69. Существование собственного числа, модуль которого равен норме компактного самосопряжённого оператора

**Определение 20.**  $T = T^*$

$$M := \sup_{\|x\|=1} (Tx, x), \quad m := \inf_{\|x\|=1} (Tx, x)$$

$m$  и  $M$  называются *границами* оператора  $T$ .

**Замечание.**

$$\|T\| = \max\{|M|, |m|\}$$

**Теорема 37.**  $H$  — гильбертово,  $T = T^*$ ,  $T \in \text{Com}(H)$

$$\exists \lambda \in \sigma_p(T) : |\lambda| = \|T\|$$

**Доказательство.**  $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)|$

- $\|T\| = |M|$

$$M = \sup_{\|x\|=1} (Tx, x) \implies \exists \{x_n\}_{n=1}^\infty : \|x_n\| = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (Tx_n, x_n) = M$$

$$\left. \begin{array}{l} m \leq M \\ \max\{|M|, |m|\} = |M| \end{array} \right\} \implies M > 0$$

$$T \in \text{Com}(H) \implies \exists \{n_k\}_{k=1}^\infty : \exists \lim_{k \rightarrow \infty} Tx_{n_k} = y$$

Переименуем:  $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = y$ . Проверим, что  $y$  — с. в.  $T$  и  $Ty = My$ .

$$\begin{aligned} 0 \leq \|Tx_n - M \cdot x_n\|^2 &= (Tx_n - Mx_n, Tx_n - Mx_n) = \\ &= \|Tx_n\|^2 - \underbrace{M(Tx_n, x_n)}_{\rightarrow M} - \underbrace{M(x_n, Tx_n)}_{\rightarrow M} + M^2 \underbrace{\|x_n\|^2}_{=1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|y\|^2 - M^2 \implies \|y\| \geq M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|y\| &= \lim \|Tx_n\| \leq \|T\| \cdot \|x_n\| = \|T\| = M \implies \|y\| \leq M \\ &\implies \lim M \cdot x_n = \lim Tx_n = y \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что  $T$  непрерывен:

$$M \cdot \lim x_n = y \implies M \underbrace{\lim Tx_n}_{=y} = Ty \implies Ty = My, \implies M \in \sigma_p(T), \quad M = \|T\|$$

- $\|T\| = |m|$  **TODO:** дописать этот случай

□

**70. Теорема Гильберта—Шмидта о представлении компактного самосопряжённого оператора в виде суммы ортогональных проекторов**

**TODO:** Теорема Гильберта—Шмидта о представлении компактного самосопряжённого оператора

**71. Теорема Гильберта—Шмидта о существовании ОНБ из собственных векторов компактного самосопряжённого оператора**

**TODO:** Теорема Гильберта—Шмидта о существовании ОНБ

**72. Компактность интегрального оператора с ядром из  $L^2$**

**TODO:** Компактность интегрального оператора