Оглавление

Глава 1

ТФКП

1.1. Доказываем теорему о разложении в ряд Лорана

Доказательство.

$$f \in \mathcal{A}\Big(D_{r,R}(a)\Big), \qquad r_1 < r_2 < R_2 < R_1, \qquad r < r_1 < R_1 < R$$

Введём $S_\rho = \{\, z \mid |\, z - a| = \rho \,\}$.

- Пусть $z \in \overline{D}_{r,R}(a)$.
  Возьмём $\varepsilon < \min\{\, r_2 - r_1, R_1 - R_2 \,\}$.
  Обозначим $\sigma_\varepsilon = \{\, \zeta \mid |\, \zeta - z| = \varepsilon \,\}$.
  Рассмотрим функцию

$$\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \qquad \varphi \in \mathcal{A}\Big(D_{r,R}(a) \setminus \{\, z \,\}\Big)$$

$$G_\varepsilon = D_{r_1,R_1}(a) \setminus \{\, \zeta \mid |\, \zeta - z| \le \varepsilon \,\}$$

$$\int\limits_{\circlearrowleft\, \partial\, G_\varepsilon} \varphi(\zeta)\, \mathrm{d}\,\zeta = 0 \tag{1.1}$$

$$(1.1) \iff \int\limits_{S_{R_1}} \varphi(\zeta)\, \mathrm{d}\,\zeta - \int\limits_{S_{r_1}} \varphi(\zeta)\, \mathrm{d}\,\zeta - \int\limits_{\sigma_\varepsilon} \varphi(\zeta)\, \mathrm{d}\,\zeta = 0$$

$$\implies \frac{1}{2\pi i} = \int\limits_{\sigma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta = \int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta - \int\limits_{S_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta \tag{1.2}$$

$$\{\, \zeta \mid |\, \zeta - z| \le \varepsilon \,\} \subset D_{r,R}(a)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta = f(z) \tag{1.3}$$

$$(1.2), (1.3) \implies f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}}$$

  Обозначим $q_1(z, \zeta) = \frac{z-a}{\zeta-a}$.

$$|q_1(z, \zeta)| \le \frac{R_2}{R_1} = Q_1 < 1 \tag{1.5}$$

$$\implies \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}\,\mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n\mathrm{d}\,\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}(z-a)^n\int\limits_{S_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a}^{n+1})\,\mathrm{d}\,\zeta \qquad (1.6)$$

Обозначим $c_n(R_1) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta$.

$$(1.6) \implies \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = c_0(R_1) + \sum_{n=1}^{\infty}c_n(R_1)(z-a)^n$$

- Пусть z лежит на окружности.

$$-\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)} = -\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{\frac{\zeta-a}{z-a}-1} = \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta-a}{z-a}} \qquad (1.7)$$

$$c_{-n-1}(r_1) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{r_1}} f(\zeta)(\zeta-a)^n\,\mathrm{d}\,\zeta \qquad (1.8)$$

$$\implies -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{r_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\,\zeta = \sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(r_1)(z-a)^{-n}$$

Воспользуемся леммой:

$$\iff -\int\limits_{S_{\rho_1}}\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta + \int\limits_{S_{\rho_2}}\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta = 0 \iff \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{\rho_0}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,\zeta \overset{\text{def}}{=} c_n \qquad (1.9)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{r_1}} f(\zeta)(\zeta-a)^n\,\mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{\rho_0}} f(\zeta)(\zeta-a)^n\,\mathrm{d}\,\zeta \overset{\text{def}}{=} c_{-n-1} \qquad (1.10)$$

$$(1.4), (1.9), (1.10) \implies f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-a)^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

□

Лемма 1. $r < \rho_1 < \rho_2 < R, \qquad m \in \mathbb{Z}$

$$\implies \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{\rho_1}} f(\zeta)(\zeta-a)^m\,\mathrm{d}\,\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_{\rho_2}} f(\zeta)(\zeta-a)^m\,\mathrm{d}\,\zeta \qquad (1.11)$$

Доказательство. Возьмём $\varphi(\zeta) = f(\zeta)(\zeta-a)^m \quad \in \mathcal{A}\big(D_{r,R}(a)\big)$

По теореме Коши,

$$\int\limits_{\partial D_{\rho_1,\rho_2}(a)}\varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta = 0$$

□

1.2. Особые точки аналитических функций

Определение 1. $f \in \mathcal{A}(D_{0,R}(a))$
Говорят, что a — *особая точка* функции f.

Замечание. Это — проколотая окрестность. Все же помнят, что в определении кольца неравенства строгие?

1.2.1. Классификация особых точек

Доказано, что

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{1.12}$$

Говорят, что

1. a — устранимая особая точка, если $c_{-n} = 0 \quad \forall n \geq 1$;
2. функция f имеет в a *полюс*, если
$$\exists\, n_0 \geq 1: \quad c_{-n_0} \neq 0, \quad c_n = 0 \quad \forall n > n_0$$
3. функция f имеет ..., если
$$\exists\, \{\, n_k \,\}_{:=1}^{\infty} \quad c_{-n_k} \neq 0$$

1.2.2. Характеристика устранимой особой точки

Теорема 1. Чтобы точка a была устранимой особой точкой, **необхдимо и достаточно**, чтобы

$$\exists\, 0 < r < R, \quad \exists\, M: \quad |f(z)| \leq M \quad \forall z \in D_{0,r}(a) \tag{1.13}$$

Доказательство.

1. Необходимость
Из условия на устранимую особую точку и (1.12) следует, что
$$f(z) \in \ldots$$
(по последней теореме предыдущего семетра)
2. Достаточность
Возьмём $0 < \varepsilon < r$ и $\varepsilon < |z-a| < r$.
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta$$
$$\left| -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S_\varepsilon} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|}\, |\mathrm{d}\,\zeta| \tag{1.14}$$
$$|\zeta - z| \geq |z-a| - |\zeta - a| = |z-a| - \varepsilon \geq \frac{1}{2}|z-a| \tag{1.15}$$
$$(1.13), (1.14), (1.15) \implies \Big| \tag{1.16}$$
$$(1.14), (1.16) \implies f(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_r} \frac{f(\varepsilon)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\,\zeta \right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\, \mathrm{d}\,\zeta = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

$\square$

1.2.3. Характеристика полюса

Теорема 2. Для того, чтобы a была полюсом **необходимо и достаточно**, чтобы

$$|f(z)| \xrightarrow[z\to a]{} +\infty \tag{1.17}$$

Доказательство.

1. Достаточность

$$f(z) = \sum_{n=1}^{n_0} c_{-n}(z-a)^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(z-a)^n \tag{1.18}$$

$$\Longrightarrow f(z) = (z-a)^{-n_0}\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{n_0-n} + c_0(z-a)^{n_0} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^{n+n_0}\right) = (z-a)^{-n_0}\Big(c_{-n_0} + c_{-n_0+1}(z-a) + \dots\Big)$$

$$\exists\,\delta_0 > 0 : \quad |c_{-n_0} + c_{-n_0+1}(z-a) + \dots| \geq \frac{1}{2}|c_{-n_0}| \quad \text{при } |z-a| < \delta_0 \tag{1.19}$$

$$\Longrightarrow |f(z)| \geq |z-a|^{-n_0} \cdot \frac{|c-n_0|}{2} \xrightarrow[z\to a]{} +\infty$$

2. Необходимость

$$(1.17) \implies \exists\,\delta_1 : \quad |f(z)| > 1 \quad \text{при } |z-a| < \delta_1$$

$$\Longrightarrow f(z) \neq 0 \quad \text{при } z \in D_{0,\delta_1}(a) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(z) := \frac{1}{f(z)} \in \mathcal{A}\big(D_{0,\delta_1}(a)\big)$$

$$\varphi(z) \not\equiv 0$$

$$(1.17) \implies |\varphi(z)| \xrightarrow[z\to 0]{} 0$$

$$|\varphi(z)| < 1$$

$$\Longrightarrow \varphi \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_{\delta_1}(a)\big)$$

$$\Longrightarrow \varphi(a) = 0$$

$$\Longrightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \exists\, h \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_{\delta_1}(a)\big) : \quad \psi(z) = (z-a)^{n_0}h(z), \quad h(z) \neq 0, \quad z \in \mathtt{B}_{\delta_2}(a)$$

$$\Longrightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^{n_0}} \cdot \frac{1}{h(z)}$$

$$\Longrightarrow g(z) = \frac{1}{h(z)} \in \mathcal{A}\big(\mathtt{B}_{\delta_2}(a)\big)$$

$$\Longrightarrow g(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(a-a)^2 + \dots$$

$$\Longrightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^{n_0}}\Big(c_0 + c_1(z-a) + \dots\Big) = c_0(z-a)^{-n_0} + c_1(z-a)^{-n_0+1} + \dots$$

□