Оглавление

Глава 1

Линейные пространства

1.1. Гильбертовы и предгильбертовы пространства

Примеры.

1. $l_n^2 = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$

$$(x,y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y}_j$$

$$\|x\|^2 = (x,x) = \sum |x_j|^2$$

l_n^2 — полное $\implies$ l_n^2 — гильбертово.

2. $l^2 = \left\{ x = \{ x_j \}_{j=1}^{\infty} \;\middle|\; \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2} \right\}$

$$(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y}_j$$

l^2 — полное $\implies$ l^2 — гильбертово (с нормой, порождённой скалярным произведением)

3. F — финитные последовательности

$$(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y}_j$$

(на самом деле, число слагаемых конечно)

$$\|x\|^2 = \sum |x_j|^2$$

F не полно $\implies$ F — предгильбертово. l^2 — пополнение $(F, \|\cdot\|_2)$ до гильбертова.

4. $(T, \mathcal{U}, \mu)$, $\quad L^2(T,\mu)$ — гильбертово пространство.

$$(f,g) = \int\limits_T f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\,\mu$$

$$\|f\|^2 = (f,f)$$

5. $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}[a,b]$, $\quad f : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$(f,g) = \sum_{a}^{b} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}\,x$$

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}\,x \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\big(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_2\big)$ не полно $\implies$ оно предгильбертово. Его пополнение до гильбертова — $L^2([a,b],\lambda)$.

6. $\mathscr{P} = \left\{\, p(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n x^n \,\right\}$

   - $\mathscr{P} \subset \mathcal{C}[a,b]$

   $$(p,q) = \int_a^b p(x)\overline{q(x)}\,\mathrm{d}\,x$$

   Такое пространство предгильбертово. Пополнение — $(L^2[a,b],\lambda)$.

   - $\mathscr{P} \subset F$

   $$(p,q) = \sum_{n=0}^{N} a_n \overline{b_n}$$

   Предгильбертово пространство. Пополнение — l^2.

7. $H^2 = \left\{\, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \;\middle|\; \{\, a_n \,\}_{n=0}^{\infty} \in l^2 \,\right\}$ — *пространство Харди*

$$(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}, \qquad \|f\|_{H^2} = \|\{\, a_n \,\}\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

H^2 — гильбертово.

$$\{\, a_n \,\}_{n=0}^{\infty} \in l^2 = \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \implies \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le 1$$

Радиус сходимости $R = \frac{1}{\varlimsup \sqrt[n]{|a_n|}} \ge 1 \implies f$ аналитична в $\{\, z \mid \ |z| < 1 \,\}$.

Определение 1. H — предгильбертово, $\quad x, y \in H$
Будем говорить, что x *ортогонально* y $(x \perp y)$, если $(x,y) = 0$.

Определение 2. $M \subset H$

$$M^{\perp} = \{\, y \in H \mid x \perp y \quad \forall x \in M \,\}$$

Если M — подпространство, то $M^{\perp}$ называется *ортогональным дополнением*.

Утверждение 1. $M \subset H$ (подмножество)
$m^{\perp}$ — замкнутое подпространство H.

Доказательство.

- Подпространство

  Возьмём $y, z \in M^{\perp}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\forall x \in M \qquad \left.\begin{aligned} (y,x) &= 0 \\ z(x) &= 0 \end{aligned}\right\} \implies (\alpha y + \beta z, x) = \alpha(y,x) + \beta(z,x) = 0 \implies \alpha y + \beta z \in M^{\perp}$$

- Замкнутость

  Возьмём $\left\{\, y_n \in M^{\perp} \,\right\}_{n=1}^{\infty}; \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$. Возьмём $x \in M$.

$$(y_n, x) = 0$$

$$\lim (y_n, x) = (y_0, x) \implies (y_0, x) = 0 \implies y_0 \in M^{\perp}$$

$\square$

1.1.1. Существование элемента наилучшего приближения в замкнутом подпространстве гильбертова пространства

Лемма 1. M — замкнутое подпространство $H, \quad u, v \in M, \quad x \in H \setminus M, \quad d = \rho(x, M) = \inf_{z\in M} \|x - z\|$

$$\|u - v\|^2 \le 2\big(\|u - x\|^2 + \|v - x\|^2\big) - 4d^2$$

Доказательство. Воспользуемся тождеством параллелограмма для $(u-x),\ (v-x)$.

$$2\big(\|u-x\|^2+\|v-x\|^2\big)=\|u-v\|^2+\|u+v-2x\|^2$$

$$\|u+v-2x\|=2\left\|x-\frac{u+v}{2}\right\|$$

$$u,v\in M\implies\frac{u+v}{2}\in M\implies\left\|x-\frac{u+v}{2}\right\|\geq d\implies\|u+v-2x\|^2\geq 4d^2$$

$$\|u-v\|^2\leq\big(\|u-x\|^2+\|v-x\|^2\big)^2-4d^2$$

□

Теорема 1. H — гильбертово, M — замкнутое подпространство, $x\in H$

$$\exists!y\in M:\quad \rho(x,M)=\|x-y\|,$$

т. е. y — элемент наилучшего приближения для H.

Доказательство.

- Существование

  $x\in H,\quad M,\quad d=\rho(x,M)$

  $$\exists\,\{\,y_n\in M\,\}_{n=1}^{\infty}:\quad\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\|=d$$

  Проверим, что $\{\,y_n\,\}$ фундаментальна. Применим лемму.

  $$\|y_n-y_m\|^2\leq 2\big(\underbrace{\|y_n-x\|^2}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}d^2}+\underbrace{\|y_m-x\|^2}_{\xrightarrow[m\to\infty]{}d^2}\big)-4d^2\xrightarrow[n,m\to\infty]{}0$$

  $\implies\ \{\,y_n\,\}$ фундаментальна, M замкнуто $\implies$ M полно $\implies$ $\exists y\in M:\quad\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y\implies$ $\underbrace{\lim\|x-y_n\|}_{d}=\|x-y\|\implies\|x-y\|=d$

- Единственность

  Пусть $\|x-y\|=d,\quad\|x-z\|=d$. По лемме

  $$\|y-z\|^2=2\big(\|y-x\|^2+\|z-x\|^2\big)-4d^2=0\implies y=z$$

□

1.1.2. Разложение элемента гильбертова пространства в сумму ортогональных элементов

Теорема 2. H — гильбертово, $M\subset H$, M — замкнутое подпространство, $x\in H$

$$\exists!y\in M,\ z\in M^{\perp}:\quad x=y+z$$

Доказательство.

- Существование

  $d=\rho(x,M)$

  По предыдущей теореме

  $$\exists!y\in M:\quad\|x-y\|=d=\inf_{u\in M}\|x-u\|$$

  $$z:=x-y$$

Проверим, что $z \perp M$. Возьмём $u \neq 0 \in M$.

$$\{\, tu \,\}_{t\in\mathbb{R}} \subset M \implies y + tu \in M \quad \forall t \in \mathbb{R} \implies \|x - (y+tu)\|^2 \geq d^2 \iff \|z - tu\|^2 \geq d^2$$

Докажем, что это возможно только при $z \perp u$:

$$(z - tu, z - tu) = \|z\|^2 + t^2\|u\|^2 - t\big((u,z) + (z,u)\big) = \underbrace{\|z\|^2}_{d^2} + t^2\|u\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}(z,u) \geq d^2$$

$$\implies t^2\|u\|^2 \geq 2t\,\mathrm{Re}(z,u) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

– $t > 0$

$$t\|u\|^2 \geq 2\,\mathrm{Re}(z,u) \quad \forall t > 0 \implies 0 \geq \mathrm{Re}(z,u)$$

– $t < 0$

$$t\|u\|^2 \leq 2\,\mathrm{Re}(z,u) \quad \forall t < 0 \implies 0 \leq \mathrm{Re}(z,u)$$

$$\implies \mathrm{Re}(z,u) = 0$$

Аналогично для мнимой части получаем

$$\mathrm{Im}(z,u) = 0$$

- Единственность

$$x = y + z,\ \ x = y_1 + z_1, \quad y, y_1 \in M,\ \ z, z_1 \in M^\perp$$

$$u = y - y_1 \implies u = z_1 - z$$

$$\implies u \in M \text{ и } u \in M^\perp — \lightning \quad \implies u = 0$$

□

Определение 3. H — гильбертово пространство, $\quad X, Y$ — замкнутые подпространства
Будем говорить, что H — *ортогональная сумма* ($H = X \oplus Y$), если

1. $\forall h \in H \quad \exists x \in X,\ y \in Y: \quad h = x + y$;
2. $\forall x \in X,\ y \in Y \quad (x, y) = 0$.

Утверждение 2. Если $X \perp Y$, $\quad X, Y$ — подпространства, то $X \cap Y = \{\, 0 \,\}$

Доказательство. Пусть $u \in X \cap Y \implies u \in X,\ u \in Y \implies u \perp u \implies u = 0$. □

Замечание. Если $H = X \oplus Y$, то

$$\forall h \in H \quad \exists! x \in X,\ y \in Y: \quad h = x + y$$

Доказательство. Пусть $h = x + y,\ h = x_1 + y_1$.

$$u = x - x_1 \implies u \in X,\ u \in Y \implies u = 0$$

□

Следствие. H — гильбертово, $\quad M$ — замкнутое подпространство H

$$H = M \oplus M^\perp$$

Следствие. $(M^\perp)^\perp = M$

Следствие. Если $H = X \oplus Y$, $\quad X, Y$ — замкнутые, то $Y = X^\perp$.

Определение 4. H — гильбертово, $\quad M$ — замкнутое подпространство

$$\forall h \in H \quad \exists! x \in M,\ y \in M^{\perp}: \quad h = x + y$$

Определим *оператор ортогонального проектирования*:

$$\underset{M}{P} h := x$$

(x — элемент наилучшего приближения для h в M).

$$\underset{M^{\perp}}{P} h = y$$