

Оглавление

Глава 1

Пространства

1.1. Пространства с sup-нормой

1.1.1. Пространство непрерывных функций на компакте

Определение 1. K — топологический компакт, если:

1. $\forall \{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$, G_α открыты, такие, что $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ $\exists \{\alpha_j\}_{j=1}^n$ такие, что $K \subset \bigcup_{j=1}^n G_{\alpha_j}$;
2. Хаусдорфовость: $\forall a \neq b \in K$ $\exists U, V$ — открытые: $a \in U$, $b \in V$: $U \cap V = \emptyset$.

Определение 2. K — топологический компакт.

Введём пространство непрерывных функций на компакте:

$$\mathcal{C}(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{C} \text{ (или } \mathbb{R}) \text{ — непрерывны}\}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)| = \max_{x \in K} |f(x)|$$

Утверждение 1. $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ — банахово.

Доказательство. $m(K)$ — пространство ограниченных функций с такой же нормой. Уже доказано, что оно банахово.

Линейная комбинация линейных функций линейна, поэтому $C(K)$ — подпространство в алгебраическом смысле. Осталось проверить замкнутость.

Возьмём $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, $f_n \in C(K)$, $f \in m(K)$ такие, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ в $C(K)$.

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0 \iff f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{K} f \implies f \in C(K) \implies C(K) \text{ замкнуто}$$

□

1.1.2. Пространство непрерывных производных

Определение 3. $n \in \mathbb{N}$ — фиксировано.

Рассмотрим пространство непрерывных производных:

$$\mathcal{C}^{(n)}[a, b] = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C}), \quad \exists f^{(n)} \in \mathcal{C}[a, b] \right\}$$

$$\|f\|_{C^{(n)}} := \max_{0 \leq k \leq n} \|f^{(k)}\|_\infty, \quad f := f^{(0)}$$

Утверждение 2. $(\mathcal{C}[a, b]^{(n)}, \|\cdot\|_{C^{(n)}})$ — банахово.

Утверждение 3. Пусть $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ фундаментальна в $C^{(n)}[a, b]$. Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall m, p > N \quad \|f_m - f_p\|_{C^{(n)}} < \varepsilon$$

$$\implies \forall 0 \leq k \leq n \quad \|f_m^{(k)} - f_p^{(k)}\|_{\infty} < \varepsilon$$

Рассмотрим $\left\{f_m^{(k)}\right\}_{m=1}^{\infty}$, $f_m^{(k)} \in \mathcal{C}[a, b]$.
 $\mathcal{C}[a, b]$ — банахово $\implies \varphi_k \in \mathcal{C}[a, b]$.

$$\lim \|f^{(k)} - \varphi_k\|_{\infty} = 0, \quad 0 \leq k \leq n \implies \begin{cases} f_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{[a, b]} \varphi_0, \\ f'_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{[a, b]} \varphi_1 \\ \dots \\ f_m^{(n)} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{[a, b]} \varphi_n \end{cases} \xrightarrow{\text{в анализе доказано}} \begin{cases} \varphi_1 = \varphi'_0 \\ \varphi_2 = \varphi'_1 = \varphi''_0 \\ \dots \\ \varphi_n = \varphi_0^{(n)} \end{cases}$$

$$\|f_m - \varphi_0\|_{C^{(n)}} = \max_{0 \leq k \leq n} \|f_m^{(k)} - \varphi_0^{(k)}\|_{\infty} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = \varphi_0 \text{ в } \mathcal{C}^{(n)}[a, b].$$

1.2. Пространства Лебега

1.2.1. Экскурс в теорию меры

Определение 4 (пространство с мерой). (T, \mathcal{U}, μ) , T — множество, \mathcal{U} — σ -алгебра, то есть

1. $\emptyset \in \mathcal{U}$;
2. $A \in \mathcal{U} \implies T \setminus A \in \mathcal{U}$;
3. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A_n \in \mathcal{U}$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \implies A \in \mathcal{U}$.

$\mu : \mathcal{U} \rightarrow [0, +\infty]$ — мера, то есть

1. $\mu\emptyset = 0$;
2. $A_n \in \mathcal{U}$, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A_n \cap A_m = \emptyset \implies \mu A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$.

Будем также предполагать, что верны следующие предположения:

1. μ — полная, то есть если $A \in \mathcal{U}$ и $\mu A = 0$, $B \subset A$, то $B \in \mathcal{U}$. Отсюда сразу следует, что $\mu B = 0$.
2. μ — σ -конечна, то есть $T = \bigcup_{j=1}^{\infty} T_j$, где $\mu(T_j) < +\infty$.

Определение 5. $A \in \mathcal{U}$, $f : A \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$

f — измеримая, если

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad \{x \mid c < f(x) \leq +\infty\} = f^{-1}(c, +\infty] \in \mathcal{U}$$

Определение 6. $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$, $u, v : A \rightarrow \mathbb{R}$

f измерима, если u и v измеримы.

Определение 7 (интеграл от измеримой функции по мере μ).

- $A \in \mathcal{U}$

Определим характеристическую функцию: $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

Введём множество простых функций:

$$S = \left\{ g(x) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad A_k \cap A_j = \emptyset \right\}$$

Для $g(x) \in S$

$$\int_T g(x) d\mu := \sum_{k=1}^n c_k \mu A_k, \quad \text{если } \mu A_k < +\infty$$

- f измерима, $f : T \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$

$$\int_T f(x) d\mu := \sup_{g \in S} \left\{ \int_T g(x) d\mu \mid 0 \leq g(x) \leq f(x) \right\}$$

- $f : T \rightarrow \mathbb{R}$

Определим

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0, \end{cases} \quad f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) < 0 \\ 0, & f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Тогда $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.

Если $\int_T f^+(x) d\mu < +\infty$, $\int_T f^-(x) d\mu < +\infty$, то

$$\int_T f(x) d\mu := \int_T f^+ d\mu - \int_T f^- d\mu$$

Такие функции называются *суммируемыми* или *интегрируемыми*. Их множество обозначим $\mathcal{L}(T, \mu)$.

- $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ — измеримая

Пусть $f = u + iv$, $u, v : T \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\int_T f d\mu = \int_T u d\mu + i \int_T v d\mu$$

(если всё конечно).

Примеры.

1. λ — мера Лебега в \mathbb{R}^n , A — измеримое по λ множество, $w(x) \geq 0 : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Введём новую меру: $\mu = w \cdot \lambda$, то есть

$$\mu B = \int_B w(x) d\lambda$$

$$\int_A f d\mu = \int_A f(x) w(x) d\lambda$$

2. T — бесконечное множество, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $a_n \in T$

Для $a \in T$ можно определить меру с нагрузкой в точке a :

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

Для последовательности $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, $c_n > 0$ можно рассмотреть *дискретную меру*:

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{a_n}$$

$$\mu A = \sum_{\{n | a_n \in A\}} c_n$$

$$\int_T f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f(a_n)$$

1.2.2. Несколько простых неравенств

Неравенство Юнга

Утверждение 4. $a, b > 0$, $p > 1$, $q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q называется *сопряжённым показателем*).

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \text{равенство только при } a^p = b^q$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $\ln x$ выпукла вверх, т. е. $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$. Это означает, что график лежит над хордой, т. е.

$$\forall x_1 \neq x_2 \forall 0 < \alpha < 1 \forall \beta = 1 - \alpha \quad f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) > \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

Применим это неравенство к \ln :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x, \quad x_1 = a^p, \quad x_2 = b^q, \quad \alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{q} \\ \ln\left(\frac{1}{p} \cdot a^p + \frac{1}{q} \cdot b^q\right) &> \frac{1}{p} \cdot \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) = \ln(ab) \\ \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} &> ab \end{aligned}$$

□

Неравенство Гёльдера

Утверждение 5. (T, \mathcal{U}, μ) , f, g измеримы, $p > 1$, $q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\int_T |fg| d\mu \leq \left(\int_T |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_T |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \quad (1.1)$$

Примечание. Для $p = q = 2$ это неравенство называется *неравенством Коши–Буняковского–Шварца*.

Доказательство.

$$A = \left(\int_T |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad B = \left(\int_T |g(x)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

- $A = 0$

Докажем, что в таком случае $f(x) = 0$ почти всюду:

Рассмотрим $e = \{x | f(x) \neq 0\} = \{x | |f(x)| > 0\}$.

$$e_n = \left\{ x \mid \left| f(x) \right| > \frac{1}{n} \right\}$$

$$0 = \int_T |f(x)|^p d\mu \geq \int_{e_n} |f(x)|^p d\mu \geq \left(\frac{1}{n}\right)^p \mu(e_n) \implies \mu e_n = 0$$

При этом, $e = \bigcup e_n \implies \mu e = 0$.

$$A = 0 \implies f(x) = 0 \text{ п. в. по } \mu \implies f(x) \cdot g(x) = 0 \text{ п. в.} \implies (\text{??})$$

- Аналогично, $B = 0 \implies (\text{??})$
- $A = +\infty \implies (\text{??})$
- $B = +\infty (\text{??})$
- $0 < A, B < +\infty$

Рассмотрим нормировку функций f и g :

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{A} \implies \int_T |f_1|^p d\mu = \frac{1}{A^p} \int_T |f(x)|^p d\mu = \frac{A^p}{A^p} = 1$$

Аналогично,

$$g_1(x) = \frac{g(x)}{B} \implies \int_T |g_1|^p d\mu = 1$$

Возьмём $a = |f_1(x)|$, $b = |g_1(x)|$, применим неравенство Юнга:

$$|f_1(x)| \cdot |g_1(x)| \leq \frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q} \quad \forall x \in T$$

Проинтегрируем:

$$\int_T |f_1| \cdot |g_1| d\mu \leq \frac{1}{p} \int_T |f_1|^p d\mu + \frac{1}{q} \int_T |g_1|^q d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Подставим изначальные функции и умножим на AB :

$$\int_T \frac{|f| \cdot |g|}{AB} d\mu \leq 1 \implies \int_T |f| \cdot |g| d\mu \leq AB$$

□

Неравенство Минковского

Утверждение 6. (T, \mathcal{U}, μ) , f, g измеримы, $1 \leq p \leq +\infty$

$$\left(\int_T |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_T |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_T |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство.

- $p = 1$

$$|f(x) + g(x)| \stackrel{\Delta}{\leq} |f(x)| + |g(x)|$$

Проинтегрируем:

$$\int_T |f + g| d\mu \leq \int_T |f| d\mu + \int_T |g| d\mu$$

□