

Оглавление

[russian]

Глава 1

ТФКП

1.1. Теорема о единственности значения аналитической функции

Теорема 1. $D \subset \mathbb{C}$, $E \subset D$, z_0 — т. сг. E , $z_0 \in D$, $f \in \mathcal{A}(D)$, $f(z) = 0 \quad \forall z \in E$
 $\implies f(z) \equiv 0$

Доказательство.

$$\begin{aligned} f(z) &\xrightarrow[z \rightarrow z_0]{z \in E} f(z_0) \\ 0 &\rightarrow f(z_0) \end{aligned}$$

То есть, $f(z_0) = 0$. Пусть $f(z) \not\equiv 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \exists \varphi(z) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists \delta > 0 : \quad &\begin{cases} f(z) = (z - z_0)^{n_0} \varphi(z) \\ |z - z_0| < \delta \implies \varphi(z) \neq 0 \end{cases} \\ \implies \text{если } |z - z_0| < \delta, \quad f(z) = 0 &\implies z = z_0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} z_0 \text{ — т. сг. } E &\implies \exists z_1 \in E : |z_1 - z_0| < \delta \\ z_1 \in E &\implies f(z_1) = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

(1.3) и (1.4) противоречивы. \square

Следствие. $f \in \mathcal{A}(D)$, $g \in \mathcal{A}(D)$, $\forall z \in E \quad f(z) = g(z)$
 $\implies f(z) \stackrel{D}{=} g(z)$

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(z) = g(z) - f(z)$. В силу аналитичности f и g получаем $h(z) \in \mathcal{A}(D)$.

$$h(z) = 0 \quad \forall z \in E \implies h(z) \equiv 0$$

\square

1.2. Аналитическое продолжение функции

Определение 1. $D_1, D_2 \in \mathbb{C}$, $D_1 \cap D_2 =: G \neq \emptyset$, $f_1 \in \mathcal{A}(D_1)$, $f_2 \in \mathcal{A}(D_2)$

$$\forall z \in G \quad f_1(z) = f_2(z)$$

Говорят, что функция f_1 аналитически продолжена в область D_2 функцией f_2 .

Теорема 2. Пусть имеется два аналитических продолжения функции f_1 в область D_2 : f_2 и \tilde{f}_2 .

$$\implies \tilde{f}_2(z) \stackrel{D_2}{\equiv} f_2(z)$$

Доказательство. G открыто, $\forall z_0 \in G$ — т. сг. G . Рассмотрим область D_2 :

$$f_2(z) = \tilde{f}_2(z) \quad \forall z \in G$$

Можно применить следствие из теоремы о единственности. \square

Определение 2. Путём $\Gamma(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ называется непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ в \mathbb{C} .

Замечание. Нет требований к инъективности или сюръективности.

Определение 3. Системой кругов, связанных с путём $\Gamma(t)$ будем называть следующее:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, \quad r_0, r_1, \dots, r_n > 0$$

Рассматриваем круги $B_{r_k}(\Gamma(t_k))$. Будем называть их системой кругов, если выполнено

$$B_{r_k}(\Gamma(t_k)) \cap B_{r_{k-1}}(\Gamma(t_{k-1})) \neq \emptyset, \quad k = 1, \dots, n$$

Определение 4. Пусть имеется путь $\Gamma(t)$ и система кругов, связанных им.

$$f \in \mathcal{A}(B_{r_0}(\Gamma(t_0))) = B_{r_0}(\Gamma(a))$$

Будем говорить, что функция f аналитически продолжена вдоль пути $\Gamma(t)$ в круг $B_{r_n}(\Gamma(t_n)) = B_{r_n}(\Gamma(b))$, если функция f аналитически продолжается из круга r_0 в круг r_1 , далее из него в круг r_2 , и так далее до круга r_n .

Теорема 3. Аналитическое продолжение вдоль пути единственно.

Доказательство. Следует из единственности аналитического продолжения в область. \square

1.3. Функции, продолжимые по любому пути

Определение 5. $D \subset \mathbb{C}$, $B = B_r(z_0) \subset D$, $f \in \mathcal{A}(B_r(z_0))$

Будем говорить, что функция f продолжима из круга B по любому пути в области D , если

$$\forall \Gamma(t) : [a, b] \rightarrow D : \Gamma(a) = z_0 \quad f \text{ аналитически продолжается вдоль этого пути,}$$

причём в качестве первого круга мы берём круг B .

Пример. $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $B = B_1(1)$

Рассмотрим функцию $f(z) = \log z$, $z \in B$.

$$\log z = |z| + i \arg z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

Зададим $\text{Arg } z = \arg z + 2\pi k$.

Рассмотрим теперь любой круг \tilde{B} . Хотим задать Arg так, чтобы он был в этом круге непрерывен. Положим $\log z := \log |z| + i \text{Arg } z$ при $z \in \tilde{B}$. Эта функция аналитична в \tilde{B} .

Определение 6. Область называется *односвязной*, если любой замкнутый путь можно непрерывно деформировать в точку, оставаясь в этой области.

Пример. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ не является односвязной.

1.4. Теорема о монодромии

Теорема 4. D — односвязная область, $B = \{z \mid |z - z_0| < r\} \subset D$, $f \in \mathcal{A}(B)$, f продолжима в D по любому пути.

Тогда f аналитична в D , то есть

$$\exists F \in \mathcal{A}(D) : F(z) \stackrel{B}{=} f(z)$$

Доказательство. Тут какие-то интуитивные рассуждения. □

1.5. Ряды Лорана

Определение 7. $0 \leq r \leq R \leq +\infty$

$$D_{r,R}(a) = \{z \mid r < |z - a| < R\}$$

Будем называть $D_{r,R}$ *кольцом*.

Теорема 5. $f \in \mathcal{A}(D_{r,R}(a))$

$$\implies \exists c_n \in \mathbb{C} : \quad \forall z \in D_{r,R}(a) \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad (1.3)$$

где ряды сходятся.

Если $r < r_1 < R_1 < R$, то каждый из рядов сходится равномерно и абсолютно при $z \in \overline{D_{r,R}(a)}$.

Эта формула называется разложением функции в *ряд Лорана*.