Содержание

1

Функциональный анализ, 5 семестр, коллоквиум

2025

Часть I
Метрические пространства

Обозначение. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$

1. Полные метрические пространства. Свойства фундаментальных последовательностей. Теорема о замкнутом подпространстве

Определение 1. X — множество, $\quad \rho : X \times X \to \mathbb{R}$
(X, ρ) называется *метрическим пространством*, если выполняются свойства:

1. $\rho(x, y) \geq 0, \quad \rho(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Определение 2. (X, ρ) — *полное*, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Свойства. (X, ρ), $\quad \{ x_n \}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная.

1. $\{ x_n \}_{n=1}^{\infty}$ ограничена;
2. если существует $\{ x_{n_k} \}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $\lim x_{n_k} = a$, то $\exists \lim x_n = a$;
3. $\forall \{ \varepsilon_k > 0 \}_{k=1}^{\infty} \quad \exists \{ x_{n_k} \}_{k=1}^{\infty} : \quad \forall j > k \quad \rho(x_{n_j}, x_{n_k}) < \varepsilon_k$.

Доказательство.

1. Возьмём $\varepsilon = 1$.
$$\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m \geq N \quad \rho(x_n, x_m) < 1 \qquad \implies \rho(x_N, x_m) < 1 \text{ при } m > N$$
Пусть $R = \max \{ \rho(x_1, x_N), \dots, \rho(x_{N-1}, x_N) \} + 1$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in \mathsf{B}_R(x_N)$.
2. Возьмём $\varepsilon > 0$. Воспользуемся фундаментальностью:
$$\exists N : \quad \forall n, m > N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$
Зафиксируем $n_k > N$ такой, что $\rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$.
Пусть $n > N$. Тогда $\rho(x_n, a) \overset{\triangle}{\leq} \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon \implies \lim \rho(x_n, a) = 0$.
3. Докажем **по индукции**:

---

*Как всегда, огромное спасибо Якову и всем остальным причастным к диску.

- **База.** ε_1

$$\exists N_1 : \quad \forall n,m \geq N_1 \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon_1 \implies \rho(x_{N_1}, x_m) < \varepsilon_1 \text{ при } m > N_1$$

- **Переход.** Допустим, уже построены $n_1 < \dots < n_{k-1} < n_j$ такие, что

$$\forall m > n_j \quad \rho(x_m, x_{n_j}) < \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \dots, k-1$$

$$\exists n_k > n_{k-1} : \quad \forall n,m \geq n_k \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon_k \implies \rho(x_{n_k}, x_m) < \varepsilon_k \text{ при } m > n_k$$
$$\implies \exists \text{ требуемые } \{ x_{n_k} \}$$

□

Следствие. (X, ρ), $\{ x_n \}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная

$$\exists \{ x_{n_k} \}_{k=1}^{\infty} : \quad \sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < +\infty$$

Теорема 1. (X, ρ), $Y \subset X$

1. (X, ρ) — полное, Y замкнуто.
   Тогда (Y, ρ) полно.
2. (Y, ρ) — полное.
   Тогда Y замкнуто.

Доказательство.

1. Пусть $\{ y_n \}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в Y. Тогда она фундаментальна и в X, а X полно. Значит, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \in X$. Так как Y замкнуто, $a \in Y \implies (Y, \rho)$ — полное.
2. Пусть $\{ y_n \}_{n=1}^{\infty}$, $y_n \in Y$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. Проверим, что $a \in Y$.
   $\{ y_n \}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна $\xRightarrow[Y \text{ полно}]{} \exists \lim y_n \in Y$.

□

2. Банаховы пространства. Критерий полноты нормированного пространства

Определение 3. X — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$
$p : X \to \mathbb{R}$ называется *полунормой*, если

1. полуаддитивность: $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$;
2. однородность: $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad \forall \lambda \in K,\ x \in X$.

Определение 4. X — линейное пространство над $\mathbb{K}$.
$p : X \to \mathbb{R}$ называется *нормой*, если

1. p — полунорма;
2. $p(x) = 0 \iff x = \mathbb{O}_n$.

Определение 5. $(X, \|\cdot\|)$ называется *банаховым*, если оно полное.

Определение 6.

1. X — линейное пространство над K.

   $L \subset X$ называется *подпространством (в алгебраическом смысле)*, если оно является линейным пространством, т. е.

$$\left.\begin{aligned} x, y \in L \\ \alpha, \beta \in K \end{aligned}\right\} \implies \alpha x + \beta y \in L$$

2. $(X, \|\cdot\|)$

   $L \subset X$ называется *(замкнутым) подпространством*, если

   (a) L — подпространство в алгебраическом смысле;

   (b) L замкнуто.

Теорема 2. $(X, \|\cdot\|)$ — полное **тогда и только тогда**, когда из абсолютной сходимости ряда следует его сходимость.

Доказательство.

- $\implies$ (X — полное)

  Возьмём $\{ x_k \}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ сходится. Применим к этому ряду критерий Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N,\ p \in \mathbb{N}: \quad \|x_{n+1}\| + \dots + \|x_{n+p}\| < \varepsilon$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

  Требуется доказать, что S_n образуют фундаментальную последовательность. Для этого оценим норму разности:

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \|\sum_{k=1}^{p} x_{n+k}\| \overset{\triangle}{\leq} \sum_{k=1}^{p} \|x_{n+k}\| < \varepsilon$$

- $\impliedby$ (абсолютно сходящийся ряд сходится)

  Пусть $\{ x_n \}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Нужно доказать, что у неё есть предел.

  Воспользуемся следствием из свойств фундаментальных последовательностей:

$$\exists \{ x_{n_k} \}_{k=1}^{\infty}: \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < +\infty$$

$$\implies \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < +\infty$$

  Рассмотрим ряд без нормы:

$$\exists S = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$$

$$S_m = x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \dots + (x_{n_m} - x_{n_{m-1}}) = x_{n_m}$$

  При этом,

$$\exists \lim_{m \to \infty} S_m = S \quad \implies \exists \lim x_{n_m} = S \xRightarrow[\text{св-во фунд. посл. 2}]{} \lim x_n = S$$

∎

3. Полнота $m(A)$, $\mathcal{C}(K)$, $\mathcal{C}^{(n)}[a, b]$

Определение 7. X — множество.

$m(X)$ — *пространство ограниченных функций*:

$$m(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{K} \;\middle|\; \sup_{x\in X} |f(x)| < +\infty \right\}$$

Норма на таком пространстве называется *равномерной, чебышёвской или* sup-*нормой*:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

Теорема 3. $m(X)$ — банахово пространство.

Доказательство.

1. Проверим, что $\|f\|_\infty$ удовлетворяет аксиомам нормы:

$$\|f\|_\infty = 0 \iff \sup_{x\in X}|f(x)| = 0 \iff f(x) \equiv 0 \iff f = \mathbb{O}_n$$

$$\lambda \in K, \quad \|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in X}|\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in X}|f(x)| = |\lambda|\cdot\|f\|_\infty$$

Пусть $f, g \in m(X)$, x фиксирован. Тогда $f(x), g(x)$ — числа.

$$\|f\|_\infty + \|g\|_\infty \geq \implies |f(x)| + |g(x)| \overset{\triangle}{\geq} |f(x) + g(x)| \quad \forall x \in X$$

В силу произвольности x,

$$\implies \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \geq \sup_{x\in X}|f(x) + g(x)| = \|f + g\|_\infty$$

2. Проверим полноту.

Возьмём фундаментальную последовательность $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$ (в смысле нормы $\|\cdot\|_\infty$).

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m > N \quad \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

Зафиксируем $x \in X$.

$$\implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Из полноты K следует, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Обозначим $f(x) \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (поточечный).

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \text{ при фиксированном } x, \quad n, m > N$$

Перейдём к пределу по n:

$$|f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X, \quad m > N$$

Воспользуемся произвольностью x:

$$\|f - f_m\|_\infty = \sup_{x\in X}|f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \implies (f - f_m) \in m(X)$$

$$f = (f - f_m) + f_m$$

В силу линейности $m(X)$ это означает, что $f \in m(X)$, $\|f - f_m\|_\infty < \varepsilon$ при $m > N$

$$\implies \lim_{m\to\infty} f_n = f \text{ в пространстве } m(X)$$

□

Определение 8. K — *топологический компакт*, если:

1. $\forall \{ G_\alpha \text{ — откр.} \}_{\alpha\in A} : K \subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha \quad \exists \{ \alpha_j \}_{j=1}^{n} : \quad K \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_{\alpha_j}$;
2. *Хаусдорфовость*: $\forall a \neq b \in K \quad \exists U, V$ — открытые: $\quad a \in U,\ b \in V, \quad U \cap V = \emptyset$.

Определение 9. K — топологический компакт.

Введём *пространство непрерывных функций на компакте*:

$$\mathcal{C}(K) = \{\, f : K \to \mathbb{K} \text{— непрерывны} \,\}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in K} |f(x)| = \max_{x\in K} |f(x)|$$

Утверждение 1. $(\mathcal{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ — банахово.

Доказательство. $m(K)$ — пространство ограниченных функций с такой же нормой. Уже доказано, что оно банахово.

Линейная комбинация линейных функций линейна, поэтому $C(K)$ — подпространство в алгебраическом смысле. Осталось проверить замкнутость.

Возьмём $\{\, f_n \,\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in C(K)$, $\quad f \in m(K)$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ в $C(K)$.

$$\implies \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0 \iff f_n \xrightarrow[n\to\infty]{K} f \implies f \in C(K) \implies C(K) \text{ замкнуто}$$

$\square$

Определение 10. $n \in \mathbb{N}$ — фиксировано.

Рассмотрим *пространство непрерывных производных*:

$$\mathcal{C}^{(n)}[a,b] = \left\{\, f : [a,b] \to \mathbb{K} \;\middle|\; \exists f^{(n)} \in \mathcal{C}[a,b] \,\right\}$$

$$\|f\|_{C^{(n)}} := \max_{0\le k\le n} \|f^{(k)}\|_\infty, \quad f^{(0)} := f$$

Утверждение 2. $(\mathcal{C}[a,b]^{(n)}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}^{(n)}})$ — банахово.

Доказательство. Пусть $\{\, f_m \,\}_{m=1}^{\infty}$ фундаментальна в $C^{(n)}[a,b]$. Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall m, p > N \quad \|f_m - f_p\|_{\mathcal{C}^{(n)}} < \varepsilon$$

$$\implies \forall 0 \le k \le n \quad \|{f_m}^{(k)} - {f_p}^{(k)}\|_\infty < \varepsilon$$

Значит, $\left\{\, {f_m}^{(k)} \,\right\}_{m=1}^{\infty}$ фундаментальна в $\mathcal{C}[a,b]$.

$$\implies \exists \varphi_k \text{ — непрер. } : \quad \lim_{n\to\infty} \|{f_m}^{(k)} - \varphi_k\| = 0$$

$\mathcal{C}[a,b]$ — банахово $\implies \varphi_k \in \mathcal{C}[a,b]$.

$$\lim \|f^{(k)} - \varphi_k\|_\infty = 0, \quad 0 \le k \le n \implies \begin{cases} f_m \xrightarrow[m\to\infty]{[a,b]} \varphi_0, \\ f'_m \xrightarrow[m\to\infty]{[a,b]} \varphi_1 \\ \dots \\ f_m^{(n)} \xrightarrow[m\to\infty]{[a,b]} \varphi_n \end{cases} \xRightarrow[\text{в анализе доказано}]{} \begin{cases} \varphi_1 = \varphi'_0 \\ \varphi_2 = \varphi'_1 = \varphi''_0 \\ \dots \\ \varphi_n = \varphi_0^{(n)} \end{cases}$$

$$\|f_m - \varphi_0\|_{\mathcal{C}^{(n)}} = \max_{0\le k\le n} \|f_m^{(k)} - {\varphi_0}^{(k)}\|_\infty \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

$\lim\limits_{m\to\infty} f_m = \varphi_0$ в $\mathcal{C}^{(n)}[a,b]$. $\square$

4. Неравенства Юнга, Гёльдера, Минковского

Утверждение 3 (неравенство Юнга). $a, b > 0, \quad p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q называется *сопряжённым показателем*).

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \qquad \text{равенство только при } a^p = b^q$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $\ln x$ выпукла вверх, т. е. $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$. Это означает, что график лежит над хордой, т. е.

$$\forall x_1 \ne x_2 \quad \forall 0 < \alpha < 1,\ \beta = 1 - \alpha \quad f\big(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\big) > \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

Применим это неравенство к ln:

$$f(x) = \ln x, \quad x_1 = a^p, \quad x_2 = b^q, \quad \alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{q}$$

$$\ln\Big(\frac{1}{p} \cdot a^p + \frac{1}{q} \cdot b^q\Big) > \frac{1}{p} \cdot \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) = \ln(ab)$$

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} > ab$$

$\square$

Утверждение 4 (неравенство Гёльдера). $(T, \mathscr{U}, \mu), \quad f, g$ измеримы, $\quad p > 1, \quad q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

$$\int\limits_T |fg| \,\mathrm{d}\,\mu \le \Big(\int\limits_T |f|^p \,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \cdot \Big(\int\limits_T |g|^q \,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \tag{1}$$

Примечание. Для $p = q = 2$ это неравенство называется *неравенством Коши—Буняковского*.

Доказательство.

$$A = \Big(\int\limits_T |f(x)|^p \,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad B = \Big(\int\limits_T |g|^q \,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{q}}$$

- $A = 0$

  Докажем, что в таком случае $f(x) = 0$ почти всюду:

  Рассмотрим $e = \{\, x \mid f(x) \ne 0 \,\} = \{\, x \mid |\, f(x)| > 0 \,\}$.

  $$e_n \coloneqq \left\{\, x \;\middle|\; |f(x)| > \frac{1}{n} \,\right\}$$

  $$0 = \int\limits_T |f(x)|^p \,\mathrm{d}\,\mu \ge \int\limits_{e_n} |f(x)|^p \,\mathrm{d}\,\mu \ge \Big(\frac{1}{n}\Big)^p \mu(e_n) \quad \Longrightarrow \mu e_n = 0$$

  При этом, $e = \bigcup e_n \implies \mu e = 0$.

  $$A = 0 \implies f(x) = 0 \text{ п. в. по } \mu \implies f(x) \cdot g(x) = 0 \text{ п. в. } \implies (1)$$

- Аналогично, $B = 0 \implies (1)$
- $A = +\infty \implies (1)$
- $B = +\infty \implies (1)$
- $0 < A, B < +\infty$

  Рассмотрим нормировку функций f и g:

  $$f_1(x) = \frac{f(x)}{A} \implies \int\limits_T |f_1|^p \,\mathrm{d}\,\mu = \frac{1}{A^p} \int\limits_T |f(x)|^p \,\mathrm{d}\,\mu = \frac{A^p}{A^p} = 1$$

Аналогично,

$$g_1(x) = \frac{g(x)}{B} \implies \int\limits_T |g_1|^p \,\mathrm{d}\,\mu = 1$$

Возьмём $a = |f_1(x)|,\ b = |g_1(x)|$, применим неравенство Юнга:

$$|f_1(x)| \cdot |g_1(x)| \le \frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q} \quad \forall x \in T$$

Проинтегрируем:

$$\int\limits_T |f_1| \cdot |g_1| \,\mathrm{d}\,\mu \le \frac{1}{p} \int\limits_T |f_1|^p \,\mathrm{d}\,\mu + \frac{1}{q} \int\limits_T |g_1|^q \,\mathrm{d}\,\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Подставим изначальные функции и умножим на AB:

$$\int\limits_T \frac{|f| \cdot |g|}{AB} \,\mathrm{d}\,\mu \le 1 \implies \int\limits_T |f| \cdot |g| \,\mathrm{d}\,\mu \le AB$$

$\square$

Утверждение 5 (неравенство Минковского). $(T, \mathscr{U}, \mu)$, $\quad f, g$ измеримы, $\quad 1 \le p \le +\infty$

$$\left(\int\limits_T |f(x) + g(x)|^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int\limits_T |f|^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_T |g|^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2}$$

Доказательство.

- $p = 1$

  $$|f(x) + g(x)| \overset{\triangle}{\le} |f(x)| + |g(x)|$$

  Проинтегрируем:

  $$\int\limits_T |f + g| \,\mathrm{d}\,\mu \le \int\limits_T |f| \,\mathrm{d}\,\mu + \int\limits_T |g| \,\mathrm{d}\,\mu$$

- $p > 1$

  Обозначим

  $$A = \left(\int\limits_T |f|^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad B = \left(\int\limits_T |g|^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad C = \left(\int\limits_T |f + g|^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

  Рассмотрим отдельно тривиальные случаи:

  – Если $A = +\infty$ или $B = +\infty$ или $C = 0$, то (2).
  – $A < +\infty,\ B < +\infty$

    Докажем сначала, что $C < +\infty$. Возьмём $a, b \in \mathbb{R}$. Понятно, что $|a + b| \le 2 \max\{\ |a|, |b|\ \}$.

    $$|a + b|^p \le 2^p \max\{\ |a|^p, |b|^p\ \} \le 2^p\big(|a|^p + |b|^p\big)$$

    Подставим $a = f(x),\ b = g(x)$ (для фиксированного x):

    $$|f(x) + g(x)|^p \le 2^p\big(|f(x)|^p + |g(x)|^p\big)$$

    Проинтегрируем по T и μ:

    $$C^p = \int\limits_T |f + g|^p \,\mathrm{d}\,\mu \le 2^p\left(\int\limits_T |f|^p \,\mathrm{d}\,\mu + \int\limits_T |g|^p \,\mathrm{d}\,\mu\right) = 2^p(A^p + B^p) < +\infty$$

Теперь докажем само неравенство:

$$C^p = \int\limits_T |f+g|^p \,\mathrm{d}\,\mu = \int\limits_T |f+g|\cdot|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\,\mu \le \underbrace{\int\limits_T |f|\cdot|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\,\mu}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_T |g|\cdot|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\,\mu}_{I_2}$$

$$I_1 = \int\limits_T |f|\cdot|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\,\mu \underset{\text{нер-во Гёльдера}}{\le} \Big(\int\limits_T |f|^p\,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int\limits_T |f+g|^{(p-1)q}\,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1 \implies p+q = pq \implies pq-q = p$$

$$I_1 \le A\cdot C^{\frac{p}{q}}$$

Аналогично, $I_2 \le B\cdot C^{\frac{p}{q}}$.

$$C^p \le A\cdot C^{\frac{p}{q}} + B\cdot C^{\frac{p}{q}} = (A+B)C^{\frac{p}{q}}$$

$$p-\frac{p}{q} = p\Big(1-\frac{1}{q}\Big) = 1$$

Сократим на $C^{\frac{p}{q}}$:

$$C \le A+B$$

□

5. Определение и свойства пространств l^p, F

Определение 11. Зафиксируем $n\in\mathbb{N}$. Рассмотрим $l_n^\infty = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$, где

$$\mathbb{R}^n = \{\, x = (x_1,\dots,x_n),\ x_j\in\mathbb{R} \,\},\qquad \|x\|_\infty = \max_{1\le j\le n}|x_j|$$

При этом, $l_n^\infty = m(X)$, где $X = \{\,1,2,\dots,n\,\}$, $f(j) = x_j$. Значит, l_n^∞ — банахово пространство.

Определение 12. l^∞ — *пространство ограниченных последовательностей*, т. е.

$$l^\infty = \Big\{\, x = \{\,x_j\,\}_{j=1}^\infty,\ x_j\in\mathbb{K} \ \Big|\ \sup_{j\ge1}|x_j| < +\infty \,\Big\}$$

$$l^\infty = m(\mathbb{N}) \implies l^\infty \text{ — банахово}$$

Определение 13. F — множество *финитных* последовательностей:

$$F = \{\, x = (x_1,x_2,\dots,x_{N(x)},0,\dots),\quad x_j\in\mathbb{R},\mathbb{C} \,\}$$

$$(F,\|\cdot\|_p),\quad 1\le p\le+\infty$$

Утверждение 6. $(F,\|\cdot\|_p)$ не полны.

Доказательство. При фиксированном p можно считать, что $(F,\|\cdot\|_p)\subset l^p$ (подпространство в алгебраическом смысле).

Проверим, что оно не замкнуто. Возьмём

$$x = \Big\{\,\frac{1}{2^k}\,\Big\}_{k=1}^\infty,\quad x\in l^p\quad \forall 1\le p\le+\infty$$

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^{kp}} < +\infty$$

Положим
$$x^{(m)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^m}, 0, \dots\right) \in F$$

- $1 \le p < +\infty$
$$\|x - x^{(m)}\|_p = \Big(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{pk}}\Big)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

- $p = +\infty$
$$\|x - x^{(m)}\|_\infty = \frac{1}{2^{m+1}} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

Значит, F не замкнуто. □

6. Определение и полнота пространств L^p, пространств последовательностей

Определение 14. $1 \le p < +\infty$
$$\mathscr{L}^p(T,\mu) = \{\, f \mid \ |f|^p \in \mathscr{L}(T,\mu)\,\} = \left\{ f \text{ — измерима} \;\middle|\; \int\limits_T |f|^p \,\mathrm{d}\,\mu < +\infty \right\}$$
$$\|f\|_p = \Big(\int\limits_T |f|^p \,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Утверждение 7. $\|\cdot\|_p$ — полунорма на $\mathscr{L}^p(T,\mu)$.

Доказательство.

1. $\|f\|_p = \Big(\int\limits_T |f(x)|^p \,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \ge 0$;
2. $\lambda \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $\quad \|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$;
3. $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ — неравенство Минковского.

□

$$\|f\|_p = 0 \iff \int\limits_T |f(x)|^p \,\mathrm{d}\,\mu = 0 \iff f(x) = 0 \text{ п. в.}$$

Обозначим $N = \{\, f \text{ — изм.} \mid f(x) = 0 \text{ п. в.}\,\}$.

Определение 15.
$$\mathrm{L}^p = \mathscr{L}^p /_{N}$$
То есть, $f \sim g$, если $f - g \in N$, то есть $f(x) = g(x)$ п. в..
В пространстве L^p будем рассматривать $\overline{f}$ — классы эквивалентности f.
$$\|\overline{f}\|_p = \|f\|_{\mathscr{L}^p}$$

Утверждение 8. $\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p}$ — норма.

Доказательство.
$$\|\overline{f}\| = 0 \iff \Big(\int\limits_T |f|^p \,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{p}} = 0 \iff f(x) = 0 \text{ п. в.} \implies f \in N$$

□

Определение 16. $p = \infty$

$\mathscr{L}^\infty(T, \mu)$ — пространство *существенно ограниченных функций.*

f — измерима

$$f \in \mathscr{L}^\infty \iff \exists c > 0 : \quad \mu\{\, x \in T \mid \ |f(x)| > c \,\} = 0$$

Определим *существенный супремум*:

$$\|f\|_\infty = \inf\{\, c > 0 \mid \mu\{\, x \mid \ |f(x)| > c \,\} = 0 \,\}$$

Утверждение 9.

$$f \in \mathscr{L}^\infty(T, \mu) \implies |f(x)| \le \|f(x)\|_\infty \text{ п. в.}$$

Доказательство.

$$\|f\|_\infty = \inf\{\, c \mid \mu\{\, x \mid |\, f(x) \,| > c \,\} = 0 \,\}$$

Возьмём $e_m = \left\{\, x \mid \left|\, f(x)\right| > \|f\|_\infty + \frac{1}{m} \,\right\} \implies \mu e_m = 0.$

$$e = \{\, x \mid |\, f(x)| > \|f\|_\infty \,\} = \bigcup e_m \implies \mu e = 0$$

□

Утверждение 10. $\mathscr{L}^\infty(T, \mu), \quad \|\cdot\|_\infty$ — полунорма.

Доказательство.

1. $\lambda \ne 0 \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$)
$$\|f(x)\| > c \iff |\lambda f(x)| > |\lambda| \cdot c$$
2. Пусть $f, g \in \mathscr{L}^\infty(T, \mu), \quad x \in T.$
$$|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \underset{\text{п. в.}}{\le} \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$
$$\implies \|f + g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$
3. $\|f\|_\infty = 0 \implies |f(x)| \le 0$ п. в. $\implies f(x) = 0$ п. в.

□

Определение 17. $\mathrm{L}^\infty(T, \mu) = {}^{\mathscr{L}^\infty(T,\mu)}\!/_{N}$, где $N = \{\, f \text{ — изм.} \mid f(x) = 0 \text{ п. в.} \,\}$.

$$\overline{f} \in {}^{\mathscr{L}^\infty}\!/_{N}, \quad \|\overline{f}\|_\infty = \|f\|_\infty$$

$$\|\overline{f}\|_\infty = 0 \iff \|f\|_\infty = 0 \iff f(x) = 0 \text{ п. в.} \iff f \in N = \mathbb{O}_n$$

Теорема 4 (Фату). $(T, \mathscr{U}, \mu), \quad g_n(x)$ измеримы, $g_n(x) \ge 0, \quad g_n \to g(x)$ п. в. на T

$$\int\limits_T g_n(x)\,\mathrm{d}\,\mu \le C \implies \int\limits_T g(x)\,\mathrm{d}\,\mu \le C$$

Теорема 5. $(T, ,\mu), \quad 1 \le p \le \infty$

$\mathrm{L}^p(T, \mu)$ — банаховы.

Доказательство.

- $p < +\infty$

  Воспользуемся критерием полноты. Возьмём $\{\, f_n \,\}_{n=1}^\infty, \ f_n \in \mathrm{L}^p$ (т. е. берём классы, а из классов берём произвольных представителей) такие, что $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p \le C < +\infty$.

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

Докажем, что $\exists S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, т. е. $S(x) \in \mathrm{L}^p$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|S - S_n\|_p = 0$.

Рассмотрим для начала сумму модулей:

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|, \quad \sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$$

Проверим, что $\sigma(x)$ п. в. конечна.

$$\|\sigma_n\|_p \overset{\triangle}{\le} \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \le C$$

Применим теорему Фату:

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_T |\sigma_n(x)|^p \,\mathrm{d}\,\mu \le C^p \\ &|\sigma_n(x)|^p \to |\sigma(x)|^p \end{aligned}\right\} \implies \int\limits_T |\sigma(x)|^p \,\mathrm{d}\,\mu \le C$$

$$\implies \sigma(x) < +\infty \text{ п. в.}$$

Значит, для п. в. $x \quad \exists \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = S(x)$.

Воспользуемся критерием Коши для $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| \le C$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall m > n > N \quad \sum_{k=n+1}^{\|} f_k\|_p < \varepsilon$$

$$\|S_m - S_n\|_p \le \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\|_p < \varepsilon$$

Снова воспользуемся теоремой Фату:

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_T |S_m(x) - S_n(x)|^p \,\mathrm{d}\,\mu < \varepsilon^p \\ &|S_m(x) - S_n(x)|^p \xrightarrow[m\to\infty]{} |S(x) - S_m(x)|^p \text{ п. в.} \end{aligned}\right\} \implies \int\limits_T |S(x) - S_m(x)|^p \,\mathrm{d}\,\mu \le \varepsilon^p$$

$$S - S_n \in \mathrm{L}^p, \quad S_n \in \mathrm{L}^p \implies S = (S - S_n) + S_n \implies S \in \mathrm{L}^p$$
$$\implies \lim_{n\to\infty} \|S - S_n\|_p = 0 \implies \mathrm{L}^p \text{ — полное}$$

- $p = \infty$

Рассмотрим $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная в $\mathrm{L}^{\infty}(T, \mu)$

$$|f_n(x)| \le \|f_n\|_{\infty} \text{ при } x \in T \setminus E_n, \quad \mu E_n = 0$$
$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad T_1 = T \setminus E \implies f_n \in m(T_1)$$

$\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $m(T_1)$, а оно банахово.

$$\implies \exists f \in m(T_1) : \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$$

Положим $f\big|_E = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{\mathrm{L}^{\infty}(T)} = 0$$

$\square$

Определение 18. $n \in \mathbb{N}$ фиксировано, $\quad 1 \le p < +\infty$

$$l_n^p = \left(\mathbb{K}^n, \|x\|_p = \Big(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\right)$$

Возьмём $T = \{\, 1, 2, \dots, n \,\}$. Функции на T будут элементами $\mathbb{R}^n$.

$$\mu(j) = 1, \quad 1 \le j \le n$$

$$l_n^p = \mathrm{L}^p(T, \mu) \text{ — банахово}$$

Утверждение 11. $\{\, x^{(m)} \,\}_{m=1}^\infty, \quad x^{(m)} \in l_n^p, \quad x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}), \quad 1 \le p \le +\infty$

$$\lim_{m\to\infty} \|x - x^{(m)}\|_p = 0 \iff \lim_{m\to\infty} x_j^{(m)} = x_j, \quad 1 \le j \le n$$

Доказательство.

- $\implies$

$$\underbrace{\left(\sum |x_j - x_j^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}}_{\to 0} \ge |x_j - x_j^{(m)}| \text{ при фиксированном } j$$

$$\implies \lim_{m\to\infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$$

  При $p = \infty$:

$$\max_{1 \le j \le m} |x_j - x_j^{(m)}| \ge |x_j - x_j^{(m)}| \text{ при фиксированном } j$$

- $\impliedby$

$$\lim_{m\to\infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0 \implies \left(\sum_{j=1}^n |x_j - x_j^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

  Для бесконечных так же берём max.

$\square$

Пример.

$$l^p = \left\{ x = \{\, x_j \,\}_{j=1}^\infty, \quad x \in \mathbb{K} \;\middle|\; \sum_{j=1}^\infty |x_j|^p < +\infty \right\}$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Докажем, что l^p — банахово:

$$T = \mathbb{N}, \quad \mu(j) = 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad L^p(\mathbb{N}, \mu) = l^p, \quad f \in L^p(\mathbb{N}, \mu), \quad f(j) = x_j$$

Замечание.

1. $\{\, x^{(m)} \,\}_{m=1}^\infty, \quad x^{(m)} \in l^p, \quad 1 \le p \le +\infty, \quad x \in l^p, \quad \lim_{m\to\infty} \|x^{(m)} - x\|_p = 0$

$$\implies \lim_{m\to\infty} x_j^{(m)} = x_j \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

2. В другую сторону **неверно**.

Пример (в другую сторону). Рассмотрим последовательность базисных элементов:

$$e_m = (0, \dots, 0, \underset{m}{1}, 0, \dots, 0)$$

$$e_m = \{\, \delta_j^m \,\}_{j=1}^{\infty}, \quad \delta_j^m = \begin{cases} 1, & j = m \\ 0, & j \neq m \end{cases}$$

δ_j^m называются *символами Кронекера.*

Для любого фиксированного j $\lim\limits_{m\to\infty} \delta_j^m = 0$. Покоординатный предел равен $\mathbb{O}_n$.

$$\|e_m - \mathbb{O}_n\|_p = 1 \quad \forall m \implies \|e_m - \mathbb{O}_n\|_p \not\to 0$$

7. Примеры не полных нормированных пространств

Пример.

$$\left(\mathcal{C}[a,b], \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}\, x\right)^{\frac{1}{p}}\right), \quad 1 \leq p < +\infty$$

Утверждение 12. $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_p)$ — неполное нормированное пространство.

Доказательство. Возьмём $f \in \mathcal{C}[a,b]$.

$$\left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}\, x\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \implies f(x) \overset{[a,b]}{\equiv} 0 \implies \|\cdot\|_p \text{ — норма}$$

Рассмотрим $\mathrm{L}^p[a,b]$, λ — классическая мера Лебега.

Докажем, что $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_p)$ — подпространство (L^p, λ) в алгебраическом смысле.

$$f \in \mathcal{C}[a,b] \to \{\, g \in \mathrm{L}^p[a,b], \quad g(x) = f(x) \text{ п. в. по } \lambda \,\}$$

Проверим, что $C[a,b]$ не замкнуто.

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$\left(\int_{-1}^1 |f_n(x) - g(x)|^p \,\mathrm{d}\, x\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Докажем, что $\nexists f \in \mathcal{C}[-1,1]$ такой, что $f(x) = g(x)$ п. в. на $[-1,1]$.

От противного. Пусть такая f существует.

$$\int_{-1}^1 |f(x) - g(x)|^p \,\mathrm{d}\, \lambda = 0 \implies \begin{cases} \int_{-1}^0 |f(x)|^p \,\mathrm{d}\, \lambda = 0 \implies f(x) \overset{[-1,0]}{\equiv} 0 \\ \int_0^1 |f(x) - 1|^p \,\mathrm{d}\, \lambda = 0 \implies f(x) \overset{[0,1]}{\equiv} 1 \end{cases} \quad \text{— } \lightning$$

$\square$

Пример.

$$\mathscr{P} = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad n \geq 0 \right\}, \quad \forall [a,b]$$

$$\|p(x)\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |p(x)|, \quad \mathscr{P} \subset \mathcal{C}[a,b]$$

Утверждение 13. $(\mathscr{P}, \|\cdot\|_\infty)$ не полно.

Доказательство. Ясно, что $\mathscr{P}$ — подпространство в алгебраическом смысле. Докажем, что оно не замкнуто.

$$e^x \notin \mathscr{P}, \quad \text{т. к.} (e^x)^{(n)} = e^x \not\equiv 0$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad \lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |e^x - P_n(x)| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \|e^x - P_n\|_\infty = 0 \implies \mathscr{P} \text{ не замкнуто}$$

□

8. Свойства метрики. Теорема о пополнении метрического пространства. Примеры

Свойства. (X, ρ) — метрическое пространство.

1. $x, y, z, u \in X \implies |\rho(x, y) - \rho(z, u)| \le \rho(x, u) + \rho(y, z)$;
2. $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ непрерывна (как функция двух переменных);
3. $A \subset X, \quad \rho(x, A) := \inf\limits_{a \in A} \rho(x, a)$

   При фиксированном A функция $\rho(x, A)$ непрерывна по x;
4. A замкнуто, $\quad x_0 \notin A \implies \rho(x_0, A) > 0$.

Доказательство.

1. $\rho(x, y) \overset{\triangle}{\le} \rho(y, z) + \rho(x, z) \overset{\triangle}{\le} \rho(y, z) + \rho(z, u) + \rho(x, u)$.
2. Пусть есть две последовательности такие, что $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$. Требуется проверить, что $\lim \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y)$.

$$|\rho(x, y) - \rho(x_n, y_n)| \underset{1}{\le} \underbrace{\rho(x, x_n)}_{\to 0} + \underbrace{\rho(y, y_n)}_{\to 0}$$

3. $A \subset X, \quad x, z \in X, \quad y \in A, \quad y$ фиксирован.

$$\rho(x, A) \le \rho(x, y) \overset{\triangle}{\le} \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

   В силу произвольности y можно взять точную нижнюю грань:

$$\rho(x, A) \le \rho(x, z) + \inf_{y \in A} \rho(z, y) = \rho(x, z) + \rho(z, A) \implies \rho(x, A) - \rho(z, A) \le \rho(x, z)$$

   Аналогично, $\rho(z, A) - \rho(x, A) \le \rho(x, z)$

$$\implies |\rho(x, A) - \rho(z, A)| \le \rho(x, z)$$

   Зафиксируем x и устремим к нему z:

$$\lim_{z \to x} \rho(z, A) = \rho(x, A)$$

4. $A = \overline{A} \implies X \setminus A$ открыто.

$$x_0 \notin A \implies X \setminus A \implies \exists r > 0 : \quad \mathtt{B}_r(x_0) \in X \setminus A \implies \forall y \in A \quad \rho(x_0, y) \ge r \implies \rho(x_0, A) \ge r$$

□

Определение 19. (X, ρ), (Y, d) — метрические пространства, $\quad T : X \to Y$.

1. T называется *изометрическим вложением*, если оно сохраняет расстояния:

$$d(Tx, Tz) = \rho(x, z) \quad \forall x, z \in X$$

2. T называется *изометрией*, если $T(X) = Y$ и $d(Tx, Tz) = \rho(x, z)$. Говорят, что (X, ρ) и (Y, d) *изометричны*.

Свойства.

1. $T : X \to Y$ — изометрическое вложение.

   Тогда T инъективно и непрерывно.

2. T — изометрия.

   Тогда существует $T^{-1} : Y \to X$ — изометрия.

3. Изометрия — отношение эквивалентности на множестве метрических пространств.

4. T — изометрическое вложение, $\quad Z = T(X)$.

   Тогда T — изометрия X и Z.

Доказательство.

1. Пусть $x, z \in X, \quad Tx = Tz$.
$$0 = d(Tx, Tz) = \rho(x, z) \implies x = z$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \implies \lim \rho(x_n, x) = 0 \implies \lim d(Tx_n, Tx) = 0$$

2. Очевидно.

3. Следует из предыдущих.

4. Очевидно.

□

Определение 20. (X, ρ) — метрическое пространство, $\quad (Z, d)$ — полное, $\quad \exists T : X \to Z : \quad T$ — изометрическое вложение и $\overline{T(X)} = Z$.

Будем говорить, что (Z, d) — *пополнение* (X, ρ).

Замечание. (U, d) — полное, $\quad T : X \to U$ — изометрическое вложение.

Определим $Z = \overline{T(X)}$ (в U). Замкнутое пространство полно, поэтому Z будет пополнением.

Теорема 6 (о пополнении метрического пространства). (X, ρ) — метрическое пространство.

Тогда $\exists (Z, d)$ — пополнение.

Доказательство.

- Пусть x ограничено, т. е. $\exists M \geq 0 : \quad \forall x, y \in X \quad \rho(x, y) \leq M$.

  Зафиксируем $t \in X$. Рассмотрим функцию $f_t(x) = \rho(t, x)$. Понятно, что она ограничена, т. е. $f_t \in m(X)$.

  Определим отображение $\varphi : X \to m(X) : \quad \varphi(t) \coloneqq f_t$.

  Проверим, что φ — изометрическое вложение. Для $s, t \in X \quad \|\varphi(t) - \varphi(s)\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} |\rho(t, x) - \rho(s, x)|$.
$$\begin{cases} |\rho(t, x) - \rho(s, x)| \leq \rho(t, s) \\ \text{Пусть } x = t \implies |\rho(t, t) - \rho(s, t)| = \rho(t, s) \end{cases} \implies \|\varphi(t) - \varphi(s)\|_\infty = \rho(t, s)$$

- (X, ρ) — произвольное.

  Зафиксируем $a \in X$. Для $t \in X$ рассмотрим $f_t(x) = \rho(t, x) - \rho(a, x)$.
$$|f_t(x)| \overset{\triangle}{\leq} \rho(a, t) \quad \forall x \implies f_t \in m(X)$$
$$\varphi : X \to m(X) : \quad \varphi(t) \coloneqq f_t$$

  Возьмём $t, s \in X$.
$$\|\varphi(t) - \varphi(s)\|_{m(X)} = \sup_{x\in X} |f_t(x) - f_s(x)| = \sup_{x\in X} |\rho(t, x) - \rho(s, x)| = \rho(t, s)$$

Значит, φ — изометрическое вложение.

$$Z = \overline{\varphi(X)}$$

$\square$

Замечание. $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное.

Рассмотрим $X^* = \{ f : X \to \mathbb{C}$ — линейный непрерывный функционал $\}$. X^* всегда полное (это будет доказано позже).

Рассмотрим $(X^*)^*$. Существует естественное (каноническое) вложение X в X^{**}: $\overline{(\pi(x))}^{X^{**}}$.

Замечание. Пополнение единственно с точностью до изоморфизма.

Примеры.

1. Пространства финитных последовательностей: $(F, \|\cdot\|_p)$, $\quad 1 \le p \le \infty$.
   - $p < +\infty$
     Уже знаем, что $(F, \|\cdot\|_p) \subset l^p$ и оно не замкнуто.
     $$\overline{F} = l^p, \qquad \text{для } x = (x_1, x_2, \dots) \in l^p \quad x^{(m)} = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots)$$
     $$\|x - x^{(m)}\|_p = \left(\sum |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$
     (т. к. это остаток сходящегося ряда).
     Таким образом, l^p — пополнение F по $\|\cdot\|_p$.
   - $p = +\infty$
     $$\overline{(F, \|\cdot\|_\infty)}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0$$
     C_0 — последовательности, предел которых равен 0.
     $$\{ x_j \}_{j=1}^{\infty}, \quad \lim_{j\to\infty} x_j = 0, \quad x^{(m)} = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots)$$
     $$\|x - x^{(m)}\|_\infty = \sup_{j>m} |x_j| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \implies C_0 \subset \overline{F}^{\|\cdot\|_\infty}$$
2. $\mathscr{P} = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad n \ge 0 \right\}$
   $\mathscr{P} \subset \mathcal{C}[a,b]$ по теореме Вейерштрасса, которая утверждает, что
   $$\forall f \in \mathcal{C}[a,b] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists p \in \mathscr{P} : \quad \|f - p\|_\infty < \varepsilon$$
3. $\mathcal{C}[a,b]$, $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}\, x\right)^{\frac{1}{p}}$, $\quad 1 \le p < +\infty$
   $$\overline{\mathcal{C}[a,b]}^{\|\cdot\|_p} = \mathrm{L}^p[a,b]$$

9. Теорема о вложенных шарах с замечаниями

Теорема 7 (критерий полноты метрического пространства). (X, ρ) — полное тогда и только тогда, когда

$$\forall \{ \mathtt{D}_n \}_{n=1}^{\infty} : \mathtt{D}_n = \mathtt{D}_{r_n}(x_n),\ D_{n+1} \subset D_n,\ \lim_{n\to\infty} r_n = 0 \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathtt{D}_n \ne \emptyset$$

Доказательство.

- $\implies$

  Центры шаров образуют фундаментальную последовательность, её предел принадлежит всем шарам.

- $\Longleftarrow$

  Возьмём фундаментальную последовательность $\{ x_n \}_{n=1}^{\infty}$.

  Обозначим $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$. В силу фундаментальности x_k

$$\exists \{ x_{n_k} \}_{k=1}^{\infty} : \quad \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\mathtt{D}_k = \mathtt{D}_{\varepsilon_k}(x_{n_k})$$

  Проверим, что $\mathtt{D}_{k+1} \subset \mathtt{D}_k$. Возьмём $y \in \mathtt{D}_{k+1}$.

$$\rho(x_{n_{k+1}}, y) \leq \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\rho(y, x_{n_k}) \overset{\triangle}{\leq} \rho(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, y) < \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k} \implies y \in \mathtt{D}_k \implies$$

$$\implies \mathtt{D}_{k+1} \subset \mathtt{D}_k \implies \exists a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathtt{D}_k \implies \lim x_{n_k} = a$$

$\square$

Замечание. В условиях теоремы пересечение состоит ровно из одной точки, и это точка $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Замечание. Требование $\lim r_n = 0$ существенно.

Пример (подготовительный). $\{ F_n \}_{n=1}^{\infty}, \quad F_n \subset \mathbb{R}, \quad F_n = \overline{F}_n, \quad F_{n+1} \subset F_n, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$
Примером таких множеств являются лучи $F_n = [n, +\infty)$.

Пример (существенность требования). Построим метрическое пространство, в котором шарами будут лучи из предыдущего примера.

$$X = [1, +\infty), \quad \rho(x, y) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

1. Проверим неравенство треугольника:

$$x \neq y \neq z \in X \quad \rho(x, y) + \rho(y, z) = 1 + \frac{1}{x+y} + 1 + \frac{1}{y+z} > 2 > 1 + \frac{1}{x+z}$$

2. Полнота.

   Пусть $\{ x_n \}$ фундаментальна. Докажем, что, начиная с какого-то элемента, она стабилизируется.

   Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\exists N : \quad \forall n, m \geq N \quad \rho(x_n, x_m) < \frac{1}{2} \implies \rho(x_m, x_N) < \frac{1}{2} \implies x_m = x_N \quad \forall m \geq N$$

3. Шары в X.

   Пусть $r_n = 1 + \frac{1}{2n}, \quad \mathtt{D}_n = \mathtt{D}_{r_n}(n)$. Понятно, что $n \in \mathtt{D}_n$.

   - $x > n$

$$\rho(n, x) = 1 + \frac{1}{n+x} < 1 + \frac{1}{2n} = r_n \implies x \in \mathtt{D}_n$$

   - $x < n \implies x \notin \mathtt{D}_n$

$$\mathtt{D}_n = [n, +\infty), \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathtt{D}_n = \emptyset$$

Замечание. Если $(X, \|\cdot\|)$ нормировано, то требование стремления радиусов к нулю избыточно:

$$\text{полнота} \iff \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathtt{D}_n \neq \emptyset \text{ при } \mathtt{D}_{n+1} \subset \mathtt{D}_n$$

Доказательство. Следует из линейности. □

10. Всюду плотные множества. Сепарабельные пространства. Примеры: $m(A)$, $\mathcal{C}[a,b]$, пространства последовательностей. Сепарабельность подпространства

Определение 21. $(X, \rho), \quad A, C \subset X$
A плотно в C, если $C \subset \overline{A}$, т. е.

$$\forall x \in C \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A: \quad \rho(x,a) < \varepsilon$$

$$\iff C \subset \bigcup_{a \in A} \mathtt{B}_\varepsilon(a) \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\iff \forall x \in C \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mathtt{B}_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$$

Определение 22. *A всюду плотно в X*, если $\overline{A} = X$.

Замечание.

$$\left.\begin{aligned} &A \text{ плотно в } B \\ &B \text{ плотно в } C \end{aligned}\right\} \implies A \text{ плотно в } C$$

Определение 23. (X, ρ) *сепарабельно*, если в нём существует счётное всюду плотное множество.

Теорема 8. $n \in \mathbb{N}, \quad 1 \le p \le +\infty$
l^p_n сепарабельно.

Доказательство. Пусть $l^p_n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$. Рассмотрим $\mathbb{Q}^n = \{\, x = (x_1, \dots, x_n), \quad x_j \in \mathbb{Q} \,\}$.
Знаем, что $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \implies \mathbb{Q}^n$ всюду плотно в l^p_n.
Для комплексных последовательностей рассмотрим $\widetilde{\mathbb{Q}} = \{\, z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{Q} \,\}$. □

Следствие. Пространство финитных последовательностей $(F, \|\cdot\|_{1 \le p \le +\infty})$ сепарабельно.

Доказательство. Вложим l^p_n в F:

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in l^p_n \quad \to \quad (x_1, \dots, x_n, 0, \dots) \in F$$

$$\implies F = \bigcup_{n=1}^{\infty} l^p_n \implies E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n \text{ — всюду плотное в } (F, \|\cdot\|_p)$$

□

Следствие. $l^p, \quad 1 \le p < +\infty, \quad C_0$ сепарабельны.

Доказательство. F — пространство финитных последовательностей.

$$\overline{(F, \|\cdot\|_p)}^{\|\cdot\|_p} = l^p, \quad 1 \le p < +\infty$$

$E = \{\, (x_1, \dots, x_n, 0, \dots) \mid x_j \in Q, \ h \in \mathbb{N} \,\}$ — счётное всюду плотное в l^p.
$\overline{(F, \|\cdot\|_\infty)}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0 \implies C_0$ сепарабельно. □

Замечание.
$$T = \left\{ x = \{ x_j \}_{j=1}^{\infty} \mid x_j \in Q \right\} \implies \overline{T}^{\|\cdot\|_p} = l_p, \quad 1 \le p \le +\infty$$
Но T не счётно (это следует из того, что $2^{\mathbb{N}}$ равномощно $[0,1]$).

Утверждение 14. $C \subset l^\infty$ сепарабельно.

Доказательство. Упражнение. $\square$

Теорема 9. l^∞ не сепарабельно.

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbb{N}$. Рассмотрим $x_j^A = \begin{cases} 1, & j \in A \\ 0, & j \notin A \end{cases}$. Тогда $x^A = \{ x_j^A \}_{j=1}^{\infty}$.

Заметим, что множество таких последовательностей $\{ x^A \}_{A \subset \mathbb{N}}$ не счётно:
Пусть $A, C \subset \mathbb{N}, \quad A \neq C$.
$$x_j^A - x_j^C = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$
Поскольку $A \neq C$, $\|x^A - x^C\|_\infty = 1$.
$$\implies \mathtt{B}_{\frac{1}{2}}(x^A) \cap \mathtt{B}_{\frac{1}{2}}(x^C) = \emptyset$$
Пусть E всюду плотно в l^∞. Тогда в каждом таком шарике должен быть его представитель:
$$\forall A \subset \mathbb{N} \quad \exists e_A \in E \cap \mathtt{B}_{\frac{1}{2}}(x^A)$$
При этом, $A \neq C \implies e_A \neq e_C$.
$\{ e_A \}_{A \subset \mathbb{N}} \subset E, \quad \{ e_A \}_{A \subset \mathbb{N}}$ не счётно $\implies E$ не счётно. $\square$

Теорема 10. (X, ρ) — метрическое пространство, сепарабельно, $\quad Y \subset X$.
Тогда Y сепарабельно.

Доказательство. Пусть $E = \{ x_n \}_{n=1}^{\infty}, \quad \overline{E} = X$.
$$\rho(x_n, Y) = \inf_{y \in Y} \rho(x_n, y)$$
$$\exists \{ y_{n,k} \}_{k=1}^{\infty} : \quad \lim_{k \to \infty} \rho(x_n, y_{n,k}) = \rho(x_n, Y)$$
Рассмотрим $F = \{ y_{n,k} \}_{n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}}$ — счётное. Проверим, что F всюду плотно в Y.
Пусть $y \in Y,\ \varepsilon > 0,\ y \in X$.
$$\exists x_n : \quad \rho(x_n, y) < \varepsilon$$
$$\implies \rho(x_n, Y) < \varepsilon \implies \exists y_{nk} : \quad \rho(x_n, y_{n,k}) < \varepsilon$$
$$\implies \rho(y, y_{nk}) \overset{\triangle}{\le} \rho(y, x_n) + \rho(x_n, y_{nk}) < 2\varepsilon$$
$\square$

Следствие. X — бесконечное множество.
Тогда $m(X)$ не сепарабельно.

Доказательство.
$$m(X) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C}) \;\middle|\; \sup_{x \in X} |f(x)| < +\infty \right\}$$
X — бесконечное $\implies \exists \{ a_j \}_{j=1}^{\infty}, \quad a_j \in X, \quad a_j \neq a_k$.

Рассмотрим $L = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \mid f(x) \in m(X), \quad f(x) \overset{x \neq a_j}{=\!=\!=} 0 \right\}$.

$$f \in L \quad \|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| = \sup_{j \in \mathbb{N}} |f(a_j)|$$

$$L \xrightarrow{\Phi} l^\infty : \quad f \in L \quad f \to \{ f(a_j) \}_{j=1}^\infty$$

Φ — изометрия $\implies$ $L \subset m(X)$. l^∞ не сепарабельно $\implies$ L не сепарабельно. Значит, $m(x)$ не сепарабельно. □

11. Нигде не плотные множества. Теорема Бэра о категориях

Определение 24. (X, ρ) — метрическое пространство, $\quad A \subset X$.
A нигде не плотно, если A не плотно ни в одном шаре:

$$\forall \mathtt{B}_r(x) : x \in X, \ r > 0 \quad \exists \mathtt{B}_{r_1}(x_1) \subset \mathtt{B}_r(x) : \quad \mathtt{B}_{r_1}(x_1) \cap A = \emptyset$$

$$\iff \operatorname{Int}(\overline{A}) = \emptyset$$

$$\iff \forall \mathtt{D}_r(x) \quad \exists \mathtt{D}_{r_1}(x_1) \subset \mathtt{D}_r(x) : \quad \mathtt{D}_{r_1}(x_1) \cap A = \emptyset$$

Определение 25. (X, ρ), $\quad M \subset X$ — *множество первой категории*, если

$$M = \bigcup_{j=1}^\infty M_j, \quad M_j \text{ нигде не плотно}$$

Все остальные множества называются *множествами второй категории.*

Теорема 11. (X, ρ) — полное.
Тогда X — множество второй категории.

Доказательство. Пусть M_j — нигде не плотные, $\quad j \in \mathbb{N}$, $\quad M = \bigcup_{j=1}^\infty M_j$, $\quad M_j \subset X$. Докажем, что $\exists x \in X \setminus M$. Воспользуемся теоремой о вложенных шарах.

Возьмём $D_0 = \mathtt{D}_{r_0}(x_0)$, $\quad r_0 = 1$. M_1 нигде не плотно $\implies$ $\exists D_1 = \mathtt{D}_{r_1}(x_1) \subset D_0 : \quad D_1 \cap M_1 = \emptyset$. При этом, можно взять $r_1 < 1$ (если при большем r_1 не пересекалось, то и не начнёт).

M_2 нигде не плотно $\implies$ $\exists D_2 = \mathtt{D}_{r_2}(x_2) \subset D_1 : \quad D_2 \cap M_2 = \emptyset, \quad r_2 < \frac{1}{2}$.

$$\dots$$

$$\exists D_{n+1} = \mathtt{D}_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset D_n : \quad D_{n+1} \cap M_{n+1} = \emptyset, \quad r_{n+1} < \frac{1}{n+1}$$

X — полное $\xRightarrow[\text{т. о вложенных шарах}]{}$ $\exists a \in \bigcap_{n=1}^\infty D_n$, т. к. $\lim r_n = 0$.

$$a \in X, \quad D_n \cap M_n = \emptyset \implies a \notin M_n \quad \forall n \implies a \notin M$$

□

12. Полные системы элементов, примеры. Полнота характеристических функций в L^p

Определение 26.

1. X — линейное пространство, $\quad \{ x_\alpha \}_{\alpha \in A}$, $\quad x_\alpha \in X$.

$$\mathscr{L}\{ x_\alpha \} = \left\{ x = \sum_{j=1}^n c_j x_{\alpha_j} \right\}$$

$\mathscr{L}\{ x_\alpha \}$ будем называть *линейной оболочкой* X.

2. $(X, \|\cdot\|)$.

   Будем говорить, что $\{ x_\alpha \}_{\alpha\in A}$ — *полная система элементов*, если $\overline{\mathscr{L}\{ x_\alpha \}} = X$, то есть линейная оболочка всюду плотна в X.

Примеры.

1. $\mathcal{C}[a,b]$, $\quad \{ x^n \}_{n=0}^{\infty}$

$$\mathscr{L}\{ x^n \}_{n\geq 0} = \mathcal{P} = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right\}, \quad \overline{\mathcal{P}} = \mathcal{C}[a,b]$$

   $\implies \{ x^n \}_{n=0}^{\infty}$ — полное семейство.

2. l^p, $\quad 1 \leq p < +\infty$, $\quad e_n = (0, \ldots, 0, \underset{n}{1}, 0, \ldots, 0)$

   $\{ e_n \}_{n=1}^{\infty}$ — полное семейство в l^p и в C_0.

   $\mathscr{L}\{ e_n \}_{n=1}^{\infty} = F$ — финитные последовательности $\implies \overline{(\mathscr{L}\{ e_n \})}^{\|\cdot\|_p} = l^p, \quad 1 \leq p < +\infty$

$$\overline{\mathscr{L}\{ e_n \}}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0$$

Утверждение 15. $(X, \|\cdot\|)$, $\quad \{ x_n \}_{n=1}^{\infty}$ — счётное полное семейство.
Тогда $(X, \|\cdot\|)$ сепарабельно.

Доказательство. Пусть X над $\mathbb{R}$.
Рассмотрим $E = \mathscr{L}\{ x_n \}_{n=1}^{\infty}$ — всюду плотно, но не счётно.
Возьмём $H = \left\{ x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \mid c_j \in \mathbb{Q} \right\}$ — счётно, $E \subset \overline{H}$, $\quad \overline{E} = X$. $\square$

Следствие. $\mathcal{C}[a,b]$ сепарабельно.

Теорема 12 (Лебега, о предельном переходе)**.** $\{ h_n(x) \}$ — измеримые, $\quad h_n(x) \geq 0 \quad \forall n, x$
$h_n(x) \leq \Phi(x)$, $\quad \int\limits_T \Phi(x)\,\mathrm{d}\,\mu < +\infty$, $\quad h_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$ (все утверждения п. в.).

$$\implies \int\limits_T F(x)\,\mathrm{d}\,\mu < +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \int\limits_T h_n(x)\,\mathrm{d}\,\mu = \int\limits_T F(x)\,\mathrm{d}\,\mu$$

Теорема 13. $(T, \mathcal{U}, \mu)$ — пространство с мерой.

1. $\{ \chi_e \}_{e\in\mathcal{U}}$ — полное семейство в L^∞;
2. $\{ \chi_e \}_{e\in\mathcal{U},\ \mu e<+\infty}$ — полное семейство в L^p, $\quad 1 \leq p \leq +\infty$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — измеримая, $\quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in T$. Возьмём $n \in \mathbb{N}$.

$$e_k := \left\{ x \in T \mid \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n^2 - 1 \right\}, \quad e_{n^2} := \{ x \in T \mid n \leq f(x) \}$$

$$\implies T = \bigcup_{k=0}^{n^2} e_k$$

$$g_n(x) := \sum_{k=1}^{n^2} \frac{k}{n} \chi_{e_k}$$

$$g_n(x) \leq f(x) < g_n(x) + \frac{1}{n}, \quad x \in \bigcup_{k=0}^{n^2-1} e_k$$

1. $p = \infty$

   Если $n > \|f\|_\infty$, то $e_{n^2} = \{\, x \mid f(x) > n \,\} \implies \mu(e_{n^2}) = 0 \implies |f(x) - g_n(x)| \le \frac{1}{n}$ п. в. на T.

   $$g_n \in \mathscr{L}\{\,\chi_e\,\}_{e \in \mathcal{U}} \implies f \in \overline{\mathscr{L}\{\,\chi_e\,\}_{e \in \mathcal{U}}}$$

2. $1 \le p < +\infty$

   $$|f(x) - g_n(x)|^p \le \big(f(x)\big)^p, \quad \int\limits_T \big(f(x)\big)^p \,\mathrm{d}\,\mu < +\infty$$

   $$\forall x \in T \quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x) \implies |f(x) - g_n(x)|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ п. в. } x$$

   $$\Big(\int\limits_T |f - g_n|^p \,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \to 0 \implies f \in \overline{\mathscr{L}\{\,\chi_e\,\}_{e \in \mathcal{U},\ \mu e < +\infty}}$$

   Для $f \in \mathrm{L}^p$ можно написать $f = f_+ - f_-$.

□

13. Полнота характеристических функций элементов полукольца в L^p. Сепарабельность L^p по мере Лебега

Определение 27. T — множество, $\mathcal{R}$ — семейство подмножеств T.
$\mathcal{R}$ будем называть *полукольцом*, если

1. $\emptyset \in \mathcal{R}$;
2. $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cap B \in \mathcal{R}$;
3. $A, B \in \mathcal{R}, \quad B \subset A \implies \exists \{\, e_j \,\}_{j=1}^n : \quad e_i \cap e_j = \emptyset,\ e_j \in \mathcal{R},\ A \setminus B = \bigcup j = 1^n e_j$.

Определение 28. $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ — *мера* на полукольце, если

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. если $\{\, e_j \,\}_{j=1}^\infty, \quad e_j \in \mathcal{R}, \quad e_j \cap e_i = \emptyset, \quad e = \bigcup_{j=1}^\infty, \quad e \in \mathcal{R}$, то $\mu e = \sum_{j=1}^\infty \mu e_j$.

Пример. $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{R} = \left\{\, e = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j) \;\middle|\; a_j < b_j \,\right\}, \quad \mu e = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$$

Определение 29 (стандартное распространение меры с полукольца на σ-алгебру)**.** $E \subset T$
Определим *внешнюю меру*:

$$\mu^*(E) = \inf \left\{\, \sum_{j=1}^\infty \mu e_j \;\middle|\; E \subset \bigcup_{j=1}^\infty e_j, \quad e_j \in \mathcal{R} \,\right\}$$

$\mathcal{U}$ — σ-алгебра *измеримых множеств*.

Теорема 14. $(T, \mathcal{U}, \mu)$ — пространство с мерой, μ — стандартное распространение с $\mathcal{R}$, $p \le p < +\infty$.
Тогда $\{\, \chi_e \,\}_{e \in \mathcal{R}}$ — полное семейство в $\mathrm{L}^p(T, \mu)$.

Доказательство. Пусть $E \in \mathcal{U}, \quad \mu E < +\infty$. Приблизим χ_E линейными комбинациями $\{\, \chi_{e_j} \,\}_{e_j \in \mathcal{R}}$.

$$\mu E = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu e_j \;\middle|\; E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} e_j, \quad e_j \cap e_i = \emptyset, \quad e_j \in \mathcal{R} \right\}$$

Возьмём $\varepsilon > 0$. По определению inf,

$$\exists \{ e_j \}_{j=1}^{\infty} : \quad e_j \in \mathcal{R},\ e_j \cap e_i = \emptyset, \quad \mu E \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu e_j < \mu E + \varepsilon$$

Обозначим $A = \bigcup e_j$.
Так как ряд сходится, можно отбросить его начало так, чтобы

$$\exists n \in \mathbb{N} : \quad \sum_{j=n+1}^{\infty} \mu e_j < \varepsilon$$

Обозначим $B = \bigcup_{j=1}^{n} e_j$.

$$\chi_B = \sum_{j=1}^{n} \chi_{e_j} \in \mathscr{L}\{ \chi_e \}_{e \in \mathcal{R}}$$

При этом, $\mu(A \setminus B) < \varepsilon, \quad \mu(A \setminus E) < \varepsilon$.

$$\|\chi_E - \chi_B\|_p \overset{\triangle}{\le} \|\chi_A - \chi_E\|_p + \|\chi_A - \chi_B\|_p = \Big(\int\limits_{A \setminus E} \mathrm{d}\,\mu \Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int\limits_{A \setminus B} \mathrm{d}\,\mu \Big)^{\frac{1}{p}} < 2\varepsilon^{\frac{1}{p}} \implies \chi_E \in \overline{\mathscr{L}\{ \chi_e \}_{e \in \mathcal{R}}}$$

Уже доказано, что

$$\overline{\mathscr{L}\{ \chi_E \}_{E \in \mathcal{U},\ \mu E < +\infty}}^{\|\cdot\|_p} = \mathrm{L}^p(T, \mu)$$
$$\implies \overline{\mathscr{L}\{ \chi_e \}_{e \in \mathscr{R}}}^{\|\cdot\|_p} = \mathrm{L}^p$$

$\square$

Следствие. μ — стандартное распространение с $\mathcal{R}$ на $\mathcal{U}$, $\quad 1 \le p < +\infty$.
Если $\mathcal{R}$ счётно, то $\mathrm{L}^p(T, \mathcal{U}, \mu)$ сепарабельно.

Следствие. $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по мере Лебега λ, $\quad 1 \le p < +\infty$.
Тогда $L^p(E, \lambda)$ сепарабельно.

Доказательство. $\mathcal{R} = \left\{ e = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j) \right\}$ — полукольцо ячеек. Рассмотрим

$$\mathcal{R}_0 = \left\{ \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j) \;\middle|\; a_j, b_j \in \mathbb{Q} \right\}$$

Понятно, что $\mathcal{R}_0$ счётно.
Пусть $e \in \mathcal{R}$

$$e = \prod_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j), \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}, \quad a_j < b_j$$

Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$\exists e_0 \in \mathcal{R}_0 : \quad e \subset e_0, \quad \lambda(e_0 \setminus e) < \varepsilon$$
$$\implies \|\chi_{e_0} - \chi_e\|_p = \Big(\int\limits_{e_0 \setminus e} \mathrm{d}\,\lambda \Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\implies \overline{\mathscr{L}\{ \chi_e \}_{e \in \mathcal{R}}} \ni \{ \chi_e \}_{e \in \mathcal{R}} \implies \overline{\mathscr{L}\{ \chi_e \}_{e \in \mathcal{R}_0}}^{\|\cdot\|_p} = \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$$
$$\mathrm{L}^p(E, \lambda) \subset \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n, \lambda)$$

$$\implies \mathrm{L}^p(E,\lambda) \text{ сепарабельно}$$

$\square$

14. Плотность непрерывных функций в L^p для регулярной меры. Следствие

Теорема 15. (T,ρ), $(T,\mathcal{U},\mu)$, μ — регулярная, $1 \le p < +\infty$.
Тогда $\mathcal{C}(T) \cap \mathrm{L}^p(T,\mu)$ плотно в L^p.

Доказательство. Пусть $e \in \mathcal{U}$ — измеримо, $\mu e < +\infty$. Приблизим χ_e непрерывными (по $\|\cdot\|_p$). Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$\mu \text{ регулярна} \implies \exists \text{ замкн. } F, \text{ откр. } G: \quad F \subset e \subset G, \quad \mu(G \setminus E) < \varepsilon$$

$$\varphi(x) \coloneqq \frac{\rho(x, T \setminus G)}{\rho(x, T \setminus G) + \rho(x, F}$$

Проверим непрерывность:
Пусть $\rho(x,F) = 0 \implies x \in F,\ x \notin T \setminus G \implies \rho(x, T \setminus G) \ne 0$.

$$\implies \rho \in \mathcal{C}(T)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in T \setminus G \\ 1, & x \in F \end{cases} \qquad \forall x \in T \implies 0 \le \varphi(x) \le 1$$

$$|\varphi(x) - \chi_e(x)| = \begin{cases} 0, & x \in T \setminus G \\ 0, & x \in F \end{cases}$$

$$|\chi_e(x) - \varphi(x)| \le 1 \quad \forall x$$

$$\|\chi_e - \varphi\|_p = \Big(\int\limits_T |\chi_e - \varphi|^p \,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\int\limits_{G\setminus F} |\chi_e - \varphi|^p \,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\int\limits_{G\setminus F} \mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\mu(G \setminus F)\Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

$$\overline{\mathscr{L}\{\,\chi_e\,\}_{\in\mathcal{U},\ \mu e < +\infty}}^{\|\cdot\|_p} = \mathrm{L}^p(T,\mu) \implies \overline{\mathcal{C}(T) \cap \mathrm{L}^p}^{\|\cdot\|_p} = \mathrm{L}^p$$

$\square$

Следствие. $K \subset \mathbb{R}^n$, K — компакт, λ — мера Лебега, $1 \le p < +\infty$

$$\implies \overline{\mathcal{C}(K)}^{\|\cdot\|_p} = \mathrm{L}^p(K,\lambda)$$

15. Компакты в метрических пространствах. Определение и примеры вполне ограниченных множеств

Утверждение 16 (секвенциальная компактность)**.** (K,ρ) — метрический компакт.

$$\iff \forall \{\,x_n\,\}_{n=1}^{\infty} : x_n \in K \quad \exists \{\,x_{n_j}\,\} : \quad \exists \lim_{j\to\infty} x_{n_j} \in K$$

Утверждение 17. (K,ρ) — метрический компакт $\implies$ K ограничено и замкнуто.

Замечание. Для $K \subset \mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) верно и обратное. В общем случае — нет.

Пример.

$$l^2 = \left\{ x = \{\,x_j\,\}_{j=1}^{\infty} \;\middle|\; \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |x_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2 < +\infty \right\}$$

$$\mathtt{D}_1(\mathbb{O}_n) = \left\{\, x \in l^2 \;\middle|\; \|x\|_2 \le 1 \,\right\}$$

Покажем, что $\mathtt{D}_1$ не компакт.

$$e_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathtt{D}_1(\mathbb{O}_n)$$

$$\|e_i - e_j\|_2 = \sqrt{2}$$

$$\forall \{\, e_{n_k} \,\} \text{ не фундаментальна } \implies \nexists \lim \{\, e_{n_k} \,\}$$

Определение 30. $(A, \rho), \quad A \subset X$.
A относительно компактно, если $\overline{A}$ компактно.

$$\iff \forall \{\, x_n \,\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \in A \quad \exists \{\, x_{n_j} \,\}_{j=1}^{\infty} \quad \exists \lim_{j\to\infty} x_{n_j} \in X$$

Определение 31. $(X, \rho), \quad A \subset X, \quad \varepsilon > 0, \quad F \subset X$.
Будем говорить, что F — *ε-сеть* для множества A, если

$$\forall a \in A \quad \exists b \in F : \quad \rho(a, b) < \varepsilon$$

$$\iff A \subset \bigcup_{b \in F} \mathtt{B}_\varepsilon(b)$$

Определение 32. $A \subset X$.
A называется *вполне ограниченным*, если $\forall \varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть для A.

Замечание. Если A вполне ограничено, то A ограничено.

Доказательство. Пусть $\varepsilon = 1$.

$$\exists F = \{\, x_j \,\}_{j=1}^{n} \text{ — 1-сеть, т. е.} A \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathtt{B}_1(x_j) \implies A \text{ ограничено}$$

□

Примеры.

1. $A \subset \mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$)

   Докажем, что если A ограничено, то A вполне ограничено.

   A ограничено $\implies \exists M > 0 : \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in A \quad |x_j| \le M$. Пусть $Q = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid \ |x_j| \le M \,\}$.

   $$Q = \bigcup_{j=1}^{N} Q_j, \quad \operatorname{diam} Q_j < \varepsilon, \quad F = \{\, \text{вершины } Q_j \,\}$$

   $\implies F$ — ε-сеть.

2. l^2

   $$D = \left\{\, x = \{\, x_j \,\}_{j=1}^{\infty} \;\middle|\; \|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le 1 \,\right\}$$

   D ограничено. Проверим, что оно **не** вполне ограничено.

   Рассмотрим $e_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0 \dots, 0)$.

   $$\|e_j - e_i\|_2 = \sqrt{2}$$

   Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

   $$\mathtt{B}_{\frac{1}{2}}(e_j) \cap \mathtt{B}_{\frac{1}{2}}(e_i) = \emptyset$$

F — $\frac{1}{2}$-сеть для D.

$$\implies \forall j \quad \exists f_j \in F \cap \mathrm{B}_{\frac{1}{2}}(e_j)$$

$f \neq f_i \implies \{ f_j \}_{j=1}^{\infty} \subset F \implies F$ бесконечно — $\lightning$ (бесконечной ε-сети не бывает).

3. l^2

$$\Pi = \left\{ x = \{ x_j \}_{j=1}^{\infty} \;\middle|\; |x_j| \le \frac{1}{2^j} \right\} \text{— \textit{гильбертов кирпич}}$$

(в $\mathbb{R}^3$ так устроены кирпичи). Проверим, что Π вполне ограничено.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \Big(\sum_{j=N+1}^{\infty} \big(\frac{1}{2^j}\big) \Big)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

$$\Pi^* = \left\{ x = (x_1, \dots, x_N, 0, \dots) \;\middle|\; |x_j| \le \frac{1}{2^j} \right\}$$

Можно считать, что $\Pi^* \subset \mathbb{R}^N$ (если отбросить нулевые координаты). Тогда $\mathbb{R}^N \subset l^2 \implies \exists F$ — конечная ε-сеть, $F \subset \mathbb{R}^N$.

Проверим, что F — 2ε-сеть для Π. Возьмём $x \in \Pi$.

$$x = (x_1, \dots, x_N, x_{N+1}, \dots) = \underbrace{(x_1, \dots, x_N, 0, \dots)}_{y} + \underbrace{(0, \dots, 0, x_{N+1})}_{z}$$

$$\|z\|_2 = \Big(\sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \text{ в силу выбора } N$$

$$\exists f \in F: \quad \|y - f\|_2 < \varepsilon \text{ т. к.} y \in \Pi^*$$

$$\|x - f\|_2 = \|(y - f) + z\|_2 \overset{\triangle}{\le} \|y - f\| + \|z\| < 2\varepsilon$$

16. Свойства вполне ограниченных множеств. Лемма о разбиении

Свойства. (X, ρ)

1. $A \subset X$, A вполне ограничено $\implies \overline{A}$ вполне ограничено.
2. $A \subset Y \subset X$, A вполне ограничено в $X \implies A$ вполне ограничено в Y.
3. A вполне ограничено $\implies A$ сепарабельно.

Доказательство.

1. Пусть $\varepsilon > 0$, F — конечная ε-сеть для A.
   Проверим, что F — 2ε-сеть для $\overline{A}$. Возьмём $x \in \overline{A}$. Пусть $x \in \overline{A} \implies \exists y \in A; \quad \rho(x, y) < \varepsilon$.
   $$\exists f \in F: \quad \rho(y, f) < \varepsilon \implies \rho(x, f) \overset{\triangle}{\le} \rho(x, y) + \rho(y, f) < 2\varepsilon$$
2. Пусть $\varepsilon > 0 \implies \exists \{ x_j \}_{j=1}^{n}$ — ε-сеть для A, т. е. $A \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{B}_\varepsilon(x_j)$.
   Пусть $y_j \in A \cap \mathrm{B}_\varepsilon(x_j)$ (если $A \cap \mathrm{B}_\varepsilon(x_j) = \emptyset$, то забудем об этом j).
   $$E = \{ y_j \}_{j=1}^{n} \text{ — } 2\varepsilon\text{-сеть для } A, \quad E \subset A \subset Y$$
   Возьмём $x \in A$.
   $$\exists x_j : \rho(x, x_j) < \varepsilon, \quad \rho(x_j, y_j) < \varepsilon \implies \rho(x, y_j) \le \rho(x, x_j) + \rho(x_j, y_j) < 2\varepsilon$$

3. Пусть F_n — конечная $\frac{1}{n}$-сеть. Пусть $E = \bigcup F_n \implies E$ всюду плотно в $A \implies A$ сепарабельно.

$\square$

Обозначение. $\operatorname{diam} B = \sup\limits_{x,y \in B} \rho(x,y)$

Лемма 1. $(X,\rho), \quad \varepsilon > 0, \quad A \subset X, \quad \exists$ конченая ε-сеть для A.

$$\implies A = \bigcup_{j=1}^{n} C_j, \quad C_j \cap C_i = \emptyset, \quad C_j \neq \emptyset, \quad \operatorname{diam} C_j \leq 2\varepsilon$$

Доказательство.

$$\exists \{ x_j \}_{j=1}^{n} : \quad A \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{B}_\varepsilon(x_j)$$

$$C_1 \coloneqq A \cap \mathrm{B}_\varepsilon(x_1)$$

$$C_2 \coloneqq \big(A \cap \mathrm{B}_\varepsilon(x_2)\big) \setminus C_1$$

$$\dots$$

$$C_j = \big(A \cap \mathrm{B}_\varepsilon(x_j)\big) \setminus \big(C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{j-1}\big)$$

Пустые C_j не рассматриваем. $\square$

17. Теорема Хаусдорфа: критерий компактности в терминах вполне ограниченности. Следствия

Теорема 16. $(X,\rho), \quad A \subset X$

$$A \text{ — компакт} \iff \begin{cases} (A,\rho) \text{ — полное} \\ A \text{ вполне ограничено} \end{cases}$$

Доказательство.

- $\implies$
  - Проверим полноту.
    Пусть $\{ x_n \}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в A. Т. к. A — компакт,
    $$\exists \{ x_{n_j} \}_{j=1}^{\infty} : \quad \exists \lim_{j\to\infty} x_{n_j} = a, \quad a \in A$$
    По одному из свойств фундаментальных последовательностей, $\lim x_n = a \implies (A,\rho)$ — полное.
  - Проверим вполне ограниченность.
    Возьмём $\varepsilon > 0$.
    $$A \subset \bigcup_{x \in A} \mathrm{B}_\varepsilon(x)$$
    A — компакт $\implies \exists \{ x_j \}_{j=1}^{n}, \ x_j \in A : \quad A \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{B}_\varepsilon(x_j) \implies \{ x_j \}_{j=1}^{n}$ — ε-сеть.
- $\impliedby$

  Возьмём $\{ x_n \}_{n=1}^{\infty}, \ x_n \in A$. Докажем, что $\exists \{ x_{n_j} \} : \quad \exists \lim\limits_{j\to\infty} x_{n_j} = A$.

  Возьмём $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$. Воспользуемся леммой о разбиении:
  $$\exists \text{ конечная } \frac{1}{2}\text{-сеть} \implies \exists \left\{ C_j^{(1)} \right\}_{j=1}^{N_1} : \quad A = \bigcup_{j=1}^{N_1} C_j^{(1)}, \quad \operatorname{diam} C_j^{(1)} \leq 1$$

Существует $C_{j_1}^{(1)}$, содержащая бесконечное число элементов $\{ x_n \}_{n=1}^{\infty}$. Обозначим $A_1 = C_{j_1}^{(1)}$.
Возьмём $\varepsilon_2 = \frac{1}{3}$, $\exists$ конечная ε_2-сеть.

$$A_1 = \bigcup_{j=1}^{N_2} C_j^{(2)}, \quad \operatorname{diam} C_j^{(2)} \le 2\varepsilon_2 = \frac{2}{3}$$

Среди них есть $C_{j_2}^{(2)}$, содержащий бесконечное число элементов $\{ x_n \}$. Обозначим $A_2 = C_{j_2}^{(2)}$.
Получим $\{ A_m \}_{m=1}^{\infty}$, каждое из которых содержит бесконечное число элементов $\{ x_n \}$.

$$A_{m+1} \subset A_m, \quad \lim_{m\to\infty} \operatorname{diam} A_m = 0$$

Пусть $x_{n_1} \in A_1$.

$$\exists n_2 > n_1 : \quad x_{n_2} \in A_2, \quad \ldots, \quad \exists n_{>} n_{m-1} : \quad x_{n_m} \in A_m$$

$$\implies \forall j > m \quad x_{n_j} \in A_m \implies \rho(x_{n_j}, x_{n_m}) \le \operatorname{diam} A_m \implies \{ x_{n_m} \} \text{ фундаментальна}$$

A — полное $\implies \exists \lim\limits_{m\to\infty} x_{n_m} = a \in A \implies A$ — компакт.

□

Следствие. (X, ρ), $A \subset X$, A относительно компактно.
Тогда A вполне ограничено.

Доказательство. A относительно компактно $\implies \overline{A}$ компактно $\xRightarrow[\text{теорема}]{} \overline{A}$ вполне ограничено $\implies A$ вполне ограничено. □

Следствие. (X, ρ) — полное, A вполне ограничено.
Тогда A относительно компактно.

Доказательство. (X, ρ) — полное $\implies \overline{A}$ — полное $\xRightarrow[\text{теорема, } A \text{ вполне ограничено}]{} \overline{A}$ — компакт $\implies A$ относительно компактно. □

Следствие. (X, ρ) — полное, $A \subset X$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \text{ относительно компактная } \varepsilon\text{-сеть для } A$$

$$\implies A \text{ относительно компактно (и вполне ограничено)}$$

Доказательство. Возьмём $\varepsilon > 0$. Пусть H_ε — относительно компактная ε-сеть для A.

$$\implies H_\varepsilon \text{ вполне ограничено } \implies \exists F \text{ — конечная } \varepsilon\text{-сеть для } H_\varepsilon \implies$$
$$\implies F \text{ — } \varepsilon\text{-сеть для } A \implies A \text{ вполне ограничено } \iff A \text{ относительно компактно}$$

□

18. Теорема Арцела—Асколи: критерий относительной компактности множества в пространстве $\mathcal{C}(K)$

Теорема 17. $\Phi \subset \mathcal{C}(K)$.
Φ относительно компактно тогда и только тогда, когда

1. Φ ограничено в $\mathcal{C}(K)$;
2. Φ равностепенно непрерывно.

Доказательство. $\mathcal{C}(K)$ — полное. Значит,

$$\Phi \text{ относительно компактно } \iff \Phi \text{ вполне ограничено}$$

- $\implies$

  1. Ограниченность
     Φ вполне ограничено $\implies$ Φ ограничено, т. е.
     $$\exists M > 0 : \quad \forall f \in \Phi \quad \forall x \in K \quad |f(x)| \le M$$
  2. Равностепенная непрерывность
     Возьмём $\varepsilon > 0$
     $$\exists \text{ конечная } \varepsilon\text{-сеть } \{\, \varphi_j \,\}_{j=1}^n, \quad \varphi_j \in \mathcal{C}(K)$$
     $$\varphi_j \text{ равном. непр. } \implies \exists \delta_j : \quad \forall x, y \in K : \rho(x, y) < \delta \quad |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| < \varepsilon \quad 1 \le j \le n$$
     Положим $\delta = \min\limits_{1 \le j \le n} \{\, \delta_j \,\}$. Проверим условие равностепенной непрерывности с δ.
     Пусть $f \in \Phi, \quad x, y \in K : \rho(x, y) < \delta$.
     $$\{\, \varphi_j \,\} - \varepsilon\text{-сеть} \implies \exists 1 \le m \le n : \quad \|f - \varphi_m\|_\infty < \varepsilon \implies \max_{x \in K} |f(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon$$
     $$|f(x) - f(y)| \overset{\triangle}{\le} |f(x) - \varphi_m(x)| + |\varphi_m(x) - \varphi_m(y)| + |\varphi_m(y) - f(y)| < 3\varepsilon$$

- $\impliedby$

  Φ ограничено $\implies \exists M > 0 : \quad \forall f \in \Phi \quad \forall x \in K \quad |f(x)| \le M$

  Возьмём $\varepsilon > 0$.

  Знаем, что $\mathcal{C}(K) \subset m(K)$. Проверим, что Φ вполне ограничено. Для этого достаточно доказать, что существует компактная ε-сеть в $m(K)$ (по следствиям из предыдущей лекции).

  Воспользуемся условием равностепенной непрерывности:
  $$\exists \delta : \quad \forall \rho(x, y) < \delta, \ f \in \Phi \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$
  По лемме о разбиении,
  $$\exists C_j : \quad K = \bigcup_{j=1}^n C_j, \quad C_j \cap C_i = \emptyset, \quad C_j \ne \emptyset, \operatorname{diam} C_j < \delta$$
  Для определённости будем считать, что $\mathcal{C}(K) = \{\, f : K \to \mathbb{C} \,\}$.
  $$\Psi := \left\{ \, g(x) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x) \;\middle|\; y_j \in \mathbb{C} \, \right\}$$
  $$\|g(x)\|_\infty = \left\| \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j}(x) \right\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} |y_j| = \|y\|_{l_n^\infty}$$
  Рассмотрим
  $$F : l_n^\infty \to \Psi : \quad F(y) = \sum_{j=1}^n y_i \chi_{C_j}(x)$$
  $$\|F(y)\|_{m(K)} = \|y\|_{l_n^\infty}, \quad \|F(y) - F(z)\|_{m(K)} = \|y - z\|_{l_n^\infty}$$
  F — изометрия. Это означает, что она сохраняет компактность.

  Выберем компакт
  $$Q = \{\, y = (y_1, \ldots, y_n) \mid \ |y_j| \le M \,\} \implies F(Q) - \text{компакт в } m(K)$$
  Так как Q находится в $\mathbb{C}^n$, оно является произведением кругов. Это называется *полидиск*.
  $$F(Q) = \left\{ \, g(x) = \sum_{j=1}^n y_j \chi_{C_j} \;\middle|\; |y_j| \le M \, \right\}$$

Проверим, что $F(Q)$ — ε-сеть для Φ.

Пусть $f \in \Phi, \quad C_j \neq \emptyset$. Выберем $x_j \in C_J$. Рассмотрим $y_j = f(x_j)$.

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\chi_{C_j}(x) \in F(Q)$$

Оценим $\|f - g\|_\infty$. Возьмём произвольный $x \in K$.

$$\implies \exists 1 \leq m \leq n : \quad x \in C_m \implies g(x) = f(x_m) \implies$$
$$\implies |f(x) - g(x)| = |f(x) - f(x_m)| < \varepsilon \quad \text{т. к. } \rho(x, x_m) < \delta$$

□

Замечание. Свойства 1 и 2 независимы.

Примеры.

1. $\Phi \subset \mathcal{C}[0,1]$
$$f_n(x) = x^2 + n, \quad n \in \mathbb{N}$$
$\{ f_n \}$ не ограничено, но равномерно непрерывно.

2. $\Phi \subset \mathcal{C}[0,1]$
$$f_n = x^n$$
$\{ f_n \}$ ограничено, но не равномерно непрерывно.

19. Достаточные условия равностепенной непрерывности множества в $\mathcal{C}(K)$

Теорема 18. $f \in \Phi \subset \mathcal{C}(K)$

- $\exists M > 0, \ \alpha, \beta > 0 : \quad \forall x, y \in K : \rho(x,y) < \beta \quad |f(x) - |f(y)| \leq M\big(\rho(x,y)\big)^\alpha$
- $K = [a,b], \quad \exists f'(x), \quad \exists L > 0 : \quad |f'(x)| \leq L \quad \forall x \in (a,b)$
- $K \subset G \subset \mathbb{R}^n, \quad K$ — компакт, $\quad G$ — открытое, $\quad \exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$
$$\exists L > 0 : \quad \forall x \in G \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right| \leq L$$
- $K \subset G \subset \mathbb{C}, \quad K$ — компакт, $\quad G$ — открытое, $\quad f$ аналитична в G
$$\exists L > 0 : \quad |f(z)| \leq L$$

В каждом из этих случаев Φ равностепенно непрерывно.

Доказательство.

- Пусть $\varepsilon > 0, \quad x, y \in K, \quad f \in \Phi, \quad \rho(x,y) < \delta < \beta$
$$\implies |f(x) - f(y)| \leq M\big(\rho(x,y)\big)^\alpha \underset{\text{выберем } \delta \text{ так, чтобы}}{<} M\delta^\alpha < \varepsilon$$
$$\implies \delta < \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$
$$\delta := \min\left\{ \beta, \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}$$

- Воспользуемся теоремой о промежуточном значении:

$$\exists c \in (a,b): \quad f(y)-f(x)=f'(c)(y-x) \implies |f(y)-f(x)| \le L|y-x|$$

Получили случай 1 с $M=L,\ \alpha=1,\ \forall\beta$.

- Пусть $x,y\in K: \quad [y,z]\subset G$ Рассмотрим

$$\Gamma(t): \quad 0\le t\le 1, \quad \Gamma(t)=t\cdot z+(1-t)\cdot y, \quad \Gamma(0)=y,\ \Gamma(1)=z$$

$$f(z)-f(y)=f\big(\Gamma(1)\big)-f\big(\Gamma(0)\big)$$

$f\big(\Gamma(t)\big)$ — дифференцируемая функция от t. Применим к ней случай 2.
Теперь рассмотрим $F=\mathbb{R}^n\setminus G$ — компакт. Известно, что $\rho(x,F)$ непрерывна.

$$h(x)\coloneqq \rho(x,F), \quad x\in K$$

$$\forall x\in F \quad h(x)>0$$

$$\exists \min_{x\in K} h(x) \eqqcolon h(x_0) \eqqcolon r>0$$

Пусть $x,y\in K: \quad \rho(x,y)<r$.

$$y\in \mathtt{B}_r(x)\subset G \implies [x,y]\subset G$$

Возьмём $\alpha=1,\ M=L\sqrt{n},\ \beta=r$ и применим случай 1.

-

$$\exists r>0: \quad \forall z\in K \quad \rho(z,F)\ge r, \quad F=\mathbb{C}\setminus G$$

Возьмём $\beta=\frac{r}{3}$.

$$\gamma=\{\,\zeta \mid |z-\zeta|=2\beta\,\}, \quad \gamma\subset G$$

Возьмём $z,w\in K: \quad \rho(z,w)<\beta$.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\gamma^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\,\zeta, \quad f(w)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{\gamma^+}\frac{f(\zeta)}{\zeta-w}\,\mathrm{d}\,\zeta$$

$$|f(z)-f(w)|=\frac{1}{2\pi}\Big|\int\limits_{\gamma^+} f(\zeta)\Big(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-w}\Big)\,\mathrm{d}\,\zeta\Big|$$

Вычислим отдельно:

$$\Big|\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-w}\Big|=\Big|\frac{z-w}{(\zeta-z)(\zeta-w)}\Big| \underset{\substack{|\zeta-z|=2\beta\\|\zeta-w|\ge\beta}}{<} \frac{|z-w|}{2\beta\cdot\beta}$$

Теперь

$$|f(z)-f(w)|\le\frac{1}{2\pi}\frac{L|z-w|}{2\beta^2}\cdot 2\pi\cdot 2\beta=\frac{L}{\beta}|z-w|$$

Применяем случай 1 с $\alpha,\beta=1,\ M=\frac{L}{\beta}$.

□

Упражнение.

1. $1\le p<+\infty, \quad A\subset l^p$

   A относительно компактно (и вполне ограничено) $\iff$

   (a) A ограничено в l^p;

   (b) $\forall\varepsilon>0 \quad \exists N\in\mathbb{N}: \quad \forall x=\{\,x_j\,\}_{j=1}^\infty\in A \quad \big(\sum_{j=n+1}^\infty |x_j|^p\big)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$.

2. $A\subset C_0$

   A относительно компактно $\iff$

(a) A ограничено;

(b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0: \quad \forall x = \{ x_j \}_{j=1}^{\infty} \in A \quad \sup\limits_{j \geq N+1} |x_j| < \varepsilon$

Часть II
Линейные пространства

20. Линейные операторы. Примеры. Простейшие свойства

Определение 33. X — *линейное пространство* над K ($K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), если

1. $x, y \in X \implies \alpha x + \beta y \in X \quad \forall \alpha, \beta \in K$;
2. $\emptyset \in X$.

Определение 34. X, Y линейны над K, $\quad A : X \to Y$.
Будем A называть *линейным оператором*, если

1. $A(x + z) = Ax + Az$;
2. $A(\alpha x) = \alpha Ax$.

Замечание. $\mathscr{L}in$ — линейное пространство над K.

Примеры.

1. $K(s,t) \in \mathcal{C}\big([a,b] \times [a,b]\big)$ Определим *интегральный оператор*:
$$(\mathcal{K}f)(s) = \int_a^b K(s,t) f(t) \, \mathrm{d}\, t$$
$K(s,t)$ называется *ядром интегрального оператора*.
$$\mathcal{K} \in \mathscr{L}in\Big(\mathcal{C}[a,b]\Big)$$

2. $X = \mathcal{C}^{(1)}[a,b] = \{ f \mid f' \in \mathcal{C}[a,b] \}, \quad Y = \mathcal{C}[a,b]$
$$\mathcal{D}(f) := f'$$
$$\mathcal{D} \in \mathscr{L}in(X, Y)$$

3. $l^1 \hookrightarrow l^2$
$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < +\infty \implies \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < +\infty$$
$Ax = x$ — *оператор вложения*

Определение 35. X — линейное пространство над полем K, $\quad B \subset X$.
B называется *выпуклым*, если
$$\forall x, y \in B \quad \forall t \in [0,1] \quad tx + (1-t)y \in B$$

Теорема 19. X, Y — линейные пространства, $A \in \mathscr{L}in(X, Y)$.

1. $L \subset X$ — подпространство $\implies A(L)$ — подпространство Y;
2. $M \subset Y$ — подпространство $\implies \underset{\text{(прообраз)}}{A^{-1}(Y)}$ — подпространство X;

3. $B \subset X$ — выпуклое $\implies$ $A(B)$ — выпуклое в Y;

4. $C \subset Y$ — выпуклое $\implies$ $\underset{\text{(прообраз)}}{A^{-1}(C)}$ — выпуклое в X;

5. A — биекция $\implies \exists A^{-1} \in \mathscr{L}in(Y, X)$.

Без доказательства. Было в алгебре. □

Определение 36. $A \in \mathscr{L}in(X, Y), \quad X, Y$ линейны над K.
Определим *ядро оператора*:

$$\operatorname{Ker} A = \{\, x \in X \mid Ax = 0 \,\}$$

и *образ оператора*:

$$\operatorname{Im} A = A(X) = \{\, y \in Y \mid \exists x \in X : \quad y = Ax \,\}$$

Следствие. $A \in \mathscr{L}in(X, Y) \implies \operatorname{Ker} A$ — подпространство X, $\quad \operatorname{Im} A$ — подпространство Y.

Определение 37. X, Y, Z линейны, $\quad X \xrightarrow{A} Y \xrightarrow{B} Z$.
$C = B \cdot A$ называется *произведением операторов*, если $C(x) = B\big(A(x)\big)$.

Утверждение 18. Если A, B линейны, то $A \cdot B$ линеен.

21. Непрерывность и ограниченность линейного оператора. Определение нормы

Определение 38. $(X, \|\cdot\|), \ (Y, \|\cdot\|), \quad A \in \mathscr{L}in(X, Y)$.
A *ограничен*, если

$$\forall \text{ ограниченного } B \subset X \quad A(B) \text{ ограничено}$$

Теорема 20 (эквивалентность непрерывности и ограниченности линейного оператора).
$(X, \|\cdot\|), \ (Y, \|\cdot\|), \quad A \in \mathscr{L}in(X, Y)$.
Следующие условия равносильны:

1. A непрерывен в $\mathbb{O}_n$;
2. A непрерывен на X;
3. $\exists c > 0 : \quad \|Ax\|_Y \le c\|x\|_X \quad \forall x \in X$;
4. A ограничен;
5. $\exists r > 0 : \quad A\big(\mathsf{B}_r(\mathbb{O}_n)\big)$ ограничено.

Доказательство.

- $1 \implies 2$
  В силу линейности $A(\mathbb{O}_n) = \mathbb{O}_n$.
  A непрерывен в $\mathbb{O}_n \implies \exists \delta > 0 : \quad \forall \|x\| < \delta \quad \|Ax\| < \varepsilon$.
  Зафиксируем $x_0 \in X$, обозначим $y_0 = Ax_0$.

$$\|x - x_0\| < \delta \xRightarrow[\text{непр. в } \mathbb{O}_n]{} \|A(x - x_0)\| < \varepsilon \iff \|Ax - Ax_0\| < \varepsilon \iff \quad \text{непр. в } x_0$$

- $2 \implies 1$ — очевидно.
- $1 \implies 3$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \quad \forall \|x\| \le \delta \quad \|Ax\| < \varepsilon$$

Возьмём $z \in X,\ z \neq \mathbb{O}_n$.

$$\left\| \frac{z}{\|z\|} \right\| = 1$$

$$x = \delta \cdot \frac{z}{\|z\|} \implies \|x\| = \delta \implies \|Ax\| < \varepsilon \implies \left\| A\Big(\delta \cdot \frac{z}{\|z\|}\Big) \right\| < \varepsilon \iff$$

$$\iff \frac{\delta}{\|z\|} \cdot \|Az\| < \varepsilon \iff \|Az\| < \frac{\varepsilon}{\delta}\|z\|$$

- $3 \implies 4$

  Возьмём $B \subset X$ — ограниченное, т. е.

  $$\exists R > 0 : \quad \forall x \in B \quad \|x\| \leq R \implies \|Ax\| \underset{3)}{\leq} c\|x\| \leq cR \implies A(B) \text{ ограничено}$$

- $4 \implies 5$

  $$\mathtt{B}_r(\mathbb{O}_n) \text{ ограничено} \xRightarrow[\text{очевидно}]{} A\big(\mathtt{B}_r(0)\big)$$

- $5 \implies 1$

  $$\exists R > 0 : \quad A\big(\mathtt{B}_r(0)\big) \subset \mathtt{B}_R(\mathbb{O}_n)$$

  т. е. $\|x\| < r \implies \|Ax\| < R$.

  Пусть $\|Ax\| < \varepsilon$. Найдём $\delta : \|x\| < \delta$.

  $$\delta = \varepsilon \cdot \frac{r}{R}$$

  Пусть $\|x\| < \delta$

  $$\implies \|x\| < \varepsilon \cdot rR \implies \left\| x \cdot \frac{R}{\varepsilon} \right\| < r \implies \left\| A\Big(x \cdot \frac{R}{\varepsilon}\Big) \right\| < R \implies \|Ax\| \cdot \frac{R}{\varepsilon} < R \iff \|Ax\| < \varepsilon$$

□

Определение 39. $\mathscr{B}(X,Y)$ — множество всех ограниченных линейных операторов из X в Y ($\iff$ множество всех непрерывных).

Замечание. $\mathscr{B}(X,Y)$ — подпространство $\mathscr{L}in(X,Y)$.

Определение 40. $A \subset \mathscr{B}(X,Y)$.

Введём *норму* на $\mathscr{B}$:

$$\|A\| = \inf\{\, c > 0 \mid \|Ax\| \leq c\|x\| \quad \forall x \in X \,\}$$

(по свойству 3 она конечна).

22. Формула для вычисления нормы линейного оператора. Примеры непрерывных и не непрерывных операторов

Утверждение 19. $(X, \|\cdot\|),\ (Y, \|\cdot\|)$

1. $A \in \mathscr{B}(X,Y) \implies \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X$;
2. $\|\cdot\|_{\mathscr{B}(X,Y)}$ удовлетворяет аксиомам нормы.

Доказательство.

1. Зафиксируем $x \in X$, возьмём $c > \|A\|$.

$$\implies \|Ax\| \le c\|X\| \implies \|Ax\| \le \inf\{\, c > 0 \mid c > \|A\| \,\} \|x\| \implies \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$$

2. $A \in \mathscr{B}(X, Y)$.

   (a) $\lambda \in K, \quad x \in X$.

$$\big\|(\lambda A)x\big\| = \big\|\lambda \cdot (Ax)\big\| = |\lambda| \cdot \|Ax\| \le |\lambda| \cdot \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall x$$

$$\implies \|\lambda A\| \le |\lambda| \cdot \|A\|$$

   Пусть $\lambda \ne 0$.

$$\left\|\frac{1}{\lambda}(\lambda A)\right\| \le \left|\frac{1}{\lambda}\right| \cdot \|\lambda A\|$$

$$\implies \|A\| \cdot |\lambda| \le \|\lambda A\|$$

   (b) Неравенство треугольника
   Пусть $x \in X$

$$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \le \|Ax\| + \|Bx\| \le \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| = (\|A\| + \|B\|)\|x\| \quad \forall x$$

$$\implies \|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$$

   (c) $\|A\| = 0$

$$\implies \forall x \in X \quad \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\| = 0$$

$\square$

Теорема 21. $A \in \mathscr{B}(X, Y)$

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| < 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Ax\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Доказательство. Обозначим $a = \sup\limits_{\|x\| \le 1}, \quad b = \sup\limits_{\|x\| < 1}, \quad c = \sup\limits_{\|x\| = 1}, \quad d = \sup\limits_{x \ne 0}.$

Очевидно, что $a \le b, \quad d \ge c$.

Докажем, что

$$\|A\| \ge a \ge b \ge \|A\|, \quad \|A\| \ge d \ge c \ge \|A\|$$

1. Пусть $x : \|x\| \le 1$.

$$\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\| \le \|A\| \implies a \le \|A\|$$

2. Пусть $z \in X \ne 0, \quad \varepsilon > 0$. Рассмотрим

$$x = \frac{z}{\|z\| \cdot (1 + \varepsilon)} \implies \|x\| < 1 \implies \|Ax\| \le b$$

$$\implies \left\|A\Big(\frac{z}{\|z\|(1+\varepsilon)}\Big)\right\| \le b \iff \|Az\| \le (1{+}\varepsilon) b {\cdot} \|z\| \quad \forall z \implies \|A\| \le (1{+}\varepsilon) b \quad \forall \varepsilon > 0 \implies \|A\| \le b$$

3. Пусть $x \in X \ne 0$

$$\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\| \implies \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \|A\| \implies \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \|A\| \implies d \le \|A\|$$

4. Пусть $z \in X \ne 0$

$$\left\|\frac{z}{\|z\|}\right\| = 1 \implies \left\|A\Big(\frac{z}{\|z\|}\Big)\right\| \le c \implies \|Az\| \le c\|z\| \implies \|A\| \le c$$

$\square$

Примеры.

1. $X = \mathcal{C}[a,b], \quad h(x) \in \mathcal{C}[a,b]$ $M_h(f) = h(x) \cdot f(x)$ — *мультипликатор.*

   Проверим, что
$$M_h \in \mathscr{B}(\mathcal{C}[a,b]), \quad \|M_h\|_{\mathscr{B}(\mathcal{C}[a,b])} = \|h\|_\infty$$

$$x \in [a,b] \implies \big(M_h(f)(x)\big) = h(x)f(x) \implies \|h \cdot f\|_\infty \le \max_{[a,b]} |h(x)| \cdot \max_{[a,b]} |f(x)| = \|h\|_\infty \cdot \|f\|_\infty$$

$$\forall f \in \mathcal{C}[a,b] \quad \|M_h(f)\|_\infty \le \|h\|_\infty \|f\|_\infty \implies \forall M_h \in \mathscr{B}(\mathcal{C}[a,b]) \quad \|M_h\|_{\mathscr{B}(\mathcal{C}[a,b])} \le \|h\|_\infty$$

$$f(x) = \chi_{[a,b]}(x) \in \mathcal{C}[a,b], \quad \|\chi_{[a,b]}\|_\infty = 1$$
$$\|M_h\| = \sup_{\|f\|=1} \|M_h(f)\|_\infty \ge \|M_h(\chi_{[a,b]})\|_\infty = \|h\|_\infty \implies \|M_h\|_{\mathscr{B}(\mathcal{C}[a,b])} \|h\|_\infty$$

2. $Y = \mathcal{C}[0,1], \quad X = \{ \, f \mid f' \in [0,1] \, \}$

   X — подпространство Y, т. е. $\|f\|_X = \max\limits_{[0,1]} |f(x)|$.
$$f \in X, \quad \mathscr{D}(f) = f', \quad \mathscr{D} \in \mathscr{L}in(X,Y)$$

   Проверим, что $\mathscr{D}$ не является непрерывным.
$$x^n \in \mathcal{C}[0,1], \quad \|x^n\|_\infty = 1 \implies \sup_{\|f\|=1} \|\mathscr{D}(f)\|_\infty \ge \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mathscr{D}(x^n)\|$$
$$\mathscr{D}(x^n) = nx^{n-1} \implies \|\mathscr{D}(x^n)\|_\infty = n$$
$$\implies \sup \|\mathscr{D}(f)\| \ge \sup \{ \, \mathscr{D}(x^n) \, \} = +\infty$$

3. $Y = \mathcal{C}[0,1], \quad X = \mathcal{C}^{(1)}[0,1] = \{ \, f \mid f' \in \mathcal{C}[0,1] \, \}$
$$\|f\|_X = \|f\|_{\mathcal{C}^{(1)}} = \max \{ \, \| \, f\|_\infty, \|f'\|_\infty \, \}$$
$$\mathcal{D}(f) = f'$$

   Проверим, что $\mathcal{D} \in \mathscr{B}(X,Y)$, $\|\mathcal{D}\|_{\mathscr{B}(X,Y)} = 1$.

   - Возьмём $f \in X$.
$$\mathcal{D}(f) \in Y, \quad \mathcal{D} \in \mathscr{L}in(X,Y)$$
$$\|\mathcal{D}(f)\| = \max_{[0,1]} |f(x)| = \|f\|_\infty \le \max \{ \, \| \, f\|_\infty, \|f'\|_\infty \, \}$$
$$\implies \mathcal{D} \in \mathscr{B}(X,Y), \quad \|D\| \le 1$$

   - Пусть $f(x) = x \in X = \mathcal{C}[0,1]^{(1)}$
$$\|f\|_\infty = 1, \quad \|f'\| = 1$$
$$\implies \|\mathcal{D}(f)\| = 1, \quad \|f\|_X = \max \{ \, \| \, f\|_\infty, \|f'\|_\infty \, \} = 1$$
$$\implies \|\mathcal{D}(f)\| = \sup_{\|g\|=1} \|\mathcal{D}(g)\| \ge \|\mathcal{D}(x)\|_\infty = 1 \implies \|\mathcal{D}\| = 1$$

23. Теоремы вложения для l^p и для L^p. Полнота пространства операторов, действующих из нормированного пространства в банахово

Теорема 22. $1 \le p_1 < p_2 \le \infty, \quad x = \{ \, x_n \, \}_{n=1}^{\infty} \in l^{p_1}, \quad Ax = x$

$$\implies A \in \mathscr{B}(l^{p_1}, l^{p_2}), \quad \|A\|_{\mathscr{B}(l^{p_1}, l^{p_2})} = 1$$

A называется *оператором вложения.*

Доказательство. Пусть $x = \{\, x_n \,\}_{n=1}^{\infty} \in l^{p_1}, \quad \|x\|_{p_1} = 1$, т. е.

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p_1} \Big)^{\frac{1}{p_1}} = 1$$

- $p_2 < +\infty$

$$\frac{p_2}{p_1} > 1, \quad |x_n| \le 1 \quad \forall n \implies |x_n|^{p_2} \le |x_n|^{p_1} \implies \|x\|_{p_2} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p_2} \Big)^{\frac{1}{p_2}} \le \|x\|_{p_1} = 1$$

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_{p_1}=1} \|Ax\|_{p_2} \le 1$$

$$\implies A \in \mathscr{B}(l^{p_1}, l^{p_2})$$

- $p_2 = +\infty$

$$x \in l^{p_1}, \ \|x\|_{p_1} = 1 \implies |x_n| \le 1 \implies \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \le 1 \implies \|A\|_{\mathscr{B}(l^{p_1}, l^{p_2})} \le 1$$

Возьмём $e = (1, 0, 0, \dots)$.

$$\|e\|_p = 1 \quad \forall p$$

$$\|Ae\|_{p_2} = \|e\|_{p_1} \implies \|A\| \ge 1, \quad \|A\|_{\mathscr{B}(l^{p_1}, l^{p_2})} = 1$$

□

Теорема 23. $(T, \mathcal{U}, \mu), \quad \mu(T) < +\infty, \quad 1 \le p_1 < p_2 \le +\infty, \quad f \in \mathrm{L}^{p_2}(\mu), \quad Af = f$

$$\implies A \in \mathscr{B}(\mathrm{L}^{p_2}, \mathrm{L}^{p_1}), \quad \|A\|_{\mathscr{B}(\mathrm{L}^{p_2}, \mathrm{L}^{p_1})} = \Big(\mu(T) \Big)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}$$

Доказательство.

- $p_2 = +\infty$
  Пусть $f \in \mathrm{L}^\infty(T, \mu)$, т. е.

$$|f(x)| \le \|f\|_\infty \text{ п. в. по } \mu$$

$$\|Af\|_{p_1} = \Big(\int\limits_T |f(x)|^{p_1} \,\mathrm{d}\,\mu \Big)^{\frac{1}{p_1}} \le \|f\|_\infty \Big(\int\limits_T \mathrm{d}\,\mu \Big)^{\frac{1}{p_1}} = \|f\|_\infty \Big(\mu(T) \Big)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\implies A \in \mathscr{B}(\mathrm{L}^\infty, \mathrm{L}^{p_1}), \quad \|A\| \le \Big(\mu(T) \Big)^{\frac{1}{p_1}}$$

- $p_2 < +\infty$
  Пусть $f \in \mathrm{L}^{p_2}$

$$\|Af\|_{p_1} = \Big(\int\limits_T |f|^{p_1} \,\mathrm{d}\,\mu \Big)^{\frac{1}{p_1}} \underset{\substack{\text{нер-во Гёльдера} \\ p = \frac{p_2}{p_1} > 1 \\ g=1,\ f=|f|^{p_1}}}{\le} \Bigg(\Big(\int\limits_T (|f|^{p_1})^{\frac{p_2}{p_1}} \,\mathrm{d}\,\mu \Big)^{\frac{p_1}{p_2}} \Big(\int\limits_T \mathrm{d}\,\mu \Big)^{1 - \frac{p_1}{p_2}} \Bigg)^{\frac{1}{p_1}} =$$

$$= \|f\|_{p_2} \cdot \Big(\mu(T) \Big)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \implies A \in \mathscr{B}(\mathrm{L}^{p_2}, \mathrm{L}^{p_1}), \quad \|A\| \le \big(\mu(T) \big)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}}$$

- $f = \chi_T(x) \in \mathrm{L}^p, \quad 1 \le p \le +\infty$

$$\|\chi_T\|_{\mathrm{L}^p} = \Big(\int\limits_T \chi_T(x) \,\mathrm{d}\,\mu \Big)^{\frac{1}{p}} = \big(\mu(T) \big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|A\|_{\mathscr{B}(\mathrm{L}^{p_2},\mathrm{L}^{p_1})} = \sup_{\substack{g\in\mathrm{L}^{p_2}\\ g\neq\mathbb{O}_n}} \frac{\|Ag\|_{p_2}}{\|g\|_{p_2}} = \sup \frac{\|g\|_{p_1}}{\|g\|_{p_2}} \geq \frac{\|\chi_T\|_{p_1}}{\|\chi_T\|_{p_2}} = \big(\mu(T)\big)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}$$

□

Замечание. Если $\mu(T) = +\infty$, то всё возможно.

Пример. $T = [0, +\infty)$, λ — мера Лебега.
Докажем, что $\mathrm{L}^1 \not\subset \mathrm{L}^2$, $\mathrm{L}^2 \not\subset L^1$.
Возьмём $f(x) = \frac{1}{1+x}$

$$f \notin \mathrm{L}^1, \quad f \in \mathrm{L}^2 \quad \Longrightarrow L^1 \not\subset L^2$$

Возьмём $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}$.

$$g \in \mathrm{L}^1, \quad f \notin \mathrm{L}^2 \quad \Longrightarrow \mathrm{L}^1 \not\subset \mathrm{L}^2$$

Теорема 24. $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ — банахово.
Тогда $\mathscr{B}(X, Y)$ — банахово.

Доказательство. $\{\, A_n \,\}_{n=1}^{\infty}$, $A_n \in \mathscr{B}(X, Y)$, $\{\, A_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n, m > N \quad \|A_n - A_m\| < \varepsilon$$

Зафиксируем $x \in X$. Проверим, что $\{\, A_n x \,\}$ фундаментальна.

$$\|A_n x - A_m x\| < \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \|x\| \implies \{\, A_n x \,\}_{n=1}^{\infty} \text{ фундаментальна в } Y \xrightarrow[Y \text{ банахово}]{} \exists \lim_{n\to\infty} A_n x$$

Положим

$$Ax \coloneqq \lim_{n\to\infty} A_n x$$

$$A_n \in \mathscr{L}in(X, Y) \implies A \in \mathscr{L}in(X, Y)$$

Уже знаем, что $\|A_n x - A_m x\| < \varepsilon \|x\|$. Зафиксируем m и перейдём к пределу по n:

$$\|Ax - A_m x\| \leq \varepsilon \|x\| \implies A - A_m \in \mathscr{B}(X, Y), \quad \|A - A_m\| \leq \varepsilon \implies A \in \mathscr{B}(X, Y), \quad \lim_{m\to\infty} \|A - A_m\| = 0$$

□

24. Линейные функционалы. Примеры. Вычисление норм интегрального функционала и интегрального оператора в $\mathcal{C}[a, b]$

Определение 41. $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное над полем $\mathbb{K}$.
X^* называется *сопряжённым пространством*, если

$$X^* = \mathscr{B}(X, \mathbb{K})$$

То есть X^* — множество линейных непрерывных функционалов.

$$f \in X^* \quad \|f\|_{X^*} = \inf \{\, C > 0 \mid |f(x)| \leq C\|x\| \,\}$$

Следствие. $(X, \|\cdot\|) \implies X^*$ — банахово.

Доказательство. $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ — полные. Можно воспользоваться теор. 24. □

Следствие. $f \in X^*$

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|<1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

Примеры.

1. l^p, зафиксируем $i \in \mathbb{N}$
$$x = \{\, x_n \,\}_{n=1}^{\infty} \in l^p, \quad f(x) \coloneqq x_i$$
Докажем, что $f \in (l^p)^*$, $\|f\|_{(l^p)^*} = 1$.
$$|f(x)| = |x_i| \le \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < +\infty$$
$$|x_i| < \sup_{n \ge 1} |x_n| = \|x\|_{\infty}, \quad p = +\infty$$
$$\implies f \in (l^p)^* \implies \|f\|_{(l^p)^*} \le 1$$
Возьмём $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$.
$$\|e_i\|_p = 1, \quad |f(e_i)| = 1 \implies \|f\|_{(l^p)^*} \ge 1$$

2. $X = \mathcal{C}(K)$, K — компакт, $x_0 \in K$ — фиксирована.
$$G : \mathcal{C}(K) \to \mathbb{C} : \quad f \in \mathcal{C}(k) \quad G(f) = f(x_0) \text{ — \textit{функционал значения в точке}}$$
Докажем, что $G \in \big(\mathcal{C}(K)\big)^*$, $\|G\| = 1$.
$$f \in \mathcal{C}(K) \quad |G(f)| = |f(x_0)| \le \max_{x \in K} |f(x)| = \|f\|_{\mathcal{C}(K)}$$
$$\implies G \in \big(\mathcal{C}(K)\big)^*, \quad \|G\|_{\big(\mathcal{C}(K)\big)^*} \le 1$$
Пусть $f(x) = \chi_K$.
$$\chi_K(x) \in \mathcal{C}(K), \quad \|\chi_K\|_{\infty} = 1, \quad |G(\chi_K)| = |\chi_K(x_0)| = 1 \implies \|G\| \ge 1$$

Теорема 25. $\varphi(x) \in [a, b]$, $\varphi(x)$ фиксирована, $f \in \mathcal{C}[a, b]$.
$$G(f) \coloneqq \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) \, \mathrm{d}\, x$$
$$\implies G \in \big(C[a, b]\big)^*, \quad \|G\| = \int_a^b |\varphi(x)| \, \mathrm{d}\, x$$

Доказательство.

- $f \in \mathcal{C}[a, b]$
$$|G(f)| = \Big| \int_a^b \varphi(x) \cdot f(x) \, \mathrm{d}\, x \Big| \le \int_a^b |f(x)| \cdot |\varphi(x)| \, \mathrm{d}\, x \le \|f\|_{\infty} \cdot \int_a^b |\varphi(x)| \, \mathrm{d}\, x \quad \forall x \implies$$
$$\implies G \in \big(\mathcal{C}[a, b]\big)^*, \quad \|G\| \le \int_a^b |\varphi(x)| \, \mathrm{d}\, x$$

- $\varphi(x) \overset{[a,b]}{>} 0$
Пусть $f(x) = \chi_{[a,b]}$.
$$\|\chi_{[a,b]} = 1$$
$$|G(\chi_{[a,b]})| = \Big| \int_a^b \varphi(x) \, \mathrm{d}\, x \Big| \underset{\varphi(x) > 0}{=\!=\!=} \int_a^b \varphi(x) \, \mathrm{d}\, x$$

- $\varphi(x) \overset{[a,b]}{\leq} 0$

$$|G(\chi_{[a,b]})| = \Big|\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}\,x\Big| = \int_a^b |\varphi(x)|\,\mathrm{d}\,x$$

- φ — произвольная

$$g(x) := \operatorname{sign}\varphi(x), \quad \|g\|_\infty = 1$$

$$\int_a^b g\varphi = \int_a^b |\varphi(x)|\,\mathrm{d}\,x$$

g не является непрерывной, поэтому подставить её мы не можем. Приблизим её непрерывными:

$$\varepsilon > 0 \quad \varphi(t) \text{ равномерно непрерывна } \implies \exists \delta > 0 : \quad \forall |t-s| < \delta \quad |\varphi(t) - \varphi(s)| < \varepsilon$$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \text{ — разбиение } [a,b] : \quad t_k - t_{k-1} < \delta$$

$$x, t \in [t_{k-1}, t_k] \implies |\varphi(s) - \varphi(t)| < \varepsilon$$

$$\mathscr{F} := \{\, [t_{k-1}, t_k] \,\}_{k=1}^n$$

Разобьём отрезки на два множества:

1. $\Delta_1, \dots, \Delta_2$ — отрезки такие, что $\varphi(t) \overset{\Delta_j}{>} 0$ или $\varphi(t) \overset{\Delta_j}{<} 0$;
2. $\Delta_{r+1}, \dots, \Delta_n$ — отрезки, на которых $\exists s \in \Delta_j : \quad \varphi(s) = 0$;

Проверим, что вклад отрезков второго сорта в интеграл очень маленький. Пусть $r+1 \leq j \leq n, \quad t \in \Delta_j, \quad \exists s \in \Delta_j : \quad \varphi(s) = 0$.

$$|\varphi(t)| = |\varphi(t) - \varphi(s)| < \varepsilon \implies \int\limits_{\Delta_j} |\varphi(t)|\,\mathrm{d}\,t \leq \varepsilon|\Delta_j| \implies \int\limits_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |\varphi(t)|\,\mathrm{d}\,t \leq \varepsilon\Big(\sum_{j=r+1}^n |\Delta_j|\Big) \leq \varepsilon(b-a)$$

$$h(t) = \begin{cases} \operatorname{sign}\varphi(t), \quad t \in \Delta_j, \quad 1 \leq j \leq r \\ \text{линейная на } \Delta_j, \quad r+1 \leq j \leq n \\ \text{если } [a, t_1] = \Delta_j, \quad r+1 \leq j \leq n, \text{ то } h(a) := 0 \\ \text{если } [t_{n-1}, b] = \Delta_j, \quad r+1 \leq j \leq n, \text{ то } h(b) := 0 \end{cases}$$

Понятно, что

$$h(t) \in \mathcal{C}[a,b], \quad \|h\|_\infty \leq 1, \quad f(t) \cdot \varphi(t) = |\varphi(t)|, \quad t \in \Delta_j, \quad 1 \leq j \leq r$$

$$|h(t) \cdot \varphi(t)| \leq |\varphi(t)| \quad \forall t \in [a,b]$$

$$\|G\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |G(f)| \geq |G(h)| = \Big|\int_a^b \varphi(t) \cdot h(t)\,\mathrm{d}\,t\Big| = \Big| \int\limits_{\bigcup_{j=1}^r \Delta_j} |\varphi(t)|\,\mathrm{d}\,t + \int\limits_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} \varphi(t) \cdot h(t)\,\mathrm{d}\,t \Big| \geq$$

$$\geq \int\limits_{\bigcup_{j=1}^n \Delta_j} |\varphi(t)|\,\mathrm{d}\,t - \Big| \int\limits_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |\varphi(t)| \cdot |h(t)|\,\mathrm{d}\,t \Big| \geq \int\limits_{\bigcup_{j=1}^n \Delta_j} |\varphi(t)|\,\mathrm{d}\,t - \int\limits_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |\varphi(t)|\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}\,t - 2 \int\limits_{\bigcup_{j=r+1}^n \Delta_j} |\varphi(t)|\,\mathrm{d}\,t \geq \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}\,t - 2\varepsilon(b-a) \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\implies \|G\| \geq \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}\,t \implies \|G\|_{\mathcal{C}^*[a,b]} = \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}\,t$$

□

Теорема 26. $K(s,t) \in \mathcal{C}\big([a,b] \times [a,b]\big), \quad f \in \mathcal{C}[a,b]$

$$(\mathscr{K} f)(s) = \int_a^b K(s,t) f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$\implies \mathscr{K} \in \mathscr{B}\big(\mathcal{C}[a,b]\big), \quad \|\mathscr{K}\|_{\mathscr{B}(\mathcal{C}[a,b])} = \underbrace{\max_{a\le s\le b} \int_a^b |K(s,t)|\,\mathrm{d}\,t}_{M}$$

Доказательство.

- $\|\mathscr{K}\| \le M$
  Возьмём $f \in \mathcal{C}[a,b], \quad s \in [a,b]$.

$$|(\mathscr{K}f)(s)| = \left|\int_a^b K(s,t)f(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \le \|f\|_\infty \int_a^b |K(s,t)\,\mathrm{d}\,t \le M\cdot\|f\|_\infty \implies$$
$$\implies \|\mathscr{K}f\|_\infty = \max_{a\le s\le b} |(\mathscr{K}f)(s)| \le M\cdot\|f\|_\infty \implies \mathscr{K}\in\mathscr{B}\big(\mathcal{C}[a,b]\big), \quad \|\mathscr{K}\| \le M$$

- $\ge$

$$g(s) \coloneqq \int_a^b |K(s,t)|\,\mathrm{d}\,t \implies g\in\mathcal{C}[a,b] \implies \exists s_0: \quad \max g(s) = g(s_0) = M$$
$$\varphi(t) = K(s_0,t)$$
$$f\in\mathcal{C}[a,b], \quad \|f\|_\infty \le 1$$
$$\|\mathscr{K}f\| = \max_{a\le s\le b} |(\mathscr{K}f)(s)| \ge |(\mathscr{K}f)(s_0)| = \left|\int_a^b K(s_0,t)f(t)\,\mathrm{d}\,t\right| = |G(f)|,\ \text{где } G(f) = \int_a^b f(t)\cdot\varphi(t)\,\mathrm{d}\,t$$

  По предыдущей теореме

$$\|G\|_{\mathcal{C}^*[a,b]} = \int_a^b |K(s_0,t)|\,\mathrm{d}\,t = M$$

$$\|K\| = \sup_{\|f\|\le1} \|\mathscr{K}f\| \ge \sup_{\|f\|\le1} |G(f)| = \|G\| = M$$

□

25. Изоморфизм пространств, эквивалентные нормы. Свойства линейно-изоморфных пространств

Определение 42. $(X,\|\cdot\|),\ (Y,\|\cdot\|)$ над $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$)
$(X,\|\cdot\|)$ *линейно изоморфно* $(Y,|\cdot\|)$, если

$$\exists A\in\mathscr{B}(X,Y), \quad \exists A^{-1}\in\mathscr{B}(Y,X)$$

A называется *линейным изоморфизмом*

Теорема 27. $(X,\|\cdot\|),\ (Y,\|\cdot\|), \quad A: X\to Y$
A — линейный изоморфизм тогда и только тогда, когда

1. $A\in\mathscr{L}in(X,Y)$;
2. $A(X) = Y$ (A — сюръекция);
3. $\exists C_2 > C_1 > 0: \quad C_1\|x\|_X \le \|Ax\|_Y \le C_2\|x\|_X \quad \forall x\in X$.

Доказательство.

- $\implies$

$$A\in\mathscr{B}(X,Y) \implies A\in\mathscr{L}in(X,Y)$$

$$\exists A^{-1} \implies A(X) = Y$$
$$A \in \mathscr{B}(X,Y) \implies \|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in X \implies C_2 = \|A\|$$
$$A^{-1} \in \mathscr{B}(Y,X) \implies \|A^{-1}y\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|y\|$$

Возьмём $x \in X, \quad y := Ax$.

$$A^{-1}y = x$$
$$\|x\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\| \implies \frac{1}{\|A^{-1}\|} \cdot \|x\| \le \|Ax\| \implies C_1 = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

- $\Longleftarrow$

$$\|Ax\| \le C_2\|x\| \implies A \in \mathscr{B}(X,Y), \quad \|A\| \le C_2$$

Проверим, что A — инъекция, т. е. ядро состоит только из нуля:

$$Ax = 0 \implies C_1\|x\| \le \|Ax\| \implies \|x\| = 0 \implies x = 0$$
$$\implies \exists A^{-1}, \quad A^{-1} \in \mathscr{L}in(Y,X)$$

Возьмём $y \in Y$.

$$\exists! x : \quad Ax = y, \quad x = A^{-1}y$$
$$C_1\|x\| \le \|Ax\| \implies C_1\|A^{-1}y\| \le \|y\| \implies \|A^{-1}y\| \le \frac{1}{C_1}\|y\| \implies A^{-1} \in \mathscr{B}(Y,X), \quad \|A^{-1}\| \le \frac{1}{C_1}$$

□

Следствие (критерий обратимости линейного оператора).

$$(X, \|\cdot\|),\ (Y, \|\cdot\|), \quad A \in \mathscr{L}in(X,Y), \quad A(X) = Y, \quad \exists C_1 > 0 : \quad C_1\|x\| \le \|Ax\|$$
$$\implies \exists A^{-1} \in \mathscr{B}(Y,X)$$

Утверждение 20. $(X, \|\cdot\|),\ (Y, \|\cdot\|), \quad A$ — линейный изоморфизм.
Тогда

1. $(X, \|\cdot\|)$ банахово $\iff$ $(Y, \|\cdot\|)$ банахово;
2. $K \subset X$ — компакт $\iff$ $A(K)$ — компакт в Y;
3. $K \subset X$ относительно компактно $\iff$ $A(K)$ относительно компактно в Y.

Доказательство.

1. $(X, \|\cdot\|)$ — банахово. Проверим, что Y — банахово.
   Возьмём $\{ y_n \}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная в Y. Докажем что она имеет предел.
   $$x_n := A^{-1}y_n$$
   $$\lim_{n,m\to\infty} \|y_n - y_m\| = 0$$
   $$\|x_n - x_m\| = \|A^{-1}y_n - A^{-1}y_m\| = \|A^{-1}(y_n - y_m)\| \le$$
   $$\le \|A^{-1} \cdot \|y_n - y_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0 \implies \{ x_n \}_{n=1}^{\infty} \text{ фундаментальна}$$
   X — банахово $\implies \exists \lim x_n = x_0 \implies \lim y_n = Ax_0 \implies Y$ — банахово.
2. K — компакт, A непрерывно $\implies A(K)$ — компакт.
3. K относительно компактно, A непрерывно $\implies A(K)$ относительно компактно.

□

Определение 43. X — линейное пространство над $\mathbb{R}$(или $\mathbb{C}$), $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ — различные нормы на X.
$\|\cdot\|_1$ *эквивалентна* $\|\cdot\|_2$, если

$$\forall \{ x_n \}_{n=1}^{\infty} : x_n \in X,\ x_0 \in X \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|_1 = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|_2 = 0,$$

то есть, нормы порождают одну и ту же топологию.

Следствие (критерий эквивалентности норм). X — линейное, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_1$ — нормы на X.

$$\|\cdot\|_1 \text{ эквивалентна } \|\cdot\|_2 \iff \exists 0 < C_1 < C_2 < +\infty : \quad C_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C_2\|x\|_1$$

Доказательство. Обозначим $X = (X, \|\cdot\|_1)$, $Y = (X, \|\cdot\|_2)$. Определим $I : X \to Y : \quad Ix = x$

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \|Ix_n - Ix_0\|_2 = 0 \implies I \in \mathscr{B}(X, Y)$$

$$I \text{ — биекция} \iff I \in \mathscr{B}(Y, X) \implies I \text{ — линейный изоморфизм} \overset{}{\underset{\text{теорема}}{\iff}}$$

$$\iff \exists 0 < C_1 < C_2 : \quad \|Ix\|_2 \le C_2\|x\|_1 \iff C_1\|x\|_1 \le \|x\|_{\le} C_2\|x\|_1$$

∎

26. Изоморфизм конечномерных пространств, эквивалентность норм, полнота, характеристика относительно компактных и компактных множеств, непрерывность линейных операторов

Определение 44. X — линейное пространство.
Говорят, что $\dim X = n \in \mathbb{N}$, если $\exists \{ x_1, \dots, x_n \}$ — ЛНЗ, при этом $\forall \{ x_j \}_{j=1}^{n+1}$ — ЛЗ.
Если $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \{ x_j \}_{j=1}^{n}$ — ЛНЗ, то $\dim X = \infty$.

Теорема 28. $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ — линейные над $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $\dim X = \dim Y = n \in \mathbb{N}$.
Тогда X линейно изоморфно Y.

Доказательство. Рассмотрим $Z = l_n^2 = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Докажем, что l_n^2 и X линейно изоморфны. Этого достаточно в силу транзитивности.
Пусть $\{ f_j \}_{j=1}^{n}$ — базис в X, $e_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0)$ — базис в l_n^2.
Определим $A : l_n^2 \to X : \quad Ae_j = f_j$.

$$A\Big(\sum_{j=1}^{n} c_j e_j\Big) := \sum_{j=1}^{n} c_j f_j \implies A \in \mathscr{L}in(l_n^2, X)$$

Понятно, что A — биекция.

- Проверим непрерывность

$$z \in l_n^2,\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j \quad \|A(z)\| = \Big\|\sum_{j=1}^{n} c_j f_j\|_X \le \sum_{j=1}^{n} |c_j| \cdot \|f_j\| \underset{\text{КБ}}{\le} \Big(\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{j=1}^{n} \|f_j\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = M\|z\|_{l_n^2}$$

$$\implies A \in \mathscr{B}(l_n^2, X), \quad \|A\| \le M$$

- Найдём $c > 0 : \quad \|Az\| \ge c\|z\| \quad \forall z \in l_n^2$

$$g(z) := \|Az\|, \quad z \in l_n^2$$

$g(z)$ непрерывна на l_n^2.

$$S := \{ z \in l_n^2 \mid \|z\| = 1 \}$$

S — компакт в l^2_n.
$$\exists \min_{z\in S} g(z) = g(z_0) = r > 0 \implies \forall z \in S \quad \|Az\| \geq r$$

Возьмём $u \in l^2_n \neq 0$.
$$\frac{u}{\|u\|} \in S \implies \left\|A\Big(\frac{u}{\|u\|}\Big)\right\| \geq r \implies \|Au\| \geq r\|u\| \xRightarrow[\text{критерий лин. изоморфности}]{} l^2_n \text{ линейно изоморфно } X$$

$\square$

Следствие. $(X, \|\cdot\|), \quad \dim X < +\infty$

1. X — банахово;
2. $K \subset X$ — компакт $\iff$ K ограничено и замкнуто;
3. $K \subset X$ относительно компактно $\iff$ K ограничено.

Доказательство.

1. l^2_n — банахово $\implies$ X — банахово.
2. $K \subset X, \quad A : X \to l^2_n$ — линейный изоморфизм $\implies$ A, A^{-1} ограничены.
   K — компакт $\implies$ $\Big(A(K)$ — компакт $\iff$ K ограничено и замкнуто$\Big)$.
$$\implies K = A^{-1}\big(A(K)\big), \quad K \text{ ограничено и замкнуто}$$

$\square$

Теорема 29. $(X, \|\cdot\|), \quad \dim X < +\infty, \quad (Y, \|\cdot\|)$
$$\mathscr{L}in(X, Y) = \mathscr{B}(X, Y)$$

Доказательство.

- Пусть $T \in \mathscr{L}in(l^2_n, X), \quad z \in l^2_n$.
$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j, \quad e_j = (0, \ldots, 0, \underset{j}{1}, 0 \ldots, 0)$$
$$\|Tz\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} c_j T e_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |c_j| \|Te_j\| \underset{\text{К–Б}}{\leq} \Big(\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{j=1}^{n} \|Te_j\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \implies$$
$$\implies \|Tz\| \leq M\|z\| \implies T \in \mathscr{B}(l^2_n, X)$$
- $U \in \mathscr{L}in(X, Y)$
  Пусть $l^2_n \xrightarrow{A} X \xrightarrow{U} Y, \quad A$ — линейный изоморфизм. Положим $T = UA$.
$$\implies T \in \mathscr{L}in(l^2_n, Y) = \mathrm{B}(l^2_n, Y) \implies T \in \mathscr{B}(l^2_n, Y)$$
$$U = TA^{-1} \implies U \in \mathscr{B}(X, Y)$$

$\square$

Следствие. $\dim X = n \in \mathbb{N}, \quad \|\cdot\|_1, \ \|\cdot\|_2$ — нормы на X.
Тогда $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны.

27. Конечномерные подпространства: замкнутость, существование элемента наилучшего приближения. Существование многочлена наилучшего приближения

Определение 45. (X,ρ) — метрическое пространство, $\quad Y \subset X, \quad a \in X$

$$\rho(a,Y) = \inf_{y\in Y} \rho(a,y)$$

Если $\exists y_0 \in Y: \quad \rho(a,Y) = \rho(a,y_0)$, то y_0 называется *элементом наилучшего приближения.*

Замечание. Если Y — компакт, то элемент наилучшего приближения существует (т. к. $\rho(a,y)$ непрерывна).

Теорема 30. $(X, \|\cdot\|)$

1. $L \in X, \quad L$ — конечномерное подпространство в алгебраическом смысле $\implies L$ замкнуто;
2. $a \in X \implies$ в L существует элемент наилучшего приближения.

Доказательство.

1. $\dim L < +\infty \implies L$ — банахово $\implies L$ замкнуто.
2. $a \in X, \quad f = \rho(a,L) = \inf \|a-y\|$

$$\exists \{\, y_n \,\}_{n=1}^{\infty}: \quad d \le \|a-y_n\| \le d + \frac{1}{n}$$

Проверим, что $\{\, y_n \,\}$ ограничена:

$$\|y_n\| \overset{\triangle}{\le} \|a\| + \|y_n - a\| \le \|a\| + d + 1$$

$$\dim L < +\infty \implies \{\, y_n \,\}_{n=1}^{\infty} \text{ относительно компактна } \implies \exists \{\, y_{n_j} \,\}: \quad \exists \lim_{j\to\infty} y_{n_j} = y_0 \in L$$

$$d \le \|a - y_{n_j}\| \le d + \frac{1}{n_j} \implies \|a - y_0\| = d$$

□

Замечание. Элемент наилучшего приближения не обязательно единственен.

Примеры.

1. $l_2^\infty = \{(x,y), \|(x,y)\| = \max\{|x|,|y|\}\}$ $\mathrm{B}_1(0,0)$ выглядит в этом пространстве как квадрат.
   $L = \{\, y = kx \,\}, \quad k \ne 0$. Для L существует единственный элемент наилучшего приближения.
2. $L = \{\, y = 0 \,\}$. Для L элемент наилучшего приближения не единственен.
3. $l_2^1 = \{(x,y), \|(x,y)\| = |x| + |y|\}$ $B_1(0,0)$ выглядит как квадрат, повёрнутый на $\frac{\pi}{4}$.
   $L = \{\, y = kx \,\}, \quad k \ne \pm 1$. Для L существует единственный элемент наилучшего приближения.
4. $L = \{\, y = x \,\}$. Для L элементов наилучшего приближения бесконечно много.

Следствие. $\mathcal{C}[a,b], \quad \|f\|_\infty = \max|f(x)|, \quad \mathscr{P}_n = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j x^j, \quad a_j \in \mathbb{R} \right\}$

$$\exists p \in \mathscr{P}_n: \quad \inf_{q\in\mathscr{P}_n} \|f-q\|_\infty = \|f-p\|$$

p называется *многочленом наилучшего приближения*

Замечание. Для $\mathscr{P}_n$ существует единственный элемент наилучшего приближения.

28. Лемма Рисса о почти перпендикуляре, следствия их неё. Теорема Рисса: критерий конечномерности пространства

Лемма 2. $(X, \|\cdot\|)$, $\quad L \subsetneq X$ — подпространство, $L = \overline{L}$, $\quad 0 < \varepsilon < 1$

$$\exists x_0 : \quad \|x_0\| = 1, \quad \rho(x_0, L) > 1 - \varepsilon$$

Доказательство. Возьмём $z \in X \setminus L$.

$$\rho(z, L) = d > 0 \quad (\text{т. к. } L = \overline{L})$$

$$\rho(z, L) = \inf_{y \in L} \|z - y\|$$

$$\exists y \in L : \quad d \leq \|z - y\| < \frac{d}{1 - \varepsilon}$$

Выберем $x_0 = \frac{z-y}{\|z-y\|}$. Возьмём $u \in L$.

$$\|x_0 - u\| = \left\| \frac{z - y}{\|z - y\|} - u \right\| = \frac{\|z - y - u \cdot \|z - y\|\|}{\|z - y\|} \geq \frac{d}{\frac{d}{1-\varepsilon}} = 1 - \varepsilon$$

□

Замечание. Если $\exists y_0 : \quad \rho(z, y_0) = d$, то $x_0 = \frac{z-y_0}{\|z-y_0\|} \implies \|x_0 - u\| \geq 1$

Следствие. $(X, \|\cdot\|)$, $\quad L$ — подпространство, $\quad \dim L < +\infty$

$$\exists x_0 : \quad \begin{cases} \|x_0\| = 1 \\ \rho(x_0, L) = 1 \end{cases}$$

Следствие. $(X, \|\cdot\|)$, $\quad \{\, L_n \,\}_{n=1}^{\infty}$, $\quad L_n \subsetneq L_{n+1}$, $\quad L_n$ — замкнутые подпространства, $\quad L_1 \neq \emptyset$

$$\exists \{\, y_n \,\}_{n=1}^{\infty} : \quad \begin{cases} \|y_n\| = 1, \\ y_n \in L_n, \\ \rho(y_{n+1}, L_n) > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Доказательство. Индукция. Пусть $y_1 \in L_n$, $\quad \|y_1\| = 1$, $\quad L_n \subseteq L_2$. По лемме

$$\exists y_2 \in L_2 : \quad \begin{cases} \|y_2\| = 1, \\ \rho(y_2, L_1) > \frac{1}{2} \end{cases}$$

□

Теорема 31. $\overline{\mathtt{B}}$ — замкнутый единичный шар в пространстве X.

$$\overline{\mathtt{B}} \text{ — компакт} \iff \dim X < +\infty$$

Доказательство.

- $\Longleftarrow$

  $\dim X < +\infty \implies \overline{\mathtt{B}}$ ограничен и замкнут $\iff$ компакт

- $\Longrightarrow$

  Пусть $\dim X = +\infty$. Существует ЛНЗ набор $\{\, x_n \,\}_{n=1}^{\infty}$. Положим $L_n = \mathscr{L}\{\, x_j \,\}_{j=1}^{\infty}$ — линейная оболочка.

$$L_n \subsetneq L_{n+1} \xRightarrow[\text{второе следствие}]{} \exists \{\, y_n \,\} : \quad \begin{cases} \|y_n\| = 1, \\ \|y_{n+1} - y_m\| > \frac{1}{2} \quad \forall m \neq (n+1) \end{cases}$$

Значит, не существует фундаментальной подпоследовательности $\{ y_{n_j} \}$. Значит, $\nexists \lim\limits_{j\to\infty} y_{n_j}$.

□

29. Продолжение линейного оператора со всюду плотного множества

Теорема 32. $(X, \|\cdot\|)$ — нормированное, $(Y, \|\cdot\|)$ — банахово, $L \subset X$ — подпространство в алгебраическом смысле, L всюду плотно, $A \in \mathscr{B}(L, Y)$

$$\exists! V \in \mathscr{B}(X, Y) : \quad \begin{cases} V\big|_L = A, \\ \|V\|_{\mathscr{B}(X,Y)} = \|A\|_{\mathscr{B}(L,Y)} \end{cases}$$

Доказательство.

- Существование

  Возьмём $x \in X$.
  $$\exists \{ x_n \in L \}_{n=1}^{\infty} : \quad \lim x_n = x$$
  $$\|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \le \|A\| \cdot \|x_n - x_m\| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$
  Значит, $\{ Ax_n \}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $Y \implies \exists \lim Ax_n \in Y$. Положим $V_x = \lim Ax_n$.

- Корректность определения (не получится тот же предел для другой последовательности)

  Пусть $\lim z_n = x, \quad z_n \in L \quad \implies \exists \lim Az_n$
  $$\left.\begin{matrix} \exists \lim Ax_n \\ \exists \lim Az_n \end{matrix}\right\} \implies \lim\big(A(x_n - z_n)\big) = 0 \implies \lim Ax_n = \lim Az_n$$

  Пусть $x \in L, \quad x_n \overset{n\in\mathbb{N}}{\equiv} x \quad \implies Ax_n = Ax \implies V_x = \lim Ax_n = Ax.$
  $$\lim x_n = x, \quad \|Ax_n\| \le \|A\| \cdot \|x_n\|, \quad x_n \in L$$
  $$\implies \|Vx\| = \lim \|Ax_n\| \le \|A\| \cdot \lim \|x_n\| = \|A\| \cdot \|x\| \implies \|V\| \le \|A\|$$
  В другую сторону верно по определению:
  $$\|V\| = \sup_{\{ x\in X \mid \|x\|\le 1 \}} \overset{\sup \text{ по большему мн-ву}}{\ge} \sup_{\{ x\in L \mid \|x\|\le 1 \}} \|Vx\| = \|A\|$$
  В итоге $\|V\| = \|A\|$.

- Единственность

  Пусть $V, W \in \mathscr{B}(X, Y), \quad V\big|_L = A, \quad W\big|_L = A, \quad x \in X.$
  $$\exists \{ x_n \in L \} : \quad \lim x_n = x \implies V_x = \lim Vx_n = \lim Ax_n = \lim Wx_n = Wx$$

□

30. Фактор-пространство нормированного и банахова пространства

Определение 46. X — линейное, $Y \subset X$ — подпространство в алгебраическом смысле.
Фактор-пространство X по Y — это

$$X/_Y = \{ \overline{x} \}_{x\in X}, \quad \overline{x} = \{ z \in X \mid (z - x) \in Y \}$$

Замечание. $^X\!/_Y$ линейно.

Доказательство. $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda\overline{x} = \overline{\lambda x}, \quad \overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}, \quad \overline{\mathbb{O}_n} = Y$$

$\square$

Определение 47. $(X, \|\cdot\|), \quad Y \subset X$ — замкнутое подпространство, $\quad \overline{x} \in {}^X\!/_Y$.
Норма $\overline{x}$ — это

$$\|\overline{x}\| = \inf_{z \in X} \|z\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \rho(x, Y)$$

Определение 48. $\varphi : X \to {}^X\!/_Y, \quad \varphi(x) = \overline{x}$
φ называется *каноническим гомоморфизмом.*

Замечание. $\varphi \in \mathscr{L}in(X, {}^X\!/_Y)$

Теорема 33. $(X, \|\cdot\|), \quad Y \subset X$ — замкнутое подпространство

1. $\|\overline{x}\|$ удовлетворяет аксиомам нормы;
2. $\varphi \in \mathscr{B}(X, {}^X\!/_Y)$, причём $\|\varphi\| = 1$, если $Y \subsetneq X$;
3. если X — банахово, то ${}^X\!/_Y$ — банахово.

Доказательство.

1. • $\|\overline{x}\| = 0 \implies \rho(x, Y) = 0$
   Y замкнуто $\implies$ расстояние может быть равно нулю только при $x \in Y \implies \overline{x} = \overline{\mathbb{O}_n}$
   • $\alpha \in \mathbb{C}, \quad \alpha\overline{x} = \overline{\alpha x}$
   $$\|\overline{\alpha x}\| = \inf_{x \in X} \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \inf_{x \in \overline{x}} \|x\| = |\alpha| \cdot \|\overline{x}\|$$
   • $\overline{x}, \overline{z} \in {}^X\!/_Y, \quad u \in \overline{x}, \quad v \in \overline{z}$
   $$\|\overline{x} + \overline{z}\| = \|\overline{x+z}\| \le \|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$$
   В силу произвольности u и v, можно взять inf в неравенствах:
   $$\|\overline{x} + \overline{z}\| \le \inf u \in \overline{x} \|u\| + \inf_{v \in \overline{z}} \|v\| = \|olx\| + \|\overline{z}\|$$
2. $\varphi(x) = \overline{x}$
   $$\|\overline{x}\| = \inf_{u \in \overline{x}} \|u\| \underset{x \in \overline{x}}{\le} \|x\| \implies \|\varphi(x)\| \le \|x\| \implies \|\varphi\| \le 1$$
   Пусть $Y \subsetneq X$. Возьмём $\varepsilon > 0$. По лемме Рисса имеем
   $$\exists x_0 : \rho(x_0, Y) > 1 - \varepsilon$$
   $$\implies \|\varphi\| = \sup_{\|x\| \le 1} |\varphi(x)| \ge |\varphi(x_0)| = \rho(x_0, Y) > 1 - \varepsilon$$
   Значит, $\|\varphi\| \le 1$ и $\|\varphi\| > 1 - \varepsilon \implies \|\varphi\| = 1$.
3. X — банахово
   Воспользуемся критерием полноты:
   $$\{\,\overline{x}_n\,\}_{n=1}^{\infty} : \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|\overline{x}_n\| < +\infty \overset{?}{\implies} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x}_n < +\infty$$

$$\exists z_n \in \overline{x}_n : \quad \|z_n\| \le 2\|\overline{x}_n\| \implies \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\| < +\infty$$

По критерию полноты к X имеем, что $\exists z = \sum z_n, \quad z \in X$.

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} z_j, \quad \lim S_n = z$$

φ непрерывно $\implies \lim \varphi(S_n) = \varphi(z)$

$$\varphi(z) = \overline{z}, \quad \varphi(S_n) = \sum_{j=1}^{n} \overline{z}_j = \sum \overline{x}_j$$

□

31. Гильбертово пространство. Примеры. Замкнутость ортогонального дополнения. Непрерывность скалярного произведения, тождество параллелограмма

Определение 49. H — линейное пространство над $\mathbb{C}$ *со скалярным произведением*, то есть имеется отображение $H \times H \to \mathbb{C}$, если

1. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad x, y \in H$;
2. $(x + z, y) = (x, y) + (z, y), \quad x, y, z \in H$;
3. $(y, x) = \overline{(x, y)}, \quad x, y \in H$;
4. $(x, x) \ge 0, \quad (x, x) = 0 \iff x = \mathbb{O}$.

Определение 50. Норма, *порождённая скалярным произведением*: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Определение 51. $(H, \|\cdot\|), \quad \|\cdot\|$ порождена $(\cdot, \cdot)$
H называется *предгильбертовым* пространством.

Определение 52. $(H, \|\cdot\|)$ — предгильбертово.
H называется *гильбретовым*, если H полно.

Свойства.

1. Неравенство Коши—Буняковского
$$|(x, y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$$
2. $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ — норма
3. Тождество параллелограмма
$$x, y \in H \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$$
4. Непрерывность скалярного произведения
$$\left.\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n &= x \\ \lim_{n\to\infty} y_n &= y \end{aligned}\right\} \implies \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y)$$

Доказательство.

1. См. рис. 1

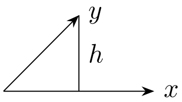

Рис. 1: К доказательству неравенства Коши—Буняковского

$\|h\|^2 \geq 0 \iff$ Коши—Буняковского.

2. (a) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

   (b) $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}(x,x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$

   (c)

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x,y) + (y,x) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(x,y) \leq$$
$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2$$

3. Упражнение

4.

$$|(x,y) - (x_n,y_n)| \leq |(x,y) - (x_n,y_n)| + |(x_n,y) - (x_n,y_n)| = |(x - x_n, y) - (x_n, y - y_n)| \underset{\text{К—Б}}{\leq}$$
$$\leq \|x - x_n\| \cdot \|y\| + \|x_n\| \cdot \|y - y_n\| \underset{\lim x_n = x \implies \exists M > 0 : \|x_n\| \leq M}{\leq} \underbrace{\|x - x_n\|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \cdot \|y\| + M \cdot \underbrace{\|y - y_n\|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

$\square$

Примеры.

1. $l_n^2 = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$

$$(x,y) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y}_j$$

$$\|x\|^2 = (x,x) = \sum |x_j|^2$$

   l_n^2 — полное $\implies$ l_n^2 — гильбертово.

2. $l^2 = \left\{ x = \{\, x_j \,\}_{j=1}^{\infty} \;\middle|\; \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2} \right\}$

$$(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y}_j$$

   l^2 — полное $\implies$ l^2 — гильбертово (с нормой, порождённой скалярным произведением)

3. F — финитные последовательности

$$(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y}_j$$

   (на самом деле, число слагаемых конечно)

$$\|x\|^2 = \sum |x_j|^2$$

   F не полно $\implies$ F — предгильбертово. l^2 — пополнение $(F, \|\cdot\|_2)$ до гильбертова.

4. $(T, \mathcal{U}, \mu)$, $\quad L^2(T,\mu)$ — гильбертово пространство.

$$(f,g) = \int\limits_T f(x)\overline{g(x)} \,\mathrm{d}\,\mu$$

$$\|f\|^2 = (f, f)$$

5. $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}[a, b], \quad f : [a, b] \to \mathbb{C}$

$$(f, g) = \sum_a^b f(x)\overline{g(x)} \,\mathrm{d}\, x$$

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}\, x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\left(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_2\right)$ не полно $\implies$ оно предгильбертово. Его пополнение до гильбертова — $L^2([a, b], \lambda)$.

6. $\mathscr{P} = \left\{\, p(x) = \sum_{n=0}^N c_n x^n \,\right\}$
   - $\mathscr{P} \subset \mathcal{C}[a, b]$

$$(p, q) = \int_a^b p(x)\overline{q(x)} \,\mathrm{d}\, x$$

   Такое пространство предгильбертово. Пополнение — $(L^2[a, b], \lambda)$.

   - $\mathscr{P} \subset F$

$$(p, q) = \sum_{n=0}^N a_n \overline{b_n}$$

   Предгильбертово пространство. Пополнение — l^2.

7. $H^2 = \left\{\, f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n \;\middle|\; \{\, a_n \,\}_{n=0}^\infty \in l^2 \,\right\}$ — *пространство Харди*

$$(f, g) = \sum_{n=0}^\infty a_n \overline{b_n}, \quad \|f\|_{H^2} = \|\{\, a_n \,\}\|_2 = \left(\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

H^2 — гильбертово.

$$\{\, a_n \,\}_{n=0}^\infty \in l^2 = \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \implies \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \le 1$$

Радиус сходимости $R = \frac{1}{\varlimsup \sqrt[n]{|a_n|}} \ge 1 \implies f$ аналитична в $\{\, z \mid \; |z| < 1 \,\}$.

Определение 53. H — предгильбертово, $\quad x, y \in H$
Будем говорить, что x *ортогонально* y ($x \perp y$), если $(x, y) = 0$.

Определение 54. $M \subset H$

$$M^\perp = \{\, y \in H \mid x \perp y \quad \forall x \in M \,\}$$

Если M — подпространство, то $M^\perp$ называется *ортогональным дополнением*.

Утверждение 21. $M \subset H$ (подмножество)
$m^\perp$ — замкнутое подпространство H.

Доказательство.

- Подпространство

  Возьмём $y, z \in M^\perp, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\forall x \in M \qquad \left.\begin{aligned} (y, x) = 0 \\ z(x) = 0 \end{aligned}\right\} \implies (\alpha y + \beta z, x) = \alpha(y, x) + \beta(z, x) = 0 \implies \alpha y + \beta z \in M^\perp$$

- Замкнутость

  Возьмём $\left\{\, y_n \in M^\perp \,\right\}_{n=1}^\infty; \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0$. Возьмём $x \in M$.

$$(y_n, x) = 0$$

$$\lim (y_n, x) = (y_0, x) \implies (y_0, x) = 0 \implies y_0 \in M^\perp$$

$\square$

32. Существование и единственность элемента ближайшего приближения в подпространстве гильбертова пространства. Теорема о проекции на подпространство. Следствия

Лемма 3. M — замкнутое подпространство H, $\quad u, v \in M, \quad x \in H \setminus M, \quad d = \rho(x, M) = \inf\limits_{z \in M} \|x - z\|$

$$\|u - v\|^2 \le 2\big(\|u - x\|^2 + \|v - x\|^2\big) - 4d^2$$

Доказательство. Воспользуемся тождеством параллелограмма для $(u - x)$, $(v - x)$.

$$2\big(\|u - x\|^2 + \|v - x\|^2\big) = \|u - v\|^2 + \|u + v - 2x\|^2$$

$$\|u + v - 2x\| = 2\left\|x - \frac{u + v}{2}\right\|$$

$$u, v \in M \implies \frac{u + v}{2} \in M \implies \left\|x - \frac{u + v}{2}\right\| \ge d \implies \|u + v - 2x\|^2 \ge 4d^2$$

$$\|u - v\|^2 \le \big(\|u - x\|^2 + \|v - x\|^2\big)^2 - 4d^2$$

$\square$

Теорема 34. H — гильбертово, $\quad M$ — замкнутое подпространство, $\quad x \in H$

$$\exists! y \in M : \quad \rho(x, M) = \|x - y\|,$$

т. е. y — элемент наилучшего приближения для H.

Доказательство.

- Существование

  $x \in H, \quad M, \quad d = \rho(x, M)$

  $$\exists \{\, y_n \in M \,\}_{n=1}^{\infty} : \quad \lim_{n \to \infty} \|x - y_n\| = d$$

  Проверим, что $\{\, y_n \,\}$ фундаментальна. Применим лемму.

  $$\|y_n - y_m\|^2 \le 2\big(\underbrace{\|y_n - x\|^2}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} d^2} + \underbrace{\|y_m - x\|^2}_{\xrightarrow[m \to \infty]{} d^2}\big) - 4d^2 \xrightarrow[n, m \to \infty]{} 0$$

  $\implies \{\, y_n \,\}$ фундаментальна, M замкнуто $\implies$ M полно $\implies$ $\exists y \in M : \quad \lim\limits_{n \to \infty} y_n = y \implies$ $\underbrace{\lim \|x - y_n\|}_{d} = \|x - y\| \implies \|x - y\| = d$

- Единственность

  Пусть $\|x - y\| = d, \quad \|x - z\| = d$. По лемме

  $$\|y - z\|^2 = 2\big(\|y - x\|^2 + \|z - x\|^2\big) - 4d^2 = 0 \implies y = z$$

$\square$

Теорема 35. H — гильбертово, $\quad M \subset H, \quad M$ — замкнутое подпространство, $\quad x \in H$

$$\exists! y \in M, \ z \in M^{\perp} : \quad x = y + z$$

Доказательство.

- Существование

$d = \rho(x, M)$

По предыдущей теореме

$$\exists! y \in M : \quad \|x - y\| = d = \inf_{u \in M} \|x - u\|$$

$$z \coloneqq x - y$$

Проверим, что $z \perp M$. Возьмём $u \neq 0 \in M$.

$$\{\, tu \,\}_{t \in \mathbb{R}} \subset M \implies y + tu \in M \quad \forall t \in \mathbb{R} \implies \|x - (y + tu)\|^2 \geq d^2 \iff \|z - tu\|^2 \geq d^2$$

Докажем, что это возможно только при $z \perp u$:

$$(z - tu, z - tu) = \|z\|^2 + t^2\|u\|^2 - t\big((u, z) + (z, u)\big) = \underbrace{\|z\|^2}_{d^2} + t^2\|u\|^2 - 2t\operatorname{Re}(z, u) \geq d^2$$

$$\implies t^2\|u\|^2 \geq 2t\operatorname{Re}(z, u) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

– $t > 0$

$$t\|u\|^2 \geq 2\operatorname{Re}(z, u) \quad \forall t > 0 \implies 0 \geq \operatorname{Re}(z, u)$$

– $t < 0$

$$t\|u\|^2 \leq 2\operatorname{Re}(z, u) \quad \forall t < 0 \implies 0 \leq \operatorname{Re}(z, u)$$

$$\implies \operatorname{Re}(z, u) = 0$$

Аналогично для мнимой части получаем

$$\operatorname{Im}(z, u) = 0$$

- Единственность

$$x = y + z, \;\; x = y_1 + z_1, \quad y, y_1 \in M, \;\; z, z_1 \in M^{\perp}$$

$$u = y - y_1 \implies u = z_1 - z$$

$$\implies u \in M \text{ и } u \in M^{\perp} \text{ — } \lightning \implies u = 0$$

□

Определение 55. H — гильбертово пространство, $\quad X, Y$ — замкнутые подпространства
Будем говорить, что H — *ортогональная сумма* ($H = X \oplus Y$), если

1. $\forall h \in H \quad \exists x \in X, \;\; y \in Y : \quad h = x + y$;
2. $\forall x \in X, \;\; y \in Y \quad (x, y) = 0$.

Утверждение 22. Если $X \perp Y, \quad X, Y$ — подпространства, то $X \cap Y = \{\, 0 \,\}$

Доказательство. Пусть $u \in X \cap Y \implies u \in X, \;\; u \in Y \implies u \perp u \implies u = 0$. □

Замечание. Если $H = X \oplus Y$, то

$$\forall h \in H \quad \exists! x \in X, \;\; y \in Y : \quad h = x + y$$

Доказательство. Пусть $h = x + y, \;\; h = x_1 + y_1$.

$$u = x - x_1 \implies u \in X, \;\; u \in Y \implies u = 0$$

□

Следствие. H — гильбертово, $\quad M$ — замкнутое подпространство H

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

Следствие. $(M^{\perp})^{\perp} = M$

Следствие. Если $H = X \oplus Y, \quad X, Y$ — замкнутые, то $Y = X^{\perp}$.

33. Критерий принадлежности множеству ортогональных проекторов

Определение 56. H — гильбертово, $\quad M$ — замкнутое подпространство

$$\forall h \in H \quad \exists! x \in M,\ y \in M^{\perp}: \quad h = x + y$$

Определим *оператор ортогонального проектирования*:

$$\underset{M}{P} h := x$$

(x — элемент наилучшего приближения для h в M).

$$\underset{M^{\perp}}{P} h = y$$

Теорема 36. H — гильбертово

1. $M \subset H$ — замкнутое подпространство, $\quad P := P_M$ — ортогональный проектор на M
   Тогда
   (a) $P \in \mathscr{B}(H)$;
   (b) $P^2 = P$;
   (c) *самосопряжённость*: $(Px, y) = (x, Py)$.
2. P удовлетворяет свойствам (a), (b), (c), $\quad M := P(H)$
   Тогда $P = P_M$, т. е. P — ортогональный проектор на $P(H)$.

Доказательство.

1. $M \subset H, \quad x \in H$

$$\exists! y, z; \quad x = y + z, \quad y \in M,\ z \in M^{\perp}$$
$$Px = y$$

   (a) Проверим линейность
   Возьмём $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\alpha x = \alpha y + \alpha z, \quad \alpha y \in M,\ \alpha z \in M^{\perp}$$

   Значит, разложение единственно.

$$\implies P(\alpha x) = \alpha y = \alpha P(x)$$

   Возьмём $w \in H$

$$\exists! u \in M,\ v \in M^{\perp}: \quad w = u + v$$
$$\implies x + w = (u + y) + (v + z), \quad (u + y) \in M,\ (v + z) \in M^{\perp}$$

   Разложение единственно.

$$\implies P(x + w) = u + y = Px + Pw$$

   Возьмём $x \in H, \quad x = y + z, \quad y \in M,\ z \in M^{\perp}$

$$\|x\|^2 = (y + z, y + z) = \|y\|^2 + \|z\|^2 \xRightarrow[y = Px]{} \|Px\|^2 \leq \|x\|^2 \implies \|Px\| \leq \|x\| \quad \forall x \in H$$

$$P \in \mathscr{B}(H), \quad \|P\| \le 1$$

$$M \ne \{\,0\,\} \implies \exists x \ne 0 \in M: \quad \|P\| = \sup_{u \ne 0 \in H} \frac{\|Pu\|}{\|u\|} \ge \frac{\|Px\|}{\|x\|} = 1 \implies \|P\| = 1$$

(b) $P^2 = P$

$$x \in M \implies Px = x, \quad x \in H \implies Px \in M \implies P(Px) = Px \implies P^2 = P$$

(c) Самосопряжённость

$$x, y \in H, \quad P = P_M, \quad H = M \oplus M^\perp$$

Обозначим $Q = P_{M^\perp}$.

$$x = Px + Qx$$

$$(Px, y) = (Px, Py + Qy) \xlongequal[Px \perp Qy]{} (Px, Py)$$

$$(x, Py) = (Px + Qx, Py) = (Px, Py)$$

2. $M \coloneqq P(H)$

(a) Проверим, что если $x \in M$, то $Px = x$.

$$x \in M \implies \exists y \in H: \quad Py = x \implies Px = P(Py) = P^2 y = Py = x$$

(b) Проверим, что M замкнуто.
Возьмём $\{\,x_n \in M\,\}_{n=1}^\infty$, $\quad \lim x_n = x$. В силу непрерывности P

$$\lim Px_n = Px$$

При этом,

$$Px_n = x_n \implies \lim x_n = Px \implies Px = x \implies x \in P(H)$$

P_M — ортогональный проектор на $M \implies$ если $x \in M$, то $Px = P_M x = x$
Возьмём $y \in M^\perp$, $\quad P_M y = 0$.

$$\|Py\|^2 = (Py, Py) = \big(y, P(Py)\big) = (y, Py) \xlongequal[\substack{y \in M^\perp \\ Py \in M}]{} 0 \implies Py = 0$$

Возьмём $x \in H$.

$$x = y + z, \quad y \in M, \ y = P_M x \implies Px = P_M x$$

□

34. Проектор на конечномерное пространство. Критерий полноты семейства элементов. Неравенство Бесселя

Следствие (ортогональный проектор на конечномерное пространство).
H — гильбертово, $\quad M \subset H$ — подпространство, $\quad \dim M = n$, $\quad \{\,e_j\,\}_{j=1}^n$ — ОНБ

$$P_M x = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j \quad \forall x \in H$$

Доказательство.

$$S_n \coloneqq \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j \implies S_n \in M$$

$$x = S_n + (x - S_n)$$

Возьмём $w = (x - S_n)$. Проверим, что $w \in M^\perp$.

$$(S_n, e_j) = (x, e_j) \implies (w, e_j) = (x, e_j) - (x, e_j) = 0 \implies w \perp e_j \implies w \in M^\perp$$

□

Следствие (критерий полноты семейства элементов гильбертова пространства).
H — гильбертово, $\{ x_\alpha \in H \}_{\alpha \in A}$ — семейство
$\{ x_\alpha \}_{\alpha \in A}$ — полное **тогда и только тогда**, когда

$$x \in H, \quad x \perp x_\alpha \quad \forall \alpha \in A \implies x = 0$$

Доказательство. Пусть $L = \overline{\mathscr{L}\{ x_\alpha \}_{\alpha \in A}}$ — замыкание линейной оболочки.
$\{ x_\alpha \}_{\alpha \in A}$ — полное $\iff L = H \iff L^\perp = \{ 0 \} \iff \Big(x \in H \perp x_\alpha \quad \forall \alpha \in A \implies x = 0 \Big)$ □

Определение 57. H — гильбертово, $\{ e_n \}_{n=1}^\infty$ — ОНС (*ортонормированное семейство*), т. е.

$$(e_n, e_m) = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$x \in H, \quad L = \{ c e_n \}_{c \in \mathbb{C}}, \quad \dim L = 1 \implies Px = (x, e_n) e_n$$

Числа (x, e_n) будем называть *абстрактными коэффициентами Фурье* по системе $\{ e_n \}_{n=1}^\infty$.
Будем говорить, что мы каждому x **сопоставили** *ряд Фурье*:

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$$

Определение 58. $\{ e_n \}$ — ОС (*ортогональная система*), $\|e_n\| > 0$

$$L = \{ c e_n \}_{c \in \mathbb{C}}, \quad \widetilde{e_n} = \frac{e_n}{\|e_n\|}, \quad P_L x = (x, \widetilde{e_n}) = (x, \widetilde{e_n}) \widetilde{e_n} = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} e_n$$

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_n e_n, \quad c_n = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} \text{ — \textit{коэффициенты Фурье по ОС} } \{ e_n \}_{n=1}^\infty$$

Следствие (неравенство Бесселя). $\{ e_n \}_{n=1}^\infty$ — ОНС в H, $x \in H$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2$$

Доказательство. Возьмём $\alpha_j \in \mathbb{C}$. Запишем теорему Пифагора:

$$\Big\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \Big\|^2 = \Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \Big) \xlongequal[e_j \perp e_k]{} \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j|^2$$

Пусть $L_n = \mathscr{L}\{ e_j \}_{j=1}^\infty$

$$P_{L_n} x = \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j \implies \|P_{L_n} x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |(x, e_j)|^2, \quad \|P_{L_n}\| \leq 1$$

$$\implies \sum_{j=1}^{n} |(x, e_j)|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall n \implies \sum_{j=1}^{\infty} |(x, e_j)|^2 \leq \|x\|^2$$

□