

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Пространства</b>	<b>2</b>
1.1	Метрические пространства . . . . .	2
1.2	Банаховы пространства . . . . .	2
1.2.1	Основные понятия . . . . .	2
1.2.2	Критерий полноты . . . . .	3
1.3	Пространство ограниченных функций . . . . .	4
1.4	Пространства с $\sup$ -нормой . . . . .	5

# Глава 1

## Пространства

### 1.1. Метрические пространства

**Следствие.**  $(X, \rho)$ ,  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  — фундаментальная

$$\implies \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty : \sum_{k=1}^\infty \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < +\infty$$

**Доказательство.** Следует из свойства 3 фундаментальных последовательностей □

**Теорема 1** (о замкнутом подпространстве).  $(X, \rho)$ ,  $Y \subset X$  ( $Y$  называется *подпространством*)

1.  $(X, \rho)$  — полное,  $Y$  замкнуто.

Тогда  $(Y, \rho)$  полно.

2.  $(Y, \rho)$  — полное.

Тогда  $Y$  замкнуто.

**Доказательство.**

1. Пусть  $\{y_n\}_{n=1}^\infty$  фундаментальна в  $Y$ . Тогда она фундаментальна и в  $X$ , а  $X$  полно. Значит,  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \in X$ . Так как  $Y$  замкнуто,  $a \in Y \implies (Y, \rho)$  — полное.

2. Пусть  $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $y_n \in Y$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ . Проверим, что  $a \in Y$ .

$\{y_n\}_{n=1}^\infty$  фундаментальна  $\implies \exists \lim y_n \in Y$  (т. к.  $Y$  — полное). □

### 1.2. Банаховы пространства

#### 1.2.1. Основные понятия

**Определение 1.**  $X$  — линейное пространство над полем  $K$  ( $K = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ).

$p : X \rightarrow \mathbb{R}$  называется *полунормой*, если

1. полуаддитивность:  $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$ ;
2. однородность:  $p(\lambda x) = |\lambda|p(x) \quad \forall \lambda \in K, x \in X$ .

**Свойства.**  $(X, p)$ ,  $p$  — полунорма,  $\mathbb{O}_n$  — ноль пространства  $X$

1.  $p(\mathbb{O}_n) = 0$ ;
2.  $p(x) \geq 0 \quad \forall x \in X$ .

### Доказательство.

$$1. p(\mathbb{O}_n) = p(0 \cdot \mathbb{O}_n) \stackrel{\text{однородность}}{=} 0 \cdot p(\mathbb{O}_n) = 0.$$

2. Пусть  $x \in X$

$$0 = p(\mathbb{O}_n) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x) \implies p(x) \geq 0$$

□

**Определение 2.**  $X$  — линейное пространство над  $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ .

$p : X \rightarrow \mathbb{R}$  называется *нормой*, если

1.  $p$  — полунорма;

2.  $p(x) = 0 \iff x = \mathbb{O}_n$ .

**Обозначение.**  $\|x\|$  — норма,  $(X, \|\cdot\|)$  — нормированное пространство.

Определим метрику, порождённую нормой:  $\rho(x, y) := \|x - y\|$ .

**Определение 3.**  $(X, \|\cdot\|)$  называется *банаховым*, если оно полное.

## 1.2.2. Критерий полноты

### Определение 4.

1.  $X$  — линейное пространство над  $K$ .

$L \subset X$  называется *подпространством* (в алгебраическом смысле), если оно является линейным пространством, т. е.

$$\left. \begin{array}{l} x, y \in L \\ \alpha, \beta \in K \end{array} \right\} \implies \alpha x + \beta y \in L$$

2.  $(X, \|\cdot\|)$

$L \subset X$  называется (*замкнутым*) *подпространством*, если

- (а)  $L$  — подпространство в алгебраическом смысле;
- (б)  $L$  замкнуто.

**Определение 5.**  $(X, \|\cdot\|)$ ,  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$

$$S_n := \sum_{k=1}^n x_k$$

Говорят, что ряд  $\sum_{k=1}^\infty x_k$  *сходится*, если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in X$ . Тогда  $S = \sum_{k=1}^\infty x_k$ .

Говорят, что ряд  $\sum x_k$  *сходится абсолютно*, если  $\sum \|x_k\|$  сходится.

**Теорема 2** (критерий полноты нормированного пространства).  $(X, \|\cdot\|)$  — полное **тогда и только тогда**, когда из абсолютной сходимости ряда следует его сходимость.

### Доказательство.

- $\implies (X \text{ — полное})$

Возьмём  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  такую, что  $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|$  сходится. Применим к этому ряду критерий Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N, p \in \mathbb{N} : \quad \|x_{n+1}\| + \dots + \|x_{n+p}\| < \varepsilon$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k$$

Требуется доказать, что  $S_n$  образуют фундаментальную последовательность. Для этого оценим норму разности:

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=1}^p x_{n+k} \right\| \stackrel{\Delta}{\leq} \sum_{k=1}^p \|x_{n+k}\| < \varepsilon$$

- $\Leftarrow$  (абсолютно сходящийся ряд сходится)

Пусть  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальна. Нужно доказать, что у неё есть предел.

Воспользуемся следствием из начала лекции:

$$\begin{aligned} \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < +\infty \\ \implies \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < +\infty \end{aligned}$$

Рассмотрим ряд без нормы:

$$\begin{aligned} \exists S = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \\ S_m = x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \dots + (x_{n_m} - x_{n_{m-1}}) = x_{n_m} \end{aligned}$$

При этом,

$$\exists \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S \implies \exists \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_m} = S \xrightarrow[\text{св-во фунд. посл. 2}]{=} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = S$$

□

### 1.3. Пространство ограниченных функций

**Определение 6.**  $X$  — множество.

$m(X)$  — пространство ограниченных функций:

$$m(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ (или } \mathbb{C}) \mid \sup_{x \in X} |f(x)| < +\infty \right\}$$

Норма на таком пространстве называется *равномерной, чебышёвской или sup-нормой*:

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

**Теорема 3.**  $m(X)$  — банахово пространство.

**Доказательство.**

1. Проверим, что  $\|f\|_{\infty}$  удовлетворяет аксиомам нормы:

$$\|f\|_{\infty} = 0 \iff \sup_{x \in X} |f(x)| = 0 \iff f(x) \equiv 0 \iff f = \mathbb{O}_n$$

$$\lambda \in K, \quad \|\lambda f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|_{\infty}$$

Пусть  $f, g \in m(X)$ ,  $x$  фиксирован. Тогда  $f(x), g(x)$  — числа.

$$\|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty} \geq \implies |f(x)| + |g(x)| \stackrel{\Delta}{\geq} |f(x) + g(x)| \quad \forall x \in X$$

В силу произвольности  $x$ ,

$$\implies \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty} \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| = \|f + g\|_{\infty}$$

2. Проверим полноту.

Возьмём фундаментальную последовательность  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  (в смысле нормы  $\|\cdot\|_{\infty}$ ).

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m > N \quad \|f_n - f_m\|_{\infty} < \varepsilon \quad (1.1)$$

Зафиксируем  $x \in X$ .

$$(1.1) \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Из полноты  $K$  следует, что  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

Обозначим  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  (поточечный).

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \text{ при фиксированном } x, \quad n, m > N$$

Перейдём к пределу по  $n$ :

$$|f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X, \quad m > N$$

Воспользуемся произвольностью  $x$ :

$$\|f - f_m\|_{\infty} = \sup_{x \in X} |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \implies (f - f_m) \in m(X)$$

$$f = (f - f_m) + f_m$$

В силу линейности  $m(X)$  это означает, что  $f \in m(X)$ ,  $\|f - f_m\|_{\infty} < \varepsilon$  при  $m > N$

$$\implies \lim_{m \rightarrow \infty} f_m = f \text{ в пространстве } m(X)$$

□

**Примечание.** Почему молодёжь ностальгирует по советской власти?

**Замечание.** Сходимость по норме в  $m(X)$  совпадает с равномерной сходимостью.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{\infty} = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| \right) = 0 \iff f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f$$

## 1.4. Пространства с sup-нормой

**Определение 7.** Зафиксируем  $n \in \mathbb{N}$ . Рассмотрим  $l_n^{\infty} = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\infty})$  или  $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_{\infty})$ , где

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_j \in \mathbb{R}\}, \quad \|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

При этом,  $l_n^{\infty} = m(X)$ , где  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $f(j) = x_j$ . Значит,  $l_n^{\infty}$  — банахово пространство.

**Определение 8.**  $l^{\infty}$  — пространство ограниченных последовательностей, т. е.

$$l^{\infty} = \left\{ x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty}, x_j \in \mathbb{R} \text{ или } \mathbb{C}, \sup_j |x_j| < +\infty \right\}$$

$$l^{\infty} = m(X), X = \mathbb{N} \implies l^{\infty} \text{ — банахово}$$

**Определение 9.**

$$C = \left\{ x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \mid \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_j = x_0 \right\}$$

$$C_0 = \left\{ x = \{x_j\}_{j=1}^{\infty} \mid \exists \lim_{j \rightarrow \infty} x_j = 0 \right\}$$

**Утверждение 1.** Пространства  $C$  замкнуты.