

Оглавление

1	ТФКП	2
1.1	Доказываем теорему о разложении в ряд Лорана	2
1.2	Особые точки аналитических функций	3
1.2.1	Классификация особых точек	4
1.2.2	Характеристика устранимой особой точки	4
1.2.3	Характеристика полюса	4

Глава 1

ТФКП

1.1. Доказываем теорему о разложении в ряд Лорана

Доказательство.

$$f \in \mathcal{A}\left(D_{r,R}(a)\right), \quad r_1 < r_2 < R_2 < R_1, \quad r < r_1 < R_1 < R$$

Введём $S_\rho = \{z \mid |z - a| = \rho\}$.

- Пусть $z \in \overline{D}_{r,R}(a)$.
Возьмём $\varepsilon < \min\{r_2 - r_1, R_1 - R_2\}$.
Обозначим $\sigma_\varepsilon = \{\zeta \mid |\zeta - z| = \varepsilon\}$.
Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \quad \varphi \in \mathcal{A}\left(D_{r,R}(a) \setminus \{z\}\right) \\ G_\varepsilon &= D_{r_1, R_1}(a) \setminus \{\zeta \mid |\zeta - z| \leq \varepsilon\} \\ \int_{\underset{\curvearrowright}{\partial} G_\varepsilon} \varphi(\zeta) d\zeta &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} (1.1) &\iff \int_{S_{R_1}} \varphi(\zeta) d\zeta - \int_{S_{r_1}} \varphi(\zeta) d\zeta - \int_{\sigma_\varepsilon} \varphi(\zeta) d\zeta = 0 \\ &\implies \frac{1}{2\pi i} = \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{S_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} \{\zeta \mid |\zeta - z| \leq \varepsilon\} &\subset D_{r,R}(a) \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= f(z) \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$(1.2), (1.3) \implies f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{1.4}$$

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}}$$

Обозначим $q_1(z, \zeta) = \frac{z-a}{\zeta-a}$.

$$|q_1(z, \zeta)| \leq \frac{R_2}{R_1} = Q_1 < 1 \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^n d\zeta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} (z-a)^n \int_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \quad (1.6) \end{aligned}$$

Обозначим $c_n(R_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$.

$$(1.6) \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = c_0(R_1) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(R_1)(z-a)^n$$

- Пусть z лежит на окружности.

$$-\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = -\frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{\frac{\zeta-a}{z-a} - 1} = \frac{1}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta-a}{z-a}} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} c_{-n-1}(r_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{r_1}} f(\zeta)(\zeta - a)^n d\zeta \quad (1.8) \\ \Rightarrow -\frac{1}{2\pi i} \int_{S_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(r_1)(z-a)^{-n} \end{aligned}$$

Воспользуемся леммой:

$$\Leftrightarrow -\int_{S_{\rho_1}} \varphi(\zeta) d\zeta + \int_{S_{\rho_2}} \varphi(\zeta) d\zeta = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{\rho_0}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta \stackrel{\text{def}}{=} c_n \quad (1.9)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S_{r_1}} f(\zeta)(\zeta - a)^n d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{\rho_0}} f(\zeta)(\zeta - a)^n d\zeta \stackrel{\text{def}}{=} c_{-n-1} \quad (1.10)$$

$$(1.4), (1.9), (1.10) \Rightarrow f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

□

Лемма 1. $r < \rho_1 < \rho_2 < R$, $m \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{\rho_1}} f(\zeta)(\zeta - a)^m d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{\rho_2}} f(\zeta)(\zeta - a)^m d\zeta \quad (1.11)$$

Доказательство. Возьмём $\varphi(\zeta) = f(\zeta)(\zeta - a)^m \in \mathcal{A}(D_{r,R}(a))$

По теореме Коши,

$$\int_{\partial D_{\rho_1, \rho_2}(a)} \varphi(\zeta) d\zeta = 0$$

□

1.2. Особые точки аналитических функций

Определение 1. $f \in \mathcal{A}(D_{0,R}(a))$

Говорят, что a — особая точка функции f .

1.2.1. Классификация особых точек

Доказано, что

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad (1.12)$$

Говорят, что

1. a — устранимая особая точка, если $c_{-n} = 0 \quad \forall n \geq 1$;

2. функция f имеет в a полюс, если

$$\exists n_0 \geq 1 : \quad c_{-n_0} \neq 0, \quad c_n = 0 \quad \forall n > n_0$$

3. функция f имеет ..., если

$$\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \quad c_{-n_k} \neq 0$$

1.2.2. Характеристика устранимой особой точки

Теорема 1. Чтобы точка a была устранимой особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\exists 0 < r < R, \quad \exists M : \quad |f(z)| \leq M \quad \forall z \in D_{0,r}(a) \quad (1.13)$$

Доказательство.

1. Необходимость

Из условия на устранимую особую точку и (1.12) следует, что

$$f(z) \in \dots$$

(по последней теореме предыдущего семестра)

2. Достаточность

Возьмём $0 < \varepsilon < r$ и $\varepsilon < |z-a| < r$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \\ \left| -\frac{1}{2\pi i} \int_{S_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{S_\varepsilon} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|} |d\zeta| \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$|\zeta-z| \geq |z-a| - |\zeta-a| = |z-a| - \varepsilon \geq \frac{1}{2}|z-a| \quad (1.15)$$

$$(1.13), (1.14), (1.15) \implies \left| \right. \quad (1.16)$$

$$(1.14), (1.16) \implies f(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \frac{f(\varepsilon)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{S_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta-a} d\zeta = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

□

1.2.3. Характеристика полюса

Теорема 2. Для того, чтобы a была полюсом **необходимо и достаточно**, чтобы

$$|f(z)| \xrightarrow{z \rightarrow a} +\infty \quad (1.17)$$

Доказательство.

1. Достаточность

$$f(z) = \sum_{n=1}^{n_0} c_{-n}(z-a)^{-n} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (z-a)^n \quad (1.18)$$

$$\Rightarrow f(z) = (z-a)^{-n_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{n_0-n} + c_0(z-a)^{n_0} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^{n+n_0} \right) = (z-a)^{-n_0} \left(c_{-n_0} + c_{-n_0+1}(z-a) + \dots \right)$$

$$\exists \delta_0 > 0 : \quad |c_{-n_0} + c_{-n_0+1}(z-a) + \dots| \geq \frac{1}{2}|c_{-n_0}| \quad \text{при } |z-a| < \delta_0 \quad (1.19)$$

$$\Rightarrow |f(z)| \geq |z-a|^{-n_0} \cdot \frac{|c_{-n_0}|}{2} \xrightarrow{z \rightarrow a} +\infty$$

2. Необходимость

$$(1.17) \Rightarrow \exists \delta_1 : \quad |f(z)| > 1 \quad \text{при } |z-a| < \delta_1$$

$$\Rightarrow f(z) \neq 0 \quad \text{при } z \in D_{0,\delta_1}(a) \quad \Rightarrow \quad \varphi(z) := \frac{1}{f(z)} \in \mathcal{A}(D_{0,\delta_1}(a))$$

$$\varphi(z) \neq 0$$

$$(1.17) \Rightarrow |\varphi(z)| \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0$$

$$|\varphi(z)| < 1$$

$$\Rightarrow \varphi \in \mathcal{A}(\mathbb{B}_{\delta_1}(a))$$

$$\Rightarrow \varphi(a) = 0$$

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \exists h \in \mathcal{A}(\mathbb{B}_{\delta_1}(a)) : \quad \psi(z) = (z-a)^{n_0} h(z), \quad h(z) \neq 0, \quad z \in \mathbb{B}_{\delta_2}(a)$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^{n_0}} \cdot \frac{1}{h(z)}$$

$$\Rightarrow g(z) = \frac{1}{h(z)} \in \mathcal{A}(\mathbb{B}_{\delta_2}(a))$$

$$\Rightarrow g(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^{n_0}} \left(c_0 + c_1(z-a) + \dots \right) = c_0(z-a)^{-n_0} + c_1(z-a)^{-n_0+1} + \dots$$

□