Оглавление

1 Линейные пространства **2**

1.1 Конечномерные пространства 2

1.1.1 Изоморфность конечномерных пространств одинаковой размерности 2

1.2 Конечномерные подпространства 3

1.3 Добавление в параграф о конечномерных пространствах 4

1.4 Почти ортогональные элементы 4

1.4.1 Лемма Рисса о почти ортогональном элементе 4

Глава 1

Линейные пространства

1.1. Конечномерные пространства

1.1.1. Изоморфность конечномерных пространств одинаковой размерности

Теорема 1. $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ — линейные над $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $\quad \dim X = \dim Y = n \in \mathbb{N}$.
Тогда X линейно изоморфно Y.

Доказательство. Рассмотрим $Z = l_n^2 = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Докажем, что l_n^2 и X линейно изоморфны. Этого достаточно в силу транзитивности.

Пусть $\{ f_j \}_{j=1}^n$ — базис в X, $\quad e_j = (0, \dots, 0, \underset{j}{1}, 0, \dots, 0)$ — базис в l_n^2.

Определим $A : l_n^2 \to X : \quad Ae_j = f_j$.

$$A\Big(\sum_{j=1}^n c_j e_j\Big) := \sum_{j=1}^n c_j f_j \implies A \in \mathscr{L}in(l_n^2, X)$$

Понятно, что A — биекция.

- Проверим непрерывность

$$z \in l_n^2, \; z = \sum_{j=1}^n c_j e_j \quad \|A(z)\| = \Big\|\sum_{j=1}^n c_j f_j\|_X \le \sum_{j=1}^n |c_j| \cdot \|f_j\| \underset{\text{КБ}}{\le} \Big(\sum_{j=1}^n |c_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{j=1}^n \|f_j\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = M\|z\|_{l_n^2}$$

$$\implies A \in \mathscr{B}(l_n^2, X), \quad \|A\| \le M$$

- Найдём $c > 0 : \quad \|Az\| \ge c\|z\| \quad \forall z \in l_n^2$

$$g(z) := \|Az\|, \quad z \in l_n^2$$

  $g(z)$ непрерывна на l_n^2.

$$S := \{ z \in l_n^2 \mid \|z\| = 1 \}$$

  S — компакт в l_n^2.

$$\exists \min_{z \in S} g(z) = g(z_0) = r > 0 \implies \forall z \in S \quad \|Az\| \ge r$$

  Возьмём $u \in l_n^2 \ne 0$.

$$\frac{u}{\|u\|} \in S \implies \Big\|A\Big(\frac{u}{\|u\|}\Big)\Big\| \ge r \implies \|Au\| \ge r\|u\| \xRightarrow[\text{критерий лин. изоморфности}]{} l_n^2 \text{ линейно изоморфно } X$$

$\square$

Следствие. $(X, \|\cdot\|)$, $\quad \dim X < +\infty$

1. X — банахово;
2. $K \subset X$ — компакт $\iff$ K ограничено и замкнуто;

3. $K \subset X$ относительно компактно $\iff$ K ограничено.

Доказательство.

1. l_n^2 — банахово $\implies$ X — банахово.
2. $K \subset X, \quad A : X \to l_n^2$ — линейный изоморфизм $\implies$ A, A^{-1} ограничены.

   K — компакт $\implies$ $\Big(A(K)$ — компакт $\iff$ K ограничено и замкнуто$\Big)$.

$$\implies K = A^{-1}\big(A(K)\big), \quad K \text{ ограничено и замкнуто}$$

□

Теорема 2. $(X, \|\cdot\|), \quad \dim X < +\infty, \quad (Y, \|\cdot\|)$

$$\mathscr{L}in(X,Y) = \mathscr{B}(X,Y)$$

Доказательство.

- Пусть $T \in \mathscr{L}in(l_n^2, X), \quad z \in l_n^2$.

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j, \quad e_j = (0, \ldots, 0, \underset{j}{1}, 0 \ldots, 0)$$

$$\|Tz\| = \Big\|\sum_{j=1}^{n} c_j T e_j\Big\| \le \sum_{j=1}^{n} |c_j| \|Te_j\| \underset{\text{К–Б}}{\le} \Big(\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{j=1}^{n} \|Te_j\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \implies$$

$$\implies \|Tz\| \le M\|z\| \implies T \in \mathscr{B}(l_n^2, X)$$

- $U \in \mathscr{L}in(X, Y)$

  Пусть $l_n^2 \xrightarrow{A} X \xrightarrow{U} Y, \quad A$ — линейный изоморфизм. Положим $T = UA$.

$$\implies T \in \mathscr{L}in(l_n^2, Y) = \mathrm{B}(l_n^2, Y) \implies T \in \mathscr{B}(l_n^2, Y)$$

$$U = TA^{-1} \implies U \in \mathscr{B}(X, Y)$$

□

1.2. Конечномерные подпространства

Определение 1. (X, ρ) — метрическое пространство, $\quad Y \subset X, \quad a \in X$

$$\rho(a, Y) = \inf_{y \in Y} \rho(a, y)$$

Если $\exists y_0 \in Y : \quad \rho(a, Y) = \rho(a, y_0)$, то y_0 называется *элементом наилучшего приближения.*

Замечание. Если Y — компакт, то элемент наилучшего приближения существует (т. к. $\rho(a, y)$ непрерывна).

Теорема 3. $(X, \|\cdot\|)$

1. $L \in X, \quad L$ — конечномерное подпространство в алгебраическом смысле $\implies$ L замкнуто;
2. $a \in X \implies$ в L существует элемент наилучшего приближения.

Доказательство.

1. $\dim L < +\infty \implies L$ — банахово $\implies L$ замкнуто.

2. $a \in X, \quad f = \rho(a, L) = \inf \|a - y\|$

$$\exists \{ y_n \}_{n=1}^{\infty} : \quad d \le \|a - y_n\| \le d + \frac{1}{n}$$

Проверим, что $\{ y_n \}$ ограничена:

$$\|y_n\| \overset{\Delta}{\le} \|a\| + \|y_n - a\| \le \|a\| + d + 1$$

$$\dim L < +\infty \implies \{ y_n \}_{n=1}^{\infty} \text{ относительно компактна } \implies \exists \{ y_{n_j} \} : \quad \exists \lim_{j\to\infty} y_{n_j} = y_0 \in L$$

$$d \le \|a - y_{n_j}\| \le d + \frac{1}{n_j} \implies \|a - y_0\| = d$$

$\square$

Замечание. Элемент наилучшего приближения не обязательно единственен.

Примеры.

1. $l_2^\infty = \{(x, y), \|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}\}$ $\mathtt{B}_1(0, 0)$ выглядит в этом пространстве как квадрат.
   $L = \{ y = kx \}, \quad k \ne 0$. Для L существует единственный элемент наилучшего приближения.
2. $L = \{ y = 0 \}$. Для L элемент наилучшего приближения не единственен.
3. $l_2^1 = \{(x, y), \|(x, y)\| = |x| + |y|\}$ $B_1(0, 0)$ выглядит как квадрат, повёрнутый на $\frac{\pi}{4}$.
   $L = \{ y = kx \}, \quad k \ne \pm 1$. Для L существует единственный элемент наилучшего приближения.
4. $L = \{ y = x \}$. Для L элементов наилучшего приближения бесконечно много.

Следствие. $\mathcal{C}[a, b], \quad \|f\|_\infty = \max |f(x)|, \quad \mathscr{P}_n = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j x^j, \quad a_j \in \mathbb{R} \right\}$

$$\exists p \in \mathscr{P}_n : \quad \inf_{q \in \mathscr{P}_n} \|f - q\|_\infty = \|f - p\|$$

p называется *многочленом наилучшего приближения*

Замечание. Для $\mathscr{P}_n$ существует единственный элемент наилучшего приближения.

1.3. Добавление в параграф о конечномерных пространствах

Следствие. $\dim X = n \in \mathbb{N}, \quad \|\cdot\|_1, \ \|\cdot\|_2$ — нормы на X.
Тогда $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны.

1.4. Почти ортогональные элементы

1.4.1. Лемма Рисса о почти ортогональном элементе

Лемма 1. $(X, \|\cdot\|), \quad L \subsetneq X$ — подпространство, $L = \overline{L}, \quad 0 < \varepsilon < 1$

$$\exists x_0 : \quad \|x_0\| = 1, \quad \rho(x_0, L) > 1 - \varepsilon$$

Доказательство. Возьмём $z \in X \setminus L$.

$$\rho(z, L) = d > 0 \quad (\text{т. к. } L = \overline{L})$$

$$\rho(z, L) = \inf_{y \in L} \|z - y\|$$

$$\exists y \in L : \quad d \le \|z - y\| < \frac{d}{1-\varepsilon}$$

Выберем $x_0 = \frac{z-y}{\|z-y\|}$. Возьмём $u \in L$.

$$\|x_0 - u\| = \left\| \frac{z-y}{\|z-y\|} - u \right\| = \frac{\big\|z - y - u \cdot \|z-y\|\big\|}{\|z-y\|} \ge \frac{d}{\frac{d}{1-\varepsilon}} = 1 - \varepsilon$$

$\square$

Замечание. Если $\exists y_0 : \quad \rho(z, y_0) = d$, то $x_0 = \frac{z-y_0}{\|z-y_0\|} \implies \|x_0 - u\| \ge 1$