Теория формальных языков и трансляций

2025–2026

Содержание

I. Языки и их представление

1. Алфавиты и языки. Представление языков с помощью распознающих и порождающих процедур. Теорема о рекурсивности языка

Определение 1. *Алфавит* или *словарь* есть конечное множество символов.

Определение 2. *Предложение* (*строка*, *слово*) есть любая цепочка конечной длины, составленная из символов некоторого алфавита.

Определение 3. Предложение, не содержащее ни одного символа, называется *пустым предложением.*

Обозначение. ε

Утверждение 1. Множество цепочек над алфавитом счётно бесконечно.

Определение 4. *Язык* есть любое множество предложений над некоторым алфавитом.

Определение 5. *Распознающий алгоритм* определяет, есть ли данное предложение в данном языке.
Распознающая процедура:

- для предложений в языке прекращает работу с ответом 'да';
- для предложений не из языка завершается с ответом 'нет', или не завершается вовсе.

Определение 6. *Порождающая процедура* систематически порождает предложения языка последовательно в некотором порядке.

Определение 7. Язык называется *рекурсивно перечислимым*, если существует процедура, которая порождает или распознаёт этот язык.

Определение 8. Язык *рекурсивен*, если существует алгоритм его распознавания.

Теорема 1. $L \subseteq V^*$ — язык, $\overline{L} = V^* \setminus L$
Если языки L и $\overline{L}$ оба рекурсивно перечислимы, то язык L рекурсивен.

II. Грамматики

Формальное определение грамматики. Типы грамматик. Пустое предложение

Определение 9. *Грамматикой* называется четвёрка $G = (V_N, V_T, P, S)$, где

- V_N, V_T — *алфавиты нетерминалов* и *терминалов* соответственно, причём $V_N \cap V_T = \emptyset$;
- P — конечное *множество правил*, каждое из которых имеет вид $\alpha \to \beta$, где
  - $\alpha \in V^* V_N V^*$;
  - $\beta \in V^*$;

- $V = V_N \cup V_T$ — *объединённый алфавит* грамматики;
- S — *начальный нетерминал.*

Определение 10. $\alpha \to \beta \in P$ — правило, γ, δ — цепочки из множества V^*
Будем говорить, что из цепочки $\gamma\alpha\delta$ *непосредственно выводится цепочка* $\gamma\beta\delta$ в грамматике G при помощи данного правила.

Обозначение. $\gamma\alpha\delta \underset{G}{\Longrightarrow} \gamma\beta\delta$

Определение 11. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ — цепочки из множества V^*,

$$\alpha_1 \underset{G}{\Longrightarrow} \alpha_2, \quad \alpha_2 \underset{G}{\Longrightarrow} \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_{m-1} \underset{G}{\Longrightarrow} \alpha_m$$

Тогда говорим, что из α_1 *выводится* α_m в грамматике G.

Обозначение. $\alpha_1 \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \alpha_m$

Определение 12. *Язык, порождаемый* грамматикой G определим как

$$L(G) = \left\{ w \;\middle|\; w \in V_T^*, \quad S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} w \right\}$$

Определение 13. Любая цепочка $\alpha \in V^*$ такая, что $S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \alpha$ называется *сентенциальной формой.*

Определение 14. Грамматики G_1 и G_2 называются *эквивалентными*, если $L(G_1) = L(G_2)$.

Типы грамматик

Определение 15. Грамматику, на которую не наложено никаких ограничений, назовём *грамматикой типа 0.*

Определение 16. Грамматика $G = (V_N, V_T, P, S)$ является *грамматикой типа 1* или *контекстно-зависимой грамматикой*, если для каждого её правила $\alpha \to \beta \in P$ выполняется $|\beta| \geq |\alpha|$.

Определение 17. Грамматика $G = (V_N, V_T, P, S)$ является *грамматикой типа 2* или *контекстно-свободной* грамматикой, если каждое её правило имеет вид $A \to \beta \in P$, где $A \in V_N$, $\beta \in V^+$.

Определение 18. Грамматика $G = (V_N, V_T, P, S)$ является *грамматикой типа 3* или *регулярной грамматикой*, если каждое её правило имеет вид $A \to aB$ или $A \to a$, где $a \in V_T$, $A, B \in V_N$.

Пустое предложение

Расширим данные ранее определения типов грамматик, допустив порождение пустого предложения правилом $S \to \varepsilon$, где S — начальный символ, при условии, что S не появляется в правой части никакого правила.

Лемма 1. $G = (V_N, V_T, P, S)$ — грамматика типа ≥ 1
Тогда существует другая грамматика G_1 такого же типа, которая порождает тот же самый язык, и в которой ни одно правило не содержит начальный символ в своей правой части.

Теорема 2. L — язык типа ≥ 1
Языки $L \cup \{\varepsilon\}$ и $L \setminus \{\varepsilon\}$ имеют тот же тип.

2. Рекурсивность контекстно-зависимых грамматик

Определение 19. Грамматика $G = (V_N, V_T, P, S)$ *рекурсивна*, если существует алгоритм, который определяет, порождается ли любая данная цепочка $x \in V_T^*$ грамматикой G.

Теорема 3. Если грамматика контекстно-зависима, то она рекурсивна.

3. Деревья вывода в контекстно-свободных грамматиках. Теорема о деревьях вывода

Определение 20. $G = (V_N, V_T, P, S)$ — cfg

Дерево является *деревом вывода* в грамматике G, если оно удовлетворяет четырём условиям:

1. каждый узел имеет метку — символ из алфавита V;
2. метка корня — S;
3. если узел имеет по крайней мере одного потомка, то его метка должна быть нетерминалом;
4. если узлы $n1, n_2, \ldots, n_k$ — прямые потомки узла n, перечисленные слева-направо, с метками $A_1, A_2, \ldots, A_k$ соответственно, а метка узла n есть A, то $A \to A_1 A_2 \ldots A_k \in P$.

Теорема 4. $G = (V_N, V_T, P, S)$ — cfg, $\quad \alpha \in V^*, \quad \alpha \neq \varepsilon$

Вывод $S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \alpha$ существует **тогда и только тогда**, когда существует дерево вывода в грамматике G с результатом α.

III. Конечные автоматы и регулярные грамматики

4. Конечные автоматы. Теорема об отношениях эквивалентности и конечных автоматах

Определение 21. *Конечным автоматом* называется формальная система $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, где

- Q — конечное непустое *множество состояний*;
- Σ — конечный *входной алфавит*;
- δ — отображение $Q \times \Sigma \to Q$;
- $q_0 \in Q$ — *начальное состояние*;
- $F \subset Q$ — множество конечных состояний.

Замечание. Область определения отображения δ можно расширить до $Q \times \Sigma^*$ следующим образом:

$$\delta'(q, \varepsilon) = q, \quad \delta'(q, xa) = \delta\big(\delta'(q, x), a\big)$$

Определение 22. Цепочка $x \in \Sigma^*$ *принимается* конечным автоматом M, если $\delta(q_0, x) = p$ для некоторого $p \in F$.

Множество всех цепочек $x \in \Sigma^*$, принимаемых конечным автоматом M, называется языком, *распознаваемым конечным автоматом* M, и обозначается $T(M)$.

Любое множество цепочек, принимаемых конечным автоматом, называется *регулярным*.

Определение 23. M — dfa

Определим *отношение эквивалентности* R на множестве Σ^*:

$$(x, y) \in R \iff \delta(q_0, x) = \delta(q_0, y)$$

Определение 24. Отношение эквивалентности называется *право-инвариантным*, если

$$xRy \implies xzRyz \quad \forall z \in \Sigma$$

Теорема 5. Следующие утверждения эквивалентны:

1. Язык $L \subset \Sigma^*$ распознаётся некоторым fa.
2. Язык L есть объединение некоторых классов эквивалентности право-инвариантного отношения эквивалентности конечного индекса.
3. Определим отношение R:

$$xRy \iff \forall z \in \Sigma^* \quad \Big(xz \in L \iff yz \in L\Big)$$

Отношение R имеет конечный индекс.

5. Теорема о единственности конечного автомата с минимальным числом состояний

Теорема 6. Конечный автомат с минимальным числом состояний, распознающий язык L, единственен с точностью до изоморфизма (переименования состояний), и есть fa, задаваемый отношением R из п. 3 теор. 5.

6. Недетерминированные конечные автоматы. Теорема об эквивалентности недетерминированных и детерминированных конечных автоматов

Определение 25. *Недетерминированным конечным автоматом* называется формальная система $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, где

- Q — конечное непустое *множество состояний*;
- Σ — *входной алфавит*;
- δ — отображение $Q \times \Sigma \to 2^Q$;
- $q_0 \in Q$ — *начальное состояние*;
- $F \subset Q$ — *множество конечных состояний.*

Область определения δ может быть расширена на $Q \times \Sigma^*$ следующим образом:

$$\delta(q, \varepsilon) = \{\, q \,\}, \quad \delta(q, xa) = \bigcup_{p \in \delta(q, x)} \delta(p, a)$$

Область определения δ может быть расширена до $2^Q \times \Sigma^*$ следующим образом:

$$\delta(\{\, p_1, p_2, \ldots, p_k \,\}, x) = \bigcup_{i=1}^{k} \delta(p_i, x)$$

Определение 26. Цепочка $x \in \Sigma^*$ *принимается* НКА M, если существует состояние $p \in F$ такое, что $p \in \delta(q_0, x)$.

Обозначение. $T(M)$ — множество всех цепочек, принимаемых НКА M.

Теорема 7. L — язык, распознаваемый НКА.
Тогда существует ДКА, который распознаёт L.

7. Конечные автоматы и языки типа 3. Теоремы об эквивалентности конечных автоматов и грамматик типа 3

Определение 27. $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ — КА
Конфигурацией конечного автомата M назовём состояние управления $q \in Q$ в паре с непрочитанной частью входной цепочки.

Теорема 8. G — грамматика типа 3.
Тогда существует КА M такой, что $T(M) = L(G)$.

Теорема 9. M — КА.
Существует грамматика G типа 3 такая, что $L(G) = T(M)$.

8. Теорема о том, что класс регулярных языков образует булеву алгебру

Определение 28. *Булева алгебра множеств* есть совокупность множеств, замкнутая относительно операций объединения, дополнения и пересечения.

Определение 29. $L \subset \Sigma_1^*, \quad \Sigma_1 \subset \Sigma_2$
Под *дополнением* языка L подразумевается множество $L = \Sigma_2^* \setminus L$.

Лемма 2. Класс языков типа 3 замкнут относительно объединения.

Лемма 3. Класс множеств, распознаваемых конечными автоматами замкнут относительно дополнения.

Теорема 10. Класс множеств, принимаемых конечными автоматами, образует булеву алгебру.

Теорема 11. Все конечные множества распознаются конечными автоматами.

9. Замкнутость регулярных языков относительно произведения и замыкания

Определение 30. *Произведением* или *конкатенацией* языков L_1 и L_2 называется множество

$$L_1 L_2 = \{\, z \mid z = xy, \quad x \in L_1,\ y \in L_2 \,\}$$

Теорема 12. Класс множеств, распознаваемых конечными автоматами, замкнут относительно произведения.

Определение 31. *Замыкание языка* L есть множество

$$L^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} L^k$$

Теорема 13. Класс множеств, принимаемых конечными автоматами, замкнут относительно замыкания.

10. Теорема Клини и следствие из неё

Теорема 14. Класс множеств, принимаемых конечными автоматами, является наименьшим классом, содержащим все конечные множества, замкнутым относительно объединения, произведения и замыкания.

Следствие. Любое выражение, построенное из конечных подмножеств множества Σ^*, где Σ — конечный алфавит, и конечного числа операций объединения, произведения и замыкания со скобками обозначает множество, принимаемое некоторым конечным автоматом.

IV. Контекстно-свободные грамматики

11. Теорема об алгоритмической разрешимости пустоты языка, порождаемого КС-грамматикой

Теорема 15. Существует алгоритм для определения, является ли язык, порождаемый данной КС-грамматикой, пустым.

12. Теоремы об исключении непродуктивных и недостижимых нетерминалов из КС-грамматик

Теорема 16. Для любой КС-грамматики G, порождающей непустой язык, можно найти эквивалентную КС-грамматику $G_1 = (V_N^1, V_T, P^1, S)$, в которой для любого нетерминала A существует терминальная цепочка x такая, что $A \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} x$.

Определение 32. Нетерминалы из V_N^1 принято называть *продуктивными*.

Определение 33. Нетерминалы, которые не участвуют ни в каком выводе сентенциальной цепочки, называются *недостижимыми*.

Теорема 17. Для любой КС-грамматики, порождающей непустой язык L, можно найти КС-грамматику $G = (V_N, V_T, P, S)$, порождающую язык L такую, что для каждого её нетерминала A существует вывод вида

$$S \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} x_1 A x_3 \overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}} x_1 x_2 x_3, \quad x_1, x_2, x_3 \in V_T^*$$

Определение 34. Контекстно-свободные грамматики, удовлетворяющие условию теор. 17, принято называть *приведёнными*.

13. Лемма о левостороннем выводе. Теорема об исключении цепных правил из КС-грамматики

Определение 35. Вывод в КС-грамматике назовём *левосторонним*, если на каждом его шаге производится замена крайнего левого вхождения нетерминала.

Обозначение. $\underset{\text{lm}}{\Longrightarrow}, \overset{*}{\underset{\text{lm}}{\Longrightarrow}}$

Лемма 4. $G = (V_N, V_T, P, S)$ — контекстно-свободная грамматика.
Если $S \xRightarrow[G]{*} x$, где $x \in V_T^+$, то существует и левосторонний вывод $S \xRightarrow[\text{lm}]{*} x$ в той же грамматике.

Теорема 18. Любой контекстно-свободный язык может быть порождён контекстно-свободной грамматикой, не содержащей цепных правил, т. е. правил вида $A \to B$, где A и B — нетерминалы.

14. Теорема о нормальной форме Хомского

Теорема 19. Любой КС-язык может быть порождён грамматикой, в которой все правила имеют вид $A \to BC$ или $A \to a$ (A, B, C — нетерминалы, a — терминал).

15. Леммы о подстановке и устранении левой рекурсии

Лемма 5 (о подстановке). $G = (V_N, V_T, P, S)$ — cfg, $\quad A \to \alpha_1 B \alpha_2, \quad A, B \in V_N, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in V^*$, $\{\, B \to \beta_i \mid \beta_i \in V^+, \quad i = 1, \ldots, m \,\}$ — множество всех B-*порождений*, т. е. правил с нетерминалом B в левой части.
Грамматика $G_1 = (V_N, V_T, P_1, S)$ получается из грамматики G отбрасыванием правила $A \to \alpha_1 B \alpha_2$ и добавлением правил вида $A \to \alpha_1 \beta_i \alpha_2$.
Тогда $L(G) = L(G_1)$.

Лемма 6 (об устранении левой рекурсии). $G = (V_N, V_T, P, S)$ — КС-грамматика,
$\{\, A \to A\alpha_i \mid A \in V_N,\ \alpha_i \in V^*, \quad i = 1, \ldots, m \,\}$ — множество всех *леворекурсивных* A-*порождений*,
$\{\, A \to \beta_j \mid j = 1, \ldots, n \,\}$ — множество всех прочих A-порождений.
$G_1 = \big(V_N \cup \{\, Z \,\}, V_T, P_1, S\big)$ — КС-грамматика, образованная добавлением нового нетерминала Z и заменой всех A-порождений правилами:

- $A \to \beta_j, \quad A \to \beta_j Z, \quad j = 1, \ldots, n;$
- $Z \to \alpha_i, \quad Z \to \alpha_i Z, \quad i = 1, \ldots, m.$

Тогда $L(G_1) = L(G)$.

16. Теорема о нормальной форме Грейбах

Определение 36. Говорят, что КС-грамматика $G = (V_N, V_T, P, S)$ представлена в *нормальной форме Грейбах*, если каждое её правило имеет вид $A \to a\alpha$, где $a \in V_T$, $\alpha \in V_N^*$.

Теорема 20. Каждый КС-язык может быть порождён КС-грамматикой в нормальной форме Грейбах.

17. Теорема “uvwxy”

Теорема 21. L — cfl
Существуют постоянные p и q, зависящие только от языка L, такие, что если существует $z \in L$ при $|z| > p$, то цепочка z представима в виде $z = uvwxy$, где $|vwx| \le q$, причём v и x одновременно не пусты, так что для любого целого $i \ge 0$ цепочка $uv^iwx^iy \in L$.

18. Теоремы об алгоритмической разрешимости конечности КС-языков и исключении нетерминалов, порождающих конечные языки, из КС-грамматик

Теорема 22. Существует алгоритм для определения, порождает ли данная КС-грамматика G конечный или бесконечный язык.

Теорема 23. Для всякой КС-грамматики G_1 можно найти эквивалентную ей КС-грамматику G_2 такую, что если A — нетерминал грамматики G_2, не являющийся начальным нетерминалом, то из A выводимо бесконечно много терминальных цепочек.

19. Свойство самовставленности. Теорема о регулярности языков, порождаемых несамовставленными КС-грамматиками

Определение 37. Говорят, что грамматика G является *самовставленной*, если существует нетерминал A такой, что $A \overset{+}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \alpha_1 A \alpha_2$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in V^+$.

Говорят также, что нетерминал A является *самовставленным.*

Теорема 24. G — несамовставленная грамматика.

Тогда $L(G)$ — регулярное множество.

20. Теорема об ε-правилах в контекстно-свободных грамматиках

Теорема 25. L — язык, порождаемый грамматикой $G = (V_N, V_T, P, S)$, где каждое правило в P имеет вид $A \to \alpha$, где A — нетерминал, $\alpha \in V^*$.

Тогда L может быть порождён грамматикой, в которой каждое правило имеет вид $A \to \alpha$, где A — нетерминал, $\alpha \in V^+$, либо $S \to \varepsilon$, и кроме того, начальный терминал грамматики S не появляется в правой части никакого правила.

21. Специальные типы контекстно-свободных языков и грамматик

Определение 38. Говорят, что КС-грамматика $G = (V_N, V_T, P, S)$ *линейна*, если каждое её правило имеет вид $A \to uBv$ или $A \to u$, где $A, B \in V_N$, $u, v \in V_T^*$.

Если $v = \varepsilon$, то грамматика называется *праволинейной*, если $u = \varepsilon$, то она *леволинейна.*

Определение 39. Говорят, что грамматика $G = (V_N, V_T, P, S)$ *последовательна*, если нетерминалы $A_1, \ldots, A_k \in V_N$ можно упорядочить так, что если $A_i \to \alpha \in P$, то α не содержит ни одного нетерминала A_j с индексом $j < i$.

Определение 40. Если КС-язык L над алфавитом V_T есть подмножество языка $w_1^* w_2^* \ldots w_k^*$ для некоторого k, где $w_i \in V_T^+$, $i = 1, \ldots, k$, то говорят, что L — *ограниченный* язык.

Определение 41. Говорят, что контекстно-свободная грамматика G *неоднозначна*, если в языке $L(G)$ существует цепочка, выводимая двумя или более различными левосторонними выводами, то есть существуют различные деревья вывода с одинаковыми результатами.

Определение 42. Если все грамматики, порождающие некоторый контекстно-свободный язык, неоднозначны, то говорят, что этот язык *существенно неоднозначен.*

V. Магазинные автоматы

22. МП-автомат. Неформальное описание. Формальное определение. Понятие конфигурации

Неформальное описание. Магазинный автомат подобен конечному автомату, но, в отличие от последнего, имеет рабочую память — *магазин*, в который записываются символы из ещё одного алфавита — *алфавита магазинных символов.* Каждое движение магазинного автомата определяется в зависимости от текущего состояния управления, входного символа, или независимо от него, и от верхнего символа магазина.

Определение 43. *Недетерминированный магазинный автомат* есть формальная система $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, где

- Q — конечное *множество состояний*;
- Σ — конечный *входной алфавит*;
- Γ — конечный *магазинный алфавит*;
- δ — отображение $Q \times \left(\Sigma \cup \{\, \varepsilon \,\}\right) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$, представляющее конечное *управление* автомата;
- $q_0 \in Q$ — *конечное состояние*;
- $Z_0 \in \Gamma$ — *начальный символ магазина*;
- $F \subset Q$ — множество *конечных состояний.*

Определение 44. Под *конфигурацией* будем подразумевать тройку (q, x, α), где

- $q \in Q$ — *текущее состояние управления*;
- $x \in \Sigma^*$ — *непросмотренная часть входной цепочки*;
- $\alpha \in \Gamma^*$ — *магазинная цепочка*, причём крайний левый её символ считается находящимся на вершине магазина.

23. Теорема об эквивалентности языков, принимаемых недетерминированными магазинными автоматами при конечном состоянии и при пустом магазине

Определение 45. Язык, *распознаваемый* магазинным автоматом $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ *при конечном состоянии*, определим как множество

$$T(M) = \{\, w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \alpha), \quad q \in F \,\}$$

Определение 46. Язык, *распознаваемый* магазинным автоматом $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ *при пустом магазине*, определим как множество

$$N(M) = \{\, w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash_M^* (q, \varepsilon, \varepsilon), \quad q \in Q \,\}$$

Теорема 26. Язык $L = N(M_1)$ для некоторого недетерминированного магазинного автомата M_1 **тогда и только тогда**, когда $L = T(M_2)$ для некоторого недетерминированного магазинного автомата M_2.

24. Эквивалентность недетерминированных магазинных автоматов и контекстно-свободных грамматик

Определение 47. Магазинный автомат $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ является *детерминированным*, если

1. для любых $q \in Q$, $Z \in \Gamma$ и $\alpha \in \big(\Sigma \cup \{\, \varepsilon \,\}\big)$ значение $\#\delta(q, a, Z) \leq 1$;
2. для любых $q \in Q$ и $Z \in \Gamma$ всякий раз, как множество $\delta(q, \varepsilon, Z) \neq \emptyset$, множество $\delta(q, a, Z) = \emptyset$ для всех $a \in \Sigma$.

Замечание. Условие 1 означает, что если движение определено, то оно единственно. Условие 2 предотвращает выбор между ε-движением и движением, использующим входной символ.

Теорема 27. Если L — КС-язык, то существует недетерминированный магазинный автомат M такой, что $L = N(M)$.

Теорема 28. Если M — недетерминированный магазинный автомат, и $L = N(M)$, то L — контекстно-свободный язык.

VI. КСР-грамматики

В этой главе $V = \{\, \xi_1, \ldots, \xi_n \,\}$ — непустой алфавит.

25. Обобщённые регулярные выражения. КС-грамматика в регулярной форме (КСР-грамматика). Примеры

Этого нигде нет...

26. Определение граф-схемы. Лемма о множестве слов $\mathrm{L}(\alpha, \beta)$. Следствия о множестве слов, порождаемых маршрутами в граф-схеме

Определение 48. *Граф-схемой* над алфавитом V называется конечная совокупность ориентированных графов $\Gamma = \{\, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k \,\}$, $k \leq n$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. в каждом графе Γ_i выделены две вершины — входная и выходная, причём во входную вершину не входит, а из выходной вершины не выходит ни одна из дуг, а каждая из вершин, отличных от этих двух, помечена буквой из алфавита V;
2. графы Γ_i для $i = 1, \ldots, k$ не имеют между собой общих вершин и называются *компонентами граф-схемы.*

Обозначение. Входную и выходную вершины в каждом графе Γ_i обозначим E_i и F_i соответственно.

Определение 49. Буква $\xi \in V$, которой помечена вершина $\alpha \in \Gamma_i$, называется *меткой вершины* α и обозначается $\mathrm{m}(a)$.

Определение 50. Каждой неконечной вершине $\alpha \neq F_i$ поставим в соответствие множество вершин, *смежных* с данной вершиной:

$$\mathrm{succ}(\alpha) = \{\, \beta \in \Gamma \mid \text{существует дуга из } \alpha \text{ в } \beta \,\}$$

Определение 51. Множество слов $L_i(\alpha,\beta)$, *порождаемых маршрутами* от вершины α к вершине β, — это

1. пустое слово, если $\alpha = \beta$;
2. слово $x\xi \in L_i(\alpha,\beta)$, если $x \in L_i(\alpha,\gamma)$, и существует вершина β графа Γ_i такая, что $\beta \in \mathrm{succ}(\gamma)$ и $\mathrm{m}(\beta) = \xi$.

Лемма 7. Слово $x \in V^*$ принадлежит множеству слов $L_i(\alpha,\beta)$ **тогда и только тогда**, когда существует последовательность вершин $\alpha_0,\ldots,\alpha_k$ графа Γ_i такая, что $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \alpha_k$, $\alpha_i \in \mathrm{succ}(\alpha_{i-1})$ и $x = \xi_1 \ldots \xi_k$.

Следствие. Если $x \in L_i(\alpha,\beta)$ и $y \in L_i(\beta,\gamma)$, то $xy \in L_i(\alpha,\gamma)$.

Следствие. Если для двух неконечных вершин α и β графа Γ_i любой маршрут, которым вершина α соединяется с вершиной β, проходит через вершину γ, то $L_i(\alpha,\beta) = L_i(\alpha,\gamma)\cdot L_i(\gamma,\beta)$.

Обозначение. L_i — множество слов, порождаемых всеми маршрутами в графе $\Gamma_i \in \Gamma$, начинающихся из входной вершины E_i:

$$L = \bigcup_{F_i \in \mathrm{succ}(\beta)} (E_i,\beta)$$

Следствие. Слово x в алфавите V принадлежит множеству L_i **тогда и только тогда**, когда существует последовательность вершин графа Γ_i $\alpha_0,\ldots,\alpha_k$ такая, что $\alpha_0 = E_i$, $F_i \in \mathrm{succ}(\alpha_k)$, $\alpha_i \in \mathrm{succ}(\alpha_{i-1})$, $\mathrm{m}(\alpha_i) = \xi_i$ и $x = \xi_1 \ldots \xi_k$.

27. Однозначные регулярные выражения. Утверждения об однозначности регулярных выражений

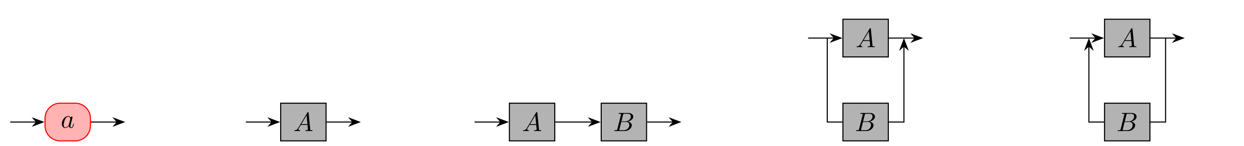
Определение 52. Регулярное выражение A называется *однозначным*, если для любого слова $x \in L(A)$ в графе Γ_A существует только одна цепочка вершин.

Утверждение 2.

1. Все регулярные выражения, представляющие элементарные множества слов, однозначны.
2. Если регулярные выражения A и B однозначны, не содержат операции итерации, и оба регулярных множества, которые они представляют, не содержат пустое слово, то регулярное выражение $C = A{,}B$ однозначно.
3. Если регулярные выражения A и B однозначны, и $L(A) \cap L(B) = \emptyset$, то регулярное выражение $C = A;B$ однозначно.

28. Построение графа для нетерминала в КСР-грамматике. Рекуррентный алгоритм построения синтаксической граф-схемы. Лемма 8.2

Будем в дальнейшем алфавитом V считать объединение алфавитов нетерминалов, терминалов и пустой буквы: $V = N \cup T \cup \{\,\lambda\,\}$.



(a) Терминал (b) Нетерминал (c) Конкатенация ($A;B$) (d) Объединение ($A{,}B$) (e) Итерация ($A\#B$)

Тут есть замудрёные словесные описания, но в целом всё понятно по картиночкам.

Лемма 8. A — регулярное выражение над алфавитом V, Γ_A — граф для регулярного выражения A, построенный по выше описанным требованиям.

Тогда

1. $L_A = A$;
2. во входную вершину Γ_A не входит ни одна дуга, а из выходной вершины Γ_A не выходит ни одна дуга.

Определение 53. R_A — КСР-правило в $G(N, T, P, S)$, где

- A — нетерминал из N;
- R_A — регулярное выражение над V;
- Γ_A — граф для регулярного выражения R_A;
- E_A, F_A — входная и выходная вершины.

Графом Γ_A для нетерминала $A \in N$ будем называть граф для регулярного выражения R_A, в котором входной и выходной вершинам E_A и F_A приписаны метки "начало-A" и "конец-A".

Определение 54. *Синтаксической граф-схемой* для КСР-грамматики G называется совокупность всех графов для нетерминалов из N, то есть $\Gamma_G = \{\, \Gamma_S, \Gamma_{A_1}, \ldots, \Gamma_{A_k} \,\}$, где $S, A_i \in N$.

29. Достижимые вершины. Определение множества начальных вершин $H(A)$ и множества конечных вершин $K(A)$

Определение 55 (множество начальных вершин).

1. Если α — вершина графа Γ_A и $\alpha \in \mathrm{succ}(E_A)$, то α — *начальная вершина* графа Γ_A для нетерминала A, $\alpha \in H(A)$.
2. Если $\alpha \in H(A)$ — нетерминальная вершина в Γ_G, $\mathrm{m}(\alpha) = B$, и $\beta \in H(B)$, то β — начальная вершина графа Γ_A, $\beta \in H(A)$.

Определение 56 (множество конечных вершин).

1. Если α — вершина графа Γ_A и выходная вершина $F_A \in \mathrm{succ}(\alpha)$, то α — конечная вершина графа Γ_A для нетерминала A, $\alpha \in K(A)$.
2. Если $\alpha \in K(A)$ — нетерминальная вершина в Γ_G, $\mathrm{m}(\alpha) = B$ и $\beta \in K(B)$, то β — конечная вершина графа Γ_A, $\beta \in K(A)$.

30. Понятие достижимости на множестве терминальных вершин. Отношение эквивалентности. Лемма и следствие о языке, порождаемом СГС

Понятие достижимости

Определение 57. Между терминальными вершинами α_1 и α_2 в синтаксической граф-схеме Γ_G существует *путь* (*маршрут*), если выполняется одно из условий:

1. Вершины α_1 и α_2 — смежные, принадлежат одной компоненте, и $\alpha_2 \in \mathrm{succ}(\alpha_1)$ (рис. 2а).

   Тогда *путь* от вершины α_1 к вершине α_2 имеет вид $P_{\alpha_1\alpha_2} = \{\, \alpha_2 \,\}$.

2. Существует нетерминальная вершина β, смежная с вершиной α_1, $\beta \in \mathrm{succ}(\alpha_1)$ такая, что $\mathrm{m}(\beta) = B$, а терминальная вершина α_2 — начальная вершина в графе для нетерминала B, $\alpha_2 \in H(B)$.

   В этом случае *путь* от вершины α_1 к вершине α_2 имеет вид $\{\, \beta \,\} \cdot P_\beta$, где

   (a) если α_2 принадлежит графу Γ_B, то есть, $\alpha_2 \in \mathrm{succ}(E_B)$, то $P_\beta = P_{E_B \alpha_2} = \{\, \omega_H \alpha_2 \,\}$, где ω_H — специальный символ, обозначающий *след* прохождения через входную вершину графа для нетерминала (рис. 2b);

   (b) если в графе Γ_B существует нетерминальная вершина $\gamma \in \Gamma_B$ такая, что $\mathrm{m}(\gamma) = C$, $\gamma = \mathrm{succ}(E_B)$ и $\alpha_2 \in H(C)$, то $P_\beta = P_{E_B \gamma} \cdot P_\gamma = \{\, \omega_H \gamma \,\} \cdot P_\gamma$ (рис. 2c).

3. α_1 — конечная вершина графа Γ_B и $\alpha_2 \in \mathrm{succ}(\beta)$, где β — нетерминальная вершина, и $\mathrm{m}(\beta) = B$.

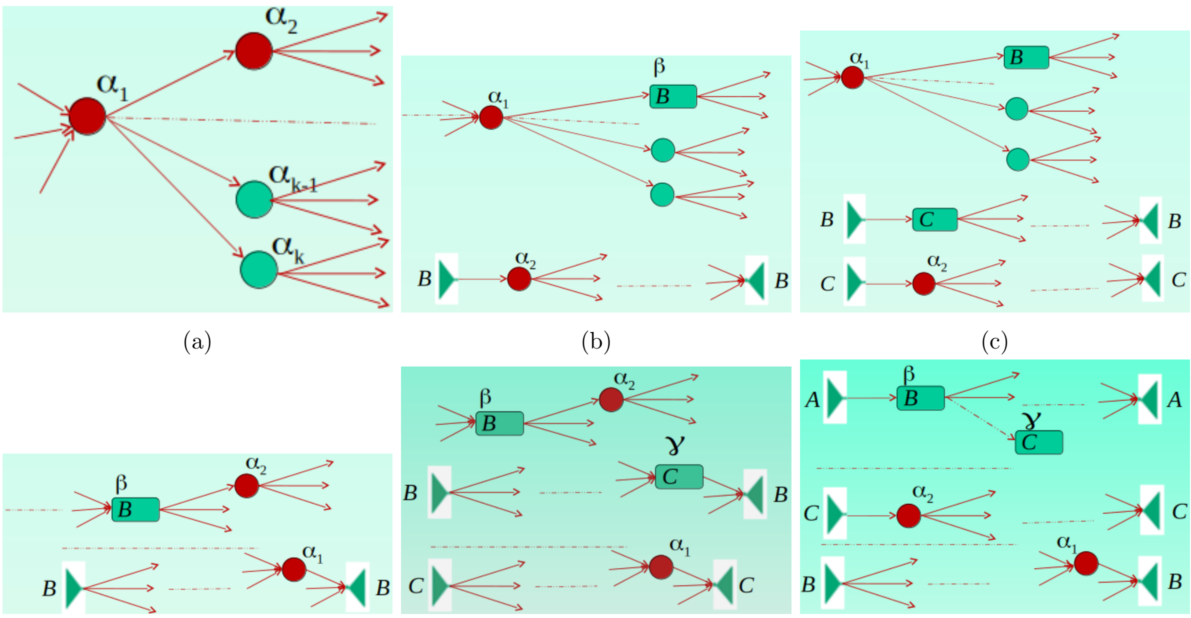
   Тогда *путь* от вершины α_1 к вершине α_2 имеет вид $P_{\alpha_1 \alpha_2} = P^{\beta}_{\alpha_1} \cdot \{\, \alpha_2 \,\}$, где

   (a) если α_1 — вершина графа Γ_B, т. е. $F_B \in \mathrm{succ}(\alpha_1)$, то $P^{\beta}_{\alpha_1} = \{\, \omega_K \beta \,\}$, где ω_K обозначает *след* прохождения через выходную вершину графа для соответствующего нетерминала (рис. 2d);

   (b) если α_2 — конечная вершина графа Γ_C, т. е. $F_C \in \mathrm{succ}(\alpha_1)$ и существует нетерминальная вершина γ, $\mathrm{m}(\gamma) = C$, и $\gamma \in K(B)$, то $P^{\beta}_{\alpha_1} = \{\, \omega_K \gamma \,\} \cdot P^{\beta}_{\gamma}$ (рис. 2e).

4. Вершина α_2 — конечная в графе Γ_B, то есть $\alpha_1 \in K(B)$, α_2 — начальная вершина графа Γ_C, т. е. $\alpha_2 \in H(C)$, и существуют нетерминальные вершины β и γ в графе Γ_A такие, что $\mathrm{m}(\beta) = B$ и $\mathrm{m}(\gamma) = C$.

   Тогда *путь* между вершинами α_1 и α_2 имеет вид $P_{\alpha_1 \alpha_2} = P^{\beta}_{\alpha_1} \cdot \{\, \gamma \,\} \cdot P_\gamma$ (рис. 2f).



(a) (b) (c)

(d) (e) (f)

Рис. 2: К определению пути

Определение 58. Терминальная вершина α_2 *достижима* из терминальной вершины α_1 в синтаксической граф-схеме Γ_G, если существует путь $P_{\alpha_1 \alpha_2}$.

Обозначение. $\alpha_1 \underset{G}{\longrightarrow} \alpha_2$

Отношение эквивалентности

Рассмотрим множество всех вершин в синтаксической граф-схеме Γ_G. Исключим из него все входные и выходные вершины компонент графов и добавим два новых элемента ω_H и ω_K, где ω_H заменяет все входные, а ω_K — выходные вершины. Полученное множество обозначим $\Im$.

Определение 59. α, β — нетерминальные вершины в множестве $\Im$, x — цепочка терминальных вершин, X, Y — произвольные цепочки в алфавите $\Im \cup \{\,\Omega\,\}$.

Введём на множестве всех маршрутов синтаксической граф-схемы *отношение эквивалентности*:

$$X\omega_H x\omega_K Y \sim XxY, \quad X\alpha\omega_H x\omega_K\beta Y \sim \begin{cases} XxY, & \alpha = \beta, \\ \Omega, \end{cases} \quad X\Omega Y \sim \Omega, \quad X \sim X$$

Двум терминальным вершинам α и β, принадлежащим синтаксической-граф схеме Γ_G, поставим в соответствие множество слов $L_{\Gamma_G}(\alpha, \beta)$, определяемое следующим образом:

1. $\varepsilon \in L_{\Gamma_G}(\alpha, \beta)$, если $\alpha = \beta$;
2. если $x \in L_{\Gamma_G}(\alpha, \gamma)$, существует вершина β такая, что $\gamma \underset{G}{\rightarrow} \beta$, $\mathrm{m}(\beta) = \xi$, и существует путь $P_{\gamma\beta}$ такой, что $P_x \cdot P_{\gamma\beta} \neq \Omega$, то $x\xi \in L_{\Gamma_G}(\alpha, \beta)$.

$$L_{\Gamma_G}(E_A) \coloneqq \bigcup_{\beta \in K(A)} L_{\Gamma_G}(E_A, \beta)$$

Если $A = S$, то $L_{\Gamma_G}(E_S)$ будем обозначать L_{Γ_G}.

Лемма 9. Слово x в алфавите терминалов T принадлежит множеству $L_{\Gamma_G}(\alpha, \beta)$ **тогда и только тогда**, когда существует последовательность терминальных вершин $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$, и последовательность путей $P_1, \ldots, P_k$ в СГС Γ_G такие, что

$$\alpha_0 = \alpha, \quad \alpha_k = \beta, \quad \mathrm{m}(\alpha_i) = \xi_i, \quad \alpha_{i-1} \underset{G}{\rightarrow} \alpha_i, \quad P_i \sim P_{\alpha_{i-1}\alpha_i}, \quad x = \xi_1, \ldots, \xi_k, \quad P_x \sim P_1 \cdots P_k, \quad P_x \neq \Omega$$

Следствие. Слово x в алфавите T принадлежит множеству $L_G(E_A)$ **тогда и только тогда**, когда существует последовательность терминальных вершин $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ в Γ_G и последовательность путей $P_1, \ldots, P_k$ в Γ_G такие, что

$$\alpha_0 = E_A, \quad \alpha_k \in K(A), \quad \alpha_{i-1} \underset{G}{\rightarrow} \alpha_i, \quad \mathrm{m}(\alpha_i) = \xi_i, \quad P_i \sim P_{\alpha_{i-1}\alpha_i}, \quad x = \xi_1, \ldots, \xi_k, \quad P_x \sim P_1 \cdots P_k,$$

причём существуют такие вершины $\beta_1, \ldots, \beta_l$ в Γ_G, что $P_x \cdot \omega_k\beta_1 \cdot \omega_k\beta_2 \cdots \omega_k\beta_l = \alpha_1 \ldots \alpha_k$.

31. Синтез распознающего автомата для КСР-грамматики. Состояние для регулярного выражения в графе Γ_A. Состояние вершины в графе Γ_A. Переходное состояние. Регулярный случай

Рассмотрим случай, когда КСР-грамматика G порождает регулярный язык, а множество P правил грамматики содержит только одно S-правило для начального нетерминала S, $P = \{\,S : A\,\}$. Синтаксическая граф-схема Γ_G состоит из одного графа $\Gamma_G = \{\,\Gamma_S\,\}$ и не содержит нетерминальных вершин.

Определение 60. *Состоянием* (*для регулярного выражения*) в графе Γ_A называется:

- выходная вершина F_A;
- терминальная вершина в Γ_A;
- объединение состояний в Γ_A.

Определение 61. *Состоянием вершины* β в графе Γ_A называется множество вершин

$$S_\beta = \{\,\alpha \mid \alpha \text{ — терм. или вых. вершина в } \Gamma_A, \quad \alpha \in \mathrm{succ}(\beta)\,\}$$

Если β — начальная вершина графа Γ_A, то S_β называется *начальным состоянием* графа Γ_A.

Следствие. Для любого слова $x \in L_A$, $x = \xi_1 \dots \xi_k$ существует путь порождения этого слова в графе Γ_A такой, что

$$\alpha_0, \dots, \alpha_k \in P_x, \quad \alpha_{i-1} \to \alpha_i, \quad \alpha_0 = E_A, \quad \alpha_1 \in S_{E_A}, \quad \alpha_i \in S_{\alpha_{i-1}}, \quad F_A \in S_{\alpha_k}, \quad \mathrm{m}(\alpha_i) = \xi_i$$

Определение 62. S — состояние в графе Γ_A, $\quad \xi$ — буква из алфавита T.

Состояние ${}^{S}\!/_{\xi}$ называется *переходом по символу* (*переходным состоянием* для S) в граф-схеме Γ_A, причём

- если $S = \emptyset$ или $S = \{ F \}$, то ${}^{S}\!/_{\xi} = \emptyset$;
- если $S = \{ \alpha \}$, $\quad \alpha$ — терминальная вершина, то

$$ {}^{S}\!/_{\xi} = \begin{cases} \emptyset, & \mathrm{m}(\alpha) \neq \xi, \\ S_\alpha, & \mathrm{m}(\alpha) = \xi; \end{cases}$$

- если $S = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$, то ${}^{S}\!/_{\xi} = \bigcup_{i=1}^{k} {}^{S_i}\!/_{\xi}$.

Определение 63. S — состояние в графе Γ_A, $\quad x = x'\xi$ — слово в алфавите T, $\quad x' \in T^*$.

Переходом по слову x называется состояние ${}^{S}\!/_{x} = {}^{\left({}^{S}\!/_{x'}\right)}\!/_{\xi}$.

Переходом по пустому слову ε называется состояние ${}^{S}\!/_{\varepsilon} = S$.

Утверждение 3. Язык, порождаемый графом для регулярного выражения, состоит из тех слов, переход по которым для начального состояния S_{E_A} данного графа содержит выходную вершину:

$$L_A = \left\{ x \in T^* \;\middle|\; F_A \in {}^{S_{E_A}}\!/_{x} \right\}$$

32. Синтез распознающего автомата для КСР-грамматики. Состояния в синтаксической граф-схеме. Состояние вершины в СГС. Переходное состояние. Общий случай

КСР-грамматика порождает КС-язык, а регулярные выражения для КСР-правил содержат нетерминалы. Синтаксическая граф-схема состоит из совокупности графов $\Gamma_G = (\Gamma_S, \Gamma_{A_1}, \dots, \Gamma_{A_k})$ и содержит нетерминальные вершины.

Определение 64. *Состоянием* в граф-схеме Γ_G называется

- выходная вершина F_{A_i} графа Γ_{A_i} для некоторого нетерминала $A_i \in N$;
- терминальная вершина в Γ_G;
- пара множеств (S_1, S_2), где S_1 и S_2 — состояния в Γ_G;
- объединение состояний в Γ_G.

Определение 65. Для вершины β в СГС Γ_G *состояние вершины* β имеет вид:

$$S_\beta = \left\{ \begin{array}{l} \alpha \mid \alpha \in \mathrm{succ}(\beta), \quad \alpha \text{ — терм. или вых. вершина в } \Gamma_G \\ (S_{E_{\mathrm{m}(\alpha)}}, S_\alpha) \mid \alpha \in \mathrm{succ}(\beta), \quad \alpha \text{ — нетерм. вершина в } \Gamma_G \end{array} \right\}$$

Определение 66. Если β — входная вершина графа Γ_{A_i} для некоторого нетерминала $A_i \in N$, то состояние S_β в Γ_G будем называть *начальным состоянием* графа G_{A_i}.

Обозначение. $S_{E_{A_i}}$

Определение 67. Начальное состояние для стартового символа КСР-грамматики называется *начальным состоянием* СГС Γ_G.

Обозначение. S_0

Состояние в Γ_G — это, в общем случае, объединение цепочек вложенных пар множеств терминальных или выходных вершин. Всё множество состояний в Γ_G можно разбить на классы.

Обозначим через $\Im_k$ множество состояний k-го уровня.

Определение 68. Состояние S принадлежит множеству $\Im_0$, если

- $S = \{\,\alpha\,\}$, где α — терминальная или выходная вершина;
- $S = \bigcup S_i$, где $S_i \in \Im_0$.

Определение 69. Состояние S принадлежит множеству $\Im_k$, если

- $S = (S_1, S_2)$, где $S_1, S_2 \in \bigcup_{i=1}^{k} S_i$;
- $S = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$, где $S_i \in \Im_k$.

Процесс построения состояния для некоторой вершины может не завершиться. В таком случае будем считать, что состояние этой вершины не существует. Множество всех состояний, которые существуют в Γ_G, обозначим $\Im_G$.

Определение 70. Состояние ${}^{S}\!/_{\xi}$ называется *переходным состоянием* по символу ξ для состояния S в Γ_G, причём

- если $S = \emptyset$ или $S = \{\,F_{A_i}\,\}$, то ${}^{S}\!/_{\xi} = \emptyset$;
- если $S = \{\,\alpha\,\}$, где α — терминальная вершина, то

$$ {}^{S}\!/_{\xi} = \begin{cases} \emptyset, & \mathrm{m}(\alpha) \neq \xi, \\ S_\alpha, & \mathrm{m}(\alpha) = \xi; \end{cases} $$

- если $S = \bigcup S_i$, то ${}^{S}\!/_{\xi} = \bigcup ({}^{S_i}\!/_{\xi})$;
- если $S = (S_1, S_2)$, то

$$ {}^{X}\!/_{\xi} = \begin{cases} ({}^{S_1}\!/_{\xi}, S_2), & {}^{S_1}\!/_{\xi} \neq \emptyset, \\ {}^{S_2}\!/_{\xi}, & {}^{S_1}\!/_{\xi} = \emptyset, \quad F_a \in S_1, \\ \emptyset. \end{cases} $$

33. Свойства синтаксической граф-схемы. Леммы о существовании состояний распознавателя в синтаксической граф-схеме

Определение 71. Нетерминальная вершина β в Γ_G *обладает свойством* $\mathbf{D}$, если множество состояний $\Im_G$ не содержит состояния вида $\Big(\dots(\{\,F_{\mathrm{m}(\beta)}, S\,\}, S_\beta)\dots\Big)$, в котором “фактическое” состояние в S содержит терминальную вершину α, а состояние S_β содержит вершину γ и $\mathrm{m}(\alpha) = \mathrm{m}(\gamma)$.

Свойство $\mathbf{D}$ гарантирует, что состояние вершины β не создаёт неопределённости при распознавании языка (*конфликт типа Shift/Reduce*).

Определение 72. Нетерминальная вершина β в Γ_G *обладает свойством* $\mathbf{D_1}$, если

1. вершина β обладает свойством $\mathbf{D}$;
2. множество начальных вершин $H\big(\mathrm{m}(\beta)\big)$ не содержит нетерминальной вершины $\gamma \in \mathrm{succ}(\beta)$.

Свойство $\mathbf{D_1}$ показывает, что состояние терминальной вершины α такой, что $\beta \in \mathrm{succ}(\alpha)$, принадлежит классу $\Im_1$.

Определение 73. Для $k > 1$ считаем, что нетерминальная вершина β в синтаксической граф-схеме Γ_G обладает свойством $\mathbf{D_k}$, если

1. вершина β обладает свойством $\mathbf{D}$;

2.
   - либо существует нетерминальная вершина $\gamma \in \mathrm{succ}(\beta)$, вершина γ обладает свойством $\mathbf{D_t}$ $(1 \le t < k)$, и все начальные нетерминальные вершины из множества $H\big(\mathrm{m}(\beta)\big)$ обладают свойством $\mathbf{D_t}$ $(1 \le t < k)$;
   - либо не существует такой вершины $\gamma \in \Gamma_G$, и среди начальных вершин из множества $H\big(\mathrm{m}(\beta)\big)$ есть хотя бы одна нетерминальная вершина, обладающая свойством $\mathbf{D_{k\text{ - }1}}$, а все другие нетерминальные вершины обладают свойством $\mathbf{D_j}$ для $j < k - 1$.

Будем считать, что СГС обладает свойством $\mathbf{D_k}$, если существует хотя бы одна вершина, обладающая свойством $\mathbf{D_k}$.

Лемма 10. Для любой нетерминальной вершины β в Γ_G, обладающей свойством $\mathbf{D_k}$, $\mathrm{m}(\beta) = B$, состояние $(S_{E_B}, S_\beta) \in \Im_k$.

Лемма 11. Для любой нетерминальной вершины β в Γ_G, обладающей свойством $\mathbf{D_k}$, $\mathrm{m}(\beta) = B$ начальное состояние S_{E_B} существует, $S_{E_B} \in \Im_t$ $(0 \le t < k)$, и для всякой терминальной начальной вершины $\alpha \in H(B)$ существует последовательность нетерминальных вершин $\beta_1, \ldots, \beta_l$ $(0 \le k < k)$ в Γ_G таких, что

$$\begin{cases} \forall 1 \le i \le l \quad \mathrm{m}(\beta_i) = B_i, \\ \forall 2 \le i \le l \quad (S_{E_{B_i}}, S_{\beta_i}) \in S_{E_{B_{i-1}}}, \\ \Big(\ldots\big((S_{E_{B_l}}, S_{\beta_l}), S_{\beta_{l-1}}\big), \ldots, S_{\beta_1}\Big) \in S_{E_B}, \\ \alpha \in S_{E_{B_l}}, \\ P_\beta = \omega_H \beta_1 \omega_H \beta_2 \ldots \omega_H \beta_l \omega_H \alpha. \end{cases}$$

34. Регуляризация КС-грамматики. Эквивалентные преобразования. Базисные преобразования. Синтаксическая модель языка

Синтаксическая модель языка

Модель языка — это способ его описания. *Синтаксическая модель* предполагает четыре аспекта:

1. *Лексика* определяет представление основных символов языка.
2. *Синтаксис* определяет представление основных конструкций языка посредством терминальных символов.
3. Не все нетерминалы порождают конструкции, а только те, для которых определена *семантика.*
4. *Прагматика.*

Базисные преобразования

- Подстановка вместо нетерминала его порождения;
- удаление вхождения лево-(право-)рекурсивного нетерминала в правой части правила;
- объединение общих префиксов в графе для нетерминала;
- удаление повторяющихся альтернатив для нетерминала;
- удаление крайних рекурсий для самовложенных нетерминалов;
- свёртка регулярного подвыражения в новый нетерминал;
- удаление лишних правил.

35. Алгоритм исключения лево-(право-)рекурсивных нетерминалов в КСР-правиле. Общий случай для всех правил КСР-грамматики

Рассмотрим A — правило в КСР-грамматике, когда нетерминал является одновременно и лево-, и праворекурсивным, и рекурсия прямая:

$$A : A,r_{11},A; A,r_{12}; r_{21},A; r_{22},$$

где $r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}$ — регулярные выражения.

Алгоритм.

1. Рассмотрим A_1-фрагмент A,r_{11},A. Используя данный фрагмент, мы можем вывести строки

$$Ar_{11}A, \quad Ar_{11}Ar_{11}A, \quad \ldots$$

   Из определения операции #, это множество строк совпадает с множеством строк, порождаемым регулярным выражением $A\#r_{11}$.

2. Рассмотрим A_2-фрагмент: A,r_{12}. Можем вывести строки: $Ar_{12}, Ar_{12}r_{12}, \ldots$ Из определения операции $*$ следует, что это множество порождается регулярным выражением $A,(r_{12})^*$.

3. Аналогично для праворекурсивного вхождения нетерминала A в A_3-фрагменте. Здесь мы выводим множество строк $r_{21}A, r_{21}r_{21}A, \ldots$, которые порождаются регулярным выражением r_{21}^*,A.

4. Окончательно, подставляя все регулярные выражения, получаем

$$(r_{21}^*,r_{22},r_{12}^*)\#r_{11}$$

36. Схема получения регулярного выражения, эквивалентного приведённой КС-грамматике без самовставлений. Пример

Этого нет...

VII. Трансляции, их представление и реализация

1. Некоторые способы задания трансляций: перечисление, гомоморфизм, схемы синтаксически-управляемых трансляций, конечные и магазинные преобразователи

Определение 74. *Трансляцией* из языка $L_1 \subset \Sigma^*$ называется отношение $\tau \subset L_1 \times L_2$.
Здесь Σ — входной алфавит, L_1 — входной язык, Δ — выходной алфавит, L_2 — выходной язык.

По отношению к языкам программирования, трансляция всегда является функцией.

Гомоморфизм

Гомоморфизм h определяет трансляцию

$$\tau(h) = \left\{ \, \big(x, h(x)\big) \;\middle|\; x \in \Sigma^* \, \right\}$$

Устройство, которое по заданной цепочке $x \in \Sigma^*$ находит соответствующую цепочку $y = h(x)$, должно посимвольно просмотреть входную цепочку x и заменить каждый её символ a на $h(a)$.

Схемы синтаксически-управляемой трансляции

Определение 75. *Схемой синтаксически-управляемой трансляции* называется формальная система $T = (N, \Sigma, \Delta, R, S)$, где

- N — алфавит *нетерминалов*;
- Σ — конечный *входной алфавит*;
- Δ — конечный *выходной алфавит*, причём $N \cap \Sigma = \emptyset$ и $N \cap \Delta = \emptyset$;
- R — конечное множество *правил* вида $A \to \alpha, \beta$, где
  - $A \in N$;
  - $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$;
  - $\beta \in (N \cup \Delta)^*$;
  - каждое вхождение нетерминала в цепочку α связано с некоторым вхождением одноимённого нетерминала в β, и эта связь является неотъемлемой частью правила;
- $S \in N$ — *начальный нетерминал.*

Цепочка α называется *синтаксической*, а β — *семантической.*

Определение 76. Введём понятие *трансляционной формы*:

- (S, S) — *начальная трансляционная форма*, причём эти два вхождения начального нетерминала связаны друг с другом по определению.
- Если $(\alpha A \beta, \alpha' A \beta')$ — трансляционная форма, в которой два явно выделенных вхождения нетерминала A связаны, и если $A \to \gamma, \gamma'$ — правило из R, то $(\alpha\gamma\beta, \alpha'\gamma'\beta')$ — трансляционная форма. Связь между нетерминалами в γ и γ' такая же, как в правиле. Нетерминалы в цепочках α и β связываются с нетерминалами в цепочках α' и β' в новой трансляционной форме так же, как в предыдущей.
- Никакие другие пары цепочек не являются трансляционными формами.

Обозначение. Отношение *непосредственной выводимости*: $(\alpha A \beta, \alpha' A \beta') \underset{T}{\Longrightarrow} (\alpha\gamma\beta, \alpha'\gamma'\beta')$

Определение 77. Трансляция, заданная при помощи схемы синтаксически-управляемой трансляции T есть множество

$$\tau(T) = \left\{ (x, y) \;\middle|\; (S, S) \overset{*}{\underset{T}{\Longrightarrow}} (x, y), \quad x \in \Sigma^*,\ y \in \Delta^* \right\}$$

и называется *синтаксически-управляемой трансляцией.*

Определение 78. Грамматика $G_i = (N, \Sigma, P_i, S)$, где $P_i = \{\, A \to \alpha \mid \exists A \to \alpha, \beta \in R \,\}$, называется *входной грамматикой* схемы.

Грамматика $G_0 = (N, \Delta, P_0, S)$, где $P_0 = \{\, A \to \beta \mid \exists A \to \alpha, \beta \in R \,\}$ называется *выходной грамматикой* схемы.

2. Простые SDTS. Эквивалентность классов трансляций, задаваемых простыми SDTS и недетерминированными магазинными преобразователями

Определение 79. Схема синтаксически-управляемой трансляции называется *простой*, если в каждом её правиле $A \to \alpha, \beta$ связанные нетерминалы в цепочках α и β встречаются в одинаковом порядке.

Определение 80. *Недетерминированный магазинный преобразователь* — это формальная система $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \delta, q_0, Z_0, F)$, где

- Q — конечное *множество состояний*;
- Σ — конечный *входной алфавит*;
- Γ — конечный *алфавит магазинных символов*;
- Δ — конечный *выходной алфавит*;
- $q_0 \in Q$ — *начальное состояние*;
- $Z_0 \in \Gamma$ — *начальный символ магазина*;
- $F \subset Q$ — *множество конечных состояний*;
- δ — отображение $Q \times (\Sigma \cup \{ \varepsilon \}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^* \times \Delta^*}$.

Определение 81. *Конфигурацией* магазинного преобразователя P назовём четвёрку (q, x, α, y), где

- Q — *текущее состояние*;
- $x \in \Sigma^*$ — *непросмотренная часть* входной цепочки;
- $\alpha \in \Gamma^*$ — *содержимое магазина*;
- $y \in \Delta^*$ — вся *выходная цепочка*.

Определение 82. Говорят, что $y \in \Delta^*$ — *выход* для $x \in \Sigma^*$ *при конечном состоянии*, если $(q_0, x, Z_0, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, \alpha, y)$ для некоторых $q \in F$ и $\alpha \in \Gamma^*$.

Трансляция, определяемая магазинным преобразователем P *при конечном состоянии*, есть

$$\tau(P) = \{ (x, y) \mid (q_0, x, Z_0, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, \alpha, y), \quad q \in F, \; \alpha \in \Gamma^* \}$$

Определение 83. Говорят, что $y \in \Delta^*$ есть *выход* для $x \in \Sigma^*$ *при пустом магазине*, если $(q_0, x, Z_0, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon, y)$ для некоторого $q \in Q$.

Трансляция, определяемая магазинным преобразователем P *при пустом магазине*, есть

$$\tau_e(P) = \{ (x, y) \mid (q_0, x, Z_0, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon, y), \quad q \in Q \}$$

Определение 84. Магазинный преобразователь $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \delta, q_0, Z_0, F)$ называется *детерминированным*, если

1. $\#\delta(q, a, Z) \leq 1 \quad \forall q \in Q, \; a \in \Sigma \cup \{ \varepsilon \}, \; Z \in \Gamma$;
2. если $\delta(q, \varepsilon, Z) \neq \emptyset$, то $\delta(q, a, Z) = \emptyset \quad \forall a \in \Sigma$.

Лемма 12. T — простая схема синтаксически-управляемой трансляции.
Существует недетерминированный магазинный преобразователь P такой, что $\tau_e(P) = \tau(T)$.

Лемма 13. P — недетерминированный магазинный преобразователь.
Существует простая схема синтаксически-управляемой трансляции T такая, что $\tau(T) = \tau_e(P)$.

Есть ещё теорема, которая две леммы зачем-то объединяет в “тогда и только тогда”. Я позволю себе здесь её не приводить.

3. Эквивалентность классов трансляций, задаваемых магазинными преобразователями при конечном состоянии и при пустом магазине. Теорема 1.2

Лемма 14. P — недетерминированный магазинный преобразователь и $\tau = \tau(P)$.
Существует недетерминированный магазинный преобразователь P' такой, что $\tau_e(P') = \tau$.

Лемма 15. P — недетерминированный магазинный преобразователь и $\tau = \tau_e(P)$.
Существует недетерминированный магазинный преобразователь P' такой, что $\tau(P') = \tau$.

Теорема 1.2 — это такая же бессмысленная теорема, как и в предыдущем параграфе.

4. Детерминированная генерация выходной цепочки простой SDT по левостороннему анализу входной цепочки. Теорема 1.3

Определение 85. Схема синтаксически-управляемой трансляции называется *семантически однозначной*, если в ней не существует двух правил вида $A \to \alpha, \beta$ и $A \to \alpha, \gamma$, в которых $\beta \neq \gamma$.

Определение 86. $G = (V_N, V_T, P, S)$ — cfg, правила которой пронумерованы от 1 до p, и $S \underset{\text{lm}}{\overset{\pi}{\Longrightarrow}} x$ — левосторонний вывод $x \in V_T^*$ в грамматике G.
Последовательность номеров правил π, применённых в этом выводе называется *левосторонним анализом* цепочки x.

Теорема 29. $T = (N, \Sigma, \Delta, R, S)$ — простая семантически однозначная схема синтаксически- управляемой трансляции, правила которой пронумерованы от 1 до p.
Существует детерминированный магазинный преобразователь P такой, что

$$\tau_e(P) = \left\{ (\pi, y) \;\middle|\; (S, S) \underset{\text{lm}}{\overset{\pi}{\Longrightarrow}} (x, y) \text{ для некоторой цепочки } x \in \Sigma^* \right\}$$

VIII. LL(k)-грамматики и трансляции

5. Определение и свойства LL(k)-грамматики. Необходимые и достаточные условия принадлежности приведённой КС-грамматики классу LL(k). Теорема 2.1

Определение 87. $G = (V_N, V_T, P, S)$ — cfg.
Определим функцию

$$\mathrm{FIRST}_k^G(\alpha) = \left\{ w \in V_T^* \;\middle|\; \left[\begin{array}{ll} |w| < k, & \alpha \underset{G}{\overset{*}{\Longrightarrow}} w, \\ |w| = k, & \alpha \underset{G}{\overset{*}{\Longrightarrow}} wx \text{ для нек. цепочки } x \in V_T^* \end{array} \right. \right\}$$

Здесь $k \geq 0$ — целое, $\alpha \in (V_N \cup V_T)^*$.

Определение 88. $G = (V_N, V_T, P, S)$ — cfg.
Говорят, что G есть LL(k)-*грамматика* для некоторого фиксированного k, если для любых двух левосторонних выводов вида

1. $S \underset{\text{lm}}{\overset{*}{\Longrightarrow}} wA\alpha \underset{\text{lm}}{\Longrightarrow} w\beta\alpha \underset{\text{lm}}{\overset{*}{\Longrightarrow}} wx$,

2. $S \underset{\text{lm}}{\overset{*}{\Longrightarrow}} wA\alpha \underset{\text{lm}}{\Longrightarrow} w\gamma\alpha \underset{\text{lm}}{\overset{*}{\Longrightarrow}} wy$,

в которых $\mathrm{FIRST}_k^G(x) = \mathrm{FIRST}_k^G(y)$ имеет место равенство $\beta = \gamma$.

Определение 89. Говорят, что cfg есть LL-*грамматика*, если она LL(k) для некоторого k.

Определение 90. Говорят, что cfg G является *простой* LL(1)-грамматикой, если в ней нет ε-правил, и все альтернативы для каждого нетерминала начинаются с терминалов и притом различных.

Теорема 30. Чтобы cfg G была LL(k)-грамматикой, **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\mathrm{FIRST}_k^G(\beta\alpha) \cap \mathrm{FIRST}_k^G(\gamma\alpha) = \emptyset$$

для всех α, β, γ таких, что существуют правила $A \to \beta,\ A \to \gamma, \quad \beta \neq \gamma$ и существует вывод $S \xRightarrow[\mathrm{lm}]{*} wA\alpha$.

6. Алгоритм вычисления функции $\mathrm{FIRST}_k^G(\beta)$ и его обоснование

Этого тоже нет...

7. Определение функции $\mathrm{FOLLOW}_k^G(\beta)$

Определение 91. $G = (V_N, V_T, P, S)$ — cfg, $\quad \beta \in V^*$

Определим функцию

$$\mathrm{FOLLOW}_k^G(\beta) = \left\{ w \in V_T^* \;\middle|\; S \xRightarrow[G]{*} \gamma\beta\alpha, \quad w \in \mathrm{FIRST}_k^G(\alpha) \right\}$$

Здесь $k \geq 0$ — целое.

8. Необходимые и достаточные условия принадлежности приведённой КС-грамматики классу LL(1). Сильные LL(k)-грамматики. Теорема 2.2

Теорема 31. Чтобы cfg $G = (V_N, V_T, P, S)$ была LL(1)-грамматикой, **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\mathrm{FIRST}_1^G(\beta\,\mathrm{FOLLOW}_1^G(A)) \cap \mathrm{FIRST}_1^G(\gamma\,\mathrm{FOLLOW}_1^G(A)) = \emptyset$$

для всех $A \in V_N, \quad \beta \neq \gamma \in (V_N \cup V_T)^*$ таких, что существуют правила $A \to \beta$ и $A \to \gamma$.

Следствие. КС-грамматика G является LL(1)-грамматикой **тогда и только тогда**, когда для каждого множества A-правил: $A \to \alpha_1|\alpha_2|\ldots|\alpha_n$ — выполняются условия:

1. $\mathrm{FIRST}_1^G(\alpha_i) \cap \mathrm{FIRST}_1^G(\alpha_j) = \emptyset$;
2. если $\alpha_i \xRightarrow[G]{*} \varepsilon$, то $\mathrm{FIRST}_1^G(\alpha_j) \cap \mathrm{FOLLOW}_1^G(A) = \emptyset$.

Определение 92. КС-грамматика $G = (V_N, V_T, P, S)$ называется *сильной* LL(k)- *грамматикой*, если

$$\mathrm{FIRST}_k^G(\beta\,\mathrm{FOLLOW}_k^G(A)) \cap \mathrm{FIRST}_k^G(\gamma\,\mathrm{FOLLOW}_k^G(A)) = \emptyset$$

для всех $A \in V_N, \quad \beta \neq \gamma \in (V_N \cup V_T)^*$ таких, что существуют правила $A \to \beta$ и $A \to \gamma$.

Следствие. Каждая LL(1)-грамматика является сильной.

9. Достаточные признаки непринадлежности КС-грамматики классу LL. Теорема 2.3

Теорема 32. Если G — cfg и G леворекурсивна, то G не LL(k)-грамматика ни при каком k.

Следствие. Имеем два достаточных признака, чтобы считать КС-грамматику не LL-грамматикой. Это — неоднозначность и леворекурсивность.

10. k-предсказывающие алгоритмы анализа. Формальное определение

Определение 93. *k-предсказывающим алгоритмом анализа* называется формальная система $\mathscr{A} = (\Sigma, \Gamma \cup \{\,\$\,\}, \Delta, M, X_0, \$)$, где

- Σ — *входной алфавит*;
- $\Gamma \cup \{\,\$\,\}$ — *магазинный алфавит*;
- $\$ \notin \Gamma$ — маркер *дна магазина*;
- Δ — *выходной алфавит*;
- $X_0 \in \Gamma$ — *начальный символ магазина*;
- $M : (\Gamma \cup \{\,\$\,\}) \times \Sigma^{*k} \to \{\, (\beta, i), \mathrm{pop}, \mathrm{accept}, \mathrm{error} \,\}$ — *управляющая таблица*, причём $\beta \in \Gamma^*$, $i \in \Delta$ — *номер правила* грамматики.

Определение 94. Под *конфигурацией* k-предсказывающего алгоритма анализа будем подразумевать тройку (x, α, π), где

- $x \in \Sigma^*$ — *непросмотренная часть* входной цепочки, причём $u \in \mathrm{FIRST}_k^G(x)$;
- $u \in \Sigma^{*k}$ — *аванцепочка*;
- $\alpha \in \Gamma^* \{\,\$\,\}$ — магазинная цепочка;
- $\pi \in \Delta^*$ — *выходная цепочка*.

Начальная конфигурация есть $(w, X_0\$, \varepsilon)$, где $w \in \Sigma^*$ — вся входная цепочка.

Пусть $(x, X\alpha, \pi)$ — текущая конфигурация. Определим следующую конфигурацию в зависимости от значения элемента управляющей таблицы $M(X, u)$:

1. Если $M(X, u) = (B, i)$, то $(x, X\alpha, \pi) \vdash (x, \beta\alpha, \pi i)$.
2. Если $M(X, u) = \mathrm{pop}$, и в этом случае всегда $X = a \in \Sigma$, $x = ax'$, $x' \in \Sigma^*$, то $(x, X\alpha, \pi) = (ax', a\alpha, \pi) \vdash (x', \alpha, \pi)$.
3. Если $M(X, u) = \mathrm{accept}$, что бывает только по достижении *конечной конфигурации* $(\varepsilon, \$, \pi)$, то анализатор останавливается, принимая входную цепочку.
4. Если $M(X, u) = \mathrm{error}$, то анализатор сообщает об ошибке и останавливается, не принимая входную цепочку.

11. Построение 1-предсказывающего алгоритма анализа по $\mathrm{LL}(1)$-грамматике и его обоснование. Алгоритм 2.1. Теорема 2.4

Алгоритм (построение $\mathrm{LL}(1)$-анализатора).
Вход: $G = (V_N, V_T, P, S)$ — $\mathrm{LL}(1)$-грамматика.
Выход: правильный $\mathscr{A}$ — 1-предсказывающий алгоритм анализа для грамматики G.

Положим $\mathscr{A} = \big(\Sigma, \Gamma \cup \{\,\$\,\}, \Delta, M, X_0, \$\big)$, где

- $\Sigma = V_T$;
- $\Delta = \{\, 1, \ldots, \#P \,\}$;
- $\Gamma = V_N \cup V_T$;
- $X_0 = S$.

Управляющая таблица M определяется на множестве $(\Gamma \cup \{\,\$\,\}) \times (\Sigma \cup \{\,\varepsilon\,\})$ следующим образом:

1. $M(A, a) = (\alpha, i)$, если $A \to \alpha$ является i-м правилом в P и $a \in \mathrm{FIRST}_1^G(\alpha)$, $\quad a \neq \varepsilon$.

Если $\varepsilon = \mathrm{FIRST}_1^G(\alpha)$, то $M(A, b) = (\alpha, i)$ для всех $b \in \mathrm{FOLLOW}_1^G(A)$.

2. $M(a, a) = \mathrm{pop} \quad \forall a \in \Sigma$.
3. $M(\$, \varepsilon) = \mathrm{accept}$.
4. $M(X, a) = \mathrm{error}$ для всех остальных (X, a).

Теорема 33. Алгоритм производит правильный 1-предсказывающий алгоритм анализа для любой LL(1)-грамматики.

12. Определение операции $\oplus_k$ Лемма 2.1. Обоснование тождества $\mathrm{FIRST}_k^G(\alpha\beta) = \mathrm{FIRST}_k^G(\alpha) \oplus_k \mathrm{FIRST}_k^G(\beta)$

Определение 95. Σ — алфавит, $\quad L_1, L_2 \subset \Sigma^*$.

$$L_1 \oplus_k L_2 := \left\{ w \in \Sigma^{*k} \;\middle|\; x \in L_1, \quad y \in L_2, \quad \begin{bmatrix} w = xy, & |xy| \leq k, \\ xy = wz, & |w| = k \end{bmatrix} \right\}$$

Лемма 16. Для любой cfg $G = (V_N, V_T, P, S)$ и любых цепочек $\alpha, \beta \in V^*$ имеет место тождество

$$\mathrm{FIRST}_k^G(\alpha\beta) = \mathrm{FIRST}_k^G(\alpha) \oplus_k \mathrm{FIRST}_k^G(\beta)$$

13. Анализ в LL(k)-грамматиках. Определение 2.11. LL(k)-таблицы. Алгоритм 2.2: построение множества LL(k)-таблиц, необходимых и достаточных для анализа цепочек в данной LL(k)-грамматике

Определение 96. $G = (V_N, V_T, P, S)$ — cfg

Для каждого $A \in V_N$ и $L \subset V_T^{*k}$ определим $T_{A\ L}$ — LL(k)-*таблицу*, ассоциированную с A и L как функцию, которая по данной аванцепочке $u \in V_T^{*k}$ выдаёт

- error, если не существует правила $A \to \alpha$ такого, что $u \in \mathrm{FIRST}_k^G(\alpha) \oplus_k L$;
- A-правило и конечный список подмножеств V_T^{*k}, если существует единственное такое правило;
- undefined, если подходящих правил несколько.

Алгоритм (построение множества LL(k)-таблиц, необходимых для анализа в данной LL(k)-грамматике).
Вход: $G = (V_N, V_T, P, S)$.
Выход: $\mathcal{T}$ — множество LL(k)-таблиц, необходимых для анализа в грамматике G.

1. Построить $T_0 = T_{S\ \{\varepsilon\}}$ и $\mathcal{T} = \{T_0\}$.
2. Если $T_{A\ L} \in \mathcal{T}$ и для некоторой цепочки $u \in V_T^{*k}$ имеет место равенство $T_{A\ L}(u) = (A \to x_0 B_1 x_1 B_2 \ldots B_m x_m, \langle Y_1, \ldots, Y_m \rangle)$, то к множеству таблиц $\mathcal{T}$ добавить таблицы из множества $\{T_{B_i\ Y_i}\}_{i=1}^m$.
3. Повторять шаг 2 до тех пор, пока ни одну новую таблицу не удастся добавить к $\mathcal{T}$.

14. Алгоритм 2.3: построение k-предсказывающего алгоритма анализа. Пример 2.9. Теорема 2.5

Алгоритм (построение k-предсказывающего алгоритма анализа).

Вход: $G = (V_N, V_T, P, S)$.
Выход: $\mathscr{A}$ — правильный предсказывающий алгоритм анализа для G.

1. Построим $\mathcal{T}$ — множество необходимых LL(k)-таблиц для грамматики G.
2. Положим $\mathscr{A} = (\Sigma, \Gamma \cup \{\,\$\,\}, \Delta, M, T_0, \$)$, где $\Sigma = V_T$, $\Delta = \{\,1, \dots, \#P\,\}$, $\Gamma = \mathcal{T} \cup V_T$, где $T_0 = T_{S\ \{\,\varepsilon\,\}}$.
3. Управляющую таблицу M определим на множестве $(\Gamma \cup \{\,\$\,\}) \times \Sigma^{*k}$ следующим образом:
   (a) $M(T_{A\ L}, u) = (x_0 T_{B_1\ Y_1} x_1 T_{B_2\ Y_2} \dots T_{B_m\ Y_m} x_m, i)$, если
   $$T_{A\ L}(u) = (A \to x_0 B_1 x_1 B_2 \dots B_m x_m, \langle Y_1, \dots Y_m \rangle),$$
   и $A \to x_0 B_1 \dots B_m x_m$ является i-м правилом в P.
   (b) $M(a, av) = \text{pop} \quad \forall a \in \Sigma,\ v \in \Sigma^{*k}$.
   (c) $M(\$, \varepsilon) = \text{accept}$.
   (d) $M(X, u) = \text{error}$ для всех остальных (X, u).

Теорема 34. Алгоритм производит правильный k-предсказывающий алгоритм анализа для любой LL(k)-грамматики.

15. Тестирование LL(k)-грамматик. Алгоритм 2.4. Определение 2.12

Определение 97. $G = (V_N, V_T, P, S)$ — cfg, $\quad A \in V_N$
$$\sigma(A) \coloneqq \left\{ L \subset V_T^{*k} \;\middle|\; \exists S \xRightarrow[\text{lm}]{*} wA\alpha, \quad w \in V_T^*, \quad L = \mathrm{FIRST}_k^G(\alpha) \right\}$$

Алгоритм (тестирование LL(k)-грамматик).
Вход: $G = (V_N, V_T, P, S)$ — cfg.
Выход: ‘да’, если G — LL(k)-грамматика, ‘нет’ — в противном случае.

1. Для каждого нетерминала A, для которого существуют две или более альтернативы, вычисляется $\sigma(A)$.
2. Пусть $A \to \beta$ и $A \to \gamma$ — два различных A-правила. Для каждого $L \in \sigma(A)$ вычисляется $f(L) = \big(\mathrm{FIRST}_k^G(\beta) \oplus_k L\big) \cap \big(\mathrm{FIRST}_k^G(\gamma) \oplus_k L\big) = \emptyset$.
   - Если $f(L) \neq \emptyset$, то алгоритм завершается с результатом ‘нет’.
   - Если $f(L) = \emptyset$ для всех $L \in \sigma(A)$, то шаг 1 повторяется для других нетерминалов.
3. Повторить шаги 1 и 2 для всех нетерминалов.
4. Завершить алгоритм с результатом ‘да’.

16. Алгоритм 2.5: вычисление функции $\mathrm{FIRST}_k^G(\beta)$ и её обоснование. Теорема 2.7

Алгоритм (вычиление функции $\mathrm{FIRST}_k^G(\beta)$).
Вход: $G = (V_N, V_T, P, S)$ — cfg, и $\beta = X_1 \dots X_n$, $X_i \in V$.
Выход: $\mathrm{FIRST}_k^G(\beta)$.

Согласно лемме 16
$$\mathrm{FIRST}_k^G(\beta) = \mathrm{FIRST}_k^G(X_1) \oplus_k \dots \oplus_k \mathrm{FIRST}_k^G(X_n),$$

так что задача сводится к вычислению $\mathrm{FIRST}_k^G(X)$ для $X \in V$.

Если $X \in V_T \cup \{ \varepsilon \}$, то $\mathrm{FIRST}_k^G(X) = \{ X \}$. Пусть $X \in V_N$.

Будем использовать метод последовательных приближений и строить последовательности множеств $F_i(X)$ для всех $X \in V_N \cup V_T$.

1. $F_i(a) = \{ a \} \quad \forall a \in V_T$.
2. $F_0(A) = \left\{ x \in V_T^{*k} \,\middle|\, \exists A \to x\alpha, \quad \left[\begin{array}{ll} |x| = k, & \\ |x| < k, & \alpha = \varepsilon \end{array} \right. \right\}$
3. $$F_i(A) = F_{i-1}(A) \cup \{ x \in V_T^{*k} \mid \exists A \to Y_1 \dots Y_m, \quad x \in F_{i-1}(Y_1) \oplus_k \dots \oplus_k F_{i-1}(Y_m) \}$$
4. Так как $F_{i-1}(A) \subset F_i(A) \subset V_T^{*k} \quad \forall A \in V_N$, то шаг 3 требуется повторять, пока при некотором $i = j$ не окажется $F_j(A) = F_{j+1}(A) \quad \forall A \in V_N$.
5. $\mathrm{FIRST}_k^G(A) \coloneqq F_j(A)$.

Теорема 35. G — cfg

Алгоритм правильно вычисляет функцию $\mathrm{FIRST}_k^G(\beta)$ для любой цепочки β.

17. Вычисление функции $\sigma(A)$. Алгоритм 2.6. Пример 2.11.

Алгоритм (вычисление $\sigma(A)$ для $A \in V_N$).
Вход: $G = (V_N, V_T, P, S)$ — cfg.
Выход: $\sigma(A)$ для всех $A \in V_N$.

Введём в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\sigma'(A, B) = \left\{ L \subset V_T^{*k} \,\middle|\, \exists A \underset{\mathrm{lm}}{\overset{*}{\Longrightarrow}} wB\alpha, \quad w \in V_T^*, \quad L = \mathrm{FIRST}_k^G(\alpha) \right\}$$

Очевидно, что $\sigma(A) = \sigma'(S, A')$. Будем вычислять $\sigma'(A, B)$ методом последовательных приближений, параллельно выстраивая последовательности множеств $\sigma_i'(A, B)$ для всех возможных пар $(A, B) \in V_N^2$.

1. $\sigma_0'(A, B) = \left\{ L \subset V_T^{*k} \,\middle|\, \exists A \to \beta B\alpha, \quad \beta, \alpha \in V^*, \quad L = \mathrm{FIRST}_k^G(\alpha) \right\}$

   Пусть $\sigma_0'(A, B), \dots, \sigma_i'(A, B)$ вычислены для всех пар нетерминалов.
2. Положим
$$\sigma_{i+1}'(A, B) = \sigma_i'(A, B) \cup \left\{ L \subset V_T^{*k} \,\middle|\, \begin{array}{l} \exists A \to X_1 \dots X_m, \quad L' \in \sigma_i'(X_p, B), \quad X_p \in V_n, \\ 1 \le p \le m, \quad L = L' \oplus \mathrm{FIRST}_k^G(X_{p+1} \dots X_m) \end{array} \right\}$$
3. Повторять шаг 2 до тех пор, пока не при некотором $i = j$ не окажется, что $\sigma_{i+1}'(A, B) = \sigma_j'(A, B)$ для всех (A, B).
4. Полагаем $\sigma'(A, B) = \sigma_j'(A, B)$.
5. $\sigma(A) = \sigma'(S, A)$.

Пример. $G = (\{ S, A \}, \{ a, b \}, P, S)$, где

$$P = \{ S \to AS, \quad S \to \varepsilon, \quad A \to aA, \quad A \to b \}$$

Вычислим функции $\sigma(S)$ и $\sigma(A)$ при $k = 1$. Сначала получаем

$$\mathrm{FIRST}_1^G(S) = \{ \varepsilon, a, b \}, \quad \mathrm{FIRST}_1^G(A) = \{ a, b \}$$

Затем строим последовательности $\sigma_i'(X, Y)$. За два шага получаем $\sigma(S) = \{ \{ \varepsilon \} \}$, $\sigma(A) = \{ \{ \varepsilon, a, b \} \}$.

18. Алгоритм 2.7 вычисления функции $\mathrm{FOLLOW}_k^G(A)$. Теорема 2.9

Алгоритм (вычисление $\mathrm{FOLLOW}_k^G(A)$).
Вход: $G = (V_N, V_T, P, S)$ — cfg.
Выход: $\mathrm{FOLLOW}_k^G(A)$ для всех $A \in V_N$.
Определим вспомогательную функцию

$$\varphi(A, B) = \left\{ w \in V_T^{*k} \;\middle|\; \exists A \xRightarrow[G]{*} \gamma B\alpha, \quad w \in \mathrm{FIRST}_k^G(\alpha) \right\}$$

Очевидно, что $\mathrm{FOLLOW}_k^G(A) = \varphi(S, A)$.

1. $\varphi_0(A, B) = \left\{ w \in V_T^{*k} \;\middle|\; \exists A \to \gamma B\alpha, \quad \alpha, \gamma \in V*, \quad w = \mathrm{FIRST}_k^G(\alpha) \right\}$
2. Пусть значения $\varphi_0(A, B), \dots, \varphi_i(A, B)$ уже построены для всех (A, B).
$$\varphi_{i+1}(A, B) = \varphi_i(A, B) \cup \left\{ w \in V_T^{*k} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists A \to X_1 \dots X_p X_{p+1} \dots X_m, \quad X_p \in V_N, \\ w \in \varphi_i(X_p, B) \oplus_k \mathrm{FIRST}_k^G(X_{p+1}, \dots, X_m) \end{array} \right\}$$
3. Шаг 2 повторяется до тех пор, пока при некотором $i = j$ не окажется $\varphi_{j+1}(A, B) = \varphi_j(A, B)$ для всех (A, B). Тогда $\varphi(A, B) = \varphi_j(A, B)$.
4. $\mathrm{FOLLOW}_k^G(A) = \varphi(S, A)$ и $\mathrm{FOLLOW}_k^G(S) = \varphi(S, S) \cup \{ \varepsilon \}$.

Теорема 36. G — cfg
Алгоритм правильно вычисляет функцию $\mathrm{FOLLOW}_k^G(A)$ для любого $A \in V_N$.

19. Теорема 2.8 — обоснование правильности вычисления функции $\sigma(A)$ для любого нетерминала $A \in V_N$ и $k \geq 0$

Теорема 37. $G = (V_N, V_T, P, S)$ — cfg
Алгоритм правильно вычисляет функцию $\sigma(A)$ для любого нетерминала A.

20. k-предсказывающий алгоритм трансляции

Алгоритм (построение k-предсказвыающего алгоритма трансляции).
Вход: $T = (N, \Sigma, \Delta, R, S)$ — простая семантически однозначная схема синтаксически-управляемой трансляции с входной грамматикой G_i класса $\mathrm{LL}(k)$.
Выход: $\Im$ — k-предсказывающий алгоритм трансляции, реализующий трансляцию $\tau(T)$.

1. Предполагая, что множество $\mathrm{LL}(k)$-таблиц, необходимых для анализа в грамматике G_i уже построено, положим
$$\Im = (\Sigma, \Gamma \cup \{ \$ \}, \Delta, M, X_0, \$),$$
где Σ и Δ такие же, как в схеме T,
$$\Gamma = \mathcal{T} \cup \Sigma \cup \Delta', \quad \Delta' = \{ b' \mid b' = h(b), \quad b \in \Delta \}, \quad \Sigma \cap \Delta' = \emptyset, \quad X_0 = T_0 = T_{S\ \{ \varepsilon \}}$$
   (a) $M(T_{A\ L}, u) = x_0 y_0' T_{A_1\ L_1} \dots T_{A_m\ L_m} x_m y_m'$, если
$$\begin{cases} T_{A\ L}(u) = \big(A \to x_0 A_1 x_1 \dots A_m x_m, \langle Y_1, \dots, Y_m \rangle\big), \\ A \to x_0 A_1 x_1 \dots A_m x_m, y_0 A_1 y_1 \dots A_m y_m \text{ — } i\text{-е правило схемы} \end{cases}$$
   Здесь $y_i' = h(y_i)$.
   (b) $M(a, u) = \mathrm{pop}$, если $a \in \Sigma$, $u = av$, $v \in \Sigma^{*k-1}$.

(c) $M(b', u) = \text{pass}$ для всех $u \in \Sigma^{*k}$. Такой управляющий элемент определяет переход

$$(x, b'\alpha\$, y) \vdash (x, \alpha\$, yb)$$

(d) $M(\$, \varepsilon) = \text{accept}$.

(e) $M(X, u) = \text{error}$ для всех остальных (X, u).

Теорема 38. $T = (N, \Sigma, \Delta, R, S)$ — простая семантически однозначная схема синтаксически- управляемой трансляции с входной грамматикой G_i класса $\text{LL}(k)$ и $\Im = (\Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, \Delta, M, T_0, \$)$ — k-предсказывающий алгоритм трансляции, построенный посредством алгоритма.

Тогда $\tau(T) = \tau(\Im)$.

Теорема 39. T — простая семантически однозначная схема синтаксически-управляемой трансляции с входной грамматикой G_i класса $\text{LL}(k)$.

Существует детерминированный магазинный преобразователь P такой, что

$$\tau_e = \{ (x\$, y) \mid (x, y) \in \tau(T) \}$$

21. Неразрешимые и разрешимые проблемы, касающиеся формальных языков

И этого нет...

22. Алгоритмически разрешимые проблемы, касающиеся конечных автоматов (проблемы пустоты и бесконечности языков, распознаваемых конечными автоматами, проблема эквивалентности конечных автоматов)

Теорема 40. Множество цепочек, принимаемых конечным автоматом с n состояниями,

1. непусто **тогда и только тогда**, когда он принимает цепочку длиной меньше n;
2. бесконечно **тогда и только тогда**, когда он принимает цепочку длиной $n \leq l \leq 2n$.

Следствие. Существуют алгоритмы, разрешающие вопрос о пустоте, конечности и бесконечности языка, принимаемого любым данным конечным автоматом.

Теорема 41. Существует алгоритм для определения, являются ли два конечных автомата эквивалентными.