Оглавление

Глава 1

Теория меры

1.1. Интеграл Лебега

Определение 1. $E \subset \mathbb{R}^m, \quad E \neq \emptyset$. *Характеристической функцией* множества E называется функция $K_E(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$K_e(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Определение 2. *Простой функцией* $f_0 : E \to \mathbb{R}$ будем называть функцию, множество значений которой конечно.

Если $c_1, \ldots, c_n$ — все различные значения функции $f_0, \quad E_j = \{\, x \in E \mid f_0(x) = c_j \,\}$, то $E_j \cap E_k = \emptyset$, $\bigcup E_j = E$. Полагая $\chi_{E_j}(x) = K_{E_j}(x)\big|_E$, имеем соотношение

$$f_0(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}(x) \tag{1.1}$$

Теорема 1. $f : E \to \mathbb{R}$

1. Тогда существует последовательность простых функций, определённых на E таких, что

$$\forall x \in \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$$

2. Если множество E измеримо по Лебегу и функция f измерима, то все функции f_n можно выбрать измеримыми.
3. Если $f(x) \geq 0, \quad x \in E$, то можно выбрать функции $f_n(x)$, которые при $\forall x$ монотонно возрастают по n.

Доказательство.

1. Пусть $f(x) \geq 0 \quad \forall x$.
   Положим для $n = 1, 2, \ldots, \quad i = 1, \ldots, n \cdot 2^n$

$$E_{n\ i} = \left\{\, x \in E \mid \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \,\right\}$$

$$E_{n\ 0} = \{\, x \in E \mid f(x) \geq n \,\}$$

   Далее пусть $\chi_{E_{n\ i}}(x) = K_{E_{n\ i}}(x)\big|_E, \qquad i = 0, 1, \ldots, n \cdot 2^n$, и пусть

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n\ i}}(x) + n\chi_{E_{n\ 0}}(x) \tag{1.2}$$

Тогда для $x \in \bigcup E_{n\ i}$ имеем

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n} \tag{1.3}$$

Для $\forall x \in E$ возьмём $N > f(x)$, тогда $\forall n > N$ выполнено (1.3) и $f_n(x) \to f(x)$.

2. Если f измерима, то множества $E_{n\ i}$ измеримы из (1.2) следует измеримость f_n.
3. Монотонность f_n также следует из (1.2).
4. Для произвольной функции f положим $f = f^+ - f^-$ и (1.2) применим к f^+ и f^-.

□

Замечание. Пусть $E_j \subset E$, не предполагаем условия $E_j \cap E_k = \emptyset$, $\quad E = \bigcup E_j$, числа c_j не обязательно различны,

$$f_1(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}(x) \tag{1.4}$$

Тогда f_1 — простая функция, которую можно записать в виде (1.1) с какими-то множествами E'_l и числами c'_l.

1.1.1. Примеры измеримых по Лебегу множеств

Примеры.

1. Любое элементарное множество A измеримо.
2. $\mathbb{R}^m$ измеримо.
3. Открытые множества измеримы.
4. Замкнутые множества измеримы.

Доказательство.

1. По определению.
2. $\mathbb{R}^m = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, где $a_n = (-n, \dots, -n)$, $b_n = (n, \dots, n)$.
3. Пусть $\mathbb{Q}^m$ — множество всех точек с рациональными координатами в $\mathbb{R}^m$, $\quad G \subset \mathbb{R}^m$ открыто, $G \neq \emptyset$.
   Для любой точки $M \in G \cap \mathbb{Q}^m$ обозначим через $I(M)$ максимальный промежуток $\big(a(M), b(M)\big)$ со следующими свойствами:
   - $a(M) = \big(a_1(M), \dots, a_m(M)\big)$;
   - $b(M) = \big(b_1(M), \dots, b_m(M)\big)$;
   - если $M = (M_1, \dots, M_m)$, то $a_j(M) = M_j - \delta(M)$;
   - $b_j = M_j + \delta(M)$;
   - $\big(a(M), b(M)\big) \subset G$.

   Тогда
   $$G = \bigcup_{M \in G \cap \mathbb{Q}^m} \big(a(M), b(M)\big)$$
4. Если $F \subset \mathbb{R}^m$ замкнуто, то $F = \mathbb{R}^m \setminus \big(\mathbb{R}^m \setminus F\big)$, множество $\mathbb{R}^m \setminus F$ открыто.

□

1.1.2. Определение интеграла Лебега

Определение 3. Пусть E, E_j измеримы, $E = \bigcup E_j$, $c_{j_0} = 0$, если $\mathrm{m}\, E_{j_0} = +\infty$. Положим

$$I_E\Big(\sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}\Big) \coloneqq \sum_{j=1}^{n} c_j \,\mathrm{m}\, E_j \tag{1.5}$$

В этой формуле считаем, что $0 \cdot +\infty = 0$.

Свойства. f_1 — простая функция, записанная в виде (1.4).

1. $a \le f_1(x) \le b$, $\mathrm{m}\, E < +\infty$
$$\implies a\,\mathrm{m}\, E \le I_E(f_1) \le b\,\mathrm{m}\, E$$
2. Если $f_1(x) \le g_1(x)$, $x \in E$, то $I_E(f_1) \le I_E(g_1)$.
3. Если $c \in \mathbb{R}$, то $I_E(cf_1) = cI_E(f_1)$.
4. Если $\mathrm{m}\, E = 0$, то $I_E(f_1) = 0$.
5. $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, $F_1 \cup F_2 = E$
$$I_{F_1}(f_1) + I_{F_2}(f_1) = I_E(f_1) \tag{1.6}$$

Доказательство (5). Пусть $f_1(x) = \sum c_j \chi_{E_j}$, пусть $E'_j = E_j \cap F_1$, $E''_j = F_j \cap F_2$.
Тогда $\mathrm{m}\, E'_j + \mathrm{m}\, E''_j = \mathrm{m}\, E_j$,

$$I_{F_1}(f_1) = \sum c_j \,\mathrm{m}\, E'_j, \qquad I_{F_2}(f_1) = \sum c_j \,\mathrm{m}\, E''_j, \qquad I_E(f) = \sum c_j \,\mathrm{m}\, E_j$$

Отсюда следует свойство (1.6). □

Определение 4. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримо, $E \ne \emptyset$, $f : E \to \mathbb{R} \cup \{ +\infty \}$, $f(x) \ge 0$ $\forall x \in E$, f измерима.

Через $\mathtt{B}(f)$ обозначим множество всех простых функций $f_0 : E \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

- $f_0(x) \ge 0$;
- f_0 измерима;
- $f_0(x) \le f(x)$ $\forall x \in E$.

Интегралом Лебега назовём следующую величину

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \coloneqq \sup \{ I_E(f_0) \mid f_0 \in \mathtt{B}(f) \} \tag{1.7}$$

Определение 5. Если $\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} < +\infty$, то функцию f называют *суммируемой* на множестве E.

Обозначение. $f \in \mathscr{L}(E)$

Определение 6. Если $f : E \to \mathbb{R} \cup \{ -\infty, +\infty \}$ может принимать значения разных знаков, считаем $f = f^+ - f^-$ и называем f *суммируемой*, если $f^+ \in \mathscr{L}(E)$ и $f^- \in \mathscr{L}(E)$. Тогда полагаем

$$\int\limits_E f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \coloneqq \int\limits_E f^+ \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} - \int\limits_E f^- \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} \tag{1.8}$$

Теорема 2. $f \in \mathscr{L}(E)$, $A \in \mathfrak{M}$, $A \subset E$, $\varphi(A) = \int\limits_A f \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$.

Тогда φ счётно-аддитивна на $\mathfrak{M}$, суженном на E.

Доказательство. Требуется установить равенство

$$\varphi(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(A_n),\qquad \text{если } A_n\subset E,\quad A_n\cap A_k=\emptyset \tag{1.9}$$

Из (1.8) следует, что достаточно установить (1.9) для $f(x)\geq 0,\quad x\in E$.

1. Пусть $f(x)=\chi_F(x),\quad F\subset E$, тогда

$$\varphi(A)=\int\chi_F(x)\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}=I_E(\chi_{F\cap A})=\mathrm{m}(F\cap A)$$

$$\varphi(A_n)=I_E(\chi_{F\cap A_n})=\mathrm{m}(F\cap A_n)$$

В силу счётной аддитивности меры Лебега имеем $\mathrm{m}(F\cap A)=\sum\mathrm{m}(F\cap A_n)$, откуда следует (1.9).

2. $f(x)=\sum_{j=1}^{N}c_j\chi_{F_j}(x)$.

$$\varphi(A)=\int\limits_A\sum_{j=1}^{N}c_j\chi_{F_j}\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}=I_A\big(\sum c_j\chi_{F_j}\big)=\sum c_j\,\mathrm{m}(F_j\cap A)$$

$$\varphi(A_n)=I_{A_n}\big(\sum c_j\chi_{F_j}\big)=\sum c_j\,\mathrm{m}(F_j\cap A_n)$$

Отсюда следует (1.9).

3. $0\leq f(x)\leq+\infty,\quad f$ измерима. Пусть $f_0\in\mathtt{B}(f)$. Тогда, по пункту 2,

$$I_A(f_0)=\int\limits_A f_0\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{A_n}f_0\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}\leq\sum\varphi(A_n)$$

$$\implies\varphi(A)=\sup\{\,I_A(f_0)\mid f_0\in\mathtt{B}(f)\,\}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(A_n)$$

Поскольку $f\in\mathscr{L}(E)$, то $\varphi(A)<+\infty,\quad\varphi(A_n)<+\infty$.
Возьмём $\forall N$ и зафиксируем $\varepsilon>0$.
Выберем $f_1,\dots,f_N$ — простые функции, $f_j\in\mathtt{B}(f)$, удовлетворяющие условию

$$I_{A_j}(f_j)>\int\limits_{A_j}d\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}-\frac{\varepsilon}{N},\quad j=1,\dots,N$$

Определим функцию $f_0:E\to\mathbb{R}$:

$$f_0(x)=\begin{cases}f_j(x), & j\geq 2,\quad x\in A,\\ f_1(x), & x\in E\setminus\bigcup_{n=2}^{N}A_n\end{cases}$$

Тогда $f_0\in\mathtt{B}(f),\quad\bigcup_{n=1}^{N}A_n\subset A$ и по пункту 2

$$\varphi(A)\geq\varphi\Big(\bigcup_{n=1}^{N}A_n\Big)\geq I_{\bigcup A_n}(f_0)=\sum_{n=1}^{N}I_{A_n}(f_0)=\sum_{n=1}^{N}I_{A_n}(f_n)>\sum\Big(\varphi(A_n)-\frac{\varepsilon}{N}\Big)=\sum\varphi(A_n)-\varepsilon$$

В силу произвольности N и $\varepsilon>0$

$$\implies\varphi(A)\geq\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(A_n)$$

$\square$

Поскольку из свойства 4 следует, что $\int\limits_E f\,\mathrm{d}\,\mathrm{m}=0$, если $\mathrm{m}\,E=0$, то из теоремы получаем важное следствие.

Следствие. Пусть $f_1, f_2 \in \mathscr{L}(E)$, $\quad \mathrm{m}\{\, x \in E \mid f_1(x) \neq f_2(x) \,\} = 0$. Тогда

$$\int\limits_E f_1 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m} = \int\limits_E f_2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{m}$$