Оглавление

Глава 1

Предисловие

1.1. Основные понятия

1.1.1. Объекты

$\mathbb{R}$ — алгебра, $\mathbb{R}$ — топологическое пространство. Для математического анализа важны оба свойства:

- пределы;
- непрерывность;
- f';
- $\int f$.

X — линейное топологическое пространство. Оно обладает свойствами линейного пространства:

- $(x, y) \to x + y$;
- $(\alpha, x) \to \alpha x$;

и свойствами топологического пространства:
$\{\, U_\alpha \,\}_{\alpha \in A}$.

Операции линейного пространства **непрерывны**.

Будем рассматривать нормированные пространства $(X, \|\cdot\|)$. В таком случае непрерывность гарантирована.

1.1.2. Отображения

$$A : X \to Y$$

A — линейный непрерывный оператор:

$$A(\alpha x + \beta z) = \alpha Ax + \beta Az$$

Если $\dim X < +\infty, \dim Y < +\infty$, то X — линейная алгебра.
Если $A = A^*$, то существует ОНБ из с. в. A.

Теорема 1 (Гильберта—Шмидта). X — H-сепарабельное гильбертово пространство, $A = A^*$, A компактный.

Тогда существует ОНБ из с. в.

Определение 1. Если $\dim Y = 1$, т. е. $Y = \mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$), то $A : X \to Y$ называется *линейным функционалом.*

Вопрос анализа. Пусть f — функция, у неё имеются некоторые свойства. Какие свойства будут у её производной?

Вопрос функционального анализа. $D : X \to Y,\ D(f) = f'$
Какими свойствами обладает D (непрерывность, компактность, ...)?

1.1.3. Почему полезно изучать функциональный анализ

1. Более общий взгляд на задачу.

$$f \in \mathcal{C}[a,b],\ \mathscr{P}_n = \left\{ p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j,\ a_j \in \mathbb{R} \right\}, \quad E_n(f) = \inf_{p \in \mathscr{P}_n} \left(\max_{\gamma \in [a,b]} |f(x) - p(x)| \right)$$

   Существует ли $p \in \mathscr{P}_n$ такое, что $E_n(f) = |f(x) - p(x)|, \quad \dim \mathscr{P}_n = n + 1 < +\infty$?
   Единственный ли?

2. Язык функционального анализа применим во всей математике.

3. Математическая физика использует функциональный анализ.

4. Функциональный анализ — это интересно и важно.

Глава 2

Метрические пространства

2.1. Определения и свойства

Определение 2. (X, ρ), X — множество, $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, выполняются свойства:

1. $\rho(x, y) \geq 0, \quad \rho(x, y) = 0 \iff x = y;$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x);$
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$

X называется *метрическим пространством.*

Обозначение. $\mathtt{B}_r(x) = \{\, t \in X \mid \rho(x, y) < r \,\}$

$\{\, B_r(x) \,\}_{r>0}$ — база топологии в точке x. Если не фиксировать x, получим базу топологии X.

Определение 3.

$$G \subset X,\ G \text{ *открыто*} \iff \forall x \in G \quad \exists \mathtt{B}_r(x) \subset G$$

Определение 4. F *замкнуто*, если $X \setminus F$ открыто.

Для метрических пространств справедливо следующее определение *замкнутого пространства*:

Определение 5.

$$\{\, x_n \,\}_{n=1}^{\infty}, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \iff \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$$

Определение 6. $A \subset X$
A *ограничено*, если $\exists \mathtt{B}_r(x_0)$ такой, что $A \subset \mathtt{B}_r(x_0)$.

Определение 7. $\{\, x_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ — *фундаментальная*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad n, m > N \implies \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Замечание. Если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\{\, x_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная.

Доказательство. Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$\left.\begin{aligned} \exists N : \quad n > N &\implies \rho(x_n, a) < \varepsilon \\ \text{возьмём } m > N &\implies \rho(x_m, a) < \varepsilon \end{aligned}\right\} \implies \rho(x_n, x_m) \overset{\triangle}{\leq} 2\varepsilon$$

□

Определение 8. (X, ρ) — *полное*, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

Замечание (о пользе полноты). (X, ρ) — метрическое пространство, $F : X \to \mathbb{R}$ — непрерывное. Требуется определить $x_0 : F(x_0) = 0$.

Построим последовательность $\{ x_n \}_{n=1}^{\infty}$ такую, что

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = 0, \quad \rho(x_n, x_m) \xrightarrow[m\to\infty]{n\to\infty} \implies \exists x_0 : F(x_0) = 0, \quad \lim x_n = 0$$

Это верно только в полном пространстве.

Примеры.

1. $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ — полные;
2. $\mathbb{R}^n \setminus \{ 0 \}, \mathbb{Q}$ — не полные.

2.1.1. Теорема о свойствах фундаментальных последовательностей

Теорема 2. $(X, \rho), \quad \{ x_n \}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная.

1. $\{ x_n \}_{n=1}^{\infty}$ ограничена;
2. если существует $\{ x_{n_k} \}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $\lim x_{n_k} = a$, то $\exists \lim x_n = a$;
3. $\{ \varepsilon_k \}_{k=1}^{\infty}, \ \varepsilon_k > 0 \quad \implies \quad \exists \{ x_{n_k} \}_{k=1}^{\infty} : \quad \forall j > k \quad \rho(x_{n_j}, x_{n_k}) < \varepsilon_k.$

Доказательство.

1. Возьмём $\varepsilon = 1$.

$$\exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m \geq N \quad \rho(x_n, x_m) < 1 \quad \implies \rho(x_N, x_m) < 1 \text{ при } m > N$$

Пусть $R = \max \{ \rho(x_1, x_N), \ldots, \rho(x_{N-1}, x_N) \} + 1$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in \mathtt{B}_R(x_N)$.

2. Возьмём $\varepsilon > 0$. Воспользуемся фундаментальностью:

$$\exists N : \quad \forall n, m > N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Зафиксируем n_k такой, что:

- $n_k > N$;
- $\rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon$.

Пусть $n > N$. Тогда $\rho(x_n, a) \overset{\triangle}{\leq} \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon \implies \lim \rho(x_n, a) = 0$.

3. Докажем **по индукции**:

- **База.** ε_1

$$\exists N_1 : \quad \forall n, m \geq N_1 \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon_1 \implies \rho(x_{N_1}, x_m) < \varepsilon_1 \text{ при } m > N_1$$

- **Переход.** Допустим, уже построены $n_1, \ldots, n_{k-1}$, $n_j \uparrow$ такие, что

$$\forall m > n_j \quad \rho(x_m, x_{n_j}) < \varepsilon_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1$$

$$\exists n_k > n_{k-1} : \quad \forall n, m \geq n_k \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon_k \implies \rho(x_{n_k}, x_m) < \varepsilon_k \text{ при } m > n_k$$
$$\implies \exists \text{ требуемые } \{ x_{n_k} \}$$

□