Оглавление

Глава 1

Линейные функционалы

1.1. Открытые отображения

1.1.1. Теорема об обратном операторе

Теорема 1 (Банах). X, Y — банаховы, $\quad U \in \mathscr{B}(X,Y)$ — биекция

$$U^{-1} \in \mathscr{B}(Y,X)$$

Доказательство.

$$U(X) = Y \xRightarrow[\text{т. об откр. отобр.}]{} U \text{ открыто } \underset{\text{утв.}}{\Longrightarrow} U^{-1} \text{непрерывно}$$

□

1.1.2. Теорема о замкнутом графике

Теорема 2 (об эквивалентных нормах). $(X, \|\cdot\|_1)$ — банахово, $\quad (X, \|\cdot\|_2)$ — банахово, $\quad \exists C > 0 : \|x\|_2 \overset{X}{\le} C\|x\|_1$

$$\exists A > 0 : \quad \|x\|_1 \overset{X}{\le} A\|x\|_2$$

Доказательство. Обозначим $X = (X, \|\cdot\|_1), \quad Y = (X, \|\cdot\|_2)$.

Определим оператор $I : X \to Y : \quad Ix = x$. Понятно, что I — биекция и $I \in \mathscr{L}in(X,Y)$.

$$\|Ix\|_2 \le C\|x\|_1 \implies I \in \mathscr{B}(X,Y)$$

По теореме Банаха об обратном операторе

$$I^{-1} \in \mathscr{B}(Y,X) \implies \|I^{-1}x\|_1 \le A\|x\|_2, \quad A = \|I^{-1}\|$$

$$\iff \|x\|_1 \le A\|x\|_2$$

□

Определение 1. $(X, \|\cdot\|), \ (Y, \|\cdot\|)$ над $\mathbb{K}$

$X \times Y$ — *линейное пространство*:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \coloneqq (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$$

Определим *норму* на $X \times Y$:

$$\|(x,y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

Замечание. Сходимость по такой норме — покоординатная:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x, y) \iff \begin{cases}\lim x_n = x\\ \lim y_n = y\end{cases}$$

Если X, Y — банаховы, то $X \times Y$ — банахово.

Определение 2. $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$, $\quad U \in \mathscr{L}in(X, Y)$

Определим *график* U:

$$G_U = \{\, (x, Ux) \,\}_{x\in X} \subset X \times Y$$

Оператор U называется *замкнутым*, если G_U замкнуто в $X \times Y$.

$$\iff \Big(\lim(x_n, Ux_n) = (x, y) \implies y = Ux\Big)$$

$$\iff \left(\left.\begin{matrix}\lim x_n = x\\ \lim Ux_n = y\end{matrix}\right\} \implies y = Ux\right)$$

Замечание. Замкнутый оператор — это **не тот**, который переводит замкнутые множества в замкнутые.

Замечание. $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$, $\quad U \in \mathscr{L}in(X, Y)$

1. $\lim x_n = x$;
2. $\lim Ux_n = y$;
3. $y = Ux$.

$$U \text{ замкнут} \iff \Big(1) + 2) \implies 3)\Big)$$

$$U \text{ непрерывен} \iff \Big(1) \implies 2) + 3)\Big)$$

Значит, если U непрерывен, то он замкнут.

Теорема 3 (о замкнутом графике)**.** X, Y — банаховы, $\quad U \in \mathscr{L}in(X, Y)$ — замкнутый

$$U \text{ непрерывен}$$

Доказательство. Определим новую норму пространства X:

$$\|x\|_1 = \|x\|_X + \|Ux\|_Y$$

Проверим, что $(X, \|\cdot\|_1)$ банахово. Пусть $\{\, x_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $(X, \|\cdot\|_1)$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \|x_m - x_n\|_1 = 0$$

$$\iff \lim(\|x_m - x_n\|_X + \|Ux_m + Ux_n\|_Y) = 0$$

Значит, $\{\, x_n \,\}$ фундаментальна в $(X, \|\cdot\|_X)$, и $\{\, Ux_n \,\}$ фундаментальна в Y. Оба эти пространства банаховы.

$$\implies \exists x \in X\ \exists y \in Y : \quad \lim \|x_n - x\|_X = 0$$

$$\implies \begin{cases}\lim x_n = x \text{ в } (X, \|\cdot\|_X)\\ \lim Ux_n = y \text{ в } Y\end{cases} \xRightarrow[U \text{ замкнут}]{} y = Ux \implies \lim\big(\|x_n - x\|_X + \|Ux_n - Ux\|_Y\big) = 0$$

$$\implies \lim \|x_n - x\|_1 = 0 \implies (X, \|\cdot\|_1) \text{ банахово}, \quad \|x\|_X \le \|x\|_X + \|Ux\|_Y = \|x\|_1 \xRightarrow[\text{т. об экв. нормах}]{}$$

$$\implies \exists A > 0 : \quad \|x\|_1 \le A\|x\|_X \implies \|x\|_X + \|Ux\|_Y \le A\|x\|_X \implies \|Ux\| \le A\|x\| \implies U \in \mathscr{B}(X, Y)$$

$\square$

Пример (U замкнут, но не непрерывен). $X = \{\, \exists f' \in \mathcal{C}[0,1] \,\}, \quad \|f\|_X = \max\limits_{[0,1]} |f(x)|$

$X \subset \mathcal{C}[0,1]$ в алгебраическом смысле

$Y = \mathcal{C}[0,1], \quad \|g\|_Y = \max\limits_{[0,1]} |g(x)| = \|g\|_\infty$

$$\mathcal{D}(f) = f', \quad \mathcal{D} \in \mathscr{L}in(X, Y), \quad \mathcal{D} \text{ замкнут}$$

$$\left.\begin{array}{l} \{\, f_n \in X \,\}_{n=1}^\infty, \quad \lim f_n = f \iff f_n \xrightarrow[n\to\infty]{[0,1]} f \\ \mathcal{D}(f_n) = f_n', \quad \mathcal{D}(f_n) \to g \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{док. в анализе}]{} g = f' \implies g = \mathcal{D}(f) \iff f_n' \xrightarrow[n\to\infty]{[0,1]} g$$

$$x^n \in X: \quad \|x^n\|_X = 1, \quad \mathcal{D}(x^n) = nx^{n-1}, \quad \|\mathcal{D}(x^n)\| = n$$

$$\implies \sup_{\|f\| \le 1} \|D(f)\| = +\infty \implies \mathcal{D} \notin \mathscr{B}(X, Y)$$

1.2. Сопряжённые пространства к L^p

Теорема 4 (сопряжённые к l^p). $1 \le p < +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

1. $y = \{\, y_n \,\}_{n=1}^\infty \in l^q, \quad F_y : l^p \to \mathbb{K}, \quad x = \{\, x_n \,\}_{n=1}^\infty \in l^p, \quad F_y(x) := \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$

$$F_y \in \left(l^p\right)^*, \quad \|F_y\|_{(l^p)^*} = \|y\|_q$$

2. $F \in \left(l^p\right)^*$

$$\exists! y: \quad F = F_y$$

Доказательство.

1. $y \in l^q, \quad x \in l^p$

$$|F_y(x)| = \left|\sum_{n=1}^\infty x_n y_n\right| \underset{\text{нер-во Гёльдера}}{\le} \|x\|_p \cdot \|y\|_q, \quad F_y \in \left(l^p, \mathbb{K}\right)$$

$$\implies F_y \in \mathscr{B}\left(l^p, \mathbb{K}\right) = \left(l^p\right)^*, \quad \|F_y\|_{(l^p)^*} \le \|y\|_q$$

2. $F \in \left(l^p\right)^*, \quad e_n = (0, \dots, 0, \underset{n}{1}, 0, \dots, 0)$ — базис l^p

   Определим $y_n = F(e_n)$.

$$x = \{\, x_n \,\}_{n=1}^\infty \in l^p \implies x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n \text{ — сходится в } l^p$$

$$S_n := \sum_{k=1}^n x_k e_k \implies F(S_n) = \sum_{k=1}^n x_k y_k \xrightarrow[F \text{ непрерывен}]{}$$

$$\implies \lim S_n = x \implies \lim F(S_n) = F(x) \implies F(x) = \sum_{k=1}^\infty x_k y_k \implies F = F_y$$

   Проверим, что $y \in l^q$.

   - $p > 1 \implies q < +\infty$ Рассмотрим пробные функции

$$x_k = \begin{cases} \frac{\overline{y}_k}{|y_k|} \cdot |y_k|^{q-1}, & y_k \ne 0, \\ 0, & y_k = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим последовательности

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$$

$$F\left(x^{(n)}\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum |y_k|^q$$

$$\|x^{(n)}\|_p^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p = \sum |y_k|^{p(q-1)} \xlongequal[\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \implies p+q=pq \implies pq-p=q]{} \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q$$

$$\|F\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|F(x)|}{\|x\|_p} \geq \frac{F(x^{(n)})}{\|x^{(n)}\|} = \frac{\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q}{\left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall n \implies$$

$$\implies y \in l^q, \quad \|F\| \geq \|y\|_q, \quad F = F_y$$

Докажем единственность:
Пусть $F = F_y,\ F = F_z$.

$$F(e_n) = y_n, \quad F(e_n) = z_n \implies y_n = z_n$$

- $p = 1 \implies q = \infty$

$$F(e_n) = y_n, \quad \|F\|_{(l^1)^*} \geq |y_n| \implies y \in l^\infty$$

$$\|F\| \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| = \|y\|_\infty$$

□

Замечание. $T : (l^q) \to \left(l^p\right)^* : \quad T(y) = F_y$
Мы доказали, что, при $1 \leq p < +\infty$, T — линейный изометрический изоморфизм. Говорят, что $\left(l^p\right)^* = l^q$.

Теорема 5 (сопряжённое к C_0). $C_0 = \left\{ x = \{ x_n \in \mathbb{K} \}_{n=1}^\infty \,\middle|\, \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}$

1. $y \in l^1, \quad x \in C_0, \quad F_y(x) := \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$

$$F_y \in C_0^*, \quad \|F_y\| = \|y\|_1$$

2. $F \in C_0^*$

$$\exists! y \in l^1 : \quad F = F_y$$

Доказательство.

1. $y \in l^1, \quad x \in C_0$

$$|F_y(x)| = \left|\sum_{n=1}^\infty x_n y_n\right| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \cdot \sum_{n=1}^\infty |y_n| = \|x\|_\infty \cdot \|y\|_1$$

$$\implies F_y \in C_0^*, \quad \|F_y\| \leq \|y\|_1$$

2. $\{ e_n \}_{n=1}^\infty$ — базис в C_0. Рассмотрим $F \in C_0^*$.

$$y_n := F(e_n)$$

$$x = \{ x_n \}_{n=1}^\infty \in C_0 \implies x = \sum_{k=1}^\infty x_k e_k$$

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$$

$$F(S_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \xRightarrow[F \text{ непрерывен}]{} \lim F(S_n) = F(x) \implies F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \text{ сходится } \implies F = F_y$$

Проверим, что $y \in l^1$.

$\square$