Оглавление

Глава 1

Метрические пространства

1.1. Относительно компактные множества в $\mathcal{C}(K)$

1.1.1. Теорема Асколи—Арцела

Теорема 1. $\Phi \subset \mathcal{C}(K)$.

Φ относительно компактно тогда и только тогда, когда

1. Φ ограничено в $\mathcal{C}(K)$;
2. Φ равностепенно непрерывно.

Доказательство. $\mathcal{C}(K)$ — полное. Значит,

$$\Phi \text{ относительно компактно} \iff \Phi \text{ вполне ограничено}$$

- $\implies$
  1. Ограниченность
     Φ вполне ограничено $\implies$ Φ ограничено, т. е.
     $$\exists M > 0 : \quad \forall f \in \Phi \quad \forall x \in K \quad |f(x)| \le M$$
  2. Равностепенная непрерывность
     Возьмём $\varepsilon > 0$
     $$\exists \text{ конечная } \varepsilon\text{-сеть } \{ \varphi_j \}_{j=1}^n, \quad \varphi_j \in \mathcal{C}(K)$$
     $$\varphi_j \text{ равном. непр.} \implies \exists \delta_j : \quad \forall x, y \in K : \rho(x, y) < \delta \quad |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| < \varepsilon \quad 1 \le j \le n$$
     Положим $\delta = \min\limits_{1 \le j \le n} \{ \delta_j \}$. Проверим условие равностепенной непрерывности с δ.
     Пусть $f \in \Phi, \quad x, y \in K : \rho(x, y) < \delta$.
     $$\{ \varphi_j \} — \varepsilon\text{-сеть} \implies \exists 1 \le m \le n : \quad \|f - \varphi_m\|_\infty < \varepsilon \implies \max_{x \in K} |f(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon$$
     $$|f(x) - f(y) \overset{\triangle}{\le} |f(x) - \varphi_m(x)| + |\varphi_m(x) - \varphi_m(y)| + |\varphi_m(y) - f(y)| < 3\varepsilon$$
- $\impliedby$
  Φ ограничено $\implies \exists M > 0 : \quad \forall f \in \Phi \quad \forall x \in K \quad |f(x)| \le M$
  Возьмём $\varepsilon > 0$.
  Знаем, что $\mathcal{C}(K) \subset m(K)$. Проверим, что Φ вполне ограничено. Для этого достаточно доказать, что существует компактная ε-сеть в $m(K)$ (по следствиям из предыдущей лекции).
  Воспользуемся условием равностепенной непрерывности:
  $$\exists \delta : \quad \forall \rho(x, y) < \delta, \ f \in \Phi \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

По лемме о разбиении,

$$\exists C_j: \quad K = \bigcup_{j=1}^{n} C_j, \quad C_j \cap C_i = \emptyset, \quad C_j \neq \emptyset, \operatorname{diam} C_j < \delta$$

Для определённости будем считать, что $\mathcal{C}(K) = \{ f : K \to \mathbb{C} \}$.

$$\Psi := \left\{ g(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \chi_{C_j}(x) \;\middle|\; y_j \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\|g(x)\|_\infty = \left\| \sum_{j=1}^{n} y_j \chi_{C_j}(x) \right\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} |y_j| = \|y\|_{l_n^\infty}$$

Рассмотрим

$$F : l_n^\infty \to \Psi : \quad F(y) = \sum_{j=1}^{n} y_i \chi_{C_j}(x)$$

$$\|F(y)\|_{m(K)} = \|y\|_{l_n^\infty}, \quad \|F(y) - F(z)\|_{m(K)} = \|y - z\|_{l_n^\infty}$$

F — изометрия. Это означает, что она сохраняет компактность.

Выберем компакт

$$Q = \{ y = (y_1, \dots, y_n) \mid |y_j| \le M \} \implies F(Q) \text{ — компакт в } m(K)$$

Так как Q находится в $\mathbb{C}^n$, оно является произведением кругов. Это называется *полидиск*.

$$F(Q) = \left\{ g(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \chi_{C_j} \;\middle|\; |y_j| \le M \right\}$$

Проверим, что $F(Q)$ — ε-сеть для Φ.

Пусть $f \in \Phi, \quad C_j \neq \emptyset$. Выберем $x_j \in C_J$. Рассмотрим $y_j = f(x_j)$.

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \chi_{C_j}(x) \in F(Q)$$

Оценим $\|f - g\|_\infty$. Возьмём произвольный $x \in K$.

$$\implies \exists 1 \le m \le n : \quad x \in C_m \implies g(x) = f(x_m) \implies$$
$$\implies |f(x) - g(x)| = |f(x) - f(x_m)| < \varepsilon \quad \text{т. к. } \rho(x, x_m) < \delta$$

□

Замечание. Свойства 1 и 2 независимы.

Примеры.

1. $\Phi \subset \mathcal{C}[0,1]$

$$f_n(x) = x^2 + n, \quad n \in \mathbb{N}$$

$\{ f_n \}$ не ограничено, но равномерно непрерывно.

2. $\Phi \subset \mathcal{C}[0,1]$

$$f_n = x^n$$

$\{ f_n \}$ ограничено, но не равномерно непрерывно.

1.1.2. Достаточное условие равностепенной непрерывности

Теорема 2.

- $\Phi \subset \mathcal{C}(K), \quad f \in \Phi$
$$\exists M > 0,\ \alpha, \beta > 0: \quad \forall x, y \in K: \rho(x,y) < \beta \quad |f(x) - |f(y)| \le M\big(\rho(x,y)\big)^\alpha$$
- $f \in \Phi \subset \mathcal{C}[a,b], \quad \exists f'(x)$
$$\exists L > 0: \quad |f'(x)| \le L \quad \forall x \in (a,b)$$
- $K \subset G \subset \mathbb{R}^n, \quad K$ — компакт, $\quad G$ — открытое, $\quad f \in \Phi \subset \mathcal{C}(K), \quad \exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$
$$\exists L > 0: \quad \forall x \in G \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right| \le L$$
- $K \subset G \subset \mathbb{C}, \quad K$ — компакт, $\quad G$ — открытое, $\quad f \in \Phi \subset \mathcal{C}(K), \quad f$ аналитична в G
$$\exists L > 0: \quad |f(z)| \le L$$

В каждом из этих случаев Φ равностепенно непрерывно.

Доказательство.

- Пусть $\varepsilon > 0, \quad x, y \in K, \quad f \in \Phi, \quad \rho(x,y) < \delta < \beta$
$$\implies |f(x) - f(y)| \le M\big(\rho(x,y)\big)^\alpha \underset{\text{выберем } \delta \text{ так, чтобы}}{<} M\delta^\alpha < \varepsilon$$
$$\implies \delta < \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$
$$\delta := \min\left\{\beta, \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}$$
- Воспользуемся теоремой о промежуточном значении:
$$\exists c \in (a,b): \quad f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) \implies |f(y) - f(x)| \le L|y-x|$$
Получили случай 1 с $M = L,\ \alpha = 1,\ \forall \beta$.
- Пусть $x, y \in K: \quad [y,z] \subset G$ Рассмотрим
$$\Gamma(t): \quad 0 \le t \le 1, \quad \Gamma(t) = t \cdot z + (1-t) \cdot y, \quad \Gamma(0) = y,\ \Gamma(1) = z$$
$$f(z) - f(y) = f\big(\Gamma(1)\big) - f\big(\Gamma(0)\big)$$
$f\big(\Gamma(t)\big)$ — дифференцируемая функция от t. Применим к ней случай 2.
Теперь рассмотрим $F = \mathbb{R}^n \setminus G$ — компакт. Известно, что $\rho(x,F)$ непрерывна.
$$h(x) := \rho(x,F), \quad x \in K$$
$$\forall x \in F \quad h(x) > 0$$
$$\exists \min_{x \in K} h(x) =: h(x_0) =: r > 0$$
Пусть $x, y \in K: \quad \rho(x,y) < r$.
$$y \in \mathtt{B}_r(x) \subset G \implies [x,y] \subset G$$
Возьмём $\alpha = 1,\ M = L\sqrt{n},\ \beta = r$ и применим случай 1.
- $$\exists r > 0: \quad \forall z \in K \quad \rho(z,F) \ge r, \quad F = \mathbb{C} \setminus G$$
Возьмём $\beta = \frac{r}{3}$.
$$\gamma = \{\,\zeta \mid \ |z - \zeta| = 2\beta\,\}, \quad \gamma \subset G$$

Возьмём $z, w \in K: \quad \rho(z,w) < \beta$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\,\zeta, \quad f(w) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\gamma^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} \,\mathrm{d}\,\zeta$$

$$|f(z) - f(w)| = \frac{1}{2\pi} \Big| \int\limits_{\gamma^+} f(\zeta) \Big(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \Big) \,\mathrm{d}\,\zeta \Big|$$

Вычислим отдельно:

$$\Big| \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - w} \Big| = \Big| \frac{z - w}{(\zeta - z)(\zeta - w)} \Big| \underset{\substack{|\zeta - z| = 2\beta \\ |\zeta - w| \geq \beta}}{<} \frac{|z - w|}{2\beta \cdot \beta}$$

Теперь

$$|f(z) - f(w)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{L|z - w|}{2\beta^2} \cdot 2\pi \cdot 2\beta = \frac{L}{\beta} |z - w|$$

Применяем случай 1 с $\alpha, \beta = 1,\ M = \frac{L}{\beta}$.

$\square$

Упражнение.

1. $1 \leq p < +\infty, \quad A \subset l^p$

   A относительно компактно (и вполне ограничено) $\iff$

   (a) A ограничено в l^p;

   (b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall x = \{\, x_j \,\}_{j=1}^{\infty} \in A \quad \big(\sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^p \big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$.

2. $A \subset C_0$

   A относительно компактно $\iff$

   (a) A ограничено;

   (b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N > 0: \quad \forall x = \{\, x_j \,\}_{j=1}^{\infty} \in A \quad \sup\limits_{j \geq N+1} |x_j| < \varepsilon$

Глава 2

Линейные пространства

Определение 1. X — *линейное пространство* над K ($K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), если

1. $x, y \in X \implies \alpha x + \beta y \in X \quad \forall \alpha, \beta \in K$;
2. $\emptyset \in X$.

Определение 2. X, Y линейны над K, $\quad A : X \to Y$.
Будем A называть *линейным оператором*, если

1. $A(x + z) = Ax + Az$;
2. $A(\alpha x) = \alpha Ax$.

Обозначение. $\mathscr{L}in(X, Y) = \{\, A : X \to Y \mid A \text{ — линейный} \,\}$

Замечание. $\mathscr{L}in$ — линейное пространство над K.

Примеры.

1. $K(s, t) \in \mathcal{C}\big([a, b] \times [a, b]\big)$ Определим *интегральный оператор*:

$$(\mathcal{K} f)(s) = \int_a^b K(s, t) f(t) \,\mathrm{d}\, t$$

   $K(s, t)$ называется *ядром интегрального оператора*.

$$\mathcal{K} \in \mathscr{L}in\Big(\mathcal{C}[a, b]\Big)$$

2. $X = \mathcal{C}^{(1)}[a, b] = \{\, f \mid f' \in \mathcal{C}[a, b] \,\}, \quad Y = \mathcal{C}[a, b]$

$$\mathcal{D}(f) \coloneqq f'$$

$$\mathcal{D} \in \mathscr{L}in(X, Y)$$

3. $l^1 \hookrightarrow l^2$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < +\infty \implies \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < +\infty$$

   $Ax = x$ — оператор вложения