

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Линейные пространства</b>	<b>2</b>
1.1	Гильбертовы и предгильбертовы пространства . . . . .	2
1.1.1	Критерий принадлежности множеству ортогональных проекторов . . . . .	2
1.2	Ряды Фурье . . . . .	4
1.2.1	Неравенство Бесселя . . . . .	4
1.2.2	Разложение в ряд Фурье элемента из замыкания линейной оболочки ОНС . . . . .	5

# Глава 1

## Линейные пространства

### 1.1. Гильбертовы и предгильбертовы пространства

#### 1.1.1. Критерий принадлежности множеству ортогональных проекторов

**Теорема 1.**  $H$  — гильбертово

1.  $M \subset H$  — замкнутое подпространство,  $P := P_M$  — ортогональный проектор на  $M$

Тогда

- (a)  $P \in \mathcal{B}(H)$ ;
- (b)  $P^2 = P$ ;
- (c) *самосопряжённость*:  $(Px, y) = (x, Py)$ .

2.  $P$  удовлетворяет свойствам (a), (b), (c),  $M := P(H)$

Тогда  $P = P_M$ , т. е.  $P$  — ортогональный проектор на  $P(H)$ .

**Доказательство.**

1.  $M \subset H$ ,  $x \in H$

$$\exists! y, z; \quad x = y + z, \quad y \in M, \quad z \in M^\perp$$

$$Px = y$$

(a) Проверим линейность

Возьмём  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

$$\alpha x = \alpha y + \alpha z, \quad \alpha y \in M, \quad \alpha z \in M^\perp$$

Значит, разложение единственno.

$$\implies P(\alpha x) = \alpha y = \alpha P(x)$$

Возьмём  $w \in H$

$$\exists! u \in M, \quad v \in M^\perp : \quad w = u + v$$

$$\implies x + w = (y + z) + (u + v), \quad (y + z) \in M, \quad (u + v) \in M^\perp$$

Разложение единственno.

$$\implies P(x + w) = u + v = Px + Pv$$

Возьмём  $x \in H$ ,  $x = y + z$ ,  $y \in M$ ,  $z \in M^\perp$

$$\|x\|^2 = (y + z, y + z) = \|y\|^2 + \|z\|^2 \xrightarrow{y=Px} \|Px\|^2 \leq \|x\|^2 \implies \|Px\| \leq \|x\| \quad \forall x \in H$$

$$P \in \mathcal{B}(H), \quad \|P\| \leq 1$$

$$M \neq \{0\} \implies \exists x \neq 0 \in M : \quad \|P\| = \sup_{u \neq 0 \in H} \frac{\|Pu\|}{\|u\|} \geq \frac{\|Px\|}{\|x\|} = 1 \implies \|P\| = 1$$

(b)  $P^2 = P$

$$x \in M \implies Px = x, \quad x \in H \implies Px \in M \implies P(Px) = Px \implies P^2 = P$$

(c) Самосопряжённость

$$x, y \in H, \quad P = P_M, \quad H = M \oplus M^\perp$$

Обозначим  $Q = P_{M^\perp}$ .

$$x = Px + Qx$$

$$(Px, y) = (Px, Py + Qy) \xrightarrow{Px \perp Qy} (Px, Py)$$

$$(x, Py) = (Px + Qx, Py) = (Px, Py)$$

2.  $M := P(H)$

(a) Проверим, что если  $x \in M$ , то  $Px = x$ .

$$x \in M \implies \exists y \in H : Py = x \implies Px = P(Py) = P^2y = Py = x$$

(b) Проверим, что  $M$  замкнуто.

Возьмём  $\{x_n \in M\}_{n=1}^\infty$ ,  $\lim x_n = x$ . В силу непрерывности  $P$

$$\lim Px_n = Px$$

При этом,

$$Px_n = x_n \implies \lim x_n = Px \implies Px = x \implies x \in P(H)$$

$P_M$  — ортогональный проектор на  $M \implies$  если  $x \in M$ , то  $Px = P_Mx = x$

Возьмём  $y \in M^\perp$ ,  $P_My = 0$ .

$$\|Py\|^2 = (Py, Py) = (y, P(Py)) = (y, Py) \xrightarrow[y \in M^\perp]{Py \in M} 0 \implies Py = 0$$

Возьмём  $x \in H$ .

$$x = y + z, \quad y \in M, \quad z \in M^\perp \implies Px = P_Mx$$

□

**Следствие (ортогональный проектор на конечномерное пространство).**  $H$  — гильбертово,  $M \subset H$  — подпространство,  $\dim M = n$ ,  $\{e_j\}_{j=1}^n$  — ОНБ

$$P_Mx = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j \quad \forall x \in H$$

**Доказательство.**

$$S_n := \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j \implies S_n \in M$$

$$x = S_n + (x - S_n)$$

Возьмём  $w = (x - S_n)$ . Проверим, что  $w \in M^\perp$ .

$$(S_n, e_j) = (x, e_j) \implies (w, e_j) = (x, e_j) - (x, e_j) = 0 \implies w \perp e_j \implies w \in M^\perp$$

□

**Следствие (критерий полноты семейства элементов гильбертова пространства).**

$H$  — гильбертово,  $\{x_\alpha \in H\}_{\alpha \in A}$  — семейство

$\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — полное **тогда и только тогда**, когда

$$x \in H, \quad x \perp x_\alpha \quad \forall \alpha \in A \implies x = 0$$

**Доказательство.** Пусть  $L = \overline{\mathcal{L}\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}}$  — замыкание линейной оболочки.

$$\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ — полное} \iff L = H \iff L^\perp = \{0\} \iff (x \in H \perp x_\alpha \quad \forall \alpha \in A \implies x = 0)$$

**Утверждение 1.**  $l^2, \quad L = \{x = \{x_n \in l^2\}_{n=1}^\infty \mid \sum_{n=1}^\infty x_n = 0\}$

$$\overline{L} = l^2$$

**Доказательство.** Упражнение □

**Утверждение 2.**  $z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1, \quad x_z = \{1, z, z^2, \dots\} = \{z^n\}_{n=0}^\infty \in l^2$

$$\{z_m\}_{m=1}^\infty, \quad |z_m| = 1, \quad \lim z_m = 0$$

Тогда  $\{x_{z_m}\}_{m=1}^\infty$  — полное в  $l^2$ .

**Доказательство.** Упражнение □

**Утверждение 3.**  $\lim z_m = a, \quad |a| < 1$

$$\{x_{z_m}\}_{m=1}^\infty \text{ полна}$$

**Доказательство.** Упражнение □

## 1.2. Ряды Фурье

**Определение 1.**  $H$  — гильбертово,  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  — ОНС (*ортонормированное семейство*), т. е.

$$(e_n, e_m) = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$$x \in H, \quad L = \{ce_n\}_{c \in \mathbb{C}}, \quad \dim L = 1 \implies Px = (x, e_n)e_n$$

Числа  $(x, e_n)$  будем называть *абстрактными коэффициентами Фурье* по системе  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ .

**Замечание.** Сходимость — это отдельная тема. Пока будем говорить, что мы каждому  $x$  **сопоставили ряд Фурье**:

$$x \sim \sum_{n=1}^\infty (x, e_n)e_n$$

**Определение 2.**  $\{e_n\}$  — ОС (*ортогональная система*),  $\|e_n\| > 0$

$$L = \{ce_n\}_{c \in \mathbb{C}}, \quad \widetilde{e_n} = \frac{e_n}{\|e_n\|}, \quad P_L x = (x, \widetilde{e_n}) = (x, \widetilde{e_n})\widetilde{e_n} = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2}e_n$$

$$x \sim \sum_{k=1}^\infty c_n e_n, \quad c_n = \frac{(x, e_n)}{\|e_n\|^2} \text{ — коэффициенты Фурье по ОС } \{e_n\}_{n=1}^\infty$$

### 1.2.1. Неравенство Бесселя

**Следствие (из предыдущих следствий).**  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  — ОНС в  $H, \quad x \in H$

$$\sum_{n=1}^\infty |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2$$

**Доказательство.** Возьмём  $\alpha_j \in \mathbb{C}$ . Запишем теорему Пифагора:

$$\left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \right\|^2 = \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j, \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right) \underset{e_j \perp e_k}{=} \sum_{j=1}^k |\alpha_j|^2$$

Пусть  $L_n = \mathcal{L}\{e_j\}_{j=1}^\infty$

$$\begin{aligned} P_{L_n} x &= \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j \implies \|P_{L_n} x\|^2 = \sum_{j=1}^n |(x, e_j)|^2, \quad \|P_{L_n}\| \leq 1 \\ &\implies \sum_{j=1}^n |(x, e_j)|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall n \implies \sum_{j=1}^\infty |(x, e_j)|^2 \leq \|x\|^2 \end{aligned}$$

□

### 1.2.2. Разложение в ряд Фурье элемента из замыкания линейной оболочки ОНС

**Теорема 2.**  $H$  — гильбертово,  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  — ОНС

Следующие условия равносильны:

- 1.  $x \in L\{e_n\}_{n=1}^\infty$ ;
- 2.  $x = \sum_{n=1}^\infty (x, e_n) e_n$ ;
- 3. равенство Парсеваля:  $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |(x, e_n)|^2$ .

**Доказательство.**

- 1  $\implies$  2

Возьмём  $\varepsilon > 0$ .

$$\exists y \in \mathcal{L}\{e_n\} : \|x - y\| < \varepsilon$$

$$y = \sum_{j=1}^m \alpha_j e_j$$

$$L_n = \mathcal{L}\{e_j\}_{j=1}^n \implies y \in L_m$$

$$P_{L_m} x = \sum_{j=1}^m (x, e_j) e_j =: S_m$$

$$\|x - S_m\| = \min_{h \in L_m} \|x - h\| \leq \|x - y\| < \varepsilon$$

$$L_{m+1} \supset L_m \implies \rho(x, L_{m+1}) \leq \rho(x, L_m) = \|x - S_m\| < \varepsilon$$

$$\|x - S_{m+1}\| \leq \|x - S_m\| \implies \|x - S_n\| < \varepsilon \quad \forall n, m \implies \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = x$$

- 2  $\implies$  1 — очевидно

$$x = \lim S_m \implies x \in \overline{\mathcal{L}\{e_j\}}$$

- 2  $\implies$  3

$$x = \lim S_n, \quad S_n = \sum_{j=1}^n (x, e_j) e_j$$

$$(x, x) = \lim (S_n, S_n)$$

$$\begin{aligned}\|S_n\|^2 &= (S_n, S_n) = \sum_{j=1}^n |(x, e_j)|^2 =: \sigma_n \\ \|x\|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n\end{aligned}$$

• 3  $\implies$  2

$$\begin{aligned}x &= S_n + (x - S_n), \quad w := x - S_n, \quad w \perp S_n \\ \implies \|x\|^2 &= \|S_n\|^2 + \|x - S_n\|^2 \\ \|S_n\|^2 &= \sigma_n, \quad \lim \|S_n\|^2 = \|x\|^2 \\ \implies \lim \|x - S_n\|^2 &= 0 \implies \lim S_n = x\end{aligned}$$

□

**Следствие.**  $H$  — гильбертово,  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  — полная ОНС

$$\forall x \in H \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$$

**Определение 3.**  $X$  — нормированное

$\{e_n\}_{n=1}^\infty$  — базис в  $X$ , если

$$\forall x \in X \quad \exists! \{ \alpha_j \in \mathbb{C} \} : \quad x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$$

**Примеры.**

$$1. \quad 1 \leq p \leq +\infty, \quad e_n = (0, \dots, 0, \underset{n}{1}, 0, \dots, 0)$$

$$x \in l^p, \quad x = \{x_n\}_{n=1}^\infty, \quad \|x\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n, \quad \|x - S_n\|_p = \left( \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$