Оглавление

Глава 1

Линейные функционалы

1.1. Теория Фредгольма

1.1.1. Альтернатива Фредгольма

Теорема 1.

$$\operatorname{Ker} S = \{\, 0 \,\} \iff S(H) = H$$

Другая формулировка. Оператор S — инъекция **тогда и только тогда**, когда S — сюръекция. Из любого из этих выражений следует, что S — биекция.

Другая формулировка.

- **Либо** уравнение Фредгольма разрешимо для любой правой части и решение единственно.
- **Либо** существует ненулевое решение уравнения Фредгольма.

Лемма 1 (о стабилизации)**.** $k \geq 0, \quad H_{k+1} \coloneqq S(H_k)$

$$\exists n \geq 0 : \quad H_n = H_{n+1}$$

Доказательство. Допустим, что $H_{k+1} \subsetneq H_k$.

$$\implies H_k = H_{k+1} \oplus \underbrace{H_{k+1}^{\perp}}_{\text{ортогональное дополнение в } H_k}$$

$$\implies \exists x_k \in H_k : \quad \|x_k\| = 1, \quad x_k \perp H_{k+1}$$

Пусть $n > m$. Хотим оценить разность $\|Tx_n - Tx_m\|$.

$$Sx_n - Sx_m = x_n - Tx_n - x_m + Tx_m$$

$$Sx_n = x_n - Tx_n$$

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|x_n - Sx_n - x_m + Sx_m\| \geq 1$$

$$Sx_n \in H_{n+1}, \quad Sx_m \in H_{m+1}$$

$$x_n, Sx_n, Sx_m \in H_{m+1} \implies x_m \perp H_{m+1}$$

Значит, не существует $\{\, Tx_{n_k} \,\} : \quad \exists \lim T_{x_{n_k}}, \quad T \in \operatorname{Com}(H)$ — $\lightning$. □

Доказательство (теоремы)**.**

- $\implies$

  $\operatorname{Ker} S = \{\, 0 \,\}$, т. е. S — инъекция.

  Докажем, что $S(H) = H$. **Пусть** $S(H) \subsetneq H$, т. е. $\exists x \in H : \quad x \notin S(H)$.

Подействуем на x оператором S:

$$Sx \in S(H), \quad S(Sx) \notin S(H)$$

(т. к. прообраз у элемента ровно один, и это — Sx)

$$\implies Sx \in S(H) \setminus S^2(H)$$

И так далее для любого n:

$$S^n x \in S^n(H) \setminus S^{(n+1)}(H)$$

Это **противоречит** лемме.

- $\impliedby$

$$\left.\begin{aligned} &S(H) = H \\ &H = S(H) \oplus \operatorname{Ker} S^* \end{aligned}\right\} \implies \operatorname{Ker} S^* = \{\, 0 \,\} \xRightarrow[S^* = I - T^*]{} $$

$$\implies S^* \text{ — оператор Фредгольма} \xRightarrow[\text{только что доказано}]{} S^*(H) = H$$

$$H = S^*(H) \oplus \operatorname{Ker} S \implies \operatorname{Ker} S = \{\, 0 \,\}$$

□

1.1.2. Теорема о числе ЛНЗ решений однородного уравнения Фредгольма

Теорема 2. $S = I - T, \quad T \in \operatorname{Com}(H)$

$$\dim \operatorname{Ker} S = \dim \operatorname{Ker} S^* < +\infty$$

Другая формулировка. Однородные уравнения Фредгольма $Sx = 0$ и $S^*y = 0$ имеют одно и то же, и при том конечное, число ЛНЗ решений.

Доказательство. Пусть $\dim \operatorname{Ker} S = n < +\infty$ (уже доказано для банахова пространства).

$$\dim \operatorname{Ker} S^* =: m < +\infty$$

Пусть $n < m$.
Выберем в этих пространствах ОНБ:

$$\{\, e_i \,\}_{i=1}^n \text{ — ОНБ } \operatorname{Ker} S, \quad \{\, f_j \,\}_{j=1}^m \text{ — ОНБ } \operatorname{Ker} S^*$$

Определим $V : H \to \operatorname{Ker} S^*$:

$$x \in H \quad Vx = \sum_{k=1}^n (x, e_k) f_K$$

$$V(H) \subset \operatorname{Ker} S^* \implies \dim\bigl(V(H)\bigr) < +\infty \implies V \text{ — конечного ранга } \implies V \in \operatorname{Com}(H)$$

$$U \coloneqq S + V = I - \underbrace{(T - V)}_{\in \operatorname{Com}(H)} \implies U \text{ — оператор Фредгольма}$$

Для U верна теор. 1. Проверим, что $\operatorname{Ker} U = \{\, 0 \,\}$. Пусть $x \in \operatorname{Ker} U$.

$$Ux = 0 \implies Sx + Vx = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &Sx \in S(H) \\ &Vx \in \operatorname{Ker} S^* \end{aligned}\right\} \xRightarrow[S(H) \perp \operatorname{Ker} S^*]{} Sx \perp Vx \implies \begin{cases} Sx = 0 \\ Vx = 0 \end{cases}$$

$$Vx = \sum_{k=1}^n (x, e_k) f_k = 0 \implies (x, e_K) = 0 \quad \forall k \implies x \perp \operatorname{Ker} S \xRightarrow[x \in \operatorname{Ker} S]{} x = 0$$

По 1 $U(H) = H$. Проверим, что это невозможно для $n + 1$, т. е. что

$$f_{n+1} \notin U(H)$$

Возьмём $x \in H$.

$$Ux = Sx + Vx$$

$$f_{n+1} \in \operatorname{Ker} S^* \implies f_{n+1} \perp S(H) \implies f_{n+1} \perp Sx$$

$$Vx = \sum (x, e_k) f_k \xRightarrow[f_{n+1} \perp f_k]{} f_{n+1} \perp Vx \implies f_{n+1} \in \big(U(H)\big)^{\perp} = \{\,0\,\} - \lightning$$

Тем самым, мы доказали, что

$$\dim \operatorname{Ker} S \geq \dim \operatorname{Ker} S^* \geq \dim \operatorname{Ker} S^{**} = \dim \operatorname{Ker} S$$

□

1.1.3. Следствие о спектре компактного оператора

Следствие. $T \in \operatorname{Com}(T)$

1. $\lambda \notin 0, \quad \lambda \in \sigma(T)$

$$\lambda \in \sigma_p(T)$$

2. $\lambda \in \sigma_p(T), \quad H_\lambda = \operatorname{Ker}(\lambda I - T), \quad Y_{\overline{\lambda}} = \operatorname{Ker}(\overline{\lambda} I - T^*)$

$$\dim H_\lambda = \dim Y_{\overline{\lambda}} < +\infty$$

3. $$\sigma_p(T) \setminus \{\,0\,\} = \{\,\lambda_n\,\}_{n=1}^N$$

   При этом, если $N = +\infty$, то

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0$$

1.2. Самосопряжённые операторы

1.2.1. Простейшие свойства самосопряжённого оператора

Свойства. H — гильбертово, $\quad T \in \mathscr{B}(H), \quad T = T^*$ (т. е. $(Tx, y) = (x, Ty)$)

1. $(Tx, x) \in \mathbb{R} \quad \forall x$;
2. $\lambda \in \sigma_p(T) \implies \lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\lambda, \mu \in \sigma_p(T), \quad Tu = \lambda u, \quad Tv = \mu v$

$$u \perp v$$

4. $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Tx, x)|$;

Доказательство.

1. $$\left.\begin{aligned}(Tx, x) &= \overline{(x, Tx)}\\ (Tx, x) &= (x, Tx)\end{aligned}\right\} \implies (x, Tx) \in \mathbb{R}$$

2. $$\lambda \in \sigma_p(T) \implies \exists u \neq 0$$

$$Tu = \lambda u \implies (Tu, u) = (\lambda u, u) \implies \lambda = \frac{(Tu, u)}{\|u\|^2} \in \mathbb{R}$$

3. $Tu = \lambda u, \quad Tv = \mu v, \quad \lambda \neq \mu, \quad u, v \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} (Tu, v) &== (\lambda u, v) = \lambda(u, v) \\ (Tu, v) &= (u, Tv) = (u, \mu v) \underset{\mu \in \mathbb{R}}{=\!=} \mu(u, v) \end{aligned}\right\} \underset{\text{вычтем}}{\Longrightarrow} \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0}(u, v) = 0 \implies u \perp v$$

4. $Q = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Tx, x)|$

- Пусть $x \in H, \quad \|x\| = 1.$

$$|(Tx, x)| \underset{\text{К–Б}}{\leq} \|Tx\| \cdot \|x\| \leq \|T\| \cdot \underbrace{\|x\| \cdot \|x\|}_{=1} = \|T\| \quad \forall x : \ \|x\| = 1$$

$$\implies Q = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)| \leq \|T\|$$

- Пусть $u \in H, \quad u \neq 0.$

$$\left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| = 1 \implies \left| \left(T\Big(\frac{u}{\|u\|}\Big), \frac{u}{\|u\|} \right) \right| \leq Q \implies |(Tu, u)| \leq Q\|u\|^2 \quad \forall u \in H \tag{1.1}$$

Возьмём $x, y \in H$. Применим (1.1) к $(x + y)$ и к $(x - y)$:

$$\big(T(x + y), x + y\big) = (Tx, x) + (Tx, y) + (Ty, x) + (Ty, y) \leq Q\|x + y\|^2$$

$$-\big(T(x - y), x - y\big) = -\big((Tx, x) - (Tx, y) - (Ty, x) + (Ty, y)\big) \leq Q\|x - y\|^2$$

Сложим эти два неравенства:

$$2\big((Tx, y) + (Ty, x)\big) \leq Q\big(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2\big)$$

К правой части применим тождество параллелограмма, а левую преобразуем:

$$(Tx, y) + (Ty, x) = (Tx, y) + (y, Tx) = (Tx, y) + \overline{(Tx, y)} = 2\Re(Tx, y) \implies$$
$$\implies 4\Re(Tx, y) \leq Q \cdot 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Выберем $x : \quad \|x\| = 1$ такой, что $Tx \neq 0$.

$$y := \frac{Tx}{\|Tx\|} \implies \|y\| = 1$$

Подставим x, y в неравенство:

$$4\Re\Big(Tx, \frac{Tx}{\|Tx\|}\Big) \leq 4Q \implies \|Tx\| \leq Q \quad \forall x : \ \|x\| = 1 \implies \|T\| \leq Q$$

$\square$

Определение 1. $T = T^*$

$$M := \sup_{\|x\|=1} (Tx, x), \qquad m := \inf_{\|x\|=1} (Tx, x)$$

m и M называются *границами* оператора T.

Замечание.

$$\|T\| = \max\{|M|, |m|\}$$

1.3. Компактные самосопряжённые операторы

Теорема 3. H — гильбертово, $\quad T = T*, \quad T \in \mathrm{Com}(H)$

$$\exists \lambda \in \sigma_p(T) : \quad |\lambda| = \|T\|$$

Доказательство. $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Tx, x)|$

- $\|T\| = |M|$

$$M = \sup_{\|x\|=1} (Tx, x) \implies \exists \{ x_n \}_{n=1}^{\infty} : \quad \|x_n\| = 1, \quad \lim(Tx_n, x_n) = M$$

$$\left.\begin{aligned} &m \le M \\ &\max\{|M|, |m|\} = |M| \end{aligned}\right\} \implies M > 0$$

$$T \in \mathrm{Com}(H) \implies \exists \{ n_k \}_{k=1}^{\infty} : \quad \exists \lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = y$$

Переименуем: $\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = y$. Проверим, что y — с. в. T и $Ty = My$.

$$\begin{aligned} 0 \le \|Tx_n - M \cdot x_n\|^2 = (Tx_n - Mx_n, Tx_n - Mx_n) = \\ = \|Tx_n\|^2 - \underbrace{M(Tx_n, x_n)}_{\to M} - \underbrace{M(x_n, Tx_n)}_{\to M} + M^2 \underbrace{\|x_n\|^2}_{=1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \|y\|^2 - M^2 \implies \|y\| \ge M \end{aligned}$$

$$\|y\| = \lim \|Tx_n\| \le \|T\| \cdot \|x_n\| = \|T\| = M \implies \|y\| \le M$$

$$\implies \lim M \cdot x_n = \lim Tx_n = y$$

Воспользуемся тем, что T непрерывен:

$$M \cdot \lim x_n = y \implies M \underbrace{\lim Tx_n}_{=y} = Ty \implies Ty = My, \implies M \in \sigma_p(T), \quad M = \|T\|$$

- $\|T\| = |m|$ TODO: дописать этот случай

$\square$