Оглавление

Глава 1

ТФКП

1.1. Особые точки аналитической функции (продолжение)

Теорема 1. $f \in \mathcal{A}\big(D_{0,R}(a)\big)$
Для того, чтобы a была существенной особой точкой f, **необходимо и достаточно**, чтобы

$$\exists \{ z_n \}_{n=1}^{\infty}, \ z_n \neq a, \ z_n \to a, \quad \exists \{ \zeta_n \}_{n=1}^{\infty}, \ \zeta_n \neq a, \ \zeta_n \to a, \quad \exists M: \quad \begin{cases} |f(z_n)| \leq M & \forall n, \\ |f(\zeta_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \end{cases}$$

Доказательство.

- Пусть $\nexists \{ \zeta_n \}: \ \zeta_n \to a, \ |f(\zeta_n)| \to +\infty$.

$$\implies \exists M_1, \quad \exists \delta_0 > 0: \quad \forall z \in D_{0,\delta_0}(a) \quad |f(z)| \leq M_1$$

  Тогда a — устранимая особая точка по характеристическому свойству устранимой особой точки.

- Пусть $\exists \{ \zeta_n \}, \ \zeta_n \to a, \ |f(\zeta_n)| \to +\infty$.
  - Если бы выполнялось $|f(z)| \xrightarrow[z\to a]{} +\infty$, то по характеристике полюса, a — полюс f.
  - Если неверно, что $|f(z)| \to +\infty$, то

$$\exists M, \quad \exists \{ z_n \}, \ z_n \to a: \quad |f(z_n)| \leq M$$

  Итак, при наличии последовательностей $\{ z_n \}$ и $\{ \zeta_n \}$ a — не устранимая особоая точка и не полюс.

□

1.2. Вычеты

Определение 1. $f \in \mathcal{A}(D_{0,R}(a)), \qquad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n O(z-a)^n, \qquad z \in D_{0,R}(a)$
Коэффициент c_{-1} называется вычетом функции f в точке a.

Обозначение. $c_{-1} = \operatorname{res}_f a, \qquad c_{-1} = \operatorname{res} f$

В соответствии с формулой (1.8) из доказательства теоремы о разложении в ряд Лорана

$$\operatorname{res}_f a = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} f(z) \,\mathrm{d}\, z, \qquad 0 < \rho < R,$$

где γ_ρ — окружность $\{ z \mid |z-a| = \rho \}$.

Если $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, $E \subset \Omega$ — некоторое множество, то для $\forall a \in E$ выберем $R_a > 0$ так, чтобы $\{ z \mid |z-a| < R_a \} \cap E = \{ a \}$.
Тогда положим $\operatorname{res}_f a$ — вычет функции f, определяемый по множеству $D_{0,R_a}(a)$.

1.2.1. Теорема о вычетах

Теорема 2. Пусть Ω, E определены выше, $\overline{G} \subset \Omega$, $E \subset G$, $\Gamma = \partial G$ состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых.

Тогда для $f \in \mathcal{A}(\Omega \setminus E)$ справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{a \in E} \operatorname{res}_f a \tag{1.1}$$

Доказательство. Выберем $R_a,\ a \in E$ как раньше.
Пусть $\rho_a \leq \frac{1}{3} R_a$ и $\overline{D}_{\rho_a}(a) \subset G$. Тогда для $a_1, a_2 \in E,\ a_1 \neq a_2$ имеем

$$\overline{D}_{\rho_{a_1}}(a) \cap \overline{D}_{\rho_{a_2}}(a) \neq \emptyset$$

Пусть $U = G \setminus \bigcup_{a \in E} \overline{D}_{\rho_a}(a)$. Тогда $f \in \mathcal{A}\big(\Omega \setminus \bigcup_{a \in E} \overline{D}_{\rho_a}(a)\big)$, поэтому по теореме Коши имеем соотношение

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0 \tag{1.2}$$

Обозначим через $\gamma(a)$ окружность $\{\, z \mid |\, z - a| = \rho_a \,\}$. Тогда $\overset{\curvearrowleft}{\partial} U = \overset{\curvearrowleft}{\partial} G \cup \bigcup_{a \in E} \overset{\curvearrowright}{\gamma}(a)$, поэтому

$$(1.2) \implies \frac{1}{2\pi i} \int \overset{\curvearrowleft}{\partial} G f(z)\,\mathrm{d}\,z + \sum_{a \in E} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\gamma}(a)} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 0 \quad \implies \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} f(z)\,\mathrm{d}\,z =$$

$$= -\sum_{a \in E} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\overset{\curvearrowright}{\gamma}(a)} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{a \in E} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma}(a)} f(z)\,\mathrm{d}\,z = \sum_{a \in E} \operatorname{res}_f a$$

□

1.2.2. Некоторые формулы для вычисления вычетов

Утверждение 1. $\varphi, \psi \in \mathcal{A}\big(D_r(a)\big)$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$, $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$

$$\implies \operatorname{res}_f a = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \tag{1.3}$$

Доказательство. Выберем $r_a > 0$ так, чтобы при $z \in D_{0,r}(a) \setminus \{\, a \,\}$ выполнялось $\psi(z) \neq 0$. Пусть $v(z) = \frac{\psi(z)}{z-a}$.

Поскольку $\psi(z) = \psi(a) + \psi'(a)(z-a) + \ldots$, то

$$\psi(a) = 0 \implies v(z) = \psi'(a) + \frac{1}{2}\psi''(a)(z-a) + \ldots, \qquad v \in \mathcal{A}\big(D_R(a)\big)$$

Пусть $g(z) = \frac{\varphi(z)}{v(z)}$, $\quad g \in \mathcal{A}\big(D_{0,r_0}(0)\big)$, поскольку $v(z) \neq 0$, $z \in D_{r_a}(a)$.

$$f(z) = \frac{g(z)}{z-a} = \frac{1}{z-a}\big(g(a) + g'(a)(z-a) + \cdots\big) = \frac{g(a)}{z-a} + g'(a) + \frac{1}{2} g''(a) \cdot (z-a) + \cdots$$

$$\implies \operatorname{res}_f a = g(a) = \frac{\varphi(a)}{v(a)}$$

При этом,

$$\psi(z) = (z-a)v(z), \qquad \psi'(z) = v(z) + (z-a)v'(z), \qquad \psi'(a) = v(a)$$

□

Утверждение 2. $\varphi(a) \in \mathcal{A}\big(D_R(a)\big), \qquad n \geq 2, \qquad f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$

$$\Longrightarrow \operatorname{res}_f a = \frac{1}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(a)$$

Доказательство.

$$\varphi(z) = \varphi(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k, \qquad z \in D_R(a)$$

Тогда

$$f(z) = \frac{\varphi(a)}{(z-a)^n} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^{k-n} + \frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \cdot \frac{1}{z-a} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^{k-n}$$

□

1.2.3. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов

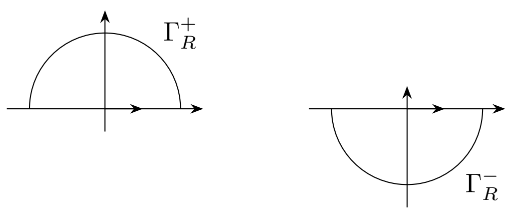
Теорема 3. Пусть $\mathbb{C}^+ = \{\, z = x + iy \mid y > 0 \,\}, \quad \mathbb{C}^- = \{\, z = x + iy \mid y < 0 \,\}$
Пусть $G^+ \supset \overline{\mathbb{C}}^+$, $G^- \supset \overline{\mathbb{C}}^-$ — области.

1. Пусть $f_+ \in \mathcal{A}(G^+ \setminus E^+)$, где $E^+ \subset \mathbb{C}^+$ — конечное множество. Предположим, что $\varepsilon_+(R) \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$, и что $|f_+(z)| \leq \varepsilon_+(R) \cdot R^{-1}, \quad |z| = R, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}^+$

$$\Longrightarrow \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f_+(x)\,\mathrm{d}\,x = 2\pi i \sum_{a\in E^+} \operatorname{res}_{f_+} a \tag{1.4}$$

2. Пусть $f_- \in \mathcal{A}(G^- \setminus E^-), \quad E^- \subset \mathbb{C}^-$ — конечное множество. Предположим, что $\varepsilon_-(R) \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$, и что $|f_-(z)| \leq \varepsilon_-(R) \cdot R^{-1}, \quad |z| = R, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}^-$.

$$\Longrightarrow \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f_-(x)\,\mathrm{d}\,x = -2\pi i \sum_{a\in E^-} \operatorname{res}_{f_-} a \tag{1.5}$$



Доказательство. Пусть

$$\Gamma_R^+ = [-R, R] \cup \{\, z \mid |z| = R, \quad z \in \mathbb{C}^+ \,\}, \qquad \Gamma_R^- = [-R, R] \cup \{\, z \mid |z| = R, \quad z \in \mathbb{C}^- \,\}$$

Обход $\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}{}_R^+$ в положительном направлении, $\overset{\curvearrowright}{\Gamma}{}_R^-$ — в отрицательном.
Выберем R так, чтобы E^+ лежала в области, ограниченной Γ_R^-, а R^- — Γ_R^-. Тогда по теореме о вычетах

$$\int_{\overset{\curvearrowleft}{\Gamma}{}_R^+} f(z)\,\mathrm{d}\,z = 2\pi i \sum_{a\in E^+} \operatorname{res}_{f^+} a, \qquad \int_{\overset{\curvearrowright}{\Gamma}{}_R^-} f(z)\,\mathrm{d}\,z = -2\pi i \sum_{a\in E^-} \operatorname{res}_{f_-} a \tag{1.6}$$

Пусть $\gamma_R^\pm = \left\{\, z \;\middle|\; |z| = R, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}^\pm \,\right\}$. Тогда

$$\int_{\Gamma_R^+} f_+(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_{-R}^{R} f_+(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma}{}_R^+} f(z)\,\mathrm{d}\,z, \qquad \int_{\Gamma_R^-} f_-(z)\,\mathrm{d}\,z = \int_{-R}^{R} f_-(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_{\overset{\curvearrowright}{\gamma}{}_R^-} f(z)\,\mathrm{d}\,z$$

Далее, условие теоремы влечёт

$$\left|\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma}_R^+} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \le \int\limits_{\gamma_R^+} |f_+(M)|\,\mathrm{d}\,l(M) \le \varepsilon_+(R)R^{-1}\cdot l(\gamma_R^+) = \pi\varepsilon_+(R)$$

$$\left|\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{\gamma}_R^-} f(z)\,\mathrm{d}\,z\right| \le \int\limits_{\gamma_R^-} |f_-(M)|\,\mathrm{d}\,l(M) \le \varepsilon_-(R)\cdot R^{-1}l(\gamma_R^-) = \pi\varepsilon_-(a)$$

Утверждения, начиная с (1.6), влекут утверждения теоремы. □

Пример. Пусть

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}\,x$$

Возьмём $f(z) = \frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2} \in \mathcal{A}\big(\mathbb{C}\setminus(\{\,-i\,\}\cup\{\,i\,\})\big)$.

Если $z = x+iy, \quad y\ge 0$, о $e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y}\cdot e^{ix}, \quad |e^{iz}| = e^{-y}\le 1$.

$$\left|\frac{e^{iz}}{(1+z^2)^2}\right| \le \frac{2}{|z|^4} \qquad \text{при } |z|\ge 2$$

Применим первое утверждение теоремы, тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}\,x = 2\pi i\operatorname{res}_f i$$

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2}$$

По утв. 2 для $n=2$, $\varphi(z) = \frac{e^{iz}}{(z+i)^2}$, имеем

$$\operatorname{res}_f i = \varphi'(i) = \left(i\frac{e^{iz}}{(z+i)^2} - 2\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}\right)\Bigg|_{z=i} = -i\frac{e^{-1}}{4} + 2\frac{e^{-1}}{8} = -i\frac{e^{-1}}{2}$$

$$2\pi i\operatorname{res}_f i = \pi e^{-1} \qquad\Longrightarrow\qquad I = \pi e^{-1}$$

1.3. Конформные отображения

Определение 2. $G\subset\mathbb{C}$ — область, $\quad f\in\mathcal{A}(G), \quad \Omega = \{\,\omega\in\mathbb{C}\mid \omega = f(z), \quad z\in\Omega\,\}$ — образ f.

Если отображение f инъективно, то говорят, что f является *конформным отображением* G на Ω (f *конформно отображает* G на Ω).

Функцию f называют *одноместной функцией*.

1.3.1. Конформное отображение $\mathtt{D}_1(0)$ на себя

Теорема 4. $\alpha\in\mathbb{R}, \qquad a\in\mathtt{D}_1(0)$

Тогда функция

$$b(z) = e^{i\alpha}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}, \qquad z\in\mathtt{D}_1(0)$$

конформно отображает $\mathtt{D}_1(0)$ на $\mathtt{D}_1(0)$.

Если $b_1(z)$ — какое-то конформное отображение $\mathtt{D}_1(0)$ на $D_1(0)$, то можно найти $\alpha_1\in\mathbb{R}, \quad a_1\in\mathtt{D}_1(0)$ такие, что $b_1(z)$ будет построено по той же формуле с α_1 и a_1.

Доказательство. Докажем только первую часть.

Поскольку $|a|<1$, то при $|z|<1$ имеем $|1-\bar{a}z|\ge 1-|a|\cdot|z|\ge 1-|a|>0$, т. е. $b\in\mathcal{A}\big(D_1(0)\big)$.

Если $z_1, z_2 \in D_1(0)$, $z_1 \neq z_2$, то

$$b(z_2) - b(z_1) = e^{i\alpha}\frac{(z_2 - a)(1 - \overline{a}z_1) - (z_1 - a)(1 - \overline{a}z)}{(1 - \overline{a}z_1)(1 - \overline{a}z_2)} = e^{i\alpha}\frac{(z_2 - z_1)(1 - |a|^2)}{(a1 - \overline{a}z_1)(10\overline{a}z_2)} \neq 0,$$

т. е. функция b — одноместная в $D_1(0)$. Если $|z| = 1$, то $\frac{1}{z} = \overline{z}$, поэтому при $|z| = 1$ имеем соотношение

$$\left|\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}\right| = \left|\frac{1}{z}\right| \cdot \left|\frac{z - a}{\frac{1}{z} - \overline{a}}\right| = \left|\frac{z - a}{\overline{z} - \overline{a}}\right| = 1$$

Если $\omega \in D_1(0)$, то

$$\omega = e^{i\alpha}\frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \iff z = \frac{\omega e^{-i\alpha} + a}{1 + \overline{a} \cdot e^{-i\alpha}\omega} = e^{i\alpha}\frac{\omega + e^{i\alpha}a}{1 + e^{i\alpha}a\omega}$$

$$|z|^2 = |e^{i\alpha}|^2 \cdot \left|\frac{\omega + e^{i\alpha}a}{1 + \overline{e^{i\alpha}a}\omega}\right|^2 = \frac{|\omega|^2 + 2\Re(\overline{e^{i\alpha}}a \cdot \omega) + |e^{i\alpha}a|^2}{1 + 2\Re(\overline{e^{i\alpha}}a\omega) + |\overline{e^{i\alpha}}a\omega|^2} = \frac{|\omega|^2 + 2\Re(\overline{e^{i\alpha}a}\omega) + |a|^2}{1 + 2\Re(\overline{e^{i\alpha}}a\omega) + |a|^2|\omega|^2} < 1,$$

т. к. $|\omega|^2 + |a|^2 < 1 + |a|^2|\omega|^2$.

Из последних трёх выражений следует утверждение теоремы. $\square$

1.3.2. Теорема Римана

Теорема 5. G — односвязная область, $\quad a \in G$

Тогда существует единственное конформное отображение $f : G \to \mathtt{D}_1(0)$ такое, что $f(a) = 0$ и $f'(a) > 0$.