Оглавление

Глава 1

Пространства

1.1. Несколько простых неравенств

1.1.1. Неравенство Минковского

Утверждение 1. $(T, \mathscr{U}, \mu)$, $\quad f, g$ измеримы, $\quad 1 \le p \le +\infty$

$$\left(\int\limits_T |f(x) + g(x)|^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int\limits_T |f|^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_T |g|^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.1}$$

Доказательство.

- $p = 1$

$$|f(x) + g(x)| \overset{\triangle}{\le} |f(x)| + |g(x)|$$

  Проинтегрируем:

$$\int\limits_T |f + g| \,\mathrm{d}\,\mu \le \int\limits_T |f| \,\mathrm{d}\,\mu + \int\limits_T |g| \,\mathrm{d}\,\mu$$

- $p > 1$

  Обозначим

$$A = \left(\int\limits_T |f|^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad B = \left(\int\limits_T |g|^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad C = \left(\int\limits_T |f + g|^p \,\mathrm{d}\,\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

  Рассмотрим отдельно тривиальные случаи:

  - Если $A = +\infty$ или $B = +\infty$ или $C = 0$, то (**??**).
  - $A < +\infty, \; B < +\infty$

    Докажем сначала, что $C < +\infty$. Возьмём $a, b \in \mathbb{R}$. Понятно, что $|a + b| \le 2 \max \{ \; |a|, |b| \; \}$.

$$|a + b|^p \le 2^p \max \{ \; |a|^p, |b|^p \; \} \le 2^p \big(|a|^p + |b|^p\big)$$

    Подставим $a = f(x), \; b = g(x)$ (для фиксированного x):

$$|f(x) + g(x)|^p \le 2^p \big(|f(x)|^p + |g(x)|^p\big)$$

    Проинтегрируем по T и μ:

$$C^p = \int\limits_T |f + g|^p \,\mathrm{d}\,\mu \le 2^p \Big(\int\limits_T |f|^p \,\mathrm{d}\,\mu + \int\limits_T |g|^p \,\mathrm{d}\,\mu\Big) = 2^p (A^p + B^p) < +\infty$$

Теперь докажем само неравенство:

$$C^p = \int\limits_T |f+g|^p \,\mathrm{d}\,\mu = \int\limits_T |f+g|\cdot|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\,\mu \le \underbrace{\int\limits_T |f|\cdot|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\,\mu}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_T |g|\cdot|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\,\mu}_{I_2}$$

$$I_1 = \int\limits_T |f|\cdot|f+g|^{p-1}\,\mathrm{d}\,\mu \underset{\le}{\text{нер-во Гёльдера}} \Big(\int\limits_T |f|^p\,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int\limits_T |f+g|^{(p-1)q}\,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \implies p+q=pq \implies pq-q=p$$

$$I_1 \le A\cdot C^{\frac{p}{q}}$$

Аналогично, $I_2 \le B\cdot C^{\frac{p}{q}}$.

$$C^p \le A\cdot C^{\frac{p}{q}} + B\cdot C^{\frac{p}{q}} = (A+B)C^{\frac{p}{q}}$$

$$p-\frac{p}{q} = p(1-\frac{1}{q}) = 1$$

Сократим на $C^{\frac{p}{q}}$:

$$C \le A+B$$

□

1.2. Пространства Лебега

Определение 1. $1 \le p \le +\infty$

$$\mathscr{L}^p(T,\mu) = \{\, f \mid |\, f|^p \in \mathscr{L}(T,\mu)\,\} = \left\{ f \text{ — измерима} \mid \int\limits_T \middle| f|^p\,\mathrm{d}\,\mu < +\infty \right\}$$

$$\|f\|_p = \Big(\int\limits_T |f|^p\,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Утверждение 2. $\|\cdot\|_p$ — полунорма на $\mathscr{L}^p(T,\mu)$.

Доказательство.

1. $\|f\|_p = \Big(\int\limits_T |f(x)|^p\,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \ge 0$;
2. $\lambda \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $\quad \|\lambda f\|_p = |\lambda|\cdot\|f\|_p$;
3. $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ — неравенство Минковского.

□

$$\|f\|_p = 0 \iff \int\limits_T |f(x)|^p\,\mathrm{d}\,\mu = 0 \iff f(x) = 0 \text{ п. в.}$$

Обозначим $N = \{\, f \text{ — изм.} \mid f(x) = 0 \text{ п. в.}\,\}$.

Определение 2.

$$\mathrm{L}^p = {\mathscr{L}^p}/{N}$$

То есть, $f \sim g$, если $f-g \in N$, то есть $f(x) = g(x)$ п. в..
В пространстве $\mathscr{L}^p$ будем рассматривать $\overline{f}$ — классы эквивалентности f.

$$\|\overline{f}\|_p = \|f\|_{\mathscr{L}^p}$$

Утверждение 3. $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^p}$ — норма.

Доказательство.

$$\|\overline{f}\| = 0 \iff \Big(\int\limits_T |f|^p \,\mathrm{d}\,\mu\Big)^{\frac{1}{p}} = 0 \iff f(x) = 0 \text{ п. в.} \implies f \in N$$

$\square$

Определение 3. $p = \infty$
$\mathscr{L}^\infty(T,\mu)$ — пространство *существенно ограниченных функций.*
f — измерима

$$f \in \mathscr{L}^\infty \iff \exists c > 0: \quad \mu\{\, x \in T \mid |\, f(x)| > c \,\} = 0$$

Определим *существенный супремум*:

$$\|f\|_\infty = \inf\{\, c > 0 \mid \mu\{\, x \mid |\, f(x)\,| > c \,\} = 0 \,\}$$

Обозначение. $\|f\|_\infty = \operatorname{vracsup} f = \operatorname{esssup} f$

Утверждение 4.

$$f \in \mathscr{L}^\infty(T,\mu) \implies |f(x) \le \|f(x)\|_\infty \text{ п. в.}$$

Доказательство.

$$\|f\|_\infty = \inf\{\, c \mid \mu\{\, x \mid |\, f(x)\,| > c \,\} = 0 \,\}$$

Возьмём $e_m = \left\{\, x \mid \big|\, f(x)\big| > \|f\|_\infty + \frac{1}{m} \,\right\} \implies \mu e_m = 0.$

$$e = \{\, x \mid |\, f(x)| > \|f\|_\infty \,\} = \bigcup e_m \implies \mu e = 0$$

$\square$

Утверждение 5. $\mathscr{L}^\infty(T,\mu), \quad \|\cdot\|_\infty$ — полунорма.

Доказательство.

1. $\lambda \ne 0 \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$)

$$\|f(x)\| > c \iff |\lambda f(x)| > |\lambda| \cdot c$$

2. Пусть $f, g \in \mathscr{L}^\infty(T,\mu), \quad x \in T.$

$$|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \underset{\text{п. в.}}{\le} \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$$\implies \|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

3. $\|f\|_\infty = 0 \implies |f(x)| \le 0$ п. в. $\implies f(x) = 0$ п. в.

$\square$

Определение 4. $\mathrm{L}^\infty(T,\mu) = {}^{\mathscr{L}^\infty(T,\mu)}\!/_{N}$, где $N = \{\, f$ — изм. $\mid f(x) = 0$ п. в. $\}$.

$$\overline{f} \in {}^{\mathscr{L}^\infty}\!/_{N}, \quad \|\overline{f}\|_\infty = \|f\|_\infty$$

$$\|\overline{f}\|_\infty = 0 \iff \|f\|_\infty = 0 \iff f(x) = 0 \text{ п. в.} \iff f \in N = \mathbb{O}_n$$

1.2.1. Пространства Лебега — банаховы

Маленькое воспоминание из анализа

Теорема 1 (Фату). $(T, \mathscr{U}, \mu)$, $g_n(x)$ измеримы, $g_n(x) \geq 0$, $g_n \to g(x)$ п. в. на T

$$\int\limits_T g_n(x) \,\mathrm{d}\,\mu \leq C$$

$$\implies \int\limits_T g(x) \,\mathrm{d}\,\mu \leq C$$

Теорема 2. $(T, ,\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$
$\mathrm{L}^p(T, \mu)$ — банаховы.

Доказательство.

- $p < +\infty$

  Воспользуемся критерием полноты. Возьмём $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in \mathrm{L}^p$ (т. е. берём классы, а из классов берём произвольных представителей) такие, что $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_p \leq C < +\infty$.

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

Докажем, что $\exists S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, т. е. $S(x) \in \mathrm{L}^p$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|S - S_n\|_p = 0$.

Рассмотрим для начала сумму модулей:

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|, \quad \sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$$

Проверим, что $\sigma(x)$ п. в. конечна.

$$\|\sigma_n\|_p \overset{\triangle}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \leq C$$

Применим теорему Фату:

$$\left.\begin{array}{l} \int\limits_T |\sigma_n(x)|^p \,\mathrm{d}\,\mu \leq C^p \\ |\sigma_n(x)|^p \to |\sigma(x)|^p \end{array}\right\} \implies \int\limits_T |\sigma(x)|^p \,\mathrm{d}\,\mu \leq C$$

$$\implies \sigma(x) < +\infty \text{ п. в.}$$

Значит, для п. в. x $\exists \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = S(x)$.
Воспользуемся критерием Коши для $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| \leq C$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall m > n > N \quad \sum_{k=n+1}^{\|} f_k\|_p < \varepsilon$$

$$\|S_m - S_n\|_p \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\|_p < \varepsilon$$

Снова воспользуемся теоремой Фату:

$$\left.\begin{array}{l} \int\limits_T |S_m(x) - S_n(x)|^p \,\mathrm{d}\,\mu < \varepsilon^p \\ |S_m(x) - S_n(x)|^p \xrightarrow[m\to\infty]{} |S(x) - S_m(x)|^p \text{ п. в.} \end{array}\right\} \implies \int\limits_T |S(x) - S_m(x)|^p \,\mathrm{d}\,\mu \leq \varepsilon^p$$

$$S - S_n \in \mathrm{L}^p, \quad S_n \in \mathrm{L}^p \implies S = (S - S_n) + S_n \implies S \in \mathrm{L}^p$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} \|S - S_n\|_p = 0 \implies \mathrm{L}^p \text{ — полное}$$

- $p = \infty$

  Рассмотрим $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная в $\mathrm{L}^{\infty}(T, \mu)$

$$|f_n(x)| \le \|f_n\|_\infty \text{ при } x \in T \setminus E_n, \quad \mu E_n = 0$$

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad T_1 = T \setminus E \implies f_n \in m(T_1)$$

  $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $m(T_1)$, а оно банахово.

$$\implies \exists f \in m(T_1): \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

  Положим $f\big|_E = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{\mathrm{L}^\infty(T)} = 0$$

□

1.2.2. Похожие пространства последовательностей

Определение 5. $n \in \mathbb{N}$ фиксировано, $\quad 1 \le p < +\infty$

$$l_n^p = \left(\mathbb{R}^n \text{ (или } \mathbb{C}^n), \|x\|_p = \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\right)$$

Возьмём $T = \{ 1, 2, \dots, n \}$. Функции на T будут элементами $\mathbb{R}^n$.

$$\mu(j) = 1, \quad 1 \le j \le n$$

$$l_n^p = \mathrm{L}^p(T, \mu) \text{ — банахово}$$

Утверждение 6. $\left\{ x^{(m)} \right\}_{m=1}^{\infty}, \quad x^{(m)} \in l_n^p, \quad x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}\right), \quad 1 \le p \le +\infty$

$$\lim_{m\to\infty} \|x - x^{(m)}\|_p = 0 \iff \lim_{m\to\infty} x_j^{(m)} = x_j, \quad 1 \le j \le n$$

Доказательство.

- $\implies$

$$\Big(\sum |x_j - x_j^{(m)}|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \to 0 \ge |x_j - x_j^{(m)}| \text{ при фиксированном } j$$

$$\implies \lim_{m\to\infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0$$

  При $p = \infty$:

$$\max_{1 \le j \le m} |x_j - x_j^{(m)}| \ge |x_j - x_j^{(m)}| \text{ при фиксированном } j$$

- $\impliedby$

$$\lim_{m\to\infty} |x_j - x_j^{(m)}| = 0 \implies \Big(\sum_{j=1}^{n} |x_j - x_j^{(m)}|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

  Для бесконечных так же берём max.

□