

# Оглавление

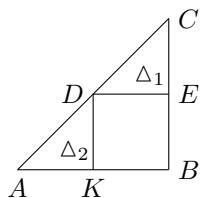
<b>1</b>	<b>ТФКП</b>	<b>2</b>
1.1	Серия полезных результатов . . . . .	2
1.1.1	Теорема Коши для прямоугольного треугольника . . . . .	2
1.1.2	Теорема Коши для треугольника . . . . .	3
1.1.3	Теорема Коши для конечносвязной многоугольной области . . . . .	4

# Глава 1

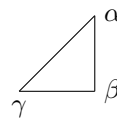
## ТФКП

### 1.1. Серия полезных результатов

#### 1.1.1. Теорема Коши для прямоугольного треугольника



(a) Прямоугольный треугольник



(b)

**Теорема 1.** Рассматриваем треугольник  $ABC$  (рис. 1.1a).

$$f \in \mathcal{A}(G), \quad A = a + pi, \quad B = b + pi, \quad c = b + qi, \quad a < b, \quad p < q, \quad \Delta ABC \subset G$$

$$I := \int_{\partial \Delta ABC} f(z) dz = 0$$

**Доказательство.** Рассмотрим точки:

$$D = \frac{a+b}{2} + i\frac{p+q}{2}, \quad K = \frac{a+b}{2} + pi, \quad E = b + i\frac{p+q}{2}$$

$$\int_{\partial \Delta ABC} f(z) dz = \int_{\partial \square} f(z) dz + \int_{\partial \Delta_1} f(z) dz + \int_{\partial \Delta_2} f(z) dz$$

$$\int_{\overrightarrow{ED}} f(z) dz + \int_{\overrightarrow{DE}} f(z) dz = 0, \quad \int_{\overrightarrow{DK}} f(z) dz + \int_{\overrightarrow{KD}} f(z) dz = 0$$

К каждому из треугольников можно применить такое же рассуждение, а к прямоугольникам — теореме Коши для прямоугольника. Получаем

$$I = \sum_{k=1}^{2^n} I_{n_k} \tag{1.1}$$

$$I_{n_k} = \int_{\partial \Delta_{n_k}} f(z) dz \tag{1.2}$$

Рассмотрим какой-то из шагов (треугольник обозначим  $\alpha\beta\gamma$ , рис. 1.1b):

$$\int_{\partial\Delta\alpha\beta\gamma} f(z) dz = \int_{\partial\Delta\alpha\beta\gamma} f(z) - f(\alpha) dz + f(\alpha) \int_{\partial\Delta\alpha\beta\gamma} 1 dz$$

Второй интеграл равен 0 (по св-ву 5 криволинейных интегралов). Значит, это равно

$$\int_{\partial\Delta\alpha\beta\gamma} f(z) - f(\alpha) dz \quad (1.3)$$

По св-ву 7 криволинейных интегралов, это означает, что

$$\left| \int_{\partial\Delta\alpha\beta\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\partial\Delta\alpha\beta\gamma} |f(z) - f(\alpha)| |dz| \quad (1.4)$$

Применим теорему Кантора:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall \alpha \in [A, C], \quad z \in \partial \Delta \alpha \beta \gamma \quad |f(z) - f(\alpha)| < \varepsilon \quad (1.5)$$

Выберем  $n$  так, что

$$z^{-n} \cdot |C - A| < \delta$$

Тогда

$$(1.4), (1.5) \implies \int_{\partial\Delta\alpha\beta\gamma} |f(z) - f(\alpha)| |dz| < \varepsilon \int_{\partial\Delta\alpha\beta\gamma} |dz| \underset{\text{из геом. сообр.}}{<} 3\varepsilon |\gamma - \alpha| = 3\varepsilon \cdot |C - A| \cdot 2^{-n} \quad (1.6)$$

$$\stackrel{(1.4)}{\implies} \forall k \quad |I_{n_k}| < 3\varepsilon |C - A| \cdot 2^{-n} \quad (1.7)$$

$$\stackrel{(1.1)}{\implies} |I| \leq \sum_{k=1}^{2^n} |I_{n_k}| < 3\varepsilon |C - A| \cdot 2^{-n} \cdot 2^n = 3\varepsilon |C - A| \quad (1.8)$$

$$\implies |I| = 0$$

□

Если треугольник перевернуть относительно оси ординат, результат не изменится.

**Замечание.** Аналитичность  $f$  использовалась для прямоугольника.

### 1.1.2. Теорема Коши для треугольника

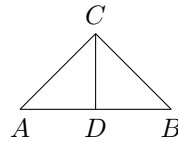


Рис. 1.2

**Теорема 2.** Рассматриваем треугольник  $ABC$  (рис. 1.2)

$$A = a + pi, \quad B = b + pi, \quad C = d + qi, \quad a < d < l, \quad q > p$$

$$\underbrace{\int_{\partial\Delta ADC}}_0 + \underbrace{\int_{\partial\Delta DBC}}_0 = \int_{\partial\Delta ABC}$$

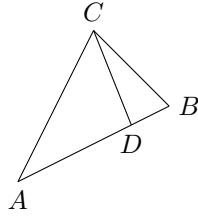


Рис. 1.3

**Теорема 3.** Рассматриваем треугольник  $ABC$  (рис. 1.3). Считаем, что наибольшая сторона — это  $AB$ . Возьмём  $\theta$  так, что  $e^{i\theta} \cdot \triangle ABC$  повернут “правильно”.

$$f_\theta(z) := f(e^{-i\theta}z), \quad f_\theta \in A(G_\theta)$$

Получаем треугольник  $A_1B_1C_1$  из предыдущей теоремы.

Далее пользуемся свойством 8 криволинейных интегралов.

### 1.1.3. Теорема Коши для конечносвязной многоугольной области

**Определение 1.** Многоугольником будем называть замкнутую кривую  $\Gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , устроенную следующим образом:

$$\begin{aligned} n \geq 2, \quad a = c_0 < c_1 < \dots < c_n < c_{n+1} = b \\ \forall t \in [c_k, c_{k+1}] \quad \Gamma(t) = \Gamma(c_k) \cdot \frac{c_{k+1} - t}{c_{k+1} - c_k} + \Gamma(c_{k+1}) \cdot \frac{t - c_k}{c_{k+1} - c_k} \end{aligned}$$

Точки  $\Gamma(c_k)$  будем называть вершинами многоугольника.

**Определение 2.** Многоугольной областью будем называть область, граница которой является многоугольником.

**Определение 3.** Конечносвязной многоугольной областью будем называть область, граница которой состоит из конечного объединения многоугольников.

**Теорема 4.** Имеется некая конечносвязная многоугольная область  $D$ , ограниченная многоугольниками  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ .

$$\partial D = \bigcup_{\nu=1}^k \Gamma_\nu$$

Пусть есть область  $G$  такая, что  $G \supset \overline{D}$  и функция  $f \in \mathcal{A}(G)$ . Рассмотрим

$$\mathring{\partial} D = \bigcup_{\nu=1}^k \mathring{\Gamma}_\nu,$$

при этом, каждая кривая  $\Gamma_\nu$  положительно ориентированна относительно области  $D$ .

$$\implies \int_{\mathring{\partial} D} f(z) \, dz = 0$$

**Доказательство.** Применим теорему о триангуляции конечносвязной многоугольной области:

$$\exists \{ \Delta_k \}_{k=1}^N, \quad \Delta_k \text{ — откр.:} \quad \begin{cases} \Delta_k \cap \Delta_l = \emptyset, & k \neq l \\ \overline{\Delta_k} \cap \overline{\Delta_l} = \begin{cases} \emptyset \\ \text{общая вершина} \\ \text{общая сторона} \end{cases} \\ \bigcup_{k=1}^N \overline{\Delta_k} = \overline{D} \end{cases}$$

Рассмотрим

$$\sum_{k=1}^N \int_{\partial \Delta_k} f(z) \, dz$$

Каждый из них представим в виде суммы интегралов по трём сторонам. В результате:

1. каждый внутренний отрезок мы пройдем дважды в разных направлениях;
2. все “внутренние” границы (многоугольники) проходятся полностью в отрицательном (относительно самого многоугольника) направлении;
3. остаётся только “внешняя” граница.

$$\sum = 0$$

□