ФОРМАЛЬНЫЕ ТЕОРИИ

Для того, чтобы задать формальную теорию (ФТ) достаточно задать
– множество констант D;
– множество функциональных символов F;
– множество предикатных символов P;
– множество аксиом, определяющих «смысл» констант, функциональных символов и предикатных символов.

При этом говорят, что рассматривается формальная теория в сигнатуре

$$\langle D;\ F;\ P\rangle.$$

В некоторых случаях константы определяют как 0-местные функциональные символы. Но в сигнатуру вводят *носитель теории*, т.е. множество констант, которые можно в соответствии с аксиомами и правилами вывода выразить через 0-местные функциональные символы.

Кроме того, для определения ФТ требуется выбрать исчисление, в котором будут доказываться формулы ФТ. Следовательно, в определение ФТ входят аксиомы соответствующего исчисления.

Определения полноты и непротиворечивости ФТ такие же как для исчисления.

Особое место среди различных ФТ занимают

ФОРМАЛЬНЫЕ ТЕОРИИ С РАВЕНСТВОМ

.

Определение. *ФТ называется ФТ с равенством, если множество предикатных символов P содержит выделенный 2-местный предикат $=$ и выводимы следующие формулы*
$\forall x(x = x)$,
$\forall x\ y(x = y \to (A(x) \leftrightarrow A(y)))$ *для любой формулы $A(x)$ этой теории.*

Это определение равносильно тому, что ФТ с равенством содержит следующие **аксиомы для равенства**:
ER: $\forall x(x = x)$ – рефлексивность равенства,
ES: $\forall x\ y(x = y \to y = x)$ – симметричность равенства,
ET: $\forall x\ y\ z(x = y\ \&\ y = z \to x = z)$ – транзитивность равенства
и **аксиомы согласования с равенством**:
$\forall x\ y(x = y \to (p(\overline{u}, x, \overline{v}) \leftrightarrow p(\overline{u}, y, \overline{v})))$ для любого предикатного символа из сигнатуры,

$\forall x\ y(x = y \to (f(\overline{u}, x, \overline{v}) = f(\overline{u}, y, \overline{v})))$ для любого функционального символа из сигнатуры.

Таким образом, всякая ФТ с равенством содержит 3 множества аксиом: аксиомы соответствующего исчисления, аксиомы для равенства и собственные аксиомы.

ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Парадокс Рассела в наивной теории множеств

После того, как Георг Кантор в 1872 – 84 г.г. создал теорию множеств (далее – наивная теория множеств) возникло мнение «Кантор создал для нас теоретико-множественный рай и теперь никакие силы не смогут нас оттуда вывести».

В наивной теории множеств само понятие *множество* является неопределяемым понятием, которое может быть задано в виде $\{x : \varphi(x)\}$ – «множество объектов, удовлетворяющих формуле $\varphi(x)$ некоторого формализованного языка».[1]

Если некоторое множество M задано в виде $M = \{x : \varphi(x)\}$, то принадлежность объекта этому множеству определяется эквивалентностью

$$\forall x(x \in M \leftrightarrow \varphi(x)). \tag{$*$}$$

В 1903 году Бертран Рассел рассмотрел множество

$$A = \{x : \neg(x \in x)\}$$

и поставил вопрос, о том $A \in A$ или $A \notin A$. Было доказано, что ни то, ни другое не верно, т.е. A не является своим элементом и не может не быть таковым. Именно по этой причине ответ на этот вопрос получил название *парадокс* Рассела.

Посмотрим на это множество с другой стороны. В соответствии с (*) имеем

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow \neg(x \in x)).$$

В частности, при $x = A$ получаем

$$A \in A \leftrightarrow \neg(A \in A).$$

Последняя формула заведомо ложна. Следовательно, в наивной теории множеств доказуема ложная формула. Но, как известно, из лжи следует

[1] Именно отсюда идёт студенческая привычка ставить двоеточие после квантора существования. Сравните: «множество x, таких что ...» и «существует x, такое что ...».

что угодно и для всякой формулы P можно доказать и P, и $\neg P$. Таким образом, наивная теория множеств противоречиво.

Конечно, парадоксы – это интересно и увлекательно, но противоречивые теории никуда не годятся.

Начиная с 1908 года стали появляться аксиоматические теории множеств, в которых парадокс Рассела отсутствует. Рассмотрим две из них: *Теорию типов Рассела* и *Аксиоматическую теорию множеств Цермело-Френкеля*, наиболее распространённую в настоящее время.

ТЕОРИЯ ТИПОВ РАССЕЛА

Основные положения теории.

Рассматриваются множества различных типов:

1-й тип – индивиды, т.е. множества, не имеющие элементов, обозначаются $x_1, y_1, \ldots\ldots$

2-й тип – классы индивидов, т.е. множества, элементами которых являются индивиды, обозначаются $x_2, y_2, \ldots\ldots$

$\vdots$

$(i+1)$-й тип – классы объектов типа i, обозначаются $x_{i+1}, y_{i+1}, \ldots\ldots$

$\vdots$

При таких ограничениях невозможен парадокс Рассела, т.к. нельзя написать $x \in x$, а только $x_i \in x_{i+1}$ $(i \geq 1)$.

Для дальнейшего изложения нам потребуются понятия упорядоченной пары и отношения между объектами. Очень часто опорядоченную пару (a, b) определяют как $\{a, \{a, b\}\}$. В теории типов это невозможно, т.к. все элементы множества должны иметь один и тот же тип, но первый элемент этого множества a должен иметь тип на 1 больший, чем элементы множества $\{a, b\}$.

Упорядоченная пара двух множеств i-го типа – это множество $i+2$-го типа: $(x_i, y_i) = \{\{x_i\}, \{x_i, y_i\}\}$.

Бинарное отношение – это множество упорядоченных пар, а следовательно, оно бинарное отношение между множествами i-го типа – это множество $i+3$-го типа, в частности, бинарное отношение между индивидами – это множество 4-го типа.

Далее вместо $(x_i, y_i) \in R_{i+3}$ будем писать (как это обычно принято в математике) $R_{i+3}(x_i, y_i)$.

Формальное определение теории типов.

Теория типов $\mathbf{T}$ – это формальная теория в сигнатуре $\langle ; ; \in, = \rangle$. То есть в сигнатуре нет констант, нет функций, но имеется два двуместных предиката $\in$ и $=$.

Так как в сигнатуре имеется предикат равенства, то в $\mathbf{T}$ обязательно присутствуют аксиомы для равенства ER, ES, ET и аксиомы согласования с равенством для предиката $\in$.[2]

Собственные аксиомы теории типов.

T1. Аксиома объёмности.[3]

Два множества равны, если они равны поэлементно.

$$\forall y_{i+1} z_{i+1} (\forall x_i (x_i \in y_{i+1} \leftrightarrow x_i \in z_{i+1}) \to y_{i+1} = z_{i+1}).$$

T2. Схема аксиом выделения.

Для всякой формулы в терминах $\mathbf{T}$ со свободной переменой i-го типа существует множество $i+1$-го типа, все элементы которого и только они удовлетворяют этой формуле.

Т.е., если $F(x_i)$ – формула в терминах $\mathbf{T}$ со свободной переменой x_i, то

$$\exists y_{i+1} \forall x_i (x_i \in y_{i+1} \leftrightarrow F(x_i)).$$

Благодаря этой аксиоме имется возможность писать $\{x_i : F(x_i)\}$ и это множество $i+1$-го типа.

T3. Аксиома бесконечности.

В $\mathbf{T}$ имеется бесконечное множество индивидов.

$$\begin{aligned} \exists w_4 (\quad & \forall x_1 \neg w_4(x_1, x_1) \ \& \\ & \forall x_1 \exists y_1 w_4(x_1, y_1) \ \& \\ & \forall x_1 \forall y_1 \forall z_1 (w_4(x_1, y_1) \ \& \ w_4(y_1, z_1) \to w_4(x_1, z_1) \\ &). \end{aligned}$$

Казалось бы, при чём здесь эта формула и бесконечность множества индивидов? Но это как раз пример формулы, которая ложна в любой конечной интерпретации и выполнима в бесконечных. Здесь в качестве w_4 можно взять строгое отношение порядка, в котором у каждого элемента имеется последующий.

К недостаткам теории типов часто относят наличие «порочного круга». Так, например, при определении множества

$$y_2 = \{x_1 : \exists z_2 (x_1 \in z_2 \ \& \ z_2 \in w_3)\},$$

[2] Здесь я их не выписываю, но на экзамене обязательно нужно уметь их написать по аналогии с аксиомами согласования с равенством для $+$ в FA.

[3] Обычно аксиому, определяющую равенство множеств именно так и называют, чтобы не путать с аксиомами для предиката равенста.

где w_3 – ранее определённое множество, появляется связанная переменная z_2.

Такие множества называются непредикативными. Существенная часть высшей математики не может быть изложена в рамках теории типов, если не допускать непредикативные множества.

Однако мне кажется, что именно непредикативные множества продвигают математику (и науку вообще). Приходится вводить всё новые индивиды и множества ме́ньших типов, чтобы определять вроде бы очевидные объекты. Так мнимые числа появились для того, чтобы определить корни из отрицательных чисел.

АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ ЦЕРМЕЛО-ФРЕНКЕЛЯ

Основные положения теории.

Объект вида $\{x : \varphi(x)\}$ не обязательно является множеством. Это может быть классом. Классы в аксиоматической теории множеств Цермело-Френкеля не рассматриваются. Каждое множество M является классом $\{x : x \in M)\}$. Множества строятся в соответствии с аксиоматикой.

В соответствии с аксиомой 5 (см. далее) для того, чтобы класс $\{x : \varphi(x)\}$ был множеством достаточно, чтобы можно было предъявить такое множество M, что каждый элемент $\{x : \varphi(x)\}$ является элементом M. То есть $\{x : \varphi(x)\} \subset M$.

Отсутствие парадокса Рассела.

Предположим, что класс $A = \{x : \neg(x \in x)\}$ является множеством M, т.е.

$$\forall x(x \in M \leftrightarrow \neg(x \in x)).$$

В частности, при $x = M$ получаем

$$M \in M \leftrightarrow \neg(M \in M).$$

Последняя формула заведомо ложна. Следовательно, наше предположение о том, что класс $A = \{x : \neg(x \in x)\}$ является множеством M, неверно.

Замечание. Казалось бы, что приведённые рассуждения такие же, как при доказательстве противоречивости наивной теории множеств. Но здесь приведено стандартное доказательство от противного.

Формальное определение аксиоматической теории множеств Цермело-Френкеля.

Аксиоматическая теория множеств Цермело-Френкеля **ZF** – это формальная теория в сигнатуре $\langle ; ; \in, = \rangle$. То есть в сигнатуре нет констант, нет функций, но имеется два двуместных предиката $\in$ и $=$.

Так как в сигнатуре имеется предикат равенства, то в **T** обязательно присутствуют аксиомы для равенства ER, ES, ET и аксиомы согласования с равенством для предиката $\in$.[4]

Собственные аксиомы аксиоматической теории множеств Цермело-Френкеля.

ZF 1. Аксиома объёмности.

Два множества равны, если они равны поэлементно.

$$\forall xy(\forall u(u \in x \leftrightarrow u \in y) \rightarrow x = y).$$

ZF 2. Аксиома пары.

Двуэхлементное множество является множеством.

$$\forall xy\exists w\forall z(z \in w \leftrightarrow (z = x \vee z = y)).$$

$$\forall xyz(z \in \{x, y\} \leftrightarrow (z = x \vee z = y)).^5$$

ZF 3. Аксиома суммы (объединения).

Для всякого множества множеств объединение всех входящих в него множеств является множеством.

$$\forall x\exists w\forall y(y \in w \leftrightarrow \exists z(z \in x \ \& \ y \in z)).$$

$$\forall xy(y \in \cup_{z\in x} \leftrightarrow \exists z(z \in x \ \& \ y \in z)).$$

ZF 4. Аксиома множества всех подмножеств.

$$\forall x\exists w\forall y(y \in w \leftrightarrow \forall z(z \in y \rightarrow z \in x)).$$

$$\forall xy(y \in P(x) \leftrightarrow y \subseteq x).$$

[4]Здесь я их не выписываю, но на экзамене обязательно нужно уметь их написать по аналогии с аксиомами согласования с равенством для + в FA.

[5]В следующих аксиомах вторая формула формула фактически повторяет предыдущую, но вместо переменной w, существование которой утверждается в первой из них, используется функтор (в этом случае {x,y}, т.е. то обозначение для двухэлементного множества, которое принято применять в математике).

Замечание. Аксиомы ZF 2 – ZF 4 утверждают, что стандартные теоретико-множественные операции, которые расширяют исходные множества, дают в результате их применения множества. Следующая аксиома не позволяет расширять исходные множества сколь угодно произвольно.

ZF 5. Схема аксиом выделения. Для всякой формулы φ с одной свободной переменной v

$$\forall x \exists w \forall y (y \in w \leftrightarrow y \in x \ \& \ [\varphi]^v_y).$$

$$\forall x \forall y (y \in \{v \in x : \varphi(v)\} \leftrightarrow y \in x \ \& \ \varphi(y)).$$

Некоторые следствия из аксиом ZF 1 – ZF 5.

1. Пустое множество является множеством.

$\emptyset = \{v \in x : v \neq v\}$ по ZF 5.

2. Одноэлементное множество является множеством. $\{x\} = \{x, x\}$ по ZF 2 и ZF 1.

3. Упорядоченная пара множеств является множеством.

$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ по следствию 2 и ZF 2.

4. Результаты теоретико-множественных операций с множествами являются множествами.

- $A \cup B$ – по ZF 3, если в ней в качестве x взять $\{A, B\}$, являющееся множеством по по ZF 2.
- $A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$ – по ZF 5.
- $A \setminus B$ придумайте запись сами.
- $A \bigtriangleup B$ придумайте запись сами.
- $A \times B$

  Действительно, $A \times B = \{(u, v) : u \in A \ \& \ v \in B\}$, более точно, $\{w : \exists uv (w = \{\{\{u\}, \{u, v\}\}\} \ \& \ u \in A \ \& \ v \in B)\}$. Это класс, пока мы не найдём такое множество C, что $A \times B = \{w \in C : \exists uv (w = \{\{\{u\}, \{u, v\}\}\} \ \& \ u \in A \ \& \ v \in B)\}$.

$$\begin{array}{cc} u \in A & v \in B \\ u \in A \cup B & v \in A \cup B \\ \{u\} \in P(A \cup B) & \{u, v\} \in P(A \cup B) \\ \multicolumn{2}{c}{\{\{u\}, \{u, v\}\} \in P(P(A \cup B))} \end{array}$$

Следовательно, $A \times B = \{w \in P(P(A \cup B)) : \exists uv(w = \{\{\{u\}, \{u, v\}\}\} \ \& \ u \in A \ \& \ v \in B)\}$ – множество по ZF 5.

Поскольку прямое произведение множеств является множеством, то стандартным образом в **ZF** можно определить понятия отношения, функции, области определения функции, множества значений функции и т.п.

Продолжение собственных аксиом аксиоматической теории множеств Цермело-Френкеля.

ZF 6. Аксиома бесконечности.

Существуют бесконечные множества.

$$\exists y(\emptyset \in y \ \& \ \forall x(x \in y \to \{x\} \in y)).$$

Из этой аксиомы следует, в частности, что в **ZF** имеются натуральные числа и множество натуральных чисел $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots, \{\ldots\{\emptyset\}\ldots\}, \ldots\}$.

ZF 7. Аксиома ограничения (фундирования).

У всякого непустого множества имеется элемент, не пересекающийся с ним.

$$\forall y(\neg(y = \emptyset) \to \exists x(x \in y \ \& \ x \cap y = \emptyset)).$$

Основным следствием ZF 7 является следующее: «Не существует функции f, определённой для каждого натурального числа и такой, что $f(i+1) \in f(i)$».[6]

ZF 8. Аксиома подстановки.

Образ множества является множеством (даже если функция F – класс, но не множество).

$$\forall x \exists y \forall z(\exists u(u \in x \ \& \ (u, z) \in F) \leftrightarrow z \in y)$$

ZF 9. Аксиома выбора.

Для любого множества S непустых множеств существует функция f, определённая на всех элементах множества S, что

$$\forall S \exists f \forall x(x \in S \to f(x) \in x).$$

Это самая «одиозная» аксиома в **ZF**. Примером тому является теорема, придуманная школьниками-кружковцами-математиками.

Теорема. *Милиция (уголовный розыск) не нужна.*

[6]Докажите, что $x \notin x$ – тождественно истинная формула.

Она легко доказывается с помощью аксиомы выбора, если каждое преступление рассматривать как множество преступников, совершивших его и ещё не задержанных.

Ординалы (порядковые числа).

Было показано, что из аксиомы бесконечности следует существование множества, которое можно считать множеством натуральных чисел. Однако во многих случаях этого множества недостаточно. Так, например, в нестандартном расширении FA у на появилось бесконечно большое число ω, для которого нет натурального числа, непосредственно предшествующего ему (но есть числа $\omega - 1$, $\omega - 2$, $\omega - 3$, ...). В связи с этим аксиома индукции была заменена на аксиому трансфинитной индукции. В некоторых математических доказательствах требуются такие «перескоки» через бесконечное множество чисел неоднократно. В сязи с этим было введено понятие ординалов (от слова *order* – порядок).

Определение. *Ординалом называется множество, вполне упорядоченное*[7] *отношением включения $\subset$, каждый элемент которого является его подмножеством.*

Конечные ординалы.

Пустое множество $\emptyset$ является нулевым ординалом. Действительно, т.к. $\emptyset$ не имеет ни подмножеств, ни элементов, то для его подмножеств и элементов выполняются любое свойство.

Первый ординал $\{\emptyset\}$. У него есть единственный элемент $\emptyset$, который является его подмножеством. И множество из одного элемента вполне упорядочено.

Второй ординал $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. У него есть 2 элемента $\emptyset$ и $\{\emptyset\}$, причём каждый его элемент является его подмножеством. И это множество вполне упорядочено, т.к. каждое из его четырёх подмножеств $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ имеет наименьший по включению элемент.

$$\vdots$$

Пусть $\{X\}$ – n-ый ординал. $n+1$*-ый ординал* $\{X, \{X\}\}$. Можно проверить, что это множество также является ординалом.

$$\vdots$$

[7]Напоминаю, что множество называется вполне упорядоченным, если каждое его подмножестово имеет наименьший элемент.

Бесконечные ординалы.

По аксиоме бесконечности

$$\omega = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{0}, \underbrace{\{\emptyset\}}_{1}, \underbrace{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}}_{2}, \ldots, \underbrace{\{X\}}_{n}, \underbrace{\{X, \{X\}\}}_{n+1}, \ldots\ldots \right\}.^{8}$$

является множеством. Это первый бесконечный ординал и он счётен.

Далее последовательность бесконечных ординалов строится следующим образом.

$$2\omega = \left\{ \underbrace{\omega}_{\omega}, \underbrace{\omega \cup \{\omega\}}_{\omega+1}, \underbrace{\omega \cup \{\omega, \{\omega\}\}}_{\omega+2}, \ldots, \underbrace{\omega \cup \{X\}}_{\omega+n}, \underbrace{\omega \cup \{X, \{X\}\}}_{\omega+n+1}, \ldots \right\}.$$

$$3\omega = \left\{ \underbrace{2\omega}_{2\omega}, \underbrace{2\omega \cup \{\omega\}}_{2\omega+1}, \underbrace{2\omega \cup \{\omega, \{\omega\}\}}_{2\omega+2}, \ldots, \underbrace{2\omega \cup \{X\}}_{2\omega+n}, \underbrace{2\omega \cup \{X, \{X\}\}}_{2\omega+n+1}, \ldots\ldots \right\}.$$

$$\vdots$$

$$(k+1)\omega = \left\{ \underbrace{k\omega}_{k\omega}, \underbrace{k\omega \cup \{\omega\}}_{k\omega+1}, \underbrace{k\omega \cup \{\omega, \{\omega\}\}}_{k\omega+2}, \ldots, \underbrace{k\omega \cup \{X\}}_{k\omega+n}, \underbrace{k\omega \cup \{X, \{X\}\}}_{k\omega+n+1}, \ldots\ldots \right\}.$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\omega^2 = \cup_{k=1}^{\omega} k\omega.^{9}$$

Аналогичным образом строятся $\omega^2 + 1$, $\omega^2 + 2$, ... , $\omega^2 + n, \ldots\ldots, \omega^3$, $\omega^3 + 1, \ldots\ldots$, $\omega^4, \ldots\ldots, \omega^k, \ldots\ldots, \omega^\omega = \varepsilon_0$.

Ординал ε_0 – первый несчётный ординал. К нему таким же образом можно прибавлять по единице, строить $2\varepsilon_0$ и т.д.

[9]Попробуйте доказать, что если $\{A\}$ и $\{B\}$ – ординалы, то $\{A\} \cup \{B\} = \{A, B\}$.

ФОРМАЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА или АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Формальная арифметика (FA) это ФТ в сигнатуре [10]

$$\langle 0;\ S, +, \cdot, \wedge; =\rangle.$$

Так как в сигнатуре присутствует знак $=$, то это ФТ с равенством и для каждого функционального символа требуются аксиомы согласования с равенством. Так, например, для одноместного функционального символа S она имеет вид

$\forall x\ y(x = y \to (S(x) = S(y)))$.

Для двуместного функционального символа $+$ можно написать две аксиомы

$\forall x\ y\ z(x = y \to (x + z = y + z))$ и

$\forall x\ y\ z(x = y \to (z + x = z + y))$

или одну аксиому

$\forall x\ y\ u\ v(x = y\ \&\ u = v \to (x + u = y + v))$.

Собственные аксиомы FA имеют вид:

A1. $\forall x \neg(S(x) = 0)$

A2. $\forall xy(S(x) = S(y) \to x = y)$

A3. $\forall x(x + 0 = x)$

$\forall xy(x + S(y) = S(x + y))$

A4. $\forall x(x \cdot 0 = 0)$

$\forall xy(x \cdot S(y) = x \cdot y + x)$

A5. $\forall x(x^0 = S(0))$

$\forall xy(x^{S(y)} = x^y \cdot x)$

A6. *Аксиома индукции.* Для любой формулы $A(x)$ FA

$A(0)\ \&$

$\forall x(A(x) \to A(S(x))) \to$

$\forall x\ A(x)$

ПОЛНОТА И НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ ФОРМАЛЬНОЙ АРИФМЕТИКИ

Для всякой формальной теории естественно доказать её полноту и непротиворечивость. Причём очень хочется, чтобы доказательства были

[10] Здесь $\wedge$ – функция возведения в степень. В дальнейшем вместо неё будет использоваться привычная запись x^y.

проведены средствами этой теории. Следовательно, для аксиоматической теории чисел необходимо уметь кодировать её формулы натуральными числами.

Всякая формула любой формальной теории – это слово в заданном алфавите. Поэтому встала потребность нумеровать слова в алфавите.

Пусть задан алфавит формальной теории $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$.

Номером буквы a_i является цифра i $(p+1)$-ичной системы счисления. $\#a_i = i$.

Номером слова $a_{i_1} \ldots a_{i_n}$ является число $(\overline{i_1 \ldots i_n})_{p+1}$, записанное в $(p+1)$-ичной системе счисления.[11]

Например, пусть имеется алфавит $\{x, 0, S, +, \cdot, =, (,), \forall, \neg, \ \& \ \}$ из 11 букв, занумерованных в том порядке, в котором они выписаны здесь, причём цифры с номерами 10 и 11 обозначим посредством A и B. Тогда номером формулы, задающей аксиому A1 будет

$$\#(\forall x \neg (S(x) = 0)) = 91A73718628_{11}.$$

Поскольку вывод – это последовательность формул,[12] то вывод – это тоже слово в том же алфавите и имеет номер.

Гёдель ввёл в рассмотрение предикат $\models (X, \#\varphi)$ «число X является номером вывода формулы φ», для которого явно выписал формулу на языке FA и доказал, что выводимость такой формулы равносильна её истинности.

Кроме того, Гёдель рассмотрел формулу

$$G(\#\varphi) \Leftrightarrow \forall X (\models (X, \#\varphi) \to \exists Y (Y < X \ \& \ \models (Y, \#\neg\varphi))).$$

Фактически эта формула задаёт следующее свойство формулы $\#\varphi$ «Если φ выводима, то её отрицание тоже выводимо, причём номер вывода отрицания меньше номера вывода самой формулы». Тогда формула $G(\#G)$ задаёт высказывание «Если Я выводима, то моё отрицание тоже выводимо, причём номер вывода отрицания меньше номера моего вывода». Таким образом в формуле $G(\#G)$ неявно присутствует *парадокс лжеца* «Я лгу».

Для этой формулы справедливо следующее утверждение.

Утверждение. *Если формальная арифметика непротиворечива, то φ выводима тогда и только тогда, когда $G(\#\varphi)$ ложна.*

---

[11] Здесь сознательно исключена цифра 0, которая могла бы быть номером первой буквы слова.

[12] Обратите внимание, что формулы можно никак не разделять, а писать их подряд без пробелов. Это обусловлено определением формулы формальной теории.

Действительно, пусть φ выводима. Тогда при некотором X_0 посылка импликации истинна. Но в силу непротиворечивости FA не может существовать вывод её отрицания с номером, меньшим X_0. То есть при $X = X_0$ мы имеем И $\to$ Л $=$ Л.

Пусть φ не выводима. Тогда при всех X посылка импликации ложна и вся формула истинна.

Отметим, что поскольку запись формулы, определяющей $G(\#\varphi)$, является словом в заданном алфавите, то у неё есть номер, который мы обозначим как $\#G$ (вместо правильного обозначения $\#G(\#\varphi)$).

ТЕОРЕМЫ ГЁДЕЛЯ О НЕПОЛНОТЕ АРИФМЕТИКИ

Обе следующие теоремы были доказаны Куртом Гёделем (Kurt Gödel) в 1930 году (опубликованы в 1931).

Для Первой теоремы Гёделя ниже будут приведены три равносильные формулировки.

Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики.

1. *Если формальная арифметика непротиворечива, то она не полна.*

2. *Если формальная арифметика непротиворечива, то в ней существует замкнутая формула, для которой не выводимы ни она сама, ни её отрицание.*

3. *Если формальная арифметика непротиворечива, то в ней не выводимы ни формула $G(\#G)$, ни её отрицание $\neg G(\#G)$.*

Первую формулировку обычно используют философы, так как при этом не требуется знать математику.

Во второй формулировке не указано, что это за формула.[13]

В третьей формулировке явно указана формула. Следует заметить, что в настоящее время имеется огромное количество формул, которые можно взять в качестве $G(\#G)$.

После опубликования Первой теоремы Гёделя (в электротехническом журнале, так как математические журналы отказывались её публиковать) в математической среде возникла дискуссия, стоит ли использовать FA, если не всё истинное можно в ней доказать. «Сошлись» на том, что формула типа $G(\#G)$ очень экзотическая и к реальной математике не имеет отношения.

Для формулировки Второй теоремы Гёделя потребуется следующая Лемма.

[13]Вопросы к экзамену: «Почему 1 и 2 формулировки равносильны?», «Зачем во 2-ой формулировке слово ЗАМКНУТАЯ?».

Лемма. *Формальная арифметика противоречива тогда и только тогда, когда в ней выводима формула $S(0) = 0$ (т.е. $1 = 0$).*

В одну сторону доказательство очевидно, так как в FA имеется аксиома $\forall x \neg(S(x) = 0)$ и, следовательно, $\neg(S(0) = 0)$ выводима.

В другую сторону это можно доказать, например, в секвенциальном исчислении предикатов с использованием правил добавления и сечения.[14]

Для Второй теоремы Гёделя ниже будут приведены две равносильные формулировки.

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики.

1. *Если средствами формальной арифметики можно доказать, что она непротиворечива, то она противоречива.*

2. *Если в формальной арифметике выводима формула*

$$\forall x \neg \models (x, \#(S(0) = 0)),$$

то в ней выводима формула $S(0) = 0$.

В 1936 году Герхард Генцен доказал непротиворечивость арифметики, используя примитивно рекурсивную арифметику с дополнительной аксиомой для трансфинитной индукции до ординала ε_0.[15]

НЕМНОГО О НЕСТАНДАРТНОМ АНАЛИЗЕ И О КОНСЕРВНАТИВНОМ РАСШИРЕНИИ ФРИФМЕТИКИ

Когда Лейбниц и Ньютон создавали математический анализ, они даже не думали о понятии предела и языке ε-δ. Они оперировали понятиями *бесконечно малого числа* и *бесконечно большого числа*. Для Лейбница это было не существенно, поскольку эти понятия позволяли решать прикладные задачи, но для Ньютона было важным отсутствие таких объектов среди созданных Всевышним. Позже Коши «навёл красоту» на идеи Лейбница и Ньютона, введя язык ε-δ.

В 1961 г. А. Робинсон привёл модель расширения множества вещественных чисел $^*\mathbf{R}$, в котором имеются бесконечно малые и бесконечно большие числа. Начал развиваться нестандартный анализ.[16]

Одним из основных положений нестандартного анализа является *принцип переноса Лейбница*, согласно которому «всякая замкнутая формула одновременно истинна в $\mathbf{R}$ и $^*\mathbf{R}$ или ложна в $\mathbf{R}$ и $^*\mathbf{R}$».

---

[14] Задачка для «отлично» на экзамене.

[15] Что такое трансфинитная индукция сказано в разделе Аксиоматическая теория чисел.

[16] Для интересующихся могу рекомендовать достаточно популярно (требующую знаний математики в пределах 1 – 2 курсов ВУЗа) книгу: В.А. Успенский. Что такое нестандартный анализ? 128 стр. М.: "Наука 1987. http://vilenin.narod.ru/Mm/Books/26/book.htm

Поскольку мы занимаемся аксиоматической теорий чисел FA, то можно построить её нестандартное расширение *FA, в котором присутствуют бесконечно большие натуральные числа. Для этого добавим в её сигнатуру константу ω, заменим аксиому индукции 6 на *6 и введём схему аксиом *7, декларирующую, что ω больше любого натурального числа.

*6. Для всякой формулы $A(x)$ с одной свободной переменной x

$$A(0) \mathbin{\&} \forall x(\forall y(y < x \mathbin{\&} A(y)) \to A(x)) \to \forall x A(x).$$ [17]

*7. $\omega > 0$

$$\begin{aligned} &\omega > S(0) \\ &\quad \vdots \\ &\omega > \underbrace{S(\cdots S(}_{n} 0) \cdots) \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

Для нестандартного расширения *FA можно доказать аналог принципа Лейбница, который означает консервативность такого расширения.

Теорема. *Всякая замкнутая формула аксиоматической теории чисел одновременно выводима в FA и в *FA.*

Доказательство. Пусть замкнутая формула выводима в FA. Это означает, что в построенном выводе нет константы ω, не используется аксиома *7 и может использоваться аксиома 6, котрая следует из *6. Следовательно, имеется вывод и в *FA.

Пусть замкнутая формула аксиоматической теории чисел выводима в *FA. В выводе может присутствовать константа ω. Найдём самое большое натуральное число n (терм вида $\underbrace{S(\cdots S(}_{n} 0) \cdots)$), присутствующее в выводе. Все вхождения ω в выводе заменим на константу $n+1$ (терм вида $\underbrace{S(\cdots S(}_{n+1} 0) \cdots)$).

Если в выводе присутствует аксиома *7 вида $k < \omega$, то она заменится на выводимую формулу $k < n+1$. Использование аксиомы трансфинитной индукции *6 заменим на использование аксиомы индукции 6.

[17] Это формула, определяющая трансфинитную индукцию. Для множества натуральных чисел аксиомы 6 и *6 равносильны.