Содержание

35. Теорема о разложении элемента гильбертова пространства в ряд Фурье, условие полноты ОНС

Теорема 1. H — гильбертово, $\{ e_n \}_{n=1}^{\infty}$ — **ОНС**

Следующие условия равносильны:

1. $x \in \overline{\mathscr{L}\{ e_n \}_{n=1}^{\infty}}$;
2. $x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$;
3. *равенство Парсеваля*: $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$.

Доказательство.

- $1 \implies 2$

  Возьмём $\varepsilon > 0$.

$$\exists y \in \mathscr{L}\{ e_n \} : \quad \|x - y\| < \varepsilon$$

$$y = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j$$

$$L_n = \mathscr{L}\{\, e_j \,\}_{j=1}^{n} \implies y \in L_m$$

$$P_{L_m} x = \sum_{j=1}^{m} (x, e_j) e_j =: S_m$$

$$\|x - S_m\| = \min_{h \in L_m} \|x - h\| \le \|x - y\| < \varepsilon$$

$$L_{m+1} \supset L_m \implies \rho(x, L_{m+1}) \le \rho(x, L_m) = \|x - S_m\| < \varepsilon$$

$$\|x - S_{m+1}\| \le \|x - S_m\| \implies \|x - S_n\| < \varepsilon \quad \forall n, m \implies \lim_{m \to \infty} S_m = x$$

- $2 \implies 1$

$$x = \lim S_m \implies x \in \overline{\mathscr{L}\{\, e_j \,\}}$$

- $2 \implies 3$

$$x = \lim S_n, \quad S_n = \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j$$

$$(x, x) = \lim (S_n, S_n)$$

$$\|S_n\|^2 = (S_n, S_n) = \sum_{j=1}^{n} |(x, e_j)|^2 =: \sigma_n$$

$$\|x\|^2 = \lim_{n \to \infty} \sigma_n$$

- $3 \implies 2$

$$x = S_n + (x - S_n), \quad w := x - S_n, \quad w \perp S_n$$

$$\implies \|x\|^2 = \|S_n\|^2 + \|x - S_n\|^2$$

$$\|S_n\|^2 = \sigma_n, \quad \lim \|S_n\|^2 = \|x\|^2$$

$$\implies \lim \|x - S_n\|^2 = 0 \implies \lim S_n = x$$

□

Следствие. H — гильбертово, $\{\, e_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ — полная ОНС

$$\forall x \in H \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$$

Следствие. H — гильбертово, $\{\, e_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ — полная ОС.
Тогда $\{\, e_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ — базис.

Доказательство. Уже доказано, что

$$x \in H, \quad x \in \overline{\mathscr{L}\{\, e_n \,\}} \implies x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) e_n$$

Проверим единственность разложения

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$$

Рассмотрим частичную сумму:

$$\sigma_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, \quad \lim \sigma_n = x$$

$$(\sigma_n, e_k) = \alpha_k \text{ при } n \geq k \implies \lim_{n\to\infty} (\sigma_n, e_k) = \alpha_k$$

При этом,

$$\lim(\sigma_n, e_k) \xlongequal[\text{непр. ск. произв.}]{} (x, e_k) \implies \alpha_k = (x, e_k)$$

□

36. Существование ОНБ и изоморфность сепарабельных гильбертовых пространств

Теорема 2. H — сепарабельное гильбертово пространство.
Тогда в H существует ОНБ.

Доказательство. Существует всюду плотное $\{ x_n \}_{n=1}^{\infty}$, т. е. $\overline{\{ x_n \}} = H$. Значит, $\{ x_n \}_{n=1}^{\infty}$ — полная, т. е. $\overline{\mathscr{L}\{ x_n \}} = H$.

Положим $x_1 = \dots = x_{n_1-1} = 0, \quad x_{n_1} \neq 0, \quad z_1 := x_{n_1}, \quad L_1 = \mathscr{L}\{ z_1 \}$.

$$L_1 = \mathscr{L}\{ x_1, \dots, x_{n_1} \}$$

$$x_{n_1+1} \in L_1, \dots, x_{n_2-1} \in L_1, \quad x_{n_2} \notin L_1, \quad z_2 := x_{n_2}, \quad L_2 = \mathscr{L}\{ z_1, z_2 \}$$

И так далее по индукции.

$$z_1, z_2, \dots, z_m, \quad z_m = x_{n_m}$$

- Если $x_k \in L_m \quad \forall k > m$, то $\dim H = m$.
- Если $x_{n_m+1}, \dots, x_{n_{m+1}-1} \in L_m, \quad \exists x_{n_{m+1}} \notin L_m$, то $z_{m+1} := x_{n_{m+1}}$.

$\{ z_m \}_{m=1}^{\infty}$ ЛНЗ

$$\mathscr{L}\{ z_1, \dots, z_n \} = \mathscr{L}\{ x_1, \dots, x_{n_m} \} \implies \mathscr{L}\{ z_m \} = \mathscr{L}\{ x_n \}$$

Значит, $\{ z_m \}$ — полная ЛНЗ система. Применим к ней процесс ортогонализации Грама—Шмидта, получим набор $\{ e_j \}$.

$$\mathscr{L}\{ e_j \} = \mathscr{L}\{ z_j \} \implies \{ e_j \} \text{ — полная ОНС}$$

□

Теорема 3. Все бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства линейно изометрически (с сохранением нормы) изоморфны друг другу.

Доказательство. H — сепарабельное гильбертово пространство. Докажем, что оно линейно изометрически изоморфно l^2.

Известно, что в H существует ОНБ $\{ f_n \}_{n=1}^{\infty}$.

$$x \in H \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} (x, f_n) f_n$$

Определим оператор $T : H \to l^2$:

$$Tx = \{ (x, e_n) \}_{n=1}^{\infty}$$

В l^2 мы попадаем в силу равенства Парсеваля:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \implies \begin{cases} Tx \in l^2, \\ T \text{ — изометрия, т. е. } \|Tx\|_2 = \|x\|_H. \end{cases}$$

Из свойств скалярного произведения очевидно, что $T \in \mathscr{L}in(H, l^2)$.

$$\|Tx\| = \|x\| \implies \|T\| = 1, \quad T \in \mathscr{B}(H, l^2)$$

Проверили, что $T(H) \subset l^2$. Докажем равенство.

Возьмём $y = \{ y_n \}_{n=1}^{\infty} \in l^2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 = \|y\|_2^2 < +\infty$$

$$g_n \coloneqq \sum_{j=1}^{n} y_j f_j \in H$$

Проверим, что $\{ g_n \}$ фундаментальна.

Применим критерий Коши к $\sum |y_n|^2 < +\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall m > n \geq N \quad \|y_{n+1}\|^2 + \dots + \|y_m\|^2 < \varepsilon$$

$$\|g_m - g_n\|^2 = \Big\| \sum_{j=n+1}^{m} y_j f_j \Big\|^2 = \sum_{j=n+1}^{m} |y_j|^2 < \varepsilon$$

Значит, $\{ g_n \}$ фундаментальна.

$$\xRightarrow[H\,\text{— гильбертово}]{} \exists g = \lim g_n \implies g = \sum_{j=1}^{\infty} y_j f_j \xRightarrow[\text{разложение единственно}]{} e_j = (g, f_j) \implies T(g) = y$$

□

37. Классические ряды Фурье

Теорема 4 (Вейерштрасс)**.** $f \in \widetilde{\mathcal{C}}[-\pi, \pi]$, т. е. $f(-\pi) = f(\pi)$, $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists T_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{n} \big(\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)\big) : \quad \|f - T_n\|_\infty < \varepsilon$$

Без доказательства. □

Примеры.

1. $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}[-\pi, \pi]$, $\quad dx$ — мера Лебега

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \,\mathrm{d}\, x$$

Докажем, что $\{ 1, \cos nx, \sin nx \}_{n=1}^{\infty}$ — полная ОС.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(mx) \,\mathrm{d}\, x = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) \,\mathrm{d}\, x = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \,\mathrm{d}\, x = 2\pi$$

$f \in \mathrm{L}^2[-\pi, \pi]$, $\quad \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ плотно в $\mathrm{L}^2[-\pi, \pi]$

$$\exists g \in \mathcal{C}[-\pi, \pi] : \quad \|f - g\|_2 < \varepsilon$$

Утверждается, что g можно сделать 2π-периодической, не сильно испортив её норму в l^2.

$$\exists \delta > 0 : \quad \left(\int_{\pi-\delta}^{\pi} |g(x)|^2 \,\mathrm{d}\, x \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

$$h(x) \coloneqq \begin{cases} g(x), & x \in [-\pi, \pi - \delta], \\ h(\pi) = g(-\pi), \\ \text{по непрерывности иначе} \end{cases}$$

$$\exists T_n: \quad \|h - T_n\|_\infty < \varepsilon \implies \Big(\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|h(x) - T_n(x)|^2}_{<\varepsilon} \,\mathrm{d}\, x\Big)^{\frac{1}{2}} \le \varepsilon\sqrt{2\pi}$$

$$\|f - h\|_2 \le \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2$$

$$\|f - T_n\|_2 \le \underbrace{\|f - g\|_2}_{<\varepsilon} + \|g - T_n\|_2 < \varepsilon + \|g - h\|_2 + \|h - T_n\| + \|h - T_n\|_2 < 3\varepsilon + \varepsilon\sqrt{2\pi}$$

Базис:

$$\Big\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \Big\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Коэффициенты Фурье:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx) \,\mathrm{d}\, x, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx) \,\mathrm{d}\, x, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \,\mathrm{d}\, x$$

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big)$$

Ряд Фурье сходится в функции в пространстве L^2:

$$\forall f \in \mathrm{L}^2[-\pi,\pi] \quad \|f - S_n\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

То есть,

$$\lim\Big(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 \,\mathrm{d}\, x\Big)^{\frac{1}{2}} = 0$$

2. $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi], \quad f \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi]$

$$f = u + \mathrm{i}v, \quad u, v \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}[-\pi,\pi]$$

Аналогично, $\{\, 1, \cos(nx), \sin(nx) \,\}_{n\in\mathbb{N}}$ — полная ОНС в $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}$.

3. $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}[-\pi,\pi]$

Докажем, что $\{\, e^{\mathrm{i}nx} \,\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — полная ОС в $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}$.

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} \,\mathrm{d}\, x, \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}nx}e^{-\mathrm{i}mx} \,\mathrm{d}\, x = \begin{cases} 0, & n \ne m, \\ 2\pi, & n = m \end{cases}$$

Получаем коэффициенты:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-\mathrm{i}nx} \,\mathrm{d}\, x, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- $c_0 = a_0$;
- $n \in \mathbb{N}$
$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i}b_n);$$
- $n \in \mathbb{N}$
$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{i}b_n).$$

$$S_n \coloneqq \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\mathrm{i}kx} = a_0 + \sum \big(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big)$$

ОНБ:

$$\Big\{ \frac{e^{\mathrm{i}nx}}{\sqrt{2\pi}} \Big\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

4. $\mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}[0,\pi]$

   Докажем, что $\{\,1, \cos(nx)\,\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — ОС в L^2.

$$f \in \mathrm{L}^2_{\mathbb{R}}[0,\pi], \quad f(-x) \coloneqq f(x) \implies f \in \mathrm{L}^2[-\pi,\pi]$$
$$\|f - S_n\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum a_k\cos(kx)|^2\,\mathrm{d}\,x \to 0 \implies \int_0^{\pi} |f(x) - \sum a_k\cos(kx)|^2\,\mathrm{d}\,x \to 0$$

38. Теорема Рисса о представлении линейного функционала для вещественного пространства.

Теорема 5 (Рисс). H — гильбертово пространство

1. $y \in H$ — фиксирован, $\quad f_y : H \to \mathbb{C}: \quad f_y(x) = (x,y)$
$$f_y \in H^*, \quad \|f_y\|_{H^*} = \|y\|_H$$
2. $f \in H^*$
$$\exists! y \in H: \quad f = f_y$$

Доказательство.

1. $y \in H$
   - Проверим, что $f_y \in \mathscr{L}in(H,\mathbb{C})$

     $\alpha \in \mathbb{C}, \quad x, y \in H$
$$f_y(\alpha x + z) = (\alpha x + z, y) = \alpha(x,y) + (z,y) = \alpha f(x) + f(z)$$
   - Оценим $\|f_y\|$
$$\|f_y\| = |(x,y)| \underset{\text{К–Б}}{\leq} \|y\|\cdot\|x\| \implies \|f_y\| \leq \|y\| \implies f \in H^*$$
     - Если $y = 0$, то $f_y(x) = 0 \implies f_y = \mathbb{O}, \quad \|f_y\| = 0$
     - $y \neq 0$
$$\|f_y\| = \sup_{x\neq 0}\frac{|f_y(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f_y(y)|}{\|y\|} = \frac{(y,y)}{\|y\|} = \|y\|$$
2. $f \in H^*$
   - Если $f = \mathbb{O}$, т. е. $f(x) \equiv 0$, то $f = f_0$
   - $f \neq \mathbb{O}$

     Рассмотрим $N = \operatorname{Ker} f \neq H$
$$H = N \oplus N^\perp, \quad N^\perp \neq \{\,0\,\}$$
     Возьмём $y_0 \in N^\perp$. Докажем, что $\dim N^\perp = 1$.
$$f(y_0) \neq 0$$
$$v \coloneqq \frac{y_0}{f(y_0)} \implies f(v) = 1$$
     Возьмём $z \in N^\perp$. Докажем, что z пропорционально v.
$$u \coloneqq z - f(z)v \implies u \in N^\perp$$

$$f(u) = f(z) - f(z)\underbrace{f(v)}_{1} = 0 \implies u \in N$$

Значит, $u = 0 \implies z = f(z)v$.
Будем искать y в виде $y = \alpha v$, где $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$1 = f_y(v) = f_y(v) = (v, \alpha v) = \alpha \|v\|^2 \implies \alpha = \frac{1}{\|v\|^2} \implies y = \frac{v}{\|v\|^2}$$

- Проверим единственность
  Пусть $f = f_y$, $f = f_z$.

$$\forall x \in H \quad f_y(x) = f_z(x) \implies (x, y) = (x, z) \implies (x, y - z) = 0 \implies y - z \in H^\perp = \{ 0 \}$$

$\square$

Замечание. $C : H \to H^* : \quad C(y) = f_y$
Знаем, что $\|f_y\|_{H^*} = \|y\|_H$.

$$C(y + z) = f_{y+z}$$
$$\forall x \in H \quad f_{y+z}(x) = (x, y + z) = (x, y) + (x, z) = f_y + f_z$$
$$C(y + z) = C(y) + C(z)$$

Возьмём $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$C(\alpha y) = f_{\alpha y}$$
$$f_{\alpha y}(h) = (x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$$

C — сопряжённо-линейный изометрический изоморфизм между H и H^*. Говорят, что $H^* = H$, при этом имеют в виду, что $C(H) = H^*$.

Примеры.

1. l^2

$$f \in (l^2)^* \iff \exists! y = \{ y_n \}_{n=1}^{\infty} \in l^2 : \quad \forall x \in l^2 \quad f(x) = f_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n$$

2. $(T, \mathcal{U}, \mu)$, $\quad \mathrm{L}^2(\mu)$

$$\Phi \in \left(\mathrm{L}^2(T, \mu)\right)^* \iff \exists! g \in \mathrm{L}^2(\mu) : \quad \forall f \in \mathrm{L}^2(\mu) \quad \Phi(f) = \int\limits_T f(x)\overline{g(x)} \,\mathrm{d}\,\mu$$

39. Геометрический смысл линейного функционала. Теорема о норме линейного функционала

Теорема 6. X — линейное пространство над $\mathbb{K}$

1. $f \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{K})$, $\quad f \neq \mathbb{O}$, $\quad L = \operatorname{Ker} f$

$$\operatorname{codim} L = \dim\left({}^{X}\!/\!{}_{L}\right) = 1$$

Это называется *коразмерность* L.

2. $L \subset X$, $\quad \operatorname{codim} L = 1$, $\quad x_0 \in X \setminus L$

$$\exists! f \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{K}) : \quad L = \operatorname{Ker} f, \quad f(x_0) = 1$$

Доказательство.

1. $f \neq \mathbb{O} \implies \exists y_0 \notin L$

$$v := \frac{y_0}{f(y_0)} \implies f(v) = 1$$

Возьмём $x \in X$.

$$u := x - f(x)v \implies f(u) = f(x) - f(x)f(v) = 0 \implies u \in L \implies \overline{u} = \overline{0} \implies \overline{0} = \overline{x} - f(x)\overline{v} \implies$$
$$\implies \overline{x} = f(x)\overline{v} \implies {}^{X}\!/_{L} = \{\, \alpha\overline{v} \mid \alpha \in \mathbb{K} \,\} \implies \dim\left({}^{X}\!/_{L}\right) = 1$$

2. $L: \quad \dim\left({}^{X}\!/_{L}\right) = 1$

   Возьмём $x \in X$.

$$\exists \alpha \in \mathbb{K} : \overline{x} = \alpha \cdot \overline{x}_0$$

Определим $f(x) = \alpha$.

$$\overline{x}_0 = 1 \cdot \overline{x}_0 \implies f(x_0) = 1$$

Проверим, что $f \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{K})$. Возьмём $\alpha \in \mathbb{K}, \quad x, y \in X$.

$$\left.\begin{aligned} \overline{x} = \beta\overline{v} \\ \overline{y} = \gamma\overline{v} \end{aligned}\right\} \implies \alpha\overline{x} + \overline{y} = (\alpha\beta + \gamma)\overline{v} \implies f(\alpha x + y) = \alpha\beta + \gamma = \alpha f(x) + f(y)$$

$$f(x) = 0 \iff \overline{x} = 0 \cdot \overline{v} = \overline{0} \iff x \in L \implies \operatorname{Ker} f = L$$

Проверим единственность. Пусть $\exists g \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{K}), \quad \operatorname{Ker} g = L, \quad g(x_0) = 1$.

$$\forall x \in X \quad x = \alpha \cdot \overline{x}_0 \implies x = \alpha x_0 + y, \quad y \in L \implies \begin{cases} f(x) = \alpha \\ g(x) = \alpha \end{cases}$$

$\square$

Замечание. В условиях второго пункта

$$f^{-1}(1) = x_0 + L = \{\, x_0 + y \mid y \in L \,\}$$

Доказательство. Обозначим $M = f^{-1}(1)$.

- $z \in x_0 + L$, т. е. $z = x_0 + y, \quad y \in L$

$$f(z) = \underbrace{f(x_0)}_{1} + \underbrace{f(y)}_{0} = 1 \implies z \in M \implies x_0 + L \subset M$$

- $z \in M$

$$f(z) = 1 \implies f(z - x_0) = 0 \implies z - x_0 \in L \implies z - x_0 = y \implies z = x_0 + y \in x_0 + L \implies M \subset x_0 + L$$

$\square$

Теорема 7 (норма линейного функционала). $(X, \|\cdot\|), \quad f \in X^*, \quad f \neq \mathbb{O}, \quad f(x_0) = 1, \quad L = \operatorname{Ker} f$

$$\|f\| = \frac{1}{\rho(x_0, L)}$$

Доказательство. Обозначим $d = \rho(x_0, L) = \inf \|x_0 - y\|$.

-

$$1 = f(x_0) = f(x_0 - y) \leq \|f\| \cdot \|x_0 - y\| \quad \forall y \in L \implies 1 \leq \|f\| \inf \|x_0 - y\| = \|f\| d \implies \frac{1}{d} \leq \|f\|$$

- $x \in X \setminus L, \quad f(x) \neq 0$

$$f\Big(\frac{x}{f(x)}\Big) = 1 \implies f\Big(x_0 - \frac{x}{f(x)}\Big) \implies x_0 - \frac{x}{f(x)} \in L \implies \Big\|x_0 - \Big(x_0 - \frac{x}{f(x)}\Big)\Big\| \geq d \iff$$
$$\iff \frac{\|x\|}{\|f(x)\|} \geq d \implies |f(x)| \leq \frac{1}{d}\|x\| \implies \|f\| \leq \frac{1}{d}$$

□

Замечание. В обозначениях теоремы $M = f^{-1}(1)$

$$\rho(x_0, L) = \rho(0, M)$$

Доказательство.

$$\rho(x_0, L) = \inf \|x_0 - y\|$$
$$\rho(0, M) = \rho(0, x_0 + L) = \inf \|x_0 + y\| = \inf \|x_0 - y\| = \rho(x_0, L)$$

□

40. Формулировка теоремы Хана—Банаха о продолжении линейного функционала для вещественного пространства. Продолжение линейного функционала с подпространства на линейную оболочку подпространства и вектора

Определение 1. X — линейное пространство над $\mathbb{K}$
$p : X \to \mathbb{K}$ называется *выпуклым функционалом*, если

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$;
2. $p(tx) = tp(x) \quad$ при $t \geq 0$.

Теорема 8 (Хан—Банах). X — линейное над $\mathbb{R}$, $\quad p : X \to \mathbb{R}$ — выпуклый функционал, $\quad L$ — подпространство X, $\quad f \in \mathscr{L}in(L, \mathbb{R})$, $\quad f(x) \overset{L}{\leq} p(x)$ (говорят, что f *подчинён* p)

$$\exists g \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{R}) : \quad \begin{cases} g\big|_L = f \\ g(x) \overset{X}{\leq} p(x) \end{cases}$$

Доказательство.

1. Возьмём $z \in X \setminus L$
$$L_1 \coloneqq \mathscr{L}\{\, L, z \,\} = \{\, tx + z \mid t \in \mathbb{R} \,\}$$
Построим $f_1 \in \mathscr{L}in(L_1, \mathbb{R}) : \quad f_1\big|_L = f, \quad f_1(y) \overset{L_1}{\leq} p(y)$.
$$f_1(z) \coloneqq c$$
Позднее докажем, что можно выбрать такой c.
$$f_1(x + tz) = f(x) + tc$$
Далее продолжение тоже будем обозначать f.
$$f(y) \overset{L_1}{\leq} p(y) \iff f(x) + tc \overset{L}{\leq} p(x + tc) \iff \begin{cases} f(x) + tc \leq p(x + tz), & t > 0, \\ f(x) - tc \leq p(x - tz), & t > 0 \end{cases}$$

Разделим на t:

$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{t}\right) + c \le p\left(\frac{x}{t} + z\right), \\ f\left(\frac{x}{t}\right) - c \le p\left(\frac{x}{t} - z\right) \end{cases}$$

Обозначим $u = \frac{x}{t}$, $v = \frac{x}{t}$ (никак друг с другом не связанные).

$$\begin{cases} f(u) + c \le p(u + z) & \forall u \in L, \\ f(v) - c \le p(v - z) & \forall v \in L \end{cases}$$

$$f(v) - p(v - z) \le c \le p(u + z) - f(u)$$

$$A \coloneqq \{\, p(u+z) - f(u) \,\}_{u \in L} \subset \mathbb{R}, \quad B \coloneqq \{\, f(v) - p(v - z) \,\}_{v \in L} \subset \mathbb{R}$$

Проверим, что $\forall a \in B \quad \forall b \in B \quad b \le a$.

$$b \le a \iff f(v) - p(v - z) \le p(u + z) - f(u) \iff \underbrace{f(u) + f(v)}_{f(u+v) \in L} \le p(u + z) + p(v - z)$$

f подчинён p, значит,

$$f(u + v) \le p(u + v) \underset{\text{выпуклость}}{\le} p(u + z) + p(v - z) \implies \exists c \in \mathbb{R} : \quad f_1(z) = c$$

$\square$

41. Лемма Цорна. Доказательство теоремы Хана—Банаха для вещественного пространства (без доказательства возможности продолжения линейного функционала с подпространства на линейную оболочку подпространства и вектора)

Определение 2. P полуупорядочено

x — *максимальный элемент* P, если

$$\forall y \in P : x \le y \quad x = y$$

Лемма 1 (Цорн). P частично упорядочено

Если для любой цепи имеется верхняя грань, то во всём множестве P существует максимальный элемент.

Теорема 9 (Хан—Банах). X — линейное над $\mathbb{R}$, $p : X \to \mathbb{R}$ — выпуклый функционал,

L — подпространство X, $f \in \mathscr{L}in(L, \mathbb{R})$, $f(x) \overset{L}{\le} p(x)$ (говорят, что f *подчинён* p)

$$\exists g \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{R}) : \quad \begin{cases} g\big|_L = f \\ g(x) \overset{X}{\le} p(x) \end{cases}$$

Доказательство.

1. $\mathcal{P} \coloneqq \{\, (M, h) \,\}$, $L \subset M \subset X$, M — подпр-во, $h \in \mathscr{L}in(M, \mathbb{R})$, $h\big|_L = f$, $h(x) \overset{M}{\le} p(x)$

   Определим порядок:

   $$(M, h) \le (M_1, h_1) \iff \begin{cases} M \subset M_1, \\ h_1\big|_M = h \end{cases}$$

   Пусть A — цепь в $\mathcal{P}$, т. е.

   $$A = \{\, (M_\alpha, h_\alpha) \,\}_{\alpha \in I} : \quad \forall \alpha, \beta \in I \quad \left[\begin{array}{l} (M_\alpha, h_\alpha) \le (M_\beta, h_\beta) \\ (M_\beta, h_\beta) \le (M_\alpha, h_\alpha) \end{array} \right.$$

Построим верхнюю грань для A.

$$M_0 \coloneqq \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$$

Проверим, что M_0 — подпространство. Пусть $x, y \in M_0$.

$$\exists \alpha, \beta : x \in M_\alpha,\ y \in M_\beta \implies \left[\begin{array}{l} M_\alpha \subset M_\beta, \\ M_\beta \subset M_\alpha \end{array}\right.$$

Пусть выполняется первое.

$$\implies x, y \in M_\beta \text{ — подпространство} \implies ax + by \in M_\beta \subset M_0 \implies M_0 \text{ — подпространство}$$

Определим $h_0 : M_0 \to \mathbb{R}$.

Возьмём $x \in M_0$.

$$\exists \alpha : x \in M_\alpha$$

Положим $h_0(x) = h_\alpha(x)$.

Проверим корректность. Пусть $x \in M_\beta$.

$$\left[\begin{array}{l} (M_\alpha, h_\alpha) \le (M_\beta, h_\beta), \\ (M_\beta, h_\beta) \le (M_\alpha, h_\alpha) \end{array}\right.$$

Пусть выполнено первое.

$$x \in M_\alpha,\ x \in M_\beta \implies h_\beta(x) = h_\alpha(x) = h(x)$$

Можно проверить, что $h_0 \in \mathscr{L}in(M_0, \mathbb{R})$.

$$\forall \alpha \in I \quad (M_\alpha, h_\alpha) \le (M_0, h_0) \implies (M_0, h_0) \text{ — верхняя грань для } A$$

По лемме Цорна, в $\mathcal{P}$ существует максимальный элемент (M, h).

$$L \subset M, \quad h\big|_L = f, \quad h(x) \overset{M}{\le} p(x)$$

Докажем, что $M = X$. **Пусть** $\exists z \in X \setminus M$.

$$M_1 \coloneqq \mathscr{L}in\{\, M, z \,\}$$

По первой части доказательства

$$\exists h_1 \in \mathscr{L}in(M_1, \mathbb{R}) : \quad h_1\big|_M = h, \quad h_1(x) \overset{M_1}{\le} p(x)$$

$$\implies (M_1, h_1) \in \mathcal{P}$$

$$(M, h) \le (M_1, h_1), \quad M \subsetneq M_1$$

Это **противоречит** максимальности (M, h).

$\square$

Утверждение 1. X линейно над $\mathbb{R}$, $\quad p$ — выпуклый функционал, $\quad f \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{R})$, $\quad f(x) \overset{X}{\le} p(x)$

$$f(x) \ge -p(-x)$$

Доказательство. $f(x) \le p(x) \implies f(-x) \le p(-x) \implies -f(x) \le p(-x)$ $\square$

Утверждение 2. p — полунорма, $\quad f(x) \overset{X}{\le} p(x)$

$$|f(x)| \le p(x)$$

Доказательство. $p(-x) \xlongequal[p\,—\,\text{полунорма}]{} p(x) \implies f(x) \geq -p(x)$ $\square$

42. Обобщённый предел в пространстве ограниченных последовательностей

Теорема 10. $l^\infty_\mathbb{R} = \left\{ x = \{ x_n \in \mathbb{R} \}_{n=1}^\infty \;\middle|\; \|x\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}$

$$\exists L \in (l^\infty)^* : \quad \|L\|_{(l^\infty)^*} = 1, \quad \forall x = \{ x_n \}_{n=1}^\infty \in l^\infty \quad \varliminf_{n\to\infty} x_n \leq L(x) \leq \varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

В частности, если $\exists \lim x_n = x_0$, то $L(x) = x_0$.

Доказательство. Для $x \in l^\infty$ положим $p(x) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

Докажем, что p — выпуклый функционал:

- $t > 0 \implies p(tx) = tp(x)$ — очевидно;
- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

$$\varlimsup x_n + \varlimsup y_n \overset{?}{\leq} \varlimsup (x_n + y_n)$$

Вспомним определение верхнего предела:

$$a_n \coloneqq \sup_{m\geq n} \{ x_m \} \implies a_n \searrow \implies \exists \lim a_n = a, \quad \varlimsup x_n \coloneqq a$$

$$b_n = \sup_{m\geq n} \{ y_m \}, \quad b = \varlimsup y_n$$

$$c_n = \sup \{ x_m + y_m \}, \quad c = \varlimsup \{ x_n + y_n \}$$

Зафиксируем n.

$$\forall m \geq n \quad x_m + y_m \leq a_n + b_n \implies c_n \leq a_n + b_n$$

Устремим $n \to \infty$:

$$c \leq a + b$$

$$C \subset l^\infty, \quad C \coloneqq \{ x = \{ x_n \}_{n=1}^\infty \mid \exists \lim x_n = x_0 \}$$

Определим $f : C \to \mathbb{R} : \quad f(x) = \lim x_n = x_0$.

$$f(x) = \lim x_n \leq \varlimsup x_n \implies f(x) \overset{C}{\leq} p(x)$$

Применим теорему Хана—Банаха:

$$\exists g \in \mathscr{L}in(l^\infty, \mathbb{R}), \quad g(x) \overset{C}{=} f(x), \quad g(x) \overset{l^\infty}{\leq} \varlimsup x_n$$

По утв. 1

$$g(x) \geq -p(-x) = -\varlimsup(-x_n) \xlongequal[\text{задача из Демидовича}]{} \varliminf x_n$$

$g = L$ — в теореме, $\quad g \in \mathscr{L}in(l^\infty, \mathbb{R})$.

$$\left.\begin{aligned} g(x) &\leq \varlimsup x_n \leq \sup |x_n| \\ g(x) &\geq \varliminf x_n \geq -\sup |x_n| \end{aligned}\right\} \implies |g(x)| \leq \|x\|_\infty \implies \|g\| \leq 1 \implies g \in (l^\infty)^*$$

Возьмём $x = \{ 1, 1, \ldots \}$.

$$\|x\| = 1, \quad |g(x)| = 1 \implies \|g\| \geq \frac{|g(x)|}{\|x\|} = 1 \implies \|g\| = 1$$

$\square$

43. Теорема Боненблюста—Собчика о продолжении линейного функционала для комплексного пространства

Теорема 11 (Боненблюст—Собчик). X линейно над $\mathbb{C}$, $\quad p$ — полунорма, $\quad L$ — подпространство X, $f \in \mathscr{L}in(L, \mathbb{C})$, $\quad |f(x)| \overset{L}{\le} p(x)$

$$\exists g \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{C}) : \quad \begin{cases} g\big|_L = f, \\ |g(x)| \overset{X}{\le} p(x) \end{cases}$$

Доказательство (овеществление). X линейно и над $\mathbb{R}$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} a, b \in \mathbb{R} \\ x, y \in X \end{aligned}\right\} \implies ax + by \in X$$

Также, L — подпространство и в вещественном смысле.

$$f(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x), \quad u(x), v(x) \in \mathbb{R}$$

Проверим, что $u, v \in \mathscr{L}in(L, \mathbb{R})$. Пусть $x, y \in L$.

$$f(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x), \quad f(y) = u(y) + \mathrm{i}v(y)$$

$$f(x + y) = u(x + y) + \mathrm{i}v(x + y)$$

Сложим первые два равенства:

$$f(x + y) = \big(u(x) + u(y)\big) + \mathrm{i}\big(v(x) + v(y)\big)$$

Вещественные и мнимые части равны:

$$u(x + y) = u(x) + u(y), \quad v(x + y) = v(x) + v(y)$$

Возьмём $x \in X$, $a \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x)$$

$$f(ax) = u(ax) + \mathrm{i}v(ax)$$

$$f(ax) = af(x) = au(x) + \mathrm{i}av(x) \implies \begin{cases} u(ax) = au(x) \\ v(ax) = av(x) \end{cases}$$

$$\implies u, v \in \mathscr{L}in(L, \mathbb{R})$$

$$f \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{C}) \implies f(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}f(x) \implies u(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}v(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}\big(u(x) + \mathrm{i}v(x)\big) \implies u(\mathrm{i}x) = -v(x)$$

Применим теорему Хана—Банаха к u, а v определим из этого тождества.

$$u(x) \le |f(x)| \le p(x) \quad \forall x \in L \xRightarrow[\text{т. Хана—Банаха}]{}$$

$$\implies \exists \varphi \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{R}) : \quad \begin{cases} \varphi\big|_L = u, \\ \varphi(x) \overset{X}{\le} p(x) \end{cases} \xRightarrow[p\text{ — полунорма}]{} |\varphi(x)| \overset{L}{\le} p(x)$$

$$x \in X \quad \psi(x) \coloneqq -\varphi(\mathrm{i}x) \implies \psi \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{R}) \tag{1}$$

$$g(x) \coloneqq \varphi(x) + \mathrm{i}\psi(x) \implies g \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{R}), \quad g(x) \overset{L}{=} f(x)$$

$$g(\mathrm{i}x) = \varphi(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}\psi(\mathrm{i}x)\mathrm{i}\big(-\mathrm{i}\varphi(\mathrm{i}x) + \psi(\mathrm{i}x)\big) \underset{(1)}{=\!=} \mathrm{i}\big(\varphi(x) + \mathrm{i}\psi(x)\big) \implies g \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{C})$$

Проверим подчинение.

$$x \in X,\ g(x) \in \mathbb{C} \quad g(x) = re^{\mathrm{i}\theta}, \quad r \geq 0,\ \theta \in \mathbb{R}$$

$$\implies |g(x)| = r = g\big(xe^{-\mathrm{i}\theta}\big) = \varphi\big(xe^{-\mathrm{i}\theta}\big) + \mathrm{i}\psi\big(xe^{-\mathrm{i}\theta}\big)$$

Слева вещественное число, справа — комплексное, значит, мнимая часть равна нулю:

$$|g(x)| = \varphi\big(xe^{-\mathrm{i}\theta}\big) \leq p\big(xe^{-\mathrm{i}\theta}\big) \xlongequal[p\,—\,\text{полунорма}]{} p(x)$$

$\square$

44. Теорема Хана—Банаха для нормированного пространства. Следствия: о достаточном числе линейных функционалов, формула для нормы элемента пространства, формула для расстояния до подпространства, критерий полноты системы элементов

Теорема 12. $(X, \|\cdot\|)$ над $\mathbb{K}$, $\quad L$ — подпространство X в алгебраическом смысле, $\quad f \in L^*$

$$\exists g \in X^* : \quad \begin{cases} g\big|_L = f, \\ \|g\|_{X^*} = \|f\|_{L^*}. \end{cases}$$

Доказательство. Обозначим $M = \|f\|_{L^*}$.

$$p(x) := M \cdot \|x\| \implies p\text{ — норма на } X$$

Возьмём $x \in L$.

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^*}\|x\| = M\|x\| = p(x) \implies f \text{ подчинён } p$$

Применяем теорему Хана—Банаха или Боненблюста—Собчика:

$$\exists g \in \mathscr{L}in(X, \mathbb{K}) : \quad \begin{cases} g\big|_L = f, \\ |g(x)| \overset{X}{\leq} p(x) \end{cases}$$

$$\implies |g(x)| \overset{X}{\leq} M \cdot \|x\| \implies \|g\|_{X^*} \implies g \in X^*$$

$$\|g\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |g(x)| \geq \sup_{\substack{x \in L \\ \|x\| \geq 1}} |g(x)| = \|f\|_{L^*}$$

$\square$

Следствие (о достаточном множестве линейных функционалов). $(X, \|\cdot\|)$ над $\mathbb{K}$, $\quad x_0 \in X$

1. $$\exists g \in X^* : \quad \begin{cases} \|g\| = 1, \\ g(x_0) = \|x_0\|; \end{cases}$$

2. $\|x_0\| = \max\{|h(x_0)| \mid \|h\|_{X^*} \leq 1\}$.

Доказательство.

- $x_0 \neq 0$

  Рассмотрим $L = \{\, \alpha x_0 \,\}_{\alpha \in \mathbb{K}}$. Определим $f : L \to \mathbb{K} : \quad f(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$.
  Понятно, что $f \in \mathscr{L}in(L, \mathbb{K})$, $\quad f(x_0) = \|x_0\|$, $\quad |f(\alpha x_0)| = |\alpha|\|x_0\|$.

$$\implies \|f\|_{L^*} = 1$$

По теореме

$$\exists g \in X^* : \quad \begin{cases} \|g\|_{X^*} = 1, \\ g(x_0) = \|x_0\|. \end{cases}$$

Рассмотрим $h \in X^* : \quad \|h\| \le 1.$

$$|h(x_0)| \le \|h\|\|x_0\| \le \|x_0\| \implies \sup_{\|h\| \le 1} |h(x_0)| \le \|x_0\|$$

Но $\exists g : \quad \begin{cases} \|g\| = 1, \\ |g(x_0)| = \|x_0\|. \end{cases}$

- $x_0 = 0$

  Возьмём $g \in X^* : \quad \|g\| = 1.$

$$g(x_0) = 0$$

□

Замечание. Теперь имеем две похожие формулы:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)|$$

$$\|x\| = \max_{\|f\|_{X^*} \le 1} |f(x)|$$

Следствие (расстояние до подпространства)**.** $(X, \|\cdot\|), \quad L$ — замкнутое подпространство X, $x_0 \in X \setminus L, \quad d := \rho(x_0, L)$

1. $$\exists g \in X^* : \quad \begin{cases} \|g\| = 1, \\ g(x_0) = d, \\ g\big|_L = 0; \end{cases}$$

2. $d = \min\left\{ |h(x_0)| \mid \|h\| \le 1,\ h\big|_L = 0 \right\}.$

Доказательство. $M := \mathscr{L}in(x_0, L) = \{\, \alpha x_0 + y \mid y \in L \,\}$

Определим $f : M \to \mathbb{K} : \quad f(\alpha x_0 + y) = \alpha.$

$$\implies f(y) = 0 \quad \forall y \in L$$

$$f(x_0) = 1$$

Понятно, что $f \in \mathscr{L}in(M, \mathbb{K})$.

Воспользуемся теоремой о норме линейного функционала:

$$\|f\|_{M^*} = \frac{1}{d}$$

$$f_1 := df \implies \|f_1\| = 1, \quad f_1(x_0) = d$$

$$\exists g \in X^* : \quad \begin{cases} \|g\| = 1, \\ g\big|_M = f_1 \end{cases} \implies g\big|_L = 0, \quad g(x_0) = d$$

Возьмём $h \in X* : \quad \|h\| \le 1,\ h\big|_L = 0.$

$$|h(x_0)| = |h(x_0 - y)| \le \|h\| \cdot \|x_0 - y\| \le \|x_0 - y\| \quad \forall y \in L$$

$$\implies |h(x_0)| \le d \implies \sup_{\substack{\|h\| \le 1 \\ h|_L = 0}} |h(x_0)| \le d$$

$$\exists g : \quad \begin{cases} g(x_0) = d, \\ g\big|_L = 0, \\ \|g\| \le 1. \end{cases}$$

$$\implies d = \max_{\substack{\|h\| \le 1 \\ h|_L = 0}} |h(x_0)|$$

$\square$

Замечание. Если $L = \{ 0 \}$, то получим предыдущее следствие.

Следствие (критерий полноты семейства элементов в нормированном пространстве).
$(X, \|\cdot\|)$, $\quad \{ x_\alpha \in X \}_{\alpha \in A}$
$\{ x_\alpha \}$ — полная система элементов **тогда и только тогда**, когда

$$\Big(f \in X^* \quad f(x_\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in A\Big) \implies f = \mathbb{O}$$

Доказательство. $L \coloneqq \overline{\mathscr{L}\{ x_\alpha \}}_{\alpha \in A}$

- $\implies$

  $\{ x_\alpha \}$ — полное, $\quad f \in X^*, \quad f(x_\alpha) = 0$

  $$x = \sum_{k=1}^{n} c_k x_{\alpha_k} \implies f(x) = 0$$

  То есть, $\forall x \in \mathscr{L}\{ x_\alpha \} \quad f(x) = 0$.
  Возьмём $x \in X$.

  $$\exists \{ x_n \in \mathscr{L}\{ x_\alpha \} \}_{n=1}^{\infty} : \quad \lim x_n = x$$

  f непрерывна $\implies f(x) = \lim f(x) = 0 \implies f = \mathbb{O}$.

- $\impliedby$

  Пусть $L \subsetneq X$, т. е. $\exists x_0 \neq 0 \in X \setminus L$. По первому следствию

  $$\exists g \in X^* : \quad \begin{cases} \|g\| = 1, \\ g(x_0) = \|x_0\| \end{cases} \implies g \neq \mathbb{O}$$

  При этом, $g\big|_L = 0 \implies g(x_\alpha) = 0$ — $\lightning$.

$\square$

45. Сепарабельность пространства, у которого сопряжённое пространство сепарабельно

Теорема 13. $(X, \|\cdot\|)$
Если X^* сепарабельно, то X сепарабельно.

Доказательство. X^* сепарабельно $\iff \exists \{ f_n \}_{n=1}^{\infty} : \quad f_n$ плотны в X^*, т. е.

$$\forall f \in X^* \quad \exists \{ f_{n_k} \}_{k=1}^{\infty} : \quad \lim \|f - f_{n_k}\| = 0$$

Пусть $f \in X^*$.

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \implies \exists x : \begin{cases} \|x\| = 1, \\ \|f\| \le 2|f(x)| \end{cases}$$

Пусть теперь $f \neq \mathbb{O}$.

$$\exists x_n : \quad \|x_n\| = 1, \quad \|f_n\| \le 2|f_n(x_n)|$$

Проверим, что $\{ x_n \}$ полна в X (по следствию 3). Пусть $f \in X^*$, $\quad f(x_n) = 0 \quad \forall n$.

$$\exists f_{n_k} \in X^* : \quad \lim \|f - f_{n_k}\| = 0$$

$$\frac{1}{2}\|f_{n_k}\| \le |f_{n_k}(x_{n_k})| = |\underbrace{f(x_{n_k})}_{0} - f_{n_k}(x_{n_k})| \le \|f - f_{n_k}\| \cdot \underbrace{\|x_{n_k}\|}_{1}$$

$$\implies \lim \|f_{n_k}\| = 0 \implies f = \mathbb{O} \implies \{ x_n \} \text{ полна}$$

□

46. Принцип равномерной ограниченности. Сильная сходимость линейных операторов, оценка нормы сильного предела

Лемма 2. $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$, $\quad U \in \mathscr{L}in(X, Y)$

$$\exists a \in X\ \exists \varepsilon > 0\ \exists R > 0 : \quad U\big(\mathtt{B}_\varepsilon(a)\big) \subset \overline{\mathtt{B}_R(0)} \implies \begin{cases} U \in \mathscr{B}(X, Y), \\ \|U\| \le \frac{2R}{\varepsilon} \end{cases}$$

Доказательство. Возьмём $z \in X : \quad \|z\| < \varepsilon$.

$$a + z \in \mathtt{B}_\varepsilon(a) \implies U(a+z) \subset \overline{B_R(0)} \implies \begin{cases} \|U(a+z)\| \le R, \\ \|U(a)\| \le R \end{cases} \xRightarrow[z = (a+z) - a]{} $$
$$\implies \|Uz\| \le \|U(a+z)\| + \|U(a)\| \le 2R$$

Возьмём $x \in X : \quad \|x\| < 1$.

$$z = \varepsilon x \implies \|\varepsilon x\| < \varepsilon \implies \|U(\varepsilon x)\| \le 2R \implies \|Ux\| \le \frac{2R}{\varepsilon} \xRightarrow[\|U\| = \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|Ux\|]{} \|U\| \le \frac{2R}{\varepsilon}$$

□

Теорема 14. X — банахово, $\quad (Y, \|\cdot\|)$, $\quad \{ U_\alpha \in \mathscr{B}(X, Y) \}_{\alpha \in A}$, $\quad \forall x \quad \sup\limits_{\alpha \in A} \|U_\alpha x\| < +\infty$

$$\sup_{\alpha \in A} \|U_\alpha\| < +\infty$$

Доказательство. Нужно доказать, что $\sup\limits_{\|x\| \le 1} \sup\limits_{\alpha} \|U_\alpha x\| < +\infty$.

$$Y_n \coloneqq \{ y \mid \|y\| \le n \} \subset Y$$

$U_\alpha^{-1}(Y_n)$ замкнуто, т. к. U_α непрерывен.

$$E_n = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha^{-1}(Y_n)$$

E_n замкнуты.

Пусть $x \in X$.

$$\exists n \in \mathbb{N} : \quad \sup_{\alpha \in A} \|U_\alpha x\| < n \implies x \in U_\alpha^{-1}(Y_n) \xRightarrow[\forall \alpha \in A]{} x \in E_n \implies X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

Применим теорему Бэра о категориях:

$$\exists n_0 : \quad \operatorname{Int} E_{n_0} \ne \emptyset$$

То есть,

$$\exists \mathrm{B}_\varepsilon(a) \subset E_{n_0} \implies \mathrm{B}_\varepsilon(a) \in U_\alpha^{-1}(Y_{n_0}) \quad \forall \alpha \in A \implies U_\alpha\big(\mathrm{B}_\varepsilon(a)\big) \subset Y_{n_0} \xRightarrow[\text{лемма}]{} \|U_\alpha\| \le \frac{2n_0}{\varepsilon} \quad \forall \alpha \in A$$

$\square$

Следствие (Принцип фиксации особенности). X — банахово, $(Y, \|\cdot\|)$, $\{\, U_\alpha \in \mathscr{B}(X,Y) \,\}$, $\sup\limits_{\alpha \in A} \|U_\alpha\| = +\infty$

$$\exists x_0 \in X : \quad \sup_{\alpha \in A} \|U_\alpha x_0\| = +\infty$$

Определение 3. $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$, $\{\, U_n \in \mathscr{L}in(X,Y) \,\}_{n=1}^{\infty}$, $\forall x \in X \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} U_n x =: Ux$
$U = \operatorname{s-lim} U_n$ — *сильный (поточечный) предел* U_n.

Свойства.

1. $U_n \in \mathscr{L}in(X,Y)$
$$U = \operatorname{s-lim} U_n \implies U \in \mathscr{L}in(X,Y)$$
2. $U_n, U \in \mathscr{B}(X,Y)$
$$\lim \|U - U_n\| = 0 \implies Ux = \operatorname{s-lim} U_n x$$

Доказательство. Очевидно.
$x \in X$

$$\|Ux - U_n x\| \le \underbrace{\|U - U_n\|}_{\to 0} \cdot \|x\| \implies \lim U_n x = Ux$$

$\square$

Замечание. Если $U = \operatorname{s-lim} U_n$, $\quad U, U_n \in \mathscr{B}(X,Y)$, то **не обязательно** $\lim \|U - U_n\| = 0$.

Пример. $X = l^1$

$$x = \{\, x_n \,\}_{n=1}^{\infty} \in l^1$$

$$f_n(x) := x_n, \quad \|f_n(x)\| = |x_n| \le \|x_n\|_1 \implies \|f_n\| \le 1 \implies f_n \in (l^1)^*$$

Пусть $e_n = (0, \ldots, 0, \underset{n}{1}, 0, \ldots, 0)$.

$$f_n(e_n) = 1 \implies \|f_n\| \ge 1$$

Найдём сильный предел:

$$\lim x_n = 0 \implies \lim f_n(x) = 0 \quad \forall x \in l^1 \implies \mathbb{O} = \operatorname{s-lim} f_n$$

$$\|f - \mathbb{O}\| = 1, \quad \lim \|f_n - \mathbb{O}\| = 1 \ne 0$$

Следствие. X — банахово, $(Y, \|\cdot\|)$, $\{\, U_n \,\}_{n=1}^{\infty}$, $U_n \in \mathscr{B}(X,Y)$, $U = \operatorname{s-lim} U_n$

$$U \in \mathscr{B}(X,Y), \quad \|U\| \le \varliminf \|U_n\|$$

Доказательство.

$$\exists \lim U_n x \implies \sup_{n \in \mathbb{N}} \|U_n x\| < +\infty \xRightarrow[\text{теорема}]{} \exists M > 0 : \quad \|U_n\| \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b := \varliminf \|U_n\| \in \mathbb{R}, \quad b \le M$$

$$\exists \{\, n_k \,\} : \quad b = \lim_{k\to\infty} \|U_{n_k}\| \implies Ux = \lim U_{n_k} x \quad \forall x \in X$$

$$\|Ux\| = \lim_{k\to\infty} \|U_{n_k} x\| \le \lim \|U_{n_k}\| \cdot \|x\| = b\|x\| \implies \|U\| \le b$$

$\square$

Замечание. $U = \text{s-lim}\, U_n$
Возможно строгое неравенство (в примере так и было).

47. Теоремы Банаха—Штейнгауза: критерий сходимости операторов

Теорема 15 (Банах—Штейнгауз). X, Y — банаховы, $\{ U_n \in \mathscr{B}(X,Y) \}_{n=1}^{\infty}$
Существует сильный предел U_n **тогда и только тогда**, когда

1. $\exists M > 0: \quad \|U_n\| \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
2. $\{ U_n x \}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна для $\forall x \in E \subset X$, где E — полное в X, т. е. $\overline{\mathscr{L}\{ E \}} = X$.

Доказательство.

- $\implies$
  1. уже доказано;
  2. очевидно.
- $\impliedby$
  Проверим, что $\forall x \in X \quad \{ U_n x \}$ фундаментальна.
  Обозначим $L = \mathscr{L}\{ E \}$. Возьмём $x \in L$.
  $$x = \sum_{k=1}^{m} c_k x_k, \quad x_k \in E$$
  Пусть $p > q \in \mathbb{N}$.
  $$\|U_p x - U_q x\| \le \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \underbrace{\|U_p x_k - U_q x_k\|}_{\to 0} \xrightarrow[p,q\to\infty]{} 0$$
  $\implies \{ U_n x \}$ фундаментальна для $x \in L$.
  Возьмём произвольный $x \in X$.
  $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in L: \quad \|x - z\| < \varepsilon$$
  Воспользуемся тем, что $\{ U_n z \}$ фундаментальна:
  $$\exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n > m \ge N \quad \|U_n z - U_m z\| < \varepsilon$$
  $$\|Unx - U_m x\| \le \underbrace{\|U_n x - U_n z\|}_{\le \|U_m\|\cdot\|x-z\| \le M\|x-z\| < M\varepsilon} + \underbrace{\|U_n z - U_m z\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|U_m z - U_m x\|}_{<M\varepsilon} < \varepsilon(2M+1)$$
  $\implies \{ U_n x \}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна для $\forall x \in X$.
  $$\xrightarrow[Y \text{ — банахово}]{} \exists \lim U_n x =: U \quad \forall x \in X, \quad U = \text{s-lim}\, U_n$$

∎

Замечание. $\implies$ верно для банахова X и нормированного Y.
$\impliedby$ верно для нормированного X и банахова Y.

Теорема 16 (Банах—Штейнгауз). X — банахово, $(Y, \|\cdot\|)$, $\{ U_n \in \mathscr{B}(X,Y) \}_{n=1}^{\infty}$, $U \in \mathscr{B}(X,Y)$
$U = \text{s-lim}\, U_n$ **тогда и только тогда**, когда

1. $\exists M > 0: \quad \|U_n\| \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
2. $\exists \lim U_n x \quad \forall x \in E \subset X$, где E — полное в X.

Доказательство.

- $\implies$ — уже доказано.
- $L \coloneqq \mathscr{L}\{\,E\,\},\quad x \in L$

$$x = \sum_{k=1}^{m} ckx_k, \quad x_k \in E$$

$$\exists \lim U_n x_k \quad \forall x_k \implies \exists \lim U_n x$$

Проверим, что $\forall x \in X \quad \exists \lim U_n x$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in L: \quad \|x - z\| < \varepsilon$$

$$\exists N: \quad \forall n \geq N \quad \|Uz - U_n z\| < \varepsilon$$

$$\|Ux - U_n x\| \leq \underbrace{\|Ux - U_z\|}_{\leq \|U\| \cdot \|x - z\| < \|U\| \cdot \varepsilon} + \underbrace{\|Uz - U_n z\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|U_n z - U_n x\|}_{\|U_n\| \cdot \|x - z\| < M\varepsilon} < \varepsilon(\|U\| + 1 + M)$$

$$\implies \exists U_n x = Ux$$

□

48. Обратный оператор к $I - A$, где A — сжатие. Множество обратных операторов открыто

Утверждение 3. $A, B \in \mathscr{B}(X)$

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Доказательство.

$$\|A(Bx)\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|$$

□

Теорема 17. X — банахово, $\quad I$ — тождественный, $\quad A \in \mathscr{B}(X), \quad \|A\| < 1$

$$\exists (I - A)^{-1}, \quad \|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}, \quad (I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

Доказательство. Проверим, что сумма норм операторов сходится. По утв. 3

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k \implies \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|}$$

X — банахово $\implies \mathscr{B}(X)$ — банахово. Воспользуемся критерием полноты:

$$\implies \exists S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \in \mathscr{B}(X)$$

$$S_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} A^k$$

$$\|S_n\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|A\|^k < \frac{1}{1 - \|A\|}, \quad \lim_{n \to \infty} \|S - S_n\| = 0$$

$$\implies \|S\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

$$(I-A)S_n = (I-A)\sum_{k=0}^{n} A^k = \sum_{k=0}^{n} A^k - \sum_{k=0}^{n} A^{k+1} = I - A^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|A^{n+1}\| = 0 \implies \lim(I - A^{n+1}) = I$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\lim(I-A)S_n = I \\ \lim(I-A)S_n = (I-A)S\end{array}\right\} \implies (I-A)S = I \\ S_n(I-A) = I - A^{n+1} \implies S(I-A) = I \end{array}\right\} \implies S = (I-A)^{-1}$$

□

Определение 4. $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$

Определим *множество обратимых операторов*:

$$\mathrm{In}(X,Y) = \left\{\, A \in \mathscr{B}(X,Y) \;\middle|\; \exists A^{-1} \in \mathscr{B}(Y,X) \,\right\}$$

Теорема 18. X — банахово, $(Y, \|\cdot\|)$

1. $U \in \mathrm{In}(X,Y)$, $V \in \mathscr{B}(X,Y)$,
$$\|U - V\| < \frac{1}{\|U^{-1}\|}$$
$$\implies V \in \mathrm{In}(X,Y),$$
$$\|V^{-1}\| \le \frac{\|U^{-1}\|}{1 - \|U-V\| \cdot \|U^{-1}\|} \tag{2}$$
$$\|U^{-1} - V^{-1}\| \le \frac{\|U^{-1}\|^2 \|U-V\|}{1 - \|U-V\| \cdot \|U^{-1}\|} \tag{3}$$
2. $\varphi : \mathrm{In}(X,Y) \to \mathrm{In}(Y,X) :\quad \varphi(A) = A^{-1}$

   Тогда φ непрерывно.

Замечание. $\mathrm{B}_{\frac{1}{\|U^{-1}\|}}(U) \subset \mathrm{In}(X,Y) \implies \mathrm{In}(X,Y)$ открыто.

Доказательство.

1. Рассмотрим оператор $W = U^{-1}(U - V)$.
$$\|W\| \le \|U^{-1}\| \cdot \|U - V\| < 1, \quad W \in \mathscr{B}(X)$$
   Можно применить предыдущую теорему:
$$\exists (I-W)^{-1}, \quad \|(I-W)^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \|W\|} \le \frac{1}{1 - \|U^{-1}\|\|U-V\|}$$
$$W = U^{-1}(U-V) = I - U^{-1}V \implies I - W = U^{-1}V$$
$$V = U(U^{-1}V) = U(I-W)$$
   Каждый их них обратим, значит,
$$\exists V^{-1} = (I-W)^{-1}U^{-1}$$
$$\|V^{-1}\| \le \|U^{-1}\| \cdot \|(I-W)^{-1}\| \le \frac{\|U^{-1}\|}{1 - \|U^{-1}\| \cdot \|U-V\|}$$
   Получили неравенство (2). Получим из него неравенство (3):
$$U^{-1} - V^{-1} = U^{-1}(V-U)V^{-1} \implies \|U^{-1} - V^{-1}\| \le \|U^{-1}\|\|V-U\|\|V^{-1}\| \underset{(2)}{\le} \frac{\|U^{-1}\|^2\|U-V\|}{1 - \|U^{-1}\| \cdot \|U-V\|}$$

2. $\varphi(U) = U^{-1}$

$$\varphi(U) - \varphi(V) = U^{-1} - V^{-1} \underset{(3)}{\Longrightarrow} \lim_{\|U-V\|\to 0} \|\varphi(U) - \varphi(V)\| = 0$$

□

49. Определение открытого отображения. Критерий открытости для линейного оператора. Условия существования непрерывного обратного оператора

Определение 5. (X, τ_1), (Y, τ_2) — топологические пространства
Отображение $U : X \to Y$ *открыто*, если оно переводит открытые множества в открытые:

$$G \subset X \text{ открыто} \implies U(G) \text{ открыто}$$

Замечание. U непрерывно, если **прообраз** открытого множества открыт.

Утверждение 4. $(X < \tau_1)$, (Y, τ_2) — топологические пространства, $U : X \to Y$ — биекция

$$U \text{ открыто} \iff U^{-1} \text{ непрерывно}$$

Утверждение 5. $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$, $U \in \mathscr{L}in(X, Y)$

$$U \text{ открыт} \iff \exists r > 0 : \quad \mathtt{B}_r(0) \subset U\big(\mathtt{B}_1(0)\big)$$

Доказательство.

- $\implies$

$$\left.\begin{aligned} &U(0) = 0 \\ &U \text{ открыто} \implies U\big(\mathtt{B}_1(0)\big) \text{ открыто} \end{aligned}\right\} \implies 0 \in U\big(\mathtt{B}_1(0)\big) \implies \exists r > 0 : \quad \mathtt{B}_r(0) \subset U\big(\mathtt{B}_1(0)\big)$$

- $\impliedby$

  Возьмём $G \subset X$ — открытое. Пусть $y_0 \in U(G)$.

$$\exists x_0 \in G : \quad Ux_0 = y_0$$

$$\exists R > 0 : \quad \mathtt{B}_R(x_0) \subset G$$

$$\mathtt{B}_r(0) \subset U\big(\mathtt{B}_1(0)\big) \xRightarrow[\text{линейность}]{} \mathtt{B}_{rR}(0) \subset U\big(\mathtt{B}_R(0)\big)$$

  Сдвинем на $U(x_0)$:

$$\underbrace{Ux_0 + \mathtt{B}_{rR}(0)}_{\mathtt{B}_{rR}(Ux_0) \subset U(\mathtt{B}_R(x_0)) \subset U(G)} \subset Ux_0 + U\big(\mathtt{B}_R(0)\big) = U\big(x_0 + \mathtt{B}_R(0)\big) = U\big(\mathtt{B}_R(x_0)\big)$$

$$\implies Ux_0 \text{ — внутренняя точка } U(G).$$

□

Следствие. $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$, $U \in \mathscr{L}in(X, Y)$

$$U \text{ открыто} \implies U(X) = Y, \text{ т. е. } U \text{ — сюръекция}$$

Доказательство. По критерию $\exists r > 0 : \quad \mathtt{B}_r(0) \subset U\big(\mathtt{B}_1(0)\big)$. Возьмём $y \in Y$.

$$\exists n \in \mathbb{N} : \quad \|y\| < nr \implies y \in \mathtt{B}_{nr}(0) \subset U\big(\mathtt{B}_n(0)\big) \implies y \in U(X)$$

□

50. Теорема Банаха об открытом отображении

Лемма 3 (редукция). X — банахово, $(Y, \|\cdot\|)$, $U \in \mathscr{B}(X,Y)$, $\exists r > 0 : \quad \mathtt{B}_r(0) \subset \overline{U\big(\mathtt{B}_1(0)\big)}$

$$\mathtt{B}_{\frac{r}{2}}(0) \subset U\big(\mathtt{B}_1(0)\big)$$

Доказательство. Пусть $y \in \mathtt{B}_{\frac{r}{2}}(0)$, т. е. $\|y\| < \frac{r}{2}$. Докажем, что $\exists x : \quad \|x\| < 1, \quad Ux = y$.

$$\mathtt{B}_r(0) \subset \overline{U\big(\mathtt{B}_1(0)\big)} \implies \forall k \in \mathbb{N} \quad \mathtt{B}_{\frac{r}{2^k}}(0) \subset \overline{U\big(\mathtt{B}_{\frac{1}{2^k}}(0)\big)}$$

- При $k = 1$

$$\|y\| < \frac{r}{2} \implies y \in \mathscr{B}_{\frac{r}{2}}(0) \subset \overline{U\big(\mathtt{B}_{\frac{1}{2}}(0)\big)}$$

$$\exists x_1 : \quad \|x_1\| < \frac{1}{2}, \quad \|y - Ux_1\| < \frac{r}{4}$$

- $k = 2$

$$y - Ux_1 \in \mathtt{B}_{\frac{r}{4}}(0) \subset \overline{U\big(\mathtt{B}_{\frac{1}{4}}(0)\big)} \implies \exists x_2 : \quad \|x_2\| < \frac{1}{4}, \quad \|y - Ux_1 - Ux_2\| < \frac{r}{2^3}$$

$$\dots$$

- Построим $\{\, x_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что

$$\|x_n\| < \frac{1}{2^n}, \quad \|y - Ux_1 - \dots - Ux_n\| < \frac{r}{2^{n+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < 1 \xRightarrow[\text{критерий полноты}]{} \exists x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in X, \quad \|x\| < 1$$

$$S_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} x_k$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim S_n = x \implies \lim US_n = Ux \\ &\lim \|y - US_n\| = 0 \implies \lim US_n = y \end{aligned}\right\} \implies Ux = y$$

□

Теорема 19 (Банах). X, Y — банаховы, $U \in \mathscr{B}(X,Y)$
Если $U(X) = Y$, то U открыто.

Доказательство. Обозначим $B = \mathtt{B}_1(0)$.

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (nB) \implies U(X) = Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} U(nB)$$

По теореме Бэра о категориях

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \operatorname{Int} \overline{U(n_0 B)} \neq \emptyset$$

При этом, $U(n_0 B) = n_0 U(B)$.

$$\implies \operatorname{Int} \overline{U(B)} \neq \emptyset \implies \exists a \in Y \ \exists y > 0 : \quad \mathtt{B}_r(a) \subset \overline{U(B)}$$

Чтобы воспользоваться леммой, нужно сдвинуть точку a в 0.
Возьмём $z \in X : \quad \|z\| < r$.

$$\left.\begin{aligned} &a + z \in \mathscr{B}_r(a) \subset \overline{U(B)} \\ &a \in \overline{U(B)} \implies -a \in \overline{U(B)} \end{aligned}\right\} \implies z = (a + z) + (-a) \in \overline{U(B)} + \overline{U(B)} \subset \overline{U(2B)}$$

Воспользуемся подобием:

$$\mathtt{B}_{\frac{r}{2}} \subset \overline{U(B)} \xRightarrow[\text{лемма}]{} \mathtt{B}_{\frac{r}{4}}(0) \subset U(B)$$

□

51. Теорема Банаха об обратном операторе. Эквивалентность норм, в которых пространство банахово

Теорема 20 (Банах). X, Y — банаховы, $\quad U \in \mathscr{B}(X,Y)$ — биекция

$$U^{-1} \in \mathscr{B}(Y,X)$$

Доказательство.

$$U(X) = Y \xRightarrow[\text{т. об откр. отобр.}]{} U \text{ открыто } \xRightarrow[\text{утв.}]{} U^{-1}\text{непрерывно}$$

□

Теорема 21 (об эквивалентных нормах). $(X, \|\cdot\|_1)$ — банахово, $\quad (X, \|\cdot\|_2)$ — банахово, $\exists C > 0 : \quad \|x\|_2 \overset{X}{\le} C\|x\|_1$

$$\exists A > 0 : \quad \|x\|_1 \overset{X}{\le} A\|x\|_2$$

Доказательство. Обозначим $X = (X, \|\cdot\|_1), \quad Y = (X, \|\cdot\|_2)$.

Определим оператор $I : X \to Y : \quad Ix = x$. Понятно, что I — биекция и $I \in \mathscr{L}in(X,Y)$.

$$\|Ix\|_2 \le C\|x\|_1 \implies I \in \mathscr{B}(X,Y)$$

По теореме Банаха об обратном операторе

$$I^{-1} \in \mathscr{B}(Y,X) \implies \|I^{-1}x\|_1 \le A\|x\|_2, \quad A = \|I^{-1}\|$$

$$\iff \|x\|_1 \le A\|x\|_2$$

□

52. Замкнутый оператор. Теорема о замкнутом графике. Пример замкнутого, но не непрерывного оператора

Определение 6. $(X, \|\cdot\|), \ (Y, \|\cdot\|)$ над $\mathbb{K}$

$X \times Y$ — *линейное пространство*:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \coloneqq (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$$

Определим *норму* на $X \times Y$:

$$\|(x,y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$$

Замечание. Сходимость по такой норме — покоординатная:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x,y) \iff \begin{cases} \lim x_n = x \\ \lim y_n = y \end{cases}$$

Если X, Y — банаховы, то $X \times Y$ — банахово.

Определение 7. $(X, \|\cdot\|), \ (Y, \|\cdot\|), \quad U \in \mathscr{L}in(X,Y)$

Определим *график* U:

$$G_U = \{\, (x, Ux) \,\}_{x\in X} \subset X \times Y$$

Оператор U называется *замкнутым*, если G_U замкнуто в $X \times Y$.

$$\iff \Big(\lim(x_n, Ux_n) = (x,y) \implies y = Ux\Big)$$

$$\iff \left(\left.\begin{matrix} \lim x_n = x \\ \lim Ux_n = y \end{matrix}\right\} \implies y = Ux \right)$$

Замечание. Замкнутый оператор — это **не тот**, который переводит замкнутые множества в замкнутые.

Замечание. $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$, $\quad U \in \mathscr{L}in(X, Y)$

1. $\lim x_n = x$;
2. $\lim Ux_n = y$;
3. $y = Ux$.

$$U \text{ замкнут} \iff \big(1) + 2) \implies 3)\big)$$

$$U \text{ непрерывен} \iff \big(1) \implies 2) + 3)\big)$$

Значит, если U непрерывен, то он замкнут.

Теорема 22 (о замкнутом графике)**.** X, Y — банаховы, $\quad U \in \mathscr{L}in(X, Y)$ — замкнутый

$$U \text{ непрерывен}$$

Доказательство. Определим новую норму пространства X:

$$\|x\|_1 = \|x\|_X + \|Ux\|_Y$$

Проверим, что $(X, \|\cdot\|_1)$ банахово. Пусть $\{ x_n \}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $(X, \|\cdot\|_1)$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \|x_m - x_n\|_1 = 0$$

$$\iff \lim(\|x_m - x_n\|_X + \|Ux_m + Ux_n\|_Y) = 0$$

Значит, $\{ x_n \}$ фундаментальна в $(X, \|\cdot\|_X)$, и $\{ Ux_n \}$ фундаментальна в Y. Оба эти пространства банаховы.

$$\implies \exists x \in X \; \exists y \in Y : \quad \lim \|x_n - x\|_X = 0$$

$$\implies \begin{cases} \lim x_n = x \text{ в } (X, \|\cdot\|_X) \\ \lim Ux_n = y \text{ в } Y \end{cases} \xRightarrow[U \text{ замкнут}]{} y = Ux \implies \lim\big(\|x_n - x\|_X + \|Ux_n - Ux\|_Y\big) = 0$$

$$\implies \lim \|x_n - x\|_1 = 0 \implies (X, \|\cdot\|_1) \text{ банахово}, \quad \|x\|_X \le \|x\|_X + \|Ux\|_Y = \|x\|_1 \xRightarrow[\text{т. об экв. нормах}]{}$$

$$\implies \exists A > 0 : \quad \|x\|_1 \le A\|x\|_X \implies \|x\|_X + \|Ux\|_Y \le A\|x\|_X \implies \|Ux\| \le A\|x\| \implies U \in \mathscr{B}(X, Y)$$

$\square$

Пример (U замкнут, но не непрерывен)**.** $X = \{ \exists f' \in \mathcal{C}[0,1] \}, \quad \|f\|_X = \max\limits_{[0,1]} |f(x)|$

$X \subset \mathcal{C}[0,1]$ в алгебраическом смысле

$Y = \mathcal{C}[0,1], \quad \|g\|_Y = \max\limits_{[0,1]} |g(x)| = \|g\|_\infty$

$$\mathcal{D}(f) = f', \quad \mathcal{D} \in \mathscr{L}in(X, Y), \quad \mathcal{D} \text{ замкнут}$$

$$\left.\begin{matrix} \{ f_n \in X \}_{n=1}^{\infty}, \quad \lim f_n = f \iff f_n \overset{[0,1]}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f \\ \mathcal{D}(f_n) = f_n', \quad \mathcal{D}(f_n) \to g \end{matrix}\right\} \xRightarrow[\text{док. в анализе}]{} g = f' \implies g = \mathcal{D}(f) \iff f_n' \overset{[0,1]}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} g$$

$$x^n \in X : \quad \|x^n\|_X = 1, \quad \mathcal{D}(x^n) = nx^{n-1}, \quad \|\mathcal{D}(x^n)\| = n$$

$$\implies \sup_{\|f\|\le 1} \|D(f)\| = +\infty \implies \mathcal{D} \notin \mathscr{B}(X, Y)$$

53. Сопряжённые пространства к пространствам последовательностей C_0, l^p, пространству L^p для конечных p

Теорема 23 (сопряжённые к l^p). $1 \le p < +\infty$, $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

1. $y = \{ y_n \}_{n=1}^{\infty} \in l^q$, $\quad F_y : l^p \to \mathbb{K}$, $\quad x = \{ x_n \}_{n=1}^{\infty} \in l^p$, $\quad F_y(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$

$$F_y \in \left(l^p\right)^*, \quad \|F_y\|_{(l^p)^*} = \|y\|_q$$

2. $F \in \left(l^p\right)^*$

$$\exists! y : \quad F = F_y$$

Доказательство.

1. $y \in l^q$, $\quad x \in l^p$

$$|F_y(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right| \underset{\text{нер-во Гёльдера}}{\le} \|x\|_p \cdot \|y\|_q, \quad F_y \in \left(l^p, \mathbb{K}\right)$$

$$\implies F_y \in \mathscr{B}\left(l^p, \mathbb{K}\right) = \left(l^p\right)^*, \quad \|F_y\|_{(l^p)^*} \le \|y\|_q$$

2. $F \in \left(l^p\right)^*$, $\quad e_n = (0, \dots, 0, \underset{n}{1}, 0, \dots, 0)$ — базис l^p

Определим $y_n = F(e_n)$.

$$x = \{ x_n \}_{n=1}^{\infty} \in l^p \implies x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \text{ — сходится в } l^p$$

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \implies F(S_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \xRightarrow[F \text{ непрерывен}]{}$$

$$\implies \lim S_n = x \implies \lim F(S_n) = F(x) \implies F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \implies F = F_y$$

Проверим, что $y \in l^q$.

- $p > 1 \implies q < +\infty$ Рассмотрим пробные функции

$$x_k = \begin{cases} \frac{\overline{y_k}}{|y_k|} \cdot |y_k|^{q-1}, & y_k \ne 0, \\ 0, & y_k = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим последовательности

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$$

$$F\left(x^{(n)}\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum |y_k|^q$$

$$\left\|x^{(n)}\right\|_p^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p = \sum |y_k|^{p(q-1)} \xlongequal[\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \implies p+q=pq \implies pq-p=q]{} \sum_{k=1}^{n} |y_k|^q$$

$$\|F\| = \sup_{x \ne 0} \frac{|F(x)|}{\|x\|_p} \ge \frac{F(x^{(n)})}{\|x^{(n)}\|} = \frac{\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q}{\left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall n \implies$$

$$\implies y \in l^q, \quad \|F\| \ge \|y\|_q, \quad F = F_y$$

Докажем единственность:
Пусть $F = F_y,\ F = F_z$.

$$F(e_n) = y_n, \quad F(e_n) = z_n \implies y_n = z_n$$

- $p = 1 \implies q = \infty$

$$F(e_n) = y_n, \quad \|F\|_{(l^1)^*} \geq |y_n| \implies y \in l^\infty$$

$$\|F\| \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_n| = \|y\|_\infty$$

□

Замечание. $T : (l^q) \to \left(l^p\right)^* : \quad T(y) = F_y$
Мы доказали, что, при $1 \leq p < +\infty$, T — линейный изометрический изоморфизм. Говорят, что $\left(l^p\right)^* = l^q$.

Теорема 24 (сопряжённое к C_0). $C_0 = \left\{ x = \{ x_n \in \mathbb{K} \}_{n=1}^\infty \;\middle|\; \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}$

1. $y \in l^1, \quad x \in C_0, \quad F_y(x) := \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$

$$F_y \in C_0^*, \quad \|F_y\| = \|y\|_1$$

2. $F \in C_0^*$

$$\exists! y \in l^1 : \quad F = F_y$$

Доказательство.

1. $y \in l^1, \quad x \in C_0$

$$|F_y(x)| = \left|\sum_{n=1}^\infty x_n y_n\right| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \cdot \sum_{n=1}^\infty |y_n| = \|x\|_\infty \cdot \|y\|_1$$

$$\implies F_y \in C_0^*, \quad \|F_y\| \leq \|y\|_1$$

2. $\{ e_n \}_{n=1}^\infty$ — базис в C_0. Рассмотрим $F \in C_0^*$.

$$y_n := F(e_n)$$

$$x = \{ x_n \}_{n=1}^\infty \in C_0 \implies x = \sum_{k=1}^\infty x_k e_k$$

$$S_n := \sum_{k=1}^n x_k e_k$$

$$F(S_n) = \sum_{k=1}^n x_k y_k \xrightarrow[F \text{ непрерывен}]{} \lim F(S_n) = F(x) \implies F(x) = \sum_{k=1}^\infty x_k y_k \text{ сходится} \implies F = F_y$$

Проверим, что $y \in l^1$.

□

Похоже, сопряжённого к L^p не было...

54. Второе сопряжённое пространство. Каноническое вложение. Рефлексивность. Примеры

Обозначение. $(T^* f)(x) = f(TX)$

Определение 8. $(X, \|\cdot\|),\ (Y, \|\cdot\|), \quad x \in X, \quad f \in X^*$

$$\langle f, x\rangle := f(x)$$

$T \in \mathscr{B}(X, Y), \quad T^* : Y^* \to X^*$

$$\langle T^* f, x\rangle = \langle f, Tx\rangle$$

$\pi : X \to X^{**}, \quad f \in X^*, \quad x \in X$

$$f(x) = \langle f, x\rangle\,, \quad \langle \pi(x), f\rangle = f(x)$$

Можно отождествить $\pi(X)$ с X:

$$\langle x, f\rangle = f(x)$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "f(x)"'] & & X^{**} \arrow[dl, "\big(\pi(x)\big)(f)"] \\
& \mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

Рис. 1: Иллюстрация к опр. 8

Пример. $\mathrm{L}^p(\mu), \quad \mathrm{L}^q(\mu), \quad 1 < p < +\infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad f \in \mathrm{L}^p, \quad g \in \mathrm{L}^q$

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_X f(x) g(x)\,\mathrm{d}\,\mu, \quad \langle g, f\rangle = \int\limits_X f(x) g(x)\,\mathrm{d}\,\mu$$

Свойство (канонического вложения). $\pi : X \to X^{**}$

$$\pi \in \mathscr{B}(X, X^{**}), \quad \pi \text{ — изометрическое вложение}$$

(т. е. $\|\pi(x)\| = \|x\|$)

Доказательство. Зафиксируем $x \in X$.

- Проверим, что $\pi(x) \in \mathscr{L}in(X^*, \mathbb{C})$

  Для $\alpha \in \mathbb{C}$ и $f \in X^*$

  $$\big(\pi(x)\big)(f) \overset{\text{def}}{=\!=} (\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha\big(\pi(x)\big)(f)$$

  Для $f, g \in X^*$ имеем по определению

  $$\big(\pi(x)\big)(f + g) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \big(\pi(x)\big)(f) + \big(\pi(x)\big)(g)$$

  Значит, $\pi(x) \in \mathscr{L}in(X^*, \mathbb{C})$.

- Проверим, что $\|\pi(x)\| = \|x\|$

  $$\big|\big(\pi(x)\big)(f)\big| = |f(x)| \le \|f\| \cdot \|x\| \quad \forall f \in X^* \implies \implies \pi(x) \in (X^*)^*, \quad \|\pi(x)\| \le \|x\|$$

  Неравенство в другую сторону имеем по следствию о достаточном числе линейных функционалов:

  $$\exists g \in X^* : \quad \|g\| = 1, \quad g(x) = \|x\|$$

  (для фиксированного $x \in X$)

  $$\|\pi(x)\| = \sup_{f \in X^*:\ \|f\| \le 1} \big|\big(\pi(x)\big)(f)\big| \underset{\text{можно взять такое } g}{\ge} \big|\big(\pi(x)\big)(g)\big| = |g(x)| = \|x\|$$

- Проверим, что $\pi \in \mathscr{L}in(X, X^{**})$

  – Возьмём $\alpha \in \mathbb{C}, \ x \in X, \ f \in X^*$.

  $$\big(\pi(\alpha x)\big)(f) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \cdot \big(\pi(x)\big)(f) \quad \forall f \in X^* \implies \pi(\alpha x) = \alpha \pi(x)$$

– Возьмём $x, y \in X,\ f \in X^*$.

$$\big(\pi(x+y)\big)(f) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \big(\pi(x)\big)(f) + \big(\pi(y)\big)(f) \quad \forall f \in X^* \implies$$
$$\implies \pi(x+y) = \pi(x) + \pi(y) \xRightarrow[\|\pi(x)\| = \|x\|]{} \pi \in \mathscr{B}(X, X^{**}), \quad \|\pi\| = 1$$

□

Следствие (как строить пополнение нормированного пространства). $(X, \|\cdot\|)$, $\quad Y = \overline{\pi(X)}$
Тогда Y — пополнение X.

Доказательство. X^* — банахово $\implies$ X^{**} банахово $\implies$ $\pi : X \to X^{**}$ — изометрическое вложение $\implies$ $\overline{\pi(X)}$ — пополнение X. □

Определение 9. Пространство X называется *рефлексивным*, если $\pi(X) = X^{**}$, т. е. π сюръективно, т. е.

$$\forall G \in (X^*)^* \quad \exists x \in X : \quad G = G_x \quad \big(\text{или } G = \pi(x)\big)$$

Следствие. X рефлексивно.
Тогда X банахово.

Следствие. X рефлексивно, $\quad f \in X^*$

$$\|f\| = \max \|x\| \le 1$$

(в случае рефлексивного пространства в норме можно супремум заменить на максимум)

Доказательство. Вспомним, что для любого нормированного X

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)|, \quad \|x\| = \max_{\|g\|_{X^*} \le 1} |g(x)|$$

$$f \in X^* \implies \|f\| = \max_{\|g\| \le 1} |g(f)|$$

Но X рефлексивно $\implies \{\, g \in X^{**} \mid \|g\| \le 1 \,\} = \{\, \pi(x) \mid x \in X,\ \|x\| \le 1 \,\}$.

$$\|f\| = \max_{\|x\| \le 1} \left|\big(\pi(x)\big)(f)\right| = \max_{\|x\| \le 1} |f(x)|$$

□

Примеры.

1. $1 < p < +\infty$
   $\mathrm{L}^p(X, \mathscr{U}, \mu)$ — рефлексивные.
   $$(\mathrm{L}^p)^* \sim \mathrm{L}^q, \quad 1 < q < +\infty$$
   $$(\mathrm{L}^q)^* \sim \mathrm{L}^p$$
2. L^1 и L^∞ не рефлексивны.
3. C_0 и l^1 не рефлексивны.
   $$(C_0)^* \sim l^1$$
   $$(l^1)^* \sim l^\infty$$
4. H — гильбертово
   H рефлексивно.
   H^* сопряжённо линейно изоморфно H. Тогда H^{**} сопряжённо линейно изоморфно $H^* \implies H^{**} \sim H$.
5. $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ не рефлексивно (без доказательства).

55. Существование и простейшие свойства сопряжённого оператора в нормированном пространстве

Определение 10. $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$, $\quad T \in \mathscr{B}(X, Y)$.
Определим *сопряжённый оператор* к T:

$$T^* : Y^* \to X^* : \quad (T^* f)(x) = f(Tx)$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "T^*(f)"'] & & Y \arrow[dl, "f"] \\ & \mathbb{C} & \end{tikzcd}$$

Рис. 2: Иллюстрация к опр. 10

Утверждение 6. T^* линеен

Доказательство. f линеен, $\quad T$ линеен $\implies$ T^* линеен. $\square$

Свойства. $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$, $\quad T \in \mathscr{B}(X, Y)$

1. $T^* \in (Y^*, X^*)$, $\quad \|T^*\| = \|T\|$;
2. $\alpha \in \mathbb{C}$
$$(\alpha T)^* = \alpha T^*$$
3. $S, T \in \mathscr{B}(X, Y)$
$$(S + T)^* = S^* + T^*$$
4. $X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{S} Z$
$$(ST)^* = T^* S^*$$

Доказательство.

1. • Линейность
Возьмём $f, g \in Y^*$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in X$.
$$\big(T^*(\alpha f + g)\big)(x) = (\alpha f + g)(Tx) = \alpha f(Tx) + g(Tx) = \alpha (T^* f)(x) + (T^* g)(x) \quad \forall x \in X \implies$$
$$\implies \alpha T^* f + T^* g = T^*(\alpha f + g)$$

• Равенство норм
$$\|T^*\| = \sup_{f \in Y^*:\ \|f\| < 1} \|T^* f\| = \sup_{\|f\|<1} \Big(\sup_{\|x\|<1} |(T^* f)(x)| \Big) \overset{\text{def}}{T^*} \sup_{\|x\|<1} \Big(\sup_{\|f\|<1} |f(Tx)| \Big)$$
Но, по следствию о достаточном числе линейных функционалов, $\sup\limits_{\|f\|<1} |f(Tx)| = \|Tx\|$.
$$\|T^*\| = \sup_{\|x\|<1} \|Tx\| = \|T\|$$

2. $\alpha \in \mathbb{C}$, $\quad f \in Y^*$, $\quad x \in X$
$$\big((\alpha T)^* f\big)(x) = f(\alpha T x) = \alpha f(Tx) = \alpha \big(T^*(f)\big)(x) \quad \forall x \in X \quad \forall f \in Y^* \implies (\alpha T)^* = \alpha T^*$$

3. $S, T \in \mathscr{B}(X, Y)$, $\quad f \in Y^*$, $\quad x \in X$
$$\big((S+T)^* f\big)(x) = f\big((S+T)x\big) = f(Sx) + f(Tx) = (S^* f)(x) + (T^* f)(x) \quad \forall x \in X \quad \forall f \in Y* \implies$$
$$\implies (S+T)^* = S^* + T^*$$

4. $X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{S} Z$

$$ST : X \to Z, \quad (ST)^* : Z^* \to X^*$$

Возьмём $f \in Z^*, \quad x \in X$.

$$\big((ST)^* f\big)(x) = f\big((ST)x\big) = f\big(S(Tx)\big) = (S^* f)(Tx) = \big(T^*(S^* f)\big)(x) \quad \forall x \in X \quad \forall z \in Z^* \implies$$
$$\implies (ST)^* = T^* S^*$$

$\square$

Про существование найти не могу...

56. Теорема об интегральном операторе с ядром из L^p и сопряжённом к нему

Теорема 25. $(\mathbb{R}^n, \lambda_n), \ (\mathbb{R}^m, \lambda_m), \quad K(x,y) \in \mathrm{L}^p\big(\mathbb{R}^{n+m}, \lambda_{n+m}\big), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m$

$$M := \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^m} |K(x,y)|^p \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y\Big)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

$$(\mathscr{K} f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} K(x,y) f(y) \,\mathrm{d}\,y$$

Тогда

1. $\mathscr{K} \in \mathscr{B}\big(\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^m), \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)\big), \quad \|\mathscr{K}\| \le M$;
2. $\mathscr{K}^* \in \mathscr{B}\big(\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^m), \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^m)\big)$

$$(\mathscr{K}^* g)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K^*(y,x) g(x) \,\mathrm{d}\,x$$

$$\implies K^*(y,x) = K(x,y)$$

Доказательство.

1. Воспользуемся теоремой Фубини:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^m} |K(x,y)|^p \,\mathrm{d}\,y\Big) \,\mathrm{d}\,x < +\infty \implies \text{для п. в. } x \quad \int\limits_{\mathbb{R}^m} |K(x,y)|^p \,\mathrm{d}\,y < +\infty$$

Возьмём $f \in \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^m)$ и x такой, что внутренний интеграл конечен.

$$|(\mathscr{K} f)(x)| = \Big|\int\limits_{\mathbb{R}^m} K(x,y) f(y) \,\mathrm{d}\,y\Big| \underset{\text{нер-во Гёльдера}}{\le} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^m} |K(x,y)|^p \,\mathrm{d}\,y\Big)^{\frac{1}{q}} \cdot \|f\|_q$$

Возведём в степень p и проинтегрируем по $\mathbb{R}^n$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |(\mathscr{K} f)(x)|^p \,\mathrm{d}\,x \le \|f\|_q^p \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^m} |K(x,y)|^p \,\mathrm{d}\,y\Big) \,\mathrm{d}\,x = M^p \implies$$
$$\implies \|\mathscr{K} f\|_p \le M\|f\|_q \quad \forall f \in \mathrm{L}^q \implies \|\mathscr{K}\| \le M, \quad \mathscr{K} \in \mathscr{B}(\dots)$$

2. $\mathscr{K}^* \in \mathscr{B}\big(\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^n), \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^m)\big)$

$$g \in \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^n), \quad f \in \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^m)$$

$$\langle \mathscr{K}^* g, f\rangle = \langle g, \mathscr{K} f\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^m} K(x,y) f(y) \,\mathrm{d}\,y\Big) \,\mathrm{d}\,x \overset{}{\underset{\text{т. Фубини}}{=\!=\!=}} \int\limits_{\mathbb{R}^m}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x,y) g(x) \,\mathrm{d}\,x\Big) f(y) \,\mathrm{d}\,y \tag{4}$$

$$\langle \mathscr{K}^* g, y\rangle \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} K^*(y,x) g(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\langle \mathscr{K}^* g, f\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} K^*(y,x) g(x)\Big) f(y)\,\mathrm{d}\,y \underset{(4)}{\Longrightarrow} K^*(y,x) = K(x,y)$$

□

57. Существование и простейшие свойства эрмитово-сопряжённого оператора в гильбертовом пространстве

H — гильбертово, $\quad T \in \mathscr{B}(H), \quad y \in H$ — фиксирован, $\quad G_y : H \to \mathbb{C}, \quad x \in H, \quad G_y(x) \coloneqq (Tx, y)$

$$\Longrightarrow G_y \in \mathscr{L}in(H, \mathbb{C})$$

Возьмём $x \in H$.

$$|G_y(x)| = \big|(Tx, y)\big| \le \|Tx\| \cdot \|y\| \le \|T\| \cdot \|y\| \cdot \|x\| \implies G_y \in H^*, \quad \|G_y\| \le \|T\| \cdot \|y\|$$

Воспользуемся теоремой Рисса:

$$\exists! z \in H: \quad G_y(x) = (x, z), \quad \|z\| = \|G_y\|_{H^*}$$

Определение 11. $T^* y = z$ будем называть *эрмитово-сопряжённым* к T.

Свойства. H — гильбертово, $\quad T \in \mathscr{B}(H)$

1. $T^{**} = T$;
2. $T^* \in \mathscr{B}(H), \quad \|T^*\| = \|T\|$;
3. $\alpha \in \mathbb{C}, \quad (\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$;
4. $T, S \in \mathscr{B}(H) \implies (T+S)^* = T^* + S^*$;
5. $(TS)^* = S^* T^*$;
6. если T — биекция, то $\exists T^{-1} \in \mathscr{B}(H), \quad \exists (T^*)^{-1}$, при этом $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Доказательство.

1. $(Tx, y) = (x, T^* y)$

$$(x, Ty) = \overline{(Ty, x)} = \overline{(y, T^* x)} = (T^* x, y) = (x, T^{**} y) \quad \forall x$$

$$\Longrightarrow Ty = T^{**} y \quad \forall y \in H$$

2. $T^* \in \mathscr{B}(H), \quad \|T^*\| \le \|T\| \implies \|T^{**}\| \le \|T^*\| \xRightarrow[T^{**} = T]{} \|T^*\| = \|T\|$

3. $\alpha \in \mathbb{C}$

$$(Tx, y) = (x, T^* y) \implies \big((\alpha T) x, y\big) = (x, \overline{\alpha} T^* y) \implies (\alpha T^*) = \overline{\alpha} T^*$$

4. Очевидно.

5. Очевидно.

6. $\exists T^{-1}$

$$\left.\begin{aligned} T \cdot T^{-1} = I &\underset{5)}{\Longrightarrow} (T^{-1})^* T^* = (I^*) = I \\ T^{-1} \cdot T = I &\underset{5)}{\Longrightarrow} (T^*)(T^{-1})^* = I \end{aligned}\right\} \implies \exists (T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

□

Замечание. X, Y — банаховы, $T \in \mathscr{B}(X,Y)$, $\exists T^{-1} \in \mathscr{B}(Y,X)$

$$\exists (T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

Без доказательства. $\square$

58. Теорема об интегральном операторе с ядром из L^2 и эрмитово-сопряжённом к нему

Теорема 26. $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n, \lambda_n)$, $K(x,y) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{2n})$,

$$M = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)|^2 \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y \Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$(\mathscr{K} f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) \,\mathrm{d}\, y$$

Тогда

1. $\mathscr{K} \in \mathscr{B}\big(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)\big)$, $\|\mathscr{K}\| \le M$
2. $\mathscr{K}^* \in \mathscr{B}\big(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)\big)$

$$(\mathscr{K}^* g)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} K^*(y,x) g(x) \,\mathrm{d}\, x$$

$$\implies K^*(y,x) = \overline{K(x,y)}$$

Доказательство.

1. Так же, как в предыдущей теореме.
2. Возьмём $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

$$(f,g) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} \,\mathrm{d}\, x$$

$$(\mathscr{K}^* g, f) = (g, \mathscr{K} f) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x) \overline{\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) \,\mathrm{d}\, y} \,\mathrm{d}\, x \xlongequal[\text{т. Фубини}]{} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{K(x,y)} g(x) \Big) \overline{f(x)} \,\mathrm{d}\, y =$$

$$= \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{K(x,y)} g(x) \,\mathrm{d}\, x, f \Big)$$

$$\implies (\mathscr{K}^* g)(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{K(x,y)} g(x) \,\mathrm{d}\, x \implies K^*(y,x) = \overline{K(x,y)}$$

$\square$

59. Теорема об образе и ядре оператора и его сопряжённого. Теорема об ортогональном дополнении инвариантного подпространства. Самосопряжённый оператор, примеры

Общее наблюдение. L — подпространство в алгебраическом смысле,

$$M = L^\perp = \{\, x \in H \mid x \perp y \quad \forall y \in L \,\}$$

$$(\overline{L})^\perp = M$$

$$\implies H = M \oplus \overline{L}$$

Теорема 27. H — гильбертово, $\quad T \in \mathscr{B}(H)$

$$H = (\operatorname{Ker} T) \oplus \overline{T^*(H)} = (\operatorname{Ker} T^*) \oplus \overline{T(H)}$$

($\overline{T^*(H)}$ — замыкание образа T^*)

Доказательство. В качестве L возьмём $L = T^*(H)$. Возьмём $x \in L^\perp$.

$$(x, T^*y) = 0 \iff (Tx, y) = 0 \iff Ty = 0 \iff y \in \operatorname{Ker} M$$

$$\implies \left(T^*(H)\right)^\perp = \operatorname{Ker} T \implies H = \operatorname{Ker} T \oplus \overline{T^*(H)}$$

Применим эту формулу к T^* (учитывая, что $T^{**} = T$):

$$H = \operatorname{Ker} T^* \oplus \overline{T(H)}$$

□

Определение 12. $(X, \|\cdot\|)$, $\quad T \in \mathscr{B}(X)$, $\quad Y \subset X$ — подпространство в алгебраическом смысле
Будем говорить, что Y — *инвариантное подпространство* для T, если $T(Y) \subset Y$ (т. е. $T\big|_Y \in \mathscr{B}(Y)$).

Теорема 28. H — гильбертово, $\quad T \in \mathscr{B}(H)$, $\quad Y$ — инвариантное подпространство для T

$$Y^\perp \text{ — инвариантное подпространство для } T^*$$

Доказательство. $z \in Y^\perp$, $\quad y \in Y$

$$(y, T^*z) = (Ty, z) \xlongequal[\substack{Ty \in Y \\ z \in Y^\perp}]{} 0 \implies T^*z \in Y^\perp \implies T^*(Y^\perp) \subset Y^\perp$$

□

Определение 13. H — гильбертово, $\quad T \in \mathscr{B}(H)$
T называется *самосопряжённым*, если $T = T^*$, то есть $(Tx, y) = (x, Ty) \quad \forall x \in H$.

Следствие. H — гильбертово, $\quad T \in \mathscr{B}(H)$, $\quad T$ — самосопряжённый
Если $Y \subset H$ инвариантно для T, то $Y^\perp$ тоже инвариантно.

Пример. $M = \overline{M} \subset H$, $\quad M$ — подпространство

$$P \text{ — ортопроектор на } M \implies P = P^*$$

60. Определение спектра и резольвенты оператора. Теорема о свойствах резольвенты

Определение 14. X — банахово, $\quad T \in \mathscr{B}(X)$, $\quad I$ — тождественный оператор, $\quad \lambda \in \mathbb{C}$
Будем говорить, что λ — *регулярная точка*, если $V(\lambda) := \lambda I - T$ — биекция.
По теореме Банаха об обратном операторе,

$$V^{-1}(\lambda) \in \mathscr{B}(X)$$

$$R(\lambda, T) = R(\lambda) = V^{-1}(\lambda)$$

R называется *резольвентой*.

Определение 15. Множество всех регулярных точек называется *резольвентным множеством*:

$$\rho(T) = \{\, \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ — регулярная} \,\}$$

Определение 16. Множество всех остальных точек назовём *спектром* T:

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$$

Определение 17 (части спектра).

1. $\sigma_p(T)$ — *точечный спектр*

$$\sigma_p(T) = \{\, \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda T - I \text{ не инъекция} \,\}$$

Для линейного оператора это означает, что $X_\lambda = \operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{\, 0 \,\}$.

$$u \neq 0 \in X \implies Tu = \lambda u$$

u — собственный вектор T, соответствующий с. ч. λ. X_λ — собственное подпространство.

2. $\sigma_c(T)$ — *непрерывный спектр*

$$\sigma_c(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Ker}(\lambda I - T) = \{\, 0 \,\}, \quad \overline{V(\lambda)(X)} = X \right\}$$

(т. е. образ $V(\lambda)$ всюду плотен в X).

3. $\sigma_r(T)$ — *остаточный спектр*

$$\sigma_r(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{Ker}(\lambda I - T) = \{\, 0 \,\}, \quad \overline{V(\lambda)(X)} \subsetneq X \right\} = \sigma \setminus (\sigma_p \cup \sigma_c)$$

Замечание. В конечномерном случае $\sigma = \sigma_p$.

Свойства. X — банахово, $\quad T \in \mathscr{B}(H)$

1. $\lambda, \mu \in \rho(T)$

$$\implies R(\lambda)R(\mu) = R(\mu)R(\lambda)$$

2. *Тождество Гильберта*: $\lambda, \mu \in \rho(T)$

$$\implies R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)$$

3. $\rho(T)$ открыто в $\mathbb{C}$
Кроме того, если $\mu \in \rho(T)$, то

$$|\lambda - \mu| < \frac{1}{\|R(\mu)\|} \implies \lambda \in \rho(T)$$

4. $\lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| > \|T\|$

$$\implies \lambda \in \rho(T)$$

5. $R(\lambda)$ — непрерывная функция, т. е. если $\mu \in \rho(T)$, то

$$\lim_{\lambda \to \mu} R(\lambda) = R(\mu), \qquad \lim_{\lambda \to \infty} R(\lambda) = 0$$

6. $F \in \big(\mathscr{B}(X)\big)^*, \quad \lambda \in \rho(T), \quad g(\lambda) \coloneqq F\big(R(\lambda)\big)$

$$\implies g(\lambda) \text{ аналитична в } \rho(T), \qquad \lim_{\lambda \to \infty} g(\lambda) = 0$$

Доказательство.

1. $\lambda, \mu \in \rho(T)$
$$V(\lambda)V(\mu) = (\lambda I - T)(\mu I - T) = V(\mu)V(\lambda)$$
$$\exists \big(V(\lambda)\big)^{-1},\ \big(V(\mu)\big)^{-1}, \quad R(\lambda) = \big(V(\lambda)\big)^{-1}, \quad R(\mu) = \big(V(\mu)\big)^{-1}$$
$$\implies \big(V(\mu)\big)^{-1}\big(V(\lambda)\big)^{-1} = \big(V(\lambda)\big)^{-1}\big(V(\mu)\big)^{-1}$$

2. $\lambda, \mu \in \rho(T)$
$$V(\lambda) - V(\mu) = (\lambda I - T) - (\mu I - T) = (\lambda - \mu)I$$
Если $A, B \in \mathscr{B}(X), \quad \exists A^{-1}, B^{-1}$, то
$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}$$
Возьмём $A = V(\lambda),\ B = V(\mu)$.
$$R(\lambda) - R(\mu) = R(\lambda)\big((\mu - \lambda)I\big)R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)$$

3. Известно, что $\mathrm{In}(X)$ (множество обратимых операторов) открыто:
$$\exists A^{-1} \quad \|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|} \implies \exists B^{-1}$$
$$\mu \in \rho(T), \quad A = V(\mu) \implies \exists R(\mu) = \big(V(\mu)\big)^{-1}$$
$$V(\lambda) - V(\mu) = (\lambda - \mu)I \implies \|V(\lambda) - V(\mu)\| = |\lambda - \mu|$$
$$|\lambda - \mu| < \frac{1}{\|R(\mu)\|} \implies \|V(\lambda) - V(\mu)\| < \frac{1}{\|R(\mu)\|} \implies \exists \big(V(\lambda)\big)^{-1} \implies \lambda \in \rho(T)$$

4. $\lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| > \|T\|$
Рассмотрим оператор
$$\Big\|\frac{1}{\lambda}T\Big\| < 1 \xRightarrow[\text{т. об обр. опер., близкого к тожд.}]{} \exists \Big(I - \frac{1}{\lambda}T\Big)^{-1} \implies$$
$$\implies V(\lambda) = \lambda I - T = \lambda\Big(I - \frac{1}{\lambda}T\Big) \implies \exists R(\lambda) = \big(V(\lambda)\big)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\Big(I - \frac{1}{\lambda}T\Big)^{-1}$$

5. $\mu \in \rho(T)$
$$\lim_{\lambda \to \mu}\big(V(\mu) - V(\lambda)\big) = \lim_{\lambda \to \mu}(\mu - \lambda)I = 0$$
По теореме об открытости $\mathrm{In}(A)$,
$$\varphi : A \to A^{-1}, \quad A \in \mathrm{In}(X) \implies \varphi \text{ непрерывно}$$
$$\left.\begin{aligned} \varphi\big(V(\lambda)\big) &= V(\lambda) \\ \lim_{\lambda \to \mu} V(\lambda) &= V(\mu) \end{aligned}\right\} \implies \lim_{\lambda \to \mu} R(\lambda) = R(\mu)$$
Пусть $|\lambda| > \|T\|$.
$$\lim_{\lambda \to \infty}\Big(I - \frac{1}{\lambda}T\Big) = I$$
$$R(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\Big(I - \frac{1}{\lambda}T\Big)^{-1}$$
По непрерывности,
$$\lim\Big(I - \frac{1}{\lambda}T\Big)^{-1} = I \implies \lim R(\lambda) = 0$$

6. $\mu \in \rho(T)$, λ из некоторой окрестности μ

$$\frac{R(\lambda)-R(\mu)}{\lambda-\mu} \xlongequal[\text{т-во Гильберта}]{} \frac{(\mu-\lambda)R(\lambda)R(\mu)}{\lambda-\mu} = -R(\lambda)R(\mu) \implies \exists \lim_{\lambda\to\mu} \frac{R(\lambda)-R(\mu)}{\lambda-\mu} = -\big(R(\mu)\big)^2$$

Возьмём $F \in \big(\mathscr{B}(X)\big)^*$, $F : \mathscr{B}(X) \to \mathbb{C}$. Рассмотрим функцию $g(\lambda) = F\big(R(\lambda)\big)$ при $\lambda \in \rho(T)$.

$$\lim_{\lambda\to\mu} \frac{g(\lambda)-g(\mu)}{\lambda-\mu} = \lim_{\lambda\to\mu} \frac{F\big(R(\lambda)\big)-F\big(R(\mu)\big)}{\lambda-\mu} \xlongequal[\text{лин. } F]{} \lim F\Big(\frac{R(\lambda)-R(\mu)}{\lambda-\mu}\Big) \xlongequal[\text{непр. } F]{} -F\Big(\big(R(\mu)\big)^2\Big)$$

То есть, $\exists g'(\mu)$ $\forall \mu \in \rho(T)$.

$$\lim_{\mu\to\infty} R(\mu) = 0 \xRightarrow[\text{непр. } F]{} \lim_{\mu\to\infty} F\Big(\big(R(\mu)\big)^2\Big) = 0$$

□

61. Теорема о компактности и непустоте спектра. Формула для спектрального радиуса. Следствие о спектре сопряжённого оператора

Следствие. X — банахово, $T \in \mathscr{B}(X)$

$$\sigma(T) \text{ — компакт}, \quad \sigma(T) \neq \emptyset$$

Доказательство.

1. Компактность
$$\rho(T) \text{ открыто} \implies \sigma(T) \text{ замкнуто}$$
$$|\lambda| > \|T\| \implies \lambda \in \rho(T)$$
Значит,
$$\lambda \in \sigma(T) \implies |\lambda| \le \|T\|$$
То есть,
$$\sigma(T) \subset \{\, \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \le \|T\| \,\} \implies \sigma(T) \text{ ограничено} \implies \sigma(T) \text{ — компакт}$$

2. Непустота
Пусть $\sigma(T)$ пусто. Тогда $\rho(T) = \mathbb{C}$, то есть
$$\forall F \in \big(\mathscr{B}(X)\big)^* \quad g(\lambda) = F\big(R(\lambda)\big) \text{ — аналитическая в } \mathbb{C} \text{ (целая)}$$

$$V(0) = -T \implies \exists T^{-1} \in \mathscr{B}(X) \xRightarrow[\text{сл. из т. Хана–Банаха}]{} \exists F \in \big(\mathscr{B}(X)\big) : \quad g(0) \neq 0$$

Выберем $g(\lambda) = F\big(R(\lambda)\big)$.
Таким образом, $g(z)$ — целая, g ограничена. Значит, по теореме Лиувилля, $g \equiv \text{const}$ — $\lightning$ с $\lim\limits_{g\to 0} = 0$.

□

Пример. $Ix = x$
$$\sigma(I) = \{\, 1 \,\} = \sigma_p(I)$$

$$(\lambda I - I) = (\lambda - 1)I \implies R(\lambda) = \frac{1}{\lambda-1} I \quad \forall \lambda \neq 1$$

Теорема 29 (спектр и резольвента сопряжённого оператора).

1. X — банахово, $\quad T \in \mathscr{B}(X)$

$$\implies \sigma(T^*) = \sigma(T)$$

Если $\lambda \in \rho(T)$, то

$$\big(R(\lambda, T)\big)^* = R(\lambda, T^*)$$

2. H — гильбертово, $\quad T \in \mathscr{B}(H)$, $\quad T$ — эрмитово-сопряжённый

$$\implies \sigma(T^*) = \{\, \lambda \mid \overline{\lambda} \in \sigma(T) \,\}$$

Если $\lambda \in \rho(T)$, то

$$R(\lambda, T^*) = \big(R(\overline{\lambda}, T)\big)^*$$

Доказательство.

1. X — банахово, $\quad \lambda \in \rho(T)$

$$V(\lambda) = \lambda I - T \implies \big(V(\lambda)\big)^* = \lambda I - T^*$$

$$\Big(\big(V(\lambda)\big)^{-1}\Big)^* = \Big(\big(V(\lambda)\big)^*\Big)^{-1}$$

2. X — гильбертово

$$\big(V(\lambda)\big)^* = \overline{\lambda} I - T^*$$

□

62. Компактные операторы. Компактность оператора конечного ранга. Размерность замкнутого подпространства образа компактного оператора. Следствия

Определение 18. X, Y — банаховы, $\quad T \in \mathscr{L}in(X, Y)$
T называется *компактным*, если $T\big(\mathsf{B}_1(0)\big)$ относительно компактен.

Обозначение. $\mathrm{Com}(X, Y)$ — множество компактных операторов.

Свойства.

1. $\mathrm{Com}(X, Y) \subset \mathscr{B}(X, Y)$
2. $T \in Com(X, Y)$, $\quad A \subset X$ ограничено

$$T(A) \text{ относительно компактно}$$

3. $T \in \mathrm{Com}(X, Y)$ **тогда и только тогда**, когда

$$\{\, x_n \in X \,\}_{n=1}^{\infty} \text{ — ограниченная} \implies \exists \{\, n_k \,\}_{k=1}^{\infty} : \quad \exists \lim_{k \to \infty} T_{n_k} \in Y$$

Доказательство.

1. $T \in \mathrm{Com}(X, Y)$
Обозначим $B = \mathsf{B}_1^X(0)$.

$$\implies \overline{T(B)} \text{ — компакт} \implies T(B) \text{ ограничено} \implies T \in \mathscr{B}(X, Y)$$

□

Определение 19. X, Y — банаховы, $T \in \mathscr{B}(X, Y)$
Если $\dim T(X) \le +\infty$, то T называется *оператором конечного ранга.*

Пример. X, Y — банаховы, $\quad f_1, \dots, f_n \in X^*, \quad y_1, \dots, y_n \in Y$
Для $x \in X$ определим

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) y_j$$

$$T(x) \subset \mathscr{L}\{\, y_j \,\}_{j=1}^n \implies \dim T(X) \le n \implies T \text{ — конечного ранга}$$

Все операторы конечного ранга имеют такой вид.

Утверждение 7. X, Y — банаховы, $\quad T$ — конечного ранга

$$T \in \mathrm{Com}(X, Y)$$

Доказательство. $B \coloneqq \mathtt{B}_1^X(0)$

$$T(B) \subset T(X) \implies T(B) \text{ — ограниченное множество в конечномерном пр-ве} \implies$$
$$\implies T(B) \text{ относительно компактно}$$

□

Теорема 30. X, Y — банаховы, $\quad T \in \mathrm{Com}(X, Y), \quad L \subset T(X)$ — замкнутое подпространство

$$\dim L < +\infty$$

Доказательство.

- $T(X)$ — замкнутое подпространство Y

  $$T \in \mathscr{B}(X, T(X)), \quad T(X) \text{ — банахово} \xRightarrow[\text{т. Банаха об откр. отобр.}]{} T \text{ открыто} \implies$$
  $$\exists r > 0: \quad \mathtt{B}_r^{T(x)}(0) \subset \underbrace{T(B)}_{\text{отн. комп.}} \implies \mathtt{B}_r^{T(x)}(0) \text{ относительно компактно} \xRightarrow[\text{т. Рисса}]{} \dim T(X) < +\infty$$

- $L \subset T(X)$ — замкнутое подпространство
  Обозначим $X_1 = T^{-1}(L)$ (прообраз)

  $$T \in \mathscr{B}(X, Y) \xRightarrow[L \text{ замкнуто}]{} T^{-1}(L) \text{ замкнуто в } X \implies X_1 \text{ замкнуто} \implies X_1 \text{ — банахово}$$

  По первой части доказательства

  $$T(x_1) = L \implies \dim L < +\infty$$

□

Следствий нет ни у меня, ни у Якова...

63. Теорема об арифметических операциях с компактными операторами. Предел компактных операторов. Компактность эрмитово-сопряжённого оператора

Теорема 31.

1. X, Y — банаховы пространства

$$\mathrm{Com}(X, Y) \text{ — замкнутое подпространство } \mathscr{B}(X, Y)$$

2. X, Y, Z — банаховы, $X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{S} Z$

   (a) $T \in \mathrm{Com}(X,Y)$, $S \in \mathscr{B}(Y,Z)$
   $$ST \in \mathrm{Com}(X,Z)$$

   (b) $T \in \mathscr{B}(X,Y)$, $S \in \mathrm{Com}(Y,Z)$
   $$ST \in \mathrm{Com}(X,Z)$$

Доказательство. Обозначим $B = \mathtt{B}_1^X(0)$.

1. • $\alpha \in \mathbb{C}$, $T \in \mathrm{Com}(X,Y) \implies \alpha T \in \mathrm{Com}(X,Y)$ — очевидно

   • Возьмём $T, S \in \mathrm{Com}(X,Y)$.
   $T(B)$ относительно компактно $\implies$ $T(B)$ вполне ограничено. Возьмём $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ε-сети:
   $$\exists E \subset Y \text{ — конечная } \varepsilon\text{-сеть для } T(B)$$
   $$\exists F \subset Y \text{ — конечная } \varepsilon\text{-сеть для } S(B)$$

   $$E + F = \{\, e + f \mid e \in E,\ f \in F \,\} \text{ — конечное, } 2\varepsilon\text{-сеть для } T(B) + S(B) \implies$$
   $$\implies T(B) + S(B) \text{ относительно компактно}$$

   $(T+S)(B) \subset T(B)+S(B) \implies (T+S)(B)$ относительно компактно $\implies T+S \in \mathrm{Com}(X,Y)$

   • $\{\, T_n \in \mathrm{Com}(X,Y) \,\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$
   Возьмём $\varepsilon > 0$.
   $$\exists n \in \mathbb{N} : \quad \|T - T_n\| < \varepsilon$$
   При этом, $T_n(B)$ относительно компактно.
   $$\implies \exists E \text{ — конечная } \varepsilon\text{-сеть для } T_n(B)$$
   Проверим, что E — ε-сеть для $T(B)$. Возьмём $x \in B$.
   $$\exists e \in E : \quad \|T_n x - e\| < \varepsilon$$
   $$\|Tx - e\| \overset{\triangle}{\le} \|Tx - T_n x\| + \|T_n x - e\| \le \underbrace{\|T - T_n\|}_{<\varepsilon} \cdot \underbrace{\|x\|}_{<1} + \varepsilon < 2\varepsilon$$
   Значит, $T(B)$ вполне ограничено и относительно компактно.

2. X, Y, Z

   (a) $T \in \mathrm{Com}(X,Y)$
   $$T(B) \text{ относительно компактно }, \quad S \in \mathscr{B}(Y,Z)$$
   $$\xRightarrow[\text{непр. } S]{} S\big(T(B)\big) \text{ относительно компактно } \implies ST \in \mathrm{Com}(X,Z)$$

   (b) $T \in \mathscr{B}(X,Y)$
   $$\implies T(B) \text{ ограничено}, \quad S \in \mathrm{Com}(X,Y)$$
   $$\implies S\big(T(B)\big) \text{ относительно компактно}$$

$\square$

Следствие. X — банахово
Тогда $\mathrm{Com}(X)$ — *двусторонний замкнутый идеал алгебры* $\mathscr{B}(X)$.

Про предел компактных операторов тоже нигде найти не могу...

Теорема 32. H — гильбертово
$$T \in \mathrm{Com}(H) \iff T^* \in \mathrm{Com}(H)$$
(T^* — эрмитово сопряжённый)

Доказательство.

- $T \in \mathrm{Com}(H)$

  Возьмём $x \in H$.
  $$\|T^*x\|^2 = (T^*x, T^*x) = (TT^*x, x) \underset{\text{К–Б}}{\le} \|TT^*x\| \cdot \|x\| \tag{5}$$

  Возьмём $\{\, x_n \in H \,\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что
  $$\exists M > 0 : \quad \|x_n\| \le \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

  Проверим, что $\exists \{\, n_k \,\} : \quad \exists \lim T^* x_{n_k}$.
  $$\left.\begin{matrix} T \in \mathrm{Com}(H) \\ T^* \in \mathscr{B}(H) \end{matrix}\right\} \implies TT^* \in \mathrm{Com}(H) \implies \exists \{\, n_k \,\} : \quad \exists \lim TT^* x_{n_k} \implies$$
  $$\implies \{\, TT^* x_{n_k} \,\} \text{ фундаментальна}$$

  $$\|T^*x_{n_k} - T^*x_{n_j}\|^2 = \left\|T^*(x_{n_k} - x_{n_j})\right\|^2 \underset{(5)}{\le} \underbrace{\|(TT^*)(x_{n_k}) - TT^*x_{n_j}\|}_{\xrightarrow[k,j\to\infty]{}0} \cdot \underbrace{\|x_{n_k} - x_{n_j}\|}_{\le 2M} \implies$$
  $$\implies \{\, T^* x_{n_k} \,\} \text{ фундаментальна } \implies \exists \lim T^* x_{n_k} \implies T^* \in \mathrm{Com}(H)$$

- $T^* \in \mathrm{Com}(H) \implies T = T^{**} \in \mathrm{Com}(H)$

$\square$

Замечание. X, Y — банаховы
$$T \in \mathrm{Com}(X, Y) \iff T^* \in \mathrm{Com}(Y^*, X^*)$$

Без доказательства. $\square$

64. Конечность числа линейно-независимых собственных векторов компактного оператора, соответствующих собственным числам, модули которых равномерно отделены от нуля. Следствия

Замечание (воспоминания из алгебры). X — линейное пространство, $\quad T \in \mathscr{L}in(X), \quad \{\, \lambda_j \,\}_{j=1}^{n}$ — с. ч., $Tx_j = \lambda_j x_j, \quad \lambda_j \ne \lambda_k, \quad x_j$ — с. в. $(x_j \ne 0)$
$$\implies \{\, x_j \,\} \text{ ЛНЗ}$$

Теорема 33. X — банахово, $\quad T \in \mathrm{Com}(X), \quad \lambda \in \sigma_p(T)$ — с. ч., $\quad X_\lambda = \mathrm{Ker}(\lambda I - T)$ — собств. подпр-во, $\delta > 0$
$$\sum_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T) \\ |\lambda| \ge \delta}} \dim(X_\lambda) < +\infty$$

То есть, число линейно-независимых собственных векторов T, соответствующих собственным числам λ, таких, что $|\lambda| \ge \delta$, конечно.

Доказательство. **Пусть** $\{\, x_n \,\}_{n=1}^{\infty}$ — ЛНЗ с. в.:
$$Tx_n = \lambda_n x_n, \quad |\lambda_n| \ge \delta$$

Рассмотрим последовательность подпространств:

$$L_n = \mathscr{L}\{ x_j \}_{j=1}^n, \quad L_n \subsetneq L_{n+1}$$

$$\xRightarrow[\text{лемма Рисса}]{} \exists \{ y_n \}_{n=1}^\infty : \quad \|y_n\| = 1, \quad \rho(y_{n+1}, L_n) = \inf_{x \in L_n} \|y_{n+1} - x\| \geq \frac{1}{2}$$

(т. к. $\dim L_n = n$, то $\exists y_{n+1} : \rho(y_{n+1}, L_n) = 1$)

Проверим, что $\|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{\delta}{2}$. Тогда не будет существовать фундаментальной подпоследовательности $\{ Ty_n \}$, а значит, и последовательности $\{ n_k \}$ такой, что $\exists \lim Ty_{n_k}$ — $\lightning$ с $T \in \mathrm{Com}(X)$.

Пусть $y_n \in L_n, \quad y_n \notin L_{n-1}$. Тогда $y_n = \alpha n x_n + u_n, \quad \alpha_n \neq 0,\ u_n \in L_{n-1}$.

$$Tx_n = \lambda_n x_n \implies Ty_n = \alpha_n \lambda_n x_n + Tu_n = \lambda_n(\alpha_n x_n + u_n) - \underbrace{\lambda_n u_n + Tu_n}_{=: v_n \in L_{n-1}} = \lambda_n y_n + v_n$$

Пусть $n > m$.

$$Ty_m \in L_n \subset L_{n-1}$$

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|\lambda_n y_n + v_n - Ty_m\| = |\lambda_n| \left\| y_n - \underbrace{\frac{1}{\lambda_n}(-v_n + Ty_m)}_{\in L_{n-1}} \right\| \geq \frac{\delta}{2}$$

Значит, последовательность y_n не содержит фундаментальных подпоследовательностей. □

Следствие. $T \in \mathrm{Com}$

1. $\delta > 0$

$$\left| \{ \lambda \in \sigma_p(T) \mid |\lambda| \geq \delta \} \right| < +\infty$$

2. $\lambda \in \sigma_p(T), \quad \lambda \neq 0, \quad X_\lambda = \mathrm{Ker}(\lambda I - T)$

$$\dim X_\lambda < +\infty$$

3. N — количество собственных чисел.

   Тогда

   (a) $0 \leq N \leq +\infty$ (т. е. $\sigma_p(T)$ не более, чем счётно);

   (b) если $N = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

   Их можно занумеровать в порядке убывания модулей.

Доказательство.

1. Очевидно.

2. Очевидно.

3. $E_n := \left\{ \lambda \in \sigma_n(T) \;\middle|\; |\lambda| \geq \frac{1}{n} \right\}, \quad |E_n| < +\infty$

$$\sigma_p(T) \setminus \{ 0 \} = \bigcup_{n=1}^\infty E_n \implies \sigma_p(T) \text{ не более, чем счётно}$$

$$\forall \delta > 0 \quad \{ \lambda \in \sigma_p(T) \mid |\lambda| > \delta \} \text{ конечно} \implies \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$$

□

Замечание. $0 \in \sigma_p(T) \iff \mathrm{Ker}\, T \neq \{ 0 \} \iff T$ не инъекция.

Если $T \in \mathrm{Com}(X), \quad \dim X = +\infty$, то $0 \in \sigma(T)$.

Доказательство.

$$0 \in \rho(T) \iff \exists V(0) = -T, \quad \exists T^{-1} \implies T(X) = X \xRightarrow[T \in \mathrm{Com}(X)]{} \dim X < +\infty$$

□

65. Условие разрешимости уравнения Фредгольма. Замкнутость образа оператора Фредгольма

Будем изучать гильбертовы пространства, так как там проще доказательства. Всё это верно и для банаховых пространств.

Определение 20. H — гильбертово, $\quad T \in \mathrm{Com}(H), \quad S = I - T$
S будем называть *оператором Фредгольма*

Определение 21. Рассмотрим серию уравнений:

1. *уравнение Фредгольма*: $Sx = a$;
2. *однородное уравнение Фредгольма*: $Sx = 0$;
3. *сопряжённое уравнение Фредгольма*: $S^*y = h$;
4. *однородное сопряжённое уравнение Фредгольма*: $S^*y = 0$.

$$\lambda \in \mathbb{C} \neq 0, \quad V(\lambda) = \lambda I - T = \lambda\Big(I - \frac{1}{\lambda}T\Big)$$

$$\frac{1}{\lambda} \in \mathrm{Com}(H) \implies I - \frac{1}{\lambda}T \text{ — оператор Фредгольма}$$

Значит, свойства S можно будет распространить на $V(\lambda)$.

Теорема 34. H — гильбертово, $\quad T \in \mathrm{Com}(H), \quad S = I - T$

1. $S(H)$ замкнуто;
2. $S^*(H)$ замкнуто;
3. $H = S(H) \oplus \operatorname{Ker} S^*$;
4. $H = S^*(H) \oplus \operatorname{Ker} S$.

Замечание. 3. и 4. эквивалентны тому, что
Уравнение $Sx = a$ разрешимо **для тех и только тех** a, которые ортогональны решениям однородного сопряжённого уравнения Фредгольма $S^*y = 0$.

Лемма 4 (об ограниченных прообразах)**.** В условиях теоремы $\{\, y_n \in S(H) \,\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена

$$\exists \{\, x_n \,\}_{n=1}^{\infty} : \quad \{\, x_n \,\} \text{ ограничена}, \quad Sx_n = y_n$$

Доказательство. $M = \operatorname{Ker} S, \quad L = M^{\perp}, \quad H = M \oplus L$

$$S(M) = 0 \implies S(H) = S(L)$$

$$y \in S(H) \implies \exists! x \in L : \quad Sx = y$$

$$\forall y_n \quad \exists x_n \in L : \quad Sx_n = y_n$$

Проверим, что $\{\, x_n \,\}$ ограничена. **Пусть** это не так, т. е.

$$\exists \{\, n_k \,\}_{k=1}^{\infty} : \quad \lim \|x_{n_k}\| = +\infty$$

НУО будем считать, что сама последовательность $\{ x_n \}$ обладает таким свойством:

$$\lim \|x_n\| = +\infty$$

Возьмём последовательность

$$\left\{ \frac{x_n}{\|x_n\|} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$T \in \mathrm{Com}(H) \implies \exists \{ n_k \} : \quad \exists \lim T\Big(\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\Big) =: z_0$$

$$y_{n_k} = S(x_{n_k}) = x_{n_k} - T(x_{n_k}) \implies \underbrace{\frac{y_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} 0} = \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} - \underbrace{T\Big(\frac{x_n}{\|x_{n_k}\|}\Big)}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} z_0} \implies$$

$$\implies \lim_{k\to\infty}\Big(\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\Big) = z_0 \xrightarrow[T\in\mathscr{B}(H)]{} \lim_{k\to\infty} T\Big(\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}\Big) = T(z_0) \implies$$

$$\implies z_0 = T(z_0) \implies S(z_0) = z_0 - Tz_0 = 0 \implies z_0 \in M = \operatorname{Ker} S$$

$$\frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} \in L \text{ — замкнуто}, \quad \lim \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|} = z_0 \implies z_0 \in L, \quad \|z_0\| = 1$$

При этом, $z_0 \in L \cap M \implies z_0 = 0$ — $\lightning$. □

Доказательство (теоремы).

1. Докажем, что $S(H)$ замкнуто. Возьмём $\{ y_n \in S(H) \}_{n=1}^{\infty} : \quad \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_0$.

$$\exists \lim y_n \implies \{ y_n \} \text{ ограничена} \xRightarrow[\text{лемма}]{} \exists \{ x_n \in H \} : \quad \{ x_n \} \text{ ограничена}, \quad Sx_n = y_n$$

$$T \in \mathrm{Com}(H) \implies \exists \{ n_k \} : \quad \lim T_{x_{n_k}} = z_0$$

$$\underbrace{y_{n_k}}_{\to y_0} = S(x_{n_k}) = x_{n_k} - \underbrace{Tx_{n_k}}_{\to z_0}$$

$$\implies \exists \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \xRightarrow[T\in\mathscr{B}(H)]{} \lim T(x_{n_k}) = Tx_0$$

$$\implies z_0 = Tx_0 \implies y_0 = x_0 - Tx_0 = S(x_0) \implies y_0 \in S(H)$$

2. $S^* = I - T^*, \quad T^* \in \mathrm{Com}(H) \implies S^*(H)$ замкнуто.
3.
$$\forall A \in \mathscr{B}(H) \quad H = \overline{A(H)} \oplus \operatorname{Ker} A^*$$
$$S(H) = \overline{S(H)} \implies H = S(H) \oplus \operatorname{Ker} S^*$$

4. Аналогично.

□

66. Альтернатива Фредгольма: инъективность оператора Фредгольма эквивалентна его сюръективности

Лемма 5 (о стабилизации). $k \geq 0, \quad H_{k+1} \coloneqq S(H_k)$

$$\exists n \geq 0 : \quad H_n = H_{n+1}$$

Доказательство. **Допустим**, что $H_{k+1} \subseteq H_k$.

$$\implies H_k = H_{k+1} \oplus \underbrace{H_{k+1}^{\perp}}_{\text{ортогональное дополнение в } H_k}$$

$$\implies \exists x_k \in H_k: \quad \|x_k\| = 1, \quad x_k \perp H_{k+1}$$

Пусть $n > m$. Хотим оценить разность $\|Tx_n - Tx_m\|$.

$$Sx_n - Sx_m = x_n - Tx_n - x_m + Tx_m$$

$$Sx_n = x_n - Tx_n$$

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|x_n - Sx_n - x_m + Sx_m\| \geq 1$$

$$Sx_n \in H_{n+1}, \quad Sx_m \in H_{m+1}$$

$$x_n, Sx_n, Sx_m \in H_{m+1} \implies x_m \perp H_{m+1}$$

Значит, не существует $\{ Tx_{n_k} \}: \quad \exists \lim T_{x_{n_k}}, \quad T \in \mathrm{Com}(H) — \lightning$. □

Теорема 35.

$$\operatorname{Ker} S = \{ 0 \} \iff S(H) = H$$

Другая формулировка. Оператор S — инъекция **тогда и только тогда**, когда S — сюръекция.

Другая формулировка.

- **Либо** уравнение Фредгольма разрешимо для любой правой части и решение единственно.
- **Либо** существует ненулевое решение однородного уравнения Фредгольма.

Доказательство.

- $\implies$

  $\operatorname{Ker} S = \{ 0 \}$, т. е. S — инъекция.

  Докажем, что $S(H) = H$. **Пусть** $S(H) \subsetneq H$, т. е. $\exists x \in H: \quad x \notin S(H)$.

  Подействуем на x оператором S:

  $$Sx \in S(H), \quad S(Sx) \notin S(H)$$

  (т. к. прообраз у элемента ровно один, и это — Sx)

  $$\implies Sx \in S(H) \setminus S^2(H)$$

  И так далее для любого n:

  $$S^n x \in S^n(H) \setminus S^{(n+1)}(H)$$

  Это **противоречит** лемме.

- $\impliedby$

  $$\left.\begin{matrix} S(H) = H \\ H = S(H) \oplus \operatorname{Ker} S^* \end{matrix}\right\} \implies \operatorname{Ker} S^* = \{ 0 \} \xRightarrow[S^* = I - T^*]{}$$

  $$\implies S^* — \text{оператор Фредгольма} \xRightarrow[\text{только что доказано}]{} S^*(H) = H$$

  $$H = S^*(H) \oplus \operatorname{Ker} S \implies \operatorname{Ker} S = \{ 0 \}$$

□

67. Теорема о числе линейно-независимых решений однородного уравнения Фредгольма. Следствие о спектре компактного оператора

Теорема 36. $S = I - T, \quad T \in \mathrm{Com}(H)$

$$\dim \operatorname{Ker} S = \dim \operatorname{Ker} S^* < +\infty$$

Другая формулировка. Однородные уравнения Фредгольма $Sx = 0$ и $S^*y = 0$ имеют одно и то же, и при том конечное, число ЛНЗ решений.

Доказательство. Пусть $\dim \operatorname{Ker} S = n < +\infty$ (уже доказано для банахова пространства).

$$\dim \operatorname{Ker} S^* =: m < +\infty$$

Пусть $n < m$.
Выберем в этих пространствах ОНБ:

$$\{ e_i \}_{i=1}^n \text{ — ОНБ } \operatorname{Ker} S, \quad \{ f_j \}_{j=1}^m \text{ — ОНБ } \operatorname{Ker} S^*$$

Определим $V : H \to \operatorname{Ker} S^*$:

$$x \in H \quad Vx = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) f_K$$

$$V(H) \subset \operatorname{Ker} S^* \implies \dim\big(V(H)\big) < +\infty \implies V \text{ — конечного ранга } \implies V \in \operatorname{Com}(H)$$

$$U := S + V = I - \underbrace{(T - V)}_{\in \operatorname{Com}(H)} \implies U \text{ — оператор Фредгольма}$$

Для U верна теор. 35. Проверим, что $\operatorname{Ker} U = \{ 0 \}$. Пусть $x \in \operatorname{Ker} U$.

$$Ux = 0 \implies Sx + Vx = 0$$

$$\left.\begin{matrix} Sx \in S(H) \\ Vx \in \operatorname{Ker} S^* \end{matrix}\right\} \xRightarrow[S(H) \perp \operatorname{Ker} S^*]{} Sx \perp Vx \implies \begin{cases} Sx = 0 \\ Vx = 0 \end{cases}$$

$$Vx = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) f_k = 0 \implies (x, e_K) = 0 \quad \forall k \implies x \perp \operatorname{Ker} S \xRightarrow[x \in \operatorname{Ker} S]{} x = 0$$

По 35 $U(H) = H$. Проверим, что это невозможно для $n + 1$, т. е. что

$$f_{n+1} \notin U(H)$$

Возьмём $x \in H$.

$$Ux = Sx + Vx$$

$$f_{n+1} \in \operatorname{Ker} S^* \implies f_{n+1} \perp S(H) \implies f_{n+1} \perp Sx$$

$$Vx = \sum (x, e_k) f_k \xRightarrow[f_{n+1} \perp f_k]{} f_{n+1} \perp Vx \implies f_{n+1} \in \big(U(H)\big)^{\perp} = \{ 0 \} \text{ — } \lightning$$

Тем самым, мы доказали, что

$$\dim \operatorname{Ker} S \geq \dim \operatorname{Ker} S^* \geq \dim \operatorname{Ker} S^{**} = \dim \operatorname{Ker} S$$

□

Следствие. $T \in \operatorname{Com}(T)$

1. $\lambda \notin 0, \quad \lambda \in \sigma(T)$

$$\lambda \in \sigma_p(T)$$

2. $\lambda \in \sigma_p(T), \quad H_\lambda = \operatorname{Ker}(\lambda I - T), \quad Y_{\overline{\lambda}} = \operatorname{Ker}(\overline{\lambda} I - T^*)$

$$\dim H_\lambda = \dim Y_{\overline{\lambda}} < +\infty$$

3.

$$\sigma_p(T) \setminus \{ 0 \} = \{ \lambda_n \}_{n=1}^{N}$$

При этом, если $N = +\infty$, то

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0$$

68. Простейшие свойства самосопряжённого оператора

Свойства. H — гильбертово, $\quad T \in \mathscr{B}(H), \quad T = T^*$ (т. е. $(Tx, y) = (x, Ty)$)

1. $(Tx, x) \in \mathbb{R} \quad \forall x;$
2. $\lambda \in \sigma_p(T) \implies \lambda \in \mathbb{R};$
3. $\lambda, \mu \in \sigma_p(T), \quad Tu = \lambda u, \quad Tv = \mu v$

   $$u \perp v$$

4. $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Tx, x)|;$

Доказательство.

1. $$\left.\begin{aligned} (Tx, x) &= \overline{(x, Tx)} \\ (Tx, x) &= (x, Tx) \end{aligned}\right\} \implies (x, Tx) \in \mathbb{R}$$

2. $$\lambda \in \sigma_p(T) \implies \exists u \neq 0$$

   $$Tu = \lambda u \implies (Tu, u) = (\lambda u, u) \implies \lambda = \frac{(Tu, u)}{\|u\|^2} \in \mathbb{R}$$

3. $Tu = \lambda u, \quad Tv = \mu v, \quad \lambda \neq \mu, \quad u, v \neq 0$

   $$\left.\begin{aligned} &(Tu, v) == (\lambda u, v) = \lambda(u, v) \\ &(Tu, v) = (u, Tv) = (u, \mu v) \xlongequal[\mu \in \mathbb{R}]{} \mu(u, v) \end{aligned}\right\} \xRightarrow[\text{вычтем}]{} \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0}(u, v) = 0 \implies u \perp v$$

4. $Q = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Tx, x)|$

   - Пусть $x \in H, \quad \|x\| = 1.$

     $$|(Tx, x)| \underset{\text{К–Б}}{\leq} \|Tx\| \cdot \|x\| \leq \|T\| \cdot \underbrace{\|x\| \cdot \|x\|}_{=1} = \|T\| \quad \forall x : \ \|x\| = 1$$

     $$\implies Q = \sup_{\|x\|=1} |(Tx, x)| \leq \|T\|$$

   - Пусть $u \in H, \quad u \neq 0.$

     $$\left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| = 1 \implies \left| \left(T\Big(\frac{u}{\|u\|}\Big), \frac{u}{\|u\|} \right) \right| \leq Q \implies |(Tu, u)| \leq Q\|u\|^2 \quad \forall u \in H \tag{6}$$

     Возьмём $x, y \in H$. Применим (6) к $(x + y)$ и к $(x - y)$:

     $$\big(T(x + y), x + y\big) = (Tx, x) + (Tx, y) + (Ty, x) + (Ty, y) \leq Q\|x + y\|^2$$

     $$-\big(T(x - y), x - y\big) = -\big((Tx, x) - (Tx, y) - (Ty, x) + (Ty, y)\big) \leq Q\|x - y\|^2$$

     Сложим эти два неравенства:

     $$2\big((Tx, y) + (Ty, x)\big) \leq Q\big(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2\big)$$

     К правой части применим тождество параллелограмма, а левую преобразуем:

     $$(Tx, y) + (Ty, x) = (Tx, y) + (y, Tx) = (Tx, y) + \overline{(Tx, y)} = 2\Re(Tx, y) \implies$$
     $$\implies 4\Re(Tx, y) \leq Q \cdot 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Выберем $x: \quad \|x\| = 1$ такой, что $Tx \neq 0$.

$$y := \frac{Tx}{\|Tx\|} \implies \|y\| = 1$$

Подставим x, y в неравенство:

$$4\Re\left(Tx, \frac{Tx}{\|Tx\|}\right) \leq 4Q \implies \|Tx\| \leq Q \quad \forall x: \ \|x\| = 1 \implies \|T\| \leq Q$$

□

69. Существование собственного числа, модуль которого равен норме компактного самосопряжённого оператора

Определение 22. $T = T^*$

$$M := \sup_{\|x\|=1} (Tx, x), \quad m := \inf_{\|x\|=1} (Tx, x)$$

M и m называются *границами* оператора T.

Замечание.

$$\|T\| = \max\{|M|, |m|\}$$

Теорема 37. H — гильбертово, $\quad T = T*, \quad T \in \mathrm{Com}(H)$

$$\exists \lambda \in \sigma_p(T): \quad |\lambda| = \|T\|$$

Доказательство.

- $\|T\| = |M|$

$$M = \sup_{\|x\|=1} (Tx, x) \implies \exists \{ x_n \}_{n=1}^{\infty}: \quad \|x_n\| = 1, \quad \lim(Tx_n, x_n) = M$$

$$\left.\begin{array}{l} m \leq M \\ \max\{|M|, |m|\} = |M| \end{array}\right\} \implies M > 0$$

$$T \in \mathrm{Com}(H) \implies \exists \{ n_k \}_{k=1}^{\infty}: \quad \exists \lim_{k \to \infty} Tx_{n_k} = y$$

Переименуем: $\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = y$. Проверим, что y — с. в. T и $Ty = My$.

$$0 \leq \|Tx_n - M \cdot x_n\|^2 = (Tx_n - Mx_n, Tx_n - Mx_n) =$$
$$= \|Tx_n\|^2 - \underbrace{M(Tx_n, x_n)}_{\to M} - \underbrace{M(x_n, Tx_n)}_{\to M} + M^2 \underbrace{\|x_n\|^2}_{=1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \|y\|^2 - M^2 \implies \|y\| \geq M$$

$$\|y\| = \lim \|Tx_n\| \leq \|T\| \cdot \|x_n\| = \|T\| = M \implies \|y\| \leq M$$
$$\implies \lim M \cdot x_n = \lim Tx_n = y$$

Воспользуемся тем, что T непрерывен:

$$M \cdot \lim x_n = y \implies M \underbrace{\lim Tx_n}_{=y} = Ty \implies Ty = My, \implies M \in \sigma_p(T), \quad M = \|T\|$$

- $\|T\| = |m|$

Рассмотрим оператор $T_1 = -T$.

$$\sup_{\|x\|=1} (T_1 x, x) = -m \implies \exists y \neq 0: \quad T_1 y = -my \implies Ty = my$$

□

70. Теорема Гильберта—Шмидта о представлении компактного самосопряжённого оператора в виде суммы ортогональных проекторов

Теорема 38. H — гильбертово, $T = T^*$, $T \in \mathrm{Com}(H)$, $\sigma(T) \setminus \{ 0 \} = \{ \lambda_n \}_{n=1}^{0 \le N \le +\infty}$, $\lambda_n \in \sigma_p(T)$, $H_{\lambda_n} = \mathrm{Ker}(\lambda_n I - T)$, $\dim H_{\lambda_n} < +\infty$, P_n — ортогональный проектор на H_{λ_n}

$$\implies T = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k P_k$$

Если $N = +\infty$, то

$$\left\| T - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_{\lambda_k} \right\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Доказательство. Возьмём $\lambda \ne 0$ из σ_p. Рассмотрим $\widetilde{T} = T - \lambda P_\lambda$ (P_λ — ортогональный проектор на собственное подпространство H_λ).

$$L := H_\lambda^\perp$$

$$\widetilde{T}\big|_{H_\lambda} = 0 \implies H_\lambda \in \mathrm{Ker}\, \widetilde{T}$$

$$T^* = T \implies (\widetilde{T})^* = \widetilde{T}$$

При этом, компактность сохраняется: $\widetilde{T} \in \mathrm{Com}(H)$.

Рассмотрим $\mu \ne \lambda$ из $\sigma_p(T)$.

$$H_\mu \perp H_\lambda \implies H_\mu \subset L \implies \mu \in \sigma_p(\widetilde{T}), \quad \mathrm{Ker}(\mu I - \widetilde{T}) = \mathrm{Ker}(\mu I - T)$$

$$\mathrm{Ker}\, \widetilde{T} = \mathrm{Ker}\, T \oplus H_\lambda$$

По предыдущей теореме,

$$\exists \lambda_1 : \quad |\lambda_1| = \|T\|$$

Уже доказано, что $\sigma(T) \subset \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \le \|T\| \}$. Значит, λ_1 — максимальное по модулю.

- Если $\lambda_1 = 0$, то $T = \mathbb{O}$.
- Если $\|T\| > 0$, то рассмотрим $T_1 = T - \lambda_1 \cdot P_1$.

По одному из простейших свойств самосопряжённого оператора, $|\lambda_1| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Tx, x)|$.

Можем вычислить $|\lambda_2|$:

$$|\lambda_2| = \sup_{\|x\|=1} |(T_1 x, x)| = \sup_{\substack{\|x\|=1, \\ x \perp H_{\lambda_1}}} |(Tx, x)|$$

Кроме того, $|\lambda_2| = \|T_1\|$.

И так далее по индукции.

- Если $\exists N : \quad T_N = 0$, то

$$T = \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k P_k$$

- Иначе:

$$\left\| T - \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k P_k \right\| = |\lambda_N|$$

Но $\lim\limits_{N \to \infty} \lambda_N = 0$, значит, $T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k$

□

71. Теорема Гильберта—Шмидта о существовании ОНБ из собственных векторов компактного самосопряжённого оператора

Теорема 39. H — гильбертово, сепарабельно, $\quad T = T^*, \quad T \in \mathrm{Com}(H)$
Тогда существует $\{ e_n \}_{n=1}^{\infty}$ — ОНБ из собственных векторов T.

Доказательство.

$$\sigma_p(T) \setminus \{ 0 \} = \{ \lambda_n \}_{n=1}^{N}, \quad |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$$

Если $N = \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0, \quad 0 \leq N \leq +\infty$.

$$H_n = \mathrm{Ker}(\lambda_n I - T)$$

$$\dim H_n = m_n, \quad 1 \leq n < +\infty$$

Пусть $\{ e_{n\ j} \}_{j=1}^{N}$ — ОНБ в H_n.

$$L \coloneqq \mathscr{L}\{ e_{n\ j} \}_{n=1}^{N}, \quad 1 \leq j \leq m_n$$

$$M \coloneqq L^{\perp}, \quad H = L \oplus M$$

Проверим, что $M = \mathrm{Ker}\, T$.

$$H_0 \coloneqq \mathrm{Ker}(0 \cdot I - T) = \mathrm{Ker}\, T = H_0 \perp H_{\lambda_n} \quad \forall n \geq 1$$

$$x \in H_0 \implies x \in M, \quad \mathrm{Ker}\, T \subset M$$

(H_λ все друг другу ортогональны; ноль — частный случай)
Возьмём $z \in M$.

$$z \perp H_{\lambda_n} \quad \forall n \geq 1 \implies P_z = 0 \xRightarrow[\text{т. Г.—Ш. о предст. опер.}]{} Tz = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_H = 0 \implies z \in \mathrm{Ker}\, T$$

$$H \text{ сепарабельно} \implies H_0 \text{ сепарабельно} \implies \exists \{ e_{0\ j} \}_{n=0,\ 1\leq j\leq m_n}^{N} \text{ — ОНБ в } H$$

□

Замечание. H — гильбертово пространство
Тогда существует ОНБ в $\overline{T(H)}$ из собственных векторов T.

Доказательство.

$$H = \overline{T(H)} \oplus \mathrm{Ker}\, T^* \xRightarrow[T=T^*]{} H = \overline{T(H)} \oplus \mathrm{Ker}\, T \implies L = \overline{T(H)}$$

Для $x \in \overline{T(H)}$

$$x = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{m_n} (x, e_{n_j}) e_{n_j}$$

□

72. Компактность интегрального оператора с ядром из L^2

Теорема 40. $\mathrm{L}^2(X, \mu), \ \mathrm{L}^2(Y, \nu)$ сепарабельны, $\quad K(x, y) \in \mathrm{L}^2(X \times Y)$

$$(\mathscr{K} f)(x) = \int\limits_Y K(x, y) f(y) \,\mathrm{d}\,\nu$$

$$\implies \mathscr{K} \in \mathrm{Com}\big(\mathrm{L}^2(Y), \mathrm{L}^2(X)\big)$$

Доказательство. Пусть $\{\, \varphi_n(x) \,\}_{n=1}^{\infty}$ — ОНБ в $\mathrm{L}^2(X,\mu)$, $\quad \{\, \psi_j(y) \,\}_{j=1}^{\infty}$ — ОНБ в $\mathrm{L}^2(Y,\nu)$.

Проверим, что $\{\, \varphi_n(x), \psi_j(y) \,\}_{n,j\in\mathbb{N}}$ — ОНБ в $\mathrm{L}^2(X,Y)$.

$$\int\limits_X \varphi_n(x)\overline{\varphi_m(x)}\,\mathrm{d}\,\mu = \begin{cases} 1, & n=m, \\ 0, & n\neq m, \end{cases} \qquad \int\limits_Y \psi_i(y)\psi_k(y)\,\mathrm{d}\,\nu = \begin{cases} 0 & j\neq k, \\ 1, & j=k. \end{cases}$$

- Проверим ортогональность

$$\iint\limits_{X\times Y} \varphi_n(x)\psi_i(y)\overline{\varphi_m(x)\psi_k(y)}\,\mathrm{d}\,\mu\,\mathrm{d}\,\nu = \int\limits_X \varphi_n\overline{\varphi}_m\,\mathrm{d}\,\mu \int\limits_Y \psi_j\overline{\psi}_k\,\mathrm{d}\,\nu = \begin{cases} 1, & m=n,\ j=k, \\ 0 \end{cases} \implies$$

$$\implies \{\, \varphi_n(x), \psi_j(y) \,\} \text{ — ОС}$$

- Проверим полноту

  Возьмём $f\in\mathrm{L}^2(X\times Y)$. Пусть $f\perp\{\, \varphi_n(x),\psi_j(y) \,\}_{n,j\in\mathbb{N}}$.

$$\iint\limits_{X\times Y} f(x,y)\overline{\varphi_n(x)\psi_j(y)}\,\mathrm{d}\,\mu\,\mathrm{d}\,\nu = 0 \quad \forall n,k$$

  Зафиксируем n.

$$\int\limits_Y \Big(\int\limits_X f(x,y)\overline{\varphi_n(x)}\,\mathrm{d}\,\mu\Big)\overline{\psi_k(y)}\,\mathrm{d}\,\nu = 0$$

$$\int\limits_X f(x,y)\overline{\varphi}_n\,\mathrm{d}\,\mu \perp \psi_k(y) \quad \forall k \implies \int\limits_X f(x,y)\overline{\varphi}_n\,\mathrm{d}\,\mu = 0 \text{ п. в. по } \nu \implies$$

$$\implies f(x,y)=0 \text{ п. в. по } \mu \implies f=\mathbb{O} \text{ в } \mathrm{L}^2(X\times Y), \quad K(x,y) = \sum_{1\leq i,j<+\infty} \alpha_{ij}\varphi_i(x)\psi_j(y)$$

  Рассмотрим частичные суммы:

$$K_n(x,y) = \sum_{\substack{1\leq j\leq n\\ 1\leq i\leq n}} \alpha_{ij}\varphi_i(x)\psi_i(y)$$

$$\lim \|K(x,y)-K_n(x,y)\| = 0$$

  Уже доказано, что

$$\|\mathscr{K}\|_{\mathscr{B}(\mathrm{L}^2(Y),\mathrm{L}^2(X))} \leq \|K(x,y)\|_{\mathrm{L}^2(X\times Y)}$$

  Возьмём $f\in\mathrm{L}^2(Y,\nu)$.

$$(\mathscr{K}_n f) = \int\limits_Y K_n(x,y)f(y)\,\mathrm{d}\,\nu = \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} \alpha_{ij}\varphi_i(x)\int\limits_Y f(y)\psi_j(y)\,\mathrm{d}\,\nu$$

$$L_n \coloneqq \mathscr{L}\{\, \varphi_j \,\}_{j=1}^n, \quad \dim L_n = n, \quad \mathscr{K}_n(f)\in L_n$$

  Значит, $\mathscr{K}_n$ — оператор конечного ранга.

$$\implies \mathscr{K}_n \in \mathrm{Com}\big(\mathrm{L}^2(Y),\mathrm{L}^2(X)\big)$$

$$\|\mathscr{K}-\mathscr{K}_n\|_{\mathscr{B}(\mathrm{L}^2(Y),\mathrm{L}^2(X))} \leq \|K(x,y)-K_n(x,y)\| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{L}^2(X\times Y)} 0$$

  Операторы компактные, значит, их предел по норме тоже компактен.

$\square$

Следствие. $\mathrm{L}^2(X,\mu)$ сепарабельно, $\quad K(x,y) \in \mathrm{L}^2(X \times X), \quad K(y,x) = \overline{K(x,y)}$

$$\mathscr{K} \in \mathrm{Com}\big(\mathrm{L}^2(X)\big)$$