Math 322: Dépendence et indépendence linéaire

Paul CLAVIER, Edouard MARGUERITE

8 novembre 2012

Définition 1

Soient E un K-ev, $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}^n$. On appelle *combinaison linéaire* de $x_1, \ldots, x_n$ tout élément x_n de E tel qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

Proposition 1

Soient E un K-ev, $F \in \beta(E)$. Pour que F soit un sev de E il faut et il suffit que F soit non vide et que F soit stable par combinaison linéaire, ie : $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall(x, y) \in F^2, \lambda x + \mu y \in F$.

Définition 2

Soient E un K-ev, $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$.

1. On dit que la famille finie $(x_1, \ldots, x_n)$ est *liée* si et seulement si $\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$,
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$$
2. On dit que la famille finie $(x_1, \ldots, x_n)$ est *libre* si et seulement si elle n'est pas liée.

Définition 3

Une partie de A est dite *libre* si et seulement si la famille $(x)_{x \in A}$ est libre.

Définition 4

Soient E un K-ev, $A \in \beta(e)$. On appelle sev engendré par A, et on note $Vect(A)$, l'intersection de tous les sev de E contenant A :

$$Vect(A) = \bigcap_{\substack{F \in V(E) \\ F \supset A}} F$$

avec $V(E)$ l'ensemble des sev de E.

Proposition 2

Soient E un K-ev, $A \in \beta(E)$.

1. $Vect(A)$ est le plus petit sev de E contenant A.
2. - Si $A \neq \emptyset$, alors $Vect(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A.
   - $Vect(\emptyset) = 0$.

Définition 5

Soient E un K-ev, $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. On appelle sev engendré par $(x_i)_{i\in I}$, et on note ici $Vect((x_i)_{i\in I})$, le sev engendré par la partie $\{x_i, i \in I\}$ de E.

Proposition 3

Soient E un K-ev, $A, B \in \beta(E)$. On a :

1. $A \subset B \Rightarrow Vect(A) \subset Vect(B)$.
2. A est un sev de E si et seulement si $Vect(A) = A$.
3. $Vect(Vect(A)) = Vect(A)$.
4. $Vect(A \cup B) = Vect(A) + Vect(B)$.

Définition 6

Soient E un K-ev, A une famille d'éléments de E. On dit que A est une famille génératrice de E si et seulement si $Vect(A) = E$.

Proposition 4

Si $A = (x_1, \ldots, x_n)$ est une famille finie d'éléments d'un K-ev, A engendre si et seulement si :

$$\forall x \in E, \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

Définition 7

On dit qu'une famille B d'éléments d'un K-ev est une *base* de E si et seulement si B est libre et génératrice de E.

Proposition 5

Une famille $B = (e_1, \ldots, e_2)$ d'éléments d'un K-ev E est une base de E si et seulement si :

$$\forall x \in E, \exists !(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Si E admet une base finie $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ pour tout x de E, les éléments $x_1, \ldots, x_n$ définis ci dessus s'appellent les coordonnées de x dans la base β ; x_i s'appelant la i^{me} coordonnée de x dans la base β.