Math 322: Dépendence et indépendence linéaire

Paul CLAVIER, Edouard MARGUERITE

8 novembre 2012

Définition 1

Soient E un K-ev, $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{E}^n$. On appelle *combinaison linéaire* de $x_1, \dots, x_n$ tout élément x_n de E tel qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

Proposition 1

Soient E un K-ev, $F \in \beta(E)$. Pour que F soit un sev de E il faut et il suffit que F soit non vide et que F soit stable par combinaison linéaire, ie : $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall(x, y) \in F^2, \lambda x + \mu y \in F$.

Définition 2

Soient E un K-ev, $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$.

1. On dit que la famille finie $(x_1, \ldots, x_n)$ est *liée* si et seulement si $\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$,
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$$
2. On dit que la famille finie $(x_1, \ldots, x_n)$ est *libre* si et seulement si elle n'est pas liée.

Définition 3

Une partie de A est dite *libre* si et seulement si la famille $(x)_{x \in A}$ est libre.

Définition 4

Soient E un K-ev, $A \in \beta(e)$. On appelle sev engendré par A, et on note $Vect(A)$, l'intersection de tous les sev de E contenant A :

$$Vect(A) = \bigcap_{\substack{F \in V(E) \\ F \supset A}} F$$

avec $V(E)$ l'ensemble des sev de E.

Proposition 2

Soient E un K-ev, $A \in \beta(E)$.

1. $Vect(A)$ est le plus petit sev de E contenant A.
2. - Si $A \neq \emptyset$, alors $Vect(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A.
   - $Vect(\emptyset) = 0$.

Proposition 3

Si $A = (x_1, \ldots, x_n)$ est une famille finie d'éléments d'un K-ev, A engendre E si et seulement si :

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$