

# [Info 525] Logique

CLAVIER Paul

September 16, 2013

## Contents

<b>1</b>	<b>Définition</b>	<b>3</b>
1.1	Logique classique ( $< 1850$ ) . . . . .	3
1.2	Logique moderne, symbolique axiomatique . . . . .	3
<b>2</b>	<b>De Morgan</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Boole</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Frege</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Gentzen</b>	<b>3</b>
<b>6</b>	<b>Russel</b>	<b>4</b>
<b>7</b>	<b>Méthodes</b>	<b>4</b>
7.1	Sémantique . . . . .	4
7.2	Syntaxique . . . . .	4
7.3	Types de logiques . . . . .	4
<b>8</b>	<b>Logique</b>	<b>4</b>
8.1	Introduction . . . . .	4
8.1.1	Vocabulaire . . . . .	5
8.1.2	Syntaxe . . . . .	5
<b>9</b>	<b>Validité d'une formule</b>	<b>5</b>
9.1	Sémantique . . . . .	5
9.2	Validité et Consistance . . . . .	6
9.3	Remarque: Métalangage . . . . .	6

## 1 Définition

- Logique vient du grec Logos, qui veut dire à la fois raison et langage.
- "Étude du discours rationnel."
- "Étude de la raison dans le langage."
- "Science des conditions de vérités."

### 1.1 Logique classique (< 1850)

- Analyse du langage.
- Division de la grammaire: sujet attribut.
- Prédominance de la logique Aristotélicienne.
- Plusieurs périodes.

### 1.2 Logique moderne, symbolique axiomatique

- Mathématisation, algébrisation de la logique.
- Les relations perdent leur caractère grammatical.
- Un système d'axiomes choisis arbitrairement et soumis à des règles de déduction immédiates.
- *Forme de pensée et une approche du logos différente.*
- Système de réécriture , manipulation des signes sans sens.

Pas de définition unique: fonction de l'époque, du logicien, de l'objectif.
---

## 2 De Morgan

- Définit l'expression de l'induction mathématique.
- Auteur des lois de De Morgan

## 3 Boole

## 4 Frege

- Fondateur de la logique moderne et de son symbolisme.
- Publie des ouvrages

## 5 Gentzen

- Définit une déduction naturelle.

## 6 Russel

## 7 Méthodes

### 7.1 Sémantique

On va s'intéresser au sens d'une formule (table de vérité)

### 7.2 Syntaxique

Réécriture

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$$

### 7.3 Types de logiques

- Logique des propositions (ordre 0).
- Logique des prédicats.
- Logiques déviantes.

## 8 Logique

### 8.1 Introduction

Le calcul des propositions ou des énoncés:

- des plus élémentaires (ordre 0)
- des plus fondamentaux
- des plus simples: propositions non analysée

Calcul:

- étudie les énoncés qui sont soit vrais, soit faux
- Vériconditionnel: comment les énoncés complexes deviennent vrais ou faux selon que énoncés qui le compose sont vrais ou faux.

**Définition** : Un énoncé ou proposition est de qui est vrai ou faux

Notion simplificatrice de la vérité

**On s'intéresse à la structure des propositions complexes**

- indépendamment de leur contenu de signification
- indépendamment de la langue naturelle

La logique est un langage

- Vocabulaire
- Syntaxe
- Sémantique

### 8.1.1 Vocabulaire

1. Ensemble infini dénombrable de proposition
  - désignés par une lettre minuscule
2. Ensemble d'opérateurs
  - négation:  $\neg$
  - conjonction:  $\wedge$
  - disjonction:  $\vee$
  - implication:  $\rightarrow$
  - équivalence:  $\leftrightarrow$
3. Ensemble de séparateurs:  $(, ), [, ], \{, \}$

### 8.1.2 Syntaxe

- Le vocabulaire peut donner lieu à de multiples assemblages de symboles
- Les assemblages qui font partie du langage sont appelés des formules
- Les formules sont obtenues à partir de règles de formation

#### Formules :

1. Toute proposition est une formule: formule atomique
2. Récurrence: Si  $A$  et  $B$  sont deux formules Alors  $\neg A$ ,  $(A \wedge B)$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \rightarrow B)$ ,  $(A \leftrightarrow B)$ , ... sont des formules
3. Clôture: rien d'autre n'est une formule

#### Remarques :

1. Les parenthèses permettent de déterminer l'ordre d'application des règles
2. Langage objet et méta-langage
  - langage objet: objet de la théorie (langage des formules)
  - introduction de nouveaux symboles:  $A$ ,  $B$ ,  $\Leftrightarrow$ ,  $\models$ , ... qui permettent de parler des formules (langage de l'observateur)
3. L'ensemble des formules est infini dénombrable
4. Cet ensemble est récursif

## 9 Validité d'une formule

### 9.1 Sémantique

- La sémantique attribue une signification aux formules du langage
- Une proposition est soit vraie soit fausse

**Définition :** Le domaine sémantique est  $\{V, F\}$

**Définition** : Interpréter une formule consiste à lui attribuer la valeur V ou F

**Définition** : On appelle assignation sur  $n$  propositions un ensemble d'interprétations de ces propositions. Elle définit un monde possible

**Définition** : L'interprétation est une fonction appelée fonction de vérité  $\{assignments\} \rightarrow \{V, F\}$ . A partir de  $n$  propositions, il est possible de définir  $2^{2^n}$

**Opérateur propositionnel** :

- Les fonctions de vérité d'une ou de deux propositions constituent les définitions sémantiques des opérateurs propositionnels
- Ces opérateurs suffisent pour exprimer les fonctions de vérité de plus de 2 propositions

**Définition** : Une assignation qui rend vrai une formule est appelé un modèle pour cette formule

## 9.2 Validité et Consistance

**Définition** : Une formule est sémantiquement consistante, ou consistante, si elle admet au moins un modèle.

**Définition** : Une formule est dite valide si toutes ses assignations sont des modèles. Une formule valide est aussi appelée tautologie.

**Théorème** : Si une formule est valide (resp. inconsistante), la formule obtenue en substituant chaque occurrence d'une lettre de proposition par une formule quelconque est également valide (resp. inconsistante).

## 9.3 Remarque: Métalangage

- L'expression: "A est une formule valide" appartient au métalangage, on la note:  $\models$
- Le symbole  $\models$  ne peut pas apparaître dans une formule du langage objet

**Remarque** :  $\rightarrow$  est un opérateur logique comme les autres.

LOL