[Info 525]Logique

CLAVIER Paul

October 2, 2013

Contents

1 Logique

1.1 Introduction

Le calcul des propositions ou des énoncés:

- des plus élémentaires (ordre 0)
- des plus fondamentaux
- des plus simples: propositions non analysée

Calcul:

- étudie les énoncés qui sont soit vrais, soit faux
- Vériconditionnel: comment les énoncés complexes deviennent vrais ou faux selon que énoncés qui le compose sont vais ou faux.

Définition : Un énoncé ou proposition est de qui est vrai ou faux

Notion simplificatrice de la vérité

On s'intéresse à la structure des propositions complexes

- indépendamment de leur contenu de signification
- indépendamment de la langue naturelle

La logique est un langage

- Vocabulaire
- Syntaxe
- Sémantique

1.1.1 Vocabulaire

1. Ensemble infini dénombrable de proposition
    - désignés par une lettre minuscule
2. Ensemble d'opérateurs
    - négation: $\neg$
    - conjonction: $\wedge$
    - disjonction: $\vee$
    - implication: $\rightarrow$
    - équivalence: $\leftrightarrow$
3. Ensemble de séparateurs: (,), [,] , {, }

1.1.2 Syntaxe

- Le vocabulaire peut donner lieu à de multiples assemblages de symboles
- Les assemblages qui font partie du langage sont appelés des formules
- Les formules sont obtenues à partir de règles de formation

Formules :

1. Toute proposition est une formule: formule atomique
2. Récurrence: Si A et B sont deux formules Alors $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$, ... sont des formules
3. Clôture: rien d'autre n'est une formule

Remarques :

1. Les parenthèses permettent de déterminer l'ordre d'application des règles
2. Langage objet et méta-langage
   - langage objet: objet de la théorie (langage des formules)
   - introduction de nouveaux symboles: A, B, $\Leftrightarrow$, $\vDash$, ... qui permettent de parler des formules (langage de l'observateur)
3. L'ensemble des formules est infini dénombrable
4. Cet ensemble est récursif

2 Validité d'une formule

2.1 Sémantique

- La sémantique attribue une signification aux formules du langage
- Un proposition est soit vraie soit fausse

Définition : Le domaine sémantique est $\{V, F\}$

Définition : Interpréter une formule consiste à lui attribuer la valeur V ou F

Définition : On appelle assignation sur n propositions un ensemble d'interprétations de ces propositions. Elle définit un monde possible

Définition : L'interprétation est une fonction appelée fonction de vérité $\{assignations\} \longrightarrow \{V, F\}$. A partir de n propositions, il est possible de définir 2^{2^n}

Opérateur propositionnel :

- Les fonctions de vérité d'une ou de deux propositions constituent les définitions sémantiques des opérateurs propositionnels
- Ces opérateurs suffisent pour exprimer les fonctions de vérité de plus de 2 propositions

Définition : Une assignation qui rend vrai une formule est appelé un modèle pour cette formule

2.2 Validité et Consistance

Définition : Une formule est sémantiquement consistance, ou consistance, si elle admet au moins un modèle.

Définition : Une formule est dite valide si toutes ses assignations sont des modèles. Une formule valide est aussi appelée tautologie.

Théorème : Si une formule est valide (resp. inconsistante), la formule obtenue en substituant chaque occurrence d'une lettre de proposition par une formule quelconque est également valide (resp. inconsistante).

2.3 Remarque: Métalangage

- L'expression: "A est une formule valide" appartiens au métalangage, on la note: $\models$
- Le symbole $\models$ ne peut pas apparaître dans une formule du langage objet

Remarque : $\rightarrow$ est un opérateur logique comme les autres.

3 Théorie syntaxique

3.1 Introduction

Pour connaître la validité d'un formule, on dispose de 2 méthodes:

- méthode sémantique (table de vérité)
- méthode symbolique (syntaxique): transformer, réécrire, une formule équivalente pour aboutir à une formule remarquable (tautologie)

3.2 Équivalence et remplacement

- Des formules différentes peuvent avoir la même table de vérité

Définition : 2 formules ont la même table de vérité ssi:

$$\models A \leftrightarrow B$$

Définition : Relation d'équivalence logique:

$$A \Leftrightarrow B \; ssi \; \models A \leftrightarrow B$$

Remarques :

- $\Leftrightarrow$ n'est pas un opérateur permettant de définir une formule
- $A \Leftrightarrow B$ est une relation du méta-langage
- $\Leftrightarrow$ est une relation d'équivalence (réflexive, transitive, symétrique)

Théorème de remplacement : Notons $\Phi(F)$ une formule contenant la sous formule F. Si $A \Leftrightarrow B$ alors $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(A/B)$ (A *est remplacé par* B).

Corollaire : Si $A \Leftrightarrow B$, alors si $\models \Phi(A), \models \Phi(A/B)$

Intérêt : On peut construire une chaîne d'équivalences sans passer par les tables de vérité.

3.3 Algèbre de Boole

Calcul : transformer une formule en une formule équivalente.

Équivalences fondamentales : justifiées par les tables de vérité.

Définition : 1 et 0 sont deux formules particulières. 1 désigne la classe des formules valides, 0 désigne celle des formules inconsistantes.

Notation : $F \Leftrightarrow 1$ si $\models F$
$F \Leftrightarrow 0$ si $\models \neg F$

Idempotence : $A \vee A \Leftrightarrow A$, $A \wedge A \Leftrightarrow A$.

Non contradiction : $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$

Tiers exclu : $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$

Double négation : $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

Éléments neutres : $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$, $A \vee 0 \Leftrightarrow A$

Commutativité : $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$, $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

Réécriture : $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

Corollaires :

Lois d'absorption : $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$, $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

3.4 Formes normales

Rôle important : manipulation "courante" des formules mises sous formes normales.

Définition : On appelle *clause* une disjonction de termes ou chaque terme est soit une lettre de proposition, soit une négation de lettre de proposition.

Définition : Une formule est dite en *forme normale conjonctive (FNC)* si elle est une conjonction de clauses.

Définition : Une formule est dite en *forme normale disjonctive (FND)* si elle est une disjonction de conjonctions dont chaque terme est une lettre de proposition ou une négation de lettre de proposition.

Théorème : Pour chaque formule, il existe au moins une FNC et une FND logiquement équivalente. Elles sont appelées formes normales de cette formule.

Algorithme de normalisation :

1. Élimination des connecteurs $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$
2. Application des lois de De Morgan et élimination des doubles négations
3. Application des règles de la distributivité