[Info 525]Logique

CLAVIER Paul

October 16, 2013

Contents

1 Logique

1.1 Introduction

Le calcul des propositions ou des énoncés:

- des plus élémentaires (ordre 0)
- des plus fondamentaux
- des plus simples: propositions non analysée

Calcul:

- étudie les énoncés qui sont soit vrais, soit faux
- Vériconditionnel: comment les énoncés complexes deviennent vrais ou faux selon que énoncés qui le compose sont vais ou faux.

Définition : Un énoncé ou proposition est de qui est vrai ou faux

Notion simplificatrice de la vérité

On s'intéresse à la structure des propositions complexes

- indépendamment de leur contenu de signification
- indépendamment de la langue naturelle

La logique est un langage

- Vocabulaire
- Syntaxe
- Sémantique

1.1.1 Vocabulaire

1. Ensemble infini dénombrable de proposition
   - désignés par une lettre minuscule
2. Ensemble d'opérateurs
   - négation: $\neg$
   - conjonction: $\wedge$
   - disjonction: $\vee$
   - implication: $\rightarrow$
   - équivalence: $\leftrightarrow$
3. Ensemble de séparateurs: (,), [,] , {, }

1.1.2 Syntaxe

- Le vocabulaire peut donner lieu à de multiples assemblages de symboles
- Les assemblages qui font partie du langage sont appelés des formules
- Les formules sont obtenues à partir de règles de formation

Formules :

1. Toute proposition est une formule: formule atomique
2. Récurrence: Si A et B sont deux formules Alors $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$, ... sont des formules
3. Clôture: rien d'autre n'est une formule

Remarques :

1. Les parenthèses permettent de déterminer l'ordre d'application des règles
2. Langage objet et méta-langage
   - langage objet: objet de la théorie (langage des formules)
   - introduction de nouveaux symboles: A, B, $\Leftrightarrow$, $\models$, ... qui permettent de parler des formules (langage de l'observateur)
3. L'ensemble des formules est infini dénombrable
4. Cet ensemble est récursif

2 Validité d'une formule

2.1 Sémantique

- La sémantique attribue une signification aux formules du langage
- Un proposition est soit vraie soit fausse

Définition : Le domaine sémantique est $\{V, F\}$

Définition : Interpréter une formule consiste à lui attribuer la valeur V ou F

Définition : On appelle assignation sur n propositions un ensemble d'interprétations de ces propositions. Elle définit un monde possible

Définition : L'interprétation est une fonction appelée fonction de vérité $\{assignations\} \longrightarrow \{V, F\}$. A partir de n propositions, il est possible de définir 2^{2^n}

Opérateur propositionnel :

- Les fonctions de vérité d'une ou de deux propositions constituent les définitions sémantiques des opérateurs propositionnels
- Ces opérateurs suffisent pour exprimer les fonctions de vérité de plus de 2 propositions

Définition : Une assignation qui rend vrai une formule est appelé un modèle pour cette formule

2.2 Validité et Consistance

Définition : Une formule est sémantiquement consistance, ou consistance, si elle admet au moins un modèle.

Définition : Une formule est dite valide si toutes ses assignations sont des modèles. Une formule valide est aussi appelée tautologie.

Théorème : Si une formule est valide (resp. inconsistante), la formule obtenue en substituant chaque occurrence d'une lettre de proposition par une formule quelconque est également valide (resp. inconsistante).

2.3 Remarque: Métalangage

- L'expression: "A est une formule valide" appartiens au métalangage, on la note: $\models$
- Le symbole $\models$ ne peut pas apparaître dans une formule du langage objet

Remarque : $\rightarrow$ est un opérateur logique comme les autres.

3 Théorie syntaxique

3.1 Introduction

Pour connaître la validité d'un formule, on dispose de 2 méthodes:

- méthode sémantique (table de vérité)
- méthode symbolique (syntaxique): transformer, réécrire, une formule équivalente pour aboutir à une formule remarquable (tautologie)

3.2 Équivalence et remplacement

- Des formules différentes peuvent avoir la même table de vérité

Définition : 2 formules ont la même table de vérité ssi:

$$\models A \leftrightarrow B$$

Définition : Relation d'équivalence logique:

$$A \Leftrightarrow B \ ssi \ \models A \leftrightarrow B$$

Remarques :

- $\Leftrightarrow$ n'est pas un opérateur permettant de définir une formule
- $A \Leftrightarrow B$ est une relation du méta-langage
- $\Leftrightarrow$ est une relation d'équivalence (réflexive, transitive, symétrique)

Théorème de remplacement : Notons $\Phi(F)$ une formule contenant la sous formule F. Si $A \Leftrightarrow B$ alors $\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(A/B)$ (A *est remplacé par* B).

Corollaire : Si $A \Leftrightarrow B$, alors si $\models \Phi(A), \models \Phi(A/B)$

Intérêt : On peut construire une chaîne d'équivalences sans passer par les tables de vérité.

3.3 Algèbre de Boole

Calcul : transformer une formule en une formule équivalente.

Équivalences fondamentales : justifiées par les tables de vérité.

Définition : 1 et 0 sont deux formules particulières. 1 désigne la classe des formules valides, 0 désigne celle des formules inconsistantes.

Notation : $F \Leftrightarrow 1$ si $\models F$
$F \Leftrightarrow 0$ si $\models \neg F$

Idempotence : $A \vee A \Leftrightarrow A$, $A \wedge A \Leftrightarrow A$.

Non contradiction : $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$

Tiers exclu : $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$

Double négation : $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

Éléments neutres : $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$, $A \vee 0 \Leftrightarrow A$

Commutativité : $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$, $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

Réécriture : $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

Corollaires :

Lois d'absorption : $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$, $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

3.4 Formes normales

Rôle important : manipulation "courante" des formules mises sous formes normales.

Définition : On appelle *clause* une disjonction de termes ou chaque terme est soit une lettre de proposition, soit une négation de lettre de proposition.

Définition : Une formule est dite en *forme normale conjonctive (FNC)* si elle est une conjonction de clauses.

Définition : Une formule est dite en *forme normale disjonctive (FND)* si elle est une disjonction de conjonctions dont chaque terme est une lettre de proposition ou une négation de lettre de proposition.

Théorème : Pour chaque formule, il existe au moins une FNC et une FND logiquement équivalente. Elles sont appelées formes normales de cette formule.

Algorithme de normalisation :

1. Élimination des connecteurs $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$
2. Application des lois de De Morgan et élimination des doubles négations
3. Application des règles de la distributivité

3.5 Méthode des arbres

3.5.1 Méthode syntaxique

- décider si une formule est valide ou inconsistante
- permet de développer une formule
  - construire une FND équivalente
- système formel $\Rightarrow$ définir des *règles de réécriture*
- méthode graphique:
  - une conjonction est vraie ssi les 2 termes sont vrais:*séquence*
  - une disjonction est vraie ssi au moins 1 terme est vrai:*branchement*
- règles de constructions

  Construire un arbre à partir d'une formule donnée en ré-écrivant chaque formule

  on pointe une formule pour indiquer qu'elle a étée réécrite
- règles de réécriture pour: $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ et leur négation.
- construction de chemins
- fermeture d'un chemin: on ferme un chemin dès qu'il contient une formule et sa négation
- arbre complètement développé: les formules sont réécrites jusqu'au lettres de propositions ou leurs négations
- chemins *non fermés* de l'arbre completement développé
  - chemins de vérité: conjonction de lettres de proposition obtenues en lisant l'arbre de bas en haut. Si la valeur d'un chemin est vraie, la formule est vraie
  - termes d'une FND équivalente

4 Validité d'un raisonnement

4.1 Théorie sémantique

4.1.1 Objectifs

Jusqu'a présent :

- véracité des énoncés
- relation entre formules ($\Leftrightarrow$)

Déduction :

- *Opération* qui consiste à adjoindre à un ensemble d'énoncés un autre énoncé nécessairement vrai si les premiers le sont.

- *Relation de déductibilité* entre hypothèses et conséquence résultante
- *Tautologie - Validité*: A est valide si toutes les assignations sont des modèles

Définition : Nous notons $A_0, A_1, \ldots, A_n \models B$ ssi toute assignation qui vérifie conjointement $A_0, A_1, \ldots, A_n$ vérifie également B

Définition : B est une *conséquence valide* de $A_0, A_1, \ldots, A_n$.
$\models$ est une relation, *la relation de déductibilité*, entre formules.

Remarque : Une tautologie est toujours vraie, conditionnée par aucune prémisse:
$\models A$ est une abréviation de $\emptyset \models A$.

Propriétés de la relation $\models$: E et F désignent deux listes de formules finies

1. si $AinE, E \models A$
2. si $E \models A$ alors $E, F \models A$
3. si $E \models A$ et $F, A \models B$ alors $E, F \models B$

Théorème : $B \models A$ ssi $\models B \to A$.

Théorème : $A_0, \ldots, A_n \models A$ ssi $A_0, \ldots, A_{n-1} \models An \to A$.