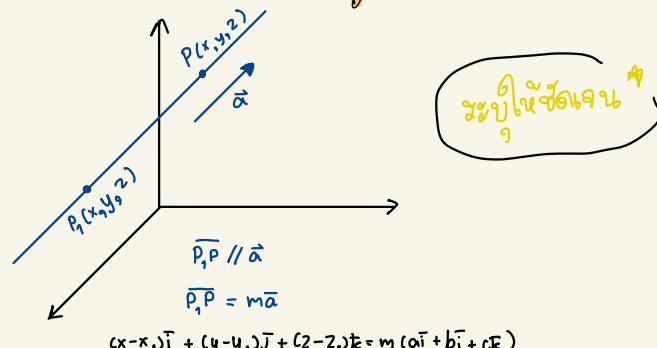


ເຮົາຄົນຕ່າງໆ^{ມາ 1.0}

3D

1) ເລີດທະບຽນໃໝ່ໄປກວ່າມີ ວ ລືດ



ສິນກົມພາ

$$x - x_1 = ma, y - y_1 = mb, z - z_1 = mc \quad \text{--- } \text{ດີ}$$

$$m = \frac{x - x_1}{a}, \quad m = \frac{y - y_1}{b}, \quad m = \frac{z - z_1}{c}$$

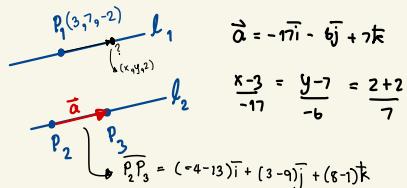
$$\text{ມາກົມພາ} \quad \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \quad \text{--- } \text{ດີວວ}$$

M ອາວາມໂຄສະນູ

Ex ມີໜ້າສອກການໄສ່ານະຮັງ l_1 ທີ່ມີຢູ່ $P_1(3, 7, -2)$

ຂາຍກົມພາໄສ່ານແລ້ວ l_2 ທີ່ມີຢູ່ $P_2(13, 9, 1)$

$P_3(-4, 3, 8)$



Ex

$$\vec{\alpha} = \overrightarrow{P_0P_1} + \overrightarrow{P_1P_2}$$

$$= \overrightarrow{P_0P_1} + (\overrightarrow{P_0P_2} - \overrightarrow{P_0P_1})$$

$$= \overrightarrow{P_0P_1} + \frac{\overrightarrow{P_0P_2}}{|\overrightarrow{P_0P_2}|} \cdot \overrightarrow{P_0P_2}$$

$$1) \vec{\alpha} = \overrightarrow{P_0P_2} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

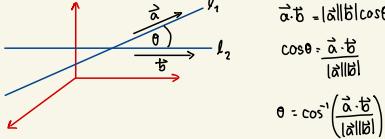
$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{4}$$

$$2) \vec{\alpha} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\begin{array}{l|l} x-2 & = 0 \\ \frac{y-3}{2} & = 0 \\ x & = 2 \end{array}$$

การหา夹角ระหว่างเส้นตรง 2 เส้น

ℓ_1, ℓ_2



Ex หา cos theta cua l1, l2

$$1) l_1: \frac{x-5}{3} = \frac{y-7}{-5} = \frac{z-10}{4}$$

$$\vec{\alpha}_1 = (5, 7, 10)$$

$$\vec{\alpha}_2 = 3, -5, 4$$

$$2) l_2: \frac{x+4}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{-2}$$

$$\vec{t} = 1, 2, -2$$

Soln หา cos theta cua l1, l2 ให้ $\vec{\alpha} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$

$$\vec{t} = 1 + 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\cos \theta = |\vec{\alpha}| |\vec{t}| \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{t}}{|\vec{\alpha}| |\vec{t}|}$$

$$= \frac{3(1) - (5)(2) - (4)(-2)}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{3 - 10 + 8}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{9}}$$

$$= \frac{-15}{15\sqrt{2}}$$

$$\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\alpha = \pi - 3\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

หา cos theta cua l1, l2 ให้ $\vec{\alpha} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$

$$A_x + B_y + C = 0$$

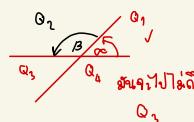
$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$l: \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

$$d^2 = |\overline{PP_0}|^2 - |\overline{P_0Q}|^2$$

$$= |\overline{PP_0}|^2 - (\text{Proj}_{\overline{PQ}} \overline{PP_0})^2$$

$$= \frac{\overline{PP_0} \cdot \overline{PQ}}{|\overline{PQ}|}$$



$$\vec{\alpha} = (2, -3, 1) \text{ , } \vec{P_1}$$

$$\text{ex } P_0(2,3,5), \text{ e. } \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-5}{1} = \frac{2-1}{3}$$

ดังนั้น $\vec{\alpha} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$

$$\text{soln } \text{ถ้า } P_1 \text{ บนเส้นตรง } l \text{ ถ้า } P_1(3, -4, 1)$$

$$\vec{\alpha} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{P_0P_1} = -\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k} \rightarrow (2-3, 3+4, 5-1)$$

$$d^2 = |\overline{P_0P_1}|^2 - (\text{Proj}_{\overline{PQ}} \overline{P_0P_1})^2$$

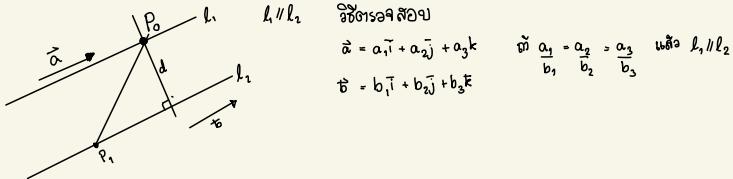
$$d^2 = \left(\sqrt{(-1)^2 + 7^2 + 4^2} \right)^2 - \left(\frac{11}{\sqrt{22}} \right)^2$$

$$= 66 - \frac{121}{22} = 66 - \frac{11}{2} = \frac{11}{2}$$

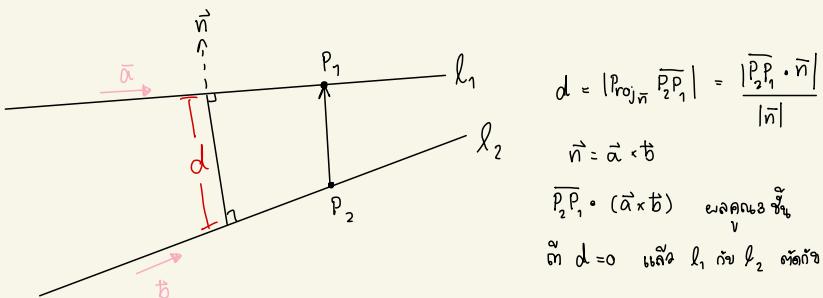
$$d = \sqrt{\frac{11}{2}} = \frac{11}{\sqrt{2}}$$

វិប័យទូរស័ព្ទលេខវិជ្ជាសាស្ត្រ

(1)



(2)



$$\text{Ex } l_1 : \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}, \quad l_2 : \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{5}$$

ដូចនេះ ងារការងារនៃក្នុងការការពារ l_1 តិច $3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} = \vec{a}$

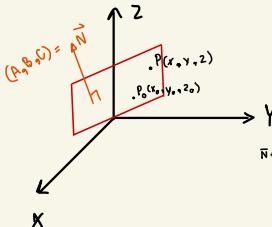
l_2 តិច $4\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k} = \vec{b}$

$\frac{3}{4} \neq \frac{1}{3}$ នៅរដ្ឋមានគឺ l_1, l_2 មិនមែនលេខវិជ្ជាសាស្ត្រ

$$\begin{aligned} d &= |\text{Proj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_2 P_1}| \\ &= \frac{|\overrightarrow{P_2 P_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{|\overrightarrow{P_2 P_1} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{|(-3)(1) + (-4)(-2) + (5)(5)|}{\sqrt{1+49+25}} \\ &= \frac{|3+42+25|}{\sqrt{75}} \\ d &= \frac{50}{5\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

$P_1(2,4,0)$
 $P_2(-1,-2,1)$
 $\overrightarrow{P_2 P_1} = -3\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$
 $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$
 $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$
 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k}$
 $\overrightarrow{P_2 P_1} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (-3)(-1) + (-6)(-2) + (5)(5)$
 $= 3 + 42 + 25 = 50$
 $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2 + (5)^2}$
 $= \sqrt{1+49+25}$
 $= \sqrt{75}$

ສະແໜບ ໄນປິດລາຍລືມສາມາດໃຫ້



$$\rho(r\hat{\rho}_0)$$

$$\rho: Ax + By + Cz = D$$

$$\bar{N} = Ai + Bj + Ck$$

$$\bar{P}_0\bar{P} = (x-x_0)\bar{i} + (y-y_0)\bar{j} + (z-z_0)\bar{k}$$

$$\bar{N} \cdot \bar{P}_0\bar{P} = 0$$

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$$

$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

$$D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

$$\rho: Ax + By + Cz = D$$

$$\begin{cases} \text{If } D \neq 0 \text{ then } \frac{Ax}{D} + \frac{By}{D} + \frac{Cz}{D} = 1 \\ \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{D}{A} \\ b = \frac{D}{B} \\ c = \frac{D}{C} \end{cases}$$

ສຳເນົາຂອງແນວດັບ

$$y=2=0 \quad \text{so } \frac{x}{a}=1 \Rightarrow x=a$$

$$\text{ສະບັບ (trace)} \quad \text{ສະບັບ } XY, XZ, YZ \quad \begin{array}{l} Ax + Cz = D \\ Ax + Bz = D \\ \hline Ay + Cz = D \end{array}$$

Ex ອຳນາຄົກຮຽນທີ່ຕ່າງໆ ປະເທດ $P_0(1,2,4)$ ແລະ ຕັ້ງທີ່ກົບພາກຄອດ

$$\bar{N} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{c}\bar{k}$$

Solve ອີ່ນ $P(x, y, z)$ ລົງຈູນຕາງ ຂະຊວງພາບ ρ

$$\begin{cases} \bar{P}_0\bar{P} \perp \bar{N} \quad \bar{P}_0\bar{P} = \\ \bar{P}_0\bar{P} \cdot \bar{N} = 0 \end{cases}$$

$$[(x-1)\bar{i} + (y-2)\bar{j} + (z-4)\bar{k}] \cdot (\bar{i} - \bar{j} + \bar{c}\bar{k}) = 0$$

$$2(x-1) - 3(y-2) + 5(z-4) = 0$$

$$2x - 2 - 3y + 6 + 5z - 20 = 0$$

$$2x - 3y + 5z = 16$$

$$\text{ສະບັບ } \frac{2x}{16} - \frac{3y}{16} + \frac{5z}{16} = 1$$

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{-16} + \frac{5z}{16} = 1$$

$$\text{ກົດ } y=2=0 \quad \text{so } \frac{x+16}{8} = 8 \quad \text{ສຳເນົາ } x \text{ ສືບ } (8, 0, 0)$$

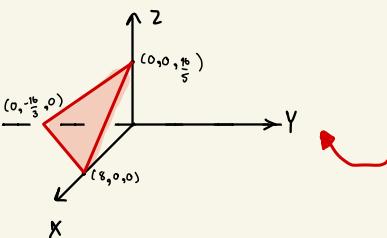
$$x=2=0 \quad \text{ກົດ } y=\frac{16}{3} \quad \text{so } y \text{ ສືບ } (0, -\frac{16}{3}, 0)$$

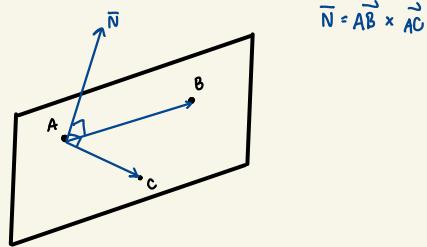
$$x=y=0 \quad \text{ກົດ } z=\frac{16}{5} \quad \text{so } z \text{ ສືບ } (0, 0, \frac{16}{5})$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad Z=0 \quad \text{ສະບັບ } XY \quad \text{so } 2x - 3y = 16$$

$$y=0 \quad \text{so } x=8 \quad \text{so } 2x + 5z = 16$$

$$x=0 \quad \text{so } z=\frac{16}{5} \quad \text{so } -3y + 5z = 16$$





$$\vec{N} = \vec{AB} \times \vec{AC}$$

Ex: A(2,1,4) B(0,5,0), C(2,5,3)

$$\vec{AB} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}, \quad \vec{AC} = 0\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$$

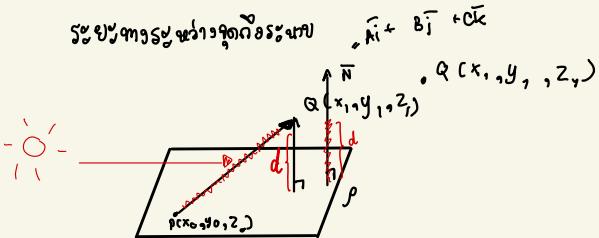
$$\vec{N} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 12\vec{i} - 8\vec{j} - 8\vec{k}$$

$$D = 12(2) + (-2)(4) + (-8)(4) \\ = -10$$

$$D: 12x - 8y - 8z = -10$$

សំណើលូករាយអវការណ៍នៃលក្ខណៈ



$$d = \left| \text{proj}_{\vec{N}} \vec{PQ} \right|$$

$$d = \left| \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{N}}{|\vec{N}|} \right|$$

$$\vec{PQ} = (x_1 - x_0)\vec{i} + (y_1 - y_0)\vec{j} + (z_1 - z_0)\vec{k}$$

$$d = \frac{\left[Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D \right]}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

Ex $\mathbb{Q}(-1, 2, 5)$ សំណើរបស់ P : $x - 2y + z = 12$

solve ទីតាំង d តិចនៅលម្អាតក្នុង Q និងទីតាំង P

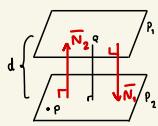
$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad A = 1, B = -2, C = 1, D = 12$$

$$x_1 = -1, y_1 = 2, z_1 = 5$$

$$= \frac{|(1)(-1) + (-2)(2) + (1)(5) - 12|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$$

សម្រាប់រាយការណ៍ 2 នៃវិធាននេះ



1) ពន្លាគនុច្ចោម $P_1 // P_2$

$$d = \text{proj}_{\vec{N}_2} \vec{PQ}$$

1) ពន្លាគនុច្ចោម $P_1 // P_2$

$$\vec{N}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$$

$$\vec{N}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$$

$$\frac{A_1 \cdot B_1}{A_2 \cdot B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

$$P_1 : A_1x + B_1y + C_1z = D_1$$

$$P_2 : A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

$$\text{ដូចនេះ } Q : 9x - y = 0, \quad z = \frac{D_2}{C_2}$$

$(0, 0, \frac{D_2}{C_2})$ ← តួនាទីផ្លូវ P_2

$$d = \frac{|A_2(0) + B_2(0) + C_2(\frac{D_2}{C_2}) - D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

បានឈើបន្ថែមលាម P_1 តួនាទី $① y = 0 = x$ និង $z = -\frac{5}{2}$

តួនាទី P_1 គឺ $(0, 0, -\frac{5}{2})$

② $y = 0 = 2$ និង $x = \frac{1}{2}$

តួនាទី P_2 គឺ $(\frac{1}{2}, 0, 0)$

ការណើលាម $Q(0, 0, -\frac{5}{2}) = Q(x_1, y_1, z_1)$

$$d = \frac{|A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 - D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$= \frac{|5(0) + 1(0) + (-1)(-\frac{5}{2}) - 1|}{\sqrt{(\frac{5}{2})^2 + (1)^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{\left|\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{27}} = \frac{\frac{3}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

26/07

$$\begin{array}{l} \text{Ex } \rho_1: 10x + 2y - 22 = 0 \\ \rho_2: 5x + y - 2 = 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ตั้งให้ } \rho_1 \parallel \rho_2 \\ \text{สมมูล } \rho_1 \perp \rho_2 \end{array} \right.$$

$$\rho_1 \parallel \rho_2 \rightarrow \frac{10}{5} = \frac{2}{1} = \frac{-2}{-1}$$

$2 = 2 = 2 \quad \checkmark$ สมมูล

$\rho_1 \perp \rho_2$

$\sqrt{25+1+1}$

$$d = \frac{|A_2(0) + B_2(0) + C_2(\frac{\rho_1}{C_1}) - D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$= \frac{|0 + 0 + (-1)(\frac{5}{-2}) - 1|}{\sqrt{25 + 1 + 1}} = \frac{5 - 2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{27}} \approx 0.288675$$

OR

$$d = \frac{|A_1(0) + B_1(0) + C_1(\frac{\rho_2}{C_2}) - D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$$

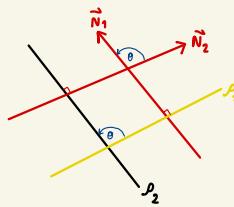
$$= \frac{|0 + 0 + (-2)(\frac{1}{-1}) - 5|}{\sqrt{100 + 4 + 4}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{108}} \approx 0.288675$$

$$\frac{x-4}{3} = \pm$$

$$* = 3t + 4$$

ມີກຳນົດທີ່ຫຼັງຈາກນີ້



$$\cos \theta = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|}$$

$$\text{Ex } \rho_1: x+y+2=0, \rho_2: x-2y+4=0 \quad \begin{matrix} 7+4+16 \\ 29 \end{matrix}$$

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = (1)(1) + (1)(-2) + (1)(4)$$

$$= 1 - 2 + 4 = 3$$

$$|\vec{N}_1| = \sqrt{3} \quad \begin{matrix} \cancel{1+1+1} \\ 1+4+16 \end{matrix}$$

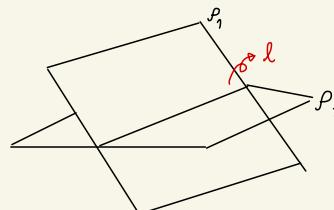
$$|\vec{N}_2| = \sqrt{21} \quad \begin{matrix} \cancel{1+4+16} \\ 1+4+16 \end{matrix}$$

$$\frac{3}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{21}} = \frac{3}{3 \cdot 21} = \frac{1}{7\sqrt{3}}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\theta = 67.79^\circ$$

ເລື່ອນໄຫວ້າ ກິດມາການຮັບອຸນານ໌ຈະລູ້ງສະໜາບ 2 ສະໜາບ



l ຂີ່ໃຈແຈ້ງ ρ_1 , ρ_2

$l \perp \vec{N}_1$ ແລະ $l \perp \vec{N}_2$

ຄວາມນິຍາ ທີ່ ຜົນຍາກອນຮັບອຸນ໌ຈະ l

ກວ່າ $\vec{v} \perp \vec{N}_1$ ແລະ $\vec{v} \perp \vec{N}_2$

$$\vec{v} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$$

ຈະຢູ່ຕົວຢ່າງ $x=0$
ກັບສະມາດ y, z

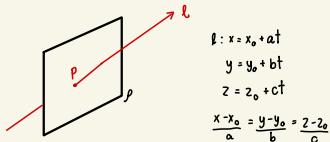
Ex จงหาค่า L ของสมการ ρ_1, ρ_2 ที่ทำให้
 $\rho_1 = x - 2y + 2$
 $\rho_2 = x - 2y - 12$
 So $\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow x - 2y + 2 = x - 2y - 12$ $\Rightarrow 2 = -12$ ไม่เป็นจริง
 \therefore สมการ $\rho_1 = \rho_2$ ไม่มีจุดตัดกัน
 แต่สมการ $\rho_1 = \rho_2$ ต้องมีจุดตัดกัน
 \therefore จุดตัดของ ρ_1, ρ_2 อยู่บนเส้น L

ຮຽນການສ້າງຕາງ
ຕົວ $\frac{x-1}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3} = t$

$$\text{วิธี} \quad x = 1 + 5t, \quad y = -2t, \quad z = -3t$$

จัดเรียงตัวแปร

ຈົບເຈັດຂະໜາງສັນຕິພິບຮະນາປຸງ



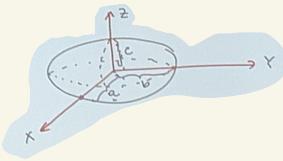
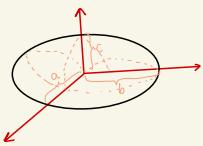
$$\rho : 3x + 2y + 6z = 6$$

$$\begin{aligned} \text{So } l^m & \text{ ஆக்கானது நீண்ட மூலம் } l \text{ என்றால் } P(x,y,z) = \left(t^2 + \frac{8}{3}, -2t^2, 1+t^2 \right) \\ & \text{என்பதைப் பிரதிபீட்டுவிடும் } \\ & 3\left(t^2 + \frac{8}{3}\right) + 2(-2t^2) + 6(1+t^2) = 6 \\ & 6t^2 + 8 - 4t^2 + 6 + 6t^2 = 6 \\ & \frac{8t^2 + 14}{4t^2} = -8 \\ & t^2 = -1 \\ P(x,y,z) &= \left(2(-1) + \frac{8}{3}, -2(-1), 1+(-1) \right) \\ &= \left(\frac{2}{3}, 2, 0 \right) \end{aligned}$$

ສົມກາຣຸປະເຕຣ ສ້າງຂອງຜົວກຳລົງສອງ

1) ກຣີ (Ellipsoid)

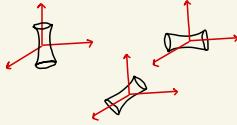
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 ; a, b, c > 0$$



2) ເຂົ້າຂອງບໍລອຍເຂົ້າອົມທິດຮັບ (Elliptic hyperboloid of one sheet)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 ; a, b, c > 0$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

3) ດີໃຈຂອງບໍລອຍເຂົ້າອົມທິດຮັບ (Elliptic hyperboloid of two sheets)

$$; a, b, c > 0$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

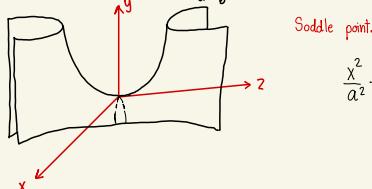
4) ພັດຖາບໍລອຍເຂົ້າເຊັງຈົດ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 4cz$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4cz$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 4ax$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 4by$$

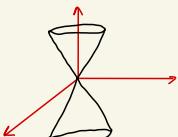
5) ພັດຖາບໍລອຍເຂົ້າເຊັງຢູ່ສັດພົມ ໂດຍ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 4cz$



Saddle point.

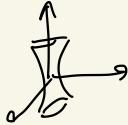
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 4cz$$

6) ກາວຍເຂົ້າອົມທິດ

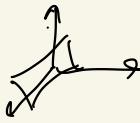


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

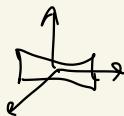
① ශ්‍රීපාක්ට්‍රෝලඥ සේවු යුතු



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

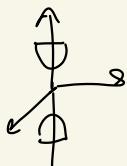


$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

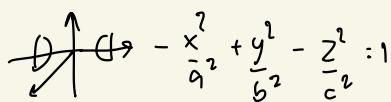
ශ්‍රීපාක්ට්‍රෝලඥ සේවු



$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

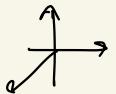


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



අග්‍රිනල සේවු ජ්‍යෝතිෂ්ථාලා (ඡායාචිත්‍රිය)

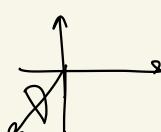
ස්‍රී 1 ම්‍රා (⊖)



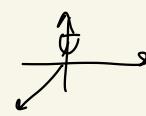
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 4zc$$

$$\frac{x^2}{a^2} -$$

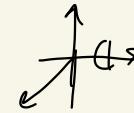
අග්‍රිනල සේවු ටැබුව්



$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 4zc$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4zc$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 4yc$$

ගණක

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยขอนแก่น

รายวิชา: SC401206 Calculus for Engineering I นักศึกษาชั้น: 1 2 สาขาวิชา _____ ชั้นปีที่: _____
ชื่อ-สกุล _____ ใจฟ้า ศรีสุวรรณ รหัสประจำตัว 653040441-7

แบบฝึกหัดครั้งที่ 2: เรื่อง เรขาคณิตในสามมิติ (ส่งภายในวันที่ 5 สิงหาคม 2565)

คำชี้แจง : แสดงวิธีทำอย่างละเอียด

1. กำหนดจุด $A(2, 1, 5)$, $B(2, -3, 5)$ และกำหนดสมการเส้นตรง ℓ_1, ℓ_2 ดังนี้

$$\ell_1 : \frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{2}, z=2 \quad \text{และ} \quad \ell_2 : \frac{x-3}{5} = \frac{4-y}{2} = \frac{z-1}{4}$$

$$a_1 : 3, 2, 0 \quad d_1 : 5, -2, 4$$

- (a) จงหาสมการเส้นตรง (ℓ_3) ที่ผ่านจุด A และจุด B

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (2-2)\vec{i} + (-3-1)\vec{j} + (5-5)\vec{k} \\ &= -4\vec{j} \\ \overrightarrow{AC} &= m\vec{i} \\ (x-2)\vec{i} + (y-1)\vec{j} + (z-5)\vec{k} &= m(\vec{i} - 4\vec{j} + 0\vec{k}) \\ x-2 = 0, y-1 = -4m, z-5 = 0 & \\ x = 2, y = 1, z = 5 &\end{aligned}$$

- (b) จงหาระยะทางระหว่างจุด B และเส้นตรง ℓ_2

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} &= \vec{i} + 7\vec{j} - 4\vec{k} \\ |\overrightarrow{BP}| &= \sqrt{1+49+16} \\ &= \sqrt{66} \\ \text{Proj}_b \overrightarrow{BP} &= \frac{\overrightarrow{BP} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \\ |\vec{b}| &= \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{25+4+16} \\ &= \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \\ d^2 &= \left(|\overrightarrow{BP}|^2 - |\text{Proj}_b \overrightarrow{BP}|^2 \right) \\ d &= \left(66 - \left[\frac{(1)(5) + (7)(-2) + (-4)(4)}{3\sqrt{5}} \right]^2 \right)^{1/2} \\ d^2 &= 66 - \left(\frac{-25}{\sqrt{45}} \right)^2 \\ d &= \sqrt{\frac{66(45) - 625}{45}} \\ d &= \sqrt{\frac{2345}{45}} = \frac{\sqrt{469}}{3}\end{aligned}$$

$$a_1: 3, 2, 0$$

$$C_1: 0, -4, 0$$

(c) จงหาขนาดของมุมระหว่าง ℓ_1 และ ℓ_3

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| |\vec{c}|} \right)$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{-8}{4\sqrt{13}} \right)$$

$$= \cos^{-1} \left[\frac{-2}{\sqrt{13}} \right]$$

$$P_1(2, 5, 2)$$

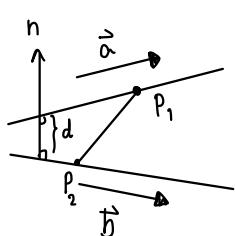
$$P_2(3, 4, 1)$$

$$a_1: 3, 2, 0$$

$$d_1: 5, -2, 4$$

(d) จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง ℓ_1 และเส้นตรง ℓ_2

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \Rightarrow \frac{3}{5} \neq \frac{2}{-2}$$



$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{bmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= (8+0)\vec{i} - (12+0)\vec{j} + (-6-10)\vec{k} \\ &= 8\vec{i} - 12\vec{j} - 16\vec{k}\end{aligned}$$

$$\text{Proj}_{\vec{n}} \vec{P_1 P_2} = \frac{\vec{P_1 P_2} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$\vec{P_1 P_2} = (3-2)\vec{i} + (4-5)\vec{j} + (1-2)\vec{k}$$

$$= \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

$$= \frac{1(8) + (-1)(-12) + (-1)(-16)}{\sqrt{64+4+396}}$$

$$= \frac{36}{\sqrt{464}}$$

$$= \frac{36}{2\sqrt{116}}$$

$$= \frac{18}{\sqrt{116}} = \frac{9}{\sqrt{29}}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ \hline 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ \hline 2 \end{array} \begin{array}{r} 58 \\ 58 \\ \hline 29 \end{array}$$

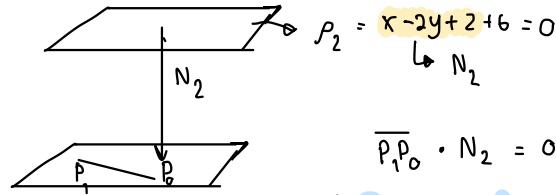
$$2x - 3y + 2 - 4 = 0 \quad \rho_1: 2x - 3y + 2 - 4 = 0$$

$$2x - 3y + 2 - 4 = 0$$

2. กำหนดระนาบ $\rho_1: 2x - 3y + z - 4 = 0$ และ $\rho_2: x - 2y + z + 6 = 0$

(a) จงหาระนาบ ρ_3 ซึ่งนานกับระนาบ ρ_2 และผ่านจุด $(2, 4, -5)$

$$x - 2y + z + 6 = 0$$



$$\rho_2: x - 2y + 2 + 6 = 0$$

$$\rho_2: x - 2y + 2 + 6 = 0$$

$$1(x-2) + (-2)(y-4) + 1(z+5) = 0$$

$$x - 2 - 2y + 8 + z + 5 = 0$$

$$x - 2y + 2 + z + 13 = 0$$

(b) จงหาขนาดของมุมระหว่างระนาบ ρ_1 และระนาบ ρ_3

$$\rho_1: 2x - 3y + 2 - 4 = 0 \quad \rho_2: x - 2y + 2 + 6 = 0$$

$$\vec{a}_1: 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{z} \quad \vec{b}_1: \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{z}$$

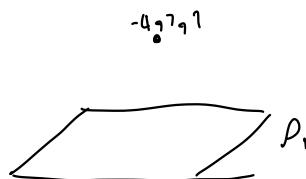
$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1}{|\vec{a}_1| |\vec{b}_1|} \right)$$

$$= \cos^{-1} \left[\frac{2+6+1}{\sqrt{14} \sqrt{6}} \right]$$

$$= \cos^{-1} \left[\frac{9}{\sqrt{84}} \right]$$

$$2x - 3y + 2 - 4 = 0$$

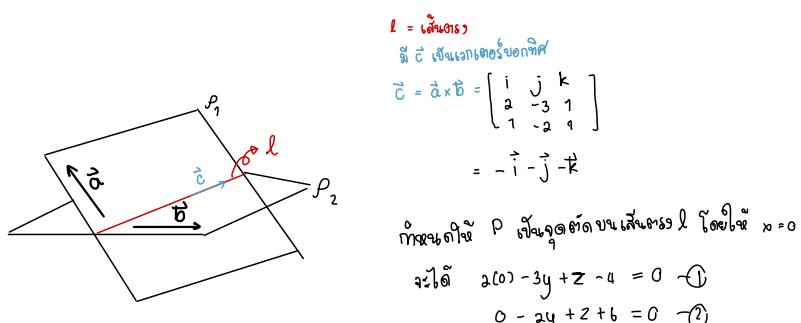
(c) จงหาระยะทางระหว่างระนาบ ρ_1 กับจุด $(-4, 7, 1)$



$$\begin{aligned} d &= \frac{|Ax + By + Cz - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{|2(-4) + (-3)(7) + (1)(1) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{|-8 - 21 + 1 - 4|}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{|-32|}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{32}{\sqrt{14}} \end{aligned}$$

$$\rho_1: 2x - 3y + 2 - 4 = 0$$

(d) จงหารอยตัวรัศมีระหว่างระนาบ ρ_1 และ ρ_2



$$l = \text{เส้นตรง}$$

ลุ่น คือ เส้นตรงที่ตั้งต้นที่จุดเดียวกัน

$$\vec{C} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

กําเนดูณิจ P เส้นตรง l ตั้งต้นที่ $x = 0$

$$2(0) - 3y + 2 - 4 = 0 \quad \text{---} ①$$

$$0 - 2y + 2 + 6 = 0 \quad \text{---} ②$$

$$③ - ① \quad -2y + 3y + 2 - 2 + 4 = 0$$

$$y = -10 \quad \text{---} ③$$

$$③ \mid m \mid ②$$

$$-2(-10) + 2 + 6 = 0$$

$$z = -26$$

หาสัมภาระ ρ_2

$$\text{หาได้ } 1: \frac{x-0}{-1} = \frac{y+10}{-1} = \frac{z+26}{-1}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ y_2 &= 0 \end{aligned}$$

3. จงพิจารณาว่าสมการพื้นผิวกำลังสองต่อไปนี้เป็นสมการพื้นผิวกำลังสองรูปแบบใด พร้อมทั้งบอกค่าตัดแกน สมการรอยตัดบน
ระนาบพิกัด และพิจารณาสามมิติ รวมถึงใช้กราฟพิเคราะห์

$$(a) \frac{325x^2}{5200} + \frac{200y^2}{5200} - \frac{208z^2}{5200} - \frac{5200}{5200} = 0$$

$$\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{26}y^2 - \frac{1}{25}z^2 = 1$$

ค่าตัดแกน

$$\text{แกน } x \Rightarrow y, z = 0$$

$$x^2 = 16$$

$$x = (4, 0, 0) \text{ และ } (-4, 0, 0)$$

$$\text{แกน } y \Rightarrow x, z = 0$$

$$y^2 = 26$$

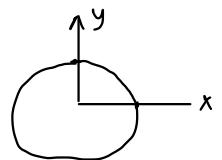
$$y = (0, \sqrt{26}, 0) \text{ และ } (0, -\sqrt{26}, 0)$$

$$\text{แกน } z \Rightarrow x, y = 0$$

$$z^2 \neq 25$$

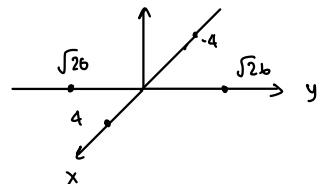
ค่าตัดแกน z

รูปทรงทั่วไปชนิดที่ 1



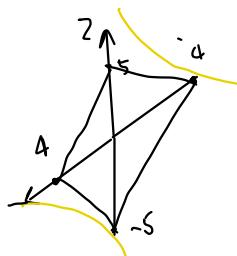
$$\text{จะพบ } xy \Rightarrow z = 0$$

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{26}}\right)^2 = 1 ; \text{ ดังนี้ } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



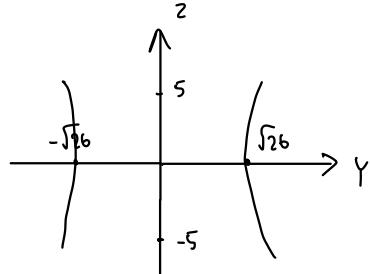
$$\text{จะพบ } xz \Rightarrow y = 0$$

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{z^2}{5^2} = 1 ; \text{ ดังนี้ } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\text{จะพบ } yz \Rightarrow$$

$$\left(\frac{y}{\sqrt{26}}\right)^2 - \frac{z^2}{5^2} = 1 ; \text{ ดังนี้ } \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$



$$(b) \frac{4x^2}{36} - \frac{36y^2}{36} - \frac{4z^2}{36} = 0$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{9} = 0$$

$$\frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{36} \rightarrow 6y^2 = 6x^2$$

គោលន៍ទេរង់

$$\text{នៅក្នុង } x = \frac{x^2}{9} = 0$$

$$x = 0$$

$$\text{នៅក្នុង } y = \frac{y^2}{36} = 0$$

$$y = 0$$

$$\text{នៅក្នុង } z = \frac{z^2}{9} = 0$$

$$z = 0$$

នូលចំណែក

នៅក្នុង

$$= \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 0 ; \text{ តែមទៀត } \neq$$

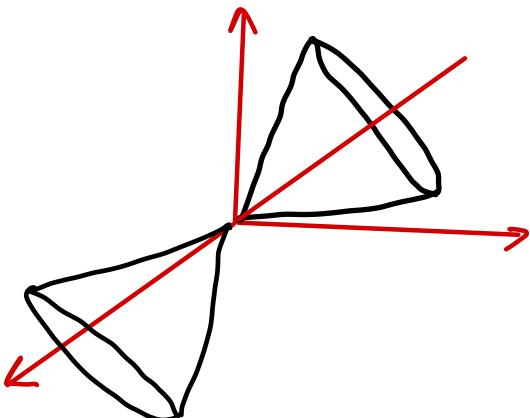
សម្រាប់ x^2

$$= \frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 0 ; \text{ តែមទៀត }$$

សម្រាប់ yz

$$= \frac{-y^2}{36} - \frac{z^2}{36} = 0 ; \text{ ពេល } \neq$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{36} = 0$$



សម្រាប់

$$\text{នៅក្នុង } x \rightarrow -y, -z = \text{ តែមទៀតនៅក្នុង } x$$

$$\text{នៅក្នុង } y \rightarrow -x, -z = \text{ តែមទៀតនៅក្នុង } y$$

$$\text{នៅក្នុង } z \rightarrow -y, -x = \text{ តែមទៀតនៅក្នុង } z$$

$$\text{នៅក្នុង } xy \rightarrow -2 = \text{ តែមទៀតនៅក្នុង } xy$$

$$\text{នៅក្នុង } xz \rightarrow -y = \text{ តែមទៀតនៅក្នុង } xz$$

$$\text{នៅក្នុង } yz \rightarrow -x = \text{ តែមទៀតនៅក្នុង } yz$$

$$\text{បុរីវិឱឌិ} = \text{ តែមទៀតនៅក្នុង } \text{ បុរីវិឱឌិ}$$

แบบฝึกหัด 2.1

- จงหาสมการของเส้นตรงที่มีเวกเตอร์ $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์บวกทิศทางและผ่านจุด $(5, -2, 3)$
- จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(7, -3, 5)$ และ $B(2, -7, 5)$
- จงหา มุนระหว่างเส้นตรงในข้อ 2 และข้อ 3
- จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง $\ell : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{5}$ กับจุด $P(2, -5, 1)$

- จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง ℓ_1 และ ℓ_2 เมื่อ สมการเส้นตรง ℓ_1 และ ℓ_2 กำหนดดังนี้

$$5.1 \quad \ell_1: \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2} \text{ และ } \ell_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{3-z}{3}$$

$$5.2 \quad \ell_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{4-z}{3} \text{ และ } \ell_2: \frac{x-2}{-4} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{6}$$

$$5.3 \quad \ell_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{1-z}{3} \text{ และ } \ell_2: \frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$$

๕) ① ขนาดกันปุ๊ะ $\xrightarrow{\text{พจน}} d^2 = |\overline{P}_\ell P|^2 - |\text{Proj}_{\vec{\alpha}_\ell} \overline{P}_\ell P|^2$

① เท่ากับ ๐ หรือ x
 ② $d = |\text{Proj}_{\vec{\alpha}_\ell} \overline{P}_\ell P|$

4) $P_\ell(2, 1, 2) \quad \vec{\alpha}_\ell = (3, 4, 5)$

$P(2, -5, 1)$

$$d^2 = |\overline{P}_\ell P|^2 - |\text{Proj}_{\vec{\alpha}_\ell} \overline{P}_\ell P|^2$$

3) $\vec{\alpha}_1 = 2, 1, 3$
 $\vec{\beta} = 5, 4, 0$

16 C

1) $\frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{3}$

2) $(7, -3, 5) - (2, -7, 5)$

$= 5, 4, 0 = \vec{a}$

$\overrightarrow{P.P} = m\vec{a}$

$(x-7)\vec{i} + (y+3)\vec{j} + (z-5)\vec{k} = 5m\vec{i} + 4m\vec{j} + 0m\vec{k}$

$\frac{x-7}{5} = \frac{y+3}{4}, z = 5$

แบบฝึกหัด 2.2.1

1. จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $P_0(1, 2, 4)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{N} = 3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$
2. จงหาจุดที่ระนาบ $2x - 3y + z - 6 = 0$ ตัดกับแกน X
3. จงหารอยตัวของระนาบ $3x - 2y + 4z = 18$ กับระนาบ $XZ \rightarrow y = 0$
4. ถ้าระนาบ $4x - y + 5z = D$ ผ่านจุด $P(-1, 4, 5)$ แล้วจงหาค่าของ D
5. จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $P_1(3, 2, 1)$, $P_2(4, 1, 5)$ และ $P_3(2, 4, 3)$



$$2) 2x - 3(0) + 0 = 6 \quad | \quad 3) 3x + 4z = 18 \\ 2x = 6 \quad | \quad \frac{x}{6} + \frac{4z}{18} = 1 \\ x = 3 \quad | \quad \frac{1}{6} + \frac{2}{9} = 1$$

5) จง $AB \times AC$ เล็กๆ A, B, C สิ่งที่จะหา

$$(4, 1, 5) - (3, 2, 1) \quad | \quad (2, 4, 3) - (3, 2, 1) \\ = (1, -1, 4) \quad | \quad = (-1, 2, 2)$$

$$AB \times AC = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= (-2-8)i - (2+4)j + (2-1)k$$

$$= -10\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$$

$$= -10(3) - 6(2) + 1$$

$$= -30 - 12 + 1$$

$$= -41$$

$$\Rightarrow -10\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k} + 41 = 0$$

4) $4(-1) - 4 + 5(5) = D$

$$-4 - 4 + 25 = D$$

$$25 - 8 = D$$

$$D = 17$$

1) สมการ直线 $\rho = Ax + By + Cz = D$

$$\begin{array}{c} \uparrow \vec{N}(3, 1, -4) \\ \swarrow P_0 \cdot \vec{P} \quad \rho = ? \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{P}_0 \cdot \vec{N} = 0 \\ 3(x-1) + (y-2) - 4(z-4) = 0 \end{array} \right.$$

~~$3x - 3 + y - 2 - 4z + 16 = 0$~~

$3x + y - 4z + 11 = 0$

$$3x + y - 42 = -11$$

แบบฝึกหัด 2.2.2

1. จงหาระยะทางระหว่างจุด $P(2, -3, 4)$ ถึงระนาบ $x + 2y + 2z = 13$
2. จงหาระยะทางระหว่างระนาบ $2x - y + 2z = -4$ และ $6x - 3y + 6z = -2$
3. จงหามุมแหลมระหว่างระนาบ $2x + y - 7z = -11$ และระนาบ $5x - 2y + 5z = 12$
4. จงหาสมการเส้นตรงในรูปของตัวแปรเสริม t ที่เกิดจากระนาบ $\rho_1: x + y + z = 1$
ตัดกับระนาบ $\rho_2: 3x - 2y + z = 5$
5. จงหาจุดตัดระหว่างเส้นตรงในรูปของตัวแปรเสริม $x - 3 = 2t$, $y - 4 = 3t$ และ $z = 4t$ กับระนาบ $3x + 2y - 2z + 1 = 0$

~~ข้อ 4~~

5)
$$\begin{aligned} 3(at+3) + 2(3t+1) - 2(4t)+1 &= 0 \\ 6t+9 + 6t+2 - 8t + 1 &= 0 \\ 4t + 12 &= 0 \\ t &= -3 \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -8 \\ z = -12 \\ P(3, -8, -12) \end{array} \right.$$

4) ให้ $x = 0$

$$\begin{aligned} \rho_1: y + 2 &= 1 \quad \text{---} \textcircled{1} \\ \rho_2: -2y + 2 &= 5 \quad \text{---} \textcircled{2} \\ \textcircled{1} - \textcircled{2} \quad 3y &= -4 \\ y &= -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} + \left(\frac{5}{3}\right) &= 1 \\ z &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\rho}_1 \times \vec{\rho}_2 &: \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (1+2)\vec{i} - (1-3)\vec{j} + (-2-3)\vec{k} \\ &= 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k} \\ \frac{x}{3} &= \frac{y+4}{3} = \frac{z-5}{-5} \end{aligned}$$

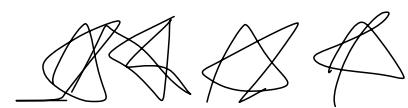
2)
$$d = \frac{|0+0+6(4)+2|}{\sqrt{36+9+36}} = \frac{26}{9}$$

3)
$$\begin{aligned} a_1(2, 1, -7) \\ b_1(6, -3, 6) \end{aligned} \quad \left\{ \quad \frac{a_1 \cdot b_1}{|a_1||b_1|} = \frac{12 - 3 - 42}{9\sqrt{54}} = \cos^{-1}\left(\frac{33}{9\sqrt{54}}\right)$$

4)
$$d = \frac{|1(2) + 2(-3) + 2(4) - 13|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|2 - 6 + 8 - 13|}{3} = 3$$

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงหาสมการกระยะตัดแกน X ของผิว $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
2. จงหาสมการจุดตัดแกน Z ของผิว $x^2 - y^2 + z^2 = 4$
3. จงหาสมการร้อยตัดของ $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ กับระนาบ YZ
4. จงหาสมการร้อยตัดของ $y^2 - yz = x$ กับระนาบ XY $\cancel{y \geq 0}$
5. พื้นผิว $x^2 + z^2 = 4y$ มีสมมาตรแบบใดบ้าง



$$\textcircled{1} \quad x^2 = 9$$

$$\textcircled{2} \quad z^2 = 4$$

$$\textcircled{3} \quad 2y^2 + 4z^2 = 8 \quad \textcircled{4} \quad x = 0, z \text{ ไม่ตัด}$$

$$y^2 + 2z^2 = 4$$

$$\textcircled{5} \quad \begin{matrix} \text{1 วงรี} \\ \text{ผ่าน } x, z \end{matrix}$$

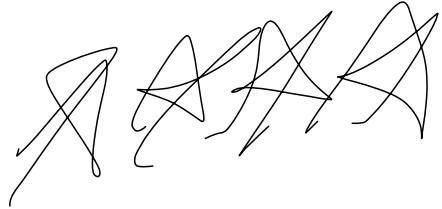
ผ่าน xz

ผ่าน xz แต่ yz

100.

จะบอกว่าสมการพื้นผิวที่ลังส่องต่อไปนี้เป็นสมการพื้นผิวกำลังสองรูปแบบใด พร้อมทั้งบอกค่าตัดแกน
สมการรอยตัดบนระนาบพิกัด และพิจารณาการสมมาตร

1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$ วงกลม
2. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$ ไฮเปอร์โบโลหะเชิงเอียง แนวแกน y
3. $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$ ไฮเปอร์โบโลหะเชิงเอียง แนวแกน z
4. $x = 3y^2 - z^2$ ผวนโค้ง
5. $-x^2 + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$ ไฮเปอร์โบโลหะเชิงเอียง
6. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 0$ ภาคภูมิ
7. $y^2 + 9z^2 = 54x$ ผวนโค้ง
8. $64x^2 + 144y^2 - 9z^2 = 0$ กระบอก
9. $36x^2 - 25y^2 = 3600z$ ผวนโค้ง
10. $4x^2 - 36y^2 - 4z^2 = 0$ กระบอก



วงกลม $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

ไฮเปอร์โบโลหะเชิงเอียง $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

ไฮเปอร์โบโลหะเชิงลบ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

ผวนโค้ง $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 42C$

ผวนโค้งเชิงเอียง $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 42C$

กระบอก $= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$

Loc - /

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยขอนแก่น

รายวิชา: SC401206 Calculus for Engineering I นักศึกษาชั้น: 1 2 สาขาวิชา _____ ชั้นปีที่: _____
ชื่อ-สกุล _____ รหัสประจำตัว _____

แบบฝึกหัดครั้งที่ 2: เรื่อง เรขาคณิตในสามมิติ (ส่งภายในวันที่ 5 สิงหาคม 2565)

คำชี้แจง : แสดงวิธีทำอย่างละเอียด

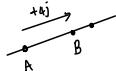
1. กำหนดจุด $A(2, 1, 5)$, $B(2, -3, 5)$ และกำหนดสมการเส้นตรง ℓ_1, ℓ_2 ดังนี้

$$\ell_1 : \frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{2}, z=2 \quad \text{และ} \quad \ell_2 : \frac{x-3}{5} = \frac{4-y}{2} = \frac{z-1}{4}$$

$P(2, 5, 2) \quad P(3, 4, 1) \quad a_1(3, 2, 0) \quad a_2(5, 2, 4)$

(a) จงหาสมการเส้นตรง (ℓ_3) ที่ผ่านจุด A และจุด B

$$(x-2) + (y-5) + (z-2) = m(0, 4, 0)$$



$$x-2 = mo, \quad y-5 = 4m, \quad z-2 = h \cdot 0$$

$$x = 2, \quad y = \frac{-5}{4}, \quad z = 2$$

(b) จงหาระยะทางระหว่างจุด B และเส้นตรง ℓ_2

$$D^2 = \sqrt{\left| \overrightarrow{P_1 P_0} \right|^2 - \left| \text{Proj}_{\alpha} \overrightarrow{P_1 P_0} \right|^2}$$

$$= \sqrt{66^2 - \left(\frac{-25}{\sqrt{45}} \right)^2}$$

$$|a| = \sqrt{25+16+16} = \sqrt{45}$$

$$\overrightarrow{P_1 P_0} = (3-2, 4+3, 1-5) = (1, 7, -4)$$

$$\text{Proj}_{\alpha} \overrightarrow{P_1 P_0} = \frac{\overrightarrow{P_1 P_0} \cdot a}{|a|} = \frac{1+49+16}{\sqrt{45}} = \frac{56}{\sqrt{45}}$$

$$= \frac{5 - 14 - 16}{\sqrt{45}}$$

(c) จงหาขนาดของมุ่มระหว่าง ℓ_1 และ ℓ_3

(d) จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง ℓ_1 และเส้นตรง ℓ_2

$$P(2,5,2)$$

$$\alpha_1 = (3, 2, 0)$$

$$P(3,4,1)$$

$$\alpha_2 = (5, 2, 4)$$

$$\begin{aligned} P_1 P_2 &= (3-2, 4-5, 1-2) \\ &= (1, -1, -1) \end{aligned}$$

$$\alpha_1 \times \alpha_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 8i - (12j) + (-6 - 10)k$$

$$= 8i - 12j - 16k$$

$$\sqrt{64 + 144 + 196}$$

$$= \sqrt{404}$$

- $\curvearrowleft (2, -3, 1)$ $\curvearrowright (1, -2, 1)$
2. กำหนดระนาบ $\rho_1 : 2x - 3y + z - 4 = 0$ และ $\rho_2 : x - 2y + z + 6 = 0$
 $\rho_1 : 2x - 3y + z - 4$ $\rho_2 : x - 2y + z + 6$
(a) จงหาระนาบ ρ_3 ซึ่งขนานกับระนาบ ρ_2 และผ่านจุด $(2, 4, -5)$

$$\begin{array}{c} \text{_____} \\ \text{_____} \end{array} \quad \overline{\rho_1 \rho_2} \cdot n$$

$$(1)(x-2) + \cancel{(y-4)} + (z+5)(1) = 0$$

$$x - 2y + 2 + 3 + 8 = 0$$

$$x - 2y + 2 + 11 = 0$$

(b) จงหาขนาดของมุมระหว่างระนาบ ρ_1 และระนาบ ρ_3

$$\cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \right)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (2, -3, 1) & \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14} \\ \mathbf{b}_1 &= (1, -2, 1) & \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \\ && \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{(2)(1) + (-3)(-2) + (1)(1)}{2\sqrt{21}} \right)$$

$$\frac{2+6+1}{2\sqrt{21}} = \left(\frac{9}{2\sqrt{21}} \right) \Rightarrow \cos \theta$$

(c) จงหาระยะทางระหว่างระนาบ ρ_1 กับจุด $(-4, 7, 1)$

$$\begin{aligned}
 & \left| 2(-4) - 3(7) + 1 - 4 \right| \\
 & = \frac{-11}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} \\
 & = \frac{-11}{\sqrt{4 + 9 + 1}} \\
 & = \frac{-11}{\sqrt{14}}
 \end{aligned}$$

(d) จงหาระยะตั้งระหว่างระนาบ ρ_1 และ ρ_2

$$\rho_1: 2x - 3y + z - 4$$

$$L_a(2, -3, 1)$$

$$\rho_2: x - 2y + z + 6$$

$$L_b(1, -2, 1)$$

$$\begin{array}{|ccc|c}
 \hline
 & i & j & k \\
 \hline
 2 & -3 & 1 & | \\
 1 & -2 & 1 & | \\
 \hline
 (-3+2)i - (2-1)j + (-4+3)k & & &
 \end{array}$$

$$= -i + j - k$$

$$\text{เมื่อ } x = 0 \text{ ดัง } \rho_1 / \rho_2$$

$$-3y + z = 4 \quad \textcircled{1}$$

$$-2y + z = -6 \quad \textcircled{2}$$

$$\begin{array}{l}
 \textcircled{1} - \textcircled{2} \quad -3y + 2y = 4 + 6 \\
 -y = 10 \\
 y = -10
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 20 + z = -6 \\
 z = -26
 \end{array}$$

$$\frac{x-0}{-1}, \frac{y+10}{-1}, \frac{z+26}{-1}$$

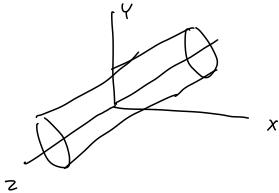
3. จงพิจารณาว่าสมการพื้นผิวกำลังสองต่อไปนี้เป็นสมการพื้นผิวกำลังสองรูปแบบใด พร้อมทั้งบอกค่าตัดแกน สมการรอยตัดบนระนาบพิกัด และพิจารณาสมมາตร รวมถึงใช้กราฟคร่าวๆ

$$(a) 325x^2 + 200y^2 - 208z^2 - 5200 = 0$$

$$\frac{325x^2}{5200} + \frac{200y^2}{5200} - \frac{208z^2}{5200} = \frac{5200}{5200}$$

ชุดของ โนลอน จิชชาร์ด
จิตวิญญาณ

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{26} - \frac{z^2}{25} = 1$$



$$(b) \quad 4x^2 - 36y^2 - 4z^2 = 0$$