

ความสัมพันธ์เวียนเกิด

Recurrent relation

การเกิดการอ้างอิงตัวเองอย่างไม่รู้จบ

บทนิยาม 2.1 ให้ $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง *ความสัมพันธ์เวียนเกิด* (recurrence relation) อันดับที่ k สำหรับลำดับ $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ คือสมการที่อยู่ในรูป

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}, n), \quad n \geq k$$

โดยมีพจน์ a_{n-k} ปรากฏอยู่ในสมการ

- ค่าเริ่มต้น (initial values) คือค่าของ a_0, a_1, \dots, a_{k-1} ที่ถูกกำหนดไว้
 - ผลเฉลย (solution) ของความสัมพันธ์เวียนเกิด คือสูตรของ a_n ในรูปของ n ซึ่งสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด และค่าเริ่มต้นที่กำหนดให้ (ถ้ามี)
 - มีรูปแบบการสัมพันธ์ที่อยู่ในรูปแบบที่แน่นอน
- (i) $a_n = 2a_{n-1} + 1, (n > 1); a_0 = 1$ เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับที่ 1
โดยมีค่าเริ่มต้นคือ $a_0 = 1$
- (ii) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, (n > 2); a_0 = 0, a_1 = 1$ เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับที่ 2
โดยมีค่าเริ่มต้นคือ $a_0 = 1$ และ $a_1 = 1$

■ จงพิจารณาว่าจากความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดข้างต้น

$$a_n = 3n$$

$$a_n = 2^n$$

$$a_n = 5$$

จงหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิด

(i) $a_n = 3a_{n-1}, \quad (n \geq 1); \quad a_0 = 2$

$$(ii) \ a_n = a_{n-1} + n \cdot n!, \quad (n \geq 1), \ a_0 = 1$$

(iii) $a_n = a_{n-1} + 2n, \quad (n \geq 1); \quad a_0 = 1$

แบบฝึกหัด

จงหาผลเฉลยของความสัมพันธเวียนเกิด

1. $a_n = 2a_{n-1}$ เมื่อ $n \geq 1$, $a_0 = 3$
2. $a_n = a_{n-1}$ เมื่อ $n \geq 1$, $a_0 = 2$
3. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 2$, $a_0 = 1, a_1 = 0$
4. $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 2$, $a_0 = 6, a_1 = 8$
5. $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 2$, $a_0 = 0, a_1 = 1$
6. $a_n = 4a_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 2$, $a_0 = 0, a_1 = 4$
7. $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 2$, $a_0 = 3, a_1 = 6$
8. $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 2$, $a_0 = 2, a_1 = 1$
9. $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 2$, $a_0 = 4, a_1 = 10$
10. $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 2$, $a_0 = 4, a_1 = 1$
11. $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 2$, $a_0 = 3, a_1 = -3$
12. $a_n = -4a_{n-1} + 5a_{n-2}$ เมื่อ $n \geq 2$, $a_0 = 2, a_1 = 8$

- $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\varphi}, \frac{1}{5}, \dots$
- $0, -1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots$
- $0, 1, 3, 6, 10, 15, \dots$
- $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$

- $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\varphi}, \frac{1}{5}, \dots$
- $0, -1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots$
- $0, 1, 3, 6, 10, 15, \dots$
- $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$

- $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\varphi}, \frac{1}{5}, \dots$
- $0, -1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots$
- $0, 1, 3, 6, 10, 15, \dots$
- $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$

- $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\varphi}, \frac{1}{5}, \dots$
- $0, -1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots$
- $0, 1, 3, 6, 10, 15, \dots$
- $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$

- $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\varphi}, \frac{1}{5}, \dots$
- $0, -1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots$
- $0, 1, 3, 6, 10, 15, \dots$
- $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$

จงหาพจน์ทั่วไปของ $1, 3, 5, 7, 9, \dots$

จงหาพจน์ทั่วไปของ $-13, -9, -5, -1, 3, \dots$

จงหาพจน์ที่ 15 ของลำดับ $-5, -1, 3, 7, 11, \dots$

ลำดับเลขคณิตลำดับหนึ่ง มีพจน์ที่ 10 เป็น -28 และพจน์ที่ 12 เป็น -50
จงหาผลบวกของพจน์ที่ 5 กับพจน์ที่ 6

จงหาผลบวกของพจน์ที่ 1, 3 และ 5 ของลำดับเลขคณิตซึ่งมีผลต่างร่วมเป็น 4
และพจน์ที่ 16 เท่ากับ 48

ตัวอย่าง 2.3 ถ้าใช้ส่วนของเส้นตรง n เส้นแบ่งบริเวณภายในของวงกลม จะได้บริเวณย่อยมากที่สุดกี่บริเวณ

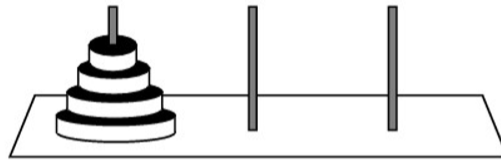
ตัวอย่าง 2.4 กำหนดให้ในตอนเริ่มต้น (วันที่ 1) มีแบคทีเรียอยู่ในจานเพาะเชื้อจำนวน 4 เซลล์ และสมมติว่า ในทุก ๆ วันหลังจากวันที่ 2 เป็นต้นไป ในช่วงเช้าแบคทีเรียแต่ละเซลล์ที่ยังมีชีวิตจะแบ่งตัวเป็น 2 เซลล์ และในช่วงบ่ายจะมีแบคทีเรียตายไป 3 เซลล์เสมอ

ให้ a_n คือจำนวนเซลล์ของแบคทีเรียที่ยังมีชีวิตอยู่ในตอนเย็นของวันที่ n ($n \geq 1$)

(i) จะได้ $a_2 = \dots\dots\dots$, $a_3 = \dots\dots\dots$, $a_4 = \dots\dots\dots$

(ii) จงหาเขียนสัมพัทธ์เวียนเกิดสำหรับลำดับ $\{a_n\}$ และหาผลเฉลยของความสัมพัทธ์

ตัวอย่าง 2.5 มีเสา 3 เสา และมีแผ่นกลมเจาะรู n แผ่นที่มีขนาดต่างกันวางซ้อนกันอยู่ในเสาหนึ่ง เรียงขนาดจากใหญ่ขึ้นไปหาเล็ก ดังรูป



ต้องการย้ายแผ่นกลมทั้งหมดจากเสาด้านเดิมไปวางเรียงในลักษณะเดียวกันในเสาด้านใดต้นหนึ่งจาก 2 ต้นที่เหลือ โดยให้ย้ายแผ่นกลมได้ครั้งละ 1 แผ่น และไม่ให้แผ่นที่ใหญ่กว่าวางซ้อนอยู่บนแผ่นที่เล็กกว่า

ให้ a_n คือจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการย้ายแผ่นกลม n แผ่นตามเงื่อนไขดังกล่าว ($n \geq 1$)

(i) จะได้ว่า $a_1 = \dots\dots\dots$, $a_2 = \dots\dots\dots$, $a_3 = \dots\dots\dots$ และ $a_4 = \dots\dots\dots$

(ii) จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับลำดับ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ และหาผลเฉลยของความสัมพันธ์

