Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра «Прикладная математика»

Отчет по курсовой работе

по дисциплине
"Интервальный анализ"
Тема: "Нечеткие множества - система уравнений"

Выполнил студент
группы 5030102/00201 Сон Артём Игоревич

Проверил
доцент, к.ф.-м.н. Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2024 г.

1 Постановка задачи

Решить полностью нечеткую систему линейных уравнений $\tilde{A} \times \tilde{x} = \tilde{b}$ с $\tilde{A} = (A, M, N) > \tilde{0}$, матрица A невырожденная, $\tilde{b} = (b, g, h) > \tilde{0}$

2 Теория

1. Треугольное нечеткое число $\bar{A} = (m, \alpha, \beta)$ задается функцией принадлежности:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{m-x}{\alpha}, & m - \alpha \leq x < m, \alpha > 0 \\ 1 - \frac{x-m}{\beta}, & m \leq x \leq m + \beta, \beta > 0 \\ 0, & \text{во всех остальных случаях} \end{cases}$$

   Число $\tilde{0} = (0, 0, 0)$ считается нулевым треугольным нечетким числом.

2. Нечеткое число $\bar{A}$ называется положительным ($\bar{A} > 0$), если его функция принадлежности $\mu_{\bar{A}}(x) = 0, \forall x \leq 0$, и отрицательным ($\bar{A} < 0$), если его функция принадлежности $\mu \bar{A}(x) = 0, \forall x \geq 0$.

   Число $\bar{A} = (m, \alpha, \beta)$ является положительным, если $m - \alpha \geq 0$.

3. Два нечетких треугольных числа $\bar{M} = (m, \alpha, \beta)$ и $\bar{N} = (n, \gamma, \delta)$ равны тогда и только тогда, когда $m = n, \alpha = \gamma, \beta = \delta$.

4. Суммой двух нечетких треугольных чисел $\bar{M} = (m, \alpha, \beta)$ и $\bar{N} = (n, \gamma, \delta)$ называется число $(m, \alpha, \beta) \oplus (n, \gamma, \delta) = (m + n, \alpha + \gamma, \beta + \delta)$

5. Произведение двух положительных нечетких чисел $\bar{M} = (m, \alpha, \beta) > 0$ и $\bar{N} = (n, \gamma, \delta) > 0$ при малых значениях α, β по сравнению с m и малых γ, δ по сравнению с n приближенно определяется, как нечеткое число вида

   $(m, \alpha, \beta) \otimes (n, \gamma, \delta) = (mn, m\gamma + n\alpha, m\delta + n\beta)$.

   В частном случае умножения на четкое число λ:

$$\lambda \otimes (m, \alpha, \beta) = \begin{cases} (\lambda m, \lambda\alpha, \lambda\beta), & \lambda > 0, \\ (\lambda m, -\lambda\beta, -\lambda\alpha), & \lambda < 0 \end{cases}$$

   Когда разброс, характеризуемый $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ не является малым, может быть использована более точная формула умножения:

   $(m, \alpha, \beta) \otimes (n, \gamma, \delta) = (mn, m\gamma + n\alpha - \alpha\gamma, m\delta + n\beta - \beta\delta)$.

6. Матрица $\tilde{A} = (\tilde{a_{ij}})$ называется нечеткой, если каждый ее элемент представляется нечетким числом.

   Нечеткая матрица называется положительной ($\tilde{(A)} > 0$), если каждый ее элемент положителен. Аналогично определяется неотрицательные, отрицательные, неположительные нечеткие матрицы.

   Нечеткая матрица может быть представлена в форме $\tilde{A} = (\tilde{a_{ij}}) = ((a_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij}))$, или $\tilde{A} = (A, M, N)$, где $A = (a_{ij}), M = (\alpha_{ij}), N = (\beta_{ij})$, три матрицы с четкими элементами.

7. Система вида

$$\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}$$

с нечеткой прямоугольной матрицей $\tilde{A} = (\tilde{a_{ij}}, i = 1, ..., n$ и нечеткой матрицей $\tilde{b} = (\tilde{b_{ij}})$ размером $m \times 1$ называется полностью нечеткой линейной системой.

В расширенной форме ее можно переписать в виде:

$$\begin{gathered}(\tilde{a_{11}} \otimes \tilde{x_1}) \oplus ... \oplus (\tilde{a_{1n}} \otimes \tilde{x_n}) = \tilde{b_1},\\ (\tilde{a_{21}} \otimes \tilde{x_2}) \oplus ... \oplus (\tilde{a_{2n}} \otimes \tilde{x_n}) = \tilde{b_2},\\ ...\\ (\tilde{a_{n1}} \otimes \tilde{x_n}) \oplus ... \oplus (\tilde{a_{nn}} \otimes \tilde{x_n}) = \tilde{b_n}.\end{gathered}$$

2.1 Решение полностью нечетких СЛАУ

Метод нахождения положительного решения $\tilde{x} = (x, y, z) > \tilde{0}$ полностью нечеткой линейной системы $\tilde{A} \times \tilde{x} = \tilde{b}$ с $\tilde{A} = (A, M, N) > \tilde{0}$, матрица A невырожденная, $\tilde{b} = (b, g, h) > \tilde{0}$ при выполнении предположений о малых значениях α, β по сравнению с m и малых γ, δ по сравнению с n:

$$\begin{gathered}x = A^{-1}b,\\ y = A^{-1}(g - Mx),\\ z = A^{-1}(h - Nx).\end{gathered}$$

Условия, при которых полностью нечеткая СЛАУ имеет положительное решение:

Если $\tilde{A}$ - неотрицательная нечеткая матрица, $\tilde{x}$ - неотрицательный нечеткий вектор, $\tilde{b}$ - известный нечеткий вектор.

Решение системы $(A, M, N) \otimes (x, y, z) = (b, g, h)$ в случае, когда матрица A прямоугольная и не делается предположений о малых значениях α, β по сравнению с m, и малых γ, δ по сравнению с n.

В этом случае применим более четкую формулу умножения нечетких чисел вида
$(m, \alpha, \beta) \otimes (n, \gamma, \delta) = (mn, m\gamma + n\alpha - \alpha\gamma, m\delta + n\beta - \beta\delta)$:
$(Ax, Ay + Mx - My, Az + Nx + Nz) = (b, g, h)$.
Применяя условия равенства нечетких чисел получаем

$$\begin{gathered}Ax = b,\\ Ay + Mx - My = g\\ Az + Nx + Nz = h\end{gathered}$$

Отсюда

$$\begin{gathered}x = A^{-1}b,\\ y = (A - M)^{-1}(g - Mx),\\ z = (A + N)^{-1}(h - Nx).\end{gathered}$$

или

$$x = A^{-1}b, y = (A - M)^{-1}(g - MA^{-1}b), z = (A + N)^{-1}(h - NA^{-1}b).$$

3 Результаты. Пример.

Дана НСЛАУ

$$\begin{pmatrix} (15,1,4) & (5,2,9) & (0.001,1,0.002) \\ (10,5,6) & (25,3,4) & (0.001,1,0.002) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 = (x_1, y_1, z_1) \\ \tilde{x}_2 = (x_2, y_2, z_2) \\ \tilde{x}_3 = (x_3, y_3, z_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b_1} = (10, 15, 25) \\ \tilde{b_2} = (20, 30, 40) \end{pmatrix}$$

Найдем решение $\tilde{x}$ методом обратной матрицы.

Находим разложение нечетких элементов:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 1 \\ 10 & 25 & 1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0.001 \\ 5 & 3 & 0.001 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 0.002 \\ 6 & 4 & 0.002 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \end{pmatrix} h = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Находим псевдообратную матрицу A^{-1}, используя сингулярное разложение

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.077 & -0.016 \\ -0.031 & 0.047 \\ 0.004 & -0.001 \end{pmatrix}$$

По формулам из пункта 2.1 находим компоненты x, y, z искомого вектора.

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 0.459 \\ 0.615 \\ 0.038 \end{pmatrix}$$

$$y = A^{-1}(g - Mx) = \begin{pmatrix} 0.623 \\ 0.783 \\ 0.050 \end{pmatrix}$$

$$z = A^{-1}(h - Nx) = \begin{pmatrix} 0.817 \\ 1.062 \\ 0.067 \end{pmatrix}$$

Искомый вектор $\tilde{x}$:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x_1} = (0.495, 0.623, 0.817) \\ \tilde{x_2} = (0.615, 0.783, 1.062) \\ \tilde{x_3} = (0.038, 0.050, 0.067) \end{pmatrix}$$

4 Выводы

Рассмотрена теория полных нечетких систем линейных уравнений, и способы их решения. Также была написана программа на языке python, для их решения НСЛАУ методом обратной матрицы.

Литература

- Н. П. Деменков, Е. А. Микрин, И. А. Мочалов, Методы решения нечетких систем линейных уравнений. Ч. 1. Полные системы