

Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

ОТЧЕТ ПО КУРСОВОЙ РАБОТЕ

по дисциплине

"Интервальный анализ"

Тема: "Нечеткие множества - система уравнений"

Выполнил студент
группы 5030102/00201

Сон Артём Игоревич

Проверил
доцент, к.ф.-м.н.

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2024 г.

1 Постановка задачи

Решить полностью нечеткую систему линейных уравнений $\tilde{A} \times \tilde{x} = \tilde{b}$ с $\tilde{A} = (A, M, N) > \tilde{0}$, матрица A невырожденная, $\tilde{b} = (b, g, h) > \tilde{0}$

2 Теория

1. Треугольное нечеткое число $\bar{A} = (m, \alpha, \beta)$ задается функцией принадлежности:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{m-x}{\alpha}, & m - \alpha \leq x < m, \alpha > 0 \\ 1 - \frac{x-m}{\beta}, & m \leq x \leq m + \beta, \beta > 0 \\ 0, & \text{во всех остальных случаях} \end{cases}$$

Число $\tilde{0} = (0, 0, 0)$ считается нулевым треугольным нечетким числом.

2. Нечеткое число \bar{A} называется положительным ($\bar{A} > 0$), если его функция принадлежности $\mu_{\bar{A}}(x) = 0, \forall x \leq 0$, и отрицательным ($\bar{A} < 0$), если его функция принадлежности $\mu_{\bar{A}}(x) = 0, \forall x \geq 0$.

Число $\bar{A} = (m, \alpha, \beta)$ является положительным, если $m - \alpha \geq 0$.

3. Два нечетких треугольных числа $\bar{M} = (m, \alpha, \beta)$ и $\bar{N} = (n, \gamma, \delta)$ равны тогда и только тогда, когда $m = n, \alpha = \gamma, \beta = \delta$.
4. Суммой двух нечетких треугольных чисел $\bar{M} = (m, \alpha, \beta)$ и $\bar{N} = (n, \gamma, \delta)$ называется число $(m, \alpha, \beta) \oplus (n, \gamma, \delta) = (m + n, \alpha + \gamma, \beta + \delta)$
5. Произведение двух положительных нечетких чисел $\bar{M} = (m, \alpha, \beta) > 0$ и $\bar{N} = (n, \gamma, \delta) > 0$ при малых значениях α, β по сравнению с m и малых γ, δ по сравнению с n приближенно определяется, как нечеткое число вида $(m, \alpha, \beta) \otimes (n, \gamma, \delta) = (mn, m\gamma + n\alpha, m\delta + n\beta)$.

В частном случае умножения на четкое число λ :

$$\lambda \otimes (m, \alpha, \beta) = \begin{cases} (\lambda m, \lambda \alpha, \lambda \beta), & \lambda > 0, \\ (\lambda m, -\lambda \beta, -\lambda \alpha), & \lambda < 0 \end{cases}$$

Когда разброс, характеризуемый $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ не является малым, может быть использована более точная формула умножения:

$$(m, \alpha, \beta) \otimes (n, \gamma, \delta) = (mn, m\gamma + n\alpha - \alpha\gamma, m\delta + n\beta - \beta\delta).$$

6. Матрица $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ называется нечеткой, если каждый ее элемент представляется нечетким числом.

Нечеткая матрица называется положительной ($\tilde{A} > 0$), если каждый ее элемент положителен. Аналогично определяется неотрицательные, отрицательные, неположительные нечеткие матрицы.

Нечеткая матрица может быть представлена в форме $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) = ((a_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij}))$, или $\tilde{A} = (A, M, N)$, где $A = (a_{ij}), M = (\alpha_{ij}), N = (\beta_{ij})$, три матрицы с четкими элементами.

7. Система вида

$$\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}$$

с нечеткой прямоугольной матрицей $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}, i = 1, \dots, n$ и нечеткой матрицей $\tilde{b} = (\tilde{b}_{ij})$ размером $m \times 1$ называется полностью нечеткой линейной системой.

В расширенной форме ее можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} (\tilde{a}_{11} \otimes \tilde{x}_1) \oplus \dots \oplus (\tilde{a}_{1n} \otimes \tilde{x}_n) &= \tilde{b}_1, \\ (\tilde{a}_{21} \otimes \tilde{x}_1) \oplus \dots \oplus (\tilde{a}_{2n} \otimes \tilde{x}_n) &= \tilde{b}_2, \\ &\dots \\ (\tilde{a}_{n1} \otimes \tilde{x}_1) \oplus \dots \oplus (\tilde{a}_{nn} \otimes \tilde{x}_n) &= \tilde{b}_n. \end{aligned}$$

2.1 Решение полностью нечетких СЛАУ

Метод нахождения положительного решения $\tilde{x} = (x, y, z) > \tilde{0}$ полностью нечеткой линейной системы $\tilde{A} \times \tilde{x} = \tilde{b}$ с $\tilde{A} = (A, M, N) > \tilde{0}$, матрица A невырожденная, $\tilde{b} = (b, g, h) > \tilde{0}$ при выполнении предположений о малых значениях α, β по сравнению с m и малых γ, δ по сравнению с n :

$$\begin{aligned} x &= A^{-1}b, \\ y &= A^{-1}(g - Mx), \\ z &= A^{-1}(h - Nx). \end{aligned}$$

Условия, при которых полностью нечеткая СЛАУ имеет положительное решение:

Если \tilde{A} - неотрицательная нечеткая матрица, \tilde{x} - неотрицательный нечеткий вектор, \tilde{b} - известный нечеткий вектор.

Решение системы $(A, M, N) \otimes (x, y, z) = (b, g, h)$ в случае, когда матрица A прямоугольная и не делается предположений о малых значениях α, β по сравнению с m , и малых γ, δ по сравнению с n .

В этом случае применим более четкую формулу умножения нечетких чисел вида

$$\begin{aligned} (m, \alpha, \beta) \otimes (n, \gamma, \delta) &= (mn, m\gamma + n\alpha - \alpha\gamma, m\delta + n\beta - \beta\delta): \\ (Ax, Ay + Mx - My, Az + Nx + Nz) &= (b, g, h). \end{aligned}$$

Применяя условия равенства нечетких чисел получаем

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ Ay + Mx - My &= g \\ Az + Nx + Nz &= h \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x &= A^{-1}b, \\ y &= (A - M)^{-1}(g - Mx), \\ z &= (A + N)^{-1}(h - Nx). \end{aligned}$$

или

$$x = A^{-1}b, y = (A - M)^{-1}(g - MA^{-1}b), z = (A + N)^{-1}(h - NA^{-1}b).$$

3 Результаты. Пример.

Дана НСЛАУ

$$\begin{pmatrix} (15, 1, 4) & (5, 2, 9) & (0.001, 1, 0.002) \\ (10, 5, 6) & (25, 3, 4) & (0.001, 1, 0.002) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 = (x_1, y_1, z_1) \\ \tilde{x}_2 = (x_2, y_2, z_2) \\ \tilde{x}_3 = (x_3, y_3, z_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 = (10, 15, 25) \\ \tilde{b}_2 = (20, 30, 40) \end{pmatrix}$$

Найдем решение \tilde{x} методом обратной матрицы.

Находим разложение нечетких элементов:

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 1 \\ 10 & 25 & 1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0.001 \\ 5 & 3 & 0.001 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 0.002 \\ 6 & 4 & 0.002 \end{pmatrix}$$
$$b = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \end{pmatrix} h = \begin{pmatrix} 25 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Находим псевдообратную матрицу A^{-1} , используя сингулярное разложение

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.077 & -0.016 \\ -0.031 & 0.047 \\ 0.004 & -0.001 \end{pmatrix}$$

По формулам из пункта 2.1 находим компоненты x, y, z искомого вектора.

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 0.459 \\ 0.615 \\ 0.038 \end{pmatrix}$$

$$y = A^{-1}(g - Mx) = \begin{pmatrix} 0.623 \\ 0.783 \\ 0.050 \end{pmatrix}$$

$$z = A^{-1}(h - Nx) = \begin{pmatrix} 0.817 \\ 1.062 \\ 0.067 \end{pmatrix}$$

Искомый вектор \tilde{x} :

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 = (0.495, 0.623, 0.817) \\ \tilde{x}_2 = (0.615, 0.783, 1.062) \\ \tilde{x}_3 = (0.038, 0.050, 0.067) \end{pmatrix}$$

4 Выводы

Рассмотрена теория полных нечетких систем линейных уравнений, и способы их решения. Также была написана программа на языке python, для их решения НСЛАУ методом обратной матрицы.