Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра «Прикладная математика»

Отчет по лабораторной работе №3

по дисциплине
"Интервальный анализ"

Выполнил студент
группы 5030102/00201 Сон Артём Игоревич

Проверил
доцент, к.ф.-м.н. Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2024 г.

Содержание

1 Постановка задачи

Задана система нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = y^2 \end{cases}$$

Необходимо найти корни данной системы точечных нелинейных уравнений, используя интервальный метод Кравчика.

2 Теория

2.1 Внешнее множество решений

Внешним множеством решений называется объединенное множество решений, образованное решениями всех точечных систем $F(a, x) = b$

$$\Xi_{\text{uni}}(\mathbf{F}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{x \in R^n \mid (\exists a \in \mathbf{a})(\exists b \in \mathbf{b})(F(a, x) = b)\} \tag{1}$$

2.2 Метод Кравчика

Метод Кравчика предназначен для уточнения двухсторонних границ решений систем уравнений, в общем случае нелинейных, заданных на некотором брусе $\mathbf{X} \subset IR$, вида

$$F(x) = 0, \quad \text{где } F(x) = \{F_1(x), ..., F_n(x)\}^T, \; x = (x_1, ...x_n) \tag{2}$$

Также данный метод может быть использован для того, чтобы понять, что решений нет.
Отображение $\mathcal{K} : ID \times R \to IR^n$, задаваемое выражением

$$\mathcal{K}(\mathbf{X}, \overline{x}) := \overline{x} - \Lambda * F(\overline{x}) - (I - \Lambda * \mathbf{L} * (\mathbf{X} - \overline{x}) \tag{3}$$

называется оператором Кравчика на ID относительно точки $\overline{x}$.
Итерационная схема данного метода выглядит следующим образом

$$\mathbf{X}^{k+1} \leftarrow \mathbf{X}^k \cap \mathcal{K}(\mathbf{X}^k, \overline{x}^k), \;\; k = 0, 1, 2..., \; x^k \in \mathbf{X}^k \tag{4}$$

Сходимость данного метода гарантирована при выполнении условия

$$\rho(I - \Lambda * \mathbf{L}) < 1 - \text{спектральный радиус меньше единицы} \tag{5}$$

Частным случаем данного метода является линейный метод Кравчика, итерационная схема которого выглядит следующим образом:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \left(\Lambda * \mathbf{b} + (I - \Lambda * \mathbf{A}) * \mathbf{x}^k\right) \cap \mathbf{x}^k \tag{6}$$

$\mathbf{A}$ в данном случае является интервальной матрицей коэффициентов соответствующей ИСЛАУ, а $\mathbf{b}$ - вектором свободных членов.
В случае линейности системы и выполнения условия $\eta = ||I - \Lambda * \mathbf{A}||_\infty \leq 1$ в качестве начального приближения можно взять брус

$$\mathbf{x}^0 = ([-\theta, \theta], ..., [-\theta, \theta])^T, \quad \text{где } \theta = \frac{||\Lambda \mathbf{b}||_\infty}{1 - \eta} \tag{7}$$

3 Результаты

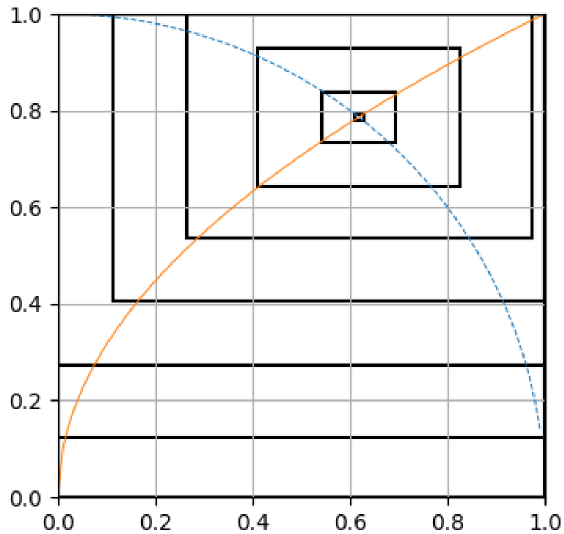

Рис. 1: Метод Кравчика - пересечение параболы и окружности

Получим таблицу результатов для некоторых $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$

№	$\mathbf{X}_1$	$\mathbf{X}_2$	ширина $\mathbf{X}_1$	ширина $\mathbf{X}_2$
1	[0, 1]	[0, 1]	1.0	1.0
2	$[0.125, 1]$	$[0, 1]$	0.875	1.0
3	$[0.406219, 1]$	$[0.111684, 1]$	0.5937	0.8883
4	$[0.534126, 1]$	$[0.266059, 0.973673]$	0.4658	0.7076
5	$[0.64279, 0.92999]$	$[0.409351, 0.82672]$	0.2871	0.4173
6	$[0.735163, 0.83714]$	$[0.542195, 0.693873]$	0.1020	0.1517
7	$[0.779572, 0.79273]$	$[0.608239, 0.627829]$	0.0132	0.0196
8	$[0.786042, 0.786261]$	$[0.617871, 0.618197]$	0.000219	0.0003264
9	$[0.786151, 0.786151]$	$[0.618034, 0.618034]$	6.08*10^{-8}	9.06*10^{-8}

4 Вывод

- Точное решение данной системы $x = 0.6180339, y = 0.7861513$ совпадает с полученным результатом. Полученные результаты подтверждают эффективность и сходимость интервального метода Кравчика для решения системы нелинейных уравнений.
- На 9 итерации метод дошел до $2.52 * e^{-8}$ и $2.46 * e^{-7}$ соответственно
- Сходимость метода обеспечивается выполнением условия $\rho(I - \Lambda * \mathbf{L}) < 1$, что подчеркивает важность выбора подходящих параметров и начальных условий для успешной работы метода.