4. 정형 증명

Formal Proof

System $\mathcal{F}$: Fitch-style Natural Deduction System

- 증명 규칙
  - ✓논리곱 규칙 Conjunction rules
  - ✓논리합 규칙 Disjunction rules
  - ✓논리역 규칙 Negation rules
  - ✓(모순 규칙 Contradiction rules)
- 각 규칙마다 생성 규칙 introduction rule과 제거 규칙 elimination rule이 있다.

논리곱 규칙 Conjunction Rules

논리곱 제거 규칙 (∧ Elim)

$$\begin{array}{l|l} & \mathbf{P_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{P}_i \wedge \ldots \wedge \mathbf{P}_n \\ & \vdots \\ \triangleright & \mathbf{P}_i \end{array}$$

논리곱 생성 규칙 (∧ Intro)

$$\begin{array}{l|l} & \mathbf{P_1} \\ & \Downarrow \\ & \mathbf{P}_n \\ & \vdots \\ \triangleright & \mathbf{P_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{P}_n \end{array}$$

예:

1.	A ∧ B ∧ C	
2.	B	∧ Elim: 1
3.	C	∧ Elim: 1
4.	C ∧ B	∧ Intro: 3,2

Fitch로 증명해보자
- Conjunction 1
- Conjunction 2

∧ 규칙의 지름길 사용

17. Tet(a) ∧ Tet(b) ∧ Tet(c) ∧ Tet(d)
:
26. Tet(d) ∧ Tet(b) ∧ Elim: 17

13. Tet(a) ∧ Tet(b)
:
21. Tet(b) ∧ Tet(a) ∧ Elim: 13

Fitch로 증명해보자
- Conjunction 3
- Conjunction 4

논리합 규칙 Disjunction Rules

논리합 생성 규칙 (∨ Intro)

$$
\begin{array}{l|l}
 & \mathbf{P}_i \\
 & \vdots \\
\triangleright & \mathbf{P}_1 \lor \ldots \lor \mathbf{P}_i \lor \ldots \lor \mathbf{P}_n
\end{array}
$$

논리합 제거 규칙 (∨ Elim)

$$
\begin{array}{l|l}
 & \mathbf{P}_1 \lor \ldots \lor \mathbf{P}_n \\
 & \vdots \\
 & \boxed{\begin{array}{|l} \mathbf{P}_1 \\ \hline \vdots \\ S \end{array}} \\
 & \Downarrow \\
 & \boxed{\begin{array}{|l} \mathbf{P}_n \\ \hline \vdots \\ S \end{array}} \\
 & \vdots \\
\triangleright & S
\end{array}
$$

일시적으로 가정

⇓

보조 증명
subproof

⇓

= 경우별 증명
Proof by cases

논리합 규칙을 이용한 증명 예 1

1. $(A \land B) \lor (C \land D)$

---

2. $A \land B$

---

3. B — $\land$ Elim: 2
4. $B \lor D$ — $\lor$ Intro: 3

5. $C \land D$

---

6. D — $\land$ Elim: 5
7. $B \lor D$ — $\lor$ Intro: 6

8. $B \lor D$ — $\lor$ Elim: 1. 2-4, 5-7

논리합 규칙을 이용한 증명 예 2

1. $(B \wedge A) \vee (A \wedge C)$

2. $B \wedge A$

3. A — $\wedge$ Elim: 2

4. $A \wedge C$

5. A — $\wedge$ Elim: 4

6. A — $\vee$ Elim: 1. 2-3, 4-5

논리합 규칙을 이용한 증명 예 3

1. $(B \wedge A) \vee A$	
2. $B \wedge A$	
3. A	$\wedge$ Elim: 2
4. A	
5. A	Reit: 4
6. A	$\vee$ Elim: 1. 2-3, 4-5

Fitch로 증명해 보자

- Disjunction 1
- Disjunction 2

논리역 규칙 Negation Rules

논리역 제거 규칙 (¬ Elim)

$\neg\neg P$

$\vdots$

$\triangleright$ P

논리역 생성 규칙 (¬ Intro)

P

$\vdots$

$\bot$ $(\equiv Q \wedge \neg Q)$

$\triangleright$ $\neg P$

= 모순유도 증명
Proof by Contradiction

모순 생성 규칙 (⊥ Intro)

P

$\vdots$

$\neg P$

$\vdots$

$\triangleright$ $\bot$

- 보조 증명subproof에서만 사용
- 일관성이 없음inconcsistency을 증명하는 경우 주 증명에서도 사용 가능

Fitch로 증명해보자

- Negation 1

일관성 없음Inconsistency 증명

1. A ∨ B
2. ¬A
3. ¬B

    4. A

    5. ⊥ ⊥ Intro: 4,2

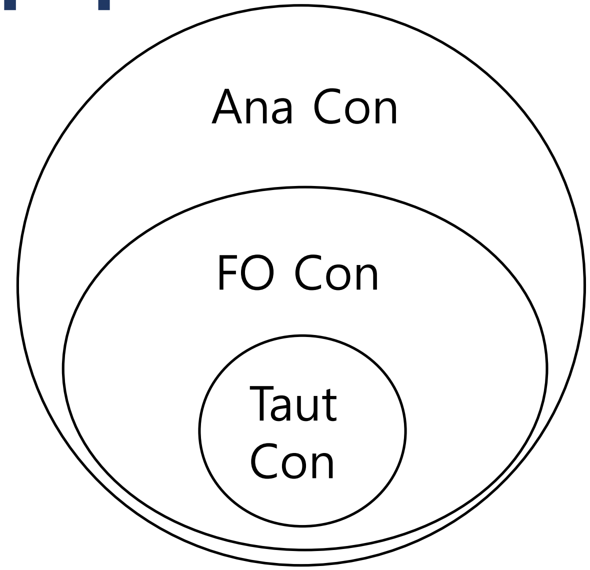
    6. B

    7. ⊥ ⊥ Intro: 6,3

8. ⊥ ∨ Elim: 1. 4-5, 6-7

Fitch에서 ⊥을 한번에 끌어내기

- Taut Con
  - $\land,\lor,\neg,\bot$ Intro/Elim으로 증명 가능
  - TT-모순contradiction:
    - ✓ $\neg(A \lor \neg A)$
    - ✓ $\neg A \lor \neg B$ and $A \land B$
- FO Con
  - $=,\land,\lor,\neg,\bot$ Intro/Elim으로 증명 가능
  - Cube(b), b=c, $\neg$Cube(c) 에 = Elim 규칙을 적용하면
  - Cube(c), $\neg$Cube(c) 이 됨
- Ana Con
  - Tarski's World의 술어의 의미를 이해 (Adjoins와 Between 제외)
  - Cube(b), Tet(b)



<u>이제, Fitch로 증명해보자</u>

\- Negation 2

모순 규칙 Contradiction Rules

⊥ 생성 규칙 (⊥ Intro)

| P
| ⋮
| ¬P
| ⋮
▷ | ⊥

⊥ 제거 규칙 (⊥ Elim)

| ⊥
| ⋮
▷ | P

⊥ 제거 규칙은 아래 증명의 축약이다

| 17. ⊥
| | 18. ¬P
| | 19. ⊥ Reit: 17
| 20. ¬¬P ¬Intro: 18-19
| 21. P ¬Elim: 20

Fitch로 증명해보자

- Negation 3

¬ 규칙의 지름길 사용

- ¬ Elim
  - Fitch는 한번에 짝수개의 논리역 연결자(¬)를 제거하게 해준다.
- ¬ Intro
  - ¬A 에서 (¬¬A로 가는 대신) A로 가게 해준다.

Fitch로 증명해보자
- Negation 4

범하기 쉬운 틀린 증명

1. $(B \wedge A) \vee (A \wedge C)$

    2. $B \wedge A$

    3. B — $\wedge$ Elim: 2
    4. A — $\wedge$ Elim: 2

    5. $A \wedge C$

    6. A — $\wedge$ Elim: 5

7. A — $\vee$ Elim: 1. 2-4, 5-6
8. $A \wedge B$ — $\wedge$ Intro: 7,3

보조 증명이 끝나면,
보조증명에 사용한 가정은 소멸
Discharging assumptions by ending subproofs

보조증명 중첩 가능 Nested Subproofs

1. $\neg(P \wedge Q)$	
2. $\neg(\neg P \vee \neg Q)$	
3. $\neg P$	
4. $\neg P \vee \neg Q$	$\vee$ Intro: 3
5. $\perp$	$\perp$ Intro: 4,2
6. $\neg\neg P$	$\neg$ Intro: 3-5
7. P	$\neg$ Elim: 6
8. $\neg Q$	
9. $\neg P \vee \neg Q$	$\vee$ Intro: 8
10. $\perp$	$\perp$ Intro: 9,2
11. $\neg\neg Q$	$\neg$ Intro: 8,10
12. Q	$\neg$ Elim: 11
13. $P \wedge Q$	$\wedge$ intro: 7,12
14. $\neg(P \wedge Q)$	Reit: 1
15. $\perp$	$\perp$ Intro: 13,14
16. $\neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$	$\neg$ Intro: 2-15
17. $\neg P \vee \neg Q$	$\neg$ Elim: 16

증명Proof 전략Strategy 과 전술Tactics

1. 문장의 의미를 이해한다.
   - ✓ 전제를 가지고 결론을 이끌어낼 수 있는지 알아본다.
   - ✓ 결론을 이끌어내기가 불가능하다고 생각되거나, 확신이 없으면, 반례를 찾아본다.
   - ✓ 이를 Fitch에서는 Taut Con으로 쉽게 확인할 수 있다.
2. 비정형 증명을 해본다.
   - ✓ 비정형 증명 절차에 대응되는 정형 증명 규칙이 반드시 있다.
   - ✓ (비정형) 모순유도 증명 $\Rightarrow$ (정형) $\neg$ Intro 규칙 적용
   - ✓ (비정형) 경우별 증명 $\Rightarrow$ (정형) $\vee$ Elim 규칙 적용
3. 비정형 증명을 찾기 힘들거나. 대응되는 정형 증명 규칙을 찾기 힘들면, “뒤에서 시작하여 거꾸로 작업”해본다.
   - ✓ 결론을 보고, 그 결론을 유추해내기 위해서 어떤 문장이 필요한지를 알아내서 이 문장을 중간 결론으로 정한다.
   - ✓ 이 중간 결론을 증명 목표로 하여 증명을 시도해본다.

정형 증명

증명 전략과 전술을 이용하여 좀 어려운 증명을 해보자:

- 이 주장은 DeMorgan의 법칙... 따라서 당연히 타당한 주장
- 비정형 증명 : 첫 시도
  - 전제에 의해서 P가 거짓이거나 Q가 거짓임을 알 수 있다.
  - 둘 중 하나는 거짓이므로 $P \wedge Q$는 거짓이다.
  - 따라서 $\neg(P \wedge Q)$는 참이다.
- 이 비정형 증명을 보고도 정형 증명을 그려내기가 그리 쉽지 않다.
- 거꾸로 작업을 해보자!

$$\neg P \vee \neg Q$$

$$\neg(P \wedge Q)$$

정형 증명

증명 전략과 전술을 이용하여 좀 어려운 증명을 해보자(계속) :

- 포인트1: 결론이 논리역negation이므로 $P \land Q$라고 가정한 다음 ⊥을 유도하면 되겠다.
- 새로운 증명 목표: $P \land Q$를 전제로 하고 모순⊥을 결론으로 유도
- 포인트2: 전제가 논리합으로 연결되어 있으므로 경우별 증명을 하여 모순⊥을 유도하면 되겠다.
- 자... 이제 이 전략과 전술을 사용하여 Fitch로 정형 증명을 해보자.
    - Strategy 1

$$
\begin{array}{|l}
\neg P \lor \neg Q \\
\hline
\\
\neg(P \land Q)
\end{array}
$$

전제 없이 증명하기 Proofs without Premises
=> 논리적 진리Logical Truth 증명하기

```
|
|———
| 1.  a = a               = Intro
| 2.  b = b               = Intro
| 3.  a = a ∧ b = b       ∧ intro: 1,2
```

```
|
|———
|  | 1.  P ∧ ¬P
|  |———
|  | 2.  P              ∧ Elim: 1
|  | 3.  ¬P             ∧ Elim: 1
|  | 4.  ⊥              ⊥ Intro: 2,3
| 5.  ¬(P ∧ ¬P)         ¬ intro:1-4
```