6. System F 의 안전성과 완전성

Soundness and Completeness of System F

용어정리

- $\mathcal{F}_T$

  ¬,∧,∨,→,↔,⊥ Intro/Elim 규칙으로 구성된 추론 시스템.

- $P_1, \ldots, P_n \vdash_T S$

  뜻: 전제 $P_1, \ldots, P_n$ 에서 결론 S를 얻는 $\mathcal{F}_T$ 증명이 있다.

System $\mathcal{F}_T$의 안전성 Soundness of System $\mathcal{F}_T$

- 추론시스템 $\mathcal{F}_T$ 로 증명한 게 타당하다고 할 수 있을까?
- 증명 규칙에 결점이 없다고 할 수 있을까?
- 안전성 정리Soundness Theorem: $P_1, \ldots, P_n \vdash_T Q$ 이면, 문장 Q는 $P_1, \ldots, P_n$의 항진 결과이다.
- 증명:
  - 추론시스템 $\mathcal{F}_T$로 구축한 증명을 p라고 하자.
  - <증명해야 할 것> 증명 p 상에서 어떤 단계의 "문장"도 그 단계에서 사용 가능한 "가정(전제포함)"의 "항진 결과"이다.
  - 그렇다면, Q가 맨 바깥 수준에서 사용 가능한 가정은 전제인 $P_1, \ldots, P_n$뿐이므로, Q가 $P_1, \ldots, P_n$의 항진 결과라고 할 수 있게 된다.

- (증명 계속) <모순유도 증명 Proof by contradiction>

  - 증명 p 상에서 어떤 단계의 문장이 그 단계에서 사용 가능한 가정의 항진 결과가 아닌 단계가 있다고 가정한다.

    (이를 타당하지 않은 단계invalid step이라고 함)

  - 증명 p의 첫 번째 타당하지 않은 단계를 찾은 뒤, $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}$의 12개 규칙 중에서 어떤 규칙을 적용해도 정당화할 수 없어서 모순이 됨을 보인다.

  - 그러면 $\mathcal{F}_{\mathrm{T}}$ 증명에서 타당하지 않은 단계가 없다고 결론 지을 수 있게 된다.

- (증명 계속) <경우별 증명 Proof by case>

  → Elim:

  – Q→R과 Q에 →Elim 규칙을 적용하여 R 문장을 유추해 낸 단계를 첫 번째 타당하지 않은 단계라고 하자.

  – R에서 사용 가능한 가정을 A_1, ..., A_k 이라고 하자.

  – 만약 이 단계가 타당하지 않다면, R은 A_1, ..., A_k의 항진 결과가 아닐 것이다.

  – R을 타당하지 않은 첫 번째 단계라고 했으므로 그 전 단계인 Q→R과 Q는 둘 다 타당한 단계, 즉, 그 단계에서 사용 가능한 가정의 항진 결과임에 틀림없다.

  – [관찰] Q→R과 Q에서 사용 가능한 가정은 R에서도 사용 가능하다.

  – 그런데 R이 타당하지 않은 단계이므로 진리표에 다음과 같은 행이 존재한다.

A_1	…	A_k	Q→R	Q	R
T	T	T	T	T	F

  – 이는 모순!

- (증명 계속) <경우별 증명 Proof by case>

  $\rightarrow$ Intro:

  – 가정이 Q이고 결론이 R인 부분증명subproof에 $\rightarrow$Intro 규칙을 적용하여 Q$\rightarrow$R 문장을 유추해 낸 단계를 첫 번째 타당하지 않은 단계라고 하자.

  – Q$\rightarrow$R에서 사용 가능한 가정을 A_1, …, A_k 이라고 하자.

  – R에서 사용 가능한 가정은 A_1, …, A_k과 Q가 될 것 이다.

  – Q$\rightarrow$R을 타당하지 않은 첫 번째 단계라고 했으므로 그 전 단계인 R은 그 단계에서 사용 가능한 가정의 항진 결과임에 틀림없다.

  – 그런데 Q$\rightarrow$R이 타당하지 않은 단계이므로 진리표에 다음과 같은 행이 존재한다.

A_1	…	A_k	Q	Q$\rightarrow$R	R
T	T	T	T	F	T

  – 이는 모순!

- (증명 계속) <경우별 증명 Proof by case>

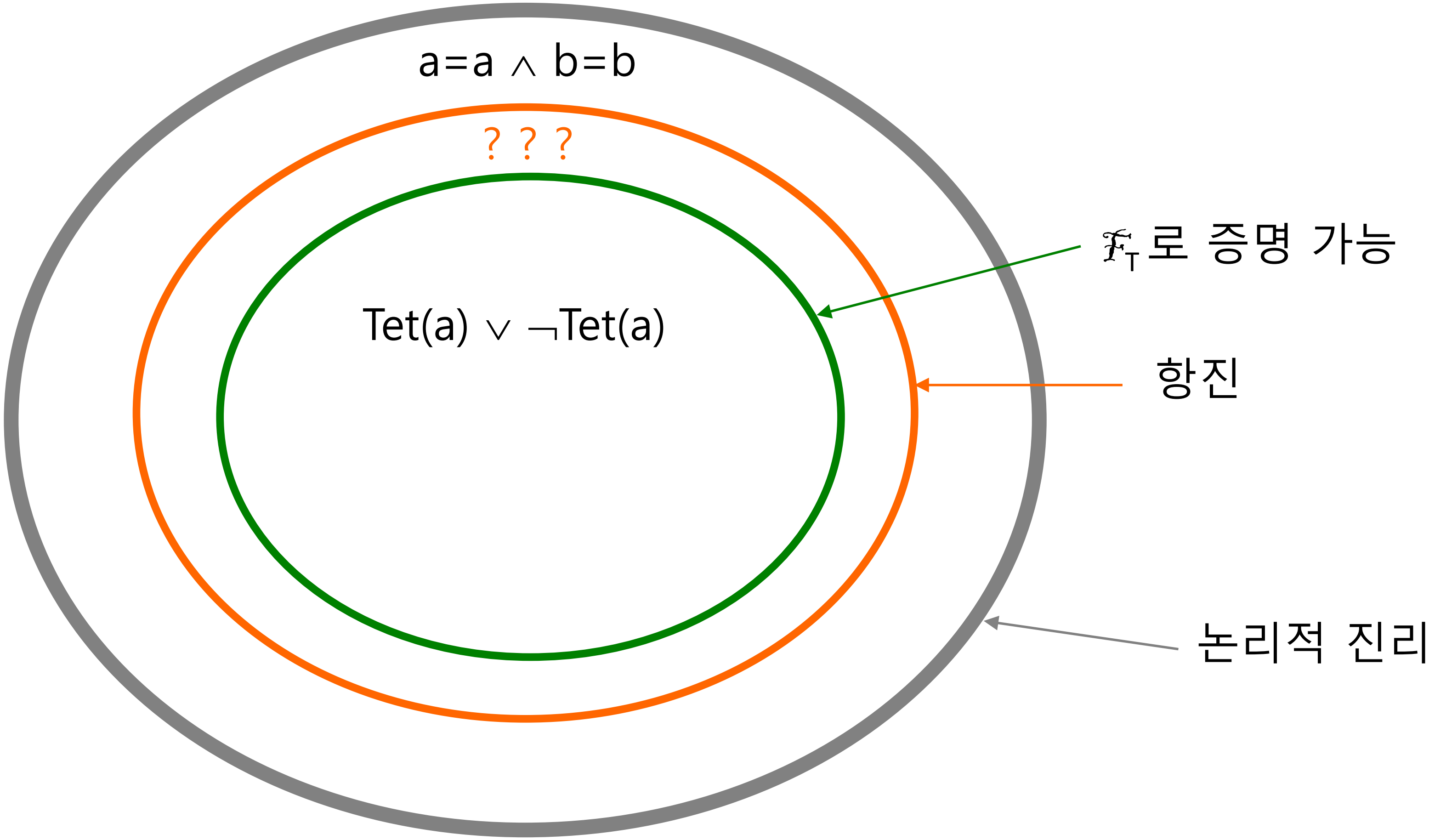
  ⊥ Elim:

  – ⊥에 ⊥ Elim 규칙을 적용하여 Q 문장을 유추해 낸 단계를 첫 번째 타당하지 않은 단계라고 하자.
  – [관찰] ⊥에서 사용 가능한 가정은 Q에서도 사용 가능하다.
  – Q 단계를 타당하지 않은 첫 번째 단계라고 했으므로 그 전 단계인 ⊥은 그 단계에서 사용 가능한 가정의 항진 결과임에 틀림없다.
  – 그런데 Q가 타당하지 않은 단계이므로 진리표에 다음과 같은 행이 존재한다.

A_1	…	A_k	⊥	Q
T	T	T	T	F

  – 이는 모순!

  – 이런 식으로 12개의 규칙 모두에 대해서 모순을 유도하면 된다…
  – 증명 그만…



Soundness of $\mathcal{F}_T$

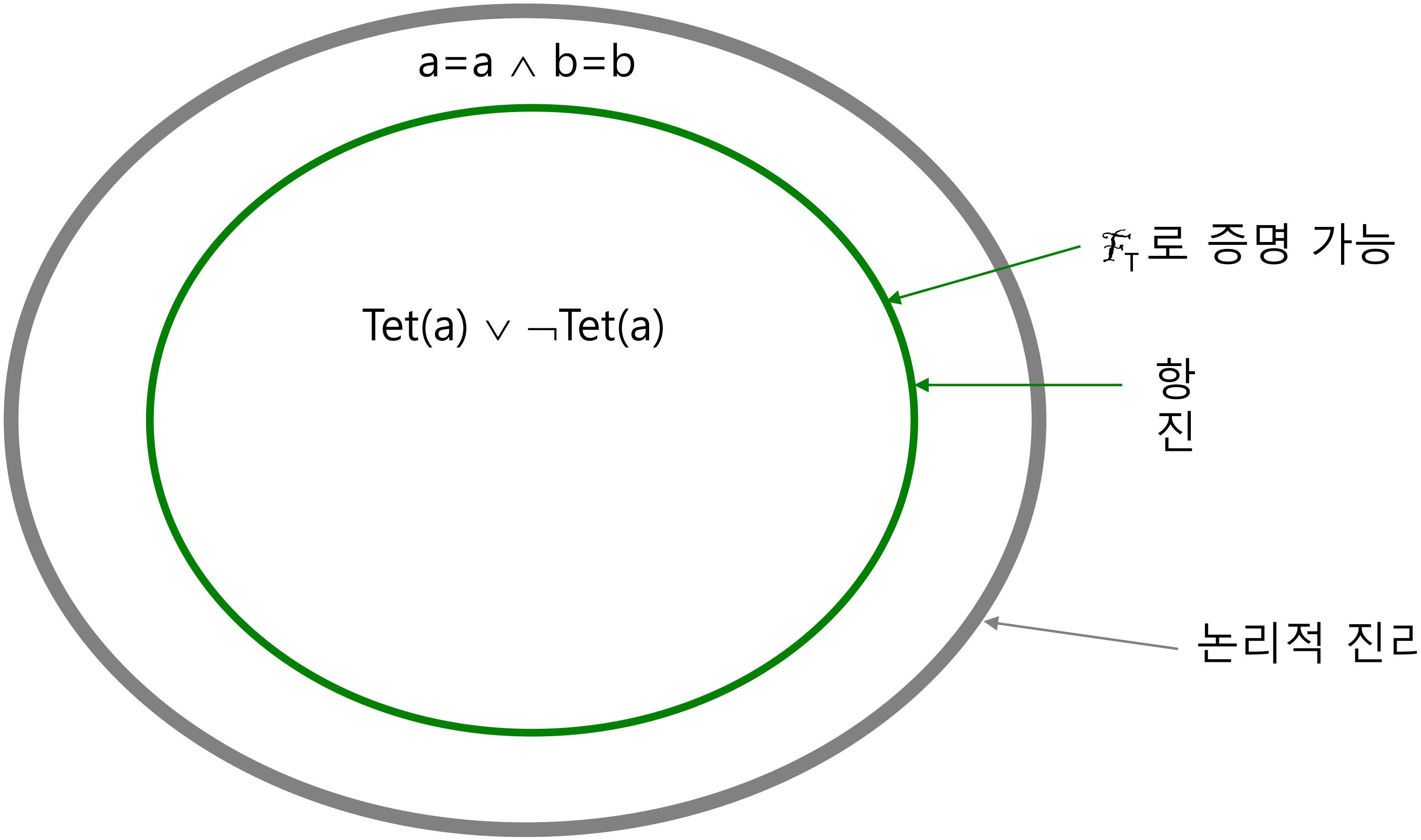
(부수정리Corollary) $\vdash_T$ S 이면, 문장 S는 항진이다.

System $\mathfrak{F}_T$의 완전성 Completeness of System $\mathfrak{F}_T$

- 증명 가능한 모든 걸 추론시스템 $\mathfrak{F}_T$으로 증명할 수 있을까?
- 임의의 전제 $P_1, \ldots, P_n$와 이 전제로 얻을 수 있는 모든 항진 결과tautological consequence S에 대해서, 추론 시스템 $\mathfrak{F}_T$로 $P_1, \ldots, P_n$에서 S를 도출해내는 증명을 할 수 있을까?
- 추론 시스템 $\mathfrak{F}_T$로 증명할 수 없는 임의의 전제에 대한 항진 결과가 있을까?
- (완전성 정리Completeness Theorem) 문장 S가 $P_1, \ldots, P_n$의 항진 결과이면,

  $P_1, \ldots, P_n \vdash_T S$

  (증명) 교재 17장 참조



Completeness and Soundness of $\mathscr{F}_T$

$\mathscr{F}_T$로 증명 불가능 한 것

$Dodec(b) \wedge b = c \vdash Dodec(c)$

$Larger(b,c) \vdash \neg Larger(c,b)$

완전성 정리 Completeness Theorem는 어디에 써먹나?

- 증명을 찾을 필요 없이 증명의 존재 여부 판별 가능
- 어떻게? 전제를 가지고 항진 결과를 얻어내기만 하면 된다.
- 예: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$는 항진이므로 증명이 확실히 존재한다.
- 예: 결론 $B \wedge \neg D$는 전제 $\neg((A \wedge B) \rightarrow (C \vee D))$의 항진 결과이므로 증명이 확실히 존재한다.
- 잠깐: 항진 결과인지는 어떻게 알 수 있을까?
  Boole로 진리표를 그려 보든지, Fitch에서 Taut Con을 사용하든지...

안전성 정리Soundness Theorem는 어디에 써먹나?

- $\mathcal{F}_T$ 에서 증명이 없음을 알아내기가 가능
- 어떻게? 결론이 전제의 항진적 결과가 아님을 보여주면 된다.
- 예: $A \rightarrow (A \rightarrow B)$는 항진이 아니므로 아무리 용을 써봐도 $\mathcal{F}_T$ 로 증명을 구축하기가 불가능하다.
- 예: 결론 $B \wedge \neg D$는 전제 $\neg((A \vee B) \rightarrow (C \wedge D))$의 항진 결과가 아니므로, 아무리 용을 써봐도 $\mathcal{F}_T$ 로 증명을 구축하기가 불가능하다.
- 예: 결론 ¬Happy(carl)은 전제 ¬(Happy(carl) ∧ Happy(scruffy))의 항진 결과가 아니므로 아무리 용을 써봐도 $\mathcal{F}_T$ 로 증명을 구축하기가 불가능하다.

따라서..

- Fitch 에서
- Taut Con으로 따져본 후
- 항진이면 열심히 증명을 찾아보고
- 항진이 아니면 바로 포기하면 됨

- 그러나... Fitch가 없는 세상에서는 진리표를 그려볼 수 밖에 없음.