8. 양화사의 논리

Logic of Quantifiers

다음 주장들이 타당한가

$\forall x\,(Cube(x) \rightarrow Small(x))$
$\forall x\, Cube(x)$

$\forall x\, Small(x)$

valid

$\forall x\, Cube(x)$
$\forall x\, Small(x)$

$\forall x\,(Cube(x) \land Small(x))$

valid

$\exists x\,(Cube(x) \rightarrow Small(x))$
$\exists x\, Cube(x)$

$\exists x\, Small(x)$

invalid

반례: $Cube(a) \land Large(a) \land Dodec(b) \land Large(b)$

$\exists x\, Cube(x)$
$\exists x\, Small(x)$

$\exists x\,(Cube(x) \land Small(x))$

invalid

반례: $Cube(a) \land Large(a) \land Dodec(b) \land Small(b)$

다음 문장들은 논리적으로 진실인가?
논리적 결과 vs 항진적 결과

$\exists x\ Cube(x) \lor \exists x\ \neg Cube(x)$

논리적 진실? Yes
항진? No

$\forall x\ Cube(x) \lor \forall x\ \neg Cube(x)$

논리적 진실? No
항진? No

$\forall x\ Cube(x) \lor \neg \forall x\ Cube(x)$

논리적 진실? Yes
항진? Yes

$\exists x\ Cube(x) \lor \neg \exists x\ Cube(x)$

논리적 진실? Yes
항진? Yes

항진인지 알아보는 방법

$(\exists y\ (P(y) \lor R(y)) \rightarrow \forall x\ (P(x) \land Q(x))) \rightarrow (\neg \forall x\ (P(x) \land Q(x)) \rightarrow \neg \exists y\ (P(y) \lor R(y)))$

$\exists y\ (P(y) \lor R(y))$를 A로 바꾸고
$\forall x\ (P(x) \land Q(x))$를 B로 바꾸면

$(\ \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}\ ) \rightarrow (\ \neg\mathbf{B} \rightarrow \neg\mathbf{A}\ )$

A	B	¬B	¬A	A→B	¬B→ ¬A	(A→B)→(¬B→ ¬A)
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	F	F	F	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

진리 함수형으로 바꾸는 알고리즘

1. 문장 s의 맨 앞에서부터 시작하여 오른쪽으로 전진
2. 전칭/존재 양화사 기호(quantifier)나 핵문장(atomic sentence)을 만나면 그 부분에 밑줄을 긋는다.
   - 양화사 기호를 만나면 기호와 그와 관련된 식에 밑줄을 긋는다.
   - 핵문장을 만나면 그 문장만 밑줄을 긋는다.
3. 밑줄의 끝부분에 그 문장을 나타내는 문자를 부여한다. (A,B,C,…)
   - 이전과 똑 같은 부분이 나오면 같은 문자를 부여한다.
   - 처음 나오는 부분은 새로운 문자를 부여한다.
4. 문장의 끝에 다다를 때까지 이 과정을 반복한다.
5. 밑줄 친 부분을 끝에 달아놓은 문자로 대치하면 s의 진리함수형 (truth-functional form) 문장이 된다.
   예: $\neg(\text{Tet}(d) \land \forall x\ \text{Small}(x)) \rightarrow (\neg\text{Tet}(d) \lor \neg\forall y\ \text{Small}(y))$

연습 : 진리함수형으로 바꾸기

FO 문장	진리함수형
$\forall x\ Cube(x) \lor \neg\forall x\ Cube(x)$	$A \lor \neg A$
$(\exists y\ Tet(y) \land \forall z\ Small(z)) \rightarrow \forall z\ Small(z)$	$(A \land B) \rightarrow B$
$\forall x\ Cube(x) \lor \exists y\ Tet(y)$	$A \lor B$
$\forall x\ Cube(x) \rightarrow Cube(a)$	$A \rightarrow B$
$\forall x\ (Cube(x) \lor \neg Cube(x))$	A
$\forall x\ (Cube(x) \rightarrow Small(x)) \lor \exists x\ Dodec(x)$	$A \lor B$

FOL의 항진(Tautology)

- 정의 : FOL에서 전칭/존재 양화사 기호가 붙은 문장이 항진이다 iff 그 문장의 진리함수형이 항진이다.
- 항진이면 논리적으로 진실이다.
- 그러나, 전칭/존재 양화사 기호가 붙은 문장에서 항진이 아니면서 논리적으로 진실인 문장이 많이 있다.
- 항진이 아니면서 논리적으로는 타당한 FOL 주장이 많이 있다.

1차 논리 First-Order Logic

명제논리 Propositional Logic	1차논리 First-Order Logic	일반적 용어 General Notion
항진 Tautology	**FO 타당함 FO Validity**	논리적 진실 Logical Truth
항진적 결과 Tautological Consequence	**FO 결과 FO Consequence**	논리적 결과 Logical Consequence
항진적 동등 Tautological Equivalence	**FO 동등 FO Equivalence**	논리적 동등 Logical Equivalence

FO 타당성 FO Validity

- FOL 문장은 동등기호(=)만 제외하고, 이름(name), 함수관계기호(function symbol), 술어(predicate)의 의미를 모두 무시하고도 논리적으로 진실인 경우 FO 타당하다고 한다.
- 다음 중 FO 타당한 문장은?

$\forall x$ SameSize(x,x)
$\forall x$ Cube(x) $\rightarrow$ Cube(b)
(Cube(b) $\wedge$ b = c) $\rightarrow$ Cube(c)
(Small(b) $\wedge$ SameSize(b,c)) $\rightarrow$ Small(c)

$\forall x$ Outgrabe(x,x)
$\forall x$ Tove(x) $\rightarrow$ Tove(b)
(Tove(b) $\wedge$ b = c) $\rightarrow$ Tove(c)
(Slithy(b) $\wedge$ Outgrabe(b,c)) $\rightarrow$ Slithy(c)

Lewis Carroll's poem "Jabberwocky"

FO 결과 FO Consequence

- 동등기호(=)만 제외하고, 이름(name), 함수관계기호(function symbol), 술어(predicate)의 의미를 모두 무시하고도 문장 s가 전제 $P_1, \ldots, P_n$의 논리적 결과인 경우 그 문장은 그 전제의 FO 결과이다 라고 한다.
- 다음 주장에서 결론은 전제의 FO 결과인가?

$$\begin{array}{|l} \forall x\ (Tet(x) \rightarrow Large(x)) \\ \neg Large(b) \\ \hline \neg Tet(b) \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} \forall x\ (Borogove(x) \rightarrow Mimsy(x)) \\ \neg Mimsy(b) \\ \hline \neg Borogove(b) \end{array}$$

FO 반례 FO Counterexample

- 다음 주장에서 결론은 전제의 FO 결과인가?

$\neg\exists x$ Larger(x,a)
$\neg\exists x$ Larger(b,x)
Larger(c,d)

Larger(a,b)

답: 논리적 결과는 되지만 FO결과는 아니올시다.

그러면, **반례**를 찾아보자.

$\neg\exists x$ R(x,a)
$\neg\exists x$ R(b,x)
R(c,d)

R(a,b)

R을 Likes라고 하고,
a는 놀부, b는 스크루지, c는 이몽룡, d는 춘향이다.
상식을 모두 동원하여 해석해보면,
명제가 모두 사실이지만, 결론은 거짓이 된다.
이를 **FO 반례**라고 한다.

교체법 Replacement Method

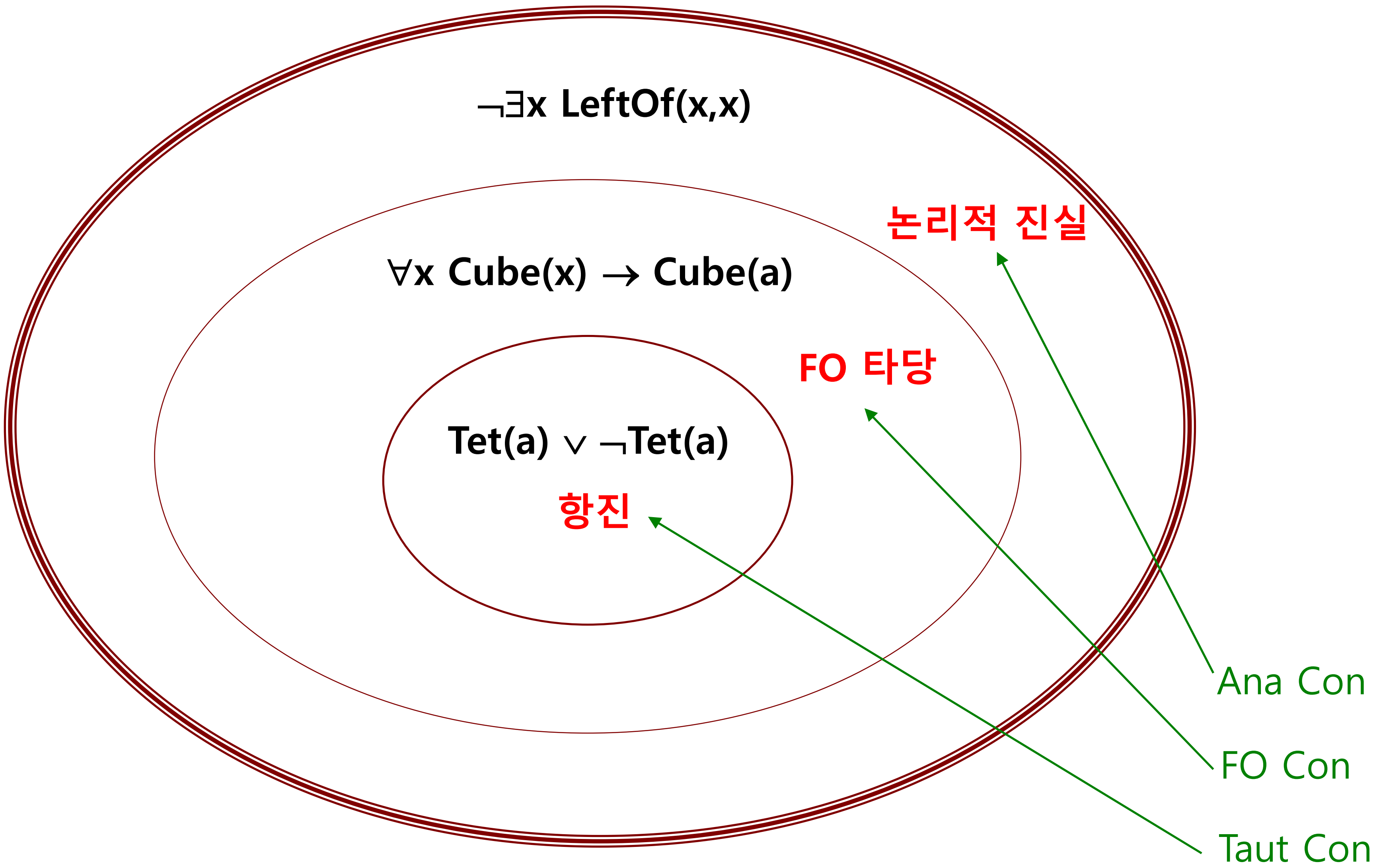
✓ 다음 질문에 대답하기 위한 알고리즘
  - 문장이 FO 타당한가?
  - 주장의 결론이 전제의 FO 결과인가?

1. 동등기호만 제외하고 술어(와 함수관계기호)를 모두 의미 없는 단어로 바꾼다.
2. 문장 S가 FO 타당한지 검사하기
   - S가 거짓이 되는 반례를 찾아본다.
   - 그러한 반례가 없으면 FO 타당
3. 문장 S가 P_1, …, P_n의 FO 결과인지 검사하기
   - P_1, …, P_n가 모두 참인데 S가 거짓이 되는 반례를 찾아본다.
   - 그러한 반례가 없으면 S는 P_1, …, P_n의 FO 결과

문제는반례를 찾기 쉬울까? 무한대로 많은 예를 다 뒤져봐야 할텐데…

아무리 찾아봐도 반례가 나오지 않으면?

Fitch: FO Con – 항상 답이 나온다는 보장은 없지만 꽤 쓸만함.



¬∃x LeftOf(x,x)
논리적 진실
∀x Cube(x) → Cube(a)
FO 타당
Tet(a) ∨ ¬Tet(a)
항진
Ana Con
FO Con
Taut Con

FO 동등 FO Equivalence

$\neg(\exists x\ Cube(x) \wedge \forall y\ Dodec(y))$
와
$\neg\exists x\ Cube(x) \vee \neg\forall y\ Dodec(y)$
는 항진적 동일

$\forall x\ (Cube(x) \rightarrow Small(x))$
와
$\forall x\ (\neg Small(x) \rightarrow \neg Cube(x))$
는 FO 동일인데,
항진적 동일은 아니다.

적격식인 $P(x)\rightarrow Q(x)$와 $\neg Q(x)\rightarrow\neg P(x)$는 둘 다 정확히 같은 x에 만족한다.
(증명) [indirect proof] 둘 중 하나는 만족하지만 다른 하나는 만족하지 않는 상황이 있다고 가정하자. 이를 n_1이라고 하자.
위의 식에서 x를 모두 n_1으로 바꾸면 다음과 같이 된다.

$$P(n_1)\rightarrow Q(n_1) \qquad \neg Q(n_1)\rightarrow\neg P(n_1)$$

여기서 x가 유일하게 풀린 변수였으므로, 위 두 식은 문장이 된다.
그로므로 두 문장은 대우contraposition에 의해서 논리적으로 동일하다.
그런데 가정에 의해서 둘 중 하나는 참이고 다른 하나는 거짓이다.
이는 모순. Q.E.D.

양화사의 논리

✓ 논리적으로 동일한 적격식

- 두 적격식에 있는 풀린 변수를 같은 이름으로 바꾼 두 문장이 논리적으로 동일하면, 두 적격식도 논리적으로 동일하다고 한다.

✓ 동일한 적격식의 치환(substitution)

- P와 Q를 풀린 변수가 있는 적격식이라고 하고,
- S(P)를 P가 포함된 문장이라고 할 때,
- $P \Leftrightarrow Q$ 이면.
- $S(P) \Leftrightarrow S(Q)$ 이다.

✓ 예:

$$\forall x\ (\mathrm{Cube}(x) \rightarrow \mathrm{Small}(x)) \Leftrightarrow \forall x\ (\neg\mathrm{Cube}(x) \vee \mathrm{Small}(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x\ (\neg\mathrm{Cube}(x) \vee \neg\neg\mathrm{Small}(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x\ \neg(\mathrm{Cube}(x) \wedge \neg\mathrm{Small}(x))$$

드모르간의 법칙 DeMorgan's Laws

모든 적격식 P(x)에 대해서
1. $\neg\forall x\ P(x) \Leftrightarrow \exists x\ \neg P(x)$
2. $\neg\exists x\ P(x) \Leftrightarrow \forall x\ \neg P(x)$

- 직관적으로 이해하도록 해보자.

$$\begin{aligned} & \neg\forall x\ Small(x) \\ \Leftrightarrow\ & \neg(Small(a) \land Small(b) \land Small(c) \land Small(d)) \\ \Leftrightarrow\ & \neg Small(a) \lor \neg Small(b) \lor \neg Small(c) \lor \neg Small(d) \\ \Leftrightarrow\ & \exists x\ \neg Small(x) \end{aligned}$$

- 아리스토텔레스의 문장 Aristotelian Sentences

$$\begin{aligned} & \neg\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x)) \\ \Leftrightarrow\ & \neg\forall x\ (\neg P(x) \lor Q(x)) \\ \Leftrightarrow\ & \exists x\ \neg(\neg P(x) \lor Q(x)) \\ \Leftrightarrow\ & \exists x\ (\neg\neg P(x) \land \neg Q(x)) \\ \Leftrightarrow\ & \exists x\ (P(x) \land \neg Q(x)) \end{aligned}$$

같은 양화사 기호가 둘 이상 있는 문장

다음 문장의 의미는?
다음 문장이 true가 되는 Tarski's World를 상상해보자.

$\exists x\, \exists y\, [Cube(x) \land Tet(y) \land LeftOf(x,y)]$

$= \exists x\, [Cube(x) \land \exists y\, (Tet(y) \land LeftOf(x,y))]$

$\forall x\, \forall y\, [(Cube(x) \land Tet(y)) \to LeftOf(x,y)]$

$= \forall x\, [Cube(x) \to \forall y\, (Tet(y) \to LeftOf(x,y))]$

$\forall x\, \forall y\, [(Cube(x) \land Cube(y)) \to (LeftOf(x,y) \lor RightOf(x,y))]$

$\forall x\, \forall y\, [(Cube(x) \land Cube(y) \land x \neq y) \to (LeftOf(x,y) \lor RightOf(x,y))]$

$\exists x\, \exists y\, [Cube(x) \land Cube(y)]$

$\exists x\, \exists y\, [Cube(x) \land Cube(y) \land x \neq y]$

Tarski'w World에 가서 놀자:
Cantor's World and Cantor's Sentence

주의사항

- 두 개의 개별 물체에 전칭기호를 붙이는 경우:

  $\forall x\ \forall y\ (x \neq y \rightarrow \ldots)$

- 두 개의 개별 물체에 존재기호를 붙이고 싶은 경우:

  $\exists x\ \exists y\ (x \neq y \wedge \ldots)$

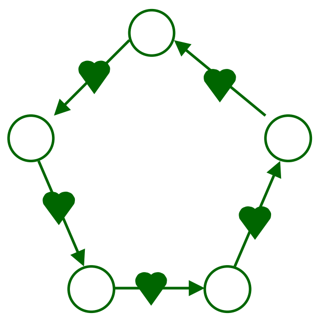
- 즉, 변수가 둘이라고 해서 서로 다른 물체를 가리킨다는 보장은 없음
  - $\forall x\ \forall y\ P(x,y)$은 $\forall x\ P(x,x)$를 논리적으로 암시한다.
  - $\exists x\ P(x,x)$는 $\exists x\ \exists y\ P(x,y)$를 논리적으로 암시한다.
- 같은 기호끼리 순서는 상관없음
  - $\forall x\ \forall y\ Likes(x,y) \equiv \forall y\ \forall x\ Likes(x,y)$
  - $\exists x\ \exists y\ Likes(x,y) \equiv \exists y\ \exists x\ Likes(x,y)$

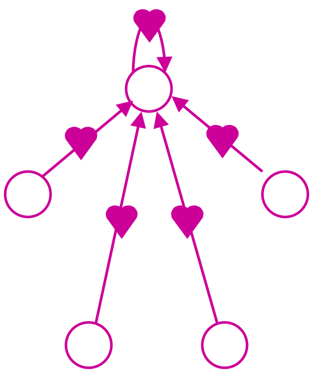
전칭 / 존재 기호가 섞여있는 경우

$\forall x\ [Cube(x) \rightarrow \exists y\ (Tet(y) \wedge LeftOf(x,y))]$

$= \ \forall x\ \exists y\ [Cube(x) \rightarrow (Tet(y) \wedge LeftOf(x,y))]$ ← Prenex form

순서가 중요! $\boxed{\forall x\ \exists y\ Likes(x,y) \neq \exists y\ \forall x\ Likes(x,y)}$





Tarski's World에 가서 놀자:
Mixed Sentences and Koenig's World

표현의 다양성

- 변수의 위치에 따른 의미의 변화

  $\forall x \, \exists y \, Likes(x,y)$

  $\forall x \, \exists y \, Likes(y,x)$

  $\exists y \, \forall x \, Likes(x,y)$

  $\exists y \, \forall x \, Likes(y,x)$

- 개수의 표현

  $\exists x \, \exists y \, (x \neq y \land Cube(x) \land Cube(y))$

  $\exists x \, (Cube(x) \land \forall y \, (Cube(y) \rightarrow y = x))$

체계적인 번역방법 : English -> FOL

전칭기호가 붙을 명사구 존재기호가 붙을 명사구

Each cube is to the left of a tetrahedron.

$\forall x$ (Cube(x) $\rightarrow$ x is-to-the-left-of-a-tetrahedron)

$\exists y$ (Tet(y) $\wedge$ LeftOf(x,y))

말바꾸기 Paraphrasing

1학년 학생이 논리학 강의를 수강한다면, 그 학생은 진짜 똑똑한거다.

$\exists x\ (Freshman(x) \land \exists y\ (LogicClass(y) \land Takes(x,y))) \rightarrow Smart(x)$ X

논리학 강의를 수강하는 1학년 학생은 모두 진짜 똑똑한거다.

$\forall x\ [(Freshman(x) \land \exists y\ (LogicClass(y) \land Takes(x,y))) \rightarrow Smart(x)]$ O

비련의 당나귀 이야기 Donkey Sentences

당나귀를 소유하고 있는 농부는 모두 당나귀를 팬다.

$\forall x\ (\mathrm{Farmer}(x) \land \exists y\ (\mathrm{Donkey}(y) \land \mathrm{Owns}(x,y)) \rightarrow \mathrm{Beats}(x,y))$ X

$\forall x\ (\mathrm{Farmer}(x) \land \exists y\ (\mathrm{Donkey}(y) \land \mathrm{Owns}(x,y) \land \mathrm{Beats}(x,y)))$ X

농부를 주인으로 둔 당나귀는 모두 주인에게 맞는다.

$\forall x\ (\mathrm{Donkey}(x) \rightarrow \forall y\ ((\mathrm{Farmer}(y) \land \mathrm{Owns}(y,x)) \rightarrow \mathrm{Beats}(y,x)))$ O

모호성 Ambiguity과 문맥 민감성 Context Sensitivity

뉴욕시에서는 매 분마다 한 사람이 강도에게 습격당합니다.

$\forall x\ (\mathrm{Minite}(x) \rightarrow \exists y\ (\mathrm{Man}(y) \wedge \mathrm{MuggedDuring}(y,x)))$ Weak reading

뉴욕시에서는 매 분마다 한 사람이 강도에게 습격당합니다.
오늘 저녁에는 그 분을 인터뷰할 예정입니다.

entails

$\exists y\ (\mathrm{Man}(y) \wedge \forall x\ (\mathrm{Minute}(x) \rightarrow \mathrm{MuggedDuring}(y,x)))$ Strong reading

양화사의 논리

At least four medium dodecahedra are adjacent to a medium cube.

Anderson's First World 와 Second World를 비교해보자.
First world: Strong reading 도 참이 된다.
Second world: Weak reading 만 참이 된다.

Every medium dodecahedron is adjacent to a medium cube.

Weak reading:
$\forall x\, ((\mathrm{Medium}(x) \land \mathrm{Dodec}(x)) \rightarrow$
$\quad \exists y\, (\mathrm{Medium}(y) \land \mathrm{Cube}(y) \land \mathrm{Adjoins}(x, y)))$

Strong reading:
$\exists y\, (\mathrm{Medium}(y) \land \mathrm{Cube}(y) \land$
$\quad \forall x\, ((\mathrm{Medium}(x) \land \mathrm{Dodec}(x)) \rightarrow \mathrm{Adjoins}(x, y)))$