9. 비정형 증명

Informal Proofs

증명 규칙

- Universal Quantifier (전칭양화사)
  - ✓Introduction : Universal Generalization(일반화)
  - ✓Elimination : Universal Instantiation(사례화)
- Existential Quantifier (존재양화사)
  - ✓Introduction : Existential Generalization(일반화)
  - ✓Elimination : Existential Instantiation(사례화)

Universal Instantiation

- Universal Instantiation (전칭 사례화)

= Universal Elimination (전칭기호 없애기)

  - $\forall x\ S(x)$로부터 $S(c)$를 도출하기
  - 여기서 c는 대상 영역에 포함되어 있어야 한다.

Existential Generalization

- Existential Generalization (존재 일반화)

= Existential Introduction (존재기호 만들기)

  - S(c)로부터 ∃x S(x)를 도출하기
  - 여기서 c는 대상 영역에 포함되어 있어야 한다.

예 : 다음 주장이 타당한지 증명하시오

$\forall x\ [Cube(x) \rightarrow Large(x)]$
$\forall x\ [Large(x) \rightarrow LeftOf(x,b)]$
$Cube(d)$

$\exists x\ [Large(x) \land LeftOf(x,b)]$

(증명)

1. 전칭 사례화에 의해서 $Cube(d) \rightarrow Large(d)$
2. 전칭 사례화에 의해서 $Large(d) \rightarrow LeftOf(d,b)$
3. Modus Ponens에 의해서 $Large(d)$
4. Modus Ponens에 의해서 $LeftOf(d,b)$
5. 그러면 $Large(d) \land LeftOf(d,b)$가 되는데
6. 이를 존재 일반화하면 $\exists x\ [Large(x) \land LeftOf(x,b)]$가 된다.

Existential instantiation

- Existential Instantiation (존재 사례화)

= Existential Elimination (존재기호 없애기)

  - $\exists x\ S(x)$로부터 $S(c)$를 도출하기
  - $S(x)$를 만족하는 x가 무엇인지 알 수 없으므로, 임의의 c를 선택하여 $S(c)$가 만족한다고 가정한다.
  - 여기서 c는 사용되고 있지 않은 새로운 이름으로 선택해야 한다.
  - 예: (수학) n과 m사이에 소수가 있음을 보였다. 그 소수를 p라고 하자...

예 : 다음 주장이 타당한지 증명하시오

$\forall x\ [Cube(x) \rightarrow Large(x)]$
$\forall x\ [Large(x) \rightarrow LeftOf(x,b)]$
$\exists x\ Cube(x)$

$\exists x\ [Large(x) \wedge LeftOf(x,b)]$

(증명)

1. 3번째 전제에서 최소한 육면체가 하나 있다 하였다. 그 육면체를 "e"라고 하자. [존재 사례화]
2. 전칭 사례화에 의해서 Cube(e) → Large(e)
3. 전칭 사례화에 의해서 Large(e) → LeftOf(e,b)
4. Modus Ponens에 의해서 Large(e)
5. Modus Ponens에 의해서 LeftOf(e,b)
6. 그러면 Large(e) ∧ LeftOf(e,b)가 되는데
7. 이를 존재 일반화하면 ∃x [Large(x) ∧ LeftOf(x,b)]가 된다.

일반화 조건증명 General Conditional Proof

- 전체를 대상으로 한 주장(universal claim)이 성립함을 보여주기 위해서, 임의의 대상 하나를 선택하여 주장이 성립함을 보여주는 증명방법
- $\forall x\ [P(x) \rightarrow Q(x)]$의 증명: 새로운 이름 c를 하나 임의로 선택한 후, P(c)를 가정하고, Q(c)를 증명한다.
- 주의: P(c)를 가정한 후에 존재 사례화 법칙을 적용하여 새로 생긴 이름이 Q에 포함되어 있지 않아야 한다.

예 : General Conditional Proof

경진대회에서 상을 받은 학생은 똑똑하다
ICT융합학부 학생은 모두 경진대회에서 상을 받았다.

ICT융합학부 학생은 모두 똑똑하다.

(증명) 길동이를 ICT융합학부 학생이라고 하자. 둘째 전제에 의해서 길동이는 경진대회에서 상을 받았을 것이다. 그러면 첫째 전제에 의해서 길동이는 똑똑하다고 할 수 있다. 그런데 길동이를 임의로 선택했으므로, ICT융합학부 학생은 모두 똑똑하다고 할 수 있다.

타당한 주장에 대한 제대로 된 증명
(General Conditional Proof)

$\exists y\ [Girl(y) \wedge \forall x\ (Boy(x) \rightarrow Likes(x,y))]$

$\forall x\ [Boy(x) \rightarrow \exists y\ (Girl(y) \wedge Likes(x,y))]$

(증명) 전제에 의해서, 최소한 한 여자아이는 모든 남자가 좋아한다. 그 여자아이를 c라고 하자. 그러면 $\forall x\ (Boy(x) \rightarrow Likes(x,c))$이다. 남자아이를 임의로 하나 뽑아 d라고 하자. 그런데 모든 남자아이가 c를 좋아하므로 d도 c를 좋아한다. 그러면 존재 일반화 규칙에 의해서 d가 좋아하는 여자아이가 있다. 그리고 d는 임의로 선택했으므로 전칭 일반화 규칙에 의해서 모든 남자아이는 좋아하는 여자아이가 있다.

타당하지 않은 주장에 대한 엉터리 증명

(General Conditional Proof)

$\forall x\ [Boy(x) \rightarrow \exists y\ (Girl(y) \wedge Likes(x,y))]$

$\exists y\ [Girl(y) \wedge \forall x\ (Boy(x) \rightarrow Likes(x,y))]$

(엉터리 증명) 전제에 의해서, 남자아이는 최소한 좋아하는 여자아이가 하나는 있다. 남자아이를 임의로 하나 뽑아 e라고 하자. 그러면 전제에 의해서 e는 좋아하는 여자아이가 있다. (존재 사례화 법칙에 의해서) e가 좋아하는 여자아이를 f라고 하자. 그런데 e는 임의로 선택했으므로 전칭 일반화 규칙에 의해서 모든 남자아이는 f를 좋아한다. 그러면 존재 일반화 규칙에 의해서 모든 남자아이가 좋아하는 여자아이가 있다.

헐~ 뭐가 문제지?

존재 사례화 법칙을 적용하여 새로 생긴 여자아이 이름 f가 "모든 남자아이는 f를 좋아한다."($\forall x\ (Boy(x) \rightarrow Likes(x,f))$)에 포함되어 있다.

Universal Generalization

- Universal Generalization (전칭 일반화)

= Universal Introduction (전칭기호 만들기)

  - S(c)에서 ∀x S(x) 도출하기
  - 대상 영역에서 완전히 임의의 하나를 뽑아서 새로운 이름 c를 부여하고, S(c)임을 증명하면, ∀x S(x)라고 결론지을 수 있다.
  - 주의: c의 이름을 부여한 후에 존재 사례화 법칙을 적용하여 만든 이름이 S(c)에 포함되어 있지 않아야 한다.

$\forall x\ (Cube(x) \rightarrow Small(x))$
$\forall x\ Cube(x)$
$\forall x\ Small(x)$

(증명) 대상 영역에서 임의의 새로운 이름 d를 선택한다.
각 전제에 전칭 사례화를 각각 적용하면
Cube(d) → Small(d)와 Cube(d)를 얻는다.
Modus ponens에 의해서 Small(d)가 된다.
여기서 d는 임의로 선택하였으므로 전칭 일반화 규칙에 의해서
∀x Small(x)로 결론지을 수 있다.

$\forall x\ Cube(x)$
$\forall x\ Small(x)$
$\forall x\ (Cube(x) \land Small(x))$

(증명) 대상 영역에서 임의의 새로운 이름 d를 선택한다.
각 전제에 전칭 사례화를 각각 적용하여 Cube(d)와 Small(d)를 각각 얻는다. 따라서 Cube(d) ∧ Small(d).
여기서 d는 임의로 선택하였으므로 전칭 일반화 규칙에 의해서
∀x (Cube(x) ∧ Small(x))로 결론지을 수 있다.

타당하지 않은 주장에 대한 엉터리 증명 (Universal Generalization)

$\forall x\ \exists y\ Adjoins(x,y)$

$\exists y\ \forall x\ Adjoins(x,y)$

(엉터리 증명) 전제를 가정하고 임의의 c를 뽑고 전칭 사례화 법칙을 적용하면 ∃y Adjoins(c,y)가 된다. 여기에 새로운 d를 뽑아 존재 사례화 법칙을 적용하면 Adjoins(c,d)가 된다. 그런데 c를 임의로 뽑았으므로 전칭 일반화 법칙을 적용하면 ∀x Adjoins(x,d)가 되고, 다시 존재 일반화 법칙을 적용하면 ∃y ∀x Adjoins(x,y)가 된다.

헐~ 뭐가 문제지?
존재 사례화 법칙을 적용하여 새로 생긴 이름 d가 ∀x Adjoins(x,d)에 포함되어 있다.

유명한 증명 사례

(Euclid's Theorem)
$\forall x\ \exists y\ [y \geq x \land \mathrm{Prime}(y)]$
즉, 어떤 자연수도 자신과 같거나 자신보다 큰 소수가 있다.

(증명) n을 임의의 자연수라고 하고, 자신과 같거나 자신보다 큰 소수가 있음을 증명해보자. n보다 작은 모든 소수의 곱을 k라고 하자.
그러면 k는 n보다 작은 어떤 소수와도 나머지 없이 나누어 떨어진다.
m = k + 1이라고 하자. 그러면 m은 n보다 작은 어떤 소수와 나누더라도 나머지가 1이 된다. 그러나 m은 소수로 인수분해 된다는 사실은 알려져 있다. 그 소수 중의 하나를 p라고 하면, 그 p는 분명히 n보다 크거나 같다. 왜냐하면 n보다 작은 소수로는 나누어 떨어지지 않기 때문이다.
여기서, 존재 일반화 규칙을 적용하면 n보다 크거나 같은 소수가 존재한다고 할 수 있다. 그런데 n은 임의로 선택하였으므로 모든 자연수에 대해서도 성립한다. 증명 끝.

유명한 증명사례

(Barber's Paradox)
$\exists z\ \exists x\ [Barber(x,z) \wedge$
$\quad \forall y(ManOf(y,z) \rightarrow (Shave(x,y) \leftrightarrow \neg Shave(y,y)))]$
즉, 어느 마을에 스스로 면도하지 않는 사람만 면도해 주는 이발사가 있다.

(알려진 증명) 그런 마을이 있다고 가정해보자.
그 마을을 "청석골"이라고 하고, 청석골의 이발사를 "가위손"이라고 하자.
가정에 의해서 가위손은 스스로 면도하지 않는 마을사람만 면도해준다.
가위손 자신은 스스로 면도할 수도 있고, 스스로 면도하지 않을 수도 있다.
이제 이 두 경우를 모두 모순이 됨을 보여주도록 하자.

- 가위손이 스스로 면도하는 경우: 가정에 의하면, 가위손은 스스로 면도하지 않는 사람만 면도해주므로, 자신은 면도해주지 않는다. 이는 모순이다.
- 가위손이 스스로 면도하지 않는 경우: 가정에 의하면, 가위손은 면도 하지 않는 사람은 모두 면도해 준다고 하였으므로, 가위손 자신을 면도한다. 이도 모순이다.

모든 경우에 모순이므로 가정은 틀렸고, 따라서 그런 마을은 존재하지 않는다. 증명 끝.