10. 정형 증명

Formal Proofs

Universal Elimination (∀ Elim) (= Universal Instantiation)
전칭기호 없애기 규칙 (= 전칭 사례화 규칙)

$$\begin{array}{l|l} & \forall x\, S(x) \\ & \quad \vdots \\ \triangleright & S(c) \end{array}$$

Universal Conditional Proof (∀ Intro)

$$\begin{array}{l|l} & \begin{array}{|l} \boxed{c}\ P(c) \\ \hline \quad \vdots \\ Q(c) \end{array} \\ \triangleright & \forall x\, (P(x) \to Q(x)) \end{array}$$

여기서 만들어진
하부증명(subproof)
바깥에는 c가 없어야 함

Universal Introduction (∀ Intro) (= Universal Generalization)
전칭기호 만들기 규칙 (= 전칭 일반화 규칙)

$$\begin{array}{l|l} & \begin{array}{|l} \boxed{c} \\ \hline \quad \vdots \\ P(c) \end{array} \\ \triangleright & \forall x\, P(x) \end{array}$$

여기서 만들어진 하부증명 바깥에는 c가 없어야 함

$\forall x\ (P(x) \to Q(x))$ $\forall z\ (Q(z) \to R(z))$	경진대회에서 상을 받은 학생은 똑똑하다 ICT융합학부 학생은 모두 경진대회에서 상을 받았다.
$\forall x\ (P(x) \to R(x))$	ICT융합학부 학생은 모두 똑똑하다.

이 주장이 타당한 지에 대한 증명:

1. $\forall x\ (P(x) \to Q(x))$
2. $\forall z\ (Q(z) \to R(z))$
3. $\boxed{d}$ $P(d)$
4. $P(d) \to Q(d)$ — $\forall$ Elim: 1
5. $Q(d)$ — $\to$ Elim: 3,4
6. $Q(d) \to R(d)$ — $\forall$ Elim: 2
7. $R(d)$ — $\to$ Elim: 5,6
8. $\forall x\ (P(x) \to R(x))$ — $\forall$ Intro: 3-7

Fitch에 들어가서 놀아보자: Universal 1 & 2

Existential Introduction (∃ Intro) (= Existential Generalization)
존재기호 만들기 규칙 (= 존재 일반화 규칙)

$$
\begin{array}{l|l}
 & S(c) \\
 & \quad \vdots \\
\triangleright & \exists x\ S(x)
\end{array}
$$

Existential Elimination (∃ Elim) (= Existential Instantiation)
존재기호 없애기 규칙 (= 존재 사례화 규칙)

$$
\begin{array}{l|l}
 & \exists x\ S(x) \\
 & \quad \vdots \\
 & \begin{array}{|l}
 \boxed{c} \quad S(c) \\
 \hline
 \quad \vdots \\
 Q
 \end{array} \\
\triangleright & Q
\end{array}
$$

여기서 만들어진 하부증명 바깥에는 c가 없어야 함

Q는 c를 포함하지 않아야 함

이 주장이 타당한 지에 대한 증명:

$\forall x\,[Cube(x) \rightarrow Large(x)]$
$\forall x\,[Large(x) \rightarrow LeftOf(x,b)]$
$\exists x\, Cube(x)$

$\exists x\,[Large(x) \land LeftOf(x,b)]$

1. $\forall x\,[Cube(x) \rightarrow Large(x)]$
2. $\forall x\,[Large(x) \rightarrow LeftOf(x,b)]$
3. $\exists x\, Cube(x)$

---

4. $\boxed{e}$ $Cube(e)$

---

5. $Cube(e) \rightarrow Large(e)$ — $\forall$ Elim: 1
6. $Large(e)$ — $\rightarrow$ Elim: 4,5
7. $Large(e) \rightarrow LeftOf(e,b)$ — $\forall$ Elim: 2
8. $LeftOf(e,b)$ — $\rightarrow$ Elim: 6,7
9. $Large(e) \land LeftOf(e,b)$ — $\land$ Intro: 6,8
10. $\exists x\,(Large(x) \land LeftOf(x,b))$ — $\exists$ Intro: 9

11. $\exists x\,[Large(x) \land LeftOf(x,b)]$ — $\exists$ Elim: 3, 4-10

Fitch에 들어가서 놀아보자: Existential 1

전술과 전략

- 사용하는 문장의 의미를 명확히 파악할 것
- 비정형 증명을 먼저 작성한 뒤, 정형 증명을 시도하는 전략이 좋음
- $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$ 형태의 전칭형 문장을 증명할 때는 뒤에서 거꾸로 올라오면 더 쉬움
- 보통 $\exists x\ S(x)$ 형태의 존재형 문장을 증명할 때 거꾸로 올라오면 별로 도움이 되지 않는데, 전제로부터 $S(c)$와 같은 특정 사례를 찾을 수 있는 경우는 괜찮음
- 막히면 모순을 이용한 증명을 시도

정형 증명 연습

$\exists x\ (Tet(x) \land Small(x))$
$\forall x\ (Small(x) \rightarrow LeftOf(x,b))$

$\vdash$

$\exists x\ LeftOf(x,b)$

비정형 증명:
작은 사면체가 있다고 하잖아. 그 걸 하나 골라보자.
그런데 작은 건 모두 b의 왼쪽에 있다고 하네.
그러니 작은 그 것도 b의 왼쪽에 있겠네.
그러니 b의 외쪽에 무언가 있음에 틀림없지.
내 말이 맞지?

∃ Elim

∀ Elim

∃ Intro

정형 증명: Fitch에 들어가서 해보자.

정형 증명 연습 : 모순유도에 의한 증명

$$\begin{array}{|l} \neg\forall x\, P(x) \\ \hline \exists x\, \neg P(x) \end{array}$$

비정형 증명:
존재함을 증명하는 것이니 존재기호 만들기 규칙을 적용하는 게 좋겠다.
즉, 어떤 c를 가지고 ¬P(c)를 증명한다.
그러나 전제를 보면 그럴 희망이 별로 없어 보인다.
모든 게 P(x)를 만족시키는 건 아니다 라는 사실만으로
¬P(c)가 되는 c를 찾을 수 있는 건 아니기 때문이다.
막혔다!!!
유일하게 남은 희망은 모순을 이용한 증명이다.
결론을 반대로 뒤집은 후 모순을 유도해내면 된다.
따라서 ¬∃x¬P(x)라고 가정하자. 어떻게 모순을 유도할까?
아는 게 ¬∀xP(x) 밖에 없으므로 전칭기호 만들기 규칙으로
∀xP(x)를 유도하면 모순이 된다.
그러기 위해서 임의로 c를 하나 선택한 후 P(c)가 성립함을 보이면 된다.
어떻게? 또 한번 모순 유도를 쓰면 된다.
P(c)가 아니라면 ¬P(c)일테고, 따라서 ∃x¬P(x) 이다.
이는 위의 가정과 모순되므로, P(c)는 성립한다.
그런데 c를 임의로 뽑았으므로 ∀xP(x)가 되는데,
이는 또 전제와 모순이 된다. 따라서 ∃x¬P(x) 이다.

정형 증명: Fitch에 들어가서 해보자: Quantifier Strategy 1