II. 서술 논리 敍述 論理
Predicate Logic

CSE1007 논리학

Logical Foundations of Programming

7. 정량화定量化 소개

Introduction to Quantification

정량화된 문장 Quantified Sentences

- 지금까지 배운 지식으로 아래 문장들을 논리식으로 바꿀 수 있을까?
  - ✓ 예습과 숙제를 열심히 하는 학생은 모두 성적이 좋다.
  - ✓ 예습을 해오지 않는 학생이 있다.
- 양화사 Quantifiers in FOL
  - ✓ 전칭 양화사 (Universal Quantifier) : $\forall$
    - ➢ 모두, all
  - ✓ 존재 양화사 (Existential Quantifier) : $\exists$
    - ➢ 최소한 하나, at least one

핵심 적격식 Atomic Well-Formed Formulas(Atomic wffs)

- 명사식 Terms에 변수 variables를 추가
  - 단순 명사식 Simple term

    명사 Individual constant (이름 name) + 변수 variable

    예 : suni, t, u, v, w, x, y, z, z_2
  - 복합 명사식 Complex term

    N개의 단순 또는 복합 명사식을 인자로 가진 함수관계기호 Function symbol로 만듬

    예 : father(suni), father(x)

    (0+1) x 1, (y+z) x z
- 핵심 적격식 Atomic wffs
  - 핵문장 + 변수

    예 : Home(x), Taller(suni,y), Taller(father(z),z)
  - 여기서 변수는 모두 풀려있다(free, unbound)고 한다

전칭 양화사 Univeral Quantifier : ∀

- $\forall x$ reads

  "for every object x"

  "for all x"

- 예

  ✓ $\forall x$ Home(x) => 뭐든지 집에있다.

  ✓ $\forall x$ (Professor(x) -> Smart(x)) => 교수는 모조리 똑똑하다.

    누구든지 교수가 아니거나 똑똑하거나

    (똑똑한 교수이거나)

존재 양화사 Existential Quantifier : ∃

- $\exists x$ reads

  "for some object x"

  "for some x"

- 예
  - $\exists x$ Home(x)

    ⇒뭔가 집에 있다.
  - $\exists x$ (Professor(x) $\wedge$ Smart(x))

    ⇒교수이면서 똑똑한 사람이 있다.

    ⇒최소한 똑똑한 교수가 한사람은 있다.

적격식 Well-Formed Formula (wffs)

1. P가 적격식이면, $\neg$P도 적격식이다.
2. $P_1,\ldots,P_n$이 적격식이면, $(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n)$도 적격식이다.
3. $P_1,\ldots,P_n$이 적격식이면, $(P_1 \vee \ldots \vee P_n)$도 적격식이다.
4. P와 Q가 적격식이면, $(P \rightarrow Q)$도 적격식이다.
5. P와 Q가 적격식이면, $(P \leftrightarrow Q)$도 적격식이다.
6. P가 적격식이고 v가 변수이면, $\forall v$ P도 적격식이고
   $\forall v$ P 안에 나타나는 v는 모두 **묶여있다(bound)**고 한다.
7. P가 적격식이고 v가 변수이면, $\exists v$ P도 적격식이고
   $\exists v$ P 안에 나타나는 v는 모두 **묶여있다(bound)**고 한다.

- 예 : $\forall x\ ((\text{Cube}(x) \wedge \text{Small}(x)) \rightarrow \exists y\ \text{LeftOf}(x,y))$

문장 Sentence

- *<u>풀려있는 변수 free variable</u>*가 없는 적격식을 *<u>문장 sentence</u>*라고 한다.
- 변수의 범위(Scope)

$\exists x\ (Professor(x) \wedge Smart(x))$

Bound 묶임　　Bound 묶임

$\exists x\ Professor(x) \wedge Smart(x)$

Bound 묶임　　Free 풀림

- 적격식 P에다 ∀x 또는 ∃x를 앞에 붙일 때,

  P에서 풀려있는 x를 모두 묶는다고 한다.

  => 묶여 있는 x를 또 묶으면 어떻게 되길래?

의미 Sematics

- 정량화된 문장 Quantified Sentence의 의미(true/false) 결정하기
  - 명제논리 Propositional logic: ¬P의 의미는 P의 의미에 의해서 결정
  - 서술논리 Predicate logic: ∃x Student(x)의 의미는 Student(x)의 의미에 의해서 결정할 수 없다. 왜?
- 의미 : 만족성satisfaction의 개념을 이용하여 정의
  - ∃x S(x) 는 참true이다 iff

    S(x)를 만족시키는 물건/사람object이 최소한 하나는 있다
  - ∀x S(x) 는 참true이다 iff

    모든 물건/사람object이 S(x)를 만족한다

정량화 소개

- 논의 영역 Domain of Discourse
  - ✓ 논의 대상 영역이 있다고 가정한다.
  - ✓ 맥락 상 명확한 경우에는 굳이 명시할 필요가 없다.
  - ✓ 대상 물건 / 사람이 최소한 하나는 존재
- 표기법 Notation
  - ✓ 명제논리 : 임의의 복잡한 문장을 P나 Q로 표시
  - ✓ 서술논리 : 임의의 복잡한 적격식을 S(x), P(y)등으로 표시
    - ➢ $P(y) = \exists x\ (\mathrm{leftOf}(x,y) \lor \mathrm{RightOf}(x,y))$

      $P(b) = \exists x\ (\mathrm{leftOf}(x,b) \lor \mathrm{RightOf}(x,b))$
    - ➢ $S(x) = \exists x\ \mathrm{Professor}(x) \land \mathrm{Smart}(x)$

      $S(c) = \exists x\ \mathrm{Professor}(x) \land \mathrm{Smart}(c)$

Tarski's World에서 게임 규칙

형태	공격 대상	차례	목표
$P \vee Q$	True False	You Tarski's World	P와 Q 중에서 True가 된다고 생각되는 것 하나 선택
$P \wedge Q$	True False	Tarski's World you	P와 Q 중에서 False가 된다고 생각되는 것 하나 선택
$\exists x\ P(x)$	True False	You Tarski's World	적격식 P(x)를 만족하는 b를 하나 선택
$\forall x\ P(x)$	True False	Tarski's World you	적격식 P(x)를 만족하지 않는 b를 하나 선택
$\neg P$	either	_	$\neg P$를 P로 대체하고, 공격을 바꿈
$P \rightarrow Q$	either	_	$P \rightarrow Q$를 $\neg P \vee Q$로 대체하고, 공격은 그대로
$P \leftrightarrow Q$	either	_	$P \leftrightarrow Q$를 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$로 대체하고, 공격은 그대로

Tarski's World에서 놀아보자 : Game World + Game Sentence

아리스토텔레스의 논리

All P's are Q's P인 것은 모두 Q이다	$\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$
Some P's are Q's. P이고 Q인 것이 있다	$\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$
No P's are Q's. P인 것은 절대로 Q가 아니다	$\forall x\ (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ $\neg\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$
Some P's are not Q's. P이지만 Q는 아닌 것이 있다	$\exists x\ (P(x) \wedge \neg Q(x))$

Tarski's World에 가서 놀아보자

1. "큰 육면체가 있다"는 문장은 FOL로 어떻게 표현할까?

2. $\exists x\ (\mathrm{Cube}(x) \rightarrow \mathrm{Large}(x))$

   ✓ 큰 육면체가 하나 있는 세상을 만들고 참인지 따져보자.

   ✓ 큰 육면체를 없애고, 작은 사면체를 하나 만든 후, 참인지 따져보자.

3. $\exists x\ (\mathrm{Cube}(x) \wedge \mathrm{Large}(x))$

   ✓ 위의 경우 이 문장이 참인지 따져보자.

명사구 Noun Phrases

- 명사구는 어떻게 표현할까?
  - ✓ 주로 핵문장의 논리곱(∧)으로 표현
  - ✓ 영어의 표현 순서와 FOL의 표현 순서가 반드시 일치하지 않음에 주의해야 한다. (많은 연습이 필요)
- 존재 명사구 Existential Noun Phrases
  - ✓ ∃를 주로 ∧와 함께 사용
  - ✓ (주어) 작고 행복한 강아지가 집에 있다.
    $\exists x\, [(Small(x) \land Happy(x) \land Dog(x)) \land Home(x)]$
  - ✓ (목적어) 순이는 작고 행복한 강아지를 가지고 있다.
    $\exists x\, [(Small(x) \land Happy(x) \land Dog(x)) \land Owns(suni,x)]$
- 전칭 명사구 Universal Noun Phrases
  - ✓ ∀은 주로 →와 함께 사용
  - ✓ (주어) 집에 있는 작은 강아지는 모두 행복하다.
    $\forall x\, [(Small(x) \land Home(x) \land Dog(x)) \rightarrow Happy(x)]$
  - ✓ (목적어) 순이는 작고 행복한 강아지를 모두 가지고 있다.
    $\forall x\, [(Small(x) \land Happy(x) \land Dog(x)) \rightarrow Owns(suni,x)]$

대화의 함의 Conversational Implicature

- "P는 모두 Q이다"라고 해서 P가 존재한다는 보장을 하는 건 아니다.
  - 예: 논리학을 게을리 한 학생은 모두 대학생활을 망쳤다.

    (사실) 논리학을 게을리 한 학생이 한 명도 없을 수 있다.
- "어떤 P는 Q이다"라고 해서 P가 모두 Q가 되지 말라는 건 아니다.
  - 예: 어떤 ICT 융학학부 졸업생은 저명인사가 되었다.

    (사실) ICT 융합학부 졸업생 전원이 저명인사가 될 수 있다.

일반화 Generalization

- 따져볼 것 없이 참이 되는 일반화 Vacuously True Generalization
  - ∀x (P(x) → Q(x))에서 P(x)를 만족하는 x가 없을 경우 이 주장은 따져볼 것 없이 참 vacuously true 이다.
  - 예: ∀x (Tet(x) → Large(x))은 "사면체는 모두 작다"고 말한다. 그런데 사면체가 없는 세상에서는 이 문장이 따져볼 것 없이 참이다. 왜? 반례(counter example)를 찾을 수 없으니까.
- 선천적으로 따져볼 필요 없는 일반화 Inherently Vacuous Generalization
  - ∀x ¬P(x)가 참인 세상에서만 ∀x (P(x) → Q(x))가 참이 되면, 이 문장은 선천적으로 따져볼 필요 없다 inherently vacuous.
  - 예: ∀y (Tet(y) → Cube(y))는 사면체가 없는 세상에서는 참이 되고, 사면체가 있는 세상에서는 항상 거짓이 된다. 따라서 이 문장은 선천적으로 따져볼 필요 없다.
  - 예: 논리학을 수강하는 1학년은 모두 A를 준다.
- Tarski's World에 들어가서 게임을 해보자
  - Peano's World + Dodgson's Sentences(sentence 1)
  - Peirce's World + Dodgson's Sentences(sentence 1,4,5)
  - Peirce's World에서 따져볼 필요 없이 참이면서, Peano's World에서는 선천적으로 따져볼 필요가 없어서 저절로 참이 되는 문장을 하나 찾아보자.