2. 불 논리

Boolean Logic

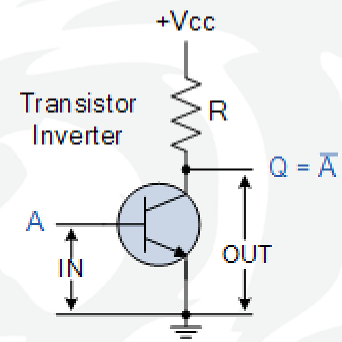
불Boolean 논리문Logic Sentences

- 핵심 문장 Atomic sentences
- 복합 문장 Complex sentences
  - 불Boolean 논리연산자connectives로 연결된 문장
  - 논리연산자의 종류
    - 논리곱 conjunction, and : ∧
    - 논리합 disjunction, or : ∨
    - 논리역 negation, not : ¬

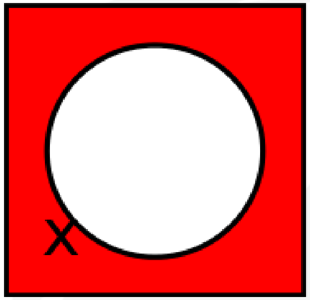
논리역Negation 논리연산자 : ¬

- 구문Syntax
  - P가 문장이면 ¬P도 문장이다
  - 전위prefix, 단항unary
- 의미Semantics
  - ¬P is true <u>if and only if</u> P is false
  - 진리표 Truth Table:

P	¬P
true	false
false	true

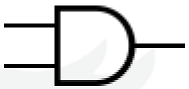


  - Game: Wittgenstein's World에서 놀아보자
  - ¬¬¬¬¬Between(e,d,f)



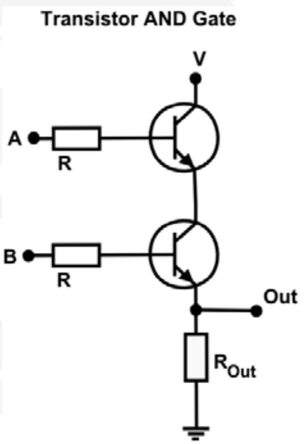
¬X

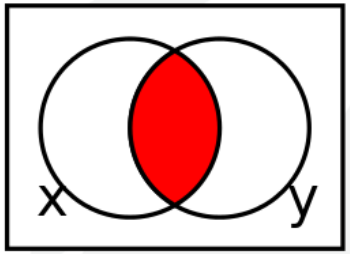
논리곱Conjunction 논리연산자 : ∧



- 구문Syntax
  - P가 문장이고 Q가 문장이면 P∧Q도 문장이다
  - 중위infix, 이항binary
- 의미Semantics
  - P∧Q is true <u>if and only if</u> both P and Q are true.
  - 진리표Truth Table:

P	Q	P∧Q
true	true	true
true	false	false
false	true	false
false	false	false





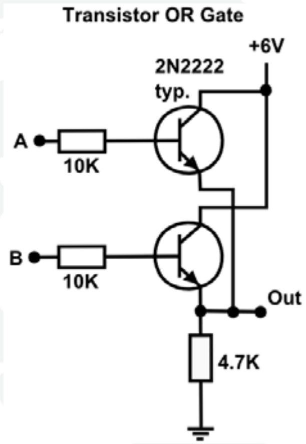
x∧y

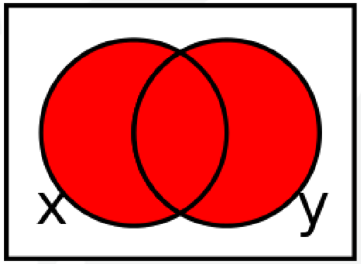
  - Game: Claire's World에서 놀아보자
    - ¬Cube(a) ∧ ¬Cube(b) ∧ ¬Cube(c)

논리합Disjunction 논리연산자 : ∨

- 구문Syntax
  - P가 문장이고 Q가 문장이면 P∨Q도 문장이다
  - 중위Infix, 이항binary
- 의미Semantics
  - P∨Q is true <u>if and only if</u> P is true or Q is true (or both are true).
  - 진리표 Truth Table:

P	Q	P∨Q
true	true	true
true	false	true
false	true	true
false	false	false

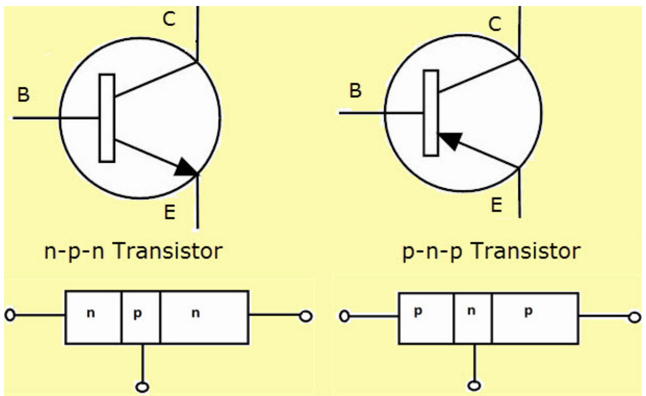


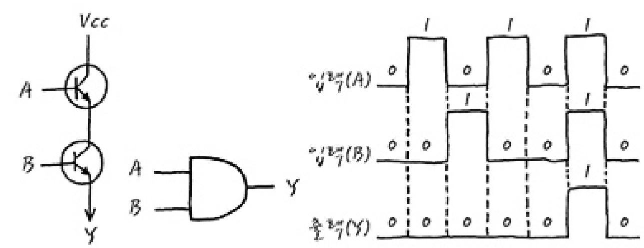


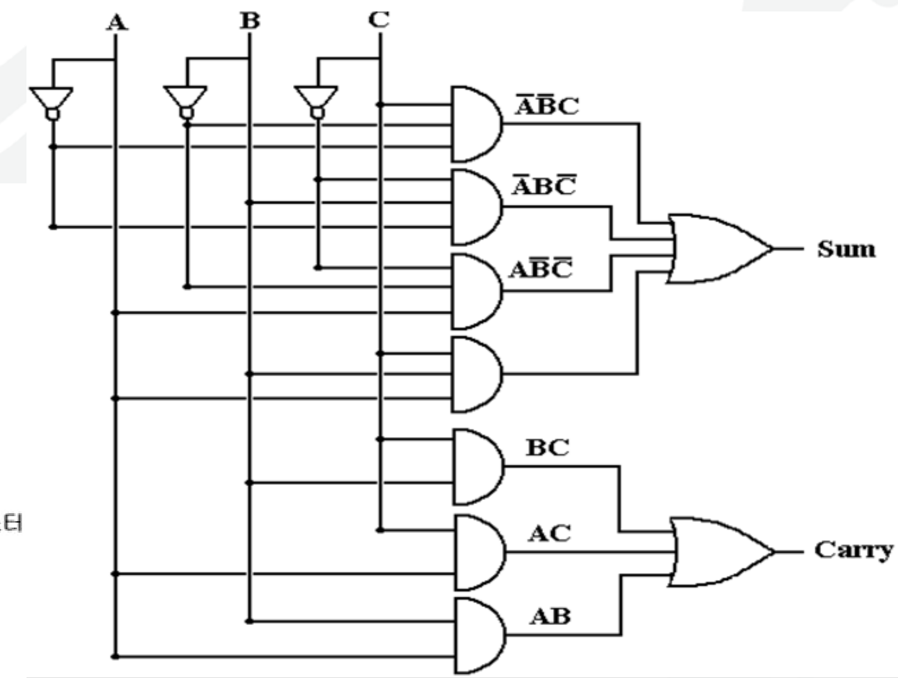
xVy

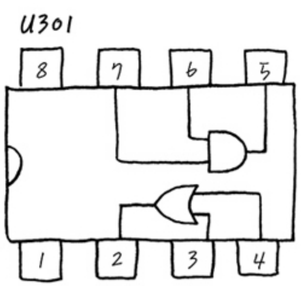
  - Game: Ackermann's World에서 놀아보자
    - Cube(c) ∨ ¬(Cube(a) ∨ Cube(b))

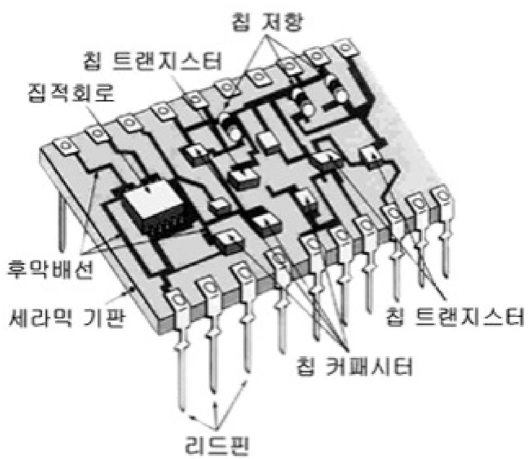
트랜지스터, 논리 회로, 집적 회로











모호성Ambiguity과 해결사 '괄호'

- 모호한Ambiguous 문장
  - 예1: Home(max) ∨ Home(claire) ∧ Happy(carl)
  - 예2: ¬Home(claire) ∧ Home(max)
  - 왜 모호하냐? 둘 다 어떻게 묶느냐에 따라서 의미가 달라진다!
- 모호성의 해결책은?
  - 적절한 위치에 괄호를 두른다.
  - 예1
    - Home(max) ∨ (Home(claire) ∧ Happy(carl))
    - (Home(max) ∨ Home(claire)) ∧ Happy(carl)
  - 예2
    - ¬Home(claire) ∧ Home(max)
    - ¬(Home(claire) ∧ Home(max))
- 우선순위: ¬ ∧ ∨

알아두면 좋은 법칙들Laws

- 이중 논리역$_{\text{Double Negation}}$의 법칙

  $\neg\neg P \Leftrightarrow P$ for all P

- DeMorgan의 법칙

  $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ for all P and Q

  $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$ for all P and Q

배울 개념 3가지

- 논리적 진리 Logical truth
- 논리적 동일 Logical equivalence
- 논리적 결과 Logical consequence

불 논리문을 해석하는 방법 ⇒ 진리표Truth Table 이용

- 진리표는 Boole 소프트웨어로 쉽게 만들 수 있다.
- 연습: 진리표를 만들어 봅시다.

$P \vee \neg P$

$(A \wedge B) \vee \neg C$

$\neg(A \wedge (\neg A \vee (B \wedge C))) \vee B$

$P \wedge Q \wedge R$

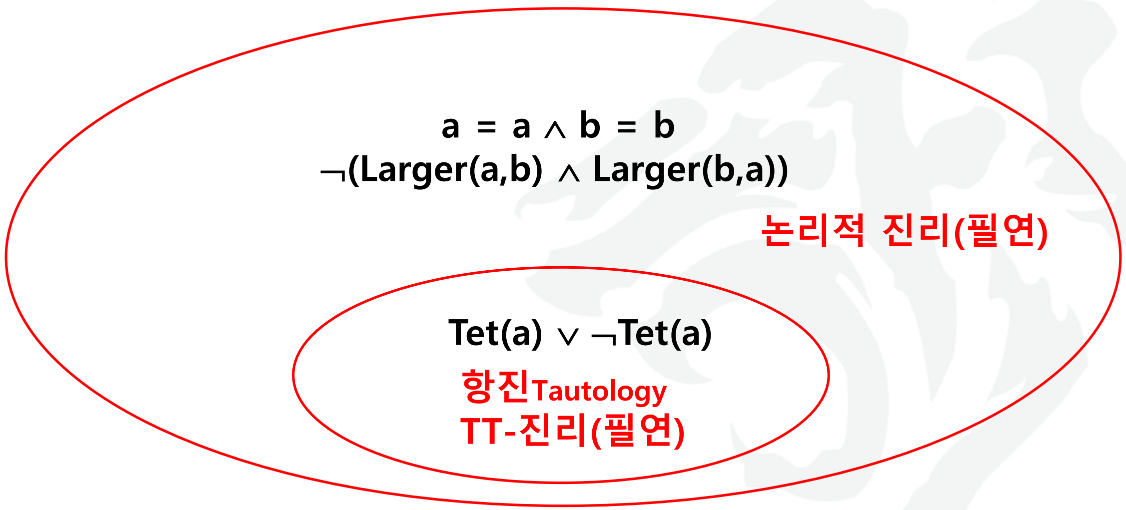
여기서 A, B, C, P, Q, R은 핵 문장을 나타내는 이름이다.

논리적 진리성(필연성)
Logical Truth(Necessity)

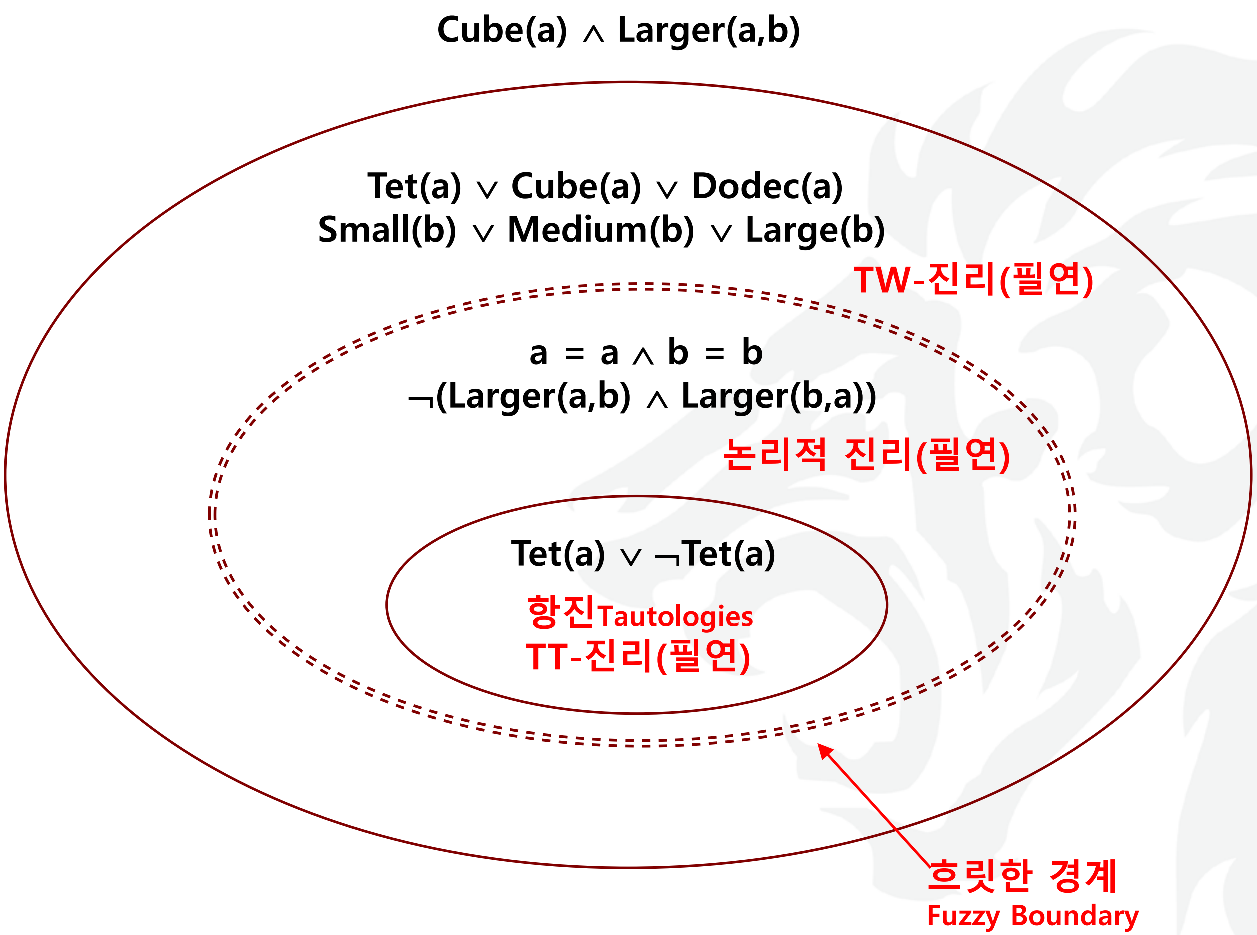
- 논리적으로 가능한 모든 상황에서 문장이 참이면, 그 문장은 논리적으로 **진리**logically true 또는 논리적으로 **필연**logically necessary이라고 한다.
- 어떤 경우에도 참일 수밖에 없는 문장을 항진恒眞tautology 이라고 한다.
  - 진리표Truth Table에서 모든 행이 true 값을 가진다.
  - 따라서 TT-진리(필연)라고도 한다.
  - 예: P $\lor$ $\neg$P
- Tarski's World의 어떤 world에서도 문장이 참이 되면, 그 문장은 TW-진리(필연)라고 한다.

불 논리

- 문장이 항진이면 논리적으로 진리(필연)이다.
- 그러나, 논리적으로 진리(필연)이라고 다 항진은 아니다.



불 논리


Cube(a) ∧ Larger(a,b)
Tet(a) ∨ Cube(a) ∨ Dodec(a)
Small(b) ∨ Medium(b) ∨ Large(b)
TW-진리(필연)
a = a ∧ b = b
¬(Larger(a,b) ∧ Larger(b,a))
논리적 진리(필연)
Tet(a) ∨ ¬Tet(a)
항진Tautologies
TT-진리(필연)
흐릿한 경계
Fuzzy Boundary

논리적 가능성Logical Possibility

- 문장이 논리적으로 참이 되는 환경 또는 상황 또는 세상이 존재하면, 그 문장은 논리적으로 **가능**logically possible하다고 한다.
- 진리표를 만들어서 참이 되는 행이 하나라도 존재하면, 그 문장은 **TT-가능**TT-Possible하다고 한다.
- Tarski's World에서 참이 되는 world가 하나라도 존재하면, 그 문장은 **TW-가능**TW-Possible 하다고 한다.
- 논리적 가능 vs. TW-가능
  - TW-가능한 문장은 모두 논리적으로도 가능하다.
  - 그러나 논리적으로 가능하지만, TW-가능하지 않은 문장은 존재한다.
  - 예: $\neg(\text{Tet}(b) \vee \text{Cube}(b) \vee \text{Dodec}(b))$

항진적 동일 Tautological Equivalence

- 두 문장이 항진적으로 동일하다
  iff **<u>통합 진리표</u>**의 모든 행이 동일하다.

- 예: $\neg(A \wedge B)$ <u>vs</u> $\neg A \vee \neg B$

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

∴ 항진적으로 동일하다!

불 논리

- 예: ¬((A ∨ B) ∧ ¬C) vs (¬A ∧ ¬B) ∨ C

A	B	C	A∨B	¬C	(A∨B)∧¬C	¬((A∨B)∧¬C)	¬A	¬B	¬A∧¬B	(¬A∧¬B)∨C
T	T	T	T	F	F	T	F	F	F	T
T	T	F	T	T	T	F	F	F	F	F
T	F	T	T	F	F	T	F	T	F	T
T	F	F	T	T	T	F	F	T	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	F	F	T
F	T	F	T	T	T	F	T	F	F	F
F	F	T	F	F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	F	T	F	T	T	T	T	T

∴ 항진적으로 동일하다!

논리적 동일성 Logical Equivalence

- $a = b \wedge Cube(a)$ 와 $a = b \wedge Cube(b)$ 는 논리적으로 동일하다
- 증명:
  - $a = b \wedge Cube(a)$가 참이라고 가정하자. 그러면 $a = b$ 도 참이고 Cube(a)도 참이다.

    a와 b는 같으므로 (= 제거규칙) Cube(b)도 참이다. 따라서 $a = b \wedge Cube(b)$도 참이다.

    따라서 $a = b \wedge Cube(a)$가 참이라면, $a = b \wedge Cube(b)$도 참이라고 논리적으로 유추해낼 수 있다.
  - 거꾸로 $a = b \wedge Cube(b)$가 참이라고 가정하자. 그러면 $b = a$ 도 참이다.

    그런데 b와 a는 같으므로 (= 제거규칙) Cube(a)도 참이다. 따라서 $a = b \wedge Cube(a)$도 참이다.

    따라서 $a = b \wedge Cube(b)$가 참이라면, $a = b \wedge Cube(a)$도 참이라고 논리적으로 유추해낼 수 있다.
  - 양쪽 방향으로 모두 서로를 논리적으로 유추해낼 수 있으므로 두 문장은 논리적으로 동일하다.

항진적 동일 vs. 논리적 동일

- 두 문장이 항진적으로 동일하면 논리적으로도 동일하다.
- 그러나, 논리적으로 동일하지만 항진적으로 동일하지 않을 수 있다.
  - 예: 아래 두 문장은 논리적으로는 동일하지만 항진적으로는 동일하지 않다.

    $$a = b \land Cube(a) \quad \text{vs} \quad a = b \land Cube(b)$$

  - 헐!?! 통합 진리표를 그려보자.

불 논리

a = b ∧ Cube(a) 와
a = b ∧ Cube(b) 가 항진적으로 동일한가?

a=b	Cube(a)	Cube(b)	a=b ∧ Cube(a)	a=b ∧ Cube(b)
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	F	F
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

어!?! 다르네!! 왜 그렇지?

논리적 결과 Logical consequence / 항진적 결과 Tautological Consequence

- $P_1,\ldots,P_n$,Q가 모두 문장이라고 하자. 그러면,
- Q는 $P_1,\ldots,P_n$의 논리적 결과이다 iff

  $P_1,\ldots,P_n$를 모두 참이라고 가정하면 Q가 참이 된다.
- Q는 $P_1,\ldots,P_n$의 항진적 결과이다 iff

  진리표에서 $P_1,\ldots,P_n$이 모두 true인 행은 Q도 true이다.

예: 통합 진리표를 이용한 항진적 결과의 판정

A	B	A∧B	A∨B
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

A∨B는 A∧B의 항진적 결과tautological consequence이다.

= A∨B는 A∧B의 논리적 결과logical consequence이다.

= A∧B는 A∨B를 논리적으로 암시logically implies 한다

A∧B는 A∨B의 항진적 결과가 아니다.

= A∨B는 A∧B를 논리적으로 암시하지 않는다.

논리적 결과 Logical Consequence

- Q가 $P_1,\ldots,P_n$의 항진적 결과이면, Q가 $P_1,\ldots,P_n$의 논리적 결과이다.
- 증명:
  - Q가 P들의 논리적 결과가 아니면 항진적 결과도 아님을 증명한다.
  - Q가 P들의 논리적 결과가 아니라고 가정하자. 그러면 논리적 결과의 정의에 의해서, P는 참이지만 Q가 거짓이 되는 경우가 있음이 틀림없다.

    이 상황에서 P와 Q를 구성하는 핵 문장들의 진리 값을 결정할 수 있을 것이다.

    이 값들에 해당되는 행이 P와 Q에 대한 통합 진리표에 존재하며, 그 행에서 P는 T로,

    Q는 F로 표시될 수 밖에 없을 것이다. 따라서 Q는 P들의 항진적 결과가 아니다.

논리적 결과인데 항진적 결과가 아닌 경우

- 문장 a = c은

  (a = b ∧ b = c)의

  논리적 결과이다.

- 그러나,

  문장 a = c은

  (a = b ∧ b = c)의

  항진적 결과는 아니다.

- 왜 그런지 통합 진리표를 그려서 밝혀보자.

a=b	b=c	a=c	a=b ∧ b=c	a=c
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	F	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	T
F	F	F	F	F

예를 몇 개 더 볼까?

$$\begin{array}{|l} A \vee B \\ \neg A \\ \hline B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{|l} A \vee \neg B \\ B \vee C \\ \hline A \vee C \end{array}$$

Boole 소프트웨어로 통합 진리표를 만들어 보고,

결론이 전제의 항진적 결과인지 검사해보자.

Fitch에서의 논리적 결과

- Taut Con : Tautological Consequence
  - ✓ 항진적 결과
- FO Con : First-Order Consequence
  - ✓ 논리적 결과: 항진적 결과 뿐 아니라 =을 이해함
- Ana Con : Analytic Consequence
  - ✓ 분석적 결과: 논리적 결과 뿐 아니라 Tarski's World의 술어를 이해함
- Fitch에서 다음 파일을 열고 놀아보자.
  - ✓ Taut Con 1
  - ✓ Taut Con 2

정리:
논리적 결과 vs. 논리적 동일/논리적 진리

- 문장 P가 Q의 논리적 결과이고, Q가 P의 논리적 결과이면, P와 Q는 논리적으로 동일하다.
- 전제에 상관없이 논리적 결과가 되는 문장은 논리적으로 진리이다.