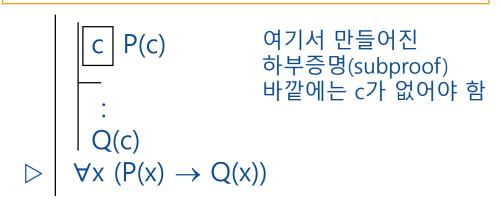
10. 정형 증명

Formal Proofs

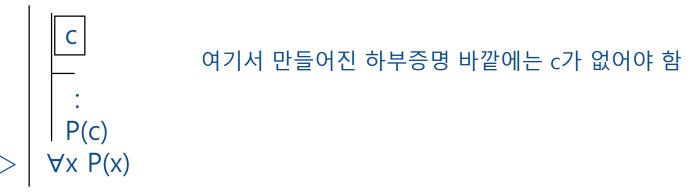


Universal Elimination (∀ Elim) (= Universal Instantiation) 전칭기호 없애기 규칙 (= 전칭 사례화 규칙)

Universal Conditional Proof (∀ Intro)



Universal Introduction (∀ Intro) (= Universal Generalization) 전칭기호 만들기 규칙 (= 전칭 일반화 규칙)



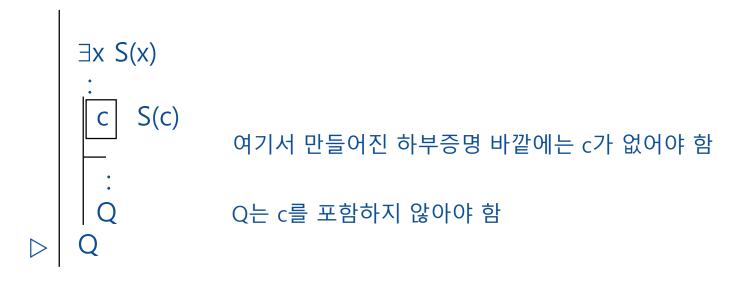
이 주장이 타당한 지에 대한 증명:

1. $\forall x \ (P(x) \rightarrow Q(x))$ 2. $\forall z \ (Q(z) \rightarrow R(z))$ 3. $\boxed{d} \ P(d)$ 4. $P(d) \rightarrow Q(d)$ $\forall \ Elim: 1$ 5. Q(d) $\rightarrow \ Elim: 3,4$ 6. $Q(d) \rightarrow R(d)$ $\forall \ Elim: 2$ 7. R(d) $\rightarrow \ Elim: 5,6$ 8. $\forall x \ (P(x) \rightarrow R(x))$ $\forall \ Intro: 3-7$

Fitch에 들어가서 놀아보자: Universal 1 & 2

Existential Introduction (3 Intro) (= Existential Generalization) 존재기호 만들기 규칙 (= 존재 일반화 규칙)

Existential Elimination (3 Elim) (= Existential Instantiation) 존재기호 없애기 규칙 (= 존재 사례화 규칙)



이 주장이 타당한 지에 대한 증명:

 $\forall x [Cube(x) \rightarrow Large(x)]$ $\forall x [Large(x) \rightarrow LeftOf(x,b)]$ $\exists x Cube(x)$

- 1. $\forall x [Cube(x) \rightarrow Large(x)]$
- 2. $\forall x [Large(x) \rightarrow LeftOf(x,b)]$
- 3. $\exists x \text{ Cube}(x)$

 $\exists x [Large(x) \land LeftOf(x,b)]$

```
4. e Cube(e)
```

- 5. Cube(e) \rightarrow Large(e) \forall Elim: 1
- 6. Large(e) \rightarrow Elim: 4,5
- 7. Large(e) \rightarrow LeftOf(e,b) \forall Elim: 2
- 8. LeftOf(e,b) \rightarrow Elim: 6,7
- 9. Large(e) \land LeftOf(e,b) \land Intro: 6,8
- 10. $\exists x (Large(x) \land LeftOf(x,b)) \exists Intro: 9$
- 11. $\exists x [Large(x) \land LeftOf(x,b)] \exists Elim: 3, 4-10$

Fitch에 들어가서 놀아보자: Existential 1

정형 증명

전술과 전략

- 사용하는 문장의 의미를 명확히 파악할 것
- 비정형 증명을 먼저 작성한 뒤, 정형 증명을 시도하는 전략이 좋음
- ∀x (P(x)→Q(x)) 형태의 전칭형 문장을 증명할 때는 뒤에서 거꾸로 |
 올라오면 더 쉬움
- 보통 3x S(x) 형태의 존재형 문장을 증명할 때 거꾸로 올라오면 별로 도움이 되지 않는데, 전제로부터 S(c)와 같은 특정 사례를 찾을 수 있는 경우는 괜찮음
- 막히면 모순을 이용한 증명을 시도

CSE1007 논리학

정형 증명

정형 증명 연습

```
\exists x (Tet(x) \land Small(x))
\forall x (Small(x) \rightarrow LeftOf(x,b))
```

 $\exists x \ LeftOf(x,b)$

비정형 증명:

작은 사면체가 있다고 하잖아. 그 걸 하나 골라보자.
그런데 작은 건 모두 b의 왼쪽에 있다고 하네.
그러니 작은 그 것도 b의 왼쪽에 있겠네.
그러니 b의 외쪽에 무언가 있음에 틀림없지.
내 말이 맞지?

<u>정형 증명</u>: Fitch에 들어가서 해보자.

정형 증명

정형 증명 연습 : 모순유도에 의한 증명

비정형 증명:

¬∀x P(x) 존재함을 증명하는 것이니 존재기호 만들기 규칙을 적용하는 게 좋겠다. 즉, 어떤 c를 가지고 ¬P(c)를 증명한다. 그러나 전제를 보면 그럴 희망이 별로 없어 보인다. 모든 게 P(x)를 만족시키는 건 아니다 라는 사실만으로

¬P(c)가 되는 c를 찾을 수 있는 건 아니기 때문이다.

막혔다!!!

유일하게 남은 희망은 모순을 이용한 증명이다.

결론을 반대로 뒤집은 후 모순을 유도해내면 된다.

따라서 ¬∃x¬P(x)라고 가정하자. 어떻게 모순을 유도할까?

아는 게 ¬∀xP(x) 밖에 없으므로 전칭기호 만들기 규칙으로

∀xP(x)를 유도하면 모순이 된다.

그러기 위해서 임의로 c를 하나 선택한 후 P(c)가 성립함을 보이면 된다.

어떻게? 또 한번 모순 유도를 쓰면 된다.

P(c)가 아니라면 $\neg P(c)$ 일테고, 따라서 $\exists x \neg P(x)$ 이다.

이는 위의 가정과 모순되므로, P(c)는 성립한다.

그런데 c를 임의로 뽑았으므로 ∀xP(x)가 되는데,

이는 또 전제와 모순이 된다. 따라서 $\exists x \neg P(x)$ 이다.

정형 증명: Fitch에 들어가서 해보자: Quantifier Strategy 1

CSE1007 논리학