

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HCM  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN  
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

---

## Báo cáo Bài Tập Gì Đây

---

Môn học: Môn Học Gì Đây

*Sinh viên thực hiện:*

Quan, Tran Hoang (19120338)  
meadoge(19120000)

Hwang S. Wan (19120000)

*Giảng viên môn học:*

GS. TS. Nguyễn Văn Hướng Dẫn

Ngày 11 tháng 10 năm 2025



# 1 Bài 1

## 1.1 Đề bài

Cho  $x = e^{i\frac{\pi}{3}}, y = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

- (a) Vẽ hình minh hoạ  $x, y$  trên mặt phẳng phức.
- (b) Tìm dạng đại số và dạng cực của  $x, y$ .
- (c) Tính  $\operatorname{Re}(x), \operatorname{Im}(y), |x|, \arg x$ .
- (d) Tính  $\bar{x}, -x, x^{-1}$ .
- (e) Tính  $x + y, x - y, xy, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}$ .
- (f) Tính  $x^4$  và  $x^n, n \in \mathbb{Z}$ .
- (g) Tính  $\sqrt[4]{x}$  và  $\sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}^+$ .

## 1.2 Lời giải

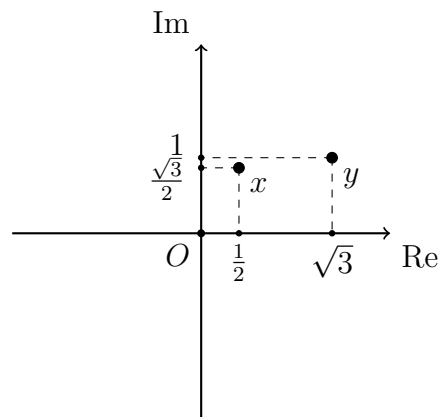
### 1.2.1 Phần (a)

Ta có:

$$x = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i$$

Mặt phẳng phức:



### 1.2.2 Phần (b)

- Dạng cực:

$$x = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$
$$y = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

- Dạng đại số:

$$x = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i$$

### 1.2.3 Phần (c)

Ta có:

$$x = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{Re}(x) = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Im}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|x| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\arg x = \arctan \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

### 1.2.4 Phần (d)

Ta có:

$$\bar{x} = \overline{\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-x = -\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{\bar{x}}{x\bar{x}} = \frac{\bar{x}}{|x|^2} = \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{(1)^2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

### 1.2.5 Phần (e)

Ta có:

$$x + y = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (\sqrt{3} + i) = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$$

$$x - y = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (\sqrt{3} + i) = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$$

$$xy = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3} + i) = \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}\right) = 0 + i(2) = 2i$$

$$\frac{x}{y} = \frac{x\bar{y}}{|y|^2} = \frac{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3} - i)}{\left(\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}\right)}{(\sqrt{4})^2} = \frac{\sqrt{3} + i(1)}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$$

$$\frac{y}{x} = \left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i\right)^{-1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i}{\left|\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i\right|^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i}{\frac{1}{4}} = \sqrt{3} - i$$

### 1.2.6 Phần (f)

Ta có:

$$x = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow x^4 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Tương tự, với  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$x^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}} = \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}$$

### 1.2.7 Phần (g)

Ta có:

$$\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i$$

Tương tự, với  $n \in \mathbb{N}^+$ :

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{i\frac{\pi}{3n}} = \cos \frac{\pi}{3n} + i \sin \frac{\pi}{3n}$$

## 2 Bài 2

### 2.1 Đề bài

Cho  $x, y \in \mathbb{C}$ , chứng minh:

(a)  $x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$ .

(b)  $\overline{x^{-1}} = (\bar{x})^{-1}$  ( $x \neq 0$ ).

(c)  $|xy| = |x||y|$ .

(d)  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

### 2.2 Lời giải

#### 2.2.1 Phần (a)

Giả sử  $x = a + bi$ , ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), ta có:

$$\begin{cases} x\bar{x} = (a + bi)(a - bi) \\ \bar{x}x = (a - bi)(a + bi) = (a + bi)(a - bi) \end{cases} \Rightarrow x\bar{x} = \bar{x}x$$

Lại có:

$$x\bar{x} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

mà  $|x|^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow x\bar{x} = |x|^2 \Leftrightarrow x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2 \Rightarrow \text{dpcm.}$

### 2.2.2 Phần (b)

Giả sử  $x = a + bi$ , ( $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ), ta có:

$$\overline{x^{-1}} = \overline{\frac{\bar{x}}{|x|^2}} = \frac{x}{|x|^2}$$

$$(\bar{x})^{-1} = \frac{\overline{\bar{x}}}{|x|^2} = \frac{x}{|x|^2}$$

$$\Rightarrow \overline{x^{-1}} = (\bar{x})^{-1} = \frac{x}{|x|^2} \Rightarrow \text{dpcm.}$$

### 2.2.3 Phần (c)

Giả sử  $x = a + bi$ ,  $y = c + di$ , ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ), ta có:

$$\begin{cases} |x| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ |y| = \sqrt{c^2 + d^2} \\ xy = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x||y| = (\sqrt{a^2 + b^2})(\sqrt{c^2 + d^2}) = \sqrt{(ac)^2 + (bc)^2 + (ad)^2 + (bd)^2} \\ |xy| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{(ac)^2 + (bc)^2 + (ad)^2 + (bd)^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x||y| = |xy| = \sqrt{(ac)^2 + (bc)^2 + (ad)^2 + (bd)^2} \Rightarrow \text{dpcm.}$$

### 2.2.4 Phần (d)

Giả sử  $x = a + bi$ ,  $y = c + di$ , ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ), ta có:

$$\begin{cases} |x| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ |y| = \sqrt{c^2 + d^2} \\ |x + y| = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \end{cases}$$

Xét mệnh đề:

$$\begin{aligned}
 |x + y| &\leq |x| + |y| \\
 \Leftrightarrow \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} &\leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \\
 \Leftrightarrow (a + c)^2 + (b + d)^2 &\leq \left( \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \right)^2 \\
 \Leftrightarrow a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 &\leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\
 \Leftrightarrow \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} &\geq ac + bd, \text{ (luôn đúng } \forall a, b, c, d \in \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  mệnh đề được xét đúng  $\Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y| \Rightarrow$  dpcm.

### 3 Bài 3

#### 3.1 Đề bài

Cho  $|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$ ,  $|\psi\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$ .

- Tính  $\langle\phi|$  và  $\langle\psi|$ .
- Tính  $\langle\phi|\psi\rangle$  và  $\langle\psi|\phi\rangle$ .
- Tính  $|\phi\rangle\langle\psi|$  và  $|\psi\rangle\langle\phi|$ .
- Tính  $\langle\phi|\langle\psi|$  và  $\langle\psi|\langle\phi|$ .
- Tính  $\|\phi\|$  và  $\|\psi\|$ .
- Tính góc giữa  $\langle\phi|$  và  $\langle\psi|$ .
- Tính  $\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle$  và  $\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle$ .
- Chuẩn hoá  $\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle$  và  $\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle$ .
- Tìm toạ độ của  $|\phi\rangle$  và  $|\psi\rangle$  trong các cơ sở

$$B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}, B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}, B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}.$$

- (j) Cho  $|a\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle$ ,  $|b\rangle = \frac{i}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$ , chứng minh  $B = \{a, b\}$  là một cơ sở trực chuẩn của  $\mathbb{C}^2$  và tìm toạ độ của  $|\phi\rangle, |\psi\rangle$  theo  $B$ .

## 3.2 Lời giải

### 3.2.1 Phần (a)

Ta có:

$$\langle\phi| = |\phi\rangle^\dagger = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^\dagger = \left( \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger = \left( \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1-2i}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^\dagger = \left( \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix} \right)^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix}$$

### 3.2.2 Phần (b)

Ta có:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi||\psi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1-2i}{3} = \frac{1+2\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{3}i$$

$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\psi||\phi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1+2i}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1+2\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{3}i$$

### 3.2.3 Phần (c)

Ta có:

$$|\phi\rangle\langle\psi| = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1+2i}{3} \\ \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \times \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}i \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} + \frac{1}{3}i \end{bmatrix}$$

$$|\psi\rangle\langle\phi| = (|\phi\rangle\langle\psi|)^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}i \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} + \frac{1}{3}i \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3}i & \frac{1}{6} - \frac{1}{3}i \end{bmatrix}$$

### 3.2.4 Phần (d)

Ta có:

$$\begin{aligned}
 |\phi\rangle|\psi\rangle &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1+2i}{3} \\ \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \times \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}i \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{3}i \end{bmatrix} \\
 |\psi\rangle|\phi\rangle &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\ \frac{1+2i}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+2i}{3} \times \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}i \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{3}i \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

### 3.2.5 Phần (e)

Ta có:

$$\begin{aligned}
 \|\phi\| &= \sqrt{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1 \\
 \|\psi\| &= \sqrt{\left|\frac{2}{3}\right|^2 + \left|\frac{1+2i}{3}\right|^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{5}{9}} = \sqrt{1} = 1
 \end{aligned}$$

### 3.2.6 Phần (f)

Gọi  $\theta$  là góc giữa  $|\phi\rangle$  và  $|\psi\rangle$ , ta có:

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \frac{|\langle \phi, \psi \rangle|}{|\phi| |\psi|} = \frac{|\langle \phi | \psi \rangle|}{\|\phi\| \|\psi\|} \\
 \Rightarrow \theta &= \cos^{-1} \frac{|\langle \phi | \psi \rangle|}{\|\phi\| \|\psi\|} = \cos^{-1} \frac{\left| \frac{1+2\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{3}i \right|}{1 \times 1} = \cos^{-1} \sqrt{\left( \frac{1+2\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left( \frac{1}{3} \right)^2} = \cos^{-1} \sqrt{\frac{17+4\sqrt{3}}{36}}
 \end{aligned}$$

### 3.2.7 Phần (g)

Ta có:

$$\text{proj}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle = \frac{\langle \psi | \phi \rangle}{\|\psi\|^2} |\psi\rangle = \frac{\frac{1+2\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{3}i}{1} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+2\sqrt{6}}{9} + \frac{2}{9}i \\ \frac{5+2\sqrt{6}}{18} - \frac{2+2\sqrt{6}}{9}i \end{bmatrix}$$

$$\text{proj}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle = \frac{\langle\phi|\psi\rangle}{\| |\phi\rangle \|^2} |\phi\rangle = \frac{\frac{1+2\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{3}i}{1} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6}i \\ \frac{1+2\sqrt{6}}{12} - \frac{1}{6}i \end{bmatrix}$$

### 3.2.8 Phần (h)

Gọi  $e_1, e_2$  lần lượt là vector chuẩn hoá của  $\text{proj}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle, \text{proj}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle$ , ta có:

$$\begin{aligned} e_1 &= \text{proj}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle \frac{1}{\| \text{proj}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle \|} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1+2\sqrt{6}}{9} - \frac{2}{9}i \\ \frac{5+2\sqrt{6}}{18} - \frac{2+2\sqrt{6}}{9}i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\left| \frac{1+2\sqrt{6}}{9} - \frac{2}{9}i \right|^2 + \left| \frac{5+2\sqrt{6}}{18} - \frac{2+2\sqrt{6}}{9}i \right|^2}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1+2\sqrt{6}}{9} - \frac{2}{9}i \\ \frac{5+2\sqrt{6}}{18} - \frac{2+2\sqrt{6}}{9}i \end{bmatrix} \frac{1}{\left( \frac{1+2\sqrt{6}}{9} \right)^2 + \left( \frac{2}{9} \right)^2 + \left( \frac{5+2\sqrt{6}}{18} \right)^2 + \left( \frac{2+2\sqrt{6}}{9} \right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_2 &= \text{proj}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle \frac{1}{\| \text{proj}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle \|} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6}i \\ \frac{1+2\sqrt{6}}{12} - \frac{1}{6}i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\left| \frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6}i \right|^2 + \left| \frac{1+2\sqrt{6}}{12} - \frac{1}{6}i \right|^2}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6}i \\ \frac{1+2\sqrt{6}}{12} - \frac{1}{6}i \end{bmatrix} \frac{1}{\left( \frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{12} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left( \frac{1+2\sqrt{6}}{12} \right)^2 + \left( \frac{1}{6} \right)^2} \end{aligned}$$

### 3.2.9 Phần (i)

Ta có:

$$|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle, |\psi\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$$

$\Rightarrow$  toạ độ của  $|\phi\rangle, |\psi\rangle$  trong cơ sở trực chuẩn  $B_Z$  là:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_Z} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ [|\psi\rangle]_{B_Z} = \left( \frac{2}{3}, \frac{1-2i}{3} \right) \end{cases}$$

Xét cơ sở trực chuẩn  $B_X$ , tọa độ của  $|\phi\rangle, |\psi\rangle$  trong  $B_X$  là:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_X} = (\langle +|\phi\rangle, \langle -|\phi\rangle) = \left(\frac{2+\sqrt{6}}{4}, \frac{-2+\sqrt{6}}{4}\right) \\ [|\psi\rangle]_{B_X} = (\langle +|\psi\rangle, \langle -|\psi\rangle) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}i, \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3}i\right) \end{cases}$$

Xét cơ sở trực chuẩn  $B_Y$ , tọa độ của  $|\phi\rangle, |\psi\rangle$  trong  $B_Y$  là:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_Y} = (\langle i|\phi\rangle, \langle -i|\phi\rangle) = \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i\right) \\ [|\psi\rangle]_{B_Y} = (\langle i|\psi\rangle, \langle -i|\psi\rangle) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}i, -\frac{\sqrt{2}}{6}i\right) \end{cases}$$

### 3.2.10 Phần (j)

Gọi  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ , xét biểu thức:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 a + \alpha_2 b &= 0 \\ \Leftrightarrow & \alpha_1 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) + \alpha_2 \left( \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow & \left( \alpha_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + \alpha_2 \frac{i}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \left( \alpha_1 \frac{i}{2} + \alpha_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

vì tập hợp  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$  là tập cơ sở nên biểu thức trên chỉ xảy ra khi

$$\begin{cases} \alpha_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + \alpha_2 \frac{i}{2} = 0 \\ \alpha_1 \frac{i}{2} + \alpha_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha_1 a + \alpha_2 b = 0$  khi và chỉ khi  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Leftrightarrow B = \{a, b\}$  độc lập tuyến tính.

Ta có:

$$\begin{cases} |a\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{i}{2} \end{bmatrix} \\ |b\rangle = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle a | b \rangle = |a\rangle^\dagger |b\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = 0 \\ \|a\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \\ \|b\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow B = \{a, b\}$  là cơ sở trực chuẩn trong không gian  $\mathbb{C}^2$ .

$\Rightarrow$  toạ độ của  $|\phi\rangle, |\psi\rangle$  trong cơ sở trực chuẩn  $B$  là:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_B = (\langle a | \phi \rangle, \langle b | \phi \rangle) = \left(\frac{3}{4} - \frac{i}{4}, \frac{-\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) \\ [|\psi\rangle]_B = (\langle a | \psi \rangle, \langle b | \psi \rangle) = \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{3} - \frac{i}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1+\sqrt{2}}{3}i\right) \end{cases}$$

## 4 Bài 4

### 4.1 Đề bài

Cho  $x, y \in \mathbb{C}$ , chứng minh:

(a)  $x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$ .

(b)  $\overline{x^{-1}} = (\bar{x})^{-1} (x \neq 0)$ .

(c)  $|xy| = |x||y|$ .

(d)  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

## 4.2 Lời giải

### 4.2.1 Phần (a)

### 4.2.2 Phần (b)

### 4.2.3 Phần (c)

### 4.2.4 Phần (d)

## 5 Bài 5

### 5.1 Đề bài

Cho  $x, y \in \mathbb{C}$ , chứng minh:

(a)  $x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$ .

(b)  $\overline{x^{-1}} = (\bar{x})^{-1}$  ( $x \neq 0$ ).

(c)  $|xy| = |x||y|$ .

(d)  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

### 5.2 Lời giải

#### 5.2.1 Phần (a)

#### 5.2.2 Phần (b)

#### 5.2.3 Phần (c)

#### 5.2.4 Phần (d)

## 6 Bài 6

### 6.1 Đề bài

Cho  $x, y \in \mathbb{C}$ , chứng minh:

(a)  $x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$ .

(b)  $\overline{x^{-1}} = (\overline{x})^{-1} \ (x \neq 0).$

(c)  $|xy| = |x||y|.$

(d)  $|x + y| \leq |x| + |y|.$

## 6.2 Lời giải

### 6.2.1 Phần (a)

### 6.2.2 Phần (b)

### 6.2.3 Phần (c)

### 6.2.4 Phần (d)

## 7 Bài 7

### 7.1 Đề bài

Cho  $x, y \in \mathbb{C}$ , chứng minh:

(a)  $x\overline{x} = \overline{x}x = |x|^2.$

(b)  $\overline{x^{-1}} = (\overline{x})^{-1} \ (x \neq 0).$

(c)  $|xy| = |x||y|.$

(d)  $|x + y| \leq |x| + |y|.$

## 7.2 Lời giải

### 7.2.1 Phần (a)

### 7.2.2 Phần (b)

### 7.2.3 Phần (c)

### 7.2.4 Phần (d)

## 8 Bài 8

### 8.1 Đề bài

Cho  $x, y \in \mathbb{C}$ , chứng minh:

(a)  $x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$ .

(b)  $\overline{x^{-1}} = (\bar{x})^{-1}$  ( $x \neq 0$ ).

(c)  $|xy| = |x||y|$ .

(d)  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

### 8.2 Lời giải

#### 8.2.1 Phần (a)

#### 8.2.2 Phần (b)

#### 8.2.3 Phần (c)

#### 8.2.4 Phần (d)