

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HCM  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN  
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

---

## Exercise 2

---

Môn học: Nhập môn tính toán lượng tử

*Sinh viên thực hiện:*

Nguyễn Thiên Ân - 23122020

*Giảng viên môn học:*

ThS. Vũ Quốc Hoàng

Nguyễn Ngọc Toàn

Ngày 19 tháng 11 năm 2025



# Mục lục

<b>1</b>	<b>Bài 6</b>	<b>2</b>
1.1	Đề bài . . . . .	2
1.2	Lời giải . . . . .	2
1.2.1	Phần a . . . . .	2
1.2.2	Phần b . . . . .	2
1.2.3	Phần c . . . . .	3
1.2.4	Phần d . . . . .	3
1.2.5	Phần d . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Bài 7</b>	<b>3</b>
2.1	Đề bài . . . . .	3
2.2	Lời giải . . . . .	4
2.2.1	Phần a . . . . .	4
2.2.2	Phần b . . . . .	5
2.2.3	Phần c . . . . .	5
2.2.4	Phần d . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Bài 8</b>	<b>6</b>
3.1	Đề bài . . . . .	6
3.2	Lời giải . . . . .	6
3.2.1	Phần a . . . . .	6
3.2.2	Phần b . . . . .	6
3.2.3	Phần c . . . . .	7

# 1 Bài 6

## 1.1 Đề bài

Cho hệ 2 qubit với trạng thái

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle - \frac{i}{2}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle.$$

Khảo sát các phép đo sau

- (a) Đo đồng thời 2 qubit.
- (b) Đo qubit 0.
- (c) Đo qubit 1.
- (d) Đo qubit 0 rồi đo qubit 1 và so kết quả với Câu (a).
- (e) Đo qubit 1 rồi đo qubit 0 và so kết quả với Câu (b).

## 1.2 Lời giải

### 1.2.1 Phần a

Khi đo đồng thời 2 qubit, ta có:

- Xác suất ra trạng thái  $|00\rangle$  là:  $P(00) = \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} = 25\%$ .
- Xác suất ra trạng thái  $|01\rangle$  là:  $P(01) = |0|^2 = 0\%$ .
- Xác suất ra trạng thái  $|10\rangle$  là:  $P(10) = \left|-\frac{i}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} = 25\%$ .
- Xác suất ra trạng thái  $|11\rangle$  là:  $P(11) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$ .

### 1.2.2 Phần b

Khi chỉ đo qubit 0, ta có:

- Xác suất qubit 0 bằng 0 là:  $P(q_0 = 0) = P(00) + P(01) = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4} = 25\%$ .
- Xác suất qubit 0 bằng 1 là:  $P(q_0 = 1) = P(10) + P(11) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 75\%$ .

### 1.2.3 Phần c

Khi chỉ đo qubit 1, ta có:

- Xác suất qubit 1 bằng 0 là:  $P(q_1 = 0) = P(00) + P(10) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 75\%$ .
- Xác suất qubit 1 bằng 1 là:  $P(q_1 = 1) = P(01) + P(11) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = 25\%$ .

### 1.2.4 Phần d

Đầu tiên, ta đo qubit 0 trước:

- Qubit 0 được 0 với xác suất:  $\left| \frac{1}{2} |0\rangle \right|^2 = \frac{1}{4} = 25\%$  và trạng thái sụp đổ thành  $\frac{1}{2} |00\rangle$ , sau đó, ta đo qubit 1 chắc chắn sẽ ra 0.
- Qubit 0 được 1 với xác suất:  $\left| -\frac{i}{2} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \right|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 75\%$  và trạng thái sụp đổ thành  $-\frac{i}{2} |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$ , sau đó, ta đo qubit 1:
  - Xác suất đo tiếp qubit 1 bằng 0 là:  $\frac{P(10)}{P(q_1=0)} = \frac{1}{3} \approx 66.7\%$ .
  - Xác suất đo tiếp qubit 1 bằng 1 là:  $\frac{P(11)}{P(q_1=0)} = \frac{2}{3} \approx 33.3\%$ .

### 1.2.5 Phần d

Đầu tiên, ta đo qubit 1 trước:

- Qubit 1 được 0 với xác suất:  $\left| \frac{1}{2} |0\rangle - \frac{i}{2} |1\rangle \right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$  và trạng thái sụp đổ thành  $\frac{1}{2} |00\rangle - \frac{i}{2} |10\rangle$ , sau đó, ta đo qubit 0:
  - Xác suất đo tiếp qubit 0 bằng 0 là:  $\frac{P(00)}{P(q_1=0)} = \frac{1}{2} = 50\%$ .
  - Xác suất đo tiếp qubit 0 bằng 1 là:  $\frac{P(10)}{P(q_1=0)} = \frac{1}{2} = 50\%$ .
- Qubit 1 được 1 với xác suất  $\left| \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$  và trạng thái sụp đổ thành  $\frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$ , sau đó, ta đo qubit 0 chắc chắn sẽ ra 1.

## 2 Bài 7

### 2.1 Đề bài

Khảo sát phép toán 2 qubit  $U = H \otimes X$ .

Exercise 2

- (a) Cho biết tác động của  $U$  lên các vector của cơ sở tính toán.
- (b) Xác định ma trận biểu diễn của  $U$  từ Câu (a).
- (c) Xác định ma trận biểu diễn của  $U$  bằng phép tích tensor.
- (d) Cho biết tác động của  $U$  lên trạng thái

$$|\psi\rangle = \frac{1}{4}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle.$$

## 2.2 Lời giải

Ta có:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

### 2.2.1 Phần a

Các vector cơ sở tính toán là  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ , ta có:

- Với trạng thái  $|00\rangle$ :

$$U|00\rangle = (H|0\rangle) \otimes (X|0\rangle) = |+\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

- Với trạng thái  $|01\rangle$ :

$$U|01\rangle = (H|0\rangle) \otimes (X|1\rangle) = |+\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

- Với trạng thái  $|10\rangle$ :

$$U|10\rangle = (H|1\rangle) \otimes (X|0\rangle) = |-\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

- Với trạng thái  $|11\rangle$ :

$$U|11\rangle = (H|1\rangle) \otimes (X|1\rangle) = |-\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

### 2.2.2 Phần b

Từ Câu (a), ta được:

$$U = \begin{bmatrix} U|00\rangle & U|01\rangle & U|10\rangle & U|11\rangle \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

### 2.2.3 Phần c

Ma trận biểu diễn của  $U$  là:

$$U = H \otimes X$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

### 2.2.4 Phần d

Ta có:

$$U|\psi\rangle = \frac{1}{4}U|00\rangle + \frac{1}{2}U|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}U|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}U|11\rangle$$

$$= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \right) +$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \right)$$

$$\Rightarrow U|\psi\rangle = \frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{8}|00\rangle + \frac{4 + \sqrt{2}}{8}|01\rangle - \frac{\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}{8}|10\rangle - \frac{4 - \sqrt{2}}{8}|11\rangle$$

## 3 Bài 8

### 3.1 Đề bài

Xét trạng thái 3 qubit

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle.$$

- Chứng minh  $|GHZ\rangle$  là trạng thái vướng.
- Khảo sát phép đo riêng qubit 0, qubit 1, qubit 2 và nhận xét.
- Thiết kế mạch 3 qubit để tạo trạng thái  $|GHZ\rangle$ .

### 3.2 Lời giải

#### 3.2.1 Phần a

Giả sử trạng thái  $|GHZ\rangle$  tách được, suy ra  $\exists a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$  thỏa:

$$|GHZ\rangle = (a_0|0\rangle + b_0|1\rangle) \otimes (a_1|0\rangle + b_1|1\rangle) \otimes (a_2|0\rangle + b_2|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle.$$

Đồng nhất hệ số ta được:

$$\begin{cases} a_0a_1a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ b_0b_1b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a_0a_1b_0 = 0 \\ a_0a_1b_1 = 0 \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0, a_1, a_2 \neq 0 \\ b_0, b_1, b_2 \neq 0 \\ a_0a_1b_0 = 0 \\ a_0a_1b_1 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

$\Rightarrow$  vô lí, suy ra  $|GHZ\rangle$  là trạng thái vướng.

#### 3.2.2 Phần b

Khi chỉ đo qubit 0, ta có:

- Xác suất qubit 0 bằng 0 là:  $P(q_0 = 0) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$ .
- Xác suất qubit 0 bằng 1 là:  $P(q_0 = 1) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$ .

Khi chỉ đo qubit 1, ta có:

- Xác suất qubit 1 bằng 0 là:  $P(q_1 = 0) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$ .
- Xác suất qubit 1 bằng 1 là:  $P(q_1 = 1) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$ .

Khi chỉ đo qubit 2, ta có:

- Xác suất qubit 2 bằng 0 là:  $P(q_2 = 0) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$ .
- Xác suất qubit 2 bằng 1 là:  $P(q_2 = 1) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$ .

*Nhận xét:* Mặc dù kết quả đo của từng cá nhân là ngẫu nhiên, tuy nhiên chúng lại có sự tương quan hoàn toàn với nhau.

- Nếu ta đo qubit 0 được 0, trạng thái khi đó sẽ sụp đổ về  $|000\rangle$ , qubit 1 và qubit 2 khi đó cũng sẽ là 0.
- Ngược lại, nếu ta đo qubit 0 được 1, trạng thái khi đó sẽ sụp đổ về  $|111\rangle$ , qubit 1 và qubit 2 khi đó cũng sẽ là 1.

### 3.2.3 Phần c