

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Exercise 2

Môn học: Nhập môn tính toán lượng tử

Sinh viên thực hiện:

Nguyễn Thiên Ân - 23122020

Giảng viên môn học:

ThS. Vũ Quốc Hoàng

Nguyễn Ngọc Toàn

Ngày 19 tháng 11 năm 2025



Mục lục

1	Bài 6	2
1.1	Đề bài	2
1.2	Lời giải	2
1.2.1	Phần a	2
1.2.2	Phần b	2
1.2.3	Phần c	3
1.2.4	Phần d	3
1.2.5	Phần d	3
2	Bài 7	3
2.1	Đề bài	3
2.2	Lời giải	4
2.2.1	Phần a	4
2.2.2	Phần b	5
2.2.3	Phần c	5
2.2.4	Phần d	5
3	Bài 8	6
3.1	Đề bài	6
3.2	Lời giải	6

1 Bài 6

1.1 Đề bài

Cho hệ 2 qubit với trạng thái

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle - \frac{i}{2}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle.$$

Khảo sát các phép đo sau

- (a) Đo đồng thời 2 qubit.
- (b) Đo qubit 0.
- (c) Đo qubit 1.
- (d) Đo qubit 0 rồi đo qubit 1 và so kết quả với Câu (a).
- (e) Đo qubit 1 rồi đo qubit 0 và so kết quả với Câu (b).

1.2 Lời giải

1.2.1 Phần a

Khi đo đồng thời 2 qubit, ta có:

- Xác suất ra trạng thái $|00\rangle$ là: $P(00) = \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} = 25\%$.
- Xác suất ra trạng thái $|01\rangle$ là: $P(01) = |0|^2 = 0\%$.
- Xác suất ra trạng thái $|10\rangle$ là: $P(10) = \left|-\frac{i}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} = 25\%$.
- Xác suất ra trạng thái $|11\rangle$ là: $P(11) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$.

1.2.2 Phần b

Khi chỉ đo qubit 0, ta có:

- Xác suất qubit 0 bằng 0 là: $P(q_0 = 0) = P(00) + P(01) = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4} = 25\%$.
- Xác suất qubit 0 bằng 1 là: $P(q_0 = 1) = P(10) + P(11) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 75\%$.

1.2.3 Phần c

Khi chỉ đo qubit 1, ta có:

- Xác suất qubit 1 bằng 0 là: $P(q_1 = 0) = P(00) + P(10) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 75\%$.
- Xác suất qubit 1 bằng 1 là: $P(q_1 = 1) = P(01) + P(11) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = 25\%$.

1.2.4 Phần d

Đầu tiên, ta đo qubit 0 trước:

- Qubit 0 được 0 với xác suất: $\left| \frac{1}{2} |0\rangle \right|^2 = \frac{1}{4} = 25\%$ và trạng thái sụp đổ thành $\frac{1}{2} |00\rangle$, sau đó, ta đo qubit 1 chắc chắn sẽ ra 0.
- Qubit 0 được 1 với xác suất: $\left| -\frac{i}{2} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \right|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 75\%$ và trạng thái sụp đổ thành $-\frac{i}{2} |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$, sau đó, ta đo qubit 1:
 - Xác suất đo tiếp qubit 1 bằng 0 là: $\frac{P(10)}{P(q_1=0)} = \frac{1}{3} \approx 66.7\%$.
 - Xác suất đo tiếp qubit 1 bằng 1 là: $\frac{P(11)}{P(q_1=0)} = \frac{2}{3} \approx 33.3\%$.

1.2.5 Phần d

Đầu tiên, ta đo qubit 1 trước:

- Qubit 1 được 0 với xác suất: $\left| \frac{1}{2} |0\rangle - \frac{i}{2} |1\rangle \right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$ và trạng thái sụp đổ thành $\frac{1}{2} |00\rangle - \frac{i}{2} |10\rangle$, sau đó, ta đo qubit 0:
 - Xác suất đo tiếp qubit 0 bằng 0 là: $\frac{P(00)}{P(q_1=0)} = \frac{1}{2} = 50\%$.
 - Xác suất đo tiếp qubit 0 bằng 1 là: $\frac{P(10)}{P(q_1=0)} = \frac{1}{2} = 50\%$.
- Qubit 1 được 1 với xác suất $\left| \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$ và trạng thái sụp đổ thành $\frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$, sau đó, ta đo qubit 0 chắc chắn sẽ ra 1.

2 Bài 7

2.1 Đề bài

Khảo sát phép toán 2 qubit $U = H \otimes X$.

- (a) Cho biết tác động của U lên các vector của cơ sở tính toán.
- (b) Xác định ma trận biểu diễn của U từ Câu (a).
- (c) Xác định ma trận biểu diễn của U bằng phép tích tensor.
- (d) Cho biết tác động của U lên trạng thái

$$|\psi\rangle = \frac{1}{4}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle.$$

2.2 Lời giải

Ta có:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.1 Phần a

Các vector cơ sở tính toán là $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$, ta có:

- Với trạng thái $|00\rangle$:

$$U|00\rangle = (H|0\rangle) \otimes (X|0\rangle) = |+\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

- Với trạng thái $|01\rangle$:

$$U|01\rangle = (H|0\rangle) \otimes (X|1\rangle) = |+\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

- Với trạng thái $|10\rangle$:

$$U|10\rangle = (H|1\rangle) \otimes (X|0\rangle) = |-\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

- Với trạng thái $|11\rangle$:

$$U|11\rangle = (H|1\rangle) \otimes (X|1\rangle) = |-\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

2.2.2 Phần b

Từ Câu (a), ta được:

$$U = \begin{bmatrix} U|00\rangle & U|01\rangle & U|10\rangle & U|11\rangle \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.3 Phần c

Ma trận biểu diễn của U là:

$$U = H \otimes X$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.4 Phần d

Ta có:

$$U|\psi\rangle = \frac{1}{4}U|00\rangle + \frac{1}{2}U|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}U|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}U|11\rangle$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \right) +$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \right)$$

$$\Rightarrow U|\psi\rangle = \frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{8}|00\rangle + \frac{4 + \sqrt{2}}{8}|01\rangle - \frac{\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}{8}|10\rangle - \frac{4 - \sqrt{2}}{8}|11\rangle$$

3 Bài 8

3.1 Đề bài

Xét trạng thái 3 qubit

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle.$$

- (a) Chứng minh $|GHZ\rangle$ là trạng thái vướng.
- (b) Khảo sát phép đo riêng qubit 0, qubit 1, qubit 2 và nhận xét.
- (c) Thiết kế mạch 3 qubit để tạo trạng thái $|GHZ\rangle$.

3.2 Lời giải