

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Exercise 1

Môn học: Nhập môn tính toán lượng tử

Sinh viên thực hiện:

Nguyễn Thiên Ân - 23122020

Giảng viên môn học:

ThS. Vũ Quốc Hoàng

Nguyễn Ngọc Toàn

Ngày 21 tháng 10 năm 2025



Mục lục

1	Bài 1	3
1.1	Đề bài	3
1.2	Lời giải	3
1.2.1	Phần (a)	3
1.2.2	Phần (b)	4
1.2.3	Phần (c)	4
1.2.4	Phần (d)	5
1.2.5	Phần (e)	5
1.2.6	Phần (f)	5
1.2.7	Phần (g)	6
2	Bài 2	6
2.1	Đề bài	6
2.2	Lời giải	6
2.2.1	Phần (a)	6
2.2.2	Phần (b)	7
2.2.3	Phần (c)	7
2.2.4	Phần (d)	7
3	Bài 3	8
3.1	Đề bài	8
3.2	Lời giải	9
3.2.1	Phần (a)	9
3.2.2	Phần (b)	9
3.2.3	Phần (c)	9
3.2.4	Phần (d)	10
3.2.5	Phần (e)	10
3.2.6	Phần (f)	10
3.2.7	Phần (g)	10
3.2.8	Phần (h)	11

3.2.9	Phần (i)	11
3.2.10	Phần (j)	12
4	Bài 4	13
4.1	Đề bài	13
4.2	Lời giải	13
4.2.1	Phần (a)	13
4.2.2	Phần (b)	14
4.2.3	Phần (c)	14
4.2.4	Phần (d)	15
4.2.5	Phần (e)	15
4.2.6	Phần (f)	16
4.2.7	Phần (g)	17
5	Bài 5	17
5.1	Đề bài	17
5.2	Lời giải	17
5.2.1	Phần (a)	17
5.2.2	Phần (b)	18
6	Bài 6	18
6.1	Đề bài	18
6.2	Lời giải	19
6.2.1	Phần (a)	19
6.2.2	Phần (b)	19
6.2.3	Phần (c)	20
7	Bài 7	21
7.1	Đề bài	21
7.2	Lời giải	22
7.2.1	Phần (a)	22
7.2.2	Phần (b)	22
7.2.3	Phần (c)	23

7.2.4	Phần (d)	23
8	Bài 8	24
8.1	Đề bài	24
8.2	Lời giải	24
8.2.1	Phần (a)	24
8.2.2	Phần (b)	25

1 Bài 1

1.1 Đề bài

Cho $x = e^{i\frac{\pi}{3}}, y = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

- (a) Vẽ hình minh hoạ x, y trên mặt phẳng phức.
- (b) Tìm dạng đại số và dạng cực của x, y .
- (c) Tính $\operatorname{Re}(x), \operatorname{Im}(y), |x|, \arg x$.
- (d) Tính $\bar{x}, -x, x^{-1}$.
- (e) Tính $x + y, x - y, xy, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}$.
- (f) Tính x^4 và $x^n, n \in \mathbb{Z}$.
- (g) Tính $\sqrt[4]{x}$ và $\sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}^+$.

1.2 Lời giải

1.2.1 Phần (a)

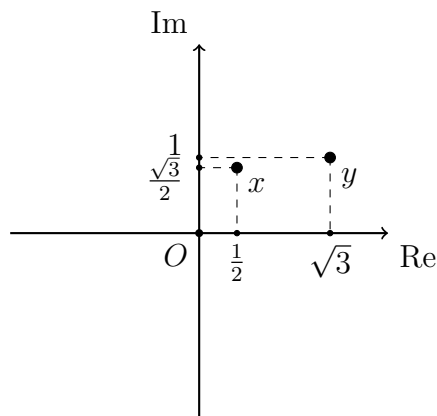
Ta có:

$$x = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i$$

Mặt phẳng phức:

Exercise 1



1.2.2 Phần (b)

- Dạng cực:

$$x = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$y = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

- Dạng đại số:

$$x = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i$$

1.2.3 Phần (c)

Ta có:

$$x = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{Re}(x) = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Im}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|x| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\arg x = \arctan \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

1.2.4 Phần (d)

Ta có:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \overline{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -x &= -\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x^{-1} &= \frac{1}{x} = \frac{\bar{x}}{x\bar{x}} = \frac{\bar{x}}{|x|^2} = \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{(1)^2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

1.2.5 Phần (e)

Ta có:

$$\begin{aligned}x + y &= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (\sqrt{3} + i) = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) \\ x - y &= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (\sqrt{3} + i) = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) \\ xy &= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3} + i) = \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}\right) = 0 + i(2) = 2i\end{aligned}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{x\bar{y}}{|y|^2} = \frac{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3} - i)}{\left(\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}\right)}{(\sqrt{4})^2} = \frac{\sqrt{3} + i(1)}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$$

$$\frac{y}{x} = \left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i\right)^{-1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i}{\left|\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i\right|^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i}{\frac{1}{4}} = \sqrt{3} - i$$

1.2.6 Phần (f)

Ta có:

$$x = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow x^4 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Tương tự, với $n \in \mathbb{Z}$:

$$x^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}} = \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}$$

1.2.7 Phần (g)

Ta có:

$$\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3} + k2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12} + \frac{k}{2}\pi} = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k}{2}\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k}{2}\pi\right)$$

Tương tự, với $n \in \mathbb{N}^+$:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3} + k2\pi}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{i\frac{\pi}{3n} + \frac{k}{n}2\pi} = \cos\left(\frac{\pi}{3n} + \frac{k}{n}2\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3n} + \frac{k}{n}2\pi\right)$$

2 Bài 2

2.1 Đề bài

Cho $x, y \in \mathbb{C}$, chứng minh:

- (a) $x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$.
- (b) $\overline{x^{-1}} = (\bar{x})^{-1}$ ($x \neq 0$).
- (c) $|xy| = |x||y|$.
- (d) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

2.2 Lời giải

2.2.1 Phần (a)

Giả sử $x = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có:

$$\begin{cases} x\bar{x} = (a + bi)(a - bi) \\ \bar{x}x = (a - bi)(a + bi) = (a + bi)(a - bi) \end{cases} \Rightarrow x\bar{x} = \bar{x}x$$

Lại có:

$$x\bar{x} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

Exercise 1

$$\begin{aligned} \text{mà } |x|^2 &= (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2 + b^2 \\ \Rightarrow x\bar{x} &= |x|^2 \Leftrightarrow x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2 \Rightarrow \text{dpcm.} \end{aligned}$$

2.2.2 Phần (b)

Giả sử $x = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), ta có:

$$\overline{x^{-1}} = \overline{\frac{\bar{x}}{|x|^2}} = \frac{x}{|x|^2}$$

$$(\bar{x})^{-1} = \frac{\overline{\bar{x}}}{|x|^2} = \frac{x}{|x|^2}$$

$$\Rightarrow \overline{x^{-1}} = (\bar{x})^{-1} = \frac{x}{|x|^2} \Rightarrow \text{dpcm.}$$

2.2.3 Phần (c)

Giả sử $x = a + bi, y = c + di$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$), ta có:

$$\begin{cases} |x| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ |y| = \sqrt{c^2 + d^2} \\ xy = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x||y| = (\sqrt{a^2 + b^2})(\sqrt{c^2 + d^2}) = \sqrt{(ac)^2 + (bc)^2 + (ad)^2 + (bd)^2} \\ |xy| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{(ac)^2 + (bc)^2 + (ad)^2 + (bd)^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x||y| = |xy| = \sqrt{(ac)^2 + (bc)^2 + (ad)^2 + (bd)^2} \Rightarrow \text{dpcm.}$$

2.2.4 Phần (d)

Giả sử $x = a + bi, y = c + di$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$), ta có:

$$\begin{cases} |x| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ |y| = \sqrt{c^2 + d^2} \\ |x + y| = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \end{cases}$$

Xét mệnh đề:

$$\begin{aligned}
 & |x + y| \leq |x| + |y| \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \\
 \Leftrightarrow & (a + c)^2 + (b + d)^2 \leq \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \right)^2 \\
 \Leftrightarrow & a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq ac + bd, \text{ (luôn đúng } \forall a, b, c, d \in \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

\Rightarrow mệnh đề được xét đúng $\Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y| \Rightarrow$ dpcm.

3 Bài 3

3.1 Đề bài

Cho $|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$, $|\psi\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

- Tính $\langle\phi|$ và $\langle\psi|$.
- Tính $\langle\phi|\psi\rangle$ và $\langle\psi|\phi\rangle$.
- Tính $|\phi\rangle\langle\psi|$ và $|\psi\rangle\langle\phi|$.
- Tính $\langle\phi|\langle\psi|$ và $\langle\psi|\langle\phi|$.
- Tính $\|\phi\|$ và $\|\psi\|$.
- Tính góc giữa $\langle\phi|$ và $\langle\psi|$.
- Tính $\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle$ và $\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle$.
- Chuẩn hoá $\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle$ và $\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle$.
- Tìm toạ độ của $|\phi\rangle$ và $|\psi\rangle$ trong các cơ sở

$$B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}, B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}, B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}.$$

- (j) Cho $|a\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle$, $|b\rangle = \frac{i}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$, chứng minh $B = \{a, b\}$ là một cơ sở trực chuẩn của \mathbb{C}^2 và tìm toạ độ của $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ theo B .

3.2 Lời giải

3.2.1 Phần (a)

Ta có:

$$\langle\phi| = |\phi\rangle^\dagger = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^\dagger = \left(\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger = \left(\frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1-2i}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^\dagger = \left(\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix} \right)^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix}$$

3.2.2 Phần (b)

Ta có:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi||\psi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1-2i}{3} = \frac{1+2\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{3}i$$

$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\psi||\phi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1+2i}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1+2\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{3}i$$

3.2.3 Phần (c)

Ta có:

$$|\phi\rangle\langle\psi| = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1+2i}{3} \\ \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \times \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}i \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} + \frac{1}{3}i \end{bmatrix}$$

$$|\psi\rangle\langle\phi| = (|\phi\rangle\langle\psi|)^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}i \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} + \frac{1}{3}i \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3}i & \frac{1}{6} - \frac{1}{3}i \end{bmatrix}$$

3.2.4 Phần (d)

Ta có:

$$\langle \phi | \langle \psi | = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1+2i}{3} & \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \times \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}i & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} + \frac{1}{3}i \end{bmatrix}$$

$$\langle \psi | \langle \phi | = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} & \frac{1+2i}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1+2i}{3} \times \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}i & \frac{1}{6} + \frac{1}{3}i \end{bmatrix}$$

3.2.5 Phần (e)

Ta có:

$$\|\phi\| = \sqrt{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\psi\| = \sqrt{\left|\frac{2}{3}\right|^2 + \left|\frac{1+2i}{3}\right|^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{5}{9}} = \sqrt{1} = 1$$

3.2.6 Phần (f)

Gọi θ là góc giữa $|\phi\rangle$ và $|\psi\rangle$, ta có:

$$\cos \theta = \frac{|\langle \phi, \psi \rangle|}{\|\phi\| \|\psi\|} = \frac{|\langle \phi | \psi \rangle|}{\|\phi\| \|\psi\|}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1} \frac{|\langle \phi | \psi \rangle|}{\|\phi\| \|\psi\|} = \cos^{-1} \frac{\left|\frac{1+2\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{3}i\right|}{1 \times 1} = \cos^{-1} \sqrt{\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \cos^{-1} \sqrt{\frac{17+4\sqrt{3}}{36}}$$

3.2.7 Phần (g)

Ta có:

$$\text{proj}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle = \frac{\langle \psi | \phi \rangle}{\|\psi\|^2} |\psi\rangle = \frac{\frac{1+2\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{3}i}{1} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+2\sqrt{3}}{9} + \frac{2}{9}i \\ \frac{5+2\sqrt{3}}{18} - \frac{2+2\sqrt{3}}{9}i \end{bmatrix}$$

$$\text{proj}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle = \frac{\langle \phi | \psi \rangle}{\|\phi\|^2} |\phi\rangle = \frac{\frac{1+2\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{3}i}{1} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6}i \\ \frac{1+2\sqrt{6}}{12} - \frac{1}{6}i \end{bmatrix}$$

3.2.8 Phần (h)

Gọi e_1, e_2 lần lượt là vector chuẩn hoá của $\text{proj}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle, \text{proj}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle$, ta có:

$$\begin{aligned} e_1 &= \text{proj}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle \frac{1}{\|\text{proj}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle\|} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1+2\sqrt{6}}{9} - \frac{2}{9}i \\ \frac{5+2\sqrt{6}}{18} - \frac{2+2\sqrt{6}}{9}i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\left|\frac{1+2\sqrt{6}}{9} - \frac{2}{9}i\right|^2 + \left|\frac{5+2\sqrt{6}}{18} - \frac{2+2\sqrt{6}}{9}i\right|^2}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1+2\sqrt{6}}{9} - \frac{2}{9}i \\ \frac{5+2\sqrt{6}}{18} - \frac{2+2\sqrt{6}}{9}i \end{bmatrix} \frac{1}{\left(\frac{1+2\sqrt{6}}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{5+2\sqrt{6}}{18}\right)^2 + \left(\frac{2+2\sqrt{6}}{9}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_2 &= \text{proj}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle \frac{1}{\|\text{proj}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle\|} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6}i \\ \frac{1+2\sqrt{6}}{12} - \frac{1}{6}i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\left|\frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\right|^2 + \left|\frac{1+2\sqrt{6}}{12} - \frac{1}{6}i\right|^2}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6}i \\ \frac{1+2\sqrt{6}}{12} - \frac{1}{6}i \end{bmatrix} \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{12}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{1+2\sqrt{6}}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} \end{aligned}$$

3.2.9 Phần (i)

Ta có:

$$|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle, |\psi\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$$

\Rightarrow toạ độ của $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ trong cơ sở trực chuẩn B_Z là:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_Z} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ [|\psi\rangle]_{B_Z} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1-2i}{3}\right) \end{cases}$$

Xét cơ sở trực chuẩn B_X , toạ độ của $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ trong B_X là:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_X} = (\langle +|\phi\rangle, \langle -|\phi\rangle) = \left(\frac{2+\sqrt{6}}{4}, \frac{-2+\sqrt{6}}{4}\right) \\ [|\psi\rangle]_{B_X} = (\langle +|\psi\rangle, \langle -|\psi\rangle) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}i, \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3}i\right) \end{cases}$$

Xét cơ sở trực chuẩn B_Y , tọa độ của $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ trong B_Y là:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_Y} = (\langle i|\phi\rangle, \langle -i|\phi\rangle) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i, -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i\right) \\ [|\psi\rangle]_{B_Y} = (\langle i|\psi\rangle, \langle -i|\psi\rangle) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}i, -\frac{\sqrt{2}}{6}i\right) \end{cases}$$

3.2.10 Phần (j)

Gọi $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, xét biểu thức:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 a + \alpha_2 b & &= 0 \\ \Leftrightarrow & \alpha_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) + \alpha_2 \left(\frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) & &= 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\alpha_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + \alpha_2 \frac{i}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \left(\alpha_1 \frac{i}{2} + \alpha_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} & &= 0 \end{aligned}$$

vì tập hợp $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ là tập cơ sở nên biểu thức trên chỉ xảy ra khi

$$\begin{cases} \alpha_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + \alpha_2 \frac{i}{2} = 0 \\ \alpha_1 \frac{i}{2} + \alpha_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha_1 a + \alpha_2 b = 0$ khi và chỉ khi $\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Leftrightarrow B = \{a, b\}$ độc lập tuyến tính.

Ta có:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} |a\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{i}{2} \end{bmatrix} \\ |b\rangle = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \langle a|b\rangle = |a\rangle^\dagger |b\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = 0 \\ \|a\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \\ \|b\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow B = \{a, b\}$ là cơ sở trực chuẩn trong không gian \mathbb{C}^2 .

\Rightarrow tọa độ của $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ trong cơ sở trực chuẩn B là:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_B = (\langle a | \phi \rangle, \langle b | \phi \rangle) = \left(\frac{3}{4} - \frac{i}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}i - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \\ [|\psi\rangle]_B = (\langle a | \psi \rangle, \langle b | \psi \rangle) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{6} - \frac{i}{3}, \frac{i}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{i\sqrt{3}}{3} \right) \end{cases}$$

4 Bài 4

4.1 Đề bài

Cho U là toán tử trên \mathbb{C}^2 với

$$U|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, U|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm biểu diễn của U trong cơ sở chính tắc $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$.

(b) Cho $|\phi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$, tìm $U|\phi\rangle$.

(c) U có unita không?

(d) U có Hermite không?

(e) Tìm U^\dagger, U^{-1} .

(f) Tìm $HUH|0\rangle, HUH|1\rangle$ và HUH (H là ma trận Hadamard).

(g) Tìm $UHU|0\rangle, UHU|1\rangle$ và UHU .

4.2 Lời giải

4.2.1 Phần (a)

Ta có:

$$[U]_{B_Z} = \begin{bmatrix} U|0\rangle & U|1\rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

\Rightarrow biểu diễn của U trong cơ sở chính tắc B_Z là $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$.

4.2.2 Phần (b)

Ta có:

$$U|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \alpha - i\beta \\ -i\alpha + \beta \end{bmatrix}$$

4.2.3 Phần (c)

Xét biểu thức:

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} UU^\dagger &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \end{aligned}$$

$\Rightarrow U^\dagger U = UU^\dagger = I \Rightarrow U$ unita.

4.2.4 Phần (d)

Ta có:

$$\begin{cases} U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \\ U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\Rightarrow U^\dagger \neq U \Rightarrow U$ không là Hermite.

4.2.5 Phần (e)

Ta có:

$$U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

vì U là ma trận unita, nên U khả nghịch và

$$U^{-1} = U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

4.2.6 Phần (f)

$$H \text{ là ma trận Hadamard} \Rightarrow H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow HUH &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 1-i \\ 1+i & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2-2i & 0 \\ 0 & 2+2i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} HUH|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i \\ 0 \end{bmatrix} \\ HUH|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1+i \end{bmatrix} \end{cases}$$

4.2.7 Phần (g)

Ta có:

$$\begin{aligned}
 UHU &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1-i & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2-2i & 0 \\ 0 & -2-2i \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & -1-i \end{bmatrix} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} UHU|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i \\ 0 \end{bmatrix} \\ UHU|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1-i \end{bmatrix} \end{cases}
 \end{aligned}$$

5 Bài 5

5.1 Đề bài

Chứng minh $XY = iZ$ bằng cách:

- (a) Nhân ma trận.
- (b) Xét tác động của các toán tử trên $|0\rangle, |1\rangle$.

5.2 Lời giải

5.2.1 Phần (a)

Ta có:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} XY = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \\ iZ = i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow XY = iZ = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \Rightarrow \text{dpcm.}$$

5.2.2 Phần (b)

Ta có:

$$X|0\rangle = |1\rangle, X|1\rangle = |0\rangle$$

$$Y|0\rangle = i|1\rangle, Y|1\rangle = -i|0\rangle$$

$$Z|0\rangle = |0\rangle, Z|1\rangle = -|1\rangle$$

Xét biểu thức sau:

$$XY|0\rangle = X(Y|0\rangle) = X(i|1\rangle) = iX|1\rangle = i|0\rangle = i(Z|0\rangle) \Leftrightarrow XY|0\rangle = iZ|0\rangle.$$

$$XY|1\rangle = X(Y|1\rangle) = X(-i|0\rangle) = -iX|0\rangle = -i|1\rangle = i(Z|1\rangle) \Leftrightarrow XY|1\rangle = iZ|1\rangle.$$

Vì $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ là tập cơ sở nên $XY = iZ \Rightarrow \text{dpcm.}$

6 Bài 6

6.1 Đề bài

Cho $|\phi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}+i}{4}|11\rangle$

(a) Cho thấy $|\phi\rangle$ là vector đơn vị.

(b) Tính $\text{proj}_{|+-\rangle} |\phi\rangle$ và chuẩn hoá $\text{proj}_{|+-\rangle} |\phi\rangle$.

(c) Tính toạ độ của $|\phi\rangle$ theo cơ sở Bell.

6.2 Lời giải

6.2.1 Phần (a)

Ta có:

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}+i}{4}|11\rangle \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}+i}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow |\phi\rangle &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}+i}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\phi\rangle\| = \sqrt{\left|\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right|^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = 1$$

$\Rightarrow |\phi\rangle$ là vector đơn vị.

6.2.2 Phần (b)

Ta có:

$$|+- \rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \langle +-| = \frac{1}{2} [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1].$$

$$\begin{aligned}
 \langle + - | \phi \rangle &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}+i}{4} \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}+i}{4} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4} + \frac{2\sqrt{2}-1}{4\sqrt{2}}i \right) \\
 &= \frac{1-\sqrt{3}}{8} + \frac{2\sqrt{2}-1}{8\sqrt{2}}i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \text{proj}_{|+-\rangle} |\phi\rangle &= \frac{\langle + - | \phi \rangle}{\| |+-\rangle \|^2} |+-\rangle \\
 &= \left(\frac{1-\sqrt{3}}{8} + \frac{2\sqrt{2}-1}{8\sqrt{2}}i \right) |+-\rangle
 \end{aligned}$$

Chuẩn hoá $\text{proj}_{|+-\rangle} |\phi\rangle$, ta được:

$$e = \frac{\text{proj}_{|+-\rangle} |\phi\rangle}{\| \text{proj}_{|+-\rangle} |\phi\rangle \|} = \frac{(1-\sqrt{3}) + \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}i}{\sqrt{(1-\sqrt{3})^2 + \frac{(2\sqrt{2}-1)^2}{2}}} |+-\rangle$$

6.2.3 Phần (c)

Cơ sở Bell là:

$$B = \left\{ |\Phi^+\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, |\Phi^-\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, |\Psi^+\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, |\Psi^-\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} [|\phi\rangle]_B &= (\langle\Phi^+|\phi\rangle, \langle\Phi^-|\phi\rangle, \langle\Psi^+|\phi\rangle, \langle\Psi^-|\phi\rangle) \\ &= (|\Phi^+\rangle^\dagger|\phi\rangle, |\Phi^-\rangle^\dagger|\phi\rangle, |\Psi^+\rangle^\dagger|\phi\rangle, |\Psi^-\rangle^\dagger|\phi\rangle) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}+3i}{4\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}+i}{4\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{toạ độ của } |\phi\rangle \text{ trong cơ sở Bell là } \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+3i}{4\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}+i}{4\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

7 Bài 7

7.1 Đề bài

Kiểm tra các vector sau có phân tách được

- (a) $|\phi_1\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle).$
- (b) $|\phi_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}|00\rangle - \sqrt{3}|01\rangle + |10\rangle - |11\rangle).$
- (c) $|\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + i|11\rangle).$
- (d) $|\phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1-\rangle.$

7.2 Lời giải

7.2.1 Phần (a)

Ta có:

$$\begin{aligned}
 |\phi_1\rangle &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow |\phi_1\rangle &= |+\rangle \otimes |-\rangle
 \end{aligned}$$

Vậy vector $|\phi_1\rangle$ phân tách được.

7.2.2 Phần (b)

Ta có:

$$\begin{aligned}
 |\phi_2\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow |\phi_2\rangle &= \left(\frac{\sqrt{3}|0\rangle + |1\rangle}{2} \right) \otimes |-\rangle
 \end{aligned}$$

Vậy vector $|\phi_2\rangle$ phân tách được.

7.2.3 Phần (c)

Ta có:

$$\begin{aligned} |\phi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow |\phi_3\rangle &= |1\rangle \otimes |i\rangle \end{aligned}$$

Vậy vector $|\phi_3\rangle$ phân tách được.

7.2.4 Phần (d)

Giả sử $|\phi_4\rangle$ tách được, ta có:

$$|\tau\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, |\psi\rangle = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

sao cho

$$\begin{aligned} |\phi_4\rangle = |\tau\rangle|\psi\rangle &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ac = ad = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ bc = -bd = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad (a, b, c, d \neq 0) \\ \Rightarrow \begin{cases} c = d = \frac{1}{a\sqrt{6}} \\ c = -d = \frac{1}{b\sqrt{3}} \end{cases} &\Rightarrow (c = d) \vee (c = -d) \Leftrightarrow d = -d = 0 \end{aligned}$$

Vô lý vì $a, b, c, d \neq 0$, suy ra $|\phi_4\rangle$ không tách được.

8 Bài 8

8.1 Đề bài

Cho $|\phi\rangle = \frac{1}{4}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle$

(a) Tính $(H \otimes X)|\phi\rangle$.

(b) Tính CNOT $|\phi\rangle$.

8.2 Lời giải

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= \frac{1}{4}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow |\phi\rangle &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

8.2.1 Phần (a)

Ta có:

$$H \otimes X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (H \otimes X) |\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

8.2.2 Phần (b)

Ta có:

$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{CNOT} |\phi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$