Vector và ma trận phức

Nhập môn Tính toán Lượng tử
(Introduction to Quantum Computing)

Vũ Quốc Hoàng (vqhoang@fit.hcmus.edu.vn)

FIT - HCMUS

2025

Nội dung

1. Vector

2. Tổ hợp tuyến tính

3. Ma trận

4. Tích tensor

Nội dung

1. Vector
2. Tổ hợp tuyến tính
3. Ma trận
4. Tích tensor

Vector

Một bộ gồm $n \in \mathbb{N}^+$ số phức $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ được gọi là một **vector (phức)** (complex vector) **cỡ** (size) n. Tập tất cả các vector cỡ n được kí hiệu là $\mathbb{C}^n$, tức là

$$\mathbb{C}^n = \{(v_1, v_2, ..., v_n) : v_1, v_2, ..., v_n \in \mathbb{C}\}.$$

Đặc biệt, vector $0 = 0_n = (0, 0, ..., 0) \in \mathbb{C}^n$ gồm toàn các số 0 được gọi là **vector không** (zero vector).
Vector $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ có thể được mô tả như là một cột hoặc một dòng số

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix},$$

được gọi tương ứng là **vector cột** (column vector), **vector dòng** (row vector).

Các phép toán

Cho $v = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{C}^n$

- vector $\bar{v} = (\overline{v_1}, \overline{v_2}, ..., \overline{v_n})$ được gọi là **liên hợp** (conjugate) của v,
- v^T là vector dòng nếu v là vector cột hoặc v^T là vector cột nếu v là vector dòng, được gọi là **chuyển vị** (tranpose) của v,
- $v^\dagger = \bar{v}^T$ được gọi là **chuyển vị liên hợp** (dagger, conjugate transpose) của v.

Cho $u = (u_1, u_2, ..., u_n), v = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{C}^n$ và $\alpha \in \mathbb{C}$

- $u = v$ nếu $u_1 = v_1, u_2 = v_2, ..., u_n = v_n$,
- **đối** (opposite) của v là vector $-v = (-v_1, -v_2, ..., -v_n) \in \mathbb{C}^n$,
- **tổng** (sum) của u với v là vector

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n) \in \mathbb{C}^n,$$

- **bội vô hướng** (scalar multiple) của α với v là vector

$$\alpha v = (\alpha v_1, \alpha v_2, ..., \alpha v_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Tính chất

Cho $u, v, w \in \mathbb{C}^n$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, các phép toán trên $\mathbb{C}^n$ thỏa

- $u + v = v + u$,
- $(u + v) + w = u + (v + w)$,
- $v + 0 = v$,
- $v + (-v) = 0$,
- $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$,
- $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$,
- $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$,
- $1v = v$.

$\mathbb{C}^n$ cùng với các phép toán trên tạo thành một **không gian vector phức** (complex vector sapce) n **chiều** (dimension).

Chuẩn

Cho $v = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{C}^n$, **chuẩn** (norm, length, magnitude) của v là số thực

$$||v|| = \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2 + ... + |v_n|^2}.$$

Nhận xét, cho $v \in \mathbb{C}^n$ và $\alpha \in \mathbb{C}$

- $||v|| \geq 0, ||v|| = 0$ khi và chỉ khi $v = 0$,
- $||\alpha v|| = |\alpha|||v||$.

Nếu $||v|| = 1$ thì v được gọi là **vector đơn vị** (unit vector).
Nhận xét, cho $v \in \mathbb{C}^n, v \neq 0$

$$u = \frac{1}{||v||} v$$

là vector bội của v với $||u|| = \frac{||v||}{||v||} = 1$ nên là vector đơn vị. Vector u còn được gọi là **chuẩn hóa** (normalization) của v.

Tích vô hướng

Cho $u = (u_1, u_2, ..., u_n), v = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{C}^n$, **tích vô hướng** (inner product) của u với v là số phức

$$\langle u, v\rangle = \overline{u_1}v_1 + \overline{u_2}v_2 + ... + \overline{u_n}v_n.$$

Nếu u, v là các vector cột thì tích vô hướng còn được viết bằng phép nhân ma trận là

$$u^\dagger v = \begin{bmatrix}\overline{u_1} & \overline{u_2} & \dots & \overline{u_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\overline{u_i}v_i = \langle u, v\rangle.$$

Không gian vector $\mathbb{C}^n$ cùng với tích vô hướng trên tạo thành một **không gian Hilbert hữu hạn chiều** (finite-dimensional Hilbert space).

Tích vô hướng (tt)

Cho $u, v, w \in \mathbb{C}^n$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, tích vô hướng trên $\mathbb{C}^n$ thỏa

- $\langle v, v \rangle = ||v||^2$,
- $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$,
- $\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, w \rangle$,
- $\langle \alpha v + \beta w, u \rangle = \bar{\alpha} \langle v, u \rangle + \bar{\beta} \langle w, u \rangle$.
- **Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz** (Cauchy-Schwarz inequality)

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle.$$

Từ bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, **góc** (angle) giữa 2 vector $u, v \in \mathbb{C}^n, u, v \neq 0$ được định nghĩa là số thực $\theta \in [0, \pi]$ thỏa

$$\cos \theta = \frac{|\langle u, v \rangle|}{||u|| ||v||}.$$

Trực giao và chiếu trực giao

Cho $u, v \in \mathbb{C}^n, u \neq 0$

- **chiếu (trực giao)** (orthogonal projection) của v lên u là vector

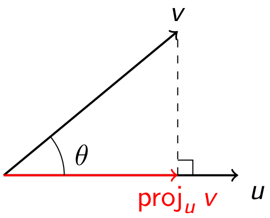
$$\mathrm{proj}_u\, v = \frac{\langle u, v\rangle}{||u||^2} u.$$

  Hơn nữa, nếu $||u|| = 1$ (u là vector đơn vị) thì

$$\mathrm{proj}_u\, v = \langle u, v\rangle u.$$

- u, v **trực giao** (orthogonal, perpendicular) nếu

$$\mathrm{proj}_u\, v = 0 \Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0.$$



Kí pháp Dirac

Cho $u = (u_1, ..., u_n), v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{C}^n$, theo **kí pháp Dirac** (Dirac notation)

- các vector cột của u, v được kí hiệu là $|u\rangle, |v\rangle$ và được gọi là các **ket**

$$|u\rangle = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, |v\rangle = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix},$$

- $\langle u| = |u\rangle^\dagger, \langle v| = |v\rangle^\dagger$ được gọi là các **bra**

$$\langle u| = \begin{bmatrix} \overline{u_1} & \dots & \overline{u_n} \end{bmatrix}, \langle v| = \begin{bmatrix} \overline{v_1} & \dots & \overline{v_n} \end{bmatrix},$$

- tích vô hướng của u với v được kí hiệu là $\langle u|v\rangle$ và được gọi là **bra-ket** hay **bracket**

$$\langle u|v\rangle = \langle u, v\rangle = |u\rangle^\dagger |v\rangle = \langle u||v\rangle.$$

Kí pháp Dirac (tt)

Ví dụ 1

Trong $\mathbb{C}^2$, các ket sau hay được dùng trong tính toán lượng tử

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$|+\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},\ |-\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

$$|i\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},\ |\text{-}i\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Các ket này đều là các vector đơn vị, chẳng hạn

$$\||i\rangle\| = \sqrt{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1.$$

Kí pháp Dirac (tt)

Ví dụ 1 (tt)

Các cặp ket $\{|0\rangle, |1\rangle\}; \{|+\rangle, |-\rangle\}; \{|i\rangle, |\text{-}i\rangle\}$ cũng trực giao nhau, chẳng hạn

$$\langle i|\text{-}i\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{-i}{\sqrt{2}}\frac{-i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Chiếu của $|i\rangle$ lên $|+\rangle$ là

$$\text{proj}_{|+\rangle} |i\rangle = \langle +|i\rangle |+\rangle = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1+i}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Góc giữa $|i\rangle$ và $|+\rangle$ là $\arccos\left(\frac{|\langle i|+\rangle|}{\||i\rangle\| \, \||+\rangle\|}\right) = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}(45^\circ)$.

Nội dung

1. Vector

2. Tổ hợp tuyến tính

3. Ma trận

4. Tích tensor

Tổ hợp tuyến tính

Cho $v_1, v_2, ..., v_k \in \mathbb{C}^n$ và $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{C}$, vector

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k$$

được gọi là một **tổ hợp tuyến tính** (linear combination) của $v_1, v_2, ..., v_k$ với các **hệ số** (coefficient) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$.

Tập các vector $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ được gọi là **độc lập tuyến tính** (linearly independent) nếu không có vector nào trong S là một tổ hợp tuyến tính của các vector còn lại.
Mệnh đề. $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ độc lập tuyến tính nếu

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k = 0$$

chỉ thỏa khi $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, ..., \alpha_k = 0$.

Cơ sở và cơ sở trực chuẩn

Tập các vector $S = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ được gọi là **trực giao** (orthogonal) nếu

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0, \forall i \neq j = 1, 2, ..., k.$$

Hơn nữa, nếu

$$||v_i|| = 1, \forall i = 1, 2, ..., k$$

thì S được gọi là **trực chuẩn** (orthonormal).
Mệnh đề. S trực giao thì S độc lập tuyến tính.

Một tập $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ gồm n vector độc lập tuyến tính trong $\mathbb{C}^n$ được gọi là một **cơ sở** (basis) của $\mathbb{C}^n$.
Một tập $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ gồm n vector trực chuẩn trong $\mathbb{C}^n$ được gọi là một **cơ sở trực chuẩn** (orthonormal basis) của $\mathbb{C}^n$.

Cơ sở chuẩn tắc

Trong $\mathbb{C}^n$, đặt e_i ($i = 1, ..., n$) là vector gồm toàn các số 0 ngoại trừ phần tử thứ i là 1, tức là $e_i = (v_1, ..., v_n)$ với

$$v_j = \delta_{ji} = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases} \; (j = 1, ..., n)$$

thì

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \; (i, j = 1, ..., n)$$

nên $\{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{C}^n$ gọi là **cơ sở chuẩn tắc** (standard basis, canonical basis).

Tọa độ

Mệnh đề. Nếu $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{C}^n$ thì với mọi $v \in \mathbb{C}^n$ tồn tại duy nhất một bộ n số $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ sao cho

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n.$$

Bộ $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ được gọi là tọa độ của v theo B, kí hiệu $[v]_B$.

Mệnh đề. Nếu $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{C}^n$ thì với mọi $v \in \mathbb{C}^n$

$$v = \langle v_1, v \rangle v_1 + \langle v_2, v \rangle v_2 + ... + \langle v_n, v \rangle v_n,$$

tức là

$$[v]_B = (\langle v_1, v \rangle, \langle v_2, v \rangle, ..., \langle v_n, v \rangle).$$

Cơ sở và cơ sở trực chuẩn (tt)

Ví dụ 2 (tiếp Ví dụ 1)

Các tập $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}, B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}, B_Y = \{|i\rangle, |\text{-}i\rangle\}$ là các cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{C}^2$. B_Z là cơ sở chuẩn tắc.

Ket $|\phi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ có thể được viết là

$$|\phi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \Rightarrow [|\phi\rangle]_{B_Z} = (\alpha, \beta).$$

Để tìm tọa độ của $|\phi\rangle$ trong B_X, ta có

$$\begin{cases} |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \\ |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \\ |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) \end{cases}.$$

Cơ sở và cơ sở trực chuẩn (tt)

Ví dụ 2 (tt)

Do đó

$$\begin{aligned}|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)\\ &= \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}|-\rangle\\ &\Rightarrow [|\phi\rangle]_{B_X} = \left(\frac{\alpha+\beta}{\sqrt{2}}, \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

Nhanh hơn, vì B_X là cơ sở trực chuẩn nên ta có thể dùng công thức $[|\phi\rangle]_{B_X} = (\langle +|\phi\rangle, \langle -|\phi\rangle)$. Chẳng hạn,

$$[|i\rangle]_{B_X} = (\langle +, i\rangle, \langle -, i\rangle) = \left(\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}\right).$$

Cơ sở và cơ sở trực chuẩn (tt)

Ví dụ 3

$$\left\{ |00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

là cơ sở chuẩn tắc của $\mathbb{C}^4$.

$$\left\{ |\Phi^+\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, |\Phi^-\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, |\Psi^+\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, |\Psi^-\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{C}^4$, được gọi là **cơ sở Bell** (Bell basis).

Cơ sở và cơ sở trực chuẩn (tt)

Ví dụ 3 (tt)

Ket $|\Phi^+\rangle$ được viết theo cơ sở chuẩn tắc

$$|\Phi^+\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle.$$

Ket $|00\rangle$ được viết theo cơ sở Bell

$$\begin{aligned} |00\rangle &= \langle\Phi^+|00\rangle|\Phi^+\rangle + \langle\Phi^-|00\rangle|\Phi^-\rangle + \langle\Psi^+|00\rangle|\Psi^+\rangle + \langle\Psi^-|00\rangle|\Psi^-\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\Phi^+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\Phi^-\rangle. \end{aligned}$$

Nội dung

1. Vector

2. Tổ hợp tuyến tính

3. Ma trận

4. Tích tensor

Ma trận

Một bảng gồm m dòng, n cột các số phức

$$A = (a_{ij}) = (a_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

được gọi là một **ma trận (phức)** (complex matrix) **cỡ** (size) $m \times n$. Tập tất cả các ma trận cỡ $m \times n$ được kí hiệu là $\mathbb{C}^{m \times n}$. Nếu $m = n$, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ được gọi là **ma trận vuông** (square matrix) **cấp** (order) n.

Đặc biệt, ma trận $0 = 0_{m \times n} = (0_{ij})_{m \times n}$ gồm toàn các số 0 được gọi là **ma trận không** (zero matrix).

Vector $v \in \mathbb{C}^n$ khi viết như là vector cột hay vector dòng được xem tương ứng là ma trận gồm 1 cột (cỡ $n \times 1$) hay 1 dòng (cỡ $1 \times n$).

Các phép toán

Cho $A = (a_{ij})_{m \times n}$

- $\bar{A} = (\overline{a_{ij}})_{m \times n}$ là **liên hợp** (conjugate) của A.
- $A^T = (a_{ji})_{n \times m}$ là **chuyển vị** (tranpose) của A.
- $A^\dagger = \left(\bar{A}\right)^T$ là **chuyển vị liên hợp** (dagger, conjugate transpose, adjoint) của A.

Cho $A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{m \times n}$ và $\alpha \in \mathbb{C}$

- $A = B$ nếu $a_{ij} = b_{ij}, \forall i = 1, ..., m, \forall j = 1, ..., n,$
- **đối** (opposite) của A là ma trận $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$,
- **tổng** (sum) của A với B là ma trận $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$,
- **bội vô hướng** (scalar multiple) của α với A là ma trận $\alpha A = (\alpha a_{ij})_{m \times n}$.

Các phép toán này có các tính chất tương tự như các phép toán tương ứng trên $\mathbb{C}^n$, chẳng hạn $A + 0_{m \times n} = A, \forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

Phép nhân ma trận

Cho $A = (a_{ij})_{m\times p}, B = (b_{ij})_{p\times n}$, **tích** (product) của A với B là ma trận $C = AB = (c_{ij})_{m\times n}$ với

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Ma trận vuông $I = I_n = (\delta_{ij})_{n\times n}$ với

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \ (i, j = 1, ..., n)$$

được gọi là **ma trận đơn vị** (identity matrix) cấp n.
Cho $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ và $n \in \mathbb{N}$, **lũy thừa** bậc n của A là

$$A^n = \underbrace{AA\ldots A}_{n \text{ lần}} \quad (A^0 = I, A^1 = A).$$

Phép nhân ma trận (tt)

Cho A, B, C là các ma trận có cỡ phù hợp và $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, phép nhân ma trận có các tính chất

- $AI = IA = A$,
- $(AB)C = A(BC)$,
- $A(B + C) = AB + AC$,
- $(B + C)A = BA + CA$,
- $\alpha(\beta C) = (\alpha\beta)C$,
- $\alpha(BC) = (\alpha B)C = B(\alpha C)$,
- $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$,
- $(AB)^T = B^T A^T$,
- $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.

Phép nhân ma trận không có tính giao hoán!

Phép nhân ma trận (tt)

Lưu ý, trong kí pháp Dirac, cho $v \in \mathbb{C}^n$, ket $|v\rangle$ là vector cột, được xem như là ma trận gồm 1 cột, $|v\rangle \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ và bra $\langle v| = |v\rangle^\dagger \in \mathbb{C}^{1\times n}$ được xem như là ma trận gồm 1 dòng.

Do đó, cho $\alpha \in \mathbb{C}$; $u, v \in \mathbb{C}^n$; $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, các phép toán sau đều là các phép nhân ma trận

- nhân vô hướng: $|w\rangle = \alpha|v\rangle$ được $|w\rangle \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, xem như $\alpha \in \mathbb{C}^{1\times 1}$.
- tích vô hướng: $\beta = \langle u||v\rangle = \langle u|v\rangle$ được $\beta \in \mathbb{C}^{1\times 1}$ xem như $\beta \in \mathbb{C}$.
- nhân ma trận với ket: $|w\rangle = A|v\rangle$ được $|w\rangle \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, nếu $A = \begin{bmatrix} |a_1\rangle & |a_2\rangle & \dots & |a_n\rangle \end{bmatrix}$ và $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ thì

$$|w\rangle = A|v\rangle = v_1|a_1\rangle + v_2|a_2\rangle + ... + v_n|a_n\rangle.$$

- **tích ngoài** (outer product): $P = |u\rangle\langle v|$ được $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$, mà với $|w\rangle \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ $P|w\rangle = |u\rangle\langle v||w\rangle = |u\rangle\langle v|w\rangle = \langle v|w\rangle|u\rangle$.

Tích ngoài

Nếu $||u|| = 1$ thì tích ngoài $|u\rangle\langle u|$ được gọi là **ma trận chiếu** (projection matrix) vì $|u\rangle\langle u||w\rangle = \langle u|w\rangle|u\rangle = \text{proj}_u\, w$.

Mệnh đề. Cho $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ và $\{e_1, ..., e_n\}$ là cơ sở chuẩn tắc của $\mathbb{C}^n$ thì

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|e_i\rangle\langle e_j|.$$

Đặc biệt, nếu A là **ma trận đường chéo** (diagonal matrix), là ma trận có các phần tử bên ngoài đường chéo chính là 0, thì

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}|e_i\rangle\langle e_i|.$$

Chẳng hạn,

$$I = \sum_{i=1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i|.$$

Toán tử tuyến tính

Một ánh xạ $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ được gọi là một **toán tử (tuyến tính)** (linear operator) trên $\mathbb{C}^n$ nếu với mọi $u, v \in \mathbb{C}^n$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v).$$

Khi đó, giá trị của T tại v, $T(v)$, thường được viết gọn là Tv.
Kí hiệu 2 toán tử đặc biệt sau trên $\mathbb{C}^n$

- $I : v \longmapsto Iv = v$ là **toán tử đơn vị** (identity operator).
- $0 : v \longmapsto 0v = 0$ là **toán tử không** (zero operator).

Cho $S, T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, **hợp** (composition) của S với T được định nghĩa là ánh xạ $S \circ T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ thỏa

$$(S \circ T)(v) = S(T(v)).$$

Mệnh đề. Nếu S, T là các toán tử trên $\mathbb{C}^n$ thì $S \circ T$ cũng vậy. Khi đó, $S \circ T$ được viết gọn là ST.

Toán tử tuyến tính (tt)

Nhận xét, cho $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, do tính chất của các phép toán trên ma trận mà $T_A : v \longmapsto T_A(v) = Av$ là một toán tử trên $\mathbb{C}^n$.

Ngược lại, cho T là một toán tử trên $\mathbb{C}^n$ và $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là một cơ sở của $\mathbb{C}^n$, gọi $a_i = [Tv_i]_B$ $(i = 1, ..., n)$ là tọa độ của Tv_i theo cơ sở B, ma trận

$$A = \begin{bmatrix} |a_1\rangle & |a_2\rangle & \dots & |a_n\rangle \end{bmatrix}$$

được gọi là **ma trận biểu diễn** của T theo B, kí hiệu $A = [T]_B$. Đặc biệt, ma trận biểu diễn của toán tử đơn vị, toán tử không lần lượt là ma trận đơn vị, ma trận không ($[I]_B = I, [0]_B = 0$).

Mệnh đề. Cho S, T là các toán tử trên $\mathbb{C}^n$ và B là một cơ sở của $\mathbb{C}^n$

- $[Tv]_B = [T]_B[v]_B, \forall v \in \mathbb{C}^n$.
- $[ST]_B = [S]_B[T]_B$.

Ma trận (tt)

Ví dụ 4

Các ma trận sau hay được dùng trong $\mathbb{C}^2$, được gọi là các **ma trận Pauli** (Pauli matrix)

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Các ma trận này tương ứng với các toán tử tuyến tính hay dùng trên $\mathbb{C}^2$. Chẳng hạn, với cơ sở chính tắc $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$,

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |1\rangle & |0\rangle \end{bmatrix}$$

biểu diễn cho toán tử "lật bít (NOT)" vì $X|0\rangle = |1\rangle, X|1\rangle = |0\rangle$. Tương tự, Z là toán tử "lật pha" vì $Z|0\rangle = |0\rangle, Z|1\rangle = -|1\rangle$.

Ma trận (tt)

Ví dụ 4 (tt)

Toán tử X "biến đổi" $|\phi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ thành

$$X|\phi\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2.$$

Dùng tính chất tuyến tính ta cũng có

$$X|\phi\rangle = X(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha X|0\rangle + \beta X|1\rangle = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle.$$

Tương tự

$$Z|\phi\rangle = Z(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha Z|0\rangle + \beta Z|1\rangle = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle.$$

Ma trận (tt)

Ví dụ 4 (tt)

Dùng tích ngoài ta cũng có thể viết

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|.$$

"Tác động" của X lên $|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ có thể được viết là

$$X|\phi\rangle = (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$$
$$= \alpha|0\rangle \underbrace{\langle 1|0\rangle}_{0} + \beta|0\rangle \underbrace{\langle 1|1\rangle}_{1} + \alpha|1\rangle \underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1} + \beta|1\rangle \underbrace{\langle 0|1\rangle}_{0}$$
$$= \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle.$$

Ma trận (tt)

Ví dụ 5

Ma trận sau cũng hay được dùng trong $\mathbb{C}^2$, được gọi là **ma trận Hadamard** (Hadamard matrix)

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ta thấy $H = \begin{bmatrix} |+\rangle & |-\rangle \end{bmatrix}$ nên $H|0\rangle = |+\rangle, H|1\rangle = |-\rangle$. H còn được gọi là **ma trận chuyển cơ sở** (change-of-basis matrix), "chuyển" $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ sang $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$.

H hay được dùng vì giúp "biến" $|0\rangle$ thành "tổ hợp đều" của $|0\rangle, |1\rangle$

$$H|0\rangle = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle.$$

Ma trận (tt)

Ví dụ 5 (tt)

Đẳng thức ma trận

$$HXH = Z \quad (*)$$

nói rằng

$$HXH|\phi\rangle = H(X(H|\phi\rangle)) = Z|\phi\rangle, \forall|\phi\rangle \in \mathbb{C}^2$$

tức là từ $|\phi\rangle$ biến đổi bằng H rồi biến đổi tiếp bằng X rồi biến đổi tiếp bằng H thì được cùng kết quả như từ $|\phi\rangle$ biến đổi bằng Z.

$(*)$ có thể được chứng minh bằng cách nhân ma trận

$$\begin{aligned} HXH &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix} = Z. \end{aligned}$$

Ma trận (tt)

Ví dụ 5 (tt)

Nhận xét (kiểm tra!)

$$Z|0\rangle = |0\rangle, Z|1\rangle = -|1\rangle, \quad X|+\rangle = |+\rangle, X|-\rangle = -|-\rangle,$$

$$H|0\rangle = |+\rangle, H|1\rangle = |-\rangle, \quad H|+\rangle = |0\rangle, H|-\rangle = |1\rangle,$$

nên $(*)$ cũng có thể được chứng minh bằng cách xét tác động của các toán tử trên các vector cơ sở

$$\begin{tikzcd} |0\rangle \arrow[r, "H"] \arrow[rrr, bend right, "Z"'] & |+\rangle \arrow[r, "X"] & |+\rangle \arrow[r, "H"] & |0\rangle \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} |1\rangle \arrow[r, "H"] \arrow[rrr, bend right, "Z"'] & |-\rangle \arrow[r, "X"] & -|-\rangle \arrow[r, "H"] & -|1\rangle \end{tikzcd}$$

Ma trận (tt)

Ví dụ 6 (tiếp Ví dụ 3)

Trong $\mathbb{C}^4$, ma trận sau hay được dùng

$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vì $\text{CNOT} = \begin{bmatrix} |00\rangle & |01\rangle & |11\rangle & |10\rangle \end{bmatrix}$ nên ta có CNOT biến các ket $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ lần lượt thành $|00\rangle, |01\rangle, |11\rangle, |10\rangle$. Nói cách khác, CNOT giữ nguyên $|00\rangle, |01\rangle$ nhưng hoán đổi $|10\rangle, |11\rangle$.
Cho $|\phi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle \in \mathbb{C}^4$ thì

$$\begin{aligned} \text{CNOT}\,|\phi\rangle &= \text{CNOT}(\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle) \\ &= \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{11}|10\rangle + \alpha_{10}|11\rangle. \end{aligned}$$

Ma trận (tt)

Ví dụ 6 (tt)

Chẳng hạn

$$\mathsf{CNOT}\,|\Phi^+\rangle = \mathsf{CNOT}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle.$$

Ta cũng có điều này bằng phép nhân ma trận

$$\begin{aligned}\mathsf{CNOT}\,|\Phi^+\rangle &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle.\end{aligned}$$

Trị riêng và vector riêng

Cho $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, nếu có $\lambda \in \mathbb{C}$ và $v \in \mathbb{C}^n, v \neq 0$ sao cho

$$Av = \lambda v$$

thì λ được gọi là một **trị riêng** (eigenvalue) của A và v là một **vector riêng** (eigenvector) tương ứng.
Ma trận $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ được gọi là **ma trận chuẩn tắc** (normal matrix) nếu A giao hoán với $A^\dagger$, tức là

$$A^\dagger A = AA^\dagger.$$

Mệnh đề. (Spectral decomposition) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ chuẩn tắc khi và chỉ khi A có các vector riêng $\{v_1, ..., v_n\}$ lập thành một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{C}^n$. Khi đó, đặt $U = \begin{bmatrix} |v_1\rangle & \dots & |v_n\rangle \end{bmatrix}$ và $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ là ma trận đường chéo gồm các trị riêng $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tương ứng trên đường chéo chính thì

$$A = UDU^\dagger = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i|.$$

Trị riêng và vector riêng (tt)

Ví dụ 7 (tiếp Ví dụ 4, 5)

Trong $\mathbb{C}^2$, ta có

$$\begin{aligned} X|+\rangle &= X\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}X|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}X|1\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle = |+\rangle, \\ X|-\rangle &= X\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}X|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}X|1\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle = -|-\rangle. \end{aligned}$$

Do đó, $|+\rangle, |-\rangle$ là các vector riêng của X với các trị riêng tương ứng là $1, -1$.

Trị riêng và vector riêng (tt)

Ví dụ 7 (tt)

Hơn nữa $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ lập thành một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{C}^2$ nên nếu đặt

$$H = \begin{bmatrix} |+\rangle & |-\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

thì

$$X = HDH^\dagger = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|.$$

Lưu ý, H chính là ma trận Hadamard.

Vì $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ là một cơ sở trực chuẩn gồm các vector riêng của X nên B_X còn được gọi là **cơ sở X** (X-basis).
Tương tự, $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}, B_Y = \{|i\rangle, |\text{-}i\rangle\}$ lần lượt được gọi là **cơ sở Z** (Z-basis), **cơ sở Y** (Y-basis).

Ma trận khả nghịch

Ma trận $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ được gọi là **khả nghịch** (invertible) nếu có (duy nhất) $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sao cho $AB = BA = I_n$. Khi đó, B được gọi là **nghịch đảo** của A, kí hiệu $B = A^{-1}$.

Nhận xét, cho $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$

- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$,
- $(A^\dagger)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\dagger$,
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Nếu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ thì A^{-1} biểu diễn cho **toán tử ngược** (inverse operator) của toán tử mà A biểu diễn vì

$$A^{-1}(A|v\rangle) = (A^{-1}A)|v\rangle = I|v\rangle = |v\rangle, \forall |v\rangle \in \mathbb{C}^n,$$

nói cách khác, A^{-1} "undo" A.

Ma trận unita

Ma trận $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ được gọi là **ma trận unita** (unitary matrix) nếu U khả nghịch và $U^{-1} = U^\dagger$, tức là

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I.$$

Mệnh đề. Cho $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, các khẳng định sau là tương đương

1. U là ma trận unita,
2. Các cột của U tạo thành cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{C}^n$ ($U^\dagger U = I$),
3. U bảo toàn tích vô hướng, tức là $\langle Uv, Uw\rangle = \langle v, w\rangle, \forall vw \in \mathbb{C}^n$,
4. U **bảo toàn chuẩn**, tức là $||Uv|| = ||v||, \forall v \in \mathbb{C}^n$,
5. U chuẩn tắc với các trị riêng có độ lớn là 1.

Mệnh đề. Cho $U, V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ là các ma trận unita

- $U^{-1} = U^\dagger$ là ma trận unita,
- UV là ma trận unita,
- αU là ma trận unita nếu $|\alpha| = 1$,

Ma trận Hermite

Ma trận $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ được gọi là **ma trận Hermite** (Hermitian matrix) nếu

$$A = A^\dagger.$$

Mệnh đề. Cho $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, các khẳng định sau là tương đương

1. $A = A^\dagger$,
2. $\langle u, Av\rangle = \langle Au, v\rangle, \forall uv \in \mathbb{C}^n$,
3. $\langle v, Av\rangle \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{C}^n$,
4. A chuẩn tắc với các trị riêng là các số thực.

Mệnh đề. Cho $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ là các ma trận Hermite

- $A + B$ là ma trận Hermite,
- αA là ma trận Hermite nếu $\alpha \in \mathbb{R}$,
- AB là ma trận Hermite khi và chỉ khi $AB = BA$,
- ABA là ma trận Hermite.

Ma trận (tt)

Ví dụ 8 (tiếp Ví dụ 4, 5)

Các ma trận Pauli I, X, Y, Z và ma trận Hadamard H đều là các ma trận unita và Hermite, chẳng hạn

$$Y^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = Y,$$
$$Y^\dagger Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Do đó nghịch đảo của các ma trận này đều là chính nó, chẳng hạn

$$Y^{-1} = Y^\dagger = Y.$$

Từ đó, vì $H|0\rangle = |+\rangle, H|1\rangle = |-\rangle$ nên $H|+\rangle = |0\rangle, H|-\rangle = |1\rangle$ do $H^{-1} = H$.

Nội dung

1. Vector
2. Tổ hợp tuyến tính
3. Ma trận
4. **Tích tensor**

Tích tensor

Cho $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}, B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{p\times q}$, **tích Kronecker** (Kronecker product) hay **tích tensor** (tensor product) của A với B là

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{mp\times nq}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \dots & a_{11}b_{1q} & \dots & a_{1n}b_{11} & \dots & a_{1n}b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & \dots & a_{11}b_{pq} & \dots & a_{1n}b_{p1} & \dots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & \dots & a_{m1}b_{1q} & \dots & a_{mn}b_{11} & \dots & a_{mn}b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & \dots & a_{m1}b_{pq} & \dots & a_{mn}b_{p1} & \dots & a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}.$$

Tích tensor (tt)

Cho A, B, C là các ma trận phù hợp và $\alpha \in \mathbb{C}$, tích tensor thỏa

- $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$,
- $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$,
- $(B + C) \otimes A = B \otimes A + C \otimes A$,
- $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha(A \otimes B)$,
- **tích hỗn hợp** (mixed-product)

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD),$$

- $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$,
- $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$,
- $(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger$,

Tích tensor không có tính giao hoán!

Tích tensor (tt)

Nếu $|\phi\rangle \in \mathbb{C}^n, |\psi\rangle \in \mathbb{C}^m$ thì $|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle \in \mathbb{C}^{nm}$, kí pháp Dirac viết

$$|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle = |\phi\rangle|\psi\rangle = |\phi, \psi\rangle = |\phi\psi\rangle,$$

$$\langle\phi| \otimes \langle\psi| = (|\phi\rangle)^\dagger \otimes (|\psi\rangle)^\dagger = (|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle)^\dagger = (|\phi\psi\rangle)^\dagger = \langle\phi\psi|.$$

Khi đó, cho các ma trận A, B và các ket $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle, |d\rangle$ phù hợp, dùng tính tích hỗn hợp của tích tensor ta có

$$\begin{aligned}
A|a\rangle B|b\rangle &= (A|a\rangle) \otimes (B|b\rangle) = (A \otimes B)(|a\rangle \otimes |b\rangle) \\
&= (A \otimes B)|ab\rangle, \\
\langle ab|cd\rangle &= \langle ab||cd\rangle = (\langle a| \otimes \langle b|)(|c\rangle \otimes |d\rangle) = (\langle a||c\rangle) \otimes (\langle b||d\rangle) \\
&= \langle a|c\rangle \otimes \langle b|d\rangle = \langle a|c\rangle\langle b|d\rangle. \ (\langle a|c\rangle, \langle b|d\rangle \text{ là các số.})
\end{aligned}$$

Cho $n, m \in \mathbb{N}, n, m > 1$, $|\chi\rangle \in \mathbb{C}^{nm}$ được gọi là **tách được** (separable) nếu có $|\phi\rangle \in \mathbb{C}^n, |\psi\rangle \in \mathbb{C}^m$ sao cho $|\chi\rangle = |\phi\rangle|\psi\rangle$. Ngược lại, $|\chi\rangle$ không tách được hay **rối** (entangled).

Tích tensor (tt)

Ví dụ 9 (tiếp Ví dụ 3, 6)

Trong $\mathbb{C}^4$, ta có

$$|00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = |0\rangle \otimes |0\rangle = |0\rangle|0\rangle.$$

Tương tự, $|01\rangle = |0\rangle|1\rangle, |10\rangle = |1\rangle|0\rangle, |11\rangle = |1\rangle|1\rangle$.
Ta cũng có

$$X|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |1\rangle,$$

$$Y|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = i|1\rangle,$$

Tích tensor (tt)

Ví dụ 9 (tt)

$$X \otimes Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(X \otimes Y)|00\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = i|11\rangle,$$

$$(X \otimes Y)|00\rangle = (X|0\rangle)(Y|0\rangle) = |1\rangle(i|1\rangle) = i|1\rangle|1\rangle = i|11\rangle.$$

Kí pháp Dirac rất gọn! Ví dụ khác

$$(X \otimes I)| + i\rangle = (X|+\rangle)(I|i\rangle) = |+\rangle|i\rangle.$$

Tích tensor (tt)

Ví dụ 9 (tt)

Vì $|00\rangle = |0\rangle|0\rangle$ nên $|00\rangle$ tách được. Tuy nhiên, các vector cơ sở Bell là không tách được. Chẳng hạn, nếu $|\Phi^+\rangle$ tách được thì có

$$|\phi\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, |\psi\rangle = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

sao cho

$$|\Phi^+\rangle = |\phi\rangle|\psi\rangle \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ad = 0 \\ bc = 0 \\ acbd = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vô lý!

Tích tensor (tt)

Ví dụ 10 (tiếp Ví dụ 6)

Trong $\mathbb{C}^4$, ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{CNOT}\,|+\rangle|0\rangle &= \mathrm{CNOT}\,\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)|0\rangle = \mathrm{CNOT}\,\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|10\rangle)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle) = |\Phi^+\rangle.\end{aligned}$$

Vì các cột của CNOT tạo thành một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{C}^4$ (chính là cơ sở chuẩn tắc $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$) nên CNOT unita. Hơn nữa, $\mathrm{CNOT}^\dagger = \mathrm{CNOT}$ nên CNOT cũng Hermite, do đó

$$\mathrm{CNOT}^{-1} = \mathrm{CNOT}^\dagger = \mathrm{CNOT}$$

nên ta cũng có $\mathrm{CNOT}\,|\Phi^+\rangle = |+\rangle|0\rangle$.

Tích tensor (tt)

Ví dụ 10 (tt)

Tương tự, ta có CNOT "chuyển qua lại" giữa các vector

$$
\begin{aligned}
|+0\rangle &\longleftrightarrow |\Phi^+\rangle, \\
|-0\rangle &\longleftrightarrow |\Phi^-\rangle, \\
|+1\rangle &\longleftrightarrow |\Psi^+\rangle, \\
|-1\rangle &\longleftrightarrow |\Psi^-\rangle.
\end{aligned}
$$

Ta cũng có

$$B_{XZ} = \{|+0\rangle, |-0\rangle, |+1\rangle, |-1\rangle\}$$

là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{C}^4$ (kiểm tra!) nên CNOT là ma trận chuyển cơ sở "giữa" cơ sở B_{XZ} và cơ sở Bell của $\mathbb{C}^4$.

Tài liệu tham khảo

Chapter 2. Noson S. Yanafsky, Mirco A. Mannucci. *Quantum Computing for Computer Scientists*. Cambridge University Press, 2008.

Chapter 3. Thomas G. Wong. *Introduction to Classical and Quantum Computing*. Rooted Grove, 2022.