

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TPHCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Exercise 2

Môn học: Nhập môn tính toán lượng tử

Sinh viên thực hiện:

Nguyễn Thiên Ân - 23122020

Giảng viên môn học:

ThS. Vũ Quốc Hoàng

Nguyễn Ngọc Toàn

Ngày 4 tháng 11 năm 2025



Mục lục

1	Bài 1	3
1.1	Đề bài	3
1.2	Lời giải	3
1.2.1	Phần a	3
1.2.2	Phần b	3
1.2.3	Phần c	4
2	Bài 2	4
2.1	Đề bài	4
2.2	Lời giải	5
3	Bài 3	6
3.1	Đề bài	6
3.2	Lời giải	6
3.2.1	Phần a	6
3.2.2	Phần b	6
3.2.3	Phần c	6
3.2.4	Phần d	6
4	Bài 4	6
4.1	Đề bài	6
4.2	Lời giải	7
5	Bài 5	7
5.1	Đề bài	7
5.2	Lời giải	7
6	Bài 6	7
6.1	Đề bài	7
6.2	Lời giải	7

7	Bài 7	7
7.1	Đề bài	7
7.2	Lời giải	8
8	Bài 8	8
8.1	Đề bài	8
8.2	Lời giải	8

1 Bài 1

1.1 Đề bài

Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$, $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, $B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau:

- $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$.
- $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle)$.
- $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

1.2 Lời giải

1.2.1 Phần a

Với cơ sở B_Z , ta có phép đo $|\psi_1\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- Được 0 với xác suất $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \frac{3}{4}$ và sụp đổ thành $|0\rangle$,
- Được 1 với xác suất $\left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}$ và sụp đổ thành $|1\rangle$.

Với cơ sở B_X , ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- Được + với xác suất $|\langle + | \psi_2 \rangle|^2 = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$ và sụp đổ thành $|+\rangle$,
- Được - với xác suất $|\langle - | \psi_2 \rangle|^2 = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$ và sụp đổ thành $|-\rangle$.

Với cơ sở B_Y , ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- Được i với xác suất $|\langle i | \psi_2 \rangle|^2 = \left|\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i\right|^2 = \frac{1}{2}$ và sụp đổ thành $|i\rangle$,
- Được $-i$ với xác suất $|\langle -i | \psi_2 \rangle|^2 = \left|\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i\right|^2 = \frac{1}{2}$ và sụp đổ thành $|-i\rangle$.

1.2.2 Phần b

Với cơ sở B_Z , ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- Được 0 với xác suất $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$ và sụp đổ thành $|0\rangle$,

Exercise 2

- được 1 với xác suất $\left| \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{6}} \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6}) \right|^2 = \frac{1}{2}$ và sụp đổ thành $|1\rangle$.

Với cơ sở B_X , ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được $+$ với xác suất $|\langle + | \psi_2 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} (1 + \sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6}) \right|^2 = \frac{3}{4}$ và sụp đổ thành $|+\rangle$,
- được $-$ với xác suất $|\langle - | \psi_2 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} (1 - \sin \frac{\pi}{6} - i \cos \frac{\pi}{6}) \right|^2 = \frac{1}{4}$ và sụp đổ thành $|-\rangle$.

Với cơ sở B_Y , ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được i với xác suất $|\langle i | \psi_2 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} (1 + \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}) \right|^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ và sụp đổ thành $|i\rangle$,
- được $-i$ với xác suất $|\langle -i | \psi_2 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} (1 - \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}) \right|^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ và sụp đổ thành $|-i\rangle$.

1.2.3 Phản c

Với cơ sở B_Z , ta có phép đo $|\psi_3\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được 0 với xác suất $\left| \frac{2}{3} \right|^2 = \frac{4}{9}$ và sụp đổ thành $|0\rangle$,
- được 1 với xác suất $\left| \frac{1-2i}{3} \right|^2 = \frac{5}{9}$ và sụp đổ thành $|1\rangle$.

Với cơ sở B_X , ta có phép đo $|\psi_3\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được $+$ với xác suất $|\langle + | \psi_3 \rangle|^2 = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}i \right|^2 = \frac{13}{18}$ và sụp đổ thành $|+\rangle$,
- được $-$ với xác suất $|\langle - | \psi_3 \rangle|^2 = \left| \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3}i \right|^2 = \frac{5}{18}$ và sụp đổ thành $|-\rangle$.

Với cơ sở B_Y , ta có phép đo $|\psi_3\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được i với xác suất $|\langle i | \psi_3 \rangle|^2 = \left| -\frac{\sqrt{2}}{6}i \right|^2 = \frac{1}{18}$ và sụp đổ thành $|i\rangle$,
- được $-i$ với xác suất $|\langle -i | \psi_3 \rangle|^2 = \left| \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}i \right|^2 = \frac{17}{18}$ và sụp đổ thành $|-i\rangle$.

2 Bài 2

2.1 Đề bài

Viết dạng Bloch và mô tả trên mặt cầu Bloch các trạng thái lượng tử ở Câu 1.

2.2 Lời giải

Ta có:

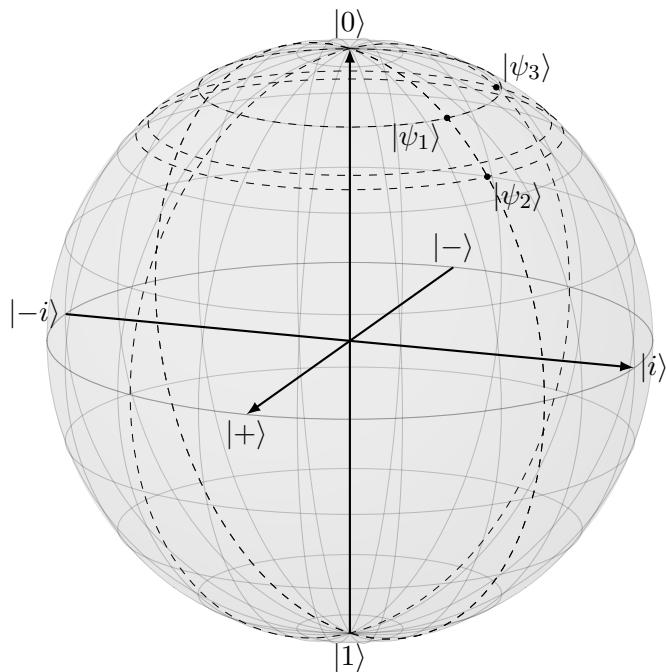
$$\begin{cases} |\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle \\ |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle \\ |\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}e^{0i}|1\rangle \\ |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle \\ |\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{\sqrt{5}}{3}e^{i\arctan(-2)}|1\rangle \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \frac{\pi}{3}, & \phi_1 = \frac{\pi}{6} \\ \theta_2 = \frac{\pi}{2}, & \phi_2 = \frac{\pi}{6} \\ \theta_3 = 2 \arccos \frac{2}{3}, & \phi_3 = \arctan(-2) \end{cases}$$

⇒ dạng Bloch của các trạng thái lượng tử $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle$ là:

$$\begin{cases} |\psi_1\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)|1\rangle \\ |\psi_2\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle \\ |\psi_3\rangle = \cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right)|0\rangle + e^{i\arctan(-2)}\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)|1\rangle \end{cases}$$

Mặt cầu Bloch:



3 Bài 3

3.1 Đề bài

Cho U là một toán tử tuyến tính trên \mathbb{C}^2 , biết:

$$U|0\rangle = \frac{\sqrt{2}-1}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle,$$

$$U|1\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle.$$

- (a) Chứng minh U là một cảng lượng tử.
- (b) Cho biết kết quả biến đổi U trên các trạng thái $|+\rangle, |-\rangle, |i\rangle, |-i\rangle$.
- (c) Cho biết kết quả biến đổi U trên các trạng thái của Câu 1.
- (d) U tương ứng với phép quay quanh trục nào với góc bao nhiêu trên mặt cầu Bloch?

3.2 Lời giải

3.2.1 Phần a

3.2.2 Phần b

3.2.3 Phần c

3.2.4 Phần d

4 Bài 4

4.1 Đề bài

Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$, $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, $B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau:

- $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$.
- $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle)$.
- $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

4.2 Lời giải

5 Bài 5

5.1 Đề bài

Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$, $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, $B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau:

- $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$.
- $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle)$.
- $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

5.2 Lời giải

6 Bài 6

6.1 Đề bài

Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$, $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, $B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau:

- $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$.
- $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle)$.
- $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

6.2 Lời giải

7 Bài 7

7.1 Đề bài

Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$, $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, $B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau:

- $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle.$
- $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle).$
- $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle.$

7.2 Lời giải

8 Bài 8

8.1 Đề bài

Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$, $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, $B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau:

- $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle.$
- $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle).$
- $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle.$

8.2 Lời giải