

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TPHCM  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN  
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

---

## Exercise 1

---

Môn học: Nhập môn tính toán lượng tử

Sinh viên thực hiện:

Nguyễn Thiên Ân - 23122020

Giảng viên môn học:

ThS. Vũ Quốc Hoàng

Nguyễn Ngọc Toàn

Ngày 21 tháng 10 năm 2025



## Mục lục

<b>1 Bài 1</b>	<b>3</b>
1.1 Đề bài . . . . .	3
1.2 Lời giải . . . . .	3
1.2.1 Phần (a) . . . . .	3
1.2.2 Phần (b) . . . . .	4
1.2.3 Phần (c) . . . . .	4
1.2.4 Phần (d) . . . . .	5
1.2.5 Phần (e) . . . . .	5
1.2.6 Phần (f) . . . . .	5
1.2.7 Phần (g) . . . . .	6
<b>2 Bài 2</b>	<b>6</b>
2.1 Đề bài . . . . .	6
2.2 Lời giải . . . . .	6
2.2.1 Phần (a) . . . . .	6
2.2.2 Phần (b) . . . . .	7
2.2.3 Phần (c) . . . . .	7
2.2.4 Phần (d) . . . . .	7
<b>3 Bài 3</b>	<b>8</b>
3.1 Đề bài . . . . .	8
3.2 Lời giải . . . . .	9
3.2.1 Phần (a) . . . . .	9
3.2.2 Phần (b) . . . . .	9
3.2.3 Phần (c) . . . . .	9
3.2.4 Phần (d) . . . . .	10
3.2.5 Phần (e) . . . . .	10
3.2.6 Phần (f) . . . . .	10
3.2.7 Phần (g) . . . . .	10
3.2.8 Phần (h) . . . . .	11

3.2.9	Phần (i) . . . . .	11
3.2.10	Phần (j) . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Bài 4</b>	<b>13</b>
4.1	Đề bài . . . . .	13
4.2	Lời giải . . . . .	13
4.2.1	Phần (a) . . . . .	13
4.2.2	Phần (b) . . . . .	14
4.2.3	Phần (c) . . . . .	14
4.2.4	Phần (d) . . . . .	15
4.2.5	Phần (e) . . . . .	15
4.2.6	Phần (f) . . . . .	16
4.2.7	Phần (g) . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Bài 5</b>	<b>17</b>
5.1	Đề bài . . . . .	17
5.2	Lời giải . . . . .	17
5.2.1	Phần (a) . . . . .	17
5.2.2	Phần (b) . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Bài 6</b>	<b>18</b>
6.1	Đề bài . . . . .	18
6.2	Lời giải . . . . .	19
6.2.1	Phần (a) . . . . .	19
6.2.2	Phần (b) . . . . .	19
6.2.3	Phần (c) . . . . .	20
<b>7</b>	<b>Bài 7</b>	<b>21</b>
7.1	Đề bài . . . . .	21
7.2	Lời giải . . . . .	22
7.2.1	Phần (a) . . . . .	22
7.2.2	Phần (b) . . . . .	22
7.2.3	Phần (c) . . . . .	23

7.2.4 Phàn (d) . . . . .	23
--------------------------	----

<b>8 Bài 8</b>	<b>24</b>
----------------	-----------

8.1 Đề bài . . . . .	24
----------------------	----

8.2 Lời giải . . . . .	24
------------------------	----

8.2.1 Phàn (a) . . . . .	24
--------------------------	----

8.2.2 Phàn (b) . . . . .	25
--------------------------	----

# 1 Bài 1

## 1.1 Đề bài

Cho  $x = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ,  $y = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

(a) Vẽ hình minh họa  $x, y$  trên mặt phẳng phức.

(b) Tìm dạng đại số và dạng cực của  $x, y$ .

(c) Tính  $\operatorname{Re}(x), \operatorname{Im}(y), |x|, \arg x$ .

(d) Tính  $\bar{x}, -x, x^{-1}$ .

(e) Tính  $x + y, x - y, xy, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}$ .

(f) Tính  $x^4$  và  $x^n, n \in \mathbb{Z}$ .

(g) Tính  $\sqrt[4]{x}$  và  $\sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}^+$ .

## 1.2 Lời giải

### 1.2.1 Phàn (a)

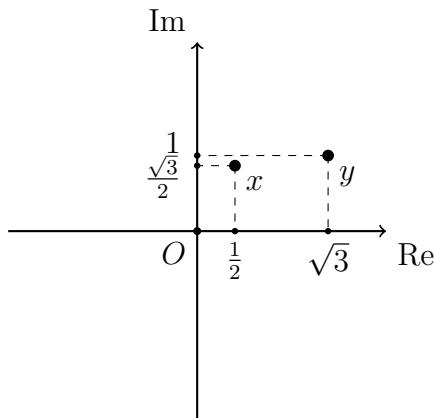
Ta có:

$$x = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i$$

Mặt phẳng phức:

## Exercise 1



## 1.2.2 Phân (b)

- Dạng cực:

$$x = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$y = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

- Dạng đại số:

$$x = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i$$

## 1.2.3 Phân (c)

Ta có:

$$x = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{Re}(x) = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Im}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|x| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\arg x = \arctan \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

**1.2.4 Phân (d)**

Ta có:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \overline{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -x &= -\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{\bar{x}}{x\bar{x}} = \frac{\bar{x}}{|x|^2} = \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{(1)^2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**1.2.5 Phân (e)**

Ta có:

$$\begin{aligned}x+y &= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (\sqrt{3} + i) = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\right) \\ x-y &= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (\sqrt{3} + i) = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right) \\ xy &= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3} + i) = \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}\right) = 0 + i(2) = 2i\end{aligned}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{x\bar{y}}{|y|^2} = \frac{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3} - i)}{\left(\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}\right)}{(\sqrt{4})^2} = \frac{\sqrt{3} + i(1)}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$$

$$\frac{y}{x} = \left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i\right)^{-1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i}{\left|\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i\right|^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i}{\frac{1}{4}} = \sqrt{3} - i$$

**1.2.6 Phân (f)**

Ta có:

$$x = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow x^4 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

## Exercise 1

Tương tự, với  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$x^n = (e^{i\frac{\pi}{3}})^n = e^{i\frac{n\pi}{3}} = \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}$$

### 1.2.7 Phản (g)

Ta có:

$$\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}} = (e^{i\frac{\pi}{3}+k2\pi})^{\frac{1}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}+\frac{k}{2}\pi} = \cos \left( \frac{\pi}{12} + \frac{k}{2}\pi \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{12} + \frac{k}{2}\pi \right)$$

Tương tự, với  $n \in \mathbb{N}^+$ :

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = (e^{i\frac{\pi}{3}+k2\pi})^{\frac{1}{n}} = e^{i\frac{\pi}{3n}+\frac{k}{n}2\pi} = \cos \left( \frac{\pi}{3n} + \frac{k}{n}2\pi \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{3n} + \frac{k}{n}2\pi \right)$$

## 2 Bài 2

### 2.1 Đề bài

Cho  $x, y \in \mathbb{C}$ , chứng minh:

(a)  $x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$ .

(b)  $\overline{x^{-1}} = (\bar{x})^{-1}$  ( $x \neq 0$ ).

(c)  $|xy| = |x||y|$ .

(d)  $|x+y| \leq |x| + |y|$ .

### 2.2 Lời giải

#### 2.2.1 Phản (a)

Giả sử  $x = a + bi$ , ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), ta có:

$$\begin{cases} x\bar{x} = (a+bi)(a-bi) \\ \bar{x}x = (a-bi)(a+bi) = (a+bi)(a-bi) \end{cases} \Rightarrow x\bar{x} = \bar{x}x$$

Lại có:

$$x\bar{x} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

## Exercise 1

mà  $|x|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2 + b^2$   
 $\Rightarrow x\bar{x} = |x|^2 \Leftrightarrow x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2 \Rightarrow$  đpcm.

**2.2.2 Phân (b)**

Giả sử  $x = a + bi$ , ( $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ), ta có:

$$\begin{aligned}\overline{x^{-1}} &= \frac{\overline{\bar{x}}}{|x|^2} = \frac{x}{|x|^2} \\ (\bar{x})^{-1} &= \frac{\bar{x}}{|x|^2} = \frac{x}{|x|^2} \\ \Rightarrow \overline{x^{-1}} &= (\bar{x})^{-1} = \frac{x}{|x|^2} \Rightarrow \text{đpcm.}\end{aligned}$$

**2.2.3 Phân (c)**

Giả sử  $x = a + bi$ ,  $y = c + di$ , ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ), ta có:

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{l} |x| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ |y| = \sqrt{c^2 + d^2} \\ xy = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \end{array} \right. \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x||y| = (\sqrt{a^2 + b^2})(\sqrt{c^2 + d^2}) = \sqrt{(ac)^2 + (bc)^2 + (ad)^2 + (bd)^2} \\ |xy| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{(ac)^2 + (bc)^2 + (ad)^2 + (bd)^2} \end{array} \right. \\ \Rightarrow |x||y| = |xy| = \sqrt{(ac)^2 + (bc)^2 + (ad)^2 + (bd)^2} \Rightarrow \text{đpcm.}\end{aligned}$$

**2.2.4 Phân (d)**

Giả sử  $x = a + bi$ ,  $y = c + di$ , ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ), ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} |x| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ |y| = \sqrt{c^2 + d^2} \\ |x + y| = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \end{array} \right.$$

Xét mệnh đề:

$$\begin{aligned}
 & |x + y| \leq |x| + |y| \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \\
 \Leftrightarrow & (a + c)^2 + (b + d)^2 \leq \left( \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \right)^2 \\
 \Leftrightarrow & a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq ac + bd, \text{ (luôn đúng } \forall a, b, c, d \in \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  mệnh đề được xét đúng  $\Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y| \Rightarrow$  đpcm.

### 3 Bài 3

#### 3.1 Đề bài

Cho  $|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$ ,  $|\psi\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$ .

- (a) Tính  $\langle\phi|$  và  $\langle\psi|$ .
- (b) Tính  $\langle\phi|\psi\rangle$  và  $\langle\psi|\phi\rangle$ .
- (c) Tính  $|\phi\rangle\langle\psi|$  và  $|\psi\rangle\langle\phi|$ .
- (d) Tính  $\langle\phi|\langle\psi|$  và  $\langle\psi|\langle\phi|$ .
- (e) Tính  $\|\phi\|$  và  $\|\psi\|$ .
- (f) Tính góc giữa  $\langle\phi|$  và  $\langle\psi|$ .
- (g) Tính  $\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle$  và  $\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle$ .
- (h) Chuẩn hoá  $\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle$  và  $\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle$ .
- (i) Tìm toạ độ của  $|\phi\rangle$  và  $|\psi\rangle$  trong các cơ sở

$$B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}, B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}, B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}.$$

## Exercise 1

- (j) Cho  $|a\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle$ ,  $|b\rangle = \frac{i}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$ , chứng minh  $B = \{a, b\}$  là một cơ sở trực chuẩn của  $\mathbb{C}^2$  và tìm tọa độ của  $|\phi\rangle, |\psi\rangle$  theo  $B$ .

## 3.2 Lời giải

### 3.2.1 Phàn (a)

Ta có:

$$\langle \phi | = |\phi\rangle^\dagger = \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^\dagger = \left( \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\langle \psi | = |\psi\rangle^\dagger = \left( \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1-2i}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^\dagger = \left( \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix} \right)^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} 2 & 1+2i \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

### 3.2.2 Phàn (b)

Ta có:

$$\langle \phi | \psi \rangle = \langle \phi || \psi \rangle = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1-2i}{3} = \frac{1+2\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{3}i$$

$$\langle \psi | \phi \rangle = \langle \psi || \phi \rangle = \begin{bmatrix} 2 & 1+2i \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1+2i}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1+2\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{3}i$$

### 3.2.3 Phàn (c)

Ta có:

$$|\phi\rangle \langle \psi| = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1+2i \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1+2i}{3} \\ \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \times \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}i \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} + \frac{1}{3}i \end{bmatrix}$$

$$|\psi\rangle \langle \phi| = (|\phi\rangle \langle \psi|)^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}i \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} + \frac{1}{3}i \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3}i & \frac{1}{6} - \frac{1}{3}i \end{bmatrix}$$

**3.2.4 Phân (d)**

Ta có:

$$\langle \phi | \langle \psi | = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1+2i}{3} & \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \times \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}i & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} + \frac{1}{3}i \end{bmatrix}$$

$$\langle \psi | \langle \phi | = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} & \frac{1+2i}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1+2i}{3} \times \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}i & \frac{1}{6} + \frac{1}{3}i \end{bmatrix}$$

**3.2.5 Phân (e)**

Ta có:

$$\|\phi\| = \sqrt{\left| \frac{\sqrt{3}}{2} \right|^2 + \left| \frac{1}{2} \right|^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\psi\| = \sqrt{\left| \frac{2}{3} \right|^2 + \left| \frac{1+2i}{3} \right|^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{5}{9}} = \sqrt{1} = 1$$

**3.2.6 Phân (f)**

Gọi  $\theta$  là góc giữa  $|\phi\rangle$  và  $|\psi\rangle$ , ta có:

$$\cos \theta = \frac{|\langle \phi, \psi \rangle|}{\|\phi\| \|\psi\|} = \frac{|\langle \phi | \psi \rangle|}{\|\phi\| \|\psi\|}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1} \frac{|\langle \phi | \psi \rangle|}{\|\phi\| \|\psi\|} = \cos^{-1} \frac{\left| \frac{1+2\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{3}i \right|}{1 \times 1} = \cos^{-1} \sqrt{\left( \frac{1+2\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left( \frac{1}{3} \right)^2} = \cos^{-1} \sqrt{\frac{17+4\sqrt{3}}{36}}$$

**3.2.7 Phân (g)**

Ta có:

$$\text{proj}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle = \frac{\langle \psi | \phi \rangle}{\|\psi\|^2} |\psi\rangle = \frac{\frac{1+2\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{3}i}{1} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+2\sqrt{3}}{9} + \frac{2}{9}i \\ \frac{5+2\sqrt{3}}{18} + \frac{2-4\sqrt{3}}{18}i \end{bmatrix}$$

$$\text{proj}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle = \frac{\langle \phi | \psi \rangle}{\|\phi\|^2} |\phi\rangle = \frac{\frac{1+2\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{3}i}{1} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}(1+2\sqrt{3})}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6}i \\ \frac{1+2\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{6}i \end{bmatrix}$$

### 3.2.8 Phân (h)

Gọi  $e_1, e_2$  lần lượt là vector chuẩn hoá của  $\text{proj}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle, \text{proj}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle$ , ta có:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\text{proj}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle}{\| \text{proj}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle \|} \\ &= \left[ \frac{\frac{1+2\sqrt{3}}{9} + \frac{2}{9}i}{\frac{5+2\sqrt{3}}{18} + \frac{2-4\sqrt{3}}{18}i} \right] \frac{1}{\sqrt{\left| \frac{1+2\sqrt{3}}{9} + \frac{2}{9}i \right|^2 + \left| \frac{5+2\sqrt{3}}{18} + \frac{2-4\sqrt{3}}{18}i \right|^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{\text{proj}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle}{\| \text{proj}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle \|} \\ &= \left[ \frac{\frac{\sqrt{3}(1+2\sqrt{3})}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6}i}{\frac{1+2\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{6}i} \right] \frac{1}{\sqrt{\left| \frac{\sqrt{3}(1+2\sqrt{3})}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6}i \right|^2 + \left| \frac{1+2\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{6}i \right|^2}} \end{aligned}$$

### 3.2.9 Phân (i)

Ta có:

$$|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle, |\psi\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$$

⇒ toạ độ của  $|\phi\rangle, |\psi\rangle$  trong cơ sở trực chuẩn  $B_Z$  là:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_Z} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ [|\psi\rangle]_{B_Z} = \left( \frac{2}{3}, \frac{1-2i}{3} \right) \end{cases}$$

Xét cơ sở trực chuẩn  $B_X$ , toạ độ của  $|\phi\rangle, |\psi\rangle$  trong  $B_X$  là:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_X} = (\langle + | \phi \rangle, \langle - | \phi \rangle) = \left( \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \right) \\ [|\psi\rangle]_{B_X} = (\langle + | \psi \rangle, \langle - | \psi \rangle) = \left( \frac{\sqrt{2}(2+1-2i)}{3\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}(2-1+2i)}{3\sqrt{2}} \right) = \left( \frac{3-2i}{3}, \frac{1+2i}{3} \right) \end{cases}$$

Xét cơ sở trực chuẩn  $B_Y$ , toạ độ của  $|\phi\rangle, |\psi\rangle$  trong  $B_Y$  là:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_Y} = (\langle i | \phi \rangle, \langle -i | \phi \rangle) = \left( \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{4} \right) \\ [|\psi\rangle]_{B_Y} = (\langle i | \psi \rangle, \langle -i | \psi \rangle) = \left( \frac{2-i(1-2i)}{3\sqrt{2}}, \frac{2+i(1-2i)}{3\sqrt{2}} \right) = \left( \frac{(4-i)\sqrt{2}}{6}, \frac{i\sqrt{2}}{6} \right) \end{cases}$$

### 3.2.10 Phân (j)

Gọi  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ , xét biểu thức:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 a + \alpha_2 b &= 0 \\ \Leftrightarrow & \alpha_1 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) + \alpha_2 \left( \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow & \left( \alpha_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + \alpha_2 \frac{i}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \left( \alpha_1 \frac{i}{2} + \alpha_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

vì tập hợp  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$  là tập cơ sở nên biểu thức trên chỉ xảy ra khi

$$\begin{cases} \alpha_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + \alpha_2 \frac{i}{2} = 0 \\ \alpha_1 \frac{i}{2} + \alpha_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha_1 a + \alpha_2 b = 0$  khi và chỉ khi  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Leftrightarrow B = \{a, b\}$  độc lập tuyến tính.

Ta có:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} |a\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{i}{2} \end{bmatrix} \\ |b\rangle = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \langle a | b \rangle = |a\rangle^\dagger |b\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = 0 \\ \|a\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \\ \|b\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow B = \{a, b\}$  là cơ sở trực chuẩn trong không gian  $\mathbb{C}^2$ .

$\Rightarrow$  tọa độ của  $|\phi\rangle, |\psi\rangle$  trong cơ sở trực chuẩn  $B$  là:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_B = (\langle a | \phi \rangle, \langle b | \phi \rangle) = \left( \frac{3}{4} - \frac{i}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i\sqrt{3}}{4} \right) \\ [|\psi\rangle]_B = (\langle a | \psi \rangle, \langle b | \psi \rangle) = \left( \frac{\sqrt{3}-1}{3} - \frac{i}{6}, \frac{i}{3} + \frac{\sqrt{3}(1-2i)}{6} \right) \end{cases}$$

## 4 Bài 4

### 4.1 Đề bài

Cho  $U$  là toán tử trên  $\mathbb{C}^2$  với

$$U|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, U|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm biểu diễn của  $U$  trong cơ sở chính tắc  $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ .

(b) Cho  $|\phi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ , tìm  $U|\phi\rangle$ .

(c)  $U$  có unita không?

(d)  $U$  có Hermite không?

(e) Tìm  $U^\dagger, U^{-1}$ .

(f) Tìm  $HUH|0\rangle, HUH|1\rangle$  và  $HUH$  ( $H$  là ma trận Hadamard).

(g) Tìm  $UHU|0\rangle, UHU|1\rangle$  và  $UHU$ .

### 4.2 Lời giải

#### 4.2.1 Phân (a)

Ta có:

$$[U]_{B_Z} = \begin{bmatrix} U|0\rangle & U|1\rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$  biểu diễn của  $U$  trong cơ sở chính tắc  $B_Z$  là  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ .

#### 4.2.2 Phân (b)

Ta có:

$$U|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \alpha - i\beta \\ -i\alpha + \beta \end{bmatrix}$$

#### 4.2.3 Phân (c)

Xét biểu thức:

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} UU^\dagger &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \end{aligned}$$

$\Rightarrow U^\dagger U = UU^\dagger = I \Rightarrow U$  unita.

#### 4.2.4 Phân (d)

Ta có:

$$\begin{cases} U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \\ U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\Rightarrow U^\dagger \neq U \Rightarrow U$  không là Hermite.

#### 4.2.5 Phân (e)

Ta có:

$$U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

vì  $U$  là ma trận unita, nên  $U$  khả nghịch và

$$U^{-1} = U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

**4.2.6 Phần (f)**

$H$  là ma trận Hadamard  $\Rightarrow H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow HUH &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 1-i \\ 1+i & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2-2i & 0 \\ 0 & 2+2i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} HUH|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i \\ 0 \end{bmatrix} \\ HUH|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1+i \end{bmatrix} \end{cases}$$

### 4.2.7 Phản (g)

Ta có:

$$\begin{aligned}
 UHU &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1-i & -1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2-2i & 0 \\ 0 & -2-2i \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & -1-i \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow \begin{cases} UHU|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1-i \\ 0 \end{bmatrix} \\ UHU|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1-i \end{bmatrix} \end{cases}
 \end{aligned}$$

## 5 Bài 5

### 5.1 Đề bài

Chứng minh  $XY = iZ$  bằng cách:

- (a) Nhân ma trận.
- (b) Xét tác động của các toán tử trên  $|0\rangle, |1\rangle$ .

### 5.2 Lời giải

#### 5.2.1 Phản (a)

Ta có:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} XY = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \\ iZ = i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow XY = iZ = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \Rightarrow \text{dpcm.}$$

### 5.2.2 Phân (b)

Ta có:

$$X|0\rangle = |1\rangle, X|1\rangle = |0\rangle$$

$$Y|0\rangle = i|1\rangle, Y|1\rangle = -i|0\rangle$$

$$Z|0\rangle = |0\rangle, Z|1\rangle = -|1\rangle$$

Xét biểu thức sau:

$$XY|0\rangle = X(Y|0\rangle) = X(i|1\rangle) = iX|1\rangle = i|0\rangle = i(Z|0\rangle) \Leftrightarrow XY|0\rangle = iZ|0\rangle.$$

$$XY|1\rangle = X(Y|1\rangle) = X(-i|0\rangle) = -iX|0\rangle = -i|1\rangle = i(Z|1\rangle) \Leftrightarrow XY|1\rangle = iZ|1\rangle.$$

Vì  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  là tập cơ sở nên  $XY = iZ \Rightarrow \text{dpcm.}$

## 6 Bài 6

### 6.1 Đề bài

Cho  $|\phi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}+i}{4}|11\rangle$

- (a) Cho thấy  $|\phi\rangle$  là vector đơn vị.
- (b) Tính  $\text{proj}_{|+-\rangle} |\phi\rangle$  và chuẩn hoá  $\text{proj}_{|+-\rangle} |\phi\rangle$ .
- (c) Tính toạ độ của  $|\phi\rangle$  theo cơ sở Bell.

## 6.2 Lời giải

### 6.2.1 Phản (a)

Ta có:

$$\begin{aligned}
 |\phi\rangle &= \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}+i}{4}|11\rangle \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}+i}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow |\phi\rangle &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}+i}{4} \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow \|\phi\| &= \sqrt{\left|\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right|^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = 1
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow |\phi\rangle$  là vector đơn vị.

### 6.2.2 Phản (b)

Ta có:

$$|+-\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \langle +-| = \frac{1}{2} [1 \ -1 \ 1 \ -1].$$

## Exercise 1

$$\begin{aligned}
\langle + - | \phi \rangle &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}+i}{4} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{i}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}+i}{4} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{2-\sqrt{3}}{4} + i \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{2-\sqrt{3}}{4} + i \frac{4-\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \right) \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{8} + i \frac{4-\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \text{proj}_{|+-\rangle} |\phi\rangle &= \frac{\langle + - | \phi \rangle}{\| |+-\rangle \|^2} |+-\rangle \\
&= \left( \frac{2-\sqrt{3}}{8} + i \frac{4-\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} \right) |+-\rangle
\end{aligned}$$

Chuẩn hoá  $\text{proj}_{|+-\rangle} |\phi\rangle$ , ta được:

$$e = \frac{\text{proj}_{|+-\rangle} |\phi\rangle}{\| \text{proj}_{|+-\rangle} |\phi\rangle \|} = \frac{(2-\sqrt{3}) + i \frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{(2-\sqrt{3})^2 + \frac{(4-\sqrt{2})^2}{2}}} |+-\rangle$$

### 6.2.3 Phân (c)

Cơ sở Bell là:

$$B = \left\{ |\Phi^+\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, |\Phi^-\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, |\Psi^+\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, |\Psi^-\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}\langle \Phi^+ | \phi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} + i}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 + \sqrt{3} + i}{4} = \frac{2 + \sqrt{3} + i}{4\sqrt{2}} \\ \langle \Phi^- | \phi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} + i}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3} - i}{4} = \frac{2 - \sqrt{3} - i}{4\sqrt{2}} \\ \langle \Psi^+ | \phi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 0 + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \frac{i}{2} \\ \langle \Psi^- | \phi \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( 0 - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{i}{2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow [|\phi\rangle]_B = (\langle \Phi^+ | \phi \rangle, \langle \Phi^- | \phi \rangle, \langle \Psi^+ | \phi \rangle, \langle \Psi^- | \phi \rangle) \\ = \left( \frac{2 + \sqrt{3} + i}{4\sqrt{2}}, \frac{2 - \sqrt{3} - i}{4\sqrt{2}}, \frac{i}{2}, -\frac{i}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \text{tọa độ của } |\phi\rangle \text{ trong cơ sở Bell là } \begin{bmatrix} \frac{2+\sqrt{3}+i}{4\sqrt{2}} \\ \frac{2-\sqrt{3}-i}{4\sqrt{2}} \\ \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} \end{bmatrix}.$$

## 7 Bài 7

### 7.1 Đề bài

Kiểm tra các vector sau có phân tách được

$$(a) |\phi_1\rangle = \frac{1}{2} (|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle).$$

$$(b) |\phi_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\sqrt{3}|00\rangle - \sqrt{3}|01\rangle + |10\rangle - |11\rangle).$$

$$(c) |\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle + i|11\rangle).$$

$$(d) |\phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1-\rangle.$$

## 7.2 Lời giải

### 7.2.1 Phân (a)

Ta có:

$$\begin{aligned} |\phi_1\rangle &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow |\phi_1\rangle &= |+\rangle \otimes |-\rangle \end{aligned}$$

Vậy vector  $|\phi_1\rangle$  phân tách được.

### 7.2.2 Phân (b)

Ta có:

$$\begin{aligned} |\phi_2\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow |\phi_2\rangle &= \left( \frac{\sqrt{3}|0\rangle + |1\rangle}{2} \right) \otimes |-\rangle \end{aligned}$$

Vậy vector  $|\phi_2\rangle$  phân tách được.

### 7.2.3 Phân (c)

Ta có:

$$\begin{aligned} |\phi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow |\phi_3\rangle &= |1\rangle \otimes |i\rangle \end{aligned}$$

Vậy vector  $|\phi_3\rangle$  phân tách được.

### 7.2.4 Phân (d)

Giả sử  $|\phi_4\rangle$  tách được, ta có:

$$|\tau\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, |\psi\rangle = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

sao cho

$$|\phi_4\rangle = |\tau\rangle |\psi\rangle \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ac = ad = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ bc = -bd = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad (a, b, c, d \neq 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = d = \frac{1}{a\sqrt{6}} \\ c = -d = \frac{1}{b\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow (c = d) \vee (c = -d) \Leftrightarrow d = -d = 0$$

Vô lý vì  $a, b, c, d \neq 0$ , suy ra  $|\phi_4\rangle$  không tách được.

## 8 Bài 8

### 8.1 Đề bài

Cho  $|\phi\rangle = \frac{1}{4}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle$

- (a) Tính  $(H \otimes X)|\phi\rangle$ .
- (b) Tính CNOT  $|\phi\rangle$ .

### 8.2 Lời giải

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &= \frac{1}{4}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow |\phi\rangle &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

#### 8.2.1 Phần (a)

Ta có:

$$H \otimes X = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (H \otimes X) |\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

### 8.2.2 Phân (b)

Ta có:

$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{CNOT} |\phi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$