ĐẠI HỌC QUỐC GIA TPHCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Exercise 2

Môn học: Nhập môn tính toán lượng tử

Sinh viên thực hiện:

Nguyễn Thiên Ấn - 23122020

Giảng viên môn học:

ThS. Vũ Quốc Hoàng

Nguyễn Ngọc Toàn

Ngày 20 tháng 11 năm 2025

Mục lục

1 Bài 1

1.1 Đề bài

Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}, B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}, B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau:

- $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$.
- $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle\right)$.
- $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

1.2 Lời giải

1.2.1 Phần a

Với cơ sở B_Z, ta có phép đo $|\psi_1\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được 0 với xác suất $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \frac{3}{4}$ và sụp đổ thành $|0\rangle$,
- được 1 với xác suất $\left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}$ và sụp đổ thành $|1\rangle$.

Với cơ sở B_X, ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được $+$ với xác suất $|\langle +|\psi_2\rangle|^2 = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$ và sụp đổ thành $|+\rangle$,
- được $-$ với xác suất $|\langle -|\psi_2\rangle|^2 = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$ và sụp đổ thành $|-\rangle$.

Với cơ sở B_Y, ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được i với xác suất $|\langle i|\psi_2\rangle|^2 = \left|\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i\right|^2 = \frac{1}{2}$ và sụp đổ thành $|i\rangle$,
- được $-i$ với xác suất $|\langle -i|\psi_2\rangle|^2 = \left|\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i\right|^2 = \frac{1}{2}$ và sụp đổ thành $|-i\rangle$.

1.2.2 Phần b

Với cơ sở B_Z, ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được 0 với xác suất $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$ và sụp đổ thành $|0\rangle$,

- được 1 với xác suất $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)\right|^2 = \frac{1}{2}$ và sụp đổ thành $|1\rangle$.

Với cơ sở B_X, ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được + với xác suất $|\langle+|\psi_2\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}\left(1 + \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)\right|^2 = \frac{3}{4}$ và sụp đổ thành $|+\rangle$,
- được $-$ với xác suất $|\langle-|\psi_2\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}\left(1 - \sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}\right)\right|^2 = \frac{1}{4}$ và sụp đổ thành $|-\rangle$.

Với cơ sở B_Y, ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được i với xác suất $|\langle i|\psi_2\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right|^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ và sụp đổ thành $|i\rangle$,
- được $-i$ với xác suất $|\langle -i|\psi_2\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right|^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$và sụp đổ thành $|-i\rangle$.

1.2.3 Phần c

Với cơ sở B_Z, ta có phép đo $|\psi_3\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được 0 với xác suất $\left|\frac{2}{3}\right|^2 = \frac{4}{9}$ và sụp đổ thành $|0\rangle$,
- được 1 với xác suất $\left|\frac{1-2i}{3}\right|^2 = \frac{5}{9}$ và sụp đổ thành $|1\rangle$.

Với cơ sở B_X, ta có phép đo $|\psi_3\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được + với xác suất $|\langle+|\psi_3\rangle|^2 = \left|\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}i\right|^2 = \frac{13}{18}$ và sụp đổ thành $|+\rangle$,
- được $-$ với xác suất $|\langle-|\psi_3\rangle|^2 = \left|\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3}i\right|^2 = \frac{5}{18}$ và sụp đổ thành $|-\rangle$.

Với cơ sở B_Y, ta có phép đo $|\psi_3\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được i với xác suất $|\langle i|\psi_3\rangle|^2 = \left|-\frac{\sqrt{2}}{6}i\right|^2 = \frac{1}{18}$ và sụp đổ thành $|i\rangle$,
- được $-i$ với xác suất $|\langle -i|\psi_3\rangle|^2 = \left|\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}i\right|^2 = \frac{17}{18}$và sụp đổ thành $|-i\rangle$.

2 Bài 2

2.1 Đề bài

Viết dạng Bloch và mô tả trên mặt cầu Bloch các trạng thái lượng tử ở Câu 1.

2.2 Lời giải

Ta có:

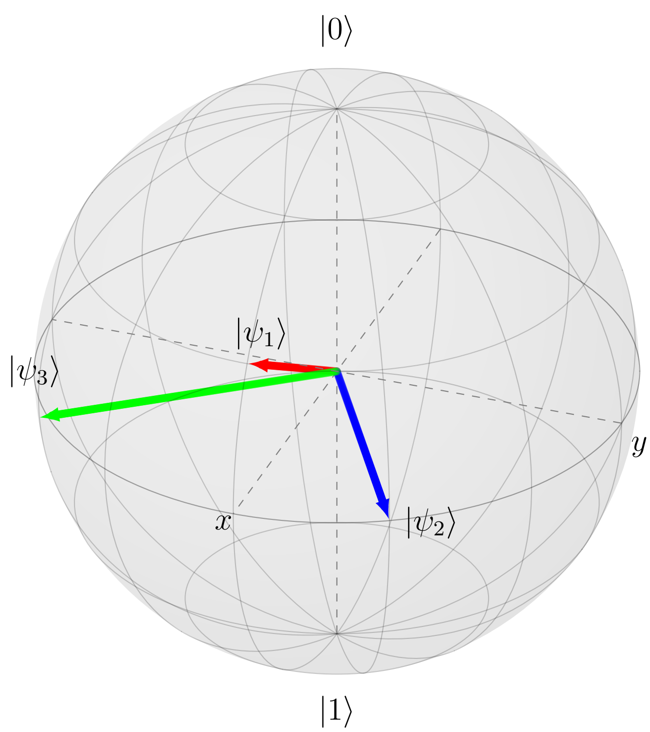
$$\begin{cases} |\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle \\ |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle \\ |\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}e^{0i}|1\rangle \\ |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle \\ |\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{\sqrt{5}}{3}e^{i\arctan(-2)}|1\rangle \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\pi}{3}, & \phi_1 = 0 \\ \theta_2 = \dfrac{\pi}{2}, & \phi_2 = \dfrac{\pi}{6} \\ \theta_3 = 2\arccos\dfrac{2}{3}, & \phi_3 = \arctan(-2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ dạng Bloch của các trạng thái lượng tử $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle$ là:

$$\begin{cases} |\psi_1\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)|0\rangle + e^{i0}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)|1\rangle \\ |\psi_2\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle \\ |\psi_3\rangle = \cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right)|0\rangle + e^{i\arctan(-2)}\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)|1\rangle \end{cases}$$

Mặt cầu Bloch:



3 Bài 3

3.1 Đề bài

Cho U là một toán tử tuyến tính trên $\mathbb{C}^2$, biết:

$$U|0\rangle = \frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle,$$

$$U|1\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle.$$

(a) Chứng minh U là một cổng lượng tử.

(b) Cho biết kết quả biến đổi U trên các trạng thái $|+\rangle, |-\rangle, |i\rangle, |-i\rangle$.

(c) Cho biết kết quả biến đổi U trên các trạng thái của Câu 1.

(d) U tương ứng với phép quay quanh trục nào với góc bao nhiêu trên mặt cầu Bloch?

3.2 Lời giải

3.2.1 Phần a

Ta có:

$$U|0\rangle = \frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle, U|1\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle$$

$\Rightarrow$ ma trận U trong cơ sở $|0\rangle, |1\rangle$ là:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}-i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}+i}{2} \end{bmatrix}$$

Xét biểu thức:

$$
\begin{aligned}
U^\dagger U &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}+i}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}-i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}-i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}+i}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \sqrt{2}+i & -1 \\ 1 & \sqrt{2}-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}-i & 1 \\ -1 & \sqrt{2}+i \end{bmatrix} \\
\Rightarrow U^\dagger U &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow U$ là một ma trận unita $\Rightarrow U$ là một cổng lượng tử (dpcm).

3.2.2 Phần b

Ta có:

$$
|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle), |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle),
$$

$$
|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + i|1\rangle), |-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - i|1\rangle),
$$

Trạng thái $|+\rangle$:

$$
\begin{aligned}
U|+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (U|0\rangle + U|1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle \right) \\
\Rightarrow U|+\rangle &= \frac{\sqrt{2}+1-i}{2\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}-1+i}{2\sqrt{2}}|1\rangle
\end{aligned}
$$

Trạng thái $|-\rangle$:

$$
\begin{aligned}
U|-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (U|0\rangle - U|1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle - \frac{1}{2}|0\rangle - \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle \right) \\
\Rightarrow U|+\rangle &= \frac{\sqrt{2}-1-i}{2\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{\sqrt{2}+1+i}{2\sqrt{2}}|1\rangle
\end{aligned}
$$

Trạng thái $|i\rangle$:

$$\begin{aligned}
U|i\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(U|0\rangle + iU|1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{i}{2}|0\rangle + \frac{i\sqrt{2}-1}{2}|1\rangle\right) \\
\Rightarrow U|i\rangle &= \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{i\sqrt{2}-2}{2}|1\rangle
\end{aligned}$$

Trạng thái $|-i\rangle$:

$$\begin{aligned}
U|-i\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(U|0\rangle - iU|1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle - \frac{i}{2}|0\rangle - \frac{i\sqrt{2}-1}{2}|1\rangle\right) \\
\Rightarrow U|-i\rangle &= \frac{\sqrt{2}-2i}{2\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{i}{2}|1\rangle
\end{aligned}$$

3.2.3 Phần c

Trạng thái $|\psi_1\rangle$:

$$\begin{aligned}
U|\psi_1\rangle &= \frac{\sqrt{3}}{2}U|0\rangle + \frac{1}{2}U|1\rangle \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle\right) \\
&= \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{3}}{4}|0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{4}|1\rangle + \frac{1}{4}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{4}|1\rangle \\
\Rightarrow U|\psi_1\rangle &= \frac{\sqrt{6}+1-i\sqrt{3}}{4}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+i}{4}|1\rangle
\end{aligned}$$

Trạng thái $|\psi_2\rangle$:

$$\begin{aligned}
U|\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}U|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)U|1\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}U|0\rangle + \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{i\sqrt{2}}{4}\right)U|1\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle\right) + \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{i\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}-i}{2\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{2\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{8}|0\rangle + \frac{6+2\sqrt{3}+\left(2+\sqrt{2}\right)i}{8}|1\rangle \\
\Rightarrow U|\psi_2\rangle &= \frac{4+\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{8}|0\rangle + \frac{6+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+i\left(2+\sqrt{2}\right)}{8}|1\rangle
\end{aligned}$$

Trạng thái $|\psi_3\rangle$:

$$\begin{aligned}
U|\psi_3\rangle &= \frac{2}{3}U|0\rangle + \frac{1-2i}{3}U|1\rangle \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle\right) + \frac{1-2i}{3}\left(\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}-i}{3}|0\rangle - \frac{1}{3}|1\rangle + \frac{1-2i}{6}|0\rangle + \frac{2+\sqrt{2}+i\left(1-2\sqrt{2}\right)}{6}|1\rangle \\
\Rightarrow U|\psi_3\rangle &= \frac{2\sqrt{2}+1-4i}{6}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i\left(1-2\sqrt{2}\right)}{6}|1\rangle
\end{aligned}$$

3.2.4 Phần d

Vì U là ma trận Unita, nên tồn tại 2 vector riêng $|u_1\rangle, |u_2\rangle$ lập thành một cơ sở trực chuẩn với các trị riêng $e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}$ sao cho

$$U = e^{i\theta_1}|u_1\rangle\langle u_1| + e^{i\theta_2}|u_2\rangle\langle u_2|, \quad U|u_1\rangle = e^{i\theta_1}|u_1\rangle, \quad U|u_2\rangle = e^{i\theta_2}|u_2\rangle$$

Ta có:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}-i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}+i}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |u_1\rangle & |u_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |u_1\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}-i}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, |u_2\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}+i}{2} \end{bmatrix}$$

Ta có:

$$
\begin{aligned}
U|u_1\rangle &= e^{i\theta_1}|u_1\rangle \\
\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{-i\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}-i}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \begin{bmatrix} \sqrt{2}-i \\ -1 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2}\cos\theta_1 + \sin\theta_1 + i\left(\sqrt{2}\sin\theta_1 - \cos\theta_1\right) \\ -\cos\theta_1 - i\sin\theta_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -i\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\cos\theta_1 + \sin\theta_1 = 0 \\ \sqrt{2}\sin\theta_1 - \cos\theta_1 = -\sqrt{2} \\ \cos\theta_1 = -\sqrt{2} \\ i\sin\theta_1 = 0 \end{cases}
$$

4 Bài 4

4.1 Đề bài

Từ trạng thái đầu vào $|0\rangle$,

(a) Vẽ mạch mô tả tính toán $HYTHX$.

(b) Tính đầu ra của Câu (a).

(c) Thêm phép đo ở cuối mạch của Câu (a) và tính xác suất được 1.

4.2 Lời giải

4.2.1 Phần a

Mạch tính toán $HYTHX$ được mô tả như sau:

$$|0\rangle \;-\boxed{X}-\boxed{H}-\boxed{T}-\boxed{Y}-\boxed{H}-$$

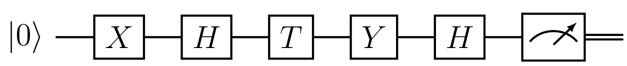
4.2.2 Phần b

Gọi đầu ra của mạch tính toán trên là $|\psi\rangle$, ta có:

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle &= HYTHX\,|0\rangle \\
&= HYTH\,|1\rangle \\
&= HYT\,|-\rangle \\
&= HY\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle - e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle\right) \\
&= H\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\,|1\rangle + e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{i}{\sqrt{2}}\,|0\rangle\right) \\
\Rightarrow |\psi\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}}\left(|-\rangle + e^{i\frac{\pi}{4}}\,|+\rangle\right)
\end{aligned}
$$

4.2.3 Phần c

Thêm phép đo ở cuối mạch, ta có mạch tính toán mới sau:



Ta có:

$$
\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}}\left(|-\rangle + e^{i\frac{\pi}{4}}\,|+\rangle\right) \\
&= \frac{i}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle\right)\right] \\
\Rightarrow |\psi\rangle &= \frac{-1 + i(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}}\,|0\rangle + \frac{-1 + i(-\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}}\,|1\rangle
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Xác suất để phép đo được 1 là:

$$
P(1) = \left|\frac{-1 + i(-\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{8}
$$

5 Bài 5

5.1 Đề bài

Cho biết các trạng thái sau là tách được hay vướng, nếu tách được thì biểu diễn trên mặt cầu Bloch

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle + |10\rangle\right)$.

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle + i\,|11\rangle\right)$.

(c) $\frac{1}{4}\left(3\,|00\rangle - \sqrt{3}\,|01\rangle + \sqrt{3}\,|10\rangle - |11\rangle\right)$.

(d) $\frac{1}{\sqrt{3}}\,|0\rangle\,|+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1\rangle\,|-\rangle$.

5.2 Lời giải

5.2.1 Phần a

Giả sử $|\phi_1\rangle$ tách được, tức $\exists\,|\psi_1\rangle\,,|\psi_2\rangle$ sao cho $|\phi_1\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. Ta có:

$$|\phi_1\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ac = bd = 0 \\ ad = bc = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ vô lí $\Rightarrow |\phi_1\rangle$ là trạng thái vướng.

5.2.2 Phần b

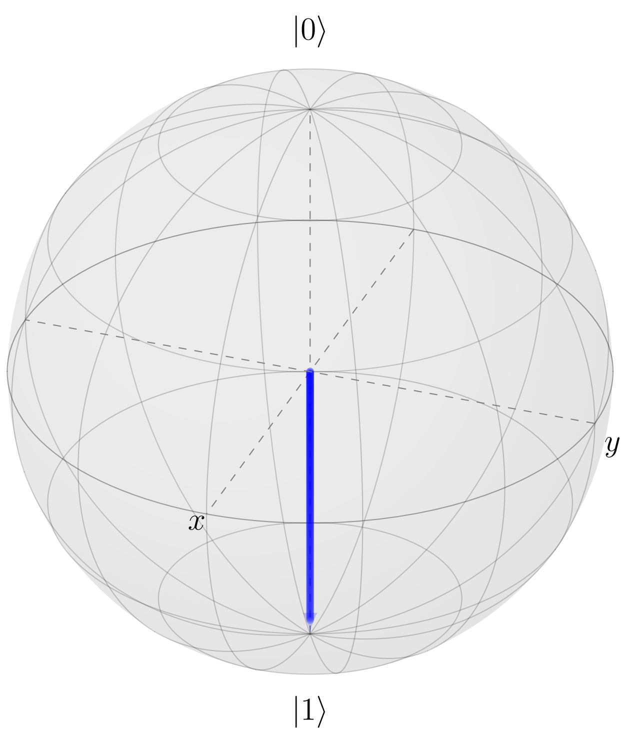
Ta có:

$$
\begin{aligned}
|\phi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle + i\,|11\rangle\right) \\
&= |1\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\,|1\rangle\right) \\
\Rightarrow |\phi_2\rangle &= |1\rangle \otimes |i\rangle
\end{aligned}
$$

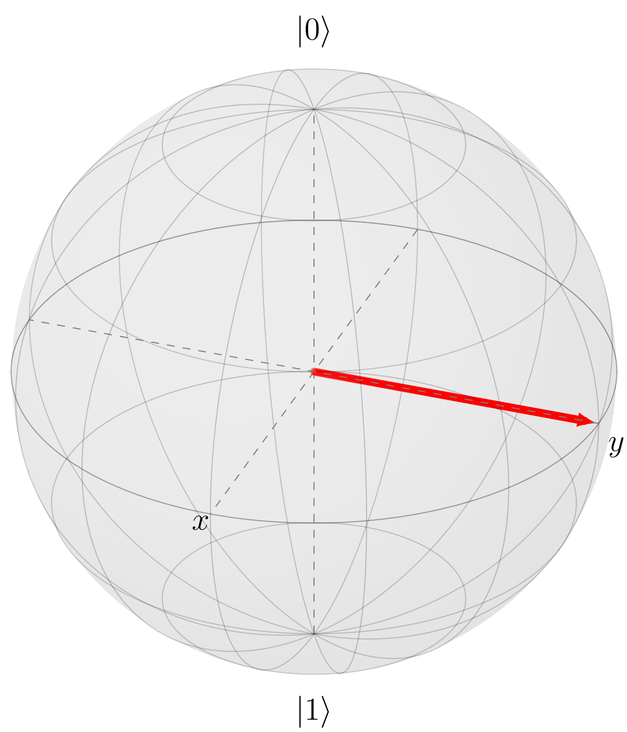
$\Rightarrow |\phi_2\rangle$ tách được, ta có dạng Bloch của $|\phi_2\rangle$:

$$
\begin{cases}
|1\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)|0\rangle + e^{i0}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)|1\rangle \\
|i\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\theta_1 = \pi, \quad \phi_1 = 0 \\
\theta_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \phi_1 = \frac{\pi}{2}
\end{cases}
$$

Mặt cầu Bloch:



(a) Qubit 0



(b) Qubit 1

5.2.3 Phần c

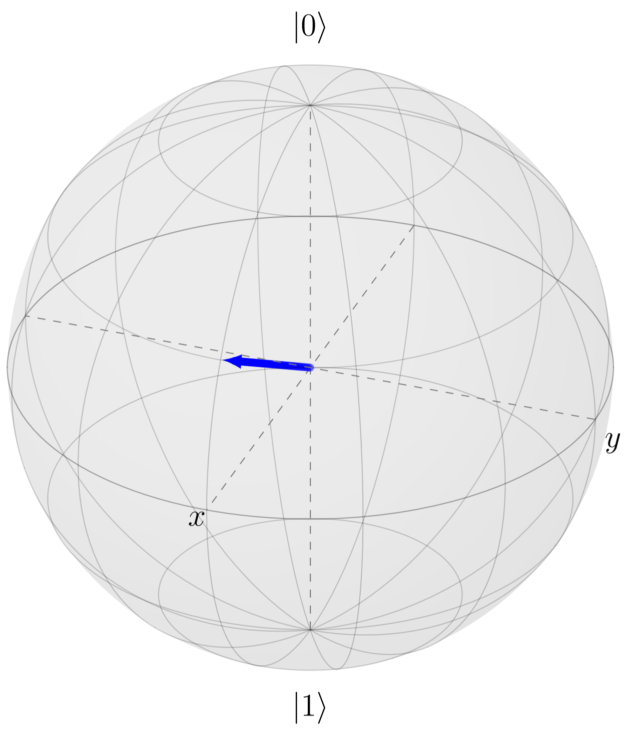
Ta có:

$$\begin{aligned}
|\phi_3\rangle &= \frac{1}{4}\left(3\,|00\rangle - \sqrt{3}\,|01\rangle + \sqrt{3}\,|10\rangle - |11\rangle\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[\sqrt{3}\,|0\rangle \otimes \left(\sqrt{3}\,|0\rangle - |1\rangle\right) + |1\rangle \otimes \left(\sqrt{3}\,|0\rangle - |1\rangle\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\,|0\rangle + |1\rangle\right) \otimes \left(\sqrt{3}\,|0\rangle - |1\rangle\right) \\
\Rightarrow |\phi_3\rangle &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,|0\rangle + \frac{1}{2}\,|1\rangle\right) \otimes \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,|0\rangle - \frac{1}{2}\,|1\rangle\right)
\end{aligned}$$

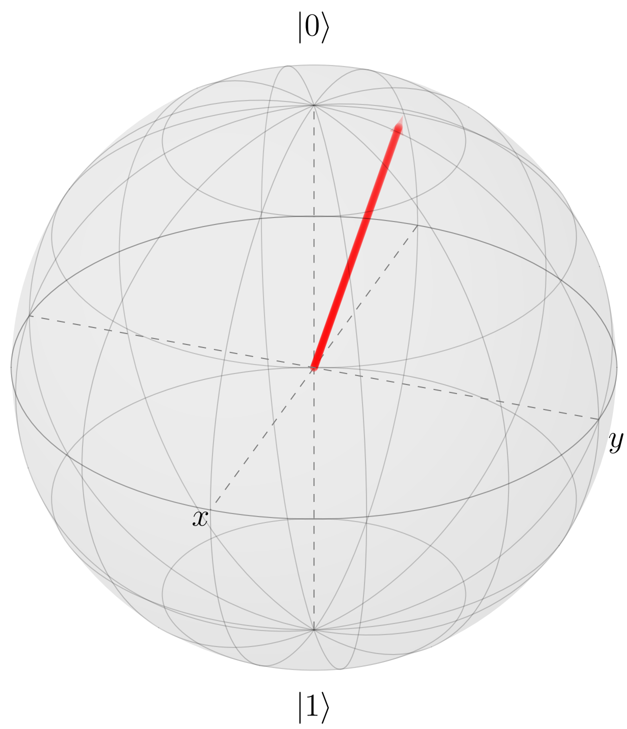
$\Rightarrow |\phi_3\rangle$ tách được, ta có dạng Bloch của $|\phi_3\rangle$:

$$\begin{cases} |\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\,|0\rangle + \frac{1}{2}\,|1\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)|0\rangle + e^{i0}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)|1\rangle \\ |\psi_2\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\,|0\rangle - \frac{1}{2}\,|1\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)|0\rangle + e^{i\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)|1\rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \frac{\pi}{3}, \quad \phi_1 = 0 \\ \theta_2 = \frac{\pi}{3}, \quad \phi_2 = \pi \end{cases}$$

Mặt cầu Bloch:



(a) Qubit 0



(b) Qubit 1

5.2.4 Phần d

Ta có:

$$\begin{aligned}
|\phi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle|+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle|-\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|10\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|11\rangle
\end{aligned}$$

Giả sử $|\phi_4\rangle$ tách được, tức $\exists\, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ sao cho $|\phi_4\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. Ta có:

$$\begin{aligned}
|\phi_4\rangle &= \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{bmatrix} \\
&\Rightarrow \begin{cases} ac = ad = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ bc = -bd = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \frac{ac}{ad} = \frac{c}{d} = 1 \\ \frac{bc}{bd} = \frac{c}{d} = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ vô lí $\Rightarrow |\phi_4\rangle$ là trạng thái vướng.

6 Bài 6

6.1 Đề bài

Cho hệ 2 qubit với trạng thái

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle - \frac{i}{2}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle.$$

Khảo sát các phép đo sau

(a) Đo đồng thời 2 qubit.

(b) Đo qubit 0.

(c) Đo qubit 1.

(d) Đo qubit 0 rồi đo qubit 1 và so kết quả với Câu (a).

(e) Đo qubit 1 rồi đo qubit 0 và so kết quả với Câu (b).

6.2 Lời giải

6.2.1 Phần a

Khi đo đồng thời 2 qubit, ta có:

- Xác suất ra trạng thái $|00\rangle$ là: $P(00) = \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} = 25\%$.
- Xác suất ra trạng thái $|01\rangle$ là: $P(01) = |0|^2 = 0\%$.
- Xác suất ra trạng thái $|10\rangle$ là: $P(10) = \left|-\frac{i}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} = 25\%$.
- Xác suất ra trạng thái $|11\rangle$ là: $P(11) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$.

6.2.2 Phần b

Khi chỉ đo qubit 0, ta có:

- Xác suất qubit 0 bằng 0 là: $P(q_0 = 0) = P(00) + P(01) = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4} = 25\%$.
- Xác suất qubit 0 bằng 1 là: $P(q_0 = 1) = P(10) + P(11) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 75\%$.

6.2.3 Phần c

Khi chỉ đo qubit 1, ta có:

- Xác suất qubit 1 bằng 0 là: $P(q_1 = 0) = P(00) + P(10) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 75\%$.
- Xác suất qubit 1 bằng 1 là: $P(q_1 = 1) = P(01) + P(11) = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = 25\%$.

6.2.4 Phần d

Đầu tiên, ta đo qubit 0 trước:

- Qubit 0 được 0 với xác suất: $\left|\frac{1}{2}|0\rangle\right|^2 = \frac{1}{4} = 25\%$ và trạng thái sụp đổ thành $\frac{1}{2}|00\rangle$, sau đó, ta đo qubit 1 chắc chắn sẽ ra 0.
- Qubit 0 được 1 với xác suất: $\left|-\frac{i}{2}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 75\%$ và trạng thái sụp đổ thành $-\frac{i}{2}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$, sau đó, ta đo qubit 1:
  - Xác suất đo tiếp qubit 1 bằng 0 là: $\frac{P(10)}{P(q_1=0)} = \frac{1}{3} \approx 66.7\%$.
  - Xác suất đo tiếp qubit 1 bằng 1 là: $\frac{P(11)}{P(q_1=0)} = \frac{2}{3} \approx 33.3\%$.

6.2.5 Phần d

Đầu tiên, ta đo qubit 1 trước:

- Qubit 1 được 0 với xác suất: $\left|\frac{1}{2}|0\rangle - \frac{i}{2}|1\rangle\right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$ và trạng thái sụp đổ thành $\frac{1}{2}|00\rangle - \frac{i}{2}|10\rangle$, sau đó, ta đo qubit 0:
  - Xác suất đo tiếp qubit 0 bằng 0 là: $\frac{P(00)}{P(q_1=0)} = \frac{1}{2} = 50\%$.
  - Xác suất đo tiếp qubit 0 bằng 1 là: $\frac{P(10)}{P(q_1=0)} = \frac{1}{2} = 50\%$.
- Qubit 1 được 1 với xác suất $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right| = \frac{1}{2} = 50\%$ và trạng thái sụp đổ thành $\frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$, sau đó, ta đo qubit 0 chắc chắn sẽ ra 1.

7 Bài 7

7.1 Đề bài

Khảo sát phép toán 2 qubit $U = H \otimes X$.

(a) Cho biết tác động của U lên các vector của cơ sở tính toán.

(b) Xác định ma trận biểu diễn của U từ Câu (a).

(c) Xác định ma trận biểu diễn của U bằng phép tích tensor.

(d) Cho biết tác động của U lên trạng thái

$$|\psi\rangle = \frac{1}{4}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle .$$

7.2 Lời giải

Ta có:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7.2.1 Phần a

Các vector cơ sở tính toán là $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$, ta có:

- **Với trạng thái $|00\rangle$:**

$$U|00\rangle = (H|0\rangle) \otimes (X|0\rangle) = |+\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

- **Với trạng thái $|01\rangle$:**

$$U|01\rangle = (H|0\rangle) \otimes (X|1\rangle) = |+\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

- **Với trạng thái $|10\rangle$:**

$$U|10\rangle = (H|1\rangle) \otimes (X|0\rangle) = |-\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

- **Với trạng thái $|11\rangle$:**

$$U|11\rangle = (H|1\rangle) \otimes (X|1\rangle) = |-\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle$$

7.2.2 Phần b

Từ Câu (a), ta được:

$$U = \begin{bmatrix} U|00\rangle & U|01\rangle & U|10\rangle & U|11\rangle \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

7.2.3 Phần c

Ma trận biểu diễn của U là:

$$\begin{aligned} U &= H \otimes X \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

7.2.4 Phần d

Ta có:

$$\begin{aligned} U|\psi\rangle &= \frac{1}{4}U|00\rangle + \frac{1}{2}U|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}U|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}U|11\rangle \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\right) + \\ &\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\right) \\ \Rightarrow U|\psi\rangle &= \frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{8}|00\rangle + \frac{4+\sqrt{2}}{8}|01\rangle - \frac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{8}|10\rangle - \frac{4-\sqrt{2}}{8}|11\rangle \end{aligned}$$

8 Bài 8

8.1 Đề bài

Xét trạng thái 3 qubit

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle .$$

(a) Chứng minh $|GHZ\rangle$ là trạng thái vướng.

(b) Khảo sát phép đo riêng qubit 0, qubit 1, qubit 2 và nhận xét.

(c) Thiết kế mạch 3 qubit để tạo trạng thái $|GHZ\rangle$.

8.2 Lời giải

8.2.1 Phần a

Giả sử trạng thái $|GHZ\rangle$ tách được, suy ra $\exists a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ thoả:

$$|GHZ\rangle = (a_0|0\rangle + b_0|1\rangle) \otimes (a_1|0\rangle + b_1|1\rangle) \otimes (a_2|0\rangle + b_2|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle .$$

Đồng nhất hệ số ta được:

$$\begin{cases} a_0a_1a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ b_0b_1b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a_0a_1b_0 = 0 \\ a_0a_1b_1 = 0 \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0, a_1, a_2 \neq 0 \\ b_0, b_1, b_2 \neq 0 \\ a_0a_1b_0 = 0 \\ a_0a_1b_1 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

$\Rightarrow$ vô lí, suy ra $|GHZ\rangle$ là trạng thái vướng.

8.2.2 Phần b

Khi chỉ đo qubit 0, ta có:

- Xác suất qubit 0 bằng 0 là: $P(q_0 = 0) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$.
- Xác suất qubit 0 bằng 1 là: $P(q_0 = 1) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$.

Khi chỉ đo qubit 1, ta có:

- Xác suất qubit 1 bằng 0 là: $P(q_1 = 0) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$.
- Xác suất qubit 1 bằng 1 là: $P(q_1 = 1) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$.

Khi chỉ đo qubit 2, ta có:

- Xác suất qubit 2 bằng 0 là: $P(q_2 = 0) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$.
- Xác suất qubit 2 bằng 1 là: $P(q_2 = 1) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$.

Nhận xét: Mặc dù kết quả đo của từng cá nhân là ngẫu nhiên, tuy nhiên chúng lại có sự tương quan hoàn toàn với nhau.

- Nếu ta đo qubit 0 được 0, trạng thái khi đó sẽ sụp đổ về $|000\rangle$, qubit 1 và qubit 2 khi đó cũng sẽ là 0.
- Ngược lại, nếu ta đo qubit 0 được 1, trạng thái khi đó sẽ sụp đổ về $|111\rangle$, qubit 1 và qubit 2 khi đó cũng sẽ là 1.

8.2.3 Phần c

Trạng thái ban đầu là $|000\rangle$ và trạng thái mục tiêu của ta là $\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$, ta có mạch như sau: