Số phức

Nhập môn Tính toán Lượng tử
(Introduction to Quantum Computing)

Vũ Quốc Hoàng (vqhoang@fit.hcmus.edu.vn)

FIT - HCMUS

2025

Nội dung

1. Khái niệm

2. Các phép toán

3. Dạng mũ

Nội dung

1. Khái niệm

2. Các phép toán

3. Dạng mũ

Khái niệm

Một **số phức** (complex number) z là một biểu thức có dạng

$$z = a + b \times i = a + bi, a, b \in \mathbb{R},$$

trong đó

- i là kí hiệu có tính chất $i^2 = -1$, được gọi là **đơn vị ảo** (imaginary unit),
- a được gọi là **phần thực** (real part) của z, kí hiệu $\mathrm{Re}(z)$,
- b được gọi là **phần ảo** (imaginary part) của z, kí hiệu $\mathrm{Im}(z)$.

Tập tất cả các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Các **số thực** (real number) được xem là số phức có phần ảo là 0 (dạng $a + 0i = a$). Các số phức có phần thực là 0 (dạng $0 + bi = bi$) được gọi là các **số ảo** (imaginary number).

Khái niệm (tt)

Cho $z = a + bi \in \mathbb{C}$

- số thực không âm $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ được gọi là **độ lớn** (magnitude, absolute value, modulus) của z,
- số thực $\theta = \arg z = \arctan \frac{b}{a}$ được gọi là **pha** (phase, argument) của z,
- số phức $\bar{z} = z^* = a - bi$ được gọi là **số phức liên hợp** (complex conjugate) của z.

Nhận xét

- $\bar{\bar{z}} = z$,
- $\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z), |\bar{z}| = |z|, \arg \bar{z} = -\arg z$,
- $\bar{z} = z$ khi và chỉ khi z là số thực,
- $|z| = 0$ khi và chỉ khi $z = 0$.

Khái niệm (tt)

Ví dụ 1

Xét số phức $z = 1 - i = 1 + (-1)i$

- $\text{Re}(z) = 1, \text{Im}(z) = -1,$
- $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \arg z = \arctan \frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4}(-45^\circ),$
- $\bar{z} = 1 + i.$

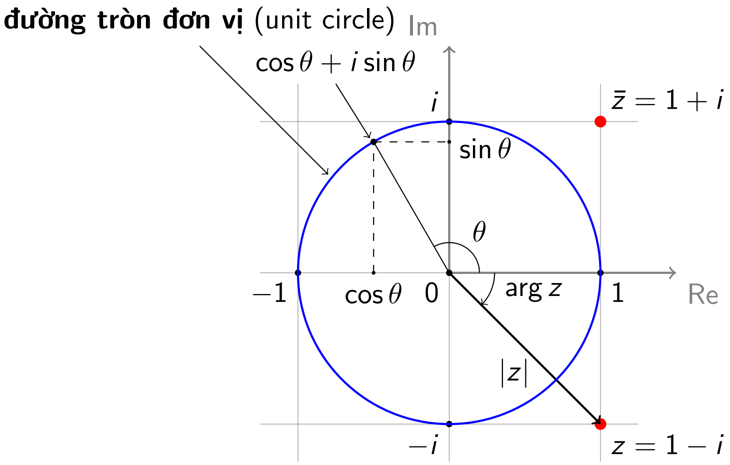
Các số $-1, 1$ là các số thực với độ lớn là 1.
Các số $-i, i$ là các số ảo với độ lớn là 1.
Số $0 = 0 + 0i$ vừa là số thực vừa là số ảo.

Các số $z = \cos\theta + i\sin\theta, \theta \in \mathbb{R}$ có

- $|z| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1,$
- $\arg z = \theta.$

thường được gọi là các số đơn vị.

Mặt phẳng phức (complex plane)



Nội dung

1. Khái niệm

2. Các phép toán

3. Dạng mũ

Các phép toán

Cho $z_1 = a_1 + b_1 i, z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$, phép toán **cộng** (addition) và **nhân** (multiplication) được định nghĩa là

- $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 i + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$,
- $z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 + b_1 b_2 i^2) + (a_1 b_2 i + a_2 b_1 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$.

Cho $z = a + bi \in \mathbb{C}$

- **đối** (opposite) của z là $-z = -a - bi$,
- $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$, từ đó, nếu $z \neq 0$ thì **nghịch đảo** (reciprocal) của z là

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

Cho $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, phép toán **trừ** (subtraction) và **chia** (division) được định nghĩa là: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$ $(z_2 \neq 0)$.

Các phép toán (tt)

Ví dụ 2

Xét $x = 1 - i, y = 2 + 2i$

- $x + y = (1 - i) + (2 + 2i) = 3 + i,$
- $x - y = (1 - i) + -(2 + 2i) = (1 - i) + (-2 - 2i) = -1 - 3i,$
- $xy = (1 - i)(2 + 2i) = 2 + 2i - 2i - 2i^2 = 2 + 0i - 2(-1) = 4,$
- $x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{\bar{x}}{x\bar{x}} = \frac{\bar{x}}{|x|^2} = \frac{1+i}{1^2+(-1)^2} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i,$
- $\frac{y}{x} = yx^{-1} = (2 + 2i)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = (1 - 1) + (i + i) = 2i,$
- $\left(\frac{y}{x}\right)^{-1} = \frac{-2i}{4} = \frac{-i}{2},$
- $\frac{x}{y} = \frac{x\bar{y}}{y\bar{y}} = \frac{x\bar{y}}{|y|^2} = \frac{(1-i)(2-2i)}{2^2+2^2} = \frac{(2-2)+(-2i-2i)}{8} = \frac{-i}{2} = \left(\frac{y}{x}\right)^{-1}.$

Tính chất

Tập các số phức $\mathbb{C}$ bao gồm 0, 1 với các phép toán thỏa các tính chất

- Trung hòa: $z + 0 = z, \forall z \in C$,
- Có đối: $z + (-z) = 0, \forall z \in C$,
- Đơn vị: $z1 = z, \forall z \in C$,
- Có nghịch đảo: $zz^{-1} = 1, \forall z \in C, z \neq 0$,
- Giao hoán: $x + y = y + x, xy = yx, \forall xy \in C$,
- Kết hợp: $(x + y) + z = x + (y + z), (xy)z = x(yz), \forall xyz \in C$,
- Phân phối: $x(y + z) = xy + xz, \forall xyz \in C$.

Do đó, $\mathbb{C}$ còn được gọi là một **trường** (field).
Ngoài ra, $\forall xy \in \mathbb{C}$ (kiểm tra!)

- $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$,
- $\overline{x^{-1}} = (\bar{x})^{-1}$ $(x \neq 0)$.
- $\overline{xy} = \bar{x}\bar{y}, \overline{\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$ $(y \neq 0)$.

Các phép toán (tt)

Ví dụ 3

Xét phương trình bậc hai

$$x^2 + 2x + 5 = 0 \ \ (*)$$

$(*)$ có thể được viết lại là

$$x^2 + 2x + 1 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = -4.$$

$(*)$ vô nghiệm trên $\mathbb{R}$ do $(x+1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tuy nhiên $(*)$ có nghiệm trên $\mathbb{C}$. Thật vậy, vì có đúng 2 số phức có bình phương bằng -4 là $2i$ và $-2i$ (kiểm tra!) nên

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x+1 &= 2i \\ x+1 &= -2i \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= -1+2i \\ x &= -1-2i \end{aligned}\right.$$

Nội dung

1. Khái niệm

2. Các phép toán

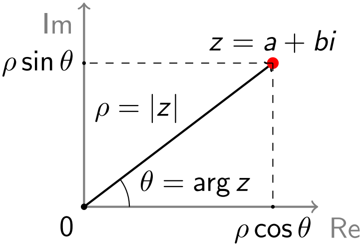
3. Dạng mũ

Dạng mũ

Số phức $z = a + bi$ được xác định hoàn toàn bởi

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \arg z = \arctan \frac{b}{a}$$



Hơn nữa, **công thức Euler** (Euler's formula) cho

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Do đó, số phức z có thể được mô tả theo

- **dạng đại số** (algebraic form): $z = a + bi$,
- **dạng cực** (polar form): $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$,
- **dạng mũ** (exponential form): $z = \rho e^{i\theta}$.

Dạng mũ (tt)

Cho $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}, z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$

- $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$, tức là

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2,$$

- Nếu $z_2 \neq 0$ $(\rho_2 \neq 0)$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$, tức là

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Cho $z = \rho e^{i\theta}, n \in \mathbb{N}^+$

- $z^n = \rho^n e^{in\theta}$,
- $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{1}{n}(\theta + k2\pi)\right)} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{k2\pi}{n}\right)}, k = 0, ..., n-1.$

Dạng mũ (tt)

Ví dụ 4 (tiếp Ví dụ 2)

Với $x = 1 - i$, $|x| = \sqrt{2}, \arg x = \arctan \frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4}$ nên $x = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
Với $y = 2 + 2i$, $|y| = 2\sqrt{2}, \arg y = \arctan \frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}$, nên $y = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
Do đó

- $xy = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 4e^{i(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})} = 4e^0 = 4,$
- $x^{-1} = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{-1} = (\sqrt{2})^{-1}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i,$
- $\frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = 2e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2i,$
- $x^4 = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = (\sqrt{2})^4\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 4e^{4\left(-i\frac{\pi}{4}\right)} = 4e^{-i\pi} = -4,$
- $\sqrt[4]{x} = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{8}}e^{\frac{1}{4}i(-\frac{\pi}{4}+k2\pi)} = \sqrt[8]{2}e^{i\left(\frac{-\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}\right)}, k = 0, .., 3.$

Căn của đơn vị

Cho $n \in \mathbb{N}^+$, có n số phức khác nhau là căn bậc n của 1, gọi là các số **căn của đơn vị** (root of unity)

$$\omega_n^{(k)} = e^{i\frac{k2\pi}{n}} = \left(e^{\frac{i2\pi}{n}}\right)^k, k = 0, ..., n-1.$$

Đặt $\omega_n = \omega_n^{(1)} = e^{\frac{i2\pi}{n}}$, ta có các số căn của đơn vị lần lượt là

$$\omega_n^0 = 1, \omega_n^1 = \omega_n, \omega_n^2, ..., \omega_n^{n-1}.$$

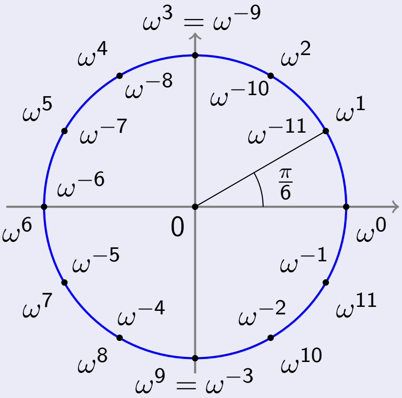
Nhận xét, $\forall jk \in \mathbb{Z}$ (kiểm tra!)

- $\omega_n^j \omega_n^k = \omega_n^{j+k}$,
- $\omega_n^j \omega_n^{n-j} = \omega_n^n = 1$,
- $(\omega_n^j)^{-1} = \omega_n^{n-j} = \overline{\omega_n^j}$.

Căn của đơn vị (tt)

Ví dụ 5

Căn bậc 12 của đơn vị: $\omega_{12}^k = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^k, k = 0, ..., 11.$



Tài liệu tham khảo

Chapter 1. Noson S. Yanafsky, Mirco A. Mannucci. *Quantum Computing for Computer Scientists*. Cambridge University Press, 2008.