

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Exercise 2

Môn học: Nhập môn tính toán lượng tử

Sinh viên thực hiện:

Nguyễn Thiên Ân - 23122020

Giảng viên môn học:

ThS. Vũ Quốc Hoàng

Nguyễn Ngọc Toàn

Ngày 5 tháng 11 năm 2025



Mục lục

1	Bài 1	3
1.1	Đề bài	3
1.2	Lời giải	3
1.2.1	Phần a	3
1.2.2	Phần b	3
1.2.3	Phần c	4
2	Bài 2	4
2.1	Đề bài	4
2.2	Lời giải	5
3	Bài 3	6
3.1	Đề bài	6
3.2	Lời giải	6
3.2.1	Phần a	6
3.2.2	Phần b	7
3.2.3	Phần c	8
3.2.4	Phần d	9
4	Bài 4	10
4.1	Đề bài	10
4.2	Lời giải	11
5	Bài 5	11
5.1	Đề bài	11
5.2	Lời giải	11
6	Bài 6	11
6.1	Đề bài	11
6.2	Lời giải	11

7 Bài 7	11
7.1 Đề bài	11
7.2 Lời giải	12
8 Bài 8	12
8.1 Đề bài	12
8.2 Lời giải	12

1 Bài 1

1.1 Đề bài

Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$, $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, $B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau:

- $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$.
- $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle)$.
- $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

1.2 Lời giải

1.2.1 Phần a

Với cơ sở B_Z , ta có phép đo $|\psi_1\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được 0 với xác suất $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \frac{3}{4}$ và sụp đổ thành $|0\rangle$,
- được 1 với xác suất $\left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}$ và sụp đổ thành $|1\rangle$.

Với cơ sở B_X , ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được + với xác suất $|\langle+|\psi_2\rangle|^2 = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$ và sụp đổ thành $|+\rangle$,
- được - với xác suất $|\langle-|\psi_2\rangle|^2 = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$ và sụp đổ thành $|-\rangle$.

Với cơ sở B_Y , ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được i với xác suất $|\langle i|\psi_2\rangle|^2 = \left|\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i\right|^2 = \frac{1}{2}$ và sụp đổ thành $|i\rangle$,
- được $-i$ với xác suất $|\langle -i|\psi_2\rangle|^2 = \left|\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i\right|^2 = \frac{1}{2}$ và sụp đổ thành $|-i\rangle$.

1.2.2 Phần b

Với cơ sở B_Z , ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được 0 với xác suất $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$ và sụp đổ thành $|0\rangle$,

- được 1 với xác suất $\left| \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{6}} \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6} \right) \right|^2 = \frac{1}{2}$ và sụp đổ thành $|1\rangle$.

Với cơ sở B_X , ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được + với xác suất $|\langle + | \psi_2 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} \left(1 + \sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6} \right) \right|^2 = \frac{3}{4}$ và sụp đổ thành $|+\rangle$,
- được - với xác suất $|\langle - | \psi_2 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} \left(1 - \sin \frac{\pi}{6} - i \cos \frac{\pi}{6} \right) \right|^2 = \frac{1}{4}$ và sụp đổ thành $|-\rangle$.

Với cơ sở B_Y , ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được i với xác suất $|\langle i | \psi_2 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right|^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ và sụp đổ thành $|i\rangle$,
- được $-i$ với xác suất $|\langle -i | \psi_2 \rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right|^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ và sụp đổ thành $|-i\rangle$.

1.2.3 Phần c

Với cơ sở B_Z , ta có phép đo $|\psi_3\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được 0 với xác suất $\left| \frac{2}{3} \right|^2 = \frac{4}{9}$ và sụp đổ thành $|0\rangle$,
- được 1 với xác suất $\left| \frac{1-2i}{3} \right|^2 = \frac{5}{9}$ và sụp đổ thành $|1\rangle$.

Với cơ sở B_X , ta có phép đo $|\psi_3\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được + với xác suất $|\langle + | \psi_3 \rangle|^2 = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} i \right|^2 = \frac{13}{18}$ và sụp đổ thành $|+\rangle$,
- được - với xác suất $|\langle - | \psi_3 \rangle|^2 = \left| \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3} i \right|^2 = \frac{5}{18}$ và sụp đổ thành $|-\rangle$.

Với cơ sở B_Y , ta có phép đo $|\psi_3\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được i với xác suất $|\langle i | \psi_3 \rangle|^2 = \left| -\frac{\sqrt{2}}{6} i \right|^2 = \frac{1}{18}$ và sụp đổ thành $|i\rangle$,
- được $-i$ với xác suất $|\langle -i | \psi_3 \rangle|^2 = \left| \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} i \right|^2 = \frac{17}{18}$ và sụp đổ thành $|-i\rangle$.

2 Bài 2

2.1 Đề bài

Viết dạng Bloch và mô tả trên mặt cầu Bloch các trạng thái lượng tử ở Câu 1.

2.2 Lời giải

Ta có:

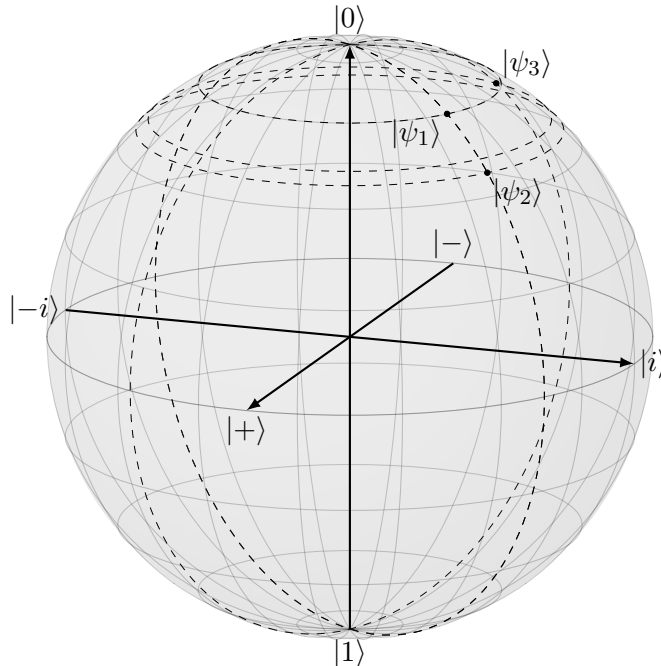
$$\begin{cases} |\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle \\ |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle \\ |\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}e^{0i}|1\rangle \\ |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle \\ |\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{\sqrt{5}}{3}e^{i\arctan(-2)}|1\rangle \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \frac{\pi}{3}, & \phi_1 = \frac{\pi}{6} \\ \theta_2 = \frac{\pi}{2}, & \phi_2 = \frac{\pi}{6} \\ \theta_3 = 2\arccos\frac{2}{3}, & \phi_3 = \arctan(-2) \end{cases}$$

\Rightarrow dạng Bloch của các trạng thái lượng tử $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle$ là:

$$\begin{cases} |\psi_1\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)|1\rangle \\ |\psi_2\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle \\ |\psi_3\rangle = \cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right)|0\rangle + e^{i\arctan(-2)}\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)|1\rangle \end{cases}$$

Mặt cầu Bloch:



3 Bài 3

3.1 Đề bài

Cho U là một toán tử tuyến tính trên \mathbb{C}^2 , biết:

$$U|0\rangle = \frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle,$$

$$U|1\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle.$$

- (a) Chứng minh U là một cổng lượng tử.
- (b) Cho biết kết quả biến đổi U trên các trạng thái $|+\rangle, |-\rangle, |i\rangle, |-i\rangle$.
- (c) Cho biết kết quả biến đổi U trên các trạng thái của Câu 1.
- (d) U tương ứng với phép quay quanh trục nào với góc bao nhiêu trên mặt cầu Bloch?

3.2 Lời giải

3.2.1 Phần a

Ta có:

$$U|0\rangle = \frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle, U|1\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle$$

\Rightarrow ma trận U trong cơ sở $|0\rangle, |1\rangle$ là:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}-i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}+i}{2} \end{bmatrix}$$

Xét biểu thức:

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}+i}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}-i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}-i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}+i}{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \sqrt{2}+i & -1 \\ 1 & \sqrt{2}-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}-i & 1 \\ -1 & \sqrt{2}+i \end{bmatrix} \\ \Rightarrow U^\dagger U &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \end{aligned}$$

$\Rightarrow U$ là một ma trận unita $\Rightarrow U$ là một cổng lượng tử (qcm).

3.2.2 Phần b

Ta có:

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle), |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle), \\ |i\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + i|1\rangle), |-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - i|1\rangle), \end{aligned}$$

Trạng thái $|+\rangle$:

$$\begin{aligned} U|+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (U|0\rangle + U|1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle \right) \\ \Rightarrow U|+\rangle &= \frac{\sqrt{2}+1-i}{2\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}-1+i}{2\sqrt{2}}|1\rangle \end{aligned}$$

Trạng thái $|-\rangle$:

$$\begin{aligned} U|-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (U|0\rangle - U|1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle - \frac{1}{2}|0\rangle - \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle \right) \\ \Rightarrow U|-\rangle &= \frac{\sqrt{2}-1-i}{2\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{\sqrt{2}+1+i}{2\sqrt{2}}|1\rangle \end{aligned}$$

Trạng thái $|i\rangle$:

$$\begin{aligned} U|i\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (U|0\rangle + iU|1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{i}{2}|0\rangle + \frac{i\sqrt{2}-1}{2}|1\rangle \right) \\ \Rightarrow U|i\rangle &= \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{i\sqrt{2}-2}{2}|1\rangle \end{aligned}$$

Trạng thái $|-i\rangle$:

$$\begin{aligned} U|-i\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (U|0\rangle - iU|1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle - \frac{i}{2}|0\rangle - \frac{i\sqrt{2}-1}{2}|1\rangle \right) \\ \Rightarrow U|-i\rangle &= \frac{\sqrt{2}-2i}{2\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{i}{2}|1\rangle \end{aligned}$$

3.2.3 Phần c

Trạng thái $|\psi_1\rangle$:

$$\begin{aligned} U|\psi_1\rangle &= \frac{\sqrt{3}}{2}U|0\rangle + \frac{1}{2}U|1\rangle \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle \right) \\ &= \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{3}}{4}|0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{4}|1\rangle + \frac{1}{4}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{4}|1\rangle \\ \Rightarrow U|\psi_1\rangle &= \frac{\sqrt{6}+1-i\sqrt{3}}{4}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+i}{4}|1\rangle \end{aligned}$$

Trạng thái $|\psi_2\rangle$:

$$\begin{aligned}
 U|\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}U|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)U|1\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}U|0\rangle + \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{i\sqrt{2}}{4}\right)U|1\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle\right) + \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{i\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle\right) \\
 &= \frac{\sqrt{2}-i}{2\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{2\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{8}|0\rangle + \frac{6+2\sqrt{3}+(2+\sqrt{2})i}{8}|1\rangle \\
 \Rightarrow U|\psi_2\rangle &= \frac{4+\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{8}|0\rangle + \frac{6+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+i(2+\sqrt{2})}{8}|1\rangle
 \end{aligned}$$

Trạng thái $|\psi_3\rangle$:

$$\begin{aligned}
 U|\psi_3\rangle &= \frac{2}{3}U|0\rangle + \frac{1-2i}{3}U|1\rangle \\
 &= \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle\right) + \frac{1-2i}{3}\left(\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle\right) \\
 &= \frac{\sqrt{2}-i}{3}|0\rangle - \frac{1}{3}|1\rangle + \frac{1-2i}{6}|0\rangle + \frac{2+\sqrt{2}+i(1-2\sqrt{2})}{6}|1\rangle \\
 \Rightarrow U|\psi_3\rangle &= \frac{2\sqrt{2}+1-4i}{6}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i(1-2\sqrt{2})}{6}|1\rangle
 \end{aligned}$$

3.2.4 Phần d

Vì U là ma trận Unitary, nên tồn tại 2 vector riêng $|u_1\rangle, |u_2\rangle$ lập thành một cơ sở trực chuẩn với các trị riêng $e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}$ sao cho

$$U = e^{i\theta_1}|u_1\rangle\langle u_1| + e^{i\theta_2}|u_2\rangle\langle u_2|, \quad U|u_1\rangle = e^{i\theta_1}|u_1\rangle, \quad U|u_2\rangle = e^{i\theta_2}|u_2\rangle$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
 U &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}-i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}+i}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |u_1\rangle & |u_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow |u_1\rangle &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}-i}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, |u_2\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}+i}{2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
 U|u_1\rangle &= e^{i\theta_1}|u_1\rangle \\
 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{-i\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}-i}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \begin{bmatrix} \sqrt{2}-i \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2} \cos \theta_1 + \sin \theta_1 + i (\sqrt{2} \sin \theta_1 - \cos \theta_1) \\ -\cos \theta_1 - i \sin \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \cos \theta_1 + \sin \theta_1 = 0 \\ \sqrt{2} \sin \theta_1 - \cos \theta_1 = -\sqrt{2} \\ \cos \theta_1 = -\sqrt{2} \\ i \sin \theta_1 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

4 Bài 4

4.1 Đề bài

Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$, $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, $B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau:

- $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$.
- $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle)$.
- $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

4.2 Lời giải

5 Bài 5

5.1 Đề bài

Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$, $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, $B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau:

- $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$.
- $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle)$.
- $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

5.2 Lời giải

6 Bài 6

6.1 Đề bài

Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$, $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, $B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau:

- $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$.
- $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle)$.
- $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

6.2 Lời giải

7 Bài 7

7.1 Đề bài

Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$, $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, $B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau:

- $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle.$
- $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle).$
- $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle.$

7.2 Lời giải

8 Bài 8

8.1 Đề bài

Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$, $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, $B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau:

- $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle.$
- $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle).$
- $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle.$

8.2 Lời giải