ĐẠI HỌC QUỐC GIA TPHCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Exercise 2

Môn học: Nhập môn tính toán lượng tử

Sinh viên thực hiện:

Nguyễn Thiên Ấn - 23122020

Giảng viên môn học:

ThS. Vũ Quốc Hoàng

Nguyễn Ngọc Toàn

Ngày 5 tháng 11 năm 2025

Mục lục

1 Bài 1

1.1 Đề bài

Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}, B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}, B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau:

- $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$.
- $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle\right)$.
- $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

1.2 Lời giải

1.2.1 Phần a

Với cơ sở B_Z, ta có phép đo $|\psi_1\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được 0 với xác suất $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \frac{3}{4}$ và sụp đổ thành $|0\rangle$,
- được 1 với xác suất $\left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}$ và sụp đổ thành $|1\rangle$.

Với cơ sở B_X, ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được $+$ với xác suất $|\langle + \,|\, \psi_2\rangle|^2 = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$ và sụp đổ thành $|+\rangle$,
- được $-$ với xác suất $|\langle - \,|\, \psi_2\rangle|^2 = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$ và sụp đổ thành $|-\rangle$.

Với cơ sở B_Y, ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được i với xác suất $|\langle i \,|\, \psi_2\rangle|^2 = \left|\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i\right|^2 = \frac{1}{2}$ và sụp đổ thành $|i\rangle$,
- được $-i$ với xác suất $|\langle -i \,|\, \psi_2\rangle|^2 = \left|\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i\right|^2 = \frac{1}{2}$ và sụp đổ thành $|-i\rangle$.

1.2.2 Phần b

Với cơ sở B_Z, ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được 0 với xác suất $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$ và sụp đổ thành $|0\rangle$,

- được 1 với xác suất $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}}\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)\right|^2 = \frac{1}{2}$ và sụp đổ thành $|1\rangle$.

Với cơ sở B_X, ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được $+$ với xác suất $|\langle + \,|\, \psi_2\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}\left(1 + \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)\right|^2 = \frac{3}{4}$ và sụp đổ thành $|+\rangle$,
- được $-$ với xác suất $|\langle - \,|\, \psi_2\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}\left(1 - \sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}\right)\right|^2 = \frac{1}{4}$ và sụp đổ thành $|-\rangle$.

Với cơ sở B_Y, ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được i với xác suất $|\langle i \,|\, \psi_2\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right|^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ và sụp đổ thành $|i\rangle$,
- được $-i$ với xác suất $|\langle -i \,|\, \psi_2\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right|^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$và sụp đổ thành $|-i\rangle$.

1.2.3 Phần c

Với cơ sở B_Z, ta có phép đo $|\psi_3\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được 0 với xác suất $\left|\frac{2}{3}\right|^2 = \frac{4}{9}$ và sụp đổ thành $|0\rangle$,
- được 1 với xác suất $\left|\frac{1-2i}{3}\right|^2 = \frac{5}{9}$ và sụp đổ thành $|1\rangle$.

Với cơ sở B_X, ta có phép đo $|\psi_3\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được $+$ với xác suất $|\langle + \,|\, \psi_3\rangle|^2 = \left|\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}i\right|^2 = \frac{13}{18}$ và sụp đổ thành $|+\rangle$,
- được $-$ với xác suất $|\langle - \,|\, \psi_3\rangle|^2 = \left|\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3}i\right|^2 = \frac{5}{18}$ và sụp đổ thành $|-\rangle$.

Với cơ sở B_Y, ta có phép đo $|\psi_3\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được i với xác suất $|\langle i \,|\, \psi_3\rangle|^2 = \left|-\frac{\sqrt{2}}{6}i\right|^2 = \frac{1}{18}$ và sụp đổ thành $|i\rangle$,
- được $-i$ với xác suất $|\langle -i \,|\, \psi_3\rangle|^2 = \left|\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}i\right|^2 = \frac{17}{18}$và sụp đổ thành $|-i\rangle$.

2 Bài 2

2.1 Đề bài

Viết dạng Bloch và mô tả trên mặt cầu Bloch các trạng thái lượng tử ở Câu 1.

2.2 Lời giải

Ta có:

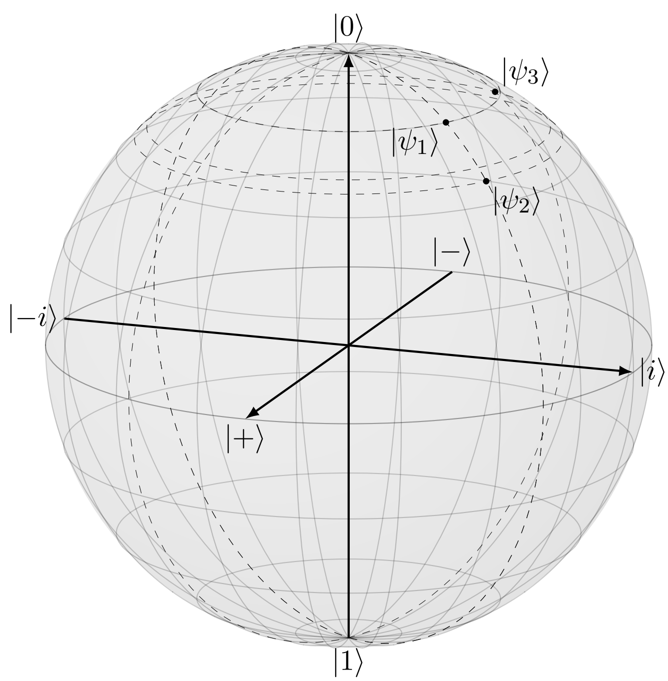
$$\begin{cases} |\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle \\ |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle \\ |\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}e^{0i}|1\rangle \\ |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle \\ |\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{\sqrt{5}}{3}e^{i\arctan(-2)}|1\rangle \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\pi}{3}, & \phi_1 = \dfrac{\pi}{6} \\ \theta_2 = \dfrac{\pi}{2}, & \phi_2 = \dfrac{\pi}{6} \\ \theta_3 = 2\arccos\dfrac{2}{3}, & \phi_3 = \arctan(-2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ dạng Bloch của các trạng thái lượng tử $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle$ là:

$$\begin{cases} |\psi_1\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)|1\rangle \\ |\psi_2\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle \\ |\psi_3\rangle = \cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right)|0\rangle + e^{i\arctan(-2)}\sin\left(\arccos\frac{2}{3}\right)|1\rangle \end{cases}$$

Mặt cầu Bloch:



3 Bài 3

3.1 Đề bài

Cho U là một toán tử tuyến tính trên $\mathbb{C}^2$, biết:

$$U|0\rangle = \frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle,$$

$$U|1\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle.$$

(a) Chứng minh U là một cổng lượng tử.

(b) Cho biết kết quả biến đổi U trên các trạng thái $|+\rangle, |-\rangle, |i\rangle, |-i\rangle$.

(c) Cho biết kết quả biến đổi U trên các trạng thái của Câu 1.

(d) U tương ứng với phép quay quanh trục nào với góc bao nhiêu trên mặt cầu Bloch?

3.2 Lời giải

3.2.1 Phần a

Ta có:

$$U|0\rangle = \frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle, U|1\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle$$

$\Rightarrow$ ma trận U trong cơ sở $|0\rangle, |1\rangle$ là:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}-i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}+i}{2} \end{bmatrix}$$

Xét biểu thức:

$$
\begin{aligned}
U^\dagger U &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}+i}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}-i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}-i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}+i}{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \sqrt{2}+i & -1 \\ 1 & \sqrt{2}-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}-i & 1 \\ -1 & \sqrt{2}+i \end{bmatrix} \\
\Rightarrow U^\dagger U &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow U$ là một ma trận unita $\Rightarrow U$ là một cổng lượng tử (dpcm).

3.2.2 Phần b

Ta có:

$$
|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle), |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle),
$$

$$
|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + i|1\rangle), |-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - i|1\rangle),
$$

Trạng thái $|+\rangle$:

$$
\begin{aligned}
U|+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (U|0\rangle + U|1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle \right) \\
\Rightarrow U|+\rangle &= \frac{\sqrt{2}+1-i}{2\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}-1+i}{2\sqrt{2}}|1\rangle
\end{aligned}
$$

Trạng thái $|-\rangle$:

$$
\begin{aligned}
U|-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (U|0\rangle - U|1\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle - \frac{1}{2}|0\rangle - \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle \right) \\
\Rightarrow U|+\rangle &= \frac{\sqrt{2}-1-i}{2\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{\sqrt{2}+1+i}{2\sqrt{2}}|1\rangle
\end{aligned}
$$

Trạng thái $|i\rangle$:

$$\begin{aligned}
U|i\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(U|0\rangle + iU|1\rangle\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{i}{2}|0\rangle + \frac{i\sqrt{2}-1}{2}|1\rangle\right)\\
\Rightarrow U|i\rangle &= \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{i\sqrt{2}-2}{2}|1\rangle
\end{aligned}$$

Trạng thái $|-i\rangle$:

$$\begin{aligned}
U|-i\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(U|0\rangle - iU|1\rangle\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle - \frac{i}{2}|0\rangle - \frac{i\sqrt{2}-1}{2}|1\rangle\right)\\
\Rightarrow U|-i\rangle &= \frac{\sqrt{2}-2i}{2\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{i}{2}|1\rangle
\end{aligned}$$

3.2.3 Phần c

Trạng thái $|\psi_1\rangle$:

$$\begin{aligned}
U|\psi_1\rangle &= \frac{\sqrt{3}}{2}U|0\rangle + \frac{1}{2}U|1\rangle\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle\right)\\
&= \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{3}}{4}|0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{4}|1\rangle + \frac{1}{4}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{4}|1\rangle\\
\Rightarrow U|\psi_1\rangle &= \frac{\sqrt{6}+1-i\sqrt{3}}{4}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+i}{4}|1\rangle
\end{aligned}$$

Trạng thái $|\psi_2\rangle$:

$$\begin{aligned}
U|\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}U|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)U|1\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}U|0\rangle + \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{i\sqrt{2}}{4}\right)U|1\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle\right) + \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{i\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}-i}{2\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{2\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{8}|0\rangle + \frac{6+2\sqrt{3}+\left(2+\sqrt{2}\right)i}{8}|1\rangle \\
\Rightarrow U|\psi_2\rangle &= \frac{4+\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{8}|0\rangle + \frac{6+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+i\left(2+\sqrt{2}\right)}{8}|1\rangle
\end{aligned}$$

Trạng thái $|\psi_3\rangle$:

$$\begin{aligned}
U|\psi_3\rangle &= \frac{2}{3}U|0\rangle + \frac{1-2i}{3}U|1\rangle \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle\right) + \frac{1-2i}{3}\left(\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}-i}{3}|0\rangle - \frac{1}{3}|1\rangle + \frac{1-2i}{6}|0\rangle + \frac{2+\sqrt{2}+i\left(1-2\sqrt{2}\right)}{6}|1\rangle \\
\Rightarrow U|\psi_3\rangle &= \frac{2\sqrt{2}+1-4i}{6}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i\left(1-2\sqrt{2}\right)}{6}|1\rangle
\end{aligned}$$

3.2.4 Phần d

4 Bài 4

4.1 Đề bài

Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}, B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}, B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau:

- $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$.
- $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle\right)$.
- $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

4.2 Lời giải

5 Bài 5

5.1 Đề bài

Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}, B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}, B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau:

- $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$.
- $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle\right)$.
- $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

5.2 Lời giải

6 Bài 6

6.1 Đề bài

Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}, B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}, B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau:

- $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$.
- $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle\right)$.
- $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

6.2 Lời giải

7 Bài 7

7.1 Đề bài

Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}, B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}, B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau:

- $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$.
- $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle\right)$.
- $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

7.2 Lời giải

8 Bài 8

8.1 Đề bài

Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}, B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}, B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau:

- $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$.
- $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}}|1\rangle\right)$.
- $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

8.2 Lời giải