

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TPHCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Báo cáo Bài Tập Giảm Áp

Môn học: Môn Học Giảm Áp

Sinh viên thực hiện:

Quan, Tran Hoang (19120338)
meadoge(19120000)
Hwang S. Wan (19120000)

Giảng viên môn học:

GS. TS. Nguyễn Văn Hướng Dẫn

Ngày 11 tháng 10 năm 2025



1 Bài 1

1.1 Đề bài

Cho $x = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $y = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

(a) Vẽ hình minh họa x, y trên mặt phẳng phức.

(b) Tìm dạng đại số và dạng cực của x, y .

(c) Tính $\operatorname{Re}(x), \operatorname{Im}(y), |x|, \arg x$.

(d) Tính $\bar{x}, -x, x^{-1}$.

(e) Tính $x + y, x - y, xy, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}$.

(f) Tính x^4 và $x^n, n \in \mathbb{Z}$.

(g) Tính $\sqrt[4]{x}$ và $\sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}^+$.

1.2 Lời giải

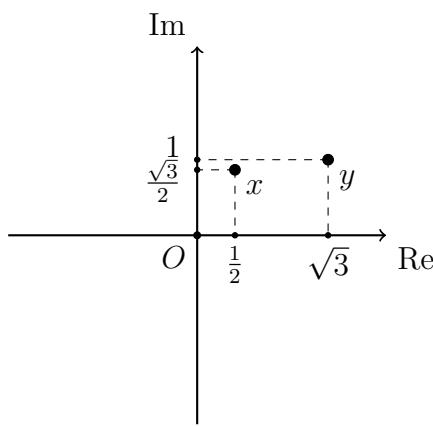
1.2.1 Phân (a)

Ta có:

$$x = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i$$

Mặt phẳng phức:



1.2.2 Phân (b)

- Dạng cực:

$$\begin{aligned}x &= e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \\y &= 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)\end{aligned}$$

- Dạng đại số:

$$\begin{aligned}x &= \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \\y &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i\end{aligned}$$

1.2.3 Phân (c)

Ta có:

$$x = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{Re}(x) = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Im}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|x| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\arg x = \arctan \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

1.2.4 Phân (d)

Ta có:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \overline{\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \\-x &= -\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{\bar{x}}{x\bar{x}} = \frac{\bar{x}}{|x|^2} = \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{(1)^2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

1.2.5 Phàn (e)

Ta có:

$$x + y = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (\sqrt{3} + i) = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\right)$$

$$x - y = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (\sqrt{3} + i) = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right)$$

$$xy = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3} + i) = \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}\right) = 0 + i(2) = 2i$$

$$\frac{x}{y} = \frac{x\bar{y}}{|y|^2} = \frac{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3} - i)}{\left(\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}\right)}{(\sqrt{4})^2} = \frac{\sqrt{3} + i(1)}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$$

$$\frac{y}{x} = \left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i\right)^{-1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i}{\left|\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i\right|^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i}{\frac{1}{4}} = \sqrt{3} - i$$

1.2.6 Phàn (f)

Ta có:

$$x = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow x^4 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Tương tự, với $n \in \mathbb{Z}$:

$$x^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}} = \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}$$

1.2.7 Phàn (g)

Ta có:

$$\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}} = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}i$$

Tương tự, với $n \in \mathbb{N}^+$:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = (e^{i\frac{\pi}{3}})^{\frac{1}{n}} = e^{i\frac{\pi}{3n}} = \cos \frac{\pi}{3n} + i \sin \frac{\pi}{3n}$$

2 Bài 2

2.1 Đề bài

Cho $x, y \in \mathbb{C}$, chứng minh:

(a) $x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$.

(b) $\overline{x^{-1}} = (\bar{x})^{-1}$ ($x \neq 0$).

(c) $|xy| = |x||y|$.

(d) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

2.2 Lời giải

2.2.1 Phân (a)

Giả sử $x = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có:

$$\begin{cases} x\bar{x} = (a + bi)(a - bi) \\ \bar{x}x = (a - bi)(a + bi) = (a + bi)(a - bi) \end{cases} \Rightarrow x\bar{x} = \bar{x}x$$

Lại có:

$$x\bar{x} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

mà $|x|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2 + b^2$

$$\Rightarrow x\bar{x} = |x|^2 \Leftrightarrow x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

2.2.2 Phàn (b)

Giả sử $x = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), ta có:

$$\overline{x^{-1}} = \overline{\frac{\bar{x}}{|x|^2}} = \frac{x}{|x|^2}$$

$$(\bar{x})^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2} = \frac{x}{|x|^2}$$

$$\Rightarrow \overline{x^{-1}} = (\bar{x})^{-1} = \frac{x}{|x|^2} \Rightarrow \text{dpcm.}$$

2.2.3 Phàn (c)

Giả sử $x = a + bi$, $y = c + di$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$), ta có:

$$\begin{cases} |x| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ |y| = \sqrt{c^2 + d^2} \\ xy = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x||y| = (\sqrt{a^2 + b^2})(\sqrt{c^2 + d^2}) = \sqrt{(ac)^2 + (bc)^2 + (ad)^2 + (bd)^2} \\ |xy| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{(ac)^2 + (bc)^2 + (ad)^2 + (bd)^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x||y| = |xy| = \sqrt{(ac)^2 + (bc)^2 + (ad)^2 + (bd)^2} \Rightarrow \text{dpcm.}$$

2.2.4 Phàn (d)

Giả sử $x = a + bi$, $y = c + di$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$), ta có:

$$\begin{cases} |x| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ |y| = \sqrt{c^2 + d^2} \\ |x + y| = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \end{cases}$$

Xét mệnh đề:

$$\begin{aligned}
 & |x + y| \leq |x| + |y| \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \\
 \Leftrightarrow & (a + c)^2 + (b + d)^2 \leq \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \right)^2 \\
 \Leftrightarrow & a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq ac + bd, \text{ (luôn đúng } \forall a, b, c, d \in \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

\Rightarrow mệnh đề được xét đúng $\Rightarrow |x + y| \leq |x| + |y| \Rightarrow$ đpcm.

3 Bài 3

3.1 Đề bài

Cho $|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$, $|\psi\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

- (a) Tính $\langle\phi|$ và $\langle\psi|$.
- (b) Tính $\langle\phi|\psi\rangle$ và $\langle\psi|\phi\rangle$.
- (c) Tính $|\phi\rangle\langle\psi|$ và $|\psi\rangle\langle\phi|$.
- (d) Tính $\langle\phi|\langle\psi|$ và $\langle\psi|\langle\phi|$.
- (e) Tính $\|\phi\|$ và $\|\psi\|$.
- (f) Tính góc giữa $\langle\phi|$ và $\langle\psi|$.
- (g) Tính $\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle$ và $\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle$.
- (h) Chuẩn hoá $\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle$ và $\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle$.
- (i) Tìm toạ độ của $|\phi\rangle$ và $|\psi\rangle$ trong các cơ sở

$$B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}, B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}, B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}.$$

- (j) Cho $|a\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle$, $|b\rangle = \frac{i}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$, chứng minh $B = \{a, b\}$ là một cơ sở trực chuẩn của \mathbb{C}^2 và tìm tọa độ của $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ theo B .

3.2 Lời giải

3.2.1 Phàn (a)

Ta có:

$$\langle\phi| = |\phi\rangle^\dagger = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^\dagger = \left(\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger = \left(\frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1-2i}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^\dagger = \left(\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix} \right)^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} 2 & 1+2i \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

3.2.2 Phàn (b)

Ta có:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi||\psi\rangle = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1-2i}{3} = \frac{1+2\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{3}i$$

$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\psi||\phi\rangle = \begin{bmatrix} 2 & 1+2i \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1+2i}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1+2\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{3}i$$

3.2.3 Phàn (c)

Ta có:

$$|\phi\rangle\langle\psi| = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1+2i \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1+2i}{3} \\ \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \times \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}i \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} + \frac{1}{3}i \end{bmatrix}$$

$$|\psi\rangle\langle\phi| = (|\phi\rangle\langle\psi|)^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}i \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} + \frac{1}{3}i \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{3}i & \frac{1}{6} - \frac{1}{3}i \end{bmatrix}$$

3.2.4 Phân (d)

Ta có:

$$|\phi\rangle|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1+2i}{3} \\ \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \times \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}i \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{3}i \end{bmatrix}$$

$$|\psi\rangle|\phi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\ \frac{1+2i}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+2i}{3} \times \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}i \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{3}i \end{bmatrix}$$

3.2.5 Phân (e)

Ta có:

$$\|\phi\| = \sqrt{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\psi\| = \sqrt{\left|\frac{2}{3}\right|^2 + \left|\frac{1+2i}{3}\right|^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{5}{9}} = \sqrt{1} = 1$$

3.2.6 Phân (f)

Gọi θ là góc giữa $|\phi\rangle$ và $|\psi\rangle$, ta có:

$$\cos \theta = \frac{|\langle \phi, \psi \rangle|}{\|\phi\| \|\psi\|} = \frac{|\langle \phi | \psi \rangle|}{\|\phi\| \|\psi\|}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1} \frac{|\langle \phi | \psi \rangle|}{\|\phi\| \|\psi\|} = \cos^{-1} \frac{\left| \frac{1+2\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{3}i \right|}{1 \times 1} = \cos^{-1} \sqrt{\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2} = \cos^{-1} \sqrt{\frac{17+4\sqrt{3}}{36}}$$

3.2.7 Phân (g)

Ta có:

$$\text{proj}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle = \frac{\langle \psi | \phi \rangle}{\|\psi\|^2} |\psi\rangle = \frac{\frac{1+2\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{3}i}{1} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+2\sqrt{6}}{9} + \frac{2}{9}i \\ \frac{5+2\sqrt{6}}{18} - \frac{2+2\sqrt{6}}{9}i \end{bmatrix}$$

$$\text{proj}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle = \frac{\langle\phi|\psi\rangle}{\| |\phi\rangle\|^2} |\phi\rangle = \frac{\frac{1+2\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{3}i}{1} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6}i \\ \frac{1+2\sqrt{6}}{12} - \frac{1}{6}i \end{bmatrix}$$

3.2.8 Phân (h)

Gọi e_1, e_2 lần lượt là vector chuẩn hoá của $\text{proj}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle, \text{proj}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle$, ta có:

$$\begin{aligned} e_1 &= \text{proj}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle \frac{1}{\| \text{proj}_{|\psi\rangle} |\phi\rangle \|} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1+2\sqrt{6}}{9} - \frac{2}{9}i \\ \frac{5+2\sqrt{6}}{18} - \frac{2+2\sqrt{6}}{9}i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\left| \frac{1+2\sqrt{6}}{9} - \frac{2}{9}i \right|^2 + \left| \frac{5+2\sqrt{6}}{18} - \frac{2+2\sqrt{6}}{9}i \right|^2}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1+2\sqrt{6}}{9} - \frac{2}{9}i \\ \frac{5+2\sqrt{6}}{18} - \frac{2+2\sqrt{6}}{9}i \end{bmatrix} \frac{1}{\left(\frac{1+2\sqrt{6}}{9} \right)^2 + \left(\frac{2}{9} \right)^2 + \left(\frac{5+2\sqrt{6}}{18} \right)^2 + \left(\frac{2+2\sqrt{6}}{9} \right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_2 &= \text{proj}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle \frac{1}{\| \text{proj}_{|\phi\rangle} |\psi\rangle \|} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6}i \\ \frac{1+2\sqrt{6}}{12} - \frac{1}{6}i \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\left| \frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6}i \right|^2 + \left| \frac{1+2\sqrt{6}}{12} - \frac{1}{6}i \right|^2}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6}i \\ \frac{1+2\sqrt{6}}{12} - \frac{1}{6}i \end{bmatrix} \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{12} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2 + \left(\frac{1+2\sqrt{6}}{12} \right)^2 + \left(\frac{1}{6} \right)^2} \end{aligned}$$

3.2.9 Phân (i)

Ta có:

$$|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle, |\psi\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$$

\Rightarrow toạ độ của $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ trong cơ sở trực chuẩn B_Z là:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_Z} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) \\ [|\psi\rangle]_{B_Z} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1-2i}{3} \right) \end{cases}$$

Xét cơ sở trực chuẩn B_X , toạ độ của $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ trong B_X là:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_X} = (\langle + | \phi \rangle, \langle - | \phi \rangle) = \left(\frac{2+\sqrt{6}}{4}, \frac{-2+\sqrt{6}}{4} \right) \\ [|\psi\rangle]_{B_X} = (\langle + | \psi \rangle, \langle - | \psi \rangle) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}i, \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3}i \right) \end{cases}$$

Xét cơ sở trực chuẩn B_Y , toạ độ của $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ trong B_Y là:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_Y} = (\langle i | \phi \rangle, \langle -i | \phi \rangle) = \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i, \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i \right) \\ [|\psi\rangle]_{B_Y} = (\langle i | \psi \rangle, \langle -i | \psi \rangle) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}i, -\frac{\sqrt{2}}{6}i \right) \end{cases}$$

3.2.10 Phản (j)

Gọi $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, xét biểu thức:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 a + \alpha_2 b \\ \Leftrightarrow & \alpha_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) + \alpha_2 \left(\frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ \Leftrightarrow & \left(\alpha_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + \alpha_2 \frac{i}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \left(\alpha_1 \frac{i}{2} + \alpha_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} = 0 = 0 = 0$$

vì tập hợp $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ là tập cơ sở nên biểu thức trên chỉ xảy ra khi

$$\begin{cases} \alpha_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + \alpha_2 \frac{i}{2} = 0 \\ \alpha_1 \frac{i}{2} + \alpha_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha_1 a + \alpha_2 b = 0$ khi và chỉ khi $\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Leftrightarrow B = \{a, b\}$ độc lập tuyến tính.

Ta có:

$$\begin{cases} |a\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{i}{2} \end{bmatrix} \\ |b\rangle = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle a | b \rangle = |a\rangle^\dagger |b\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = 0 \\ \|a\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \\ \|b\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow B = \{a, b\}$ là cơ sở trực chuẩn trong không gian \mathbb{C}^2 .

\Rightarrow toạ độ của $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ trong cơ sở trực chuẩn B là:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_B = (\langle a | \phi \rangle, \langle b | \phi \rangle) = \left(\frac{3}{4} - \frac{i}{4}, \frac{-\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) \\ [|\psi\rangle]_B = (\langle a | \psi \rangle, \langle b | \psi \rangle) = \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{3} - \frac{i}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1+\sqrt{2}}{3}i \right) \end{cases}$$

4 Bài 4

4.1 Đề bài

Cho $x, y \in \mathbb{C}$, chứng minh:

(a) $x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$.

(b) $\overline{x^{-1}} = (\bar{x})^{-1}$ ($x \neq 0$).

(c) $|xy| = |x||y|$.

(d) $|x+y| \leq |x| + |y|$.

4.2 Lời giải

4.2.1 Phân (a)

4.2.2 Phân (b)

4.2.3 Phân (c)

4.2.4 Phân (d)

5 Bài 5

5.1 Đề bài

Cho $x, y \in \mathbb{C}$, chứng minh:

(a) $x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$.

(b) $\overline{x^{-1}} = (\bar{x})^{-1}$ ($x \neq 0$).

(c) $|xy| = |x||y|$.

(d) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

5.2 Lời giải

5.2.1 Phân (a)

5.2.2 Phân (b)

5.2.3 Phân (c)

5.2.4 Phân (d)

6 Bài 6

6.1 Đề bài

Cho $x, y \in \mathbb{C}$, chứng minh:

(a) $x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$.

(b) $\overline{x^{-1}} = (\bar{x})^{-1}$ ($x \neq 0$).(c) $|xy| = |x||y|$.(d) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

6.2 Lời giải

6.2.1 Phản (a)

6.2.2 Phản (b)

6.2.3 Phản (c)

6.2.4 Phản (d)

7 Bài 7

7.1 Đề bài

Cho $x, y \in \mathbb{C}$, chứng minh:

(a) $x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$.(b) $\overline{x^{-1}} = (\bar{x})^{-1}$ ($x \neq 0$).(c) $|xy| = |x||y|$.(d) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

7.2 Lời giải

7.2.1 Phân (a)

7.2.2 Phân (b)

7.2.3 Phân (c)

7.2.4 Phân (d)

8 Bài 8

8.1 Đề bài

Cho $x, y \in \mathbb{C}$, chứng minh:

(a) $x\bar{x} = \bar{x}x = |x|^2$.

(b) $\overline{x^{-1}} = (\bar{x})^{-1}$ ($x \neq 0$).

(c) $|xy| = |x||y|$.

(d) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

8.2 Lời giải

8.2.1 Phân (a)

8.2.2 Phân (b)

8.2.3 Phân (c)

8.2.4 Phân (d)