ĐẠI HỌC QUỐC GIA TPHCM

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Exercise 1

Môn học: Nhập môn tính toán lượng tử

Sinh viên thực hiện:

Nguyễn Thiên Ấn - 23122020

Giảng viên môn học:

ThS. Vũ Quốc Hoàng

Nguyễn Ngọc Toàn

Ngày 21 tháng 10 năm 2025

Mục lục

1 Bài 1

1.1 Đề bài

Cho $x = e^{i\frac{\pi}{3}}, y = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

(a) Vẽ hình minh hoạ x, y trên mặt phẳng phức.

(b) Tìm dạng đại số và dạng cực của x, y.

(c) Tính $\text{Re}(x), \text{Im}(y), |x|, \arg x$.

(d) Tính $\overline{x}, -x, x^{-1}$.

(e) Tính $x + y, x - y, xy, \frac{x}{y}, \frac{y}{x}$.

(f) Tính x^4 và $x^n, n \in \mathbb{Z}$.

(g) Tính $\sqrt[4]{x}$ và $\sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}^+$.

1.2 Lời giải

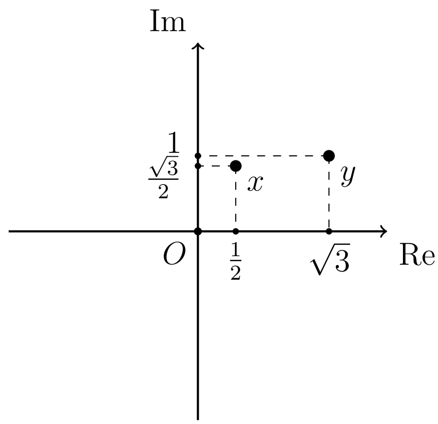
1.2.1 Phần (a)

Ta có:

$$x = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

Mặt phẳng phức:



1.2.2 Phần (b)

- Dạng cực:

$$x = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$
$$y = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

- Dạng đại số:

$$x = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

1.2.3 Phần (c)

Ta có:

$$x = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\mathrm{Re}(x) = \frac{1}{2}$$
$$\mathrm{Im}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$|x| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\arg x = \arctan \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

1.2.4 Phần (d)

Ta có:

$$\overline{x} = \overline{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-x = -\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{\overline{x}}{x\overline{x}} = \frac{\overline{x}}{|x|^2} = \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{(1)^2} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

1.2.5 Phần (e)

Ta có:

$$x + y = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\sqrt{3} + i\right) = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\right)$$

$$x - y = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\sqrt{3} + i\right) = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right)$$

$$xy = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3} + i\right) = \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}\right) = 0 + i(2) = 2i$$

$$\frac{x}{y} = \frac{x\overline{y}}{|y|^2} = \frac{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3} - i\right)}{\left(\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}\right)}{(\sqrt{4})^2} = \frac{\sqrt{3} + i(1)}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$$

$$\frac{y}{x} = \left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i\right)^{-1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i}{\left|\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i\right|^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i}{\frac{1}{4}} = \sqrt{3} - i$$

1.2.6 Phần (f)

Ta có:

$$x = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow x^4 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Tương tự, với $n \in \mathbb{Z}$:

$$x^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}} = \cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}$$

1.2.7 Phần (g)

Ta có:

$$\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}+k2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}+\frac{k}{2}\pi} = \cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k}{2}\pi\right)$$

Tương tự, với $n \in \mathbb{N}^+$:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}+k2\pi}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{i\frac{\pi}{3n}+\frac{k}{n}2\pi} = \cos\left(\frac{\pi}{3n}+\frac{k}{n}2\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3n}+\frac{k}{n}2\pi\right)$$

2 Bài 2

2.1 Đề bài

Cho $x, y \in \mathbb{C}$, chứng minh:

(a) $x\overline{x} = \overline{x}x = |x|^2$.

(b) $\overline{x^{-1}} = (\overline{x})^{-1}$ $(x \neq 0)$.

(c) $|xy| = |x||y|$.

(d) $|x+y| \leq |x| + |y|$.

2.2 Lời giải

2.2.1 Phần (a)

Giả sử $x = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$, ta có:

$$\begin{cases} x\overline{x} = (a+bi)(a-bi) \\ \overline{x}x = (a-bi)(a+bi) = (a+bi)(a-bi) \end{cases} \Rightarrow x\overline{x} = \overline{x}x$$

Lại có:

$$x\overline{x} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

mà $|x|^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2 + b^2$
$\Rightarrow x\overline{x} = |x|^2 \Leftrightarrow x\overline{x} = \overline{x}x = |x|^2 \Rightarrow$ dpcm.

2.2.2 Phần (b)

Giả sử $x = a + bi, (a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$, ta có:

$$\overline{x^{-1}} = \overline{\frac{\overline{x}}{|x|^2}} = \frac{x}{|x|^2}$$

$$(\overline{x})^{-1} = \frac{\overline{\overline{x}}}{|x|^2} = \frac{x}{|x|^2}$$

$\Rightarrow \overline{x^{-1}} = (\overline{x})^{-1} = \dfrac{x}{|x|^2} \Rightarrow$ dpcm.

2.2.3 Phần (c)

Giả sử $x = a + bi, y = c + di, (a, b, c, d \in \mathbb{R})$, ta có:

$$\begin{cases} |x| = \sqrt{a^2+b^2} \\ |y| = \sqrt{c^2+d^2} \\ xy = (a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x||y| = (\sqrt{a^2+b^2})(\sqrt{c^2+d^2}) = \sqrt{(ac)^2+(bc)^2+(ad)^2+(bd)^2} \\ |xy| = \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2} = \sqrt{(ac)^2+(bc)^2+(ad)^2+(bd)^2} \end{cases}$$

$\Rightarrow |x||y| = |xy| = \sqrt{(ac)^2+(bc)^2+(ad)^2+(bd)^2} \Rightarrow$ dpcm.

2.2.4 Phần (d)

Giả sử $x = a + bi, y = c + di, (a, b, c, d \in \mathbb{R})$, ta có:

$$\begin{cases} |x| = \sqrt{a^2+b^2} \\ |y| = \sqrt{c^2+d^2} \\ |x+y| = \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} \end{cases}$$

Xét mệnh đề:

$$
\begin{aligned}
|x+y| &\le |x|+|y| \\
\Leftrightarrow \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} &\le \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \\
\Leftrightarrow (a+c)^2+(b+d)^2 &\le \left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2 &\le a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
\Leftrightarrow \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} &\ge ac+bd,\ \text{(luôn đúng } \forall a,b,c,d\in\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ mệnh đề được xét đúng $\Rightarrow |x+y| \le |x|+|y| \Rightarrow$ dpcm.

3 Bài 3

3.1 Đề bài

Cho $|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle, |\psi\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$.

(a) Tính $\langle\phi|$ và $\langle\psi|$.

(b) Tính $\langle\phi\,|\,\psi\rangle$ và $\langle\psi\,|\,\phi\rangle$.

(c) Tính $|\phi\rangle\langle\psi|$ và $|\psi\rangle\langle\phi|$.

(d) Tính $\langle\phi|\langle\psi|$ và $\langle\psi|\langle\phi|$.

(e) Tính $\|\phi\|$ và $\|\psi\|$.

(f) Tính góc giữa $\langle\phi|$ và $\langle\psi|$.

(g) Tính $\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle$ và $\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle$.

(h) Chuẩn hoá $\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle$ và $\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle$.

(i) Tìm toạ độ của $|\phi\rangle$ và $|\psi\rangle$ trong các cơ sở

$$B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}, B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}, B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}.$$

(j) Cho $|a\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle, |b\rangle = \frac{i}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$, chứng minh $B = \{a, b\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{C}^2$ và tìm toạ độ của $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ theo B.

3.2 Lời giải

3.2.1 Phần (a)

Ta có:

$$\langle\phi| = |\phi\rangle^\dagger = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)^\dagger = \left(\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}\right)^\dagger = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger = \left(\frac{2}{3}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \frac{1-2i}{3}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)^\dagger = \left(\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}\right)^\dagger = \begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1-2i}{3}\end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1+2i}{3}\end{bmatrix}$$

3.2.2 Phần (b)

Ta có:

$$\langle\phi\,|\,\psi\rangle = \langle\phi||\psi\rangle = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1-2i}{3}\end{bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\times\frac{1-2i}{3} = \frac{1+2\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{3}i$$

$$\langle\psi\,|\,\phi\rangle = \langle\psi||\phi\rangle = \begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1+2i}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix} = \frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1+2i}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{1+2\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{3}i$$

3.2.3 Phần (c)

Ta có:

$$|\phi\rangle\langle\psi| = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1+2i}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1+2i}{3}\\\frac{1}{2}\times\frac{2}{3} & \frac{1}{2}\times\frac{1+2i}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{3}i\\\frac{1}{3} & \frac{1}{6}+\frac{1}{3}i\end{bmatrix}$$

$$|\psi\rangle\langle\phi| = (|\phi\rangle\langle\psi|)^\dagger = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{3}i\\\frac{1}{3} & \frac{1}{6}+\frac{1}{3}i\end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{3}i & \frac{1}{6}-\frac{1}{3}i\end{bmatrix}$$

3.2.4 Phần (d)

Ta có:

$$|\phi\rangle|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1+2i}{3} \\ \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \times \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}i \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{3}i \end{bmatrix}$$

$$|\psi\rangle|\phi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1+2i}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\ \frac{1+2i}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+2i}{3} \times \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}i \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{3}i \end{bmatrix}$$

3.2.5 Phần (e)

Ta có:

$$\|\phi\| = \sqrt{\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\psi\| = \sqrt{\left|\frac{2}{3}\right|^2 + \left|\frac{1+2i}{3}\right|^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{5}{9}} = \sqrt{1} = 1$$

3.2.6 Phần (f)

Gọi θ là góc giữa $|\phi\rangle$ và $|\psi\rangle$, ta có:

$$\cos\theta = \frac{|\langle \phi, \psi\rangle|}{|\phi|\,|\psi|} = \frac{|\langle \phi \mid \psi\rangle|}{\|\phi\|\|\psi\|}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{|\langle \phi \mid \psi\rangle|}{\|\phi\|\|\psi\|} = \cos^{-1}\frac{\left|\frac{1+2\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{3}i\right|}{1 \times 1} = \cos^{-1}\sqrt{\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \cos^{-1}\sqrt{\frac{17+4\sqrt{3}}{36}}$$

3.2.7 Phần (g)

Ta có:

$$\mathrm{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle = \frac{\langle \psi \mid \phi\rangle}{\||\psi\rangle\|^2}|\psi\rangle = \frac{\frac{1+2\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{3}i}{1} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1-2i}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+2\sqrt{6}}{9} + \frac{2}{9}i \\ \frac{5+2\sqrt{6}}{18} - \frac{2+2\sqrt{6}}{9}i \end{bmatrix}$$

$$\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle = \frac{\langle\phi \mid \psi\rangle}{\||\phi\rangle\|^2}|\phi\rangle = \frac{\frac{1+2\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{3}i}{1}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\\ \frac{1+2\sqrt{6}}{12} - \frac{1}{6}i\end{bmatrix}$$

3.2.8 Phần (h)

Gọi e_1, e_2 lần lượt là vector chuẩn hoá của $\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle, \text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle$, ta có:

$$\begin{aligned}
e_1 &= \text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle \frac{1}{\|\text{proj}_{|\psi\rangle}|\phi\rangle\|}\\
&= \begin{bmatrix}\frac{1+2\sqrt{6}}{9} - \frac{2}{9}i\\ \frac{5+2\sqrt{6}}{18} - \frac{2+2\sqrt{6}}{9}i\end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\left|\frac{1+2\sqrt{6}}{9} - \frac{2}{9}i\right|^2 + \left|\frac{5+2\sqrt{6}}{18} - \frac{2+2\sqrt{6}}{9}i\right|^2}}\\
&= \begin{bmatrix}\frac{1+2\sqrt{6}}{9} - \frac{2}{9}i\\ \frac{5+2\sqrt{6}}{18} - \frac{2+2\sqrt{6}}{9}i\end{bmatrix} \frac{1}{\left(\frac{1+2\sqrt{6}}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{5+2\sqrt{6}}{18}\right)^2 + \left(\frac{2+2\sqrt{6}}{9}\right)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_2 &= \text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle \frac{1}{\|\text{proj}_{|\phi\rangle}|\psi\rangle\|}\\
&= \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\\ \frac{1+2\sqrt{6}}{12} - \frac{1}{6}i\end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\left|\frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\right|^2 + \left|\frac{1+2\sqrt{6}}{12} - \frac{1}{6}i\right|^2}}\\
&= \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\\ \frac{1+2\sqrt{6}}{12} - \frac{1}{6}i\end{bmatrix} \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{12}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{1+2\sqrt{6}}{12}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2}
\end{aligned}$$

3.2.9 Phần (i)

Ta có:

$$|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle, |\psi\rangle = \frac{2}{3}|0\rangle + \frac{1-2i}{3}|1\rangle$$

$\Rightarrow$ toạ độ của $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ trong cơ sở trực chuẩn B_Z là:

$$\begin{cases}[|\phi\rangle]_{B_Z} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)\\ [|\psi\rangle]_{B_Z} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1-2i}{3}\right)\end{cases}$$

Xét cơ sở trực chuẩn B_X, toạ độ của $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ trong B_X là:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_X} = (\langle + \,|\, \phi\rangle, \langle - \,|\, \phi\rangle) = \left(\frac{2+\sqrt{6}}{4}, \frac{-2+\sqrt{6}}{4}\right) \\ [|\psi\rangle]_{B_X} = (\langle + \,|\, \psi\rangle, \langle - \,|\, \psi\rangle) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}i, \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3}i\right) \end{cases}$$

Xét cơ sở trực chuẩn B_Y, toạ độ của $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ trong B_Y là:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_{B_Y} = (\langle i \,|\, \phi\rangle, \langle -i \,|\, \phi\rangle) = \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i, -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i\right) \\ [|\psi\rangle]_{B_Y} = (\langle i \,|\, \psi\rangle, \langle -i \,|\, \psi\rangle) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}i, -\frac{\sqrt{2}}{6}i\right) \end{cases}$$

3.2.10 Phần (j)

Gọi $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, xét biểu thức:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 a + \alpha_2 b && = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \alpha_1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} + \frac{i}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\right) + \alpha_2 \left(\frac{i}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\right) && = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(\alpha_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + \alpha_2 \frac{i}{2}\right)\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} + \left(\alpha_1 \frac{i}{2} + \alpha_2 \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} && = 0 \end{aligned}$$

vì tập hợp $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ là tập cơ sở nên biểu thức trên chỉ xảy ra khi

$$\begin{cases} \alpha_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + \alpha_2 \frac{i}{2} = 0 \\ \alpha_1 \frac{i}{2} + \alpha_2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha_1 a + \alpha_2 b = 0$ khi và chỉ khi $\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Leftrightarrow B = \{a, b\}$ độc lập tuyến tính.

Ta có:

$$\begin{cases} |a\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix} + \frac{i}{2}\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{i}{2}\end{bmatrix} \\ |b\rangle = \frac{i}{2}\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{i}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle a \mid b \rangle = |a\rangle^\dagger |b\rangle = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = 0 \\ \|a\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \\ \|b\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow B = \{a, b\}$ là cơ sơ trực chuẩn trong không gian $\mathbb{C}^2$.

$\Rightarrow$ toạ độ của $|\phi\rangle, |\psi\rangle$ trong cơ sở trực chuẩn B là:

$$\begin{cases} [|\phi\rangle]_B = (\langle a \mid \phi \rangle, \langle b \mid \phi \rangle) = \left(\frac{3}{4} - \frac{i}{4}, \frac{-\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i\right) \\ [|\psi\rangle]_B = (\langle a \mid \psi \rangle, \langle b \mid \psi \rangle) = \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{3} - \frac{i}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1+\sqrt{2}}{3} i\right) \end{cases}$$

4 Bài 4

4.1 Đề bài

Cho U là toán tử trên $\mathbb{C}^2$ với

$$U|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, U|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Tìm biểu diễn của U trong cơ sở chính tắc $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$.

(b) Cho $|\phi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$, tìm $U|\phi\rangle$.

(c) U có unita không?

(d) U có Hermite không?

(e) Tìm $U^\dagger, U^{-1}$.

(f) Tìm $HUH|0\rangle, HUH|1\rangle$ và HUH (H là ma trận Hadamard).

(g) Tìm $UHU|0\rangle, UHU|1\rangle$ và UHU.

4.2 Lời giải

4.2.1 Phần (a)

Ta có:

$$[U]_{B_Z} = \begin{bmatrix} U|0\rangle & U|1\rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ biểu diễn của U trong cơ sở chính tắc B_Z là $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$.

4.2.2 Phần (b)

Ta có:

$$U|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \alpha - \beta \\ \beta - \alpha \end{bmatrix}$$

4.2.3 Phần (c)

Xét biểu thức:

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \end{aligned}$$

và

$$
\begin{aligned}
UU^\dagger &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow U^\dagger U = UU^\dagger = I \Rightarrow$ U unita.

4.2.4 Phần (d)

Ta có:

$$
\begin{cases}
U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \\
U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}
\end{cases}
$$

$\Rightarrow U^\dagger \neq U \Rightarrow$ U không là Hermite.

4.2.5 Phần (e)

Ta có:

$$
U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}
$$

vì U là ma trận unita, nên U khả nghịch và

$$
U^{-1} = U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}
$$

4.2.6 Phần (f)

H là ma trận Hadamard $\Rightarrow H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow HUH &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1-i & 1-i\\ 1+i & -1-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}2-2i & 0\\ 0 & 2+2i\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1-i & 0\\ 0 & 1+i\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} HUH|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1-i\\ 0\end{bmatrix}\\ HUH|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\ 1+i\end{bmatrix}\end{cases}$$

4.2.7 Phần (g)

Ta có:

$$
\begin{aligned}
UHU &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1-i & 1+i\\ 1-i & -1-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}2-2i & 0\\ 0 & -2-2i\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1-i & 0\\ 0 & -1-i\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases} UHU|0\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1-i\\ 0\end{bmatrix}\\ UHU|1\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\ -1-i\end{bmatrix}\end{cases}
$$

5 Bài 5

5.1 Đề bài

Chứng minh $XY = iZ$ bằng cách:

(a) Nhân ma trận.

(b) Xét tác động của các toán tử trên $|0\rangle, |1\rangle$.

5.2 Lời giải

5.2.1 Phần (a)

Ta có:

$$
X = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}
$$

$$\Rightarrow \begin{cases} XY = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \\ iZ = i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \end{cases}$$

$\Rightarrow XY = iZ = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \Rightarrow$ dpcm.

5.2.2 Phần (b)

Ta có:

$$X|0\rangle = |1\rangle, X|1\rangle = |0\rangle$$
$$Y|0\rangle = i|1\rangle, Y|1\rangle = -i|0\rangle$$
$$Z|0\rangle = |0\rangle, Z|1\rangle = -|1\rangle$$

Xét biểu thức sau:

$$XY|0\rangle = X\left(Y|0\rangle\right) = X\left(i|1\rangle\right) = iX|1\rangle = i|0\rangle = i\left(Z|0\rangle\right) \Leftrightarrow XY|0\rangle = iZ|0\rangle.$$

$$XY|1\rangle = X\left(Y|1\rangle\right) = X\left(-i|0\rangle\right) = -iX|0\rangle = -i|1\rangle = i\left(Z|1\rangle\right) \Leftrightarrow XY|1\rangle = iZ|1\rangle.$$

Vì $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ là tập cơ sở nên $XY = iZ \Rightarrow$ dpcm.

6 Bài 6

6.1 Đề bài

Cho $|\phi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}+i}{4}|11\rangle$

(a) Cho thấy $|\phi\rangle$ là vector đơn vị.

(b) Tính $\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle$ và chuẩn hoá $\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle$.

(c) Tính toạ độ của $|\phi\rangle$ theo cơ sở Bell.

6.2 Lời giải

6.2.1 Phần (a)

Ta có:

$$\begin{aligned}
|\phi\rangle &= \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}+i}{4}|11\rangle \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+i}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow |\phi\rangle &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+i}{4} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \||\phi\rangle\| = \sqrt{\left|\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right|^2 + \left|\frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = 1$$

$\Rightarrow |\phi\rangle$ là vector đơn vị.

6.2.2 Phần (b)

Ta có:

$$|+-\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \langle +-| = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle = \frac{\langle +- \mid \phi\rangle}{\||+-\rangle\|^2}|+-\rangle \\
&\Rightarrow \text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle = \left(\frac{\sqrt{3}-2}{8} + \frac{1-2\sqrt{2}}{8}i\right)|+-\rangle
\end{aligned}$$

Chuẩn hoá $\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle$, ta được:

$$e = \frac{\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle}{\|\text{proj}_{|+-\rangle}|\phi\rangle\|} = \frac{\sqrt{3}-2+(1-2\sqrt{2})i}{\sqrt{\left(\sqrt{3}-2\right)^2+\left(1-2\sqrt{2}\right)^2}}|+-\rangle = \frac{\sqrt{3}-2+(1-2\sqrt{2})i}{\sqrt{16-4\sqrt{3}-4\sqrt{2}}}|+-\rangle$$

6.2.3 Phần (c)

Cơ sở Bell là:

$$B = \left\{ |\Phi^+\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, |\Phi^-\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, |\Psi^+\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, |\Psi^-\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} [|\phi\rangle]_B &= \big(\langle\Phi^+ \mid \phi\rangle, \langle\Phi^- \mid \phi\rangle, \langle\Psi^+ \mid \phi\rangle, \langle\Psi^- \mid \phi\rangle\big) \\ &= \big(|\Phi^+\rangle^\dagger|\phi\rangle, |\Phi^-\rangle^\dagger|\phi\rangle, |\Psi^+\rangle^\dagger|\phi\rangle, |\Psi^-\rangle^\dagger|\phi\rangle\big) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}+3i}{4\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}+i}{4\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ toạ độ của $|\phi\rangle$ trong cơ sở Bell là $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+3i}{4\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}+i}{4\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

7 Bài 7

7.1 Đề bài

Kiểm tra các vector sau có phân tách được

(a) $|\phi_1\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$.

(b) $|\phi_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(\sqrt{3}|00\rangle - \sqrt{3}|01\rangle + |10\rangle - |11\rangle\big)$.

(c) $|\phi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + i|11\rangle)$.

(d) $|\phi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1-\rangle$.

7.2 Lời giải

7.2.1 Phần (a)

Ta có:

$$\begin{aligned}
|\phi_1\rangle &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
\Rightarrow |\phi_1\rangle &= |+\rangle \otimes |-\rangle
\end{aligned}$$

Vậy vector $|\phi_1\rangle$ phân tách được.

7.2.2 Phần (b)

Ta có:

$$\begin{aligned}
|\phi_2\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
\Rightarrow |\phi_2\rangle &= \left(\frac{\sqrt{3}|0\rangle + |1\rangle}{2} \right) \otimes |-\rangle
\end{aligned}$$

Vậy vector $|\phi_2\rangle$ phân tách được.

7.2.3 Phần (c)

Ta có:

$$\begin{aligned}
|\phi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\
\Rightarrow |\phi_3\rangle &= |1\rangle \otimes |i\rangle
\end{aligned}$$

Vậy vector $|\phi_3\rangle$ phân tách được.

7.2.4 Phần (d)

Giả sử $|\phi_4\rangle$ tách được, ta có:

$$|\tau\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, |\psi\rangle = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

sao cho

$$|\phi_4\rangle = |\tau\rangle|\psi\rangle \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ac = ad = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ bc = -bd = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \qquad (a, b, c, d \neq 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = d = \frac{1}{a\sqrt{6}} \\ c = -d = \frac{1}{b\sqrt{3}} \end{cases} \qquad \Rightarrow (c = d) \vee (c = -d) \Leftrightarrow d = -d = 0$$

Vô lý vì $a, b, c, d \neq 0$, suy ra $|\phi_4\rangle$ không tách được.

8 Bài 8

8.1 Đề bài

Cho $|\phi\rangle = \frac{1}{4}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle$

(a) Tính $(H \otimes X)\,|\phi\rangle$.

(b) Tính CNOT $|\phi\rangle$.

8.2 Lời giải

$$
\begin{aligned}
|\phi\rangle &= \frac{1}{4}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}|11\rangle \\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{4}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \\
\Rightarrow |\phi\rangle &= \begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{\sqrt{3}}{4}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

8.2.1 Phần (a)

Ta có:

$$
H \otimes X = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & -1\\1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}
$$

$$
\Rightarrow (H \otimes X)\,|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{1}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}
$$

8.2.2 Phần (b)

Ta có:

$$
\text{CNOT} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}
$$

$$\Rightarrow \text{CNOT}\,|\phi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$