

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Exercise 2

Môn học: Nhập môn tính toán lượng tử

Sinh viên thực hiện:

Nguyễn Thiên Ân - 23122020

Giảng viên môn học:

ThS. Vũ Quốc Hoàng

Nguyễn Ngọc Toàn

Ngày 20 tháng 11 năm 2025



Mục lục

1	Bài 1	3
1.1	Đề bài	3
1.2	Lời giải	3
1.2.1	Phần a	3
1.2.2	Phần b	3
1.2.3	Phần c	4
2	Bài 2	4
2.1	Đề bài	4
2.2	Lời giải	5
3	Bài 3	6
3.1	Đề bài	6
3.2	Lời giải	6
3.2.1	Phần a	6
3.2.2	Phần b	7
3.2.3	Phần c	8
3.2.4	Phần d	9
4	Bài 4	11
4.1	Đề bài	11
4.2	Lời giải	11
4.2.1	Phần a	11
4.2.2	Phần b	12
4.2.3	Phần c	12
5	Bài 5	13
5.1	Đề bài	13
5.2	Lời giải	13
5.2.1	Phần a	13
5.2.2	Phần b	14

5.2.3	Phần c	15
5.2.4	Phần d	16
6	Bài 6	17
6.1	Đề bài	17
6.2	Lời giải	17
6.2.1	Phần a	17
6.2.2	Phần b	17
6.2.3	Phần c	18
6.2.4	Phần d	18
6.2.5	Phần e	18
7	Bài 7	18
7.1	Đề bài	18
7.2	Lời giải	19
7.2.1	Phần a	19
7.2.2	Phần b	20
7.2.3	Phần c	20
7.2.4	Phần d	20
8	Bài 8	21
8.1	Đề bài	21
8.2	Lời giải	21
8.2.1	Phần a	21
8.2.2	Phần b	21
8.2.3	Phần c	22

1 Bài 1

1.1 Đề bài

Khảo sát phép đo theo các cơ sở $B_Z = \{|0\rangle, |1\rangle\}$, $B_X = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, $B_Y = \{|i\rangle, |-i\rangle\}$ của các trạng thái lượng tử sau:

- $|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |0\rangle + \frac{1}{2} |1\rangle$.
- $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}} |1\rangle)$.
- $|\psi_3\rangle = \frac{2}{3} |0\rangle + \frac{1-2i}{3} |1\rangle$.

1.2 Lời giải

1.2.1 Phần a

Với cơ sở B_Z , ta có phép đo $|\psi_1\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được 0 với xác suất $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \frac{3}{4}$ và sụp đổ thành $|0\rangle$,
- được 1 với xác suất $\left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}$ và sụp đổ thành $|1\rangle$.

Với cơ sở B_X , ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được + với xác suất $|\langle +|\psi_2\rangle|^2 = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$ và sụp đổ thành $|+\rangle$,
- được - với xác suất $|\langle -|\psi_2\rangle|^2 = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$ và sụp đổ thành $|-\rangle$.

Với cơ sở B_Y , ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được i với xác suất $|\langle i|\psi_2\rangle|^2 = \left|\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i\right|^2 = \frac{1}{2}$ và sụp đổ thành $|i\rangle$,
- được $-i$ với xác suất $|\langle -i|\psi_2\rangle|^2 = \left|\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i\right|^2 = \frac{1}{2}$ và sụp đổ thành $|-i\rangle$.

1.2.2 Phần b

Với cơ sở B_Z , ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được 0 với xác suất $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$ và sụp đổ thành $|0\rangle$,

- được 1 với xác suất $\left| \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{6}} \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6} \right) \right|^2 = \frac{1}{2}$ và sụp đổ thành $|1\rangle$.

Với cơ sở B_X , ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được + với xác suất $|\langle +|\psi_2\rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} \left(1 + \sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6} \right) \right|^2 = \frac{3}{4}$ và sụp đổ thành $|+\rangle$,
- được - với xác suất $|\langle -|\psi_2\rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} \left(1 - \sin \frac{\pi}{6} - i \cos \frac{\pi}{6} \right) \right|^2 = \frac{1}{4}$ và sụp đổ thành $|-\rangle$.

Với cơ sở B_Y , ta có phép đo $|\psi_2\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được i với xác suất $|\langle i|\psi_2\rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right|^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ và sụp đổ thành $|i\rangle$,
- được $-i$ với xác suất $|\langle -i|\psi_2\rangle|^2 = \left| \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right|^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ và sụp đổ thành $|-i\rangle$.

1.2.3 Phần c

Với cơ sở B_Z , ta có phép đo $|\psi_3\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được 0 với xác suất $\left| \frac{2}{3} \right|^2 = \frac{4}{9}$ và sụp đổ thành $|0\rangle$,
- được 1 với xác suất $\left| \frac{1-2i}{3} \right|^2 = \frac{5}{9}$ và sụp đổ thành $|1\rangle$.

Với cơ sở B_X , ta có phép đo $|\psi_3\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được + với xác suất $|\langle +|\psi_3\rangle|^2 = \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}i \right|^2 = \frac{13}{18}$ và sụp đổ thành $|+\rangle$,
- được - với xác suất $|\langle -|\psi_3\rangle|^2 = \left| \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3}i \right|^2 = \frac{5}{18}$ và sụp đổ thành $|-\rangle$.

Với cơ sở B_Y , ta có phép đo $|\psi_3\rangle$ sẽ cho 1 trong 2 kết quả sau:

- được i với xác suất $|\langle i|\psi_3\rangle|^2 = \left| -\frac{\sqrt{2}}{6}i \right|^2 = \frac{1}{18}$ và sụp đổ thành $|i\rangle$,
- được $-i$ với xác suất $|\langle -i|\psi_3\rangle|^2 = \left| \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}i \right|^2 = \frac{17}{18}$ và sụp đổ thành $|-i\rangle$.

2 Bài 2

2.1 Đề bài

Viết dạng Bloch và mô tả trên mặt cầu Bloch các trạng thái lượng tử ở Câu 1.

2.2 Lời giải

Ta có:

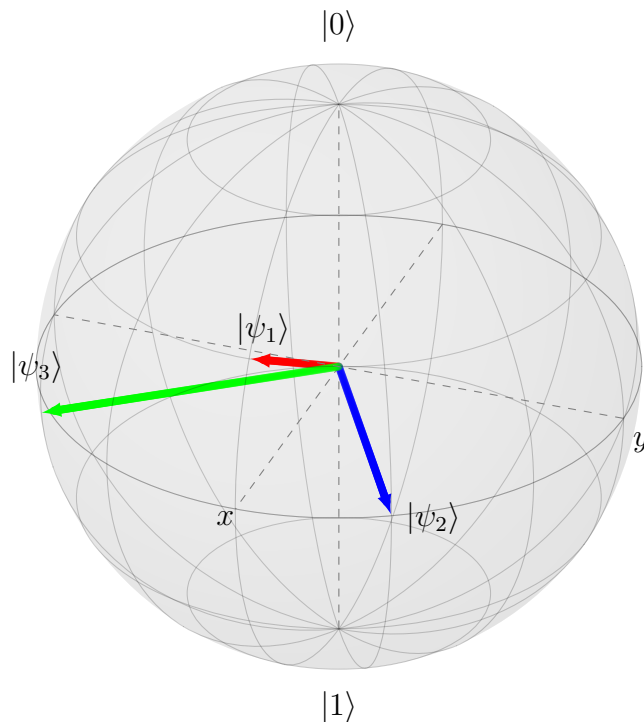
$$\begin{cases} |\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |0\rangle + \frac{1}{2} |1\rangle \\ |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{6}} |1\rangle \\ |\psi_3\rangle = \frac{2}{3} |0\rangle + \frac{1-2i}{3} |1\rangle \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |0\rangle + \frac{1}{2} e^{i0} |1\rangle \\ |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{6}} |1\rangle \\ |\psi_3\rangle = \frac{2}{3} |0\rangle + \frac{\sqrt{5}}{3} e^{i\arctan(-2)} |1\rangle \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \frac{\pi}{3}, & \phi_1 = 0 \\ \theta_2 = \frac{\pi}{2}, & \phi_2 = \frac{\pi}{6} \\ \theta_3 = 2 \arccos \frac{2}{3}, & \phi_3 = \arctan(-2) \end{cases}$$

\Rightarrow dạng Bloch của các trạng thái lượng tử $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle$ là:

$$\begin{cases} |\psi_1\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) |0\rangle + e^{i0} \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) |1\rangle \\ |\psi_2\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) |0\rangle + e^{i\frac{\pi}{6}} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) |1\rangle \\ |\psi_3\rangle = \cos\left(\arccos \frac{2}{3}\right) |0\rangle + e^{i\arctan(-2)} \sin\left(\arccos \frac{2}{3}\right) |1\rangle \end{cases}$$

Mặt cầu Bloch:



3 Bài 3

3.1 Đề bài

Cho U là một toán tử tuyến tính trên \mathbb{C}^2 , biết:

$$U|0\rangle = \frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle,$$

$$U|1\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle.$$

- (a) Chứng minh U là một cổng lượng tử.
- (b) Cho biết kết quả biến đổi U trên các trạng thái $|+\rangle, |-\rangle, |i\rangle, |-i\rangle$.
- (c) Cho biết kết quả biến đổi U trên các trạng thái của Câu 1.
- (d) U tương ứng với phép quay quanh trục nào với góc bao nhiêu trên mặt cầu Bloch?

3.2 Lời giải

3.2.1 Phần a

Ta có:

$$U|0\rangle = \frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle, U|1\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle$$

\Rightarrow ma trận U trong cơ sở $|0\rangle, |1\rangle$ là:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}-i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}+i}{2} \end{bmatrix}$$

Xét biểu thức:

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}+i}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}-i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}-i}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}+i}{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \sqrt{2}+i & -1 \\ 1 & \sqrt{2}-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}-i & 1 \\ -1 & \sqrt{2}+i \end{bmatrix} \\ \Rightarrow U^\dagger U &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \end{aligned}$$

$\Rightarrow U$ là một ma trận unita $\Rightarrow U$ là một cổng lượng tử (đpcm).

3.2.2 Phần b

Ta có:

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle), |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle), \\ |i\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + i|1\rangle), |-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - i|1\rangle), \end{aligned}$$

Trạng thái $|+\rangle$:

$$\begin{aligned} U|+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (U|0\rangle + U|1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}-i}{2} |0\rangle - \frac{1}{2} |1\rangle + \frac{1}{2} |0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2} |1\rangle \right) \\ \Rightarrow U|+\rangle &= \frac{\sqrt{2}+1-i}{2\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{\sqrt{2}-1+i}{2\sqrt{2}} |1\rangle \end{aligned}$$

Trạng thái $|-\rangle$:

$$\begin{aligned} U|-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (U|0\rangle - U|1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}-i}{2} |0\rangle - \frac{1}{2} |1\rangle - \frac{1}{2} |0\rangle - \frac{\sqrt{2}+i}{2} |1\rangle \right) \\ \Rightarrow U|-\rangle &= \frac{\sqrt{2}-1-i}{2\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{\sqrt{2}+1+i}{2\sqrt{2}} |1\rangle \end{aligned}$$

Trạng thái $|i\rangle$:

$$\begin{aligned} U|i\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (U|0\rangle + iU|1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}-i}{2} |0\rangle - \frac{1}{2} |1\rangle + \frac{i}{2} |0\rangle + \frac{i\sqrt{2}-1}{2} |1\rangle \right) \\ \Rightarrow U|i\rangle &= \frac{1}{2} |0\rangle + \frac{i\sqrt{2}-2}{2} |1\rangle \end{aligned}$$

Trạng thái $|-i\rangle$:

$$\begin{aligned} U|-i\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (U|0\rangle - iU|1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}-i}{2} |0\rangle - \frac{1}{2} |1\rangle - \frac{i}{2} |0\rangle - \frac{i\sqrt{2}-1}{2} |1\rangle \right) \\ \Rightarrow U|-i\rangle &= \frac{\sqrt{2}-2i}{2\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{i}{2} |1\rangle \end{aligned}$$

3.2.3 Phần c

Trạng thái $|\psi_1\rangle$:

$$\begin{aligned} U|\psi_1\rangle &= \frac{\sqrt{3}}{2} U|0\rangle + \frac{1}{2} U|1\rangle \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}-i}{2} |0\rangle - \frac{1}{2} |1\rangle \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} |0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2} |1\rangle \right) \\ &= \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{3}}{4} |0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{4} |1\rangle + \frac{1}{4} |0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{4} |1\rangle \\ \Rightarrow U|\psi_1\rangle &= \frac{\sqrt{6}+1-i\sqrt{3}}{4} |0\rangle + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+i}{4} |1\rangle \end{aligned}$$

Trạng thái $|\psi_2\rangle$:

$$\begin{aligned}
 U|\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}U|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)U|1\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}U|0\rangle + \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{i\sqrt{2}}{4}\right)U|1\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle\right) + \left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{i\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle\right) \\
 &= \frac{\sqrt{2}-i}{2\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{2\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{8}|0\rangle + \frac{6+2\sqrt{3}+(2+\sqrt{2})i}{8}|1\rangle \\
 \Rightarrow U|\psi_2\rangle &= \frac{4+\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{8}|0\rangle + \frac{6+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}+i(2+\sqrt{2})}{8}|1\rangle
 \end{aligned}$$

Trạng thái $|\psi_3\rangle$:

$$\begin{aligned}
 U|\psi_3\rangle &= \frac{2}{3}U|0\rangle + \frac{1-2i}{3}U|1\rangle \\
 &= \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}-i}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle\right) + \frac{1-2i}{3}\left(\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i}{2}|1\rangle\right) \\
 &= \frac{\sqrt{2}-i}{3}|0\rangle - \frac{1}{3}|1\rangle + \frac{1-2i}{6}|0\rangle + \frac{2+\sqrt{2}+i(1-2\sqrt{2})}{6}|1\rangle \\
 \Rightarrow U|\psi_3\rangle &= \frac{2\sqrt{2}+1-4i}{6}|0\rangle + \frac{\sqrt{2}+i(1-2\sqrt{2})}{6}|1\rangle
 \end{aligned}$$

3.2.4 Phần d

Vì U unita nên tồn tại 2 vector riêng $|u_1\rangle, |u_2\rangle$ tạo thành 1 cơ sở trực chuẩn với các trị riêng tương ứng $e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}$, khi đó:

$$U|u_1\rangle = e^{i\theta_1}|u_1\rangle \equiv |u_1\rangle, U|u_2\rangle = e^{i\theta_2}|u_2\rangle \equiv |u_2\rangle.$$

Ta cần tìm 2 trị riêng và vector riêng của U , ta có ma trận đặc trưng sau:

$$\begin{aligned} U - \lambda I &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{2} - i - 2\lambda & 1 \\ -1 & \sqrt{2} + i - 2\lambda \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \det(U - \lambda I) &= \frac{1}{4} \left[(\sqrt{2} - i - 2\lambda) (\sqrt{2} + i - 2\lambda) + 1 \right] \\ &= \frac{1}{4} (4\lambda^2 - 4\sqrt{2}\lambda + 4) = 0 \\ \Rightarrow &\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}} \\ \lambda_2 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{cases} \end{aligned}$$

Ta có:

- Với λ_1 : $(U - \lambda_1 I) |u_1\rangle = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i(1 + \sqrt{2}) & 1 \\ -1 & i(1 - \sqrt{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} -i(1 + \sqrt{2})a + b = 0 \\ -a + i(1 - \sqrt{2})b = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = i(1 + \sqrt{2}) \end{cases} \\ \Rightarrow |u_1\rangle &= \begin{bmatrix} 1 \\ i(1 + \sqrt{2}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Với λ_2 : $(U - \lambda_2 I) |u_2\rangle = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i(1 - \sqrt{2}) & 1 \\ -1 & i(1 + \sqrt{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} -i(1 - \sqrt{2})c + d = 0 \\ -c + i(1 + \sqrt{2})d = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ d = i(1 - \sqrt{2}) \end{cases} \\ &\Rightarrow |u_2\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ i(1 - \sqrt{2}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vậy U tương ứng với phép quay quanh trục tạo bởi $|u_1\rangle, |u_2\rangle$ với góc $\theta = \theta_1 - \theta_2 = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$ trên mặt cầu Bloch.

4 Bài 4

4.1 Đề bài

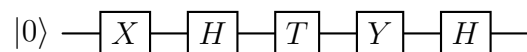
Từ trạng thái đầu vào $|0\rangle$,

- Vẽ mạch mô tả tính toán $HYTHX$.
- Tính đầu ra của Câu (a).
- Thêm phép đo ở cuối mạch của Câu (a) và tính xác suất được 1.

4.2 Lời giải

4.2.1 Phần a

Mạch tính toán $HYTHX$ được mô tả như sau:



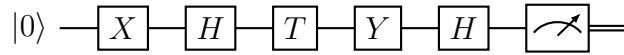
4.2.2 Phần b

Gọi đầu ra của mạch tính toán trên là $|\psi\rangle$, ta có:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= HYTHX|0\rangle \\
 &= HYTH|1\rangle \\
 &= HYT|-\rangle \\
 &= HY\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) \\
 &= H\left(\frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle + e^{i\frac{\pi}{4}}\frac{i}{\sqrt{2}}|0\rangle\right) \\
 \Rightarrow |\psi\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}}(|-\rangle + e^{i\frac{\pi}{4}}|+\rangle)
 \end{aligned}$$

4.2.3 Phần c

Thêm phép đo ở cuối mạch, ta có mạch tính toán mới sau:



Ta có:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= \frac{i}{\sqrt{2}}(|-\rangle + e^{i\frac{\pi}{4}}|+\rangle) \\
 &= \frac{i}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)\right] \\
 \Rightarrow |\psi\rangle &= \frac{-1 + i(\sqrt{2} + 1)}{2\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{-1 + i(-\sqrt{2} + 1)}{2\sqrt{2}}|1\rangle
 \end{aligned}$$

\Rightarrow Xác suất để phép đo được 1 là:

$$P(1) = \left|\frac{-1 + i(-\sqrt{2} + 1)}{2\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{8}$$

5 Bài 5

5.1 Đề bài

Cho biết các trạng thái sau là tách được hay vướng, nếu tách được thì biểu diễn trên mặt cầu Bloch

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle).$

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle + i|11\rangle).$

(c) $\frac{1}{4} (3|00\rangle - \sqrt{3}|01\rangle + \sqrt{3}|10\rangle - |11\rangle).$

(d) $\frac{1}{\sqrt{3}} |0\rangle |+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1\rangle |-\rangle.$

5.2 Lời giải

5.2.1 Phần a

Giả sử $|\phi_1\rangle$ tách được, tức $\exists |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ sao cho $|\phi_1\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. Ta có:

$$\begin{aligned} |\phi_1\rangle &= \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} ac = bd = 0 \\ ad = bc = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \end{aligned}$$

\Rightarrow vô lí $\Rightarrow |\phi_1\rangle$ là trạng thái vướng.

Exercise 2

5.2.2 Phần b

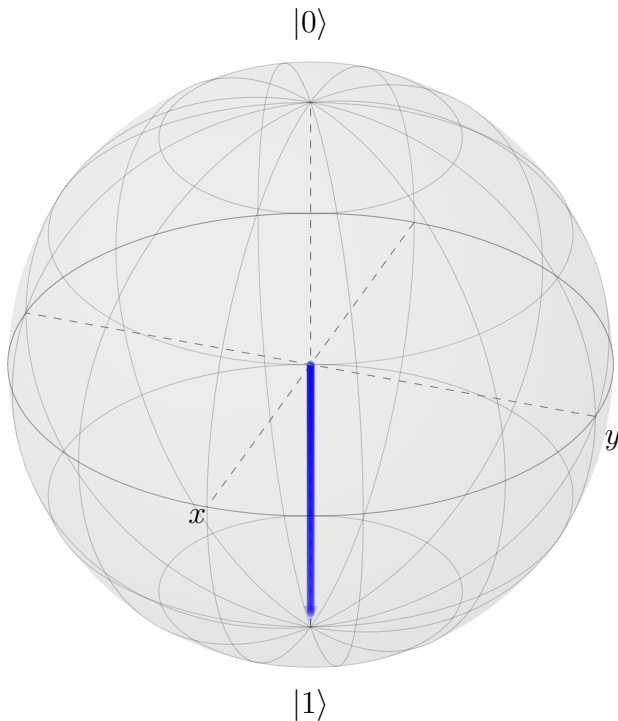
Ta có:

$$\begin{aligned} |\phi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle + i|11\rangle) \\ &= |1\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |1\rangle \right) \\ \Rightarrow |\phi_2\rangle &= |1\rangle \otimes |i\rangle \end{aligned}$$

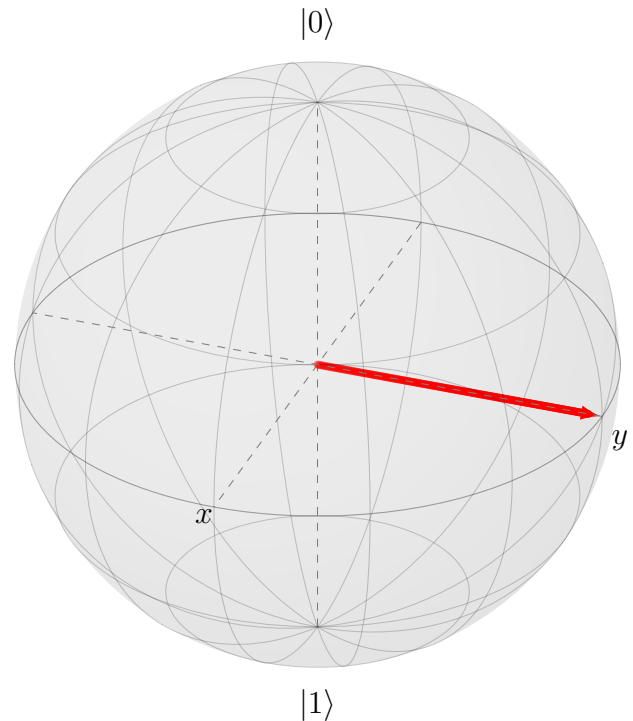
$\Rightarrow |\phi_2\rangle$ tách được, ta có dạng Bloch của $|\phi_2\rangle$:

$$\begin{cases} |1\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) |0\rangle + e^{i0} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) |1\rangle \\ |i\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) |0\rangle + e^{i\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) |1\rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \pi, & \phi_1 = 0 \\ \theta_2 = \frac{\pi}{2}, & \phi_1 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Mặt cầu Bloch:



(a) Qubit 0



(b) Qubit 1

Exercise 2

5.2.3 Phần c

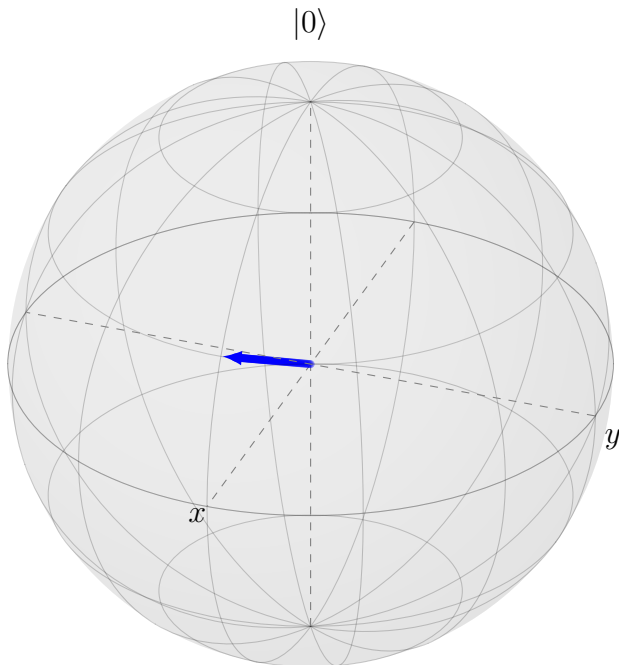
Ta có:

$$\begin{aligned}
 |\phi_3\rangle &= \frac{1}{4} \left(3|00\rangle - \sqrt{3}|01\rangle + \sqrt{3}|10\rangle - |11\rangle \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left[\sqrt{3}|0\rangle \otimes (\sqrt{3}|0\rangle - |1\rangle) + |1\rangle \otimes (\sqrt{3}|0\rangle - |1\rangle) \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{3}|0\rangle + |1\rangle \right) \otimes (\sqrt{3}|0\rangle - |1\rangle) \\
 \Rightarrow |\phi_3\rangle &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle \right) \otimes \left(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle \right)
 \end{aligned}$$

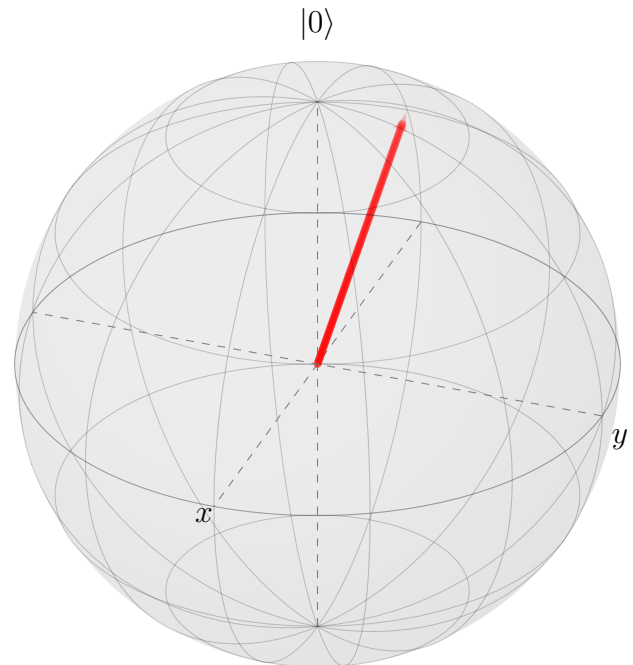
$\Rightarrow |\phi_3\rangle$ tách được, ta có dạng Bloch của $|\phi_3\rangle$:

$$\begin{cases} |\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)|0\rangle + e^{i0}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)|1\rangle \\ |\psi_2\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)|0\rangle + e^{i\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)|1\rangle \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \frac{\pi}{3}, & \phi_1 = 0 \\ \theta_2 = \frac{\pi}{3}, & \phi_2 = \pi \end{cases}$$

Mặt cầu Bloch:



(a) Qubit 0



(b) Qubit 1

5.2.4 Phần d

Ta có:

$$\begin{aligned} |\phi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} |0\rangle |+\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1\rangle |-\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} |0\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \right) + \sqrt{\frac{2}{3}} |1\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |01\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |10\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |11\rangle \end{aligned}$$

Giả sử $|\phi_4\rangle$ tách được, tức $\exists |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ sao cho $|\phi_4\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. Ta có:

$$\begin{aligned} |\phi_4\rangle &= \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} ac = ad = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ bc = -bd = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \frac{ac}{ad} = \frac{c}{d} = 1 \\ \frac{bc}{bd} = \frac{c}{d} = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

\Rightarrow vô lí $\Rightarrow |\phi_4\rangle$ là trạng thái vướng.

6 Bài 6

6.1 Đề bài

Cho hệ 2 qubit với trạng thái

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle - \frac{i}{2}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle.$$

Khảo sát các phép đo sau

- (a) Đo đồng thời 2 qubit.
- (b) Đo qubit 0.
- (c) Đo qubit 1.
- (d) Đo qubit 0 rồi đo qubit 1 và so kết quả với Câu (a).
- (e) Đo qubit 1 rồi đo qubit 0 và so kết quả với Câu (b).

6.2 Lời giải

6.2.1 Phần a

Khi đo đồng thời 2 qubit, ta có:

- Xác suất ra trạng thái $|00\rangle$ là: $P(00) = \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} = 25\%$.
- Xác suất ra trạng thái $|01\rangle$ là: $P(01) = |0|^2 = 0\%$.
- Xác suất ra trạng thái $|10\rangle$ là: $P(10) = \left|-\frac{i}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} = 25\%$.
- Xác suất ra trạng thái $|11\rangle$ là: $P(11) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$.

6.2.2 Phần b

Khi chỉ đo qubit 0, ta có:

- Xác suất qubit 0 bằng 0 là: $P(q_0 = 0) = P(00) + P(01) = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4} = 25\%$.
- Xác suất qubit 0 bằng 1 là: $P(q_0 = 1) = P(10) + P(11) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 75\%$.

6.2.3 Phần c

Khi chỉ đo qubit 1, ta có:

- Xác suất qubit 1 bằng 0 là: $P(q_1 = 0) = P(00) + P(10) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 50\%$.
- Xác suất qubit 1 bằng 1 là: $P(q_1 = 1) = P(01) + P(11) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 50\%$.

6.2.4 Phần d

Đầu tiên, ta đo qubit 0 trước:

- Qubit 0 được 0 với xác suất: $\left| \frac{1}{2} |0\rangle \right|^2 = \frac{1}{4} = 25\%$ và trạng thái sụp đổ thành $\frac{1}{2} |00\rangle$, sau đó, ta đo qubit 1 chắc chắn sẽ ra 0.
- Qubit 0 được 1 với xác suất: $\left| -\frac{i}{2} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \right|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 75\%$ và trạng thái sụp đổ thành $-\frac{i}{2} |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$, sau đó, ta đo qubit 1:
 - Xác suất đo tiếp qubit 1 bằng 0 là: $\frac{P(10)}{P(q_0=0)} = \frac{1}{3} \approx 33.3\%$.
 - Xác suất đo tiếp qubit 1 bằng 1 là: $\frac{P(11)}{P(q_0=0)} = \frac{2}{3} \approx 66.7\%$.

6.2.5 Phần e

Đầu tiên, ta đo qubit 1 trước:

- Qubit 1 được 0 với xác suất: $\left| \frac{1}{2} |0\rangle - \frac{i}{2} |1\rangle \right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$ và trạng thái sụp đổ thành $\frac{1}{2} |00\rangle - \frac{i}{2} |10\rangle$, sau đó, ta đo qubit 0:
 - Xác suất đo tiếp qubit 0 bằng 0 là: $\frac{P(00)}{P(q_1=0)} = \frac{1}{2} = 50\%$.
 - Xác suất đo tiếp qubit 0 bằng 1 là: $\frac{P(10)}{P(q_1=0)} = \frac{1}{2} = 50\%$.
- Qubit 1 được 1 với xác suất $\left| \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$ và trạng thái sụp đổ thành $\frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$, sau đó, ta đo qubit 0 chắc chắn sẽ ra 1.

7 Bài 7

7.1 Đề bài

Khảo sát phép toán 2 qubit $U = H \otimes X$.

Exercise 2

- (a) Cho biết tác động của U lên các vector của cơ sở tính toán.
- (b) Xác định ma trận biểu diễn của U từ Câu (a).
- (c) Xác định ma trận biểu diễn của U bằng phép tích tensor.
- (d) Cho biết tác động của U lên trạng thái

$$|\psi\rangle = \frac{1}{4} |00\rangle + \frac{1}{2} |01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4} |11\rangle.$$

7.2 Lời giải

Ta có:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7.2.1 Phần a

Các vector cơ sở tính toán là $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$, ta có:

- Với trạng thái $|00\rangle$:

$$U |00\rangle = (H |0\rangle) \otimes (X |0\rangle) = |+\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$$

- Với trạng thái $|01\rangle$:

$$U |01\rangle = (H |0\rangle) \otimes (X |1\rangle) = |+\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle$$

- Với trạng thái $|10\rangle$:

$$U |10\rangle = (H |1\rangle) \otimes (X |0\rangle) = |-\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$$

- Với trạng thái $|11\rangle$:

$$U |11\rangle = (H |1\rangle) \otimes (X |1\rangle) = |-\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle$$

7.2.2 Phần b

Từ Câu (a), ta được:

$$U = \begin{bmatrix} U|00\rangle & U|01\rangle & U|10\rangle & U|11\rangle \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

7.2.3 Phần c

Ma trận biểu diễn của U là:

$$U = H \otimes X$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

7.2.4 Phần d

Ta có:

$$U|\psi\rangle = \frac{1}{4}U|00\rangle + \frac{1}{2}U|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}U|10\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}U|11\rangle$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \right) +$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \right)$$

$$\Rightarrow U|\psi\rangle = \frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{8}|00\rangle + \frac{4 + \sqrt{2}}{8}|01\rangle - \frac{\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}{8}|10\rangle - \frac{4 - \sqrt{2}}{8}|11\rangle$$

8 Bài 8

8.1 Đề bài

Xét trạng thái 3 qubit

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle.$$

- Chứng minh $|GHZ\rangle$ là trạng thái vướng.
- Khảo sát phép đo riêng qubit 0, qubit 1, qubit 2 và nhận xét.
- Thiết kế mạch 3 qubit để tạo trạng thái $|GHZ\rangle$.

8.2 Lời giải

8.2.1 Phần a

Giả sử trạng thái $|GHZ\rangle$ tách được, suy ra $\exists a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ thỏa:

$$|GHZ\rangle = (a_0|0\rangle + b_0|1\rangle) \otimes (a_1|0\rangle + b_1|1\rangle) \otimes (a_2|0\rangle + b_2|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle.$$

Đồng nhất hệ số ta được:

$$\begin{cases} a_0a_1a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ b_0b_1b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a_0a_1b_0 = 0 \\ a_0a_1b_1 = 0 \\ \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0, a_1, a_2 \neq 0 \\ b_0, b_1, b_2 \neq 0 \\ a_0a_1b_0 = 0 \\ a_0a_1b_1 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

\Rightarrow vô lí, suy ra $|GHZ\rangle$ là trạng thái vướng.

8.2.2 Phần b

Khi chỉ đo qubit 0, ta có:

- Xác suất qubit 0 bằng 0 là: $P(q_0 = 0) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$.
- Xác suất qubit 0 bằng 1 là: $P(q_0 = 1) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$.

Exercise 2

Khi chỉ đo qubit 1, ta có:

- Xác suất qubit 1 bằng 0 là: $P(q_1 = 0) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$.
- Xác suất qubit 1 bằng 1 là: $P(q_1 = 1) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$.

Khi chỉ đo qubit 2, ta có:

- Xác suất qubit 2 bằng 0 là: $P(q_2 = 0) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$.
- Xác suất qubit 2 bằng 1 là: $P(q_2 = 1) = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{2} = 50\%$.

Nhận xét: Mặc dù kết quả đo của từng qubit là ngẫu nhiên, tuy nhiên chúng lại có sự tương quan hoàn toàn với nhau.

- Nếu ta đo qubit 0 được 0, trạng thái khi đó sẽ sụp đổ về $|000\rangle$, qubit 1 và qubit 2 khi đó cũng sẽ là 0.
- Ngược lại, nếu ta đo qubit 0 được 1, trạng thái khi đó sẽ sụp đổ về $|111\rangle$, qubit 1 và qubit 2 khi đó cũng sẽ là 1.

8.2.3 Phần c

Trạng thái ban đầu là $|000\rangle$ và trạng thái mục tiêu của ta là $\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$, ta có mạch như sau:

