

# Redes complejas

José Luis Córdoba Cabanillas

February 22, 2022

## 1 Introduction a los sistemas complejos

### 1.1 Simular y analizar el comportamiento complejo del atrayente de Lorentz

Los valores usados son  $a=10$  ,  $c=8/3$  y  $b$  es variado. El sistema exhibe un comportamiento caótico para  $b=28$  Las condiciones iniciales usadas son  $x_0 = y_0 = z_0 = 1$

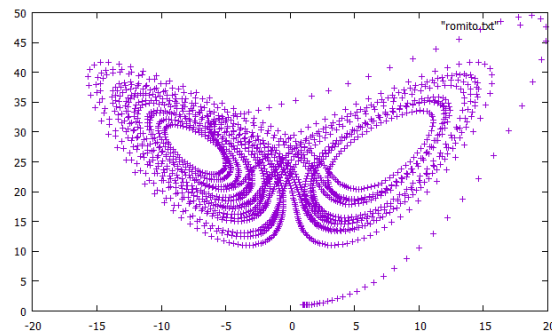


Figure 1: Representación de  $z$  frente a  $x$  en el atrayente de Lorentz

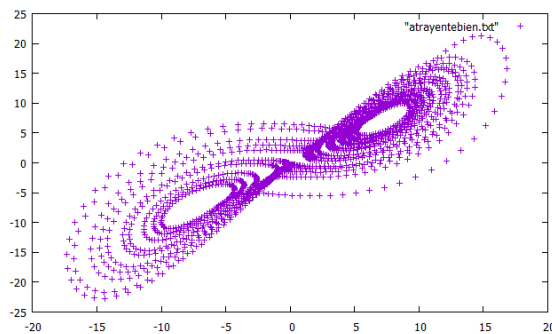


Figure 2: Representación de  $y$  frente a  $x$  en el atrayente de Lorentz

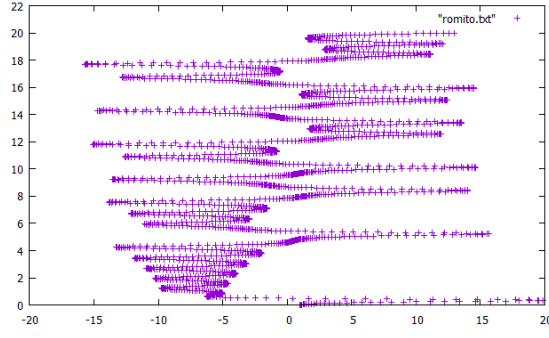


Figure 3: Representación de  $t$  frente a  $x$  en el atrayente de Lorentz con CI:  $x_0 = y_0 = z_0 = 1$

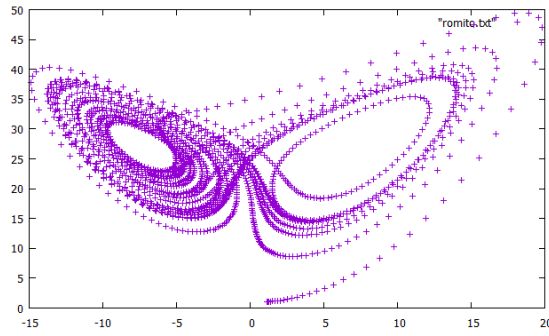


Figure 4: Representación de  $z$  frente a  $x$  en el atrayente de Lorentz con CI:  $x_0 = y_0 = z_0 = 1.1$

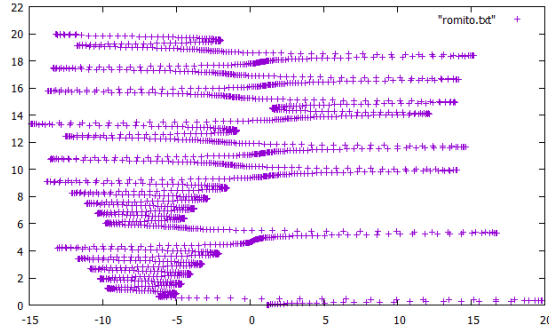


Figure 5: Representación de  $t$  frente a  $x$  en el atrayente de Lorentz con CI:  $x_0 = y_0 = z_0 = 1.1$

Vemos que la forma de mariposa se mantiene en el plano  $x$ - $z$ , aunque las gráficas de  $x$ - $t$  varían mucho para pequeñas fluctuaciones de las condiciones iniciales.

## 1.2 Simular y analizar el comportamiento complejo del atrayente de Rössler

Para que el sistema tenga un comportamiento caótico, podemos usar los valores:  $h=0.1$ ,  $a=0.1$ ,  $b=0.1$ ,  $c=14$ ,  $x_0 = 0.2$ ,  $y_0 = 0.2$ ,  $z_0 = 0.2$ , número de iteraciones=2000

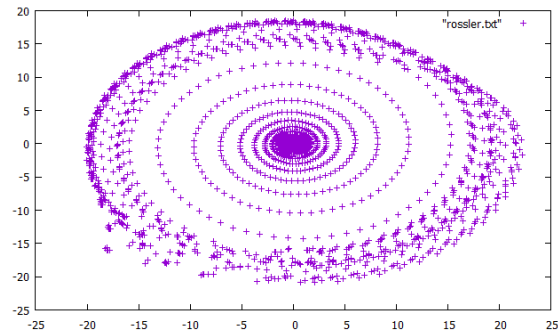


Figure 6: y frente a x en el atrayente de Rossler

### 1.3 Simular el juego de la vida y estudiar su comportamiento emergente

Haciendo muchas iteraciones en el tiempo, se observan algunos patrones estáticos, otros que cambian de manera periódica y otros que se mueven por el espacio, aquí mostraré simplemente cuatro iteraciones seguidas para tener una idea aproximada:

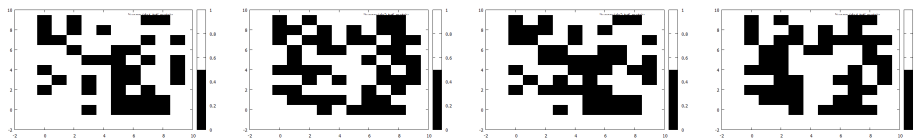


Figure 7: Iteración 1

En el extremo inferior derecho se ven elementos estáticos.  
En el superior derecho, algunos que cambian de forma periódica.  
A la izquierda vemos un patrón con forma de T que se mueve.

### 1.4 Calcular la dimensión de Hausdorff de los siguientes fractales

Conjunto de Cantor:

$$D = \log(2)/\log(3) = 0.631$$

Isla de Koch:

$$D = \log(4)/\log(3) = 1.26186$$

Alfombra de Sierpinsky:

$$D = \log(8)/\log(3) = 1.8927$$

Junta de Sierpinsky:

$$D = \log(3)/\log(2) = 1.58496$$

## 2 Redes complejas

### 2.1 Dibujar $L_i$ con $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

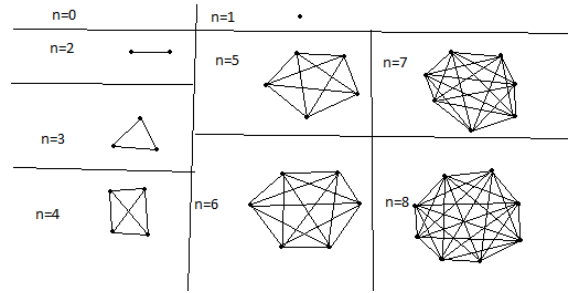


Figure 8:

## 2.2 Calcular la lista de aristas y la matriz de adyacencia para el multigrafo representado en la figura 5

Lista de aristas:

(1, 2)  
 (2, 1)  
 (2, 3)  
 (2, 4)  
 (3, 5)  
 (4, 3)  
 (4, 4)  
 (5, 4)

La matriz de adyacencia queda:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2.3 Calcular la lista de aristas y la matriz de adyacencia del grafo pesado que aparece en la figura 5

Listas de aristas:

(1, 2)  
 (2, 3)  
 (2, 4)  
 (3, 5)  
 (4, 3)  
 (5, 4)

Matriz de adyacencia:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- 2.4** Calcular la matriz de incidencia del grafo bipartito mostrado en la figura 6. ¿Cuál sería la matriz de incidencia si no existiera en dicho grafo el nodo  $m_s$ ?

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si quitamos  $m_s$ :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 2.5** Dibujar el grafo proyección de nodos del grafo bipartito de la figura 6 y demostrar que el grafo proyección de nodos viene descrito por una matriz de adyacencia  $P$  tal que  $P = BB^T$

Si hay dos conexiones pongo un dos en la diagonal y si hay una solo pondré un uno a la hora de calcular la matriz de adyacencia:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BB^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 2.6** Dibujar el grafo proyección de grupos del grafo bipartito de la figura 6 y demostrar que el grafo proyección de grupos viene dado por una matriz de adyacencia  $P$  tal que  $P = B^T B$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^T B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**2.7 Calcular la distribución de probabilidad de grados del grafo no dirigido de la figura 5 y ver que está normalizado**

$$N(1) = 1$$

$$N(2) = 1$$

$$N(3) = 3$$

$$P(1) = 1/5$$

$$P(2) = 1/5$$

$$P(3) = 3/5$$

Si sumamos las probabilidades tenemos  $P(1) + P(2) + P(3) = 1/5 + 1/5 + 3/5 = 1$  con lo que se ve que está normalizado.

**2.8 Calcular la distribución de probabilidad de grados del grafo dirigido y del multigrafo que aparecen en la figura 5**

Estudiemos el grafo dirigido:

$$N^{in}(0) = 1$$

$$N^{in}(1) = 2$$

$$N^{in}(2) = 2$$

$$P^{in}(0) = 1/5$$

$$P^{in}(1) = 2/5$$

$$P^{in}(2) = 2/5$$

$$N^{out}(1) = 4$$

$$N^{out}(2) = 1$$

$$P^{out}(1) = 4/5$$

$$P^{out}(2) = 1/5$$

Como vemos, si sumamos las probabilidades out e in, obtenemos el valor 1, con lo que está normalizado.

Estudiemos ahora el multigrafo:

$$N^{in}(1) = 3$$

$$N^{in}(2) = 1$$

$$\begin{aligned}
N^{in}(3) &= 2 \\
P^{in}(1) &= 3/5 \\
P^{in}(2) &= 1/5 \\
P^{in}(3) &= 2/5 \\
N^{out}(1) &= 3 \\
N^{out}(2) &= 1 \\
N^{out}(3) &= 1 \\
P^{out}(1) &= 3/5 \\
P^{out}(2) &= 1/5 \\
P^{out}(3) &= 1/5
\end{aligned}$$

Como vemos, si sumamos las probabilidades out e in, obtenemos el valor 1, con lo que está normalizado como en el caso anterior.

## 2.9 En el grafo no dirigido de la figura 5 calcular el número total de caminos cíclicos de longitud $n=3$ que empiezan en el nodo $i=1,2,3,4,5$

$i = 1 \rightarrow 0$   
 $i = 2 \rightarrow 2 \text{ o } 4$   
 $i = 3 \rightarrow 2 \text{ o } 4$   
 $i = 4 \rightarrow 2 \text{ o } 4$   
 $i = 5 \rightarrow 2 \text{ o } 4$

## 3 Redes de neuronas

### 3.1 Modelos de Hopfield

Si aumentamos las iteraciones en el tiempo, comprobamos que en nuestra representación hay muchos puntos que se alejan mucho, debido a que no estamos en un periodo estacionario. Sin embargo, aumentando el número de iteraciones temporales, obtenemos una relación más correcta. También cabe destacar que con pocas neuronas, tendremos pocos valores posibles para la función overlap y, al ser un modelo estocástico, algunos valores pueden salirse de la tendencia que debe tener nuestra función, con lo que conviene considerar un número considerable de iteraciones temporales y de neuronas. Si queremos que la gráfica salga aún más correcta, podemos representar el valor medio de la función entre diferentes puntos cuando el sistema ya es estacionario. Para 9999 iteraciones temporales y 500 neuronas, tenemos:

Como vemos, para temperaturas bajas, la función se aproxima a 1 y para temperaturas cercanas

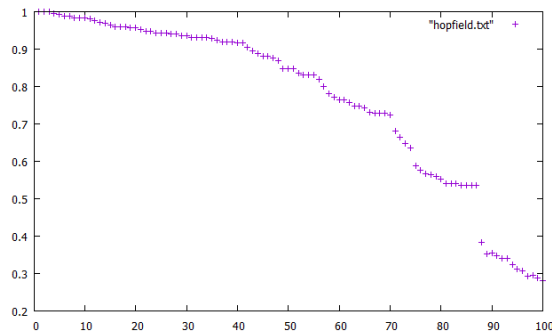


Figure 9: Función overlap frente a la temperatura para un patrón concreto

a la temperatura crítica empieza a acercarse a 0.

### 3.2 Modelo de FN

Los parámetros usados son:  $a=0.7$ ,  $b=0.8$ ,  $\phi=0.08$ ,  $I=0.5$ ,  $h=0.1$ ,  $V=-U=-5$ ,  $n=2000$ . Si representamos  $U$  y  $V$  frente al tiempo con 20000 iteraciones, obtenemos:

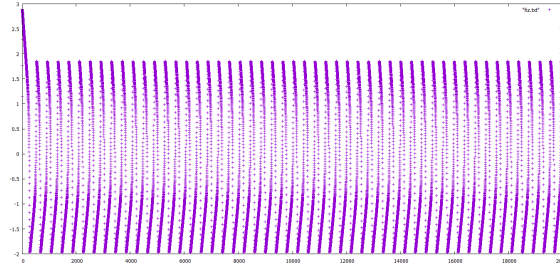


Figure 10:  $U-t$

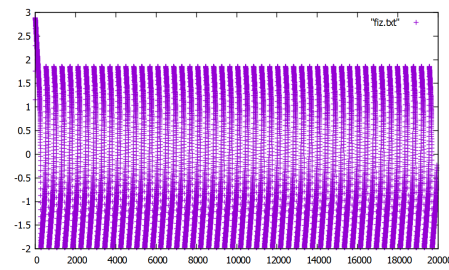


Figure 11:  $V-t$

Con  $I=0.5$  tenemos un comportamiento cíclico:

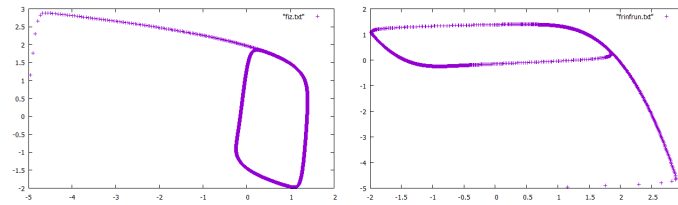


Figure 12:  $U-V$  a la derecha y  $V-U$  a la izquierda

Las nulclinas quedan:



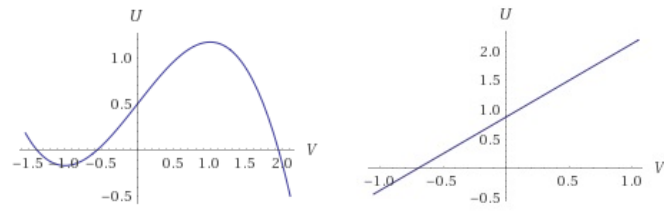


Figure 13: U-V

Con  $I$  entre 5 y diez tenemos el siguiente comportamiento:

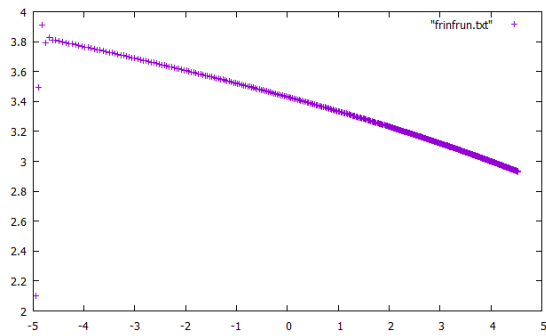


Figure 14: U-V

Si deajo lo demas fijo y cambio  $\phi$  a 0.8 obtengo la espiral:

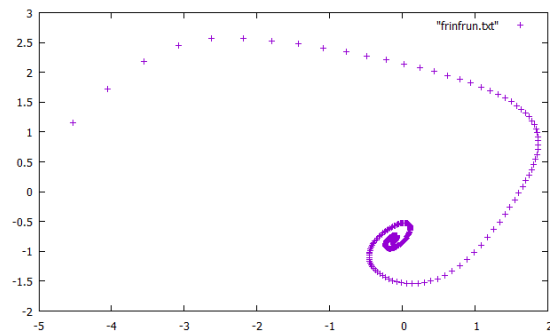


Figure 15: U-V

Con  $b=0$  obtenemos el mismo comportamiento cíclico

Si hago  $b=10$  obtengo la siguiente función:

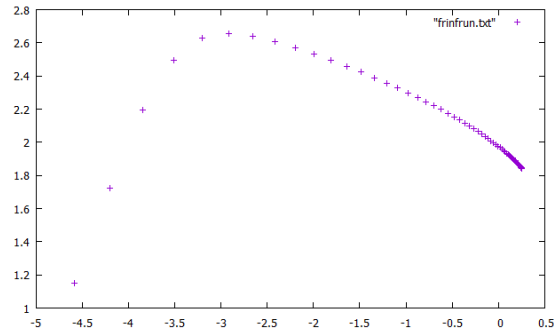


Figure 16: U-V

Si  $a$  es cero tenemos el mismo comportamiento cíclico

si  $a$  es diez, obtendré ciertas bifurcaciones y luego un comportamiento caótico:

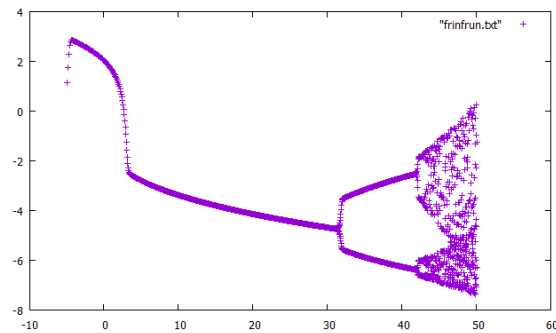


Figure 17: U-V

### 3.3 McCulloch y Pitts

Not: entrada 0 salida 1 y entrada 1 salida 0:

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{si } h < 1 \\ 0 & \text{si } h \geq 1 \end{cases}$$

$$w_1 = 1, \theta = 1$$

AND:

Entradas: A y B

Salida: Y

$$A=B=Y=0$$

$$A=Y=0, B=1$$

$$A=1, B=Y=0$$

$$A=B=Y=1$$

Hacemos  $h = A + B$

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{si } h < 2 \\ 0 & \text{si } h \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{Pesos: } w_1 = w_2 = 1 \quad \theta = 2$$

Puerta XOR:

Entradas: A y B

Salida: Y

A=B=Y=0

A=0,B=1=Y

A=1=Y,B=0

A=B=1,Y=0

$$s_i = \begin{cases} 0 & \text{si } h < 1 \\ 1 & \text{si } h \geq 1 \end{cases}$$

$$\theta = 1, w_{11} = 2, w_{12} = -1, w_{21} = -1, w_{22} = 2$$

Puerta OR:

Entradas: A y B

Salida: Y

A=B=Y=0

A=0,B=1=Y

A=1=Y,B=0

A=B=1=Y

$$s_i = \begin{cases} 0 & \text{si } h < 3 \\ 1 & \text{si } h \geq 3 \end{cases}$$

$$w_1 = 3, w_2 = 3, \theta = 3$$

### 3.4 Modelo del Hodgkin Huxley

Usando los parámetros:

s=200, I=150, gl=0.3, gk= 36, gna=120, vl=-54.402, vk=-77, vna=50

Entre 60 y 75 empiezan a aparecer oscilaciones tal como muestra la figura:

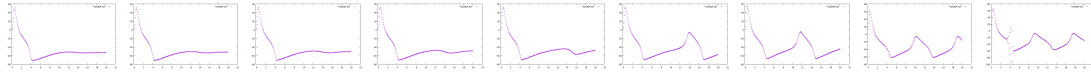


Figure 18: Simulación con I=50, I=55, I=60, I=65, I=70, I=75, I=100, I=150, I=200

### 3.5 Modelo de Tsodyks Markram

Con los valores:  $\tau_{in} = 3, \tau_{rec} = 800, U_{se} = 0.5, h = 0.01, \tau_m = 1, \tau_{fac} = 530, r_{in} = 10, t_{sp} = 20, x_0 = 5, y_0 = 2, z_0 = 3, u_0 = U_{se}, v_0 = 0$

Cada uno de los pulsos del EPSP queda:

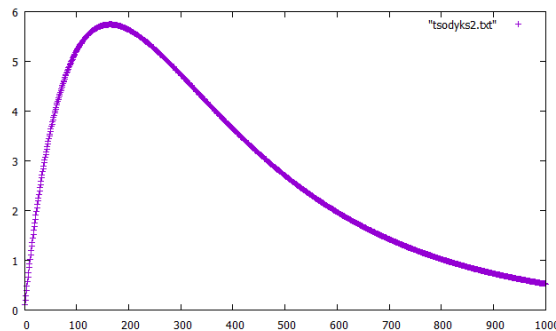


Figure 19: V frente a t

## 4 Redes sociales

### 4.1 Modelo del votante

En la simulación se ve que se van formando clústeres de elementos con el mismo valor cuando partimos de unos valores aleatorios y caóticos, y después de muchas iteraciones, acaba predominando una opinión; en los datos siguientes, partimos de la configuración inicial dada y al final, casi todos los elementos tienen el valor menos 1, con lo que se llega a cierto estado de orden:

inicialmente:

```
-1.0000000 -1.0000000 1.0000000 -1.0000000 1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 1.0000000 1.0000000  
1.0000000 -1.0000000 1.0000000 1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 1.0000000 1.0000000 -1.0000000  
-1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000 -1.0000000  
1.0000000 -1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 1.0000000 -1.0000000  
1.0000000 1.0000000 1.0000000 -1.0000000
```

409 iteraciones:

```
-1.0000000 -1.0000000 1.0000000 -1.0000000 1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 1.0000000 1.0000000  
1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000  
1.0000000 1.0000000 1.0000000 -1.0000000 1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000  
-1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000
```

1000 iteraciones:

```
-1.0000000 -1.0000000 1.0000000 -1.0000000 1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 1.0000000 1.0000000  
-1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000  
-1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000  
-1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000  
-1.0000000 -1.0000000 -1.0000000 -1.0000000
```