2020 全国硕士研究生招生考试
数学冲刺模拟测试四（数学二）

本试卷满分 150，考试时间 180 分钟

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在**答题纸**指定位置上.

（1）函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^n+e^{nx}}$ 的不可导点的个数为（　　）

(A) 0 个　　(B) 1 个　　(C) 2 个　　(D) 3 个

（2）设 $y=y(x)$ 满足方程 $y''+4y'+4y=0$ 及初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=-4$，则广义积分 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$（　　）

(A) 发散　　(B) 等于 1　　(C) 等于 -1　　(D) 等于 3

（3）设可微函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial x}>1,\frac{\partial f}{\partial y}<-1,f(0,0)=0$，则下列结论中正确的是（　　）

（A）$f(1,1)>1$　　（B）$f(-1,1)>-2$

（C）$f(-1,-1)<0$　　（D）$f(1,-1)>2$

（4）设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y-1)^2\le 2\right\},I_1=\iint\limits_D(x+y)dxdy,\ I_2=\iint\limits_D\ln(1+x+y)dxdy,$ 则正确的是（　　）

(A) $8\pi>I_1>I_2$　　(B) $I_1>8\pi>I_2$

(C) $I_1>I_2>8\pi$　　(D) $I_2>8\pi>I_1$

（5）$y=\dfrac{x^2+4x-12}{x-2}e^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线条数为（　　）

(A) 0 条　　(B) 1 条　　(C) 2 条　　(D) 3 条

（6） $z=xy+xF\left(\frac{y}{x}\right)$，其中 F 为可微函数，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$（　）

(A) $z-xy$　　(B) $z+xy$　　(C) $z-2xy$　　(D) $z+2xy$

（7）已知 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系，则向量组 $a\boldsymbol{\alpha}_1+b\boldsymbol{\alpha}_4$，$a\boldsymbol{\alpha}_2+b\boldsymbol{\alpha}_3$，$a\boldsymbol{\alpha}_3+b\boldsymbol{\alpha}_2$，$a\boldsymbol{\alpha}_4+b\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系的充分必要条件是（　）

(A) $a=b$　　(B) $a\neq -b$　　(C) $a\neq b$　　(D) $a\neq \pm b$

（8）设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 3×4 非零矩阵，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 9 & t & 3 \\ 7t-18 & 7-2t & 1 \\ 9+t & 1+t & 4 \end{pmatrix}$，则必有（　）

(A) 当 $t=3$ 时，$r(B)=1$　　(B) 当 $t\neq 3$ 时，$r(B)=1$

(C) 当 $t=3$ 时，$r(B)=2$　　(D) 当 $t\neq 3$ 时，$r(B)=2$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设 $y=y(x)$ 是由 $y^3+(x+1)y+x^2=0$ 及 $y(0)=0$ 所确定，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x y(t)dt}{x(1-\cos x)}=$________。

（10）设函数 $y=y(x)$ 在（0,+∞）上满足 $\Delta y=\left(\frac{y}{x}+x\sin x\right)\Delta x+o(\Delta x)$，且 $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$，则 $y(x)=$__________。

（11）由方程 $\int_0^y e^{u^2}du=(x^{\frac{4}{3}}-1)^3$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的极小值点为__________。

（12）设二元可微函数 $z=f(x,f(y,x))$，且 $f(2,1)=f_2'(2,1)=1$，$f_1'(1,1)=f_2'(1,1)=2$，

则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1.2)}=$_________。

（**13**）抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 在 $M(1,2)$ 处曲率圆方程 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，则

$a^2+b^2+c^2=$_________。

（**14**）已知三阶方阵 A,B 满足 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$， $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值分别为 $3,-3,0$，则

$\left|\boldsymbol{B}^{-1}+2\boldsymbol{E}\right|=$_________。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）设 $D=\{x^2+y^2\le x+y\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D \max\{x,y\}dxdy$。

（16）（本题满分 10 分）设$0<x<1$，证明：$(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<4$。

（17）（本题满分 10 分）（I）证明罗尔定理，若函数$f(x)$在$\left[a,b\right]$上连续，在$\left(a,b\right)$内可导，且$f\left(a\right)=f\left(b\right)$，则$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f'\left(\xi\right)=0$；

（II）证明：若在区间I上$f^{(n)}\left(x\right)\neq0$，则函数$f\left(x\right)$在区间$I$上最多有$n$个零点。

（18）（本题满分 10 分）（I）设圆盘的半径为R，厚为h，点密度为该点到圆盘中心轴的距离的平方，求该圆盘的质量m；

（II）将以曲线$y=\sqrt{x}$，$x=1$，$x=4$及x轴围成的曲边梯形绕x轴旋转一周生成的旋转体记为V，设V的点密度为该点到旋转轴的距离的平方，求该物体的质量。

（19）（本题满分 10 分）位于上半平面的凹曲线$y=y(x)$过点$(0,2)$，在该点处的切线水平，曲线上任一点(x,y)处的曲率与$\sqrt{y}$及$1+(y')^2$之积成反比，比例系数为$k=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$，求$y=y(x)$。

（**20**）（本题满分 11 分）设 $z=z(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $z=z(x-2y,x+3y)$ 满足 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=3\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}$，求 $z=z(u,v)$ 所满足的方程。

（**21**）（本题满分 11 分）设 $f(x),g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x),g'(x)=2e^x-f(x)$，又 $f(0)=0,g(0)=2$，求 $\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{x+1}-\frac{f(x)}{(x+1)^2}\right]dx$。

（22）（本题满分 11 分）已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵，满足 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{2B}=\boldsymbol{O}$，且 $r(\boldsymbol{B})=2$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & a & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$。

（1） 求 a 的值；

（2） 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵；

（3） 求 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{2018}$。

（**23**）（本题满分 11 分）设 A 为三阶实对称矩阵，若存在三阶正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & c_{13} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{a}{\sqrt{2}} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}$$，使得二次型 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \xlongequal{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}} -y_1^2+2y_2^2+by_3^2(b>0)$，且

$\left|A^*\right|=16$，

（1）求常数 a,b；

（2）求矩阵 A。