2020 全国硕士研究生招生考试 数学冲刺模拟测试四(数学二)

本试卷满分 150, 考试时间 180 分钟

一**、选择题:**1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有 一项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在**答题纸**指定位置上.

(1) 函数
$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^n + e^{nx}}$$
 的不可导点的个数为 ()

- $(A) 0 \uparrow \qquad \qquad (B) 1 \uparrow$ (C) 2 \uparrow (D) 3 \uparrow
- (2) 设y = y(x)满足方程y'' + 4y' + 4y = 0及初始条件y(0) = 0,y'(0) = -4,则广 义积分 $\int_{0}^{+\infty} y(x)dx$ ()
- (A) 发散 (B) 等于1 (C)等于-1 (D) 等于3
- (3)设可微函数 f(x,y) 满足 $\frac{\partial f}{\partial x} > 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} < -1$, f(0,0) = 0,则下列结论中正确的是(
- (A) f(1,1) > 1

(C) f(-1,-1) < 0

(4) 设平面区域

$$D = \{(x,y) | (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 2\}, I_1 = \iint_D (x+y) dx dy, I_2 = \iint_D \ln(1+x+y) dx dy, 则 正 确的是 ()$$

- (A) $8\pi > I_1 > I_2$
- $(B) I_1 > 8\pi > I_2$
- (C) $I_1 > I_2 > 8\pi$ (D) $I_2 > 8\pi > I_1$

(5)
$$y = \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2} e^{\frac{1}{x}}$$
 的渐近线条数为()

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (D) 3



(6)
$$z = xy + xF\left(\frac{y}{x}\right)$$
, 其中 F 为可微函数,则 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ ()

(A)
$$z-xy$$
 (B) $z+xy$ (C) $z-2xy$ (D) $z+2xy$

(7) 已知n维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是线性方程组Ax = 0的基础解系,则向量组 $a\alpha_1 + b\alpha_4$, $a\alpha_2 + b\alpha_3$, $a\alpha_3 + b\alpha_2$, $a\alpha_4 + b\alpha_1$ 也是 Ax = 0 的基础解系的充分必要条 件是()

$$(A) a = b$$
 $(B) a \neq -b$ $(C) a \neq b$ $(D) a \neq \pm b$

(8) 设 A 是 4×3 矩 阵, B 是 3×4 非零矩阵, 满足 AB=0, 其中

$$(A) \triangleq t = 3$$
 时, $r(B) = 1$ $(B) \triangleq t \neq 3$ 时, $r(B) = 1$ $(C) \triangleq t = 3$ 时, $r(B) = 2$ $(D) \triangleq t \neq 3$ 时, $r(B) = 2$

- 二、填空题: 9-14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.
- (9) y = y(x) y = y

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x y(t)dt}{x(1-\cos x)} = \underline{\hspace{1cm}}_{\circ}$$

(10) 设函数 y = y(x) 在 $(0,+\infty)$ 上满足 $\Delta y = \left(\frac{y}{x} + x \sin x\right) \Delta x + o(\Delta x)$,且 $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$,

则 *y(x)*=_____

- (12) 设二元可微函数 z = f(x, f(y, x)),且 $f(2,1) = f_2'(2,1) = 1$, $f_1'(1,1) = f_2'(1,1) = 2$,

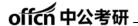
则
$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1.2)} = \underline{\hspace{1cm}}$$
。

(13) 抛物线
$$y=ax^2+bx+c$$
 在 $M(1,2)$ 处曲率圆方程 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$,则

(14) 已知三阶方阵 A, B 满足 E + B = AB, A 的三个特征值分别为 3, -3, 0, 则

$$|\boldsymbol{B}^{-1} + 2\boldsymbol{E}| = \underline{\hspace{1cm}}_{\circ}$$

- 三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.
- (15) (本题满分 10 分) 设 $D = \{x^2 + y^2 \le x + y\}$, 计算二重积分 $\iint_D \max\{x, y\} dx dy$ 。

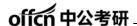


(16) (本题满分 10 分) 设 0 < x < 1, 证明: $(1+x)^{\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} < 4$ 。

- (17) (本题满分 10 分) (I) 证明罗尔定理,若函数 f(x) 在 [a,b] 上连续,在 (a,b) 内可导,且 f(a)=f(b),则 $\exists \xi \in (a,b)$,使得 $f'(\xi)=0$;
- (II) 证明: 若在区间 $I \perp f^{(n)}(x) \neq 0$, 则函数f(x)在区间I上最多有n个零点。

- **(18)** (本题满分 10 分)(I)设圆盘的半径为R,厚为h,点密度为该点到圆盘中心轴的距离的平方,求该圆盘的质量m;
- (II) 将以曲线 $y = \sqrt{x}$, x = 1 , x = 4 及 x 轴围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成的旋转体记为 V ,设 V 的点密度为该点到旋转轴的距离的平方,求该物体的质量。

(19) (本题满分 10 分) 位于上半平面的凹曲线 y=y(x) 过点 (0,2) , 在该点处的切线水平,曲线上任一点 (x,y) 处的曲率与 \sqrt{y} 及 $1+(y')^2$ 之积成反比,比例系数为 $k=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, 求 y=y(x) 。



(20) (本题满分 11 分)设 z = z(u,v) 具有二阶连续偏导数,且 z = z(x-2y,x+3y)满

足
$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 3\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}$$
, 求 $z = z(u, v)$ 所满足的方程。

(21) (本题满分 11 分) 设 f(x),g(x) 满足 $f'(x)=g(x),g'(x)=2e^x-f(x)$, 又

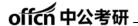
$$f(0) = 0, g(0) = 2$$
, $\Re \int_0^{\pi} \left[\frac{g(x)}{x+1} - \frac{f(x)}{(x+1)^2} \right] dx$

(22) (本题满分 11 分) 已知 A, B 为三阶矩阵,满足 AB + 2B = O,且 r(B) = 2,其

中
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
, 齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 1, 1, 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ 。

- (1) 求*a*的值;
- (2) 求可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP$ 为对角阵;
- $(3) \quad \Re \left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E} \right)^{2018} \circ$





(23) (本题满分 11 分)设A为三阶实对称矩阵,若存在三阶正交矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & c_{13} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{a}{\sqrt{2}} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}, \quad 使 得 二 次 型 \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \frac{\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}}{\mathbf{y}} - y_1^2 + 2y_2^2 + by_3^2 (b > 0) , \quad \mathbf{E}$$

$$|A^*| = 16,$$

- (1) 求常数a,b;
- (2) 求矩阵 A。

