

2020 考研-数学-基础阶段

第二次测试卷（协议）解析

本试卷满分 100 分，考试时间 30 分钟

姓名_____

得分_____

一、解答题：请将正确答案及其解题过程写在题后的空白部分。

1、（本题满分 20 分）计算 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan x \right)^{\frac{1}{x}}$ 。

【答案】1。

【解析】 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan x \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{\pi}{2} + \arctan x \right)} = 1$ ，其中，

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{\pi}{2} + \arctan x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2} + \arctan x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{1+x^2} = 0。$$

序号	错误原因	学习建议	备注
22010 1	不清楚利用对数恒等式处理幂指函数极限	讲义 25 页幂指函数的极限；讲义 25 页例 18 以及习题册 7 页 10 题；注意体会如何利用对数恒等式将幂指函数极限进行变形。	
22010 2	不清楚零乘以无穷类型的极限如何处理	讲义 24 页零乘以无穷型未定式；讲义 24 页例 17（1）以及习题册第 6 页 8（1）；注意体会求解零乘以无穷类型的未定式的处理方法。	
22010 3	计算型错误	建议 1、2。	
22010 4	其他：		

2、（本题满分 20 分）计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{x}{e^{x^2}-1} \right)$ 。

【答案】 $\frac{1}{2}$ 。

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{x}{e^{x^2}-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1-x\ln(1+x)}{(e^{x^2}-1)\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}-1-x\ln(1+x)}{x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2-1-x\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)+o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2}。$$

序号	错误原因	学习建议	备注
22020 1	不清楚无穷减无穷类型的极限如何处理	讲义 24 页无穷减无穷型未定式；讲义 24 页例 17 (2)、(3)、(4) 以及习题册 6 页 8 (2)、(3)；注意体会常见的三种无穷减无穷类型极限的求解方法。	
22020 2	不清楚常见的等价无穷小替换公式	讲义 20 页等价无穷小替换；讲义 20 页例 10 以及习题册 5 页 3 题、4 题、5 题；注意体会常用的八组等价无穷小替换公式。	
22020 3	不清楚常见的麦克劳林公式	讲义 27 页泰勒公式；讲义 27 页例 21；注意体会常见麦克劳林公式在求极限中的应用。	
22020 4	计算型错误	建议 1、2、3。	
22020 5	其他；		

3、(本题满分 20 分) 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right)^x$ 。

【答案】 e 。

【解析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} - 1 \right) x} \stackrel{t=\frac{1}{x}}{=} e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t + \sin t - 1}{t}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} (-\sin t + \cos t)} = e。$

序号	错误原因	学习建议	备注
22030 1	不清楚 1 的无穷次幂极限类型的处理方法	讲义 25 页幂指函数的极限；讲义 25 页例 19 及习题册 7 页 10 (2)；注意体会如何利用总结的公式处理	

		1 的无穷次幂的极限。	
22030 2	不清楚利用倒代换简化所求极限	讲义 24 页无穷减无穷型未定式；讲义 24 页例 17 (3)、习题册 6 页 8 (2)；注意体会极限式中同时出现 x 与其倒数时，可选择利用倒代换简化极限的计算。	
22030 3	计算型错误	建议 1、2。	
22030 4	其他；		

4、(本题满分 20 分) 计算 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 2020} + x)$ 。

【答案】-1010。

【解析】 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 2020} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2020x}{\sqrt{x^2 + 2020} - x} = -1010$ 。

序号	错误原因	学习建议	备注
22040 1	不清楚零乘以无穷类型的极限如何处理	讲义 24 页零乘以无穷与无穷减无穷型未定式；讲义 24 页例 17 (4) 以及习题册 6 页 8 (4)；注意体会可以利用有理化的方法处理无穷减无穷的极限。	
22040 2	不清楚极限中“抓大头”的方法	讲义 18 页四则运算；讲义 19 页例 6、例 7 以及习题册 5 页第 2 题；注意体会“抓大头”适合何种题型。	
22040 3	不清楚去根号时何时加负号	讲义 18 页四则运算；讲义 19 页例 6、例 7 以及习题册 5 页 2 题；注意体会当极限过程趋近于负无穷时，去根号要加负号。	
22040 4	计算型错误	建议 1、2、3。	
22040 5	其他；		

5、(本小题满分 20 分) 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}} \arctan \frac{1}{1+x}}{x^2 + e^{tx}}$ ，求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型。

【答案】 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{1+x}}{x^2}, & x < 0 \text{ 且 } x \neq -1 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$, 函数 $f(x)$ 的可去间断点为 $x = 0$,

函数 $f(x)$ 的跳跃间断点为 $x = -1$ 。

【解析】 当 $x > 0$ 时 , $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{1+x}}{x^2 + e^{tx}} = 0$, 当 $x < 0$ 且 $x \neq -1$ 时 ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{1+x}}{x^2 + e^{tx}} = \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{1+x}}{x^2} , \text{ 因此, } f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{1+x}}{x^2}, & x < 0 \text{ 且 } x \neq -1 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{1+x}}{x^2} = \frac{\pi}{4} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 , \text{ 故}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 因此, $x = 0$ 为函数 $f(x)$ 的可去间断点;

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{1+x}}{x^2} = -\frac{\pi}{2e} , \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{1+x}}{x^2} = \frac{\pi}{2e} ,$$

因此, $x = -1$ 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点。

序号	错误原因	学习建议	备注
22050 1	不清楚如何求关于 t 的极限	讲义 34 页例 7。	
22050 2	不清楚分段函数的极限	讲义 14 页例 3、例 4。	
22050 3	不清楚间断点的分类	讲义 32 页间断点的分类; 讲义 32 页例 4、例 5 以及习题册 28 页 10 题、11 题; 注意体会不同间断点类	

		型的判断。	
22050 4	计算型错误	建议 1、2、3。	
22050 5	其他；		

offcn