2018 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

（1）若$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$,则（ ）

(A) $a=\frac{1}{2}$，$b=-1$　　(B) $a=-\frac{1}{2},b=-1$　　(C) $a=\frac{1}{2},b=1$　　(D) $a=-\frac{1}{2},b=1$

（2）下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是（ ）

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$　　(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

(C) $f(x)=\cos|x|$　　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

（3）设函数$f(x)=\begin{cases}-1,x<0\\ 1,x\ge 0\end{cases}$,$g(x)=\begin{cases}2-ax,x\le -1\\ x,-1<x<0\\ x-b,x\ge 0\end{cases}$,若$f(x)+g(x)$在$R$上连续，则（ ）

(A) $a=3,b=1$　　(B) $a=3,b=2$

(C) $a=-3,b=1$　　(D) $a=-3,b=2$

（4）设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$\int_0^1 f(x)dx=0$,则（ ）

(A) 当$f'(x)<0$时,$f(\frac{1}{2})<0$　　(B) 当$f''(x)<0$时,$f(\frac{1}{2})<0$

(C) 当$f'(x)>0$时,$f(\frac{1}{2})<0$　　(D) 当$f''(x)>0$时,$f(\frac{1}{2})<0$

（5）设$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx,N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx,K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)dx$, 则（ ）

(A) $M>N>K$　　(B) $M>K>N$

(C) $K>M>N$　　(D) $K>N>M$

（6）$\int_{-1}^{0}dx\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)dy+\int_0^1 dx\int_x^{2-x^2}(1-xy)dy=$（ ）

(A) $\frac{5}{3}$　　(B) $\frac{5}{6}$　　(C) $\frac{7}{3}$　　(D) $\frac{7}{6}$

（7）下列矩阵中与矩阵$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$相似的为（ ）

(A) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

（8）设A,B为n阶矩阵，记$r(X)$为矩阵X的秩,(X,Y)表示分块矩阵,则（ ）

(A) $r(A,AB)=r(A)$ (B) $r(A,BA)=r(A)$

(C) $r(A,B)=\max\{r(A),r(B)\}$ (D) $r(A,B)=r(A^TB^T)$

二、填空题：9~14 题，每小题 4 分，共 24 分.

（9）$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$________

（10）曲线$y=x^2+2\ln x$在其拐点处的切线方程是________

（11）$\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}dx=$______________

（12）曲线$\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$,在$t=\frac{\pi}{4}$对应点处的曲率为________

（13）设函数$z=(x,y)$由方程$\ln z+e^{z-1}=xy$确定,则$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=$________________

（14）设A为3阶矩阵,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性无关的向量组,若$A\alpha_1=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_2=\alpha_2+2\alpha_3, A\alpha_3=-\alpha_2+\alpha_3$,

则 A 的实特征值为__________.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

求不定积分$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx.$

（16）（本题满分 10 分）

已知连续函数$f(x)$满足$\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(x-t)dt=ax^2$

（Ⅰ）求$f(x)$;

（Ⅱ）若$f(x)$在区间$[0,1]$上的平均值为1,求a的值.

（17）（本题满分 10 分）

设平面区域D由曲线$\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t \end{cases}(0\le t\le 2\pi)$与$x$轴围成,计算二重积分$\iint\limits_D (x+2y)d\sigma.$

（18）（本题满分 10 分）

已知常数 $k \geq \ln 2-1$. 证明：$(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1) \geq 0$.

（19）（本题满分 10 分）

将长为$2m$的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值.

（20）（本题满分 11 分）

已知曲线$L: y=\frac{4}{9}x^2(x \geq 0)$,点$O\left(0,0\right)$,点$A\left(0,1\right)$.设$P$是$L$上的动点，$S$是直线$OA$与直线$AP$及曲线$L$所围成图形的面积，若$P$运动到点$\left(3,4\right)$时沿$x$轴正向的速度是4，求此时$S$关于时间$t$的变化率.

（21）（本题满分 11 分）

设数列$\left\{x_n\right\}$满足：$x_1>0, x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$,证明$\left\{x_n\right\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

（22）（本题满分 11 分）

设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$,其中$a$是参数.

(I) 求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解；

(II) 求$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形.

（23）（本题满分 11 分）

已知a是常数，且矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & -a\end{pmatrix}$可经初等列变换化为矩阵$B=\begin{pmatrix}1 & a & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

(I) 求a;

(II) 求满足$AP=B$的可逆矩阵P.