

全国硕士研究生统一入学考试

数学公式大全

高等数学公式

导数公式：

$$(tgx)' = \sec^2 x$$

$$(ctgx)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \cdot tgx$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cdot ctgx$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctgx})' = -\frac{1}{1+x^2}$$

基本积分表：

$$\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + tgx| + C$$

$$\int \csc x dx = \ln|\csc x - ctgx| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = -ctgx + C$$

$$\int \sec x \cdot tgx dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cdot ctgx dx = -\csc x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int shx dx = chx + C$$

$$\int chx dx = shx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

三角函数的有理式积分：

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad u = \tan \frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

一些初等函数：

$$\text{双曲正弦: } shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{双曲余弦: } chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\text{双曲正切: } thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$arshx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$archx = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$arthx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

两个重要极限：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e = 2.718281828459045...$$

三角函数公式：

· 诱导公式：

函数 角 A	sin	cos	tg	ctg
$-\alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$
$90^\circ - \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\cot \alpha$	$\tan \alpha$
$90^\circ + \alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$
$180^\circ - \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$
$180^\circ + \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$270^\circ - \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cot \alpha$	$\tan \alpha$
$270^\circ + \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$
$360^\circ - \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$
$360^\circ + \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$

· 和差角公式：

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$$

· 和差化积公式：

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

• 倍角公式:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

• 半角公式:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

• 正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

• 余弦定理: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

• 反三角函数性质: $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$$

高阶导数公式——莱布尼兹 (Leibniz) 公式:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

$$= u^{(n)} v + n u^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)} v'' + \cdots + \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} u^{(n-k)} v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

中值定理与导数应用:

拉格朗日中值定理: $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

柯西中值定理: $\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

当 $F(x) = x$ 时, 柯西中值定理就是拉格朗日中值定理。

曲率:

弧微分公式: $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$, 其中 $y' = \operatorname{tg} \alpha$

平均曲率: $\bar{K} = \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|$. $\Delta \alpha$: 从 M 点到 M' 点, 切线斜率的倾角变化量; Δs : MM' 弧长。

M 点的曲率: $K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right| = \frac{|y''|}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}$.

直线: $K = 0$;

半径为 a 的圆: $K = \frac{1}{a}$.

定积分的近似计算:

矩形法: $\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1})$

梯形法: $\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n} [\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + \cdots + y_{n-1}]$

抛物线法: $\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{3n} [(y_0 + y_n) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1})]$

定积分应用相关公式:

功: $W = F \cdot s$

水压力: $F = p \cdot A$

引力: $F = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$, k 为引力系数

函数的平均值: $\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

均方根: $\sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(t) dt}$

空间解析几何和向量代数:

空间2点的距离: $d = |M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

向量在轴上的投影: $\text{Pr } j_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \varphi$, φ 是 \overrightarrow{AB} 与 u 轴的夹角。

$\text{Pr } j_u (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \text{Pr } j_u \vec{a}_1 + \text{Pr } j_u \vec{a}_2$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, 是一个数量,

两向量之间的夹角: $\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$, $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \theta$. 例: 线速度: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

向量的混合积: $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \alpha$, α 为锐角时,

代表平行六面体的体积。

平面的方程:

1、点法式: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, 其中 $\vec{n}=\{A,B,C\}, M_0(x_0, y_0, z_0)$

2、一般方程: $Ax+By+Cz+D=0$

3、截距式方程: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

平面外任意一点到该平面的距离: $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

空间直线的方程: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$, 其中 $\vec{s}=\{m,n,p\}$; 参数方程:
$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

二次曲面:

1、椭球面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

2、抛物面: $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z, (p,q \text{ 同号})$

3、双曲面:

单叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (马鞍面)

多元函数微分法及应用

全微分: $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$

全微分的近似计算: $\Delta z \approx dz = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$

多元复合函数的求导法:

$z=f[u(t),v(t)]$ $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$

$z=f[u(x,y),v(x,y)]$ $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$

当 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 时,

$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$ $dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$

隐函数的求导公式:

隐函数 $F(x,y)=0$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right) \cdot \frac{dy}{dx}$

隐函数 $F(x,y,z)=0$, $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$

$$\text{隐函数方程组: } \begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \quad J = \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} & \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} & \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)} \end{aligned}$$

微分法在几何上的应用：

$$\text{空间曲线 } \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \text{ 在点 } M(x_0, y_0, z_0) \text{ 处的切线方程: } \frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y-y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

在点 M 处的法平面方程: $\varphi'(t_0)(x-x_0) + \psi'(t_0)(y-y_0) + \omega'(t_0)(z-z_0) = 0$

$$\text{若空间曲线方程为: } \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}, \text{ 则切向量 } \vec{T} = \left\{ \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \right\}$$

曲面 $F(x, y, z) = 0$ 上一点 $M(x_0, y_0, z_0)$, 则:

1、过此点的法向量: $\vec{n} = \{F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\}$

2、过此点的切平面方程: $F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0$

3、过此点的法线方程: $\frac{x-x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$

方向导数与梯度：

函数 $z = f(x, y)$ 在一点 $p(x, y)$ 沿任一方向 l 的方向导数为: $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi$

其中 φ 为 x 轴到方向 l 的转角。

函数 $z = f(x, y)$ 在一点 $p(x, y)$ 的梯度: $\text{grad} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$

它与方向导数的关系是: $\frac{\partial f}{\partial l} = \text{grad} f(x, y) \cdot \vec{e}$, 其中 $\vec{e} = \cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j}$, 为 l 方向上的单位向量。

$\therefore \frac{\partial f}{\partial l}$ 是 $\text{grad} f(x, y)$ 在 l 上的投影。

多元函数的极值及其求法：

设 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, 令: $f_{xx}(x_0, y_0) = A$, $f_{xy}(x_0, y_0) = B$, $f_{yy}(x_0, y_0) = C$

$$\text{则: } \begin{cases} AC - B^2 > 0 \text{ 时, } \begin{cases} A < 0, (x_0, y_0) \text{ 为极大值} \\ A > 0, (x_0, y_0) \text{ 为极小值} \end{cases} \\ AC - B^2 < 0 \text{ 时, } & \text{无极值} \\ AC - B^2 = 0 \text{ 时, } & \text{不确定} \end{cases}$$

重积分及其应用:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

$$\text{曲面 } z = f(x, y) \text{ 的面积 } A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

$$\text{平面薄片的重心: } \bar{x} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D x \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}, \quad \bar{y} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D y \rho(x, y) d\sigma}{\iint_D \rho(x, y) d\sigma}$$

$$\text{平面薄片的转动惯量: 对于 } x \text{ 轴 } I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) d\sigma, \quad \text{对于 } y \text{ 轴 } I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) d\sigma$$

平面薄片 (位于 xoy 平面) 对 z 轴上质点 $M(0, 0, a)$, ($a > 0$) 的引力: $F = \{F_x, F_y, F_z\}$, 其中:

$$F_x = f \iint_D \frac{\rho(x, y) x d\sigma}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad F_y = f \iint_D \frac{\rho(x, y) y d\sigma}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad F_z = -fa \iint_D \frac{\rho(x, y) d\sigma}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

柱面坐标和球面坐标:

$$\text{柱面坐标: } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}, \quad \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} F(r, \theta, z) r dr d\theta dz,$$

其中: $F(r, \theta, z) = f(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$

$$\text{球面坐标: } \begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}, \quad dv = r d\varphi \cdot r \sin \varphi \cdot d\theta \cdot dr = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} F(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi, \theta)} F(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \varphi dr$$

$$\text{重心: } \bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} x \rho dv, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} y \rho dv, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} z \rho dv, \quad \text{其中 } M = \bar{x} = \iiint_{\Omega} \rho dv$$

$$\text{转动惯量: } I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho dv, \quad I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \rho dv, \quad I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho dv$$

曲线积分:

第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）：

设 $f(x, y)$ 在 L 上连续， L 的参数方程为： $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ ， $(\alpha \leq t \leq \beta)$ ，则：

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (\alpha < \beta) \quad \text{特殊情况: } \begin{cases} x = t \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）：

设 L 的参数方程为： $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ ，则：

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t)\} dt$$

两类曲线积分之间的关系： $\int_L P dx + Q dy = \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds$ ，其中 α 和 β 分别为

L 上积分起止点处切向量的方向角。

$$\text{格林公式: } \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy \quad \text{格林公式: } \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy$$

当 $P = -y, Q = x$ ，即： $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$ 时，得到 D 的面积： $A = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$

平面上曲线积分与路径无关的条件：

1、 G 是一个单连通区域；

2、 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 。注意奇点，如 $(0, 0)$ ，应

减去对此奇点的积分，注意方向相反！

二元函数的全微分求积：

在 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 时， $P dx + Q dy$ 才是二元函数 $u(x, y)$ 的全微分，其中：

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad \text{通常设 } x_0 = y_0 = 0.$$

曲面积分：

$$\text{对面积的曲面积分: } \iint_{\Sigma} f(x, y, z) ds = \iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy$$

$$\text{对坐标的曲面积分: } \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy, \quad \text{其中:}$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)] dx dy, \quad \text{取曲面的上侧时取正号;}$$

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z] dy dz, \quad \text{取曲面的前侧时取正号;}$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{xz}} Q[x, y(z, x), z] dz dx, \quad \text{取曲面的右侧时取正号。}$$

$$\text{两类曲面积分之间的关系: } \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

高斯公式：

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy = \oiint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

高斯公式的物理意义——通量与散度：

散度： $\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ ，即：单位体积内所产生的流体质量，若 $\operatorname{div} \bar{v} < 0$ ，则为消失...

$$\text{通量: } \iint_{\Sigma} \bar{A} \cdot \bar{n} ds = \iint_{\Sigma} A_n ds = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds,$$

$$\text{因此，高斯公式又可写成: } \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \bar{A} dv = \oiint_{\Sigma} A_n ds$$

斯托克斯公式——曲线积分与曲面积分的关系：

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$$

$$\text{上式左端又可写成: } \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

空间曲线积分与路径无关的条件： $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$$\text{旋度: } \operatorname{rot} \bar{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\text{向量场 } \bar{A} \text{ 沿有向闭曲线 } \Gamma \text{ 的环流量: } \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \oint_{\Gamma} \bar{A} \cdot \bar{\tau} ds$$

常数项级数：

$$\text{等比数列: } 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\text{等差数列: } 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2}$$

调和级数: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ 是发散的

级数审敛法：

1、正项级数的审敛法——根植审敛法（柯西判别法）：

设： $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}$ ，则 $\begin{cases} \rho < 1 \text{ 时，级数收敛} \\ \rho > 1 \text{ 时，级数发散} \\ \rho = 1 \text{ 时，不确定} \end{cases}$

2、比值审敛法：

设： $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$ ，则 $\begin{cases} \rho < 1 \text{ 时，级数收敛} \\ \rho > 1 \text{ 时，级数发散} \\ \rho = 1 \text{ 时，不确定} \end{cases}$

3、定义法：

$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ； $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 存在，则收敛；否则发散。

交错级数 $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$ (或 $-u_1 + u_2 - u_3 + \cdots, u_n > 0$) 的审敛法——莱布尼兹定理：

如果交错级数满足 $\begin{cases} u_n \geq u_{n+1} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \end{cases}$ ，那么级数收敛且其和 $s \leq u_1$ ，其余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \leq u_{n+1}$ 。

绝对收敛与条件收敛：

(1) $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$ ，其中 u_n 为任意实数；

(2) $|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| + \cdots$

如果(2)收敛，则(1)肯定收敛，且称为绝对收敛级数；

如果(2)发散，而(1)收敛，则称(1)为条件收敛级数。

调和级数： $\sum \frac{1}{n}$ 发散，而 $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛；

级数： $\sum \frac{1}{n^2}$ 收敛；

p 级数： $\sum \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} p \leq 1 \text{ 时发散} \\ p > 1 \text{ 时收敛} \end{cases}$

幂级数：

$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$ $\begin{cases} |x| < 1 \text{ 时，收敛于 } \frac{1}{1-x} \\ |x| \geq 1 \text{ 时，发散} \end{cases}$

对于级数(3) $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ ，如果它不是仅在原点收敛，也不是在全

数轴上都收敛，则必存在 R ，使 $\begin{cases} |x| < R \text{ 时收敛} \\ |x| > R \text{ 时发散} \\ |x| = R \text{ 时不定} \end{cases}$ ，其中 R 称为收敛半径。

求收敛半径的方法：设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ ，其中 a_n, a_{n+1} 是(3)的系数，则 $\begin{cases} \rho \neq 0 \text{ 时， } R = \frac{1}{\rho} \\ \rho = 0 \text{ 时， } R = +\infty \\ \rho = +\infty \text{ 时， } R = 0 \end{cases}$

函数展开成幂级数:

函数展开成泰勒级数: $f(x) = f(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$

余项: $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $f(x)$ 可以展开成泰勒级数的充要条件是: $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$

$x_0 = 0$ 时即为麦克劳林公式: $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$

一些函数展开成幂级数:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty)$$

欧拉公式:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{或} \quad \begin{cases} \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \end{cases}$$

三角级数:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

其中, $a_0 = 2A_0$, $a_n = A_n \sin \varphi_n$, $b_n = A_n \cos \varphi_n$, $\omega t = x$ 。

正交性: $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ 任意两个不同项的乘积在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分 = 0。

傅立叶级数:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad \text{周期} = 2\pi$$

$$\text{其中} \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx & (n=0, 1, 2, \dots) \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx & (n=1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8} \quad \left| \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \text{ (相加)} \right.$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots = \frac{\pi^2}{24} \quad \left| \quad 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12} \text{ (相减)} \right.$$

正弦级数: $a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$ $n=1, 2, 3, \dots$ $f(x) = \sum b_n \sin nx$ 是奇函数

余弦级数: $b_n = 0$, $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$ $n=0, 1, 2, \dots$ $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx$ 是偶函数

周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}), \text{ 周期} = 2l$$

$$\text{其中} \begin{cases} a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx & (n=0,1,2,\dots) \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx & (n=1,2,3,\dots) \end{cases}$$

微分方程的相关概念:

一阶微分方程: $y' = f(x, y)$ 或 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

可分离变量的微分方程: 一阶微分方程可以化为 $g(y)dy = f(x)dx$ 的形式, 解法:

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx \quad \text{得: } G(y) = F(x) + C \text{ 称为隐式通解。}$$

齐次方程: 一阶微分方程可以写成 $\frac{dy}{dx} = f(x, y) = \varphi(\frac{y}{x})$, 即写成 $\frac{y}{x}$ 的函数, 解法:

设 $u = \frac{y}{x}$, 则 $\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$, $u + \frac{du}{dx} = \varphi(u)$, $\therefore \frac{dx}{x} = \frac{du}{\varphi(u) - u}$ 分离变量, 积分后将 $\frac{y}{x}$ 代替 u ,

即得齐次方程通解。

一阶线性微分方程:

$$1、\text{一阶线性微分方程: } \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$$\begin{cases} \text{当 } Q(x) = 0 \text{ 时, 为齐次方程, } y = Ce^{-\int P(x)dx} \\ \text{当 } Q(x) \neq 0 \text{ 时, 为非齐次方程, } y = (\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C)e^{-\int P(x)dx} \end{cases}$$

$$2、\text{贝努力方程: } \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, (n \neq 0, 1)$$

全微分方程:

如果 $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ 中左端是某函数的全微分方程, 即:

$$du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \text{ 其中: } \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$$

$\therefore u(x, y) = C$ 应该是该全微分方程的通解。

二阶微分方程:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x), \begin{cases} f(x) \equiv 0 \text{ 时为齐次} \\ f(x) \neq 0 \text{ 时为非齐次} \end{cases}$$

二阶常系数齐次线性微分方程及其解法:

(*) $y'' + py' + qy = 0$, 其中 p, q 为常数;

求解步骤:

1、写出特征方程: $(\Delta)r^2 + pr + q = 0$, 其中 r^2 , r 的系数及常数项恰好是(*)式中 y'', y', y 的系数;

2、求出(Δ)式的两个根 r_1, r_2

3、根据 r_1, r_2 的不同情况，按下表写出(*)式的通解：

r_1, r_2 的形式	(*)式的通解
两个不相等实根 ($p^2 - 4q > 0$)	$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$
两个相等实根 ($p^2 - 4q = 0$)	$y = (c_1 + c_2 x) e^{r_1 x}$
一对共轭复根 ($p^2 - 4q < 0$) $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ $\alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$	$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q \text{ 为常数}$$

$$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x) \text{ 型}, \quad \lambda \text{ 为常数};$$

$$f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + P_n(x) \sin \omega x] \text{ 型}$$

线性代数部分

1、行列式

- n 行列式共有 n^2 个元素，展开后有 $n!$ 项，可分解为 2^n 行列式；
- 代数余子式的性质：
 - ①、 A_{ij} 和 a_{ij} 的大小无关；
 - ②、某行（列）的元素乘以其它行（列）元素的代数余子式为 0；
 - ③、某行（列）的元素乘以该行（列）元素的代数余子式为 $|A|$ ；
- 代数余子式和余子式的关系： $M_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$ $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$
- 设 n 行列式 D ：

将 D 上、下翻转或左右翻转，所得行列式为 D_1 ，则 $D_1 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$ ；

将 D 顺时针或逆时针旋转 90° ，所得行列式为 D_2 ，则 $D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D$ ；

将 D 主对角线翻转后（转置），所得行列式为 D_3 ，则 $D_3 = D$ ；

将 D 主副角线翻转后，所得行列式为 D_4 ，则 $D_4 = D$ ；
- 行列式的重要公式：
 - ①、主对角行列式：主对角元素的乘积；
 - ②、副对角行列式：副对角元素的乘积 $\times (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ；
 - ③、上、下三角行列式（ $|\nabla| = |\blacktriangleright|$ ）：主对角元素的乘积；
 - ④、 $|\blacktriangledown|$ 和 $|\blacktriangleleft|$ ：副对角元素的乘积 $\times (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ；
 - ⑤、拉普拉斯展开式： $\begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$ 、 $\begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{m \cdot n} |A||B|$
 - ⑥、范德蒙行列式：大指标减小指标的连乘积；
 - ⑦、特征值；
- 对于 n 阶行列式 $|A|$ ，恒有： $|\lambda E - A| = \lambda^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k S_k \lambda^{n-k}$ ，其中 S_k 为 k 阶主子式；
- 证明 $|A| = 0$ 的方法：
 - ①、 $|A| = -|A|$ ；
 - ②、反证法；
 - ③、构造齐次方程组 $Ax = 0$ ，证明其有非零解；
 - ④、利用秩，证明 $r(A) < n$ ；
 - ⑤、证明 0 是其特征值；

2、矩阵

- A 是 n 阶可逆矩阵：

-
- $\Leftrightarrow |\mathbf{A}| \neq 0$ (是非奇异矩阵);
 $\Leftrightarrow r(\mathbf{A}) = n$ (是满秩矩阵);
 $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ 的行(列)向量组线性无关;
 \Leftrightarrow 齐次方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 有非零解;
 $\Leftrightarrow \forall \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 总有唯一解;
 $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ 与 \mathbf{E} 等价;
 $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ 可表示成若干个初等矩阵的乘积;
 $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ 的特征值全不为 0;
 $\Leftrightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 是正定矩阵;
 $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ 的行(列)向量组是 \mathbf{R}^n 的一组基;
 $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ 是 \mathbf{R}^n 中某两组基的过渡矩阵;

2. 对于 n 阶矩阵 \mathbf{A} : $\mathbf{AA}^* = \mathbf{A}^* \mathbf{A} = |\mathbf{A}| \mathbf{E}$ 无条件恒成立;

$$\begin{aligned}
 3. \quad (\mathbf{A}^{-1})^* &= (\mathbf{A}^*)^{-1} & (\mathbf{A}^{-1})^T &= (\mathbf{A}^T)^{-1} & (\mathbf{A}^*)^T &= (\mathbf{A}^T)^* \\
 (\mathbf{AB})^T &= \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T & (\mathbf{AB})^* &= \mathbf{B}^* \mathbf{A}^* & (\mathbf{AB})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}
 \end{aligned}$$

4. 矩阵是表格, 推导符号为波浪号或箭头; 行列式是数值, 可求代数和;

5. 关于分块矩阵的重要结论, 其中均 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 可逆:

若 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & \\ & \mathbf{A}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{A}_s \end{pmatrix}$, 则:

I、 $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_1| |\mathbf{A}_2| \cdots |\mathbf{A}_s|$;

II、 $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & & \\ & \mathbf{A}_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{A}_s^{-1} \end{pmatrix}$;

②、 $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}$; (主对角分块)

③、 $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$; (副对角分块)

④、 $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}$; (拉普拉斯)

⑤、 $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}$; (拉普拉斯)

3、矩阵的初等变换与线性方程组

1. 一个 $m \times n$ 矩阵 \mathbf{A} , 总可经过初等变换化为标准形, 其标准形是唯一确定的: $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}_{m \times n}$;

等价类：所有与 A 等价的矩阵组成的一个集合，称为一个等价类；标准形为其形状最简单的矩阵；
对于同型矩阵 A 、 B ，若 $r(A)=r(B) \Leftrightarrow A \sim B$ ；

2. 行最简形矩阵：

- ①、只能通过初等行变换获得；
- ②、每行首个非 0 元素必须为 1；
- ③、每行首个非 0 元素所在列的其他元素必须为 0；

3. 初等行变换的应用：（初等列变换类似，或转置后采用初等行变换）

- ①、若 $(A, E) \xrightarrow{r} (E, X)$ ，则 A 可逆，且 $X = A^{-1}$ ；
- ②、对矩阵 (A, B) 做初等行变化，当 A 变为 E 时， B 就变成 $A^{-1}B$ ，即： $(A, B) \xrightarrow{c} (E, A^{-1}B)$ ；
- ③、求解线性方程组：对于 n 个未知数 n 个方程 $Ax = b$ ，如果 $(A, b) \xrightarrow{r} (E, x)$ ，则 A 可逆，且 $x = A^{-1}b$ ；

4. 初等矩阵和对角矩阵的概念：

- ①、初等矩阵是行变换还是列变换，由其位置决定：左乘为初等行矩阵、右乘为初等列矩阵；

②、 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ，左乘矩阵 A ， λ_i 乘 A 的各行元素；右乘， λ_i 乘 A 的各列元素；

③、对调两行或两列，符号 $E(i, j)$ ，且 $E(i, j)^{-1} = E(i, j)$ ，例如： $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}$ ；

④、倍乘某行或某列，符号 $E(i(k))$ ，且 $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$ ，例如： $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & k & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{k} & \\ & & 1 \end{pmatrix} (k \neq 0)$ ；

⑤、倍加某行或某列，符号 $E(ij(k))$ ，且 $E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k))$ ，如： $\begin{pmatrix} 1 & & k \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & -k \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} (k \neq 0)$ ；

5. 矩阵秩的基本性质：

- ①、 $0 \leq r(A_{m \times n}) \leq \min(m, n)$ ；
- ②、 $r(A^T) = r(A)$ ；
- ③、若 $A \sim B$ ，则 $r(A) = r(B)$ ；
- ④、若 P 、 Q 可逆，则 $r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$ ；（可逆矩阵不影响矩阵的秩）
- ⑤、 $\max(r(A), r(B)) \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$ ；（※）
- ⑥、 $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$ ；（※）
- ⑦、 $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$ ；（※）
- ⑧、如果 A 是 $m \times n$ 矩阵， B 是 $n \times s$ 矩阵，且 $AB = 0$ ，则：（※）
I、 B 的列向量全部是齐次方程组 $AX = 0$ 解（转置运算后的结论）；
II、 $r(A) + r(B) \leq n$
- ⑨、若 A 、 B 均为 n 阶方阵，则 $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$ ；

$$\textcircled{3}、\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \beta \quad \left(\text{全部按列分块, 其中 } \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right);$$

$$\textcircled{4}、a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = \beta \quad (\text{线性表出})$$

$$\textcircled{5}、\text{有解的充要条件: } r(A) = r(A, \beta) \leq n \quad (n \text{ 为未知数的个数或维数})$$

4、向量组的线性相关性

1. m 个 n 维列向量所组成的向量组 A : $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 构成 $n \times m$ 矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$;

$$m \text{ 个 } n \text{ 维行向量所组成的向量组 } B: \beta_1^T, \beta_2^T, \dots, \beta_m^T \text{ 构成 } m \times n \text{ 矩阵 } B = \begin{pmatrix} \beta_1^T \\ \beta_2^T \\ \vdots \\ \beta_m^T \end{pmatrix};$$

含有有限个向量的有序向量组与矩阵一一对应;

2. ①、向量组的线性相关、无关 $\Leftrightarrow Ax=0$ 有、无非零解; (齐次线性方程组)
 ②、向量的线性表出 $\Leftrightarrow Ax=b$ 是否有解; (线性方程组)
 ③、向量组的相互线性表示 $\Leftrightarrow AX=B$ 是否有解; (矩阵方程)
3. 矩阵 $A_{m \times n}$ 与 $B_{l \times n}$ 行向量组等价的充分必要条件是: 齐次方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 同解; (P_{101} 例 14)
4. $r(A^T A) = r(A)$; (P_{101} 例 15)
5. n 维向量线性相关的几何意义:
 ①、 α 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha = 0$;
 ②、 α, β 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha, \beta$ 坐标成比例或共线 (平行);
 ③、 α, β, γ 线性相关 $\Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma$ 共面;
6. 线性相关与无关的两套定理:
 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$ 必线性相关;
 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ 必线性无关; (向量的个数加加减减, 二者为对偶)
 若 r 维向量组 A 的每个向量上添上 $n-r$ 个分量, 构成 n 维向量组 B :
 若 A 线性无关, 则 B 也线性无关; 反之若 B 线性相关, 则 A 也线性相关; (向量组的维数加加减减)
 简言之: 无关组延长后仍无关, 反之, 不确定;
7. 向量组 A (个数为 r) 能由向量组 B (个数为 s) 线性表示, 且 A 线性无关, 则 $r \leq s$ (二版 P_{74} 定理 7);

向量组 A 能由向量组 B 线性表示, 则 $r(A) \leq r(B)$; (P_{86} 定理 3)

向量组 A 能由向量组 B 线性表示

$$\Leftrightarrow AX=B \text{ 有解;}$$

$$\Leftrightarrow r(A) = r(A, B) \quad (P_{85} \text{ 定理 2})$$

向量组 A 能由向量组 B 等价 $\Leftrightarrow r(A) = r(B) = r(A, B)$ (P_{85} 定理 2 推论)

8. 方阵 A 可逆 \Leftrightarrow 存在有限个初等矩阵 P_1, P_2, \dots, P_l , 使 $A = P_1 P_2 \cdots P_l$;

①、矩阵行等价: $A \sim^r B \Leftrightarrow PA = B$ (左乘, P 可逆) $\Leftrightarrow Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解

②、矩阵列等价: $A \sim^c B \Leftrightarrow AQ = B$ (右乘, Q 可逆);

③、矩阵等价: $A \sim B \Leftrightarrow PAQ = B$ (P 、 Q 可逆);

9. 对于矩阵 $A_{m \times n}$ 与 $B_{l \times n}$:

①、若 A 与 B 行等价, 则 A 与 B 的行秩相等;

②、若 A 与 B 行等价, 则 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 且 A 与 B 的任何对应的列向量组具有相同的线性相关性;

③、矩阵的初等变换不改变矩阵的秩;

④、矩阵 A 的行秩等于列秩;

10. 若 $A_{m \times s} B_{s \times n} = C_{m \times n}$, 则:

①、 C 的列向量组能由 A 的列向量组线性表示, B 为系数矩阵;

②、 C 的行向量组能由 B 的行向量组线性表示, A^T 为系数矩阵; (转置)

11. 齐次方程组 $Bx = 0$ 的解一定是 $ABx = 0$ 的解, 考试中可以直接作为定理使用, 而无需证明;

①、 $ABx = 0$ 只有零解 $\Rightarrow Bx = 0$ 只有零解;

②、 $Bx = 0$ 有非零解 $\Rightarrow ABx = 0$ 一定存在非零解;

12. 设向量组 $B_{n \times r} : b_1, b_2, \dots, b_r$ 可由向量组 $A_{n \times s} : a_1, a_2, \dots, a_s$ 线性表示为: (P_{110} 题 19 结论)

$$(b_1, b_2, \dots, b_r) = (a_1, a_2, \dots, a_s)K \quad (B = AK)$$

其中 K 为 $s \times r$, 且 A 线性无关, 则 B 组线性无关 $\Leftrightarrow r(K) = r$; (B 与 K 的列向量组具有相同线性相关性)

(必要性: $\because r = r(B) = r(AK) \leq r(K), r(K) \leq r, \therefore r(K) = r$; 充分性: 反证法)

注: 当 $r = s$ 时, K 为方阵, 可当作定理使用;

13. ①、对矩阵 $A_{m \times n}$, 存在 $Q_{n \times m}$, $AQ = E_m \Leftrightarrow r(A) = m$ 、 Q 的列向量线性无关; (P_{87})

②、对矩阵 $A_{m \times n}$, 存在 $P_{n \times m}$, $PA = E_n \Leftrightarrow r(A) = n$ 、 P 的行向量线性无关;

14. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关

\Leftrightarrow 存在一组不全为 0 的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 使得 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s = 0$ 成立; (定义)

$$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = 0 \text{ 有非零解, 即 } Ax = 0 \text{ 有非零解;}$$

$\Leftrightarrow r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) < s$, 系数矩阵的秩小于未知数的个数;

15. 设 $m \times n$ 的矩阵 A 的秩为 r , 则 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解集 S 的秩为: $r(S) = n - r$;

16. 若 η^* 为 $Ax = b$ 的一个解, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 为 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 则 $\eta^*, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关; (P_{111} 题 33 结论)

5、相似矩阵和二次型

1. 正交矩阵 $\Leftrightarrow A^T A = E$ 或 $A^{-1} = A^T$ (定义), 性质:

①、 A 的列向量都是单位向量，且两两正交，即 $a_i^T a_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} (i, j=1, 2, \dots, n)$ ；

②、若 A 为正交矩阵，则 $A^{-1} = A^T$ 也为正交阵，且 $|A| = \pm 1$ ；

③、若 A 、 B 正交阵，则 AB 也是正交阵；

注意：求解正交阵，千万不要忘记**施密特正交化**和**单位化**；

2. 施密特正交化：(a_1, a_2, \dots, a_r)

$$b_1 = a_1;$$

$$b_2 = a_2 - \frac{[b_1, a_2]}{[b_1, b_1]} b_1$$

.....

$$b_r = a_r - \frac{[b_1, a_r]}{[b_1, b_1]} b_1 - \frac{[b_2, a_r]}{[b_2, b_2]} b_2 - \dots - \frac{[b_{r-1}, a_r]}{[b_{r-1}, b_{r-1}]} b_{r-1};$$

3. 对于普通方阵，不同特征值对应的特征向量线性无关；

对于**实对称阵**，不同特征值对应的特征向量正交；

4. ①、 A 与 B 等价 $\Leftrightarrow A$ 经过初等变换得到 B ；

$$\Leftrightarrow PAQ = B, \quad P、Q \text{ 可逆};$$

$$\Leftrightarrow r(A) = r(B), \quad A、B \text{ 同型};$$

②、 A 与 B 合同 $\Leftrightarrow C^T A C = B$ ，其中可逆；

$$\Leftrightarrow x^T A x \text{ 与 } x^T B x \text{ 有相同的正、负惯性指数};$$

③、 A 与 B 相似 $\Leftrightarrow P^{-1} A P = B$ ；

5. 相似一定合同、合同未必相似；

若 C 为正交矩阵，则 $C^T A C = B \Rightarrow A \sim B$ ，（合同、相似的约束条件不同，相似的更严格）；

6. A 为对称阵，则 A 为二次型矩阵；

7. n 元二次型 $x^T A x$ 为正定：

$$\Leftrightarrow A \text{ 的正惯性指数为 } n;$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 与 } E \text{ 合同，即存在可逆矩阵 } C, \text{ 使 } C^T A C = E;$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 的所有特征值均为正数};$$

$$\Leftrightarrow A \text{ 的各阶顺序主子式均大于 } 0;$$

$$\Rightarrow a_{ii} > 0, |A| > 0; \text{ (必要条件)}$$

概率论与数理统计部分

1. 随机事件及其概率

$$A \cup \Omega = \Omega \quad A \cap \Omega = A$$

$$\text{吸收律: } A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup (AB) = A \quad A \cap (A \cup B) = A$$

$$A - B = A\bar{B} = A - (AB)$$

$$\text{反演律: } \overline{A \cup B} = \bar{A} \bar{B} \quad \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$$

2. 概率的定义及其计算

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$\text{若 } A \subset B \Rightarrow P(B - A) = P(B) - P(A)$$

$$\text{对任意两个事件 } A, B, \text{ 有 } P(B - A) = P(B) - P(AB)$$

加法公式: 对任意两个事件 A, B , 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n) \quad 3. \text{ 条件概率}$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

乘法公式

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \quad (P(A) > 0)$$

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) \quad \text{全概率公式} \\ (P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(AB_i) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A|B_i)$$

Bayes 公式

$$P(B_k|A) = \frac{P(AB_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)}$$

4. 随机变量及其分布

分布函数计算

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= P(X \leq b) - P(X \leq a) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

5. 离散型随机变量

(1) 0-1 分布

$$P(X = k) = p^k (1-p)^{1-k}, \quad k = 0, 1$$

(2) 二项分布 $B(n, p)$

若 $P(A) = p$

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

* Poisson 定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$$

$$\begin{aligned} \text{有 } \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

(3) Poisson 分布 $P(\lambda)$

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

6. 连续型随机变量

(1) 均匀分布 $U(a, b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, \\ \frac{x-a}{b-a}, \\ 1 \end{cases}$$

(2) 指数分布 $E(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

(3) 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < +\infty$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

* $N(0,1)$ — 标准正态分布

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad -\infty < x < +\infty$$

7. 多维随机变量及其分布

二维随机变量 (X, Y) 的分布函数

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) dv du$$

边缘分布函数与边缘密度函数

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) dv du$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v) dv$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du dv$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y) du$$

8. 连续型二维随机变量

(1) 区域 G 上的均匀分布, $U(G)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & (x, y) \in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 二维正态分布

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

9. 二维随机变量的 条件分布

$-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$

$$f(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) \quad f_X(x) > 0$$

$$= f_Y(y)f_{X|Y}(x|y) \quad f_Y(y) > 0$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{f_X(x)}$$

10. 随机变量的数字特征

数学期望

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

随机变量函数的数学期望

X 的 k 阶原点矩 $E(X^k)$

X 的 k 阶绝对原点矩 $E(|X|^k)$

X 的 k 阶中心矩 $E((X - E(X))^k)$

X 的 方差 $E((X - E(X))^2) = D(X)$

X, Y 的 $k + l$ 阶混合原点矩 $E(X^k Y^l)$

X, Y 的 $k + l$ 阶混合中心矩

$$E((X - E(X))^k (Y - E(Y))^l)$$

X, Y 的 二阶混合原点矩 $E(XY)$

X, Y 的二阶混合中心矩 X, Y 的协方差

$$E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

X, Y 的相关系数

$$E\left(\frac{(X - E(X))(Y - E(Y))}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\right) = \rho_{XY}$$

X 的方差

$$D(X) = E((X - E(X))^2)$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

协方差

$$\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= \pm \frac{1}{2}(D(X \pm Y) - D(X) - D(Y))$$

$$\text{相关系数 } \rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$