2020 考研-数学-基础阶段
第六次测试卷解析（协议）

本试卷满分 100 分，考试时间 30 分钟

姓名__________ 得分__________

一、解答题： 请将正确答案及其解题过程写在题后的空白部分。

1、（本小题满分 20 分）设 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{-t^2}dt$，求 $\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$。

【答案】$-2e^{-x^2y^2}$。

【解析】由题意可得，$\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{-x^2y^2}$，$\frac{\partial f}{\partial y}=xe^{-x^2y^2}$，

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2xy^3e^{-x^2y^2}$，$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x^3ye^{-x^2y^2}$，$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=(1-2x^2y^2)e^{-x^2y^2}$，

代入可得 $\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2e^{-x^2y^2}$。

2、（本小题满分 20 分）设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x+y}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，说明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性以及可微性。

【答案】$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续且可微。

【解析】因为 $\sin(x^2+y^2)<x^2+y^2$，所以 $0\le|f(x,y)|\le|x+y|$，又 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}|x+y|=0$，

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续。

由题知，$\Delta f(x,y)=f(x,y)-f(0,0)=\frac{x+y}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2)$，

$f_x'(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x^2}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{x^2}=1$，

同理可得 $f_y'(0,0)=1$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{\Delta f(x,y)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{\frac{x+y}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2)-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{(x+y)\left(\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}-1\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\dfrac{1}{6}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x+y)(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=0$，由定义可知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微。

3、（本小题满分 20 分）若函数 $u=y+f(u)$，其中 $f(u)$ 可微，且 $u=x^2+y^2$，证明 $x\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\dfrac{\partial u}{\partial x}=x$。

【解析】方程 $u=y+f(u)$ 两边同时对 x 求导，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xf'(u)$，方程 $u=y+f(u)$ 两边同时对 y 求导，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=1+f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}=1+2yf'(u)$，因此，$x\dfrac{\partial u}{\partial y}-y\dfrac{\partial u}{\partial x}=x[1+2yf'(u)]-y\cdot 2xf'(u)=x$，证毕。

4、（本小题满分 20 分）计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$，其中，$D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le R^2\}$。

【答案】$\dfrac{2}{3}\pi R^3$。

【解析】由二重积分的几何意义知，$\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$ 表示以原点为球心，半径为 R 的上半球体的体积，故其值为 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{2}{3}\pi R^3$。

5、（本小题满分 20 分）计算二重积分$\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^x \frac{x}{y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^2 \frac{x}{y}dy$。

【答案】$\frac{9}{8}$。

【解析】交换积分次序可知，

$$\int_1^2 dx\int_{\sqrt{x}}^x \frac{x}{y}dy+\int_2^4 dx\int_{\sqrt{x}}^2 \frac{x}{y}dy=\int_1^2 dy\int_y^{y^2} \frac{x}{y}dx=\frac{1}{2}\int_1^2 (y^3-y)dy=\frac{9}{8}。$$