

2020 考研-数学-基础阶段-线性代数

第一次测试卷（协议）解析

本试卷满分 100 分，考试时间 30 分钟

姓名_____

得分_____

一、选择题：共 15 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的

1、已知 A ， B 均为 n 阶方阵，则必有（ ）

(A) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(B) $(AB)^T = A^T B^T$

(C) $AB = O$ 时， $A = O$ 或 $B = O$

(D) $|A + AB| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0$ 或 $|E + B| = 0$

【答案】：(D)

【解析】： $|A + AB| = 0 \Rightarrow |A(E + B)| = 0 \Rightarrow |A| = 0$ 或 $|E + B| = 0$ ；

$$|A| = 0 \text{ 或 } |A + B| = 0 \Rightarrow |A||A + B| = |A(E + B)| = 0。$$

序号	错误原因	学习建议	备注
27010 1	不清楚矩阵转置的运算法则	讲义第 142 页转置；习题册第 165 页第 2 题；注意体会两个矩阵相乘后的转置运算。	
27010 2	不清楚矩阵乘法中不成立的运算法则	讲义第 142 页不成立的运算法则；习题册第 165 页第 1 题；注意体会矩阵乘法中不成立的运算法则。	
27010 3	不清楚方阵行列式的运算	讲义第 146 页方阵的行列式；习题册第 166 页第 10 题；注意体会两个方阵相乘后的行列式的运算。	
27010 4	其他；		

二、解答题：请将正确答案及其解题过程写在题后的空白部分。

2、(本小题满分 25 分) 已知 $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$, 试求:

(1) $|A|$; (2) $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44}$; (3) 求 $M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44}$ 。

【答案】: (1) -20; (2) 0; (3) -8。

【解析】: (1) $|A| = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -20$;

(2) $D_4 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

(3) $M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44} = -A_{41} + A_{42} - A_{43} + A_{44}$

$$D_4^* = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

序号	错误原因	学习建议	备注
27020 1	不清楚展开定理的内容	讲义第 135 页展开定理;讲义第 135 页例 1 (1) 题以及习题册第 155 页第 2 题;注意体会展开定理的内容。	
27020 2	不清楚行列式运算的基本性质	讲义第 133 页推论 3;讲义第 133 页例 2;注意体会行列式运算的基本性质。	
27020 3	不清楚余子式与代数余子式的定义	讲义第 134 页余子式与代数余子式;讲义第 136 页例 5;注意体会余子式与代数余子式的定义。	
27020 4	计算型错误	建议 1、2、3。	
27020 5	其他;		

3、(本小题满分 20 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求 A^n 。

【答案】: $\begin{bmatrix} 2 \cdot 4^{n-1} & 4^n & 0 & 0 \\ 4^{n-1} & 2 \cdot 4^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 4n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$ 。

【解析】: 令 $A = \begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

因为 $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $B^n = 4^{n-1} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, 又 $C^n = \begin{bmatrix} 2^n & 4n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$ 。

序号	错误原因	学习建议	备注
27030 1	不清楚矩阵分块的处理方法	讲义第 145 页分块矩阵小注; 讲义第 146 页例 8 以及习题册第 166 页第 8 题; 注意体会矩阵乘法或方幂运算时利用矩阵分块的处理方法。	
27030 2	不清楚利用矩阵乘法的结合律求解矩阵方幂的处理方法	讲义第 143 页小结; 讲义第 143 页例 4 例 5 以及习题册 165 页第 5 题; 注意体会利用矩阵乘法的结合律求解矩阵方幂的处理方法。	
27030 3	不清楚利用矩阵分解求解矩阵方幂的处理方法	讲义第 144 页小结; 讲义第 144 页例 7 以及习题册第 165 页第 3、4 题; 注意体会利用矩阵分解求解矩阵方幂的处理方法。	
27030 4	计算型错误	建议 1、2、3。	
27030 5	其他;		

4、(本小题满分 20 分) 设 A, B 为 n 阶矩阵, 满足 $A^2 = E, B^2 = E$, 且 $|A| + |B| = 0$, 求 $|A + B|$ 。

【答案】：0。

【解析】：因为 $A+B=A(A+B)B$ ，所以有 $|A+B|=|A||B||A+B|$ ，因为 $|A|+|B|=0$ ，所以 $|A+B|=0$ 。

序号	错误原因	学习建议	备注
27040 1	不清楚和式求行列式计算的方法	讲义第 149 页小结；讲义第 149 页例 15 以及习题册第 167 页第 15 题；注意体会和式求行列式需要把行列式化为矩阵相乘的形式然后再进行行列式计算。	
27040 2	不清楚利用单位矩阵的变形将和式行列式转化为矩阵相乘的方法	讲义第 149 页小结；讲义第 149 页例 16 以及习题册 167 页第 16 题；注意体会利用单位矩阵的变形将和式行列式转化为矩阵相乘的方法。	
27040 3	计算型错误	建议 1、2。	
27040 4	其他；		

5、(本小题满分 20 分) 设 A, B 均为 n 阶正交矩阵，且行列式均小于零，记分块矩阵

$$P = \begin{bmatrix} O & A^T \\ B^T & O \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} O & |A|B \\ |B|A & O \end{bmatrix}, \text{ 其中 } E \text{ 为 } n \text{ 阶单位矩阵, 计算并化简 } PQ.$$

【答案】： $-E$ 。

$$\text{【解析】： } PQ = \begin{bmatrix} O & A^T \\ B^T & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & |A|B \\ |B|A & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E & O \\ O & -E \end{bmatrix} = -E.$$

序号	错误原因	学习建议	备注
27050 1	不清楚分块矩阵的乘法运算	讲义第 145 页分块矩阵的运算；习题册第 166 页第 8 题；注意体会分块矩阵的乘法运算。	
27050 2	不清楚矩阵乘法运算中成立的运算法则	讲义第 142 页成立的运算法则；讲义第 143 页例 14 以及习题册 165 页第 1 (3) 题；注意体会矩阵与数的乘法满足交换律。	
27050 3	不清楚正交矩阵的定义	讲义第 140 页常见矩阵 (7) 正交矩阵；习题册 167 页第 16 题；注意体	

		会正交矩阵的定义。	
27050 4	其他：		

offcn