2020 考研-数学-基础阶段-线性代数 第一次测试卷（协议）解析

本试卷满分 100 分，考试时间 30 分钟

姓名__________ 得分__________

一、选择题：共 15 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的

1、已知 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则必有（ ）

（A）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ （B）$(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T$

（C）$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ （D）$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AB}|=0\Leftrightarrow|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}|=0$

【答案】:（D）

【解析】: $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AB}|=0\Rightarrow|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})|=0\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}|=0$；

$|\boldsymbol{A}|=0$ 或 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0\Rightarrow|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})|=0$。

二、解答题：请将正确答案及其解题过程写在题后的空白部分。

2、（本小题满分 25 分）已知 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}3&0&1&0\\2&2&2&2\\0&1&0&0\\0&3&-2&2\end{vmatrix}$，试求：

（1）$|\boldsymbol{A}|$；（2）$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$；（3）求 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$。

【答案】:（1）-20；（2）0；（3）-8。

【解析】:（1）$|\boldsymbol{A}|=-\begin{vmatrix}3&1&0\\2&2&2\\0&-2&2\end{vmatrix}=-20$；

（2）$\boldsymbol{D}_4=\begin{vmatrix}3&0&1&0\\2&2&2&2\\0&1&0&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0$；

（3）$\boldsymbol{M}_{41}+\boldsymbol{M}_{42}+\boldsymbol{M}_{43}+\boldsymbol{M}_{44}=-\boldsymbol{A}_{41}+\boldsymbol{A}_{42}-\boldsymbol{A}_{43}+\boldsymbol{A}_{44}$

$$\boldsymbol{D}_4^*=\begin{vmatrix}3&0&1&0\\2&2&2&2\\0&1&0&0\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&1&0\\2&2&2\\-1&-1&1\end{vmatrix}=-8$$

3、（本小题满分 20 分）设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&4&0&0\\1&2&0&0\\0&0&2&4\\0&0&0&2\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$ 。

【答案】：$\begin{bmatrix}2\cdot4^{n-1}&4^n&0&0\\4^{n-1}&2\cdot4^{n-1}&0&0\\0&0&2^n&4n\cdot2^{n-1}\\0&0&0&2^n\end{bmatrix}$。

【解析】：令 $A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&4\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&4\\0&2\end{bmatrix}$

因为$\begin{bmatrix}2&4\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&4\\0&0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}^n=4^{n-1}\begin{bmatrix}2&4\\1&2\end{bmatrix}$，又 $\boldsymbol{C}^n=\begin{bmatrix}2^n&4n\cdot2^{n-1}\\0&2^n\end{bmatrix}$。

4、（本小题满分 20 分））设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$，且 $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$，

求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 。

【答案】：0 。

【解析】：因为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}$，所以有 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$，因为 $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$，

所以 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$ 。

5、（本小题满分 20 分）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶正交矩阵，且行列式均小于零，记分块矩阵

$P=\begin{bmatrix} O & A^T \\ B^T & O \end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix} O & |A|B \\ |B|A & O \end{bmatrix}$，其中 E 为 n 阶单位矩阵，计算并化简 PQ 。

【答案】：$-E$ 。

【解析】：$PQ=\begin{bmatrix} O & A^T \\ B^T & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & |A|B \\ |B|A & O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -E & O \\ O & -E \end{bmatrix}=-E$ 。