2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

（1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, x>0\\ b, x\le 0\end{cases}$ 在 x=0 连续，则

(A) $ab=\dfrac{1}{2}$　　(B) $ab=-\dfrac{1}{2}$　　(C) $ab=0$　　(D) $ab=2$

（2）设二阶可到函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1, f(0)=-1$ 且 $f''(x)>0$，则

(A) $\int_{-1}^{1}f(x)dx>0$

(B) $\int_{-2}^{1}f(x)dx<0$

(C) $\int_{-1}^{0}f(x)dx>\int_{0}^{1}f(x)dx$

(D) $\int_{-1}^{1}f(x)dx<\int_{0}^{1}f(x)dx$

（3）设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则

(A)当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(B)当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$ 时，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(C)当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}=0$

(D)当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

（4）微分方程 $y''-4y'+8y=e^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为 $y^k=$

(A) $Ae^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

(B) $Axe^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

(C) $Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

(D) $Axe^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

（5）设 $f(x,y)$ 具有一阶偏导数，且在任意的 (x,y)，都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0, \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0,$ 则

(A) $f(0,0)>f(1,1)$

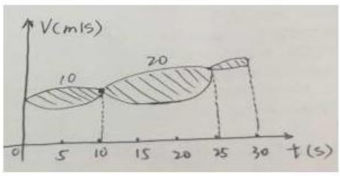
(B) $f(0,0)<f(1,1)$

(C) $f(0,1)>f(1,0)$

(D) $f(0,1)<f(1,0)$

（6）甲、乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10（单位:m）处,图中，实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$（单位:m/s）虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为 10,20,3，计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0（单位:s）,则

(A) $t_0=10$　　(B) $15<t_0<20$　　(C) $t_0=25$　　(D) $t_0>25$



（7）设 A 为三阶矩阵，$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为可逆矩阵，使得 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，则 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$

(A) $\alpha_1+\alpha_2$ (B) $\alpha_2+2\alpha_3$ (C) $\alpha_2+\alpha_3$ (D) $\alpha_1+2\alpha_2$

（8）已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，则

(A) A 与 C 相似，B 与 C 相似

(B) A 与 C 相似，B 与 C 不相似

(C) A 与 C 不相似，B 与 C 相似

(D) A 与 C 不相似，B 与 C 不相似

二、填空题：9~14 题，每小题 4 分，共 24 分.

（9）曲线 $y=x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为________

（10）设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x = t + e^t\\ y = \sin t\end{cases}$ 确定，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}$ ________

（11）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx$ =________

（12）设函数 $f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数，且 $df(x,y) = ye^y dx + x(1+y)e^y dy, f(0,0) = 0$，则 $f(x,y)$=________

（13）$\displaystyle\int_0^1 dy\int_y^1\frac{\tan x}{x}dx$ =________

（14）设矩阵 $A = \begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，则 a =________

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

求 $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,e^t dt}{\sqrt{x^3}}$

（16）（本题满分 10 分）

设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，$y = f(e^x, \cos x)$，求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}$

（17）（本题满分 10 分）

求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

（18）（本题满分 10 分）

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值

（19）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数， $f(1)>0,\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，证明

（1）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；

（2）方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同的实根.

（20）（本题满分 11 分）

已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 2y\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D (x+1)^2\,dxdy$

（21）（本题满分 11 分）

设 $y(x)$ 是区间 $(0,\dfrac{3}{2})$ 内的可导函数，且 $y(1)=0$，点 P 是曲线 $L:y=y(x)$ 上的任意一点， L 在点 P 处的切线与 y 轴相交于点 $(0,Y_P)$，法线与 x 轴相交于点 $(X_P,0)$，若 $X_p=Y_P$，求 L 上点的坐标 (x,y) 满足的方程。

（22）（本题满分 11 分）

三阶行列式 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$

（1）证明 $r(A)=2$

（2）如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 求方程组 $Ax=b$ 的通解

（23）（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准型为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$ 求 a 的值及一个正交矩阵 Q.