

2020 考研-数学-基础阶段 第一次测试卷（协议）

本试卷满分 100 分，考试时间 30 分钟

姓名 陈沁瑶 得分 75

一、选择题：1~3 小题，每小题 10 分，共 30 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的

1、设 $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 1, \\ 2x+1, & x > 1, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 1, \\ 2x-1, & x > 1, \end{cases}$ 则 $\lim_{x \rightarrow 1} f[g(x)] = (\quad)$

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 不存在

【答案】(D)

【解析】 $f[g(x)] = \begin{cases} -g(x), & g(x) \leq 1, \\ 2g(x)+1, & g(x) > 1, \end{cases} = \begin{cases} -x^3, & x \leq 1, \\ 4x-1, & x > 1, \end{cases}$ 因为

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f[g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^3) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f[g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4x-1) = 3$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1} f[g(x)]$ 左右

极限不存在，故选 (D)。

序号	错误原因	学习建议	备注
21010 1	不清楚复合函数的运算	讲义第 1 页复合函数；讲义第 2 页例 2 以及习题册第 1 页第 4 题；注意体会两个函数进行复合时的运算法则。	
21010 2	不清楚函数在一点处左右极限与极限的关系	讲义第 13 页函数极限；讲义 14 页例 3 以及习题册第 5 页第 1 题；注意体会函数在一点处左右极限与极限的关系。	
21010 3	计算型错误		
21010	其他；		

4			
---	--	--	--

2、当 $x \rightarrow 0^+$ 时，下列无穷小量中与 \sqrt{x} 等价的是（ ）

- (A) $1 - e^{\sqrt{x}}$ (B) $\ln(1 + \sqrt{x})$ (C) $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$ (D) $1 - \cos \sqrt{x}$

【答案】(B)

【解析】当 $x \rightarrow 0^+$ 时， $1 - e^{\sqrt{x}} \sim -\sqrt{x}$ ， $\ln(1 + \sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$ ， $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x}$ ，

$1 - \cos \sqrt{x} \sim \frac{1}{2}x$ ，故选 (B)。

序号	错误原因	学习建议	备注
21020 1	不清楚等价无穷小量的概念	讲义第 16 页无穷小量与无穷大量；习题册第 5 页第 3 题与第 4 题；注意体会两个无穷小量之间的比较。	
21020 2	不清楚常见的等价无穷小替换公式	讲义第 20 页等价无穷小替换；讲义 20 页例 10 以及习题册第 5 页第 3 题、第 4 题、第 5 题；注意体会常用的八组等价无穷小替换公式。	
21020 3	计算型错误		
21020 4	其他；		

3、下列结论中正确的是（ ）

(A) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq 0$ ，则存在 $\delta > 0$ ，使 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时， $f(x) \leq 0$

(B) 如果存在 $\delta > 0$ ，使 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $f(x) < 0$ ，且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在，则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$$

(C) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$

(D) 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |A|$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

【答案】(C)

【解析】取 $f(x) = -|x|$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\lim_{x \rightarrow 0} |x| \leq 0$, 但在 $x=0$ 的某一去心邻域内 $f(x) < 0$, 选项 (A) 错误; 函数 $f(x) = -|x|$ 在 $x=0$ 的某一去心邻域内 $f(x) < 0$ 且

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 与 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) < 0$ 不符, 选项 (B) 错误; 取 $f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$,

则 $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 1$, 但 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, 因此 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在, 选项 (D)

错误。此题应选 (C)。

序号	错误原因	学习建议	备注
21030 1	不清楚极限保号性的内容	讲义第 18 页极限的性质; 注意体会去极限号与加极限号的内容。	
21030 2	不清楚函数加绝对值后的极限与原极限是否有关	讲义第 18 页极限的性质; 注意体会一个函数加绝对值后的极限与函数的极限没有必然联系。	
21030 3	计算型错误		
21030 4	其他;		

二、解答题: 请将正确答案及其解题过程写在题后的空白部分。

4、(本题满分 15 分) 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{\arctan x}$ 。

【答案】2

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2$ 。

序号	错误原因	学习建议	备注
21040 1	不清楚常见的等价无穷小替换公式	讲义第 20 页等价无穷小替换；讲义 20 页例 10 以及习题册第 5 页第 3 题、第 4 题、第 5 题；注意体会常用的八组等价无穷小替换公式在求极限中的应用。	
21040 2	不清楚四则运算法则的内容以及在求极限中的简单应用	讲义第 18 页四则运算；讲义 19 页例 8；注意体会运用四则运算的加法将原极限拆成两部分时，要保证两部分极限均存在。	
21040 3	计算型错误		
21040 4	其他；		

5、(本题满分 20 分) 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})}$ 。

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - (1 - \cos x)}}{x(1 - \cos \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos x)}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{2}$ 。

序号	错误原因	学习建议	备注
21050 1	不清楚常见的等价无穷小替换公式	讲义第 20 页等价无穷小替换；讲义 20 页例 10 以及习题册第 5 页第 3 题、第 4 题、第 5 题；注意体会常用八组等价无穷小替换公式的具体形式。	
21050 2	不清楚如何凑出常用的等价无穷小替换公式形式	讲义第 20 页等价无穷小替换；讲义 21 页例 11 以及习题册 6 页第 6(2)、(5)、(6)、(7) 题；注意体会等价无穷小替换公式中利用“加 1、减 1”	

		进行凑“1”或凑“0”。	
21050 3	计算型错误		
21050 4	其他;		

6、计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \cos x} - e^x}{1 - \sqrt{1 + x^2} \arctan x}$ 。

【答案】1

【解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \cos x} - e^x}{1 - \sqrt{1 + x^2} \arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x (e^{x \cos x - x} - 1)}{1 - \sqrt{1 + x^2} \arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\cos x - 1)}{-\frac{1}{2}x^2 \arctan x} = 1。$$

序号	错误原因	学习建议	备注
21060 1	不清楚常见的等价无穷小替换公式	讲义第 20 页等价无穷小替换; 讲义 13 页例 3 以及习题册第 5 页第 3 题、第 4 题、第 5 题; 注意体会常用八组等价无穷小替换公式的具体形式。	
21060 2	不清楚如何凑出常用的等价无穷小替换公式形式	讲义第 20 页等价无穷小替换; 讲义 21 页例 11 以及习题册 6 页第 6(2)、(5)、(6)、(7) 题; 注意体会等价无穷小替换公式中利用提公因式的方法进行凑“1”或凑“0”。	
21060 3	计算型错误		
21060 4	其他;		

7、(本题满分 15 分) 计算 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - x}{\sqrt[3]{x^3 + 100} + x}$ 。

【答案】-1

【解析】 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - x}{\sqrt[3]{x^3 + 100} + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - x}{x + x} = -1。$

序号	错误原因	学习建议	备注
21070 1	不清楚极限计算中的“抓大头”方法	讲义第 18 页四则运算；讲义 19 页例 6、例 7 以及习题册第 5 页第 2 题；注意体会“抓大头”适合何种题型。	
21070 2	不清楚去根号时何时加负号	讲义第 18 页四则运算；讲义 19 页例 6、例 7 以及习题册第 5 页第 2 题；注意体会当极限过程趋近于负无穷时，去根号要加负号。	
21070 3	计算型错误		
21070 4	其他：		