2019 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

（1）当 $x \to 0$ 时，若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k =$（ ）

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

（2）曲线 $y = x\sin x + 2\cos x(-\frac{\pi}{2} < x < 2\pi)$ 的拐点是（ ）

(A) $(0,2)$　　(B) $(\pi,-2)$　　(C) $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$　　(D) $(\frac{3\pi}{2},-\frac{3\pi}{2})$

（3）下列反常积分发散的是（ ）

(A) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$　　(B) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

(C) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$　　(D) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$

（4）已知微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + e^x$, 则 a,b,c 依次为（ ）

(A) 1,0,1　　(B) 1,0,2　　(C) 2,1,3　　(D) 2,1,4

（5）已知平面区域 $D = \left\{(x,y)\middle| |x| + |y| \le \frac{\pi}{2}\right\}$, 记 $I_1 = \iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy, I_2 = \iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,$

$I_3 = \iint\limits_D (1-\cos\sqrt{x^2+y^2})dxdy$ 则（ ）

(A) $I_3 < I_2 < I_1$　　(B) $I_2 < I_1 < I_3$

(C) $I_1 < I_2 < I_3$　　(D) $I_2 < I_3 < I_1$

（6）设函数 $f(x), g(x)$ 的2阶导函数在 $x = a$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2} = 0$ 是两条曲线

$y = f(x), y = g(x)$ 在 $x = a$ 对应的点处相切及曲率相等的（ ）

(A) 充分不必要条件　　(B)充分必要条件

(C) 必要不充分条件　　(D)既不充分也不必要条件

（7）设 A 是4阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，若线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系只有2个向量，则

$r(A^*) =$（ ）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

（8）设 A 是3阶实对称矩阵，E 是3阶单位矩阵，若 $A^2 + A = 2E$, 且 $|A| = 4$，则二次型 x^TAx 的规范为

（ ）

(A) $y_1^2+y_2^2+y_3^2$ (B) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $y_1^2-y_2^2-y_3^2$ (D) $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

二、填空题：9~14 题，每小题 4 分，共 24 分.

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\left(x+2^x\right)^{\frac{x}{2}}=$________

（10）曲线$\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$在$t=\dfrac{3\pi}{2}$对应点处的切线在$y$轴上的截距为 ________

（11）设函数$f(u)$可导，$z=yf(\dfrac{y^2}{x})$,则$2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$______________

（12）曲线$y=\ln\cos x(0\le x\le\dfrac{\pi}{6})$的弧长为 _______

（13）已知函数$f(x)=x\int_1^x\dfrac{\sin t^2}{t}dt$,则$\int_0^1 f(x)dx=$________________

（14）已知矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$，$A_{ij}$表示$|A|$中$(i,j)$元的代数余子式，则$A_{11}-A_{12}=$_______.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

已知函数$f(x)=\begin{cases} x^{2x}, & x>0 \\ xe^x+1, & x\le 0 \end{cases}$,求$f'(x)$,并求$f(x)$的极值.

（16）（本题满分 10 分）

求不定积分$\int\dfrac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx.$

（17）（本题满分 10 分）

设函数$y(x)$是微分方程$y' - xy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\frac{x^2}{2}}$满足条件$y(1) = \sqrt{e}$的特解.

(1) 求$y(x)$;

(2) 设平面区域$D = \{(x, y) | 1 \le x \le 2, 0 \le y \le y(x)\}$,求$D$绕$x$轴旋转所得旋转体的体积.

（18）（本题满分 10 分）

已知平面区域$D = \{(x, y) \| x| \le y, (x^2 + y^2)^3 \le y^4\}$,计算二重积分$\iint\limits_D \dfrac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy$.

（19）（本题满分 10 分）

设n是正整数，记S_n为曲线$y = e^{-x} \sin x (0 \le x \le n\pi)$与$x$轴所围图形的面积.求$S_n$,并求$\lim\limits_{n \to \infty} S_n$.

（20）（本题满分 11 分）

已知函数$u(x, y)$满足$2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$,求$a, b$的值，使得在变换

$u(x, y) = v(x, y) e^{ax + by}$之下，上述等式可化为函数$v(x, y)$的不含一阶偏导数的等式.

（21）（本题满分 11 分）

已知函数$f(x)$在$[0,1]$上具有2阶导数，且$f(0)=0, f(1)=1, \int_0^1 f(x)dx=1,$证明：

（1）存在$\xi \in (0,1),$使得$f'(\xi)=0$

（2）存在$\eta \in (0,1),$使得$f'(\eta)<-2$

（22）（本题满分 11 分）

已知向量组

I：$\alpha_1=(1,1,4)^T, \alpha_2=(1,0,4)^T, \alpha_3=(1,2,a^2+3)^T$

II：$\beta_1=(1,1,a+3)^T, \beta_2=(0,2,1-a)^T, \beta_3=(1,3,a^2+3)^T$

若向量组 I 与向量组 II 等价，求a的取值，并将β_3用α_1，α_2，α_3线性表示

（23）（本题满分 11 分）

已知矩阵$A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$相似.

⑴ 求x、y；

⑵ 求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$.