2020 全国硕士研究生招生考试
数学冲刺模拟测试四解析（数学二）

本试卷满分 150，考试时间 180 分钟

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^n+e^{nx}}$ 的不可导点的个数为（　　）

(A) 0 个　　(B) 1 个　　(C) 2 个　　(D) 3 个

【答案】(C)

【解析】由夹逼定理的推论可得：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^n+e^{nx}}=\max\left\{1,|x|,e^x\right\}$

接下来需要进行分情况讨论：

当 $x<-1$ 时，$f(x)=|x|=-x$；

当 $x=-1$ 时，$f(x)=1$；

当 $-1<x<0$ 时，$f(x)=1$；

当 $x=0$ 时，$f(x)=1$；

当 $x>0$ 时，$f(x)=e^x$；

故 $f(x)$ 有两个不可导点，分别为 $x=-1$ 和 $x=0$，因此选 (C)。

（2）设 $y=y(x)$ 满足方程 $y''+4y'+4y=0$ 及初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=-4$，则广义积分 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$（　　）

(A) 发散　　(B) 等于 1　　(C) 等于 -1　　(D) 等于 3

【答案】(C)

【解析】方程 $y''+4y'+4y=0$ 的通解为 $y=(C_1x+C_2)e^{-2x}$，由 $y(0)=0$，$y'(0)=-4$

知 $y=-4xe^{-2x}$，而 $\int_0^{+\infty}y(x)dx=-4\int_0^{+\infty}xe^{-2x}dx=-1$

（利用公式 $\int_0^{+\infty}x^ke^{-\lambda x}dx=\dfrac{1}{\lambda^{k+1}}k!$）。

（3）设可微函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}>1,\dfrac{\partial f}{\partial y}<-1,f(0,0)=0$，则下列结论中正确的是（　　）

（A）$f(1,1)>1$　　（B）$f(-1,1)>-2$

（C）$f(-1,-1)<0$　　（D）$f(1,-1)>2$

【答案】（D）。

【解析】

$$\begin{aligned}f(1,-1)&=f(1,-1)-f(0,0)\\&=[f(1,-1)-f(0,-1)]+[f(0,-1)-f(0,0)]\\&=f_x(\xi,-1)\cdot 1+f_y(0,\eta)(-1)\\&>1+(-1)(-1)=2\end{aligned}$$

其中 $\xi\in(0,1),\eta\in(-1,0)$。

（4）设平面区域

$D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y-1)^2\le 2\right\},I_1=\iint\limits_D(x+y)dxdy,\ I_2=\iint\limits_D\ln(1+x+y)dxdy,$ 则正确的是（　　）

(A) $8\pi>I_1>I_2$　　(B) $I_1>8\pi>I_2$

(C) $I_1>I_2>8\pi$　　(D) $I_2>8\pi>I_1$

【答案】(A)

【解析】由于区域 D 的面积为 $\left(\sqrt{2}\right)^2\pi=2\pi$，从而可将 8π 化为 $8\pi=\iint\limits_D 4d\sigma$，由于当

$(x,y)\in D$ 时，$4\ge x+y\ge\ln(1+x+y)\ge 0$，仅在 $(0,0)$ 或 $(2,2)$ 处等号成立，所以

$\iint\limits_D 4d\sigma>\iint\limits_D(x+y)d\sigma>\iint\limits_D\ln(1+x+y)d\sigma$，故选 (A)。

（5）$y=\dfrac{x^2+4x-12}{x-2}e^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线条数为（　）

(A) 0 条　　(B) 1条　　(C) 2 条　　(D) 3 条

【答案】(C)

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\infty$，所以曲线没有水平渐近线；

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}y=+\infty$，所以 $x=0$ 为垂直渐近线；

因为 $\lim\limits_{x\to 2}y=\lim\limits_{x\to 2}(x+6)e^{\frac{1}{x}}=8e^{\frac{1}{2}}$，所以 $x=2$ 不是垂直渐近线；

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=1$ ，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4x-12}{x-2}e^{\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left[(x+6)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}+6e^{\frac{1}{x}}\right)=7$$

所以 $y=x+7$ 为曲线的斜渐近线，故曲线有两条渐近线，故选 (C)。

（6）$z=xy+xF\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中 F 为可微函数，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$（　）

(A) $z-xy$　　(B) $z+xy$　　(C) $z-2xy$　　(D) $z+2xy$

【答案】(B)。

【解析】由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+F-\dfrac{y}{x}F'$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x+F'$ 得，

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy-yF'+xF+xy+yF'=2xy+xF=2xy+z-xy=z+xy$$

故选 (B)。

（7）已知 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系，则向量组

$a\boldsymbol{\alpha}_1+b\boldsymbol{\alpha}_4$，$a\boldsymbol{\alpha}_2+b\boldsymbol{\alpha}_3$，$a\boldsymbol{\alpha}_3+b\boldsymbol{\alpha}_2$，$a\boldsymbol{\alpha}_4+b\boldsymbol{\alpha}_1$也是$\boldsymbol{Ax}=0$的基础解系的充分必要条件是（　　）

$(A)\ a=b$　　　　$(B)\ a\neq -b$　　　　$(C)\ a\neq b$　　　　$(D)\ a\neq \pm b$

【答案】(D)

【解析】向量组$a\boldsymbol{\alpha}_1+b\boldsymbol{\alpha}_4$，$a\boldsymbol{\alpha}_2+b\boldsymbol{\alpha}_3$，$a\boldsymbol{\alpha}_3+b\boldsymbol{\alpha}_2$，$a\boldsymbol{\alpha}_4+b\boldsymbol{\alpha}_1$均是$\boldsymbol{AX}=0$的解，且共 4 个，故该向量组是$\boldsymbol{Ax}=0$的基础解系$\Leftrightarrow$该向量组线性无关。因

$$\left(a\boldsymbol{\alpha}_1+b\boldsymbol{\alpha}_4,a\boldsymbol{\alpha}_2+b\boldsymbol{\alpha}_3,a\boldsymbol{\alpha}_3+b\boldsymbol{\alpha}_2,a\boldsymbol{\alpha}_4+b\boldsymbol{\alpha}_1\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，则

$a\boldsymbol{\alpha}_1+b\boldsymbol{\alpha}_4$，$a\boldsymbol{\alpha}_2+b\boldsymbol{\alpha}_3$，$a\boldsymbol{\alpha}_3+b\boldsymbol{\alpha}_2$，$a\boldsymbol{\alpha}_4+b\boldsymbol{\alpha}_1$线性无关$\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=\left(a^2-b^2\right)^2\neq 0\Leftrightarrow a\neq \pm b$$
。故应选(D)。

$(\mathrm{B}),(\mathrm{C})$是充分条件，并非必要，$(\mathrm{A})$既非充分又非必要，均应排除。

（**8**）设$\boldsymbol{A}$是4×3矩阵，$\boldsymbol{B}$是3×4非零矩阵，满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，其中$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 9 & t & 3 \\ 7t-18 & 7-2t & 1 \\ 9+t & 1+t & 4 \end{pmatrix}$，则必有（　　）

(A)当$t=3$时，$r(B)=1$　　　　(B)当$t\neq 3$时，$r(B)=1$

(C)当$t=3$时，$r(B)=2$　　　　(D)当$t\neq 3$时，$r(B)=2$

【答案】(B)

【解析】由题设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，知 $r\left(A\right)+r\left(B\right)\le 3$（3 是 A 的列数或 B 的行数）。

又 B 是非零矩阵，有 $r\left(B\right)\ge 1$，从而有 $1\le r\left(B\right)\le 3-r\left(A\right)$。又

$$A=\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 9 & t & 3 \\ 7t-18 & 7-2t & 1 \\ 9+t & 1+t & 4 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-4r_1]{\substack{r_2-3r_1\\ r_3-r_1}}\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 9-3t & t-3 & 0 \\ 6t-18 & 6-2t & 0 \\ 9-3t & t-3 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+2r_2}\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 9-3t & t-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

当 $t=3$ 时，$r\left(A\right)=1$，有 $1\le r\left(B\right)\le 2$，$r\left(B\right)=1$ 或 $r\left(B\right)=2$，故 $\left(\mathrm{A}\right),\left(\mathrm{C}\right)$ 不成立。

当 $t\ne 3$ 时，$r\left(A\right)=2$，有 $1\le r\left(B\right)\le 1$，即 $r\left(B\right)=1$。故应选 $\left(\mathrm{B}\right)$。

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（**9**）设 $y=y(x)$ 是由 $y^3+(x+1)y+x^2=0$ 及 $y(0)=0$ 所确定，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x y(t)dt}{x(1-\cos x)}=$________。

【答案】$-\dfrac{2}{3}$

【解析】此为"$\dfrac{0}{0}$"型，求导中要用到 $y'(0)$，$y''(0)$ 等等，先求出备用。由

$y^3+\left(x+1\right)y+x^2=0$，有 $3y^2y'+\left(x+1\right)y'+y+2x=0$，将 $y(0)=0$ 代入，得

$0+y'(0)=0$，有 $y'(0)=0$。再求导，

$$6y\left(y'\right)^2+3y^2y''+y'+\left(x+1\right)y''+y'+2=0.$$

将 $y(0)=0$，$y'(0)=0$ 代入，有 $0+0+0+y''+0+2=0, y''(0)=-2$。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x y\left(t\right)dt}{x\left(1-\cos x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x y\left(t\right)dt}{\frac{1}{2}x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{y\left(x\right)}{\frac{3}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{y'(x)}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{y'(x)-y'(0)}{3x}=-\frac{2}{3}.$$

（10）设函数 $y=y(x)$ 在（0,+∞）上满足 $\Delta y=\left(\frac{y}{x}+x\sin x\right)\Delta x+o(\Delta x)$，且 $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$，

则 $y(x)$= ________。

【答案】$x(1-\cos x)$

【解析】由可微的定义，函数 $y=y(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可微，且 $y'=\frac{y}{x}+x\sin x$ 或 $y'-\frac{y}{x}=x\sin x$，由一阶非齐次线性微分方程的通解公式得 $y=\left[\int x\sin xe^{\int-\frac{1}{x}dx}dx+C\right]e^{-\int-\frac{1}{x}dx}=(-\cos x+C)x$，由 $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ 得 $C=1$，所以

$y=x(1-\cos x)$。

（11）由方程 $\int_0^y e^{u^2}du=(x^{\frac{4}{3}}-1)^3$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的极小值点为________。

【答案】$x=0$

【解析】在方程两边同时对 x 求导，得 $e^{y^2}y'=4\left(x^{\frac{4}{3}}-1\right)^2x^{\frac{1}{3}}$，故 $y'=\frac{4\left(x^{\frac{4}{3}}-1\right)^2x^{\frac{1}{3}}}{e^{y^2}}$

令 $y'=0$，得驻点 $x_1=-1$，$x_2=0$，$x_3=1$，$x\in(-\infty,-1)$ 时，$y'<0$；$x\in(-1,0)$ 时，$y'<0$；$x\in(0,1)$ 时，$y'>0$；$x\in(1,+\infty)$ 时，$y'>0$ 由极值点的第一充分条件，得 $x=0$ 为极小值点。

（12）设二元可微函数 $z=f(x,f(y,x))$，且 $f(2,1)=f_2'(2,1)=1$，$f_1'(1,1)=f_2'(1,1)=2$，

则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1.2)}=$ ________。

【答案】4

【解析】

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1.2)}=[f_1'(x,f(y,x))+f_2'(x,f(y,x))\bullet f_2'(y,x)]\big|_{(1,2)}=f_1'(1,f(2,1))+f_2'(1,f(2,1))\bullet f_2'(2,1),$$

将 $f(2,1)=f_2'(2,1)=1$， $f_1'(1,1)=f_2'(1,1)=2$ 代入，则

上式 $=f_1'(1,1)+f_2'(1,1)\bullet f_2'(2,1)=4$ 。

（13）抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 在 $M(1,2)$ 处曲率圆方程 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，则

$a^2+b^2+c^2=$__________。

【答案】22

【解析】 $y=ax^2+bx+c$， $y'=2ax+b$， $y''=2a$

$x=1$ 处切线斜率为 $y'\big|_{x=1}=2a+b$ 与 k_{MO} 互为负倒数，其中 O 为曲率圆圆心 $O\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$，

$k_{MO}=\dfrac{\frac{5}{2}-2}{\frac{1}{2}-1}=-1$ 为 MO 的斜率，故 $2a+b=1$

曲率圆半径 $R=\dfrac{\left[1+\left(y'\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\dfrac{2^{\frac{3}{2}}}{|2a|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $a=\pm2$，曲率圆圆心应位于曲线凹向的一侧，故 $a=2$，代入 $2a+b=1$，解得 $b=-3$， $y=ax^2+bx+c$ 过点 $M(1,2)$，从而 $2=a+b+c$，解得 $c=3$，因此 $a^2+b^2+c^2=22$ 。

（14）已知三阶方阵 $\boldsymbol{A},B$ 满足 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$， $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值分别为 $3,-3,0$，则 $\left|\boldsymbol{B}^{-1}+2\boldsymbol{E}\right|=$__________。

【答案】-8

【解析】因为 A 的特征值为 $3,-3,0$，所以 $A-E$ 的特征值为 $2,-4,-1$，从而 $A-E$ 可逆，由 $E+B=AB$ 得 $\left(A-E\right)B=E$，则 $B^{-1}=A-E$， B^{-1} 的特征值为 $2,-4,-1$，从而 $B^{-1}+2E$ 的特征值为 $4,-2,1$，于是 $\left|\boldsymbol{B}^{-1}+2\boldsymbol{E}\right|=4\times(-2)\times1=-8$ 。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说

明、证明过程或演算步骤.

（**15**）（本题满分 10 分）设 $D=\{x^2+y^2\le x+y\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D \max\{x,y\}dxdy$。

【答案】$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}$

【解析】作直线 $y=x$，将积分区域分成两部分。其中

$D_1=\left\{(x,y)\middle|y\ge x,(x,y)\in D\right\},D_2=\left\{(x,y)\middle|y\le x,(x,y)\in D\right\}$，仅在 $y=x$ 处为 D_1,D_2 的公共区域，不影响二重积分的值。

$$\iint\limits_D \max\{x,y\}dxdy=\iint\limits_{D_1} ydxdy+\iint\limits_{D_2} xdxdy$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{\cos\theta+\sin\theta}r^2\sin\theta dr+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\cos\theta+\sin\theta}r^2\cos\theta dr$$

$$=\frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)^3\sin\theta d\theta+\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)^3\cos\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}[(-\sin\theta+\cos\theta)^3\cos\theta+(\cos\theta+\sin\theta)^3\cos\theta]d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(3\sin^2\theta\cos\theta+\cos^3\theta)\cos\theta d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+2\sin^2\theta)\cos^2\theta d\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}\text{。}$$

（**16**）（本题满分 10 分）设 $0<x<1$，证明：$(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<4$。

【解析】等价于证明 $0<x<1$，$F(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\ln(1+x)-2\ln 2<0$，经计算

$F(1)=0$，而 $F'(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\frac{1}{x(1+x)}$，$F'(1)=0$；

$$F''(x)=\frac{2}{x^3}\left[\ln(1+x)-\frac{x(2x+1)}{(x+1)^2}\right]$$

记$\varphi(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x(2x+1)}{(x+1)^2}$，有$\varphi(0)=0,\varphi'(x)=\dfrac{x(x-1)}{(x+1)^3}<0$

从而可知，当$0<x<1$时，$\varphi(x)<0,$即有$F''(x)<0$

因$F'(1)=0$，所以当$0<x<1$，$F'(x)>0$。又因$F(1)=0$，所以当$0<x<1$时，$F(x)<0$，证毕。

（17）（本题满分 10 分）（I）证明罗尔定理，若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)=f(b)$，则$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$；

（II）证明：若在区间I上$f^{(n)}(x)\neq 0$，则函数$f(x)$在区间I上最多有n个零点。

【证明】（I）由于$f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上存在最大值M和最小值m

若$M=m$，则$f(x)=M$，结论显然成立；

若$M\neq m$，由 $f(a)=f(b)$，则$f(x)$在$[a,b]$上的最大值M和最小值m至少一个在(a,b)内取得，不妨设最大值M=$f(\xi)$，$\xi\in(a,b)$，而$f(x)$在$x=\xi$处可导，故

$$f'_+(\xi)=\lim_{x\to\xi^+}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\le 0\quad,\quad f'_-(\xi)=\lim_{x\to\xi^-}\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\ge 0$$

故$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$；

（II）反证法

若函数$f(x)$在区间I上的零点个数不止n个，至少$n+1$个，不妨设$x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}$，在区间$[x_i,x_{i+1}]$（$i=1,2,\cdots,n$）上分别用罗尔定理，得$f'(x)$在区间$I$上最少有$n$个零点，在$f'(x)$相邻两个零点之间对$f'(x)$用罗尔定理，得$f''(x)$在区间$I$上最少有$n-1$个零点

以此类推可得，$f^{(n)}(x)$在区间I上最少有1个零点，与题设矛盾，故原式得证。

（18）（本题满分 10 分）（I）设圆盘的半径为R，厚为h，点密度为该点到圆盘中心轴

的距离的平方，求该圆盘的质量m；

（II）将以曲线$y=\sqrt{x}$，$x=1$，$x=4$及x轴围成的曲边梯形绕x轴旋转一周生成的旋转体记为V，设V的点密度为该点到旋转轴的距离的平方，求该物体的质量。

【答案】（I）$\frac{1}{2}\pi hR^4$；（II）$\frac{21}{2}\pi$。

【解析】（I）以环细分圆盘，设环的宽度为$\mathrm{d}r$，内半径为r，在环上点密度视为不变，为r^2，质量微元为$\mathrm{d}m=r^2\bullet 2\pi rdr\bullet h$，于是该圆盘的质量为$m=2\pi h\int_0^R r^3dr=\frac{1}{2}\pi hR^4$；

（II）该旋转体可看成由一个个薄片组成，由（I），每一薄片的质量$d\mathrm{M}=\frac{1}{2}\pi\mathrm{R}^4dx$

其中R为x处旋转半径，即y，于是质量微元为$d\mathrm{M}=\frac{1}{2}\pi y^4dx=\frac{1}{2}\pi x^2dx$

所以物体的质量为$M=\frac{1}{2}\pi\int_1^4 x^2dx=\frac{1}{6}\pi(4^3-1)=\frac{63}{6}\pi=\frac{21}{2}\pi$。

（19）（本题满分 10 分）位于上半平面的凹曲线$y=y(x)$过点$(0,2)$，在该点处的切线水平，曲线上任一点(x,y)处的曲率与$\sqrt{y}$及$1+(y')^2$之积成反比，比例系数为$k=\frac{1}{2\sqrt{2}}$，求$y=y(x)$。

【答案】$y=\frac{x^2}{8}+2$。

【解析】根据题意得：

$$\begin{cases} y(0)=2,\quad y'(0)=0, \\ \dfrac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{y}(1+(y')^2)} \end{cases}，即\begin{cases} y(0)=2,\quad y'(0)=0, \\ \dfrac{y''}{\sqrt{1+(y')^2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{y}} \end{cases},$$

令$y'=p$，则有$\begin{cases} \dfrac{pdp}{\sqrt{1+p^2}}=\dfrac{dy}{2\sqrt{2y}}, \\ p(0)=0, \end{cases}$解得$\sqrt{1+p^2}=\sqrt{\frac{y}{2}}+C_1$，因为$p(0)=0$，所以

$C_1=0$，故 $y'=p=\pm\sqrt{\dfrac{y-2}{2}}$，进一步解得 $2\sqrt{y-2}=\pm\dfrac{x}{\sqrt{2}}+C_2$，因为 $y(0)=2$，所以 $C_2=0$，故曲线方程为 $y=\dfrac{x^2}{8}+2$。

（**20**）（本题满分 11 分）设 $z=z(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $z=z(x-2y,x+3y)$ 满足 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=3\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}$，求 $z=z(u,v)$ 所满足的方程。

【答案】$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\dfrac{1}{5}\dfrac{\partial z}{\partial u}$。

【解析】由 $z=z(x-2y,x+3y)$ 易知，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2\dfrac{\partial z}{\partial u}+3\dfrac{\partial z}{\partial v}$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-12\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+9\frac{\partial^2 z}{\partial v^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

代入原方程可得：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\dfrac{1}{5}\dfrac{\partial z}{\partial u}$。

（**21**）（本题满分 11 分）设 $f(x),g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x),g'(x)=2e^x-f(x)$，又 $f(0)=0,g(0)=2$，求 $\int_0^{\pi}\left[\dfrac{g(x)}{x+1}-\dfrac{f(x)}{(x+1)^2}\right]dx$。

【答案】$\dfrac{1+e^{\pi}}{\pi+1}$。

【解析】由 $f''(x)=g'(x)=2e^x-f(x)$，得 $f''(x)+f(x)=2e^x$，解得

$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+e^x$，由 $f(0)=0, f'(0)=g(0)=2$，解得 $C_1=-1, C_2=1$。

故 $f(x)=-\cos x+\sin x+e^x$，

$$\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{x+1}-\frac{f(x)}{(x+1)^2}\right]dx=\int_0^{\pi}\frac{g(x)}{x+1}dx-\int_0^{\pi}\frac{f(x)}{(x+1)^2}dx=\frac{f(x)}{x+1}\bigg|_0^{\pi}=\frac{1+e^{\pi}}{\pi+1}\text{。}$$

（22）（本题满分 11 分）已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为三阶矩阵，满足 $\boldsymbol{AB}+2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，且 $r(\boldsymbol{B})=2$，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&a&0\\0&2&1\end{pmatrix}$，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=0$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$。

（1） 求 a 的值；

（2） 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵；

（3） 求 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{2018}$。

【答案】（1）$a=-2$；（2）$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$；（3）$\boldsymbol{E}$

【解析】（1）由 $r(\boldsymbol{B})=2$，知 $|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&0&-1\\-1&a&0\\0&2&1\end{vmatrix}=a+2=0$，得 $a=-2$。

（2）由 $\boldsymbol{AB}+2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 知 $\boldsymbol{B}$ 的每一列 $\boldsymbol{\beta}_i$ 满足 $\boldsymbol{A\beta}_i+2\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{A\beta}_i=-2\boldsymbol{\beta}_i$ $(i=1,2,3)$，$\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\boldsymbol{\lambda}=-2$ 的线性无关的特征向量。

$\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}=0\bullet\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 **A** 属于特征值 $\boldsymbol{\lambda}=0$ 的线性无关的特征向量。

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha})=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}-2&&\\&-2&\\&&0\end{pmatrix}$

（3）由 $\boldsymbol{P}^{-1}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2&&\\&-2&\\&&0\end{pmatrix}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}$，则

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$，所以

$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right)^{2018}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}^{2018}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{PEP}^{-1}=\boldsymbol{E}$.

（**23**）（本题满分 11 分）设 A 为三阶实对称矩阵，若存在三阶正交矩阵 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&c_{13}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{a}{\sqrt{2}}&c_{23}\\0&0&c_{33}\end{pmatrix}$，使得二次型 $\boldsymbol{x^T}\boldsymbol{Ax}\overset{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}}{=\!=\!=}-y_1^2+2y_2^2+by_3^2(b>0)$，且

$\left|A^*\right|=16$，

（1）求常数 a,b；

（2）求矩阵 A。

【答案】（1）$a=-1$，$b=2$；（2）$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&0\\-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&2\end{pmatrix}$。

【解析】（1）A 的特征值为 $\boldsymbol{\lambda}_1=-1,\boldsymbol{\lambda}_2=2,\boldsymbol{\lambda}_3=b,\ \boldsymbol{\lambda}_1=-1$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1,1,0\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\lambda}_2=2$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1,a,0\right)^{\mathrm{T}}$，因为不同特征值对应的特征向量正交，所以 $a=-1$。$\left|A\right|=-2b$，由 $\left|A^*\right|=\left|A\right|^2$ 得 $b=2$。

（2）令 $\boldsymbol{\alpha}_3=\left(C_{13},C_{23},C_{33}\right)^{\mathrm{T}}$，由 $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0\end{cases}$ 得 $\boldsymbol{\alpha}_3=\left(0,0,1\right)^{\mathrm{T}}$，

令 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&c_{13}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{a}{\sqrt{2}}&c_{23}\\0&0&c_{33}\end{pmatrix}$，则 $A=Q\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}Q^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&0\\-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&2\end{pmatrix}$