2020 全国硕士研究生招生考试
数学模拟测试三解析（数学二）

本试卷满分 150，考试时间 180 分钟

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（**1**）已知 $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right)$ 存在，[ ]为取整函数，则有（　　）

（A）$a=2$，$I=2$　　（B）$a=-2$，$I=2$

（C）$a=2$，$I=-2$　　（D）$a=-2$，$I=-2$

【答案】（B）

【解析】$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0,\lim\limits_{x\to 0^-}a[x]=-a$，故左极限为 $-a$，

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln e^{\frac{2}{x}}}{\ln e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}=2,\lim\limits_{x\to 0^+}a[x]=0$，故右极限为 2，

当且仅当 $a=-2$ 时，原极限存在，故 $a=-2$，$I=2$.

（**2**）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2 x\cdot\cos^8 x-\cos^2 x\cdot\sin^8 x+\sin^7 x}{2}dx=$（　　）

（A）$\dfrac{16\pi}{35}$　　（B）$\dfrac{16}{35}$　　（C）$\dfrac{8}{35}$　　（D）$\dfrac{8\pi}{35}$

【答案】（C）

【解析】因为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot\cos^8 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\cdot\cos^8 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\cdot\sin^8 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot\sin^8 x dx$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x\cdot\cos^8 x-\cos^2 x\cdot\sin^8 x+\sin^7 x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{6\cdot 4\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 3}\cdot 1=\frac{8}{35}.$$

（3）若 $I_1=\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$， $I_2=\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$， $I_3=\frac{\pi}{2}\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}xdx$，则（　　）

（A） $I_1>I_2>I_3$　　（B） $I_1>I_3>I_2$

（C） $I_2>I_1>I_3$　　（D） $I_2>I_3>I_1$

【答案】（B）
【解析】

$$I_1=\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^1\cos xd(\arcsin x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin u)du；$$

$$I_2=\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^1\sin x\mathrm{d}(\arcsin x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin u)\mathrm{d}u.$$

对 $\forall u\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$\sin u\le u\Rightarrow\sin(\sin u)\le\sin u\Rightarrow I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin u)\mathrm{d}u<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u\mathrm{d}u=1$；

$\sin u\le u\Rightarrow\cos(\sin u)\ge\cos u\Rightarrow I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin u)du>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos udu=1$；

$I_3=\frac{\pi}{2}\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}xdx=\int_0^1\cos\frac{\pi x}{2}d\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\Big|_0^1=1$.

（4）设函数 $y_1(x)$， $y_2(x)$ 是非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个不同特解，则该方程的通解为（　　）

（A） $y=C_1y_1+C_2y_2$（C_1， C_2 为任意常数）

（B） $y=y_1+Cy_2$（C 为任意常数）

（C） $y=y_1+C(y_1+y_2)$（C 为任意常数）

（D） $y=y_1+C(y_2-y_1)$（C 为任意常数）

【答案】（D）

【解析】因为 $y'+p(x)y=q(x)$ 是一阶线性非齐次方程，则 y_2-y_1 是齐次方程 $y'+p(x)y=0$ 的一个解，根据线性方程解的结构可知， $y'+p(x)y=q(x)$ 的通解为

$$y=y_1+C(y_2-y_1)\text{，}C\text{为任意常数.}$$

（5）设函数 $f(x)=\sqrt{x-1}$，$x\geq 1$，由微分中值定理有：$f(5)-f(1)=4f'(\xi)$，则 ξ 的取值为（　　）

（A）5　　　（B）4　　　（C）5和4　　　（D）2

【答案】（D）

【解析】$f(5)-f(1)=4f'(\xi)\Rightarrow\sqrt{4}-\sqrt{0}=\dfrac{4}{2\sqrt{\xi-1}}\Rightarrow\sqrt{\xi-1}=1\Rightarrow\xi=2$.

（6）设函数 $f\left(x\right)$ 具有连续的导数，则（　　）

（A）若 $f\left(x\right)$ 是偶函数，则对任意实数 a，$\int_a^x f\left(t\right)dt$ 必为奇函数

（B）若 $f\left(x\right)$ 是周期函数，则 $\int_0^x f\left(t\right)dt$ 必为周期函数

（C）若 $f'\left(x\right)$ 是奇函数，则 $\int_0^x f\left(t\right)dt$ 必为奇函数

（D）若 $f'\left(x\right)$ 是偶函数，则 $\int_0^x f\left(t\right)dt$ 必为偶函数

【答案】（C）

【解析】该题考查函数性质，由函数 $f\left(x\right)$ 具有连续的导数，可知 $f'\left(x\right)$ 连续，若 $f'\left(x\right)$ 是奇函数，则 $f\left(x\right)$ 必为偶函数，令 $F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)dt$，易知 $F\left(0\right)=0$，则 $F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)dt$ 为奇函数，选（C）。

（7）设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 等于（　　）

（A）$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　　（B）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_2$　　（C）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$　　（D）$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1$

【答案】（C）

【解析】因为 $\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{E}(1,4)$，$\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{E}(2,3)$，$\boldsymbol{A}\xrightarrow[c_2\leftrightarrow c_3]{c_1\leftrightarrow c_4}\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{A}\xrightarrow[c_1\leftrightarrow c_4]{c_2\leftrightarrow c_3}\boldsymbol{B}$，从而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$，注意到 $\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{P}_2$，故有 $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}$ 或 $\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$.故选（C）.

（8）设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，则（　　）

（A）$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$

（B）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值和特征向量

（C）$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都相似于一个对角矩阵

（D）对任意常数 t，$t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 相似

【答案】（D）

【解析】由已知条件，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$$

所以

$$\boldsymbol{P}^{-1}(t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}=t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$$

这说明 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 相似，故（D）正确.

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）函数 $y=x+2\cos x$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值为____________。

【答案】$\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{6}$.

【解析 1】$y'=1-2\sin x$，令 $y'=0$ 得 $x=\dfrac{\pi}{6}$，经计算，$y(\dfrac{\pi}{6})=\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{6}$，$y(0)=2$，$y(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi}{2}$，经比较，最大值为 $y(\dfrac{\pi}{6})=\sqrt{3}+\dfrac{\pi}{6}$.

【解析 2】 $y'=1-2\sin x$，令 $y'=0$ 得唯一的驻点为 $x=\frac{\pi}{6}$，又 $y''=-2\cos x$，

$y''(\frac{\pi}{6})=-\sqrt{3}<0$。则最大值为 $y(\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$.

（10） $I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=$ ____________.

【答案】 $\frac{\pi}{4}$

【解析 1】令 $x=\tan t$，则 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec^2 t dt}{\sec^4 t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\frac{\pi}{4}$.

【解析 2】注意到 $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$，$\frac{1}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$，所以有

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx-\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx=\arctan x\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}x\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'dx$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\left(x\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)=\frac{\pi}{4}.$$

（11）设 $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=\cos t,\end{cases}$ 则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$ ____________.

【答案】 $\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$

【解析】 $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{-\sin t}{2t}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\frac{1}{x'(t)}=-\frac{1}{2}\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}\cdot\frac{1}{2t}=\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3}.$$

（12）微分方程 $y''-y'-2y=(2x+1)e^x$ 的通解为____________.

【答案】$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-(x+1)e^x$

【解析】特征方程为$\lambda^2-\lambda-2=0$，解得$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=2$，

则$y''-y'-2y=0$的通解为$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$.

令$y''-y'-2y=(2x+1)e^x$的特解为$y_0=(ax+b)e^x$，代入方程得$a=-1$，$b=-1$，故原方程的通解为$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-(x+1)e^x$.

（**13**）曲线$y=x^2+x(x<0)$上曲率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$的点的坐标是_________.

【答案】$(-1,0)$

【解析】由$y=x^2+x$得，$y'=2x+1$，$y''=2$，代入曲率计算公式得

$K=\dfrac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}=\dfrac{2}{[1+(2x+1)^2]^{3/2}}$，由$K=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$得$(2x+1)^2=1$，解得$x=0$或$x=-1$，又$x<0$，则$x=-1$，这时$y=0$，故所求点的坐标为$(-1,0)$.

（**14**）设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&0&0\\1&3&0&0\\0&0&2&-2\\0&0&-2&2\end{bmatrix}$，则$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-2E)+r(\boldsymbol{A}-4E)=$__________.

【答案】8

【解析 1】矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值由矩阵$\begin{bmatrix}3&1\\1&3\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}2&-2\\-2&2\end{bmatrix}$的特征值构成，为$4,2,0,4$。又为实对称矩阵，$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-2E)+r(\boldsymbol{A}-4E)=4-(0$的重数$)+4-(2$的重数$)+4-(4$的重数$)=8$。

【解析 2】矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值由矩阵$\begin{bmatrix}3&1\\1&3\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}2&-2\\-2&2\end{bmatrix}$的特征值构成，为$4,2,0,4$。又

$\boldsymbol{A}$为实对称矩阵，$r(\boldsymbol{A})$为非零特征值的个数，则$r(\boldsymbol{A})=3$；$\boldsymbol{A}-2E$为实对称矩阵，特征值为$2,0,-2,2$．$r(\boldsymbol{A}-2E)$为非零特征值的个数，则$r(\boldsymbol{A}-2E)=3$．同理$r(\boldsymbol{A}-4E)=2$，则$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-2E)+r(\boldsymbol{A}-4E)=8$。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（**15**）（本题满分 10 分）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2-(1+x)^{\frac{2}{x}}}{x}$。

【答案】e^2

【解析】极限式中含幂指函数，先利用对数恒等式将其化为以e为底的指数函数，从而化为含指数函数差的极限式：
原式

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}}-e^2}{x}=-\lim_{x\to 0}\frac{e^2\left[e^{\frac{2\ln(1+x)}{x}-2}-1\right]}{x}$$

$$=-e^2\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\frac{2\ln(1+x)}{x}-2\right]=-e^2\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)-2x}{x^2}=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x^2}=e^2.$$

（**16**）（本题满分 10 分）证明当$x>0$时，不等式$\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$成立。

【解析】令$f(x)=(1+x)\ln(1+x)$，$g(x)=\arctan x$，$F(x)=f(x)-g(x)$，

则$F'(x)=1+\ln(1+x)-\dfrac{1}{1+x^2}$，$F''(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$，

当$x>0$时，$F''(x)>0$，则$F'(x)>F'(0)=0$，故$x>0$时，$F(x)>F(0)=0$，即

$f(x)>g(x)$，$(1+x)\ln(1+x)>\arctan x$，亦即$\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$.

（**17**）（本题满分 10 分）设$z=z(x,y)$是由方程$xy+yz+zx=1$确定的隐函数，求

$2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

【答案】$-\dfrac{2}{x+y}$

【解析】令 $F(x,y,z)=xy+yz+zx-1$，

根据隐函数求导法则，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=-\dfrac{y+z}{y+x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}=-\dfrac{x+z}{y+x}$。

由导数四则运算法则可知：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{\dfrac{\partial z}{\partial x}(y+x)-(y+z)}{(y+x)^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{\dfrac{\partial z}{\partial y}(y+x)-(x+z)}{(y+x)^2}$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)(y+x)-(y+z)}{(y+x)^2}$，因此，

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$=-\frac{2\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)(y+x)-2(y+z)}{(y+x)^2}+\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}(y+x)-(y+z)}{(y+x)^2}+\frac{\dfrac{\partial z}{\partial y}(y+x)-(x+z)}{(y+x)^2}$$

$$=\frac{(y+x)\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}-2\right)+y-x}{(y+x)^2}=\frac{(y+x)\left(-\dfrac{y+z}{y+x}-(-\dfrac{x+z}{y+x})-2\right)+y-x}{(y+x)^2}=-\frac{2}{y+x}.$$

（18）（本题满分 10 分）设物体 A 从点 $(0,1)$ 出发，以速度大小为常数 v 沿着 y 轴正向运动，物体 B 从点 $(-1,0)$ 与 A 同时出发，其速度大小为 $2v$，方向始终指向 A.试建立物体 B 的运动轨迹所满足的微分方程，并写出初始条件。

【答案】$2xy''+\sqrt{1+y'^2}=0$，初始条件 $y(-1)=0$，$y'(-1)=1$

【解析】设物体 B 的运动轨迹方程是 $y=y(x)$，在时刻 t，物体 B 的位置是 $P(x,y)$，

物体 A 的位置是 $Q(0,vt+1)$.由题意知，Q 在过点 P 的切线上，该切线的方程是

$Y-y=y'(X-x)$.因此

$$vt+1-y=y'(0-x)\text{，即 } vt=y-1-xy'.$$

由于 B 的运动轨迹方程是 $y=y(x)$，在时刻 t，物体 B 已走过的路程为 $\overset{\frown}{BP}$ 这段弧长，即

$$\overset{\frown}{BP}=\int_{-1}^{x}\mathrm{d}s=\int_{-1}^{x}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x.$$

另一方面，物体 B 在时刻 t 已走过的距离是 $2vt$.于是有

$$2vt=\overset{\frown}{BP}=\int_{-1}^{x}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

与前式比较得

$$2(y-1-xy')=\int_{-1}^{x}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x. \qquad ①$$

求导即得所求方程

$$2xy''+\sqrt{1+y'^2}=0$$

由题设有 $y(-1)=0$，将其代入式①得到初始条件：$y'(-1)=1$。

（19）（本题满分 10 分）设函数 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=x+\iint\limits_D yf(u,v)dudv$，其中 D 由 $y=\frac{1}{x},x=1,y=2$ 围成，求 $f(x,y)$。

【答案】$f(x,y)=x+\frac{1}{2}y$。

【解析】设 $A=\iint\limits_D f(u,v)dudv$，故 $f(x,y)=x+yA$，两边同时求二重积分，得 $A=\iint\limits_D (x+Ay)dxdy=\int_1^2 dy\int_{\frac{1}{y}}^{1}(x+Ay)dx=\frac{A}{2}+\frac{1}{4}$，解得 $A=\frac{1}{2}$，因此，$f(x,y)$ 的表达式为 $f(x,y)=x+\frac{1}{2}y$。

(20)（本题满分 11 分）顶角为60°，底面半径为a的正圆锥形漏斗内盛满水，下接半径为$b(b<a)$的圆柱形水桶（假设水桶的体积大于漏斗的体积），水由漏斗注入水桶，问当漏斗水平面下降速度与水桶水平面上升速度相等时，漏斗中水平面高度是多少？

【答案】$h=\sqrt{3}b$

【解析】设在t时刻时，漏斗中水平面的高度为h，水量为p，水桶中水面的高度为H，水量为q，则$p=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 h=\frac{1}{9}\pi h^3, q=\pi b^2 H$，因为这两部分水量的总和应为开始漏斗盛满水时的水量，故$\frac{1}{9}\pi h^3+\pi b^2 H=\frac{1}{3}\pi a^2\sqrt{3}a=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3$，即$h^3+9b^2H=3\sqrt{3}a^3$，两边同时对$t$求导，得$3h^2\frac{dh}{dt}+9b^2\frac{dH}{dt}=0$，即$h^2\frac{dh}{dt}=3b^2\left(-\frac{dH}{dt}\right)$，因为下降的速度与上升的速度方向相反，所以当漏斗水平面下降速度与水桶水平面上升速度相等时，有$\frac{dh}{dt}=-\frac{dH}{dt}$，解得$h=\sqrt{3}b$.

(21)（本题满分 11 分）设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$内大于零，并且满足$xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$（$a$为常数），又曲线$y=f(x)$与$x=1, y=0$所围的图形$S$的面积值为$2$，求函数$f(x)$，并问$a$为何值时，图形$S$绕$x$轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

【答案】$f(x)=\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x$，当$a=-5$时，体积最小。

【解析】根据题意，可得当$x\neq 0$时，$\left[\frac{f(x)}{x}\right]'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{3a}{2}$，求得，$f(x)=\frac{3a}{2}x^2+Cx$，又$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，故可得，

$f(x)=\frac{3a}{2}x^2+Cx, x\in[0,1]$，根据已知条件，$\int_0^1\left(\frac{3a}{2}x^2+Cx\right)dx=2$，解得，$C=4-a$，

因此，函数 $f(x)$ 的表达式为 $f(x)=\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x$。旋转体的体积为

$V(a)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\left(\frac{1}{30}a^2+\frac{1}{3}a+\frac{16}{3}\right)\pi$，$V'(a)=\left(\frac{1}{15}a+\frac{1}{3}\right)\pi$，令 $V'(a)=0$，解

得，$a=-5$，$V''(-5)=\frac{\pi}{15}>0$，因此，当 $a=-5$ 时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

（22）（本题满分 11 分）已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+8)$ 及 $\boldsymbol{\beta}=(1,1,b+3,5)$.

（Ⅰ）a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出？

（Ⅱ）a,b 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的唯一线性表达式？并写出该表达式.

【答案】（Ⅰ）$a=-1,b\neq 0$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合；

（Ⅱ）$a\neq -1$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 可以用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 唯一线性表示，

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{2b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{a+b+1}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_3$$

【解析】 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是否可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出，相当于方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$ 是否有解，利用初等行变换化增广矩阵为阶梯形讨论即可.

（Ⅰ）设 $\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4$，则

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ x_2-x_3+2x_4=1, \\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3+4x_4=b+3, \\ 3x_1+5x_2+x_3+(a+8)x_4=5. \end{cases}$$

因为

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&\vdots&1\\0&1&-1&2&\vdots&1\\2&3&a+2&4&\vdots&b+3\\3&5&1&a+8&\vdots&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&\vdots&1\\0&1&-1&2&\vdots&1\\0&1&a&2&\vdots&b+1\\0&2&-2&a+5&\vdots&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&\vdots&1\\0&1&-1&2&\vdots&1\\0&0&a+1&0&\vdots&b\\0&0&0&a+1&\vdots&0\end{bmatrix}$$

，

可见当$a=-1,b\neq 0$时，$\boldsymbol{\beta}$不能表示成$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的线性组合.

（Ⅱ）当$a\neq -1$时，方程组有唯一解，$\boldsymbol{\beta}$可以用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$唯一线性表示，且

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{2b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{a+b+1}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{b}{a+1}\boldsymbol{\alpha}_3.$$

（23）（本题满分 11 分）设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&a&-2\\0&-2&b\end{bmatrix}\sim\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&6\end{bmatrix}$，$a>b$，求$a$、$b$及正交矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$。

【答案】$\begin{cases}a=5,\\b=1.\end{cases}$ $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{30}}\\0&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{-5}{\sqrt{30}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{30}}\end{bmatrix}$

【解析】已知$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则

$$tr(\boldsymbol{A})=tr(\boldsymbol{B})\Rightarrow a+b+1=7,\qquad ①$$

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2.$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&a&-2\\0&-2&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&a-1&-2\\0&-2&b\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-2&b\\0&0&(a-1)b-4\end{bmatrix},$$

所以 $$(a-1)b-4=0.\qquad ②$$

由①②，解得

$$\begin{cases} a=2, \\ b=4, \end{cases} \text{或} \begin{cases} a=5, \\ b=1, \end{cases}$$

又 $a>b$，故 $\begin{cases} a=5, \\ b=1. \end{cases}$

由于 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征值都为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=0$，$\lambda_3=6$.

当 $\lambda=1$ 时，由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0\Rightarrow\boldsymbol{\varepsilon}_1=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$；

当 $\lambda=0$ 时，由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0\Rightarrow\boldsymbol{\varepsilon}_2=(-1,1,2)^{\mathrm{T}}$；

当 $\lambda=6$ 时，由 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0\Rightarrow\boldsymbol{\varepsilon}_3=(-1,-5,2)^{\mathrm{T}}$.

由于 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 属于不同的特征值，所以 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 正交，单位化得

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_1}{|\boldsymbol{\varepsilon}_1|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_2}{|\boldsymbol{\varepsilon}_2|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_3}{|\boldsymbol{\varepsilon}_3|}=\frac{1}{\sqrt{30}}(-1,-5,2)^{\mathrm{T}},$$

则正交矩阵为

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3)=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}.$$

且有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 6 \end{bmatrix}=\boldsymbol{B}$。