

1988 年全国硕士研究生入学统一考试

数学试题参考解答及评分标准

数 学 (试 卷 一)

一. (本题满分 15 分, 每小题 5 分)

(1) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 3^n}$ 的收敛域.

解: 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 3^n}{(x-3)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3(n+1)} |x-3| = \frac{1}{3} |x-3|$, 故 $\frac{1}{3} |x-3| < 1$ 即 $0 < x < 6$ 时,

幂级数收敛.3 分

当 $x=0$ 时, 原级数成为交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, 是收敛的.4 分

当 $x=6$ 时, 原级数成为调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 是发散的.5 分

所以, 所求的收敛域为 $[0, 6)$.

(2) 已知 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1-x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$. 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解: 由 $e^{[\varphi(x)]^2} = 1-x$, 得 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$3 分

由 $\ln(1-x) \geq 0$, 得 $1-x \geq 1$ 即 $x \leq 0$5 分

所以 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$, 其定义域为 $(-\infty, 0)$.

(3) 设 S 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧, 计算曲面积分 $I = \oiint_S x^3 dydz + y^3 dx dz + z^3 dx dy$.

解: 根据高斯公式, 并利用球面坐标计算三重积分, 有

$$I = 3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv \quad (\text{其中 } \Omega \text{ 是由 } S \text{ 所围成的区域}) \quad \text{.....2 分}$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr \quad \text{.....4 分}$$

$$= \frac{12\pi}{5}. \quad \text{.....5 分}$$

二、填空题：(本题满分 12 分，每小题 3 分)

- (1) 若 $f(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} t(1 + \frac{1}{x})^{2tx}$, 则 $f'(t) = \underline{(2t+1)e^{2t}}$
- (2) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在区间 $(-1, 1]$ 上的定 $f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0 \\ x^3, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的付立叶级数在 $x=1$ 处收敛于 $\underline{\frac{2}{3}}$.
- (3) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $\int_0^{x^3-1} f(t)dt = x$, 则 $f(7) = \underline{\frac{1}{12}}$.
- (4) 设 4×4 矩阵 $A = (\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, $B = (\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, 其中, $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 均为 4 维列向量, 且已知行列式 $|A| = 4, |B| = 1$, 则行列式 $|A+B| = \underline{40}$.

三、选择题 (本题满分 15 分，每小题 3 分)

- (1) 若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0) = \frac{1}{2}$, 则当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 该函 $x=x_0$ 处的微分 dy 是 (B)
- (A) 与 Δx 等价的无穷小 (B) 与 Δx 同阶的无穷小
(C) 比 Δx 低阶的无穷小 (D) 比 Δx 高阶的无穷小
- (2) 设 $y = f(x)$ 是方程 $y'' - 2y' + 4y = 0$ 的一个解, 若 $f(x) > 0$, 且 $f'(x_0) = 0$, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 (A)
- (A) 取得极大值 (B) 取得极小值
(C) 某个邻域内单调增加 (D) 某个邻域内单调减少
- (3) 设有空间区域 $\Omega_1: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$; 及 $\Omega_2: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, 则 (C)
- (A) $\iiint_{\Omega_1} x dv = 4 \iiint_{\Omega_2} x dv$ (B) $\iiint_{\Omega_1} y dv = 4 \iiint_{\Omega_2} y dv$
(C) $\iiint_{\Omega_1} z dv = 4 \iiint_{\Omega_2} z dv$ (D) $\iiint_{\Omega_1} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_2} xyz dv$
- (4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛, 则此级数在 $x=2$ 处 (B)
- (A) 条件收敛 (B) 绝对收敛
(C) 发散 (D) 收敛性不能确定
- (5) n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (3 \leq s \leq n)$ 线性无关的充分必要条件是 (D)
- (A) 有一组不全为 0 的数 k_1, k_2, \dots, k_s , 使 $k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s \neq 0$.
(B) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关.
(C) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中存在一个向量, 它不能用其余向量线性表出.
(D) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表出.

四. (本题满分 6 分)

设 $u = yf\left(\frac{x}{y}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 f, g 具有二阶连续导数, 求 $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

解: $\frac{\partial u}{\partial x} = f'\left(\frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} g'\left(\frac{y}{x}\right).$ 2 分

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{y} f''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{y^2}{x^3} g''\left(\frac{y}{x}\right).$$
3 分

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{x}{y^2} f''\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{y}{x^2} g''\left(\frac{y}{x}\right).$$
5 分

所以 $x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$ 6 分

五、(本题满分 8 分)

设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$, 且图形在点 $(0, 1)$ 处的切线与曲线 $y = x^2 - x + 1$ 在该点的切线重合, 求函数 $y = y(x)$.

解: 对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$ 2 分

设原方程的特解为 $y^* = Axe^x,$ 3 分

得 $A = -2.$ 4 分

故原方程通解为 $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 2xe^{2x}.$ 5 分

又已知有公共切线得 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = -1,$ 7 分

即 $\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ c_1 + 2c_2 = 1 \end{cases}$ 解得 $c_1 = 1, c_2 = 0.$ 8 分

所以 $y = (1 - 2x)e^{2x}.$

六、(本题满分 9 分)

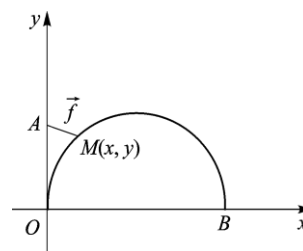
设位于点 $(0, 1)$ 的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\frac{k}{r^2}$ ($k > 0$ 为常数, r 为质点 A 与 M 之间的距离), 质点 M 沿曲线 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 自 $B(2, 0)$ 运动到 $O(0, 0)$. 求在此运动过程中质点 A 对质 M 点的引力所做的功.

解: $\overrightarrow{MA} = \{0 - x, 1 - y\}$ 2 分

$$r = \sqrt{x^2 + (1 - y)^2}.$$

因引力 \vec{f} 的方向与 \overrightarrow{MA} 一致,

故 $\vec{f} = \frac{k}{r^3} \{-x, 1 - y\}.$ 4 分



$$\text{从而 } W = \int_{\widehat{BO}} \frac{k}{r^3} [-x dx + (1-y) dy] \quad \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$

$$= k \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right). \quad \cdots \cdots 9 \text{ 分}$$

七、(本题满分 6 分)

已知 $AP = PB$, 其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 求 A 及 A^5 .

解: 先求出 $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$2 分

$$\begin{aligned} \text{因 } AP = PB, \text{ 故 } A = PBP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

从而 $A^5 = \overbrace{AAAAA}^{5\text{个}} = \overbrace{(PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1})}^{5\text{个}} = PB^5P^{-1} = PBP^{-1} = A$6 分

八、(本题满分 8 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似,

(1) 求 x 与 y ; (2) 求一个满足 $P^{-1}AP = B$ 的可逆矩阵 P .

解: (1) 因 A 与 B 相似, 故 $|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$, 即1 分

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix},$$

亦即 $(\lambda - 2)(\lambda^2 - x\lambda - 1) = (\lambda - 2)(\lambda^2 + (1 - y)\lambda - y)$.

比较两边的系数得 $x=0, y=1$. 此时 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$3 分

(2) 从 B 可以看出 A 的特征值 $\lambda = 2, 1, -1$4 分

对 $\lambda = 2$, 可求得 A 的特征向量为 $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

对 $\lambda = 1$, 可求得 A 的特征向量为 $p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

对 $\lambda = -1$, 可求得 A 的特征向量为 $p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$7 分

因上述 p_1, p_2, p_3 是属于不同特征值的特征向量, 故它们线性无关.

令 $P = (p_1, p_2, p_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, 则 P 可逆, 且有 $P^{-1}AP = B$8 分

九、(本题满分 9 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且在 (a, b) 内有 $f'(x) > 0$. 证明: 在 (a, b) 内存在唯一的 ξ , 使曲线 $y = f(x)$ 与两直线 $y = f(\xi), x = a$ 所围平面图形面积 S_1 是曲线 $y = f(x)$ 与两直线 $y = f(\xi), x = a$ 所围平面图形面积 S_2 的 3 倍.

证: 存在性 在 $[a, b]$ 上任取一点 t , 令

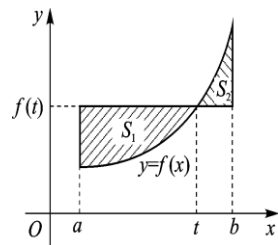
$$\begin{aligned} F(t) &= \int_a^t [f(t) - f(x)] dx - 3 \int_t^b [f(x) - f(t)] dx \\ &= \left[f(t)(t-a) - \int_a^t f(x) dx \right] - 3 \left[\int_t^b f(x) dx - f(t)(b-t) \right] \end{aligned}$$
3 分

则 $F(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

又因 $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是单调增加的.

于是在 (a, b) 内取定点 c , 有

$$\begin{aligned} F(a) &= -3 \int_a^b [f(x) - f(a)] dx = -3 \int_a^c [f(x) - f(a)] dx - 3 \int_c^b [f(x) - f(a)] dx \\ &\leq -3 \int_c^b [f(x) - f(a)] dx = -3 [f(\xi_1) - f(a)](b-c) < 0, \quad c \leq \xi_1 \leq b. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 F(b) &= \int_a^b [f(b) - f(x)]dx = \int_a^c [f(b) - f(x)]dx + \int_c^b [f(b) - f(x)]dx \\
 &\geq \int_a^c [f(b) - f(x)]dx = [f(b) - f(\xi_2)](c-a) > 0, \quad a \leq \xi_2 \leq c.
 \end{aligned}$$

……5 分

所以由介值定理知, 在 (a, b) 内存在 ξ , 使 $F(\xi) = 0$, 即 $S_1 = 3S_2$. ……6 分

唯一性 因 $F'(t) = f'(t)[(t-a) + 3(b-t)] > 0$, ……8 分

故 $F(t)$ 在 (a, b) 内是单调增加的. 因此, 在 (a, b) 内只有一个 ξ , 使 $S_1 = 3S_2$. ……9 分

十、填空题(共 6 分, 每个 2 分)

(1) 设三次独立实验中, 事件 A 出现的概率相等. 若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$, 则

事件 A 在一次试验中出现的概率为 $\frac{1}{3}$.

(2) 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取两个数, 则事件“两数之和小于 $\frac{6}{5}$ ”的概率为 $\frac{17}{25}$.

(3) 设随机变量 X 服从均值为 10, 均方差为 0.02 的正态分布. 已知 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$, $\Phi(2.5) = 0.9938$, 则 X 落在区间 $(9.95, 10.05)$ 内的概率为 0.9876.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, 求随机变量 $Y = 1 - \sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

解: 因 Y 的分布函数

$$F_Y(y) = P(Y < y) \quad \text{……1 分}$$

$$= P\{1 - \sqrt[3]{X} < y\} = P\{\sqrt[3]{X} > 1 - y\} = P\{X > (1 - y)^3\} \quad \text{……2 分}$$

$$= \int_{(1-y)^3}^{+\infty} \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi} \arctan x \Big|_{(1-y)^3}^{+\infty} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan(1-y)^3 \right]. \quad \text{……4 分}$$

$$\text{故 } Y \text{ 的概率密度函数为 } f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{3}{\pi} \frac{(1-y)^3}{1+(1-y)^6}. \quad \text{……6 分}$$

数 学（试卷二）

一. (本题满分 15 分, 每小题 5 分)

(1) 【同数学一 第一、(1) 题】

(2) 【同数学一 第一、(2) 题】

(3) 【同数学一 第一、(3) 题】

二、填空题: (本题满分 12 分, 每小题 3 分)

(1) 【同数学一 第二、(1) 题】

(2) 【同数学一 第二、(2) 题】

(3) 【同数学一 第二、(3) 题】

(4) 【同数学一 第二、(4) 题】

三、选择题(本题满分 15 分, 每小题 3 分)

(1) 【同数学一 第三、(1) 题】

(2) 【同数学一 第三、(2) 题】

(3) 【同数学一 第三、(3) 题】

(4) 【同数学一 第三、(4) 题】

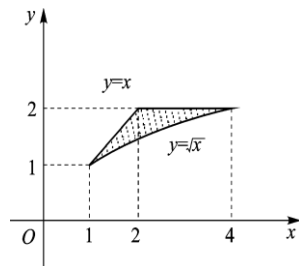
(5) 【同数学一 第三、(5) 题】

四. (本题满分 18 分, 每小题 6 分)

(1) 【同数学一 第四题】

(2) 计算 $\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy$.

$$\begin{aligned} \text{解: } & \int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy \\ &= \int_1^2 dy \int_y^{y^2} \sin \frac{\pi x}{2y} dx \quad \cdots \cdots 3 \text{ 分} \\ &= \int_1^2 \frac{2y}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} y \right) dy. \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分} \\ &= -\frac{8}{\pi^3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t \cos t dt \quad \left(\text{令 } t = \frac{\pi y}{2} \right) = \frac{4}{\pi^3} (2 + \pi). \quad \cdots \cdots 6 \text{ 分} \end{aligned}$$



(3) 求椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 上某点 M 处的切平面 π 的方程, 使平面 π 过已知直线 $l: \frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{2z-1}{-2}$.

解: 令 $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$, 则 $F_x = 2x, F_y = 4y, F_z = 6z$.

椭球面在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面 π 的方程为

$$2x_0(x-x_0) + 4y_0(y-y_0) + 6z_0(z-z_0) = 0, \text{ 即 } x_0x + 2y_0y + 3z_0z = 21. \quad \cdots\cdots 2 \text{ 分}$$

因为平面 π 过直线 L , 故 L 上的任两点, 比如点 $A(6, 3, \frac{1}{2})$ 、 $B(0, 0, \frac{7}{2})$ 应满足 π 的方程,

$$\text{代入有 } 6x_0 + 6y_0 + \frac{3}{2}z_0 = 21 \quad (1)$$

$$z_0 = 2 \quad (2)$$

$$\text{又因 } x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 21, \quad (3)$$

于是有 $x_0 = 3, y_0 = 0, z_0 = 2$ 及 $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 2$. $\cdots\cdots 4 \text{ 分}$

故所求切平面 π 的方程为 $x + 2z = 7$ 和 $x + 4y + 6z = 21$. $\cdots\cdots 6 \text{ 分}$

五、(本题满分 8 分)【同数学一 第五题】

六、(本题满分 9 分)【同数学一 第六题】

七、(本题满分 6 分)【同数学一 第七题】

八、(本题满分 8 分)【同数学一 第八题】

九、(本题满分 9 分)【同数学一 第九题】

数 学 (试 卷 三)

一、填空题 (本题满分 20 分, 每小题 4 分)

(1) 若 $f(x) = \begin{cases} e^2(\sin x + \cos x), & x > 0 \\ 2x + \alpha, & x \leq 0 \end{cases}$ 是 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数, 则 $\alpha = \underline{1}$.

(2) 【 同数学一 第二、(1) 题 】

(3) 【 同数学一 第二、(3) 题 】

(4) $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{\lg x} = \underline{1}$.

(5) $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx = \underline{2(e^2 + 1)}$

二、选择题 (本题满分 20 分, 每小题 4 分)

(1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x + 1$ 的图形在点 $(0, 1)$ 处切线与 x 轴交点的坐标是 (A)

(A) $(-\frac{1}{6}, 0)$ (B) $(-1, 0)$ (C) $(-\frac{1}{6}, 0)$ (D) $(1, 0)$

(2) 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上皆可导, 且 $f(x) < g(x)$, 则必有 (C)

(A) $f(-x) > g(-x)$ (B) $f'(x) < g'(x)$

(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ (D) $\int_0^x f(t)dt < \int_0^x g(t)dt$

(3) 【 同数学一 第二 (1) 题 】

(4) 曲线 $y = \sin^{\frac{3}{2}} x (0 \leq x \leq \pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所形成的旋转 (B)

(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{4}{3}\pi$ (C) $\frac{2}{3}\pi^2$ (D) $\frac{2}{3}\pi$ 【B】

(5) 【 同数学一 第三 (5) 题 】

三、(本题满分 15 分, 每小题 5 分)

(1) 【 同数学一第一、(2) 题 】

(2) 已知 $y = 1 + xe^{xy}$, 求 $y'|_{x=0}$ 及 $y''|_{x=0}$.

解: 显然 $x=0$ 时, $y=1$.

……1 分

$$y' = xe^{xy}(xy' + y) + e^{xy} = e^{xy}(x^2y' + xy + 1).$$

……2 分

因此 $y'|_{x=0} = e^0 = 1;$

……3 分

而 $y'' = e^{xy}(x^2y'' + 2xy' + xy' + y) + e^{xy}(x^2y' + xy + 1)(xy' + 1)$,
 即得 $y''|_{x=0} = e^0 + e^0 = 2$.

.....4 分

.....5 分

(3) 求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x(x^2 + 1)}$ 的通解（一般解）.

解: $y = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left[\int \frac{1}{x(x^2 + 1)} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right]$
 $= \frac{1}{x} \left[\int \frac{1}{x^2 + 1} dx + C \right]$
 $= \frac{1}{x} [\arctan x + C]$, 其中 C 是任意常数.

.....3 分

.....4 分

.....5 分

四、(本题满分 12 分)

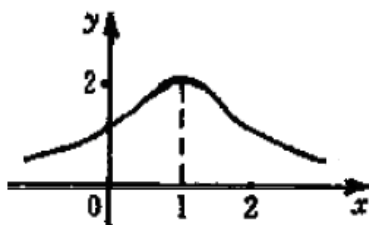
作函数 $y = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$ 的图形, 并填写下表

单调增加区间	
单调减少区间	
极值点	
极 值	
凹(∪) 区间	
凸(∩) 区间	
拐 点	
渐近线	

解:

单调增加区间	$(-\infty, 1)$	(1 分)
单调减少区间	$(1, +\infty)$	(2 分)
极值点	1	(3 分)
极值	2	(4 分)
凹区间	$(-\infty, 0)$ 及 $(2, +\infty)$	(6 分)
凸区间	$(0, 2)$	(7 分)
拐点	$(0, \frac{3}{2})$ 及 $(2, \frac{3}{2})$	(9 分)
渐进线	$y = 0$	(10 分)

其图形为：



五、(本题满分 8 分)

将长为 a 的铁丝切成两段，一段围成正方形，另一段围成圆形.问这两段铁丝各长为多少时，正方形与圆形的面积之和为最小？

解： 设圆形的周长为 x ，则正方形的周长为 $a-x$ ，而两面积之和为

$$A = \left(\frac{a-x}{4}\right)^2 + \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{4+\pi}{16\pi} x^2 - \frac{a}{8} x + \frac{a^2}{16}, \quad \cdots \cdots 3 \text{ 分}$$

$$A' = \frac{4+\pi}{8\pi} x - \frac{a}{8} \stackrel{(\text{令})}{=} 0, \text{ 得 } x = \frac{\pi a}{4+\pi}. \quad \cdots \cdots 5 \text{ 分}$$

$$A'' = \frac{4+\pi}{8\pi} > 0. \quad \cdots \cdots 7 \text{ 分}$$

故当圆的周长为 $x = \frac{\pi a}{4+\pi}$ 时，正方形的周长为 $a-x = \frac{4a}{4+\pi}$ 时， A 之值最小. $\cdots \cdots 8 \text{ 分}$

六、(本题满分 10 分) 【同数学一 第五题 (分值不同)】

七、(本题满分 7 分)

设 $x \geq -1$ ，求 $\int_{-1}^x (1-|t|)dt$.

解： 当 $-1 \leq x < 0$ 时， $\int_{-1}^x (1-|t|)dt = \int_{-1}^x (1+t)dt \quad \cdots \cdots 1 \text{ 分}$

$$= \frac{1}{2}(1+t)^2 \Big|_{-1}^x \quad \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{2}(1+x)^2. \quad \cdots \cdots 3 \text{ 分}$$

当 $x \geq 0$ 时， $\int_{-1}^x (1-|t|)dt = \int_{-1}^0 (1+t)dt + \int_0^x (1-t)dt \quad \cdots \cdots 5 \text{ 分}$

$$= 1 - \frac{1}{2}(1-x)^2. \quad \cdots \cdots 7 \text{ 分}$$

八、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上有连续导数, 且 $m \leq f(x) \leq M$.

(1) 求 $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{4a^2} \int_{-a}^a [f(t+a) - f(t-a)] dt$; (2) 证 $\left| \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) dt - f(x) \right| \leq M - m \ (a > 0)$.

解: (1) 由积分中值定理和微分中值定理有

$$\begin{aligned} & \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{4a^2} \int_{-a}^a [f(t+a) - f(t-a)] dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{2a} [f(\xi+a) - f(\xi-a)] \quad (a \leq \xi \leq a) \quad \dots\dots 2 \text{ 分} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} f'(\xi^*) = \lim_{\xi^* \rightarrow 0} f'(\xi^*) \quad (-2a \leq \xi - a < \xi^* < \xi + a \leq 2a) = f'(0). \quad \dots\dots 4 \text{ 分} \end{aligned}$$

(2) **证:** 由 $f(x)$ 的有界性及积分估值定理有 $\dots\dots 5 \text{ 分}$

$$m \leq \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) dt \leq M, \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

又 $-M \leq -f(x) \leq -m, \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$

故有 $-(M-m) \leq \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) dt - f(x) \leq M-m,$

即 $\left| \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(t) dt - f(x) \right| \leq M-m. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$

数 学（试卷四）

一、填空题（本题满分 12 分，每空 1 分）

(一) 已知函数 $f(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt, -\infty < x < \infty$.

(1) $f'(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

(2) $f(x)$ 的单调性: 单调增加.

(3) $f(x)$ 的奇偶性: 奇函数.

(4) $f(x)$ 图形的拐点: (0, 0).

(5) $f(x)$ 图形的凹凸性: $x < 0$ 时上凹 (下凸), $x > 0$ 时下凹 (上凸).

(6) $f(x)$ 图形的水平渐近线: $y = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, y = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(二)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

(三)
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(四) 假设 $P(A) = 0.4$, $P(A \cup B) = 0.7$, 那么

(1) 若 A 与 B 互不相容, 则 $P(B) = 0.3$.

(2) 若 A 与 B 相互独立, 则 $P(B) = 0.5$.

二、(本题满分 10 分) (每小题, 回答正确得 2 分, 回答错误得 -1 分, 不回答得 0 分; 全题最低得 0 分)

(1) 若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ 都存在, 则极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 必存在. (×)

(2) 若 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点, 则必有 $f'(x_0) = 0$. (×)

(3) 等式 $\int_0^a f(x)dx = -\int_0^a f(a-x)dx$, 对任何实数 a 都成立. (×)

(4) 若 A 和 B 都是 n 阶非零方阵, 且 $AB=0$, 则 A 的秩必小于 n . (√)

(5) 若事件 A, B, C 满足等式 $A \cup C = B \cup C$, 则 $A=B$.

(×)

三、(本题满分 16 分, 每小题 4 分.)

(1) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{x \ln x}$

解一: 此极限为 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 由罗必塔法则, 则

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1)}{\ln x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x^x = 1. \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

解二: 令 $t = x \ln x$, 则 $x^x = e^t$. 由于当 $x \rightarrow 1$ 时, $t \rightarrow 0$, 可见

$$\text{原式} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} e^t = 1. \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

(2) 已知 $U + e^u = xy$, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

解: 由于 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{1+e^u}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{1+e^u}$,2 分

$$\text{可见 } \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{1+e^u - ye^u \frac{\partial u}{\partial y}}{(1+e^u)^2} \quad \cdots \cdots 3 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{1+e^u} - \frac{xye^u}{(1+e^u)^3}. \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

(3) 求定积分 $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.

解一: 由于 $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x})$, 可见

$$\text{原式} = \int_0^3 \frac{2d\sqrt{x}}{1+x} \quad \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

$$= \frac{2\pi}{3}. \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

解二: 令 $\sqrt{x} = t$, $x = t^2$, $dx = 2tdt$; 当 $x=0$ 时, $t=0$; 当 $x=3$ 时, $t=\sqrt{3}$;

.....1 分

$$\text{于是, 原式} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2dt}{1+t^2} \quad \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

$$= 2 \arctan \sqrt{x} \Big|_0^3 \quad \cdots \cdots 3 \text{ 分}$$

$$= \frac{2\pi}{3}. \quad \text{……4 分}$$

(4) 求二重积分 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} dy \int_y^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{x} dx$.

解: 在原式中交换积分次序, 得 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{6}} dx \int_0^x \frac{\cos x}{x} dy$ ……2 分

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \quad \text{……4 分}$$

四、(本题满分 6 分, 每小题 3 分)

(1) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 的敛散性

解: 由 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}} \cdot \frac{n^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+2)}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^{n+1}}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{1}{e} < 1, \quad \text{……2 分}$$

故由级数收敛的比值判别法, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 收敛. ……3 分

(2) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a^2$ 和 $\sum_{i=n}^{\infty} b_i^2$ 都收敛, 试证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛.

证: 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a^2$ 和 $\sum_{i=n}^{\infty} b_i^2$ 都收敛, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_i^2 + b_i^2)$ 收敛. ……2 分

$$\text{而 } a_n b_n \leq \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2),$$

故由比较判别法, 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛. ……3 分

五、(本题满分 8 分)

已知某商品的需求量 D 和供给量都是价 P 的函数: $D = D(p) = \frac{a}{p^2}$, $S = S(p) = bp$,

其中 a>0 和 b>0 是常数: 价格 p 是时间 t 的函数且满足方程 $\frac{dp}{dt} = k[d(p) - s(p)]$, (k 是常数),

假设当 t=0 时价格为 1. 试求:

(1) 需求量等于供给量时的均衡价格 P_e ; (2) 价格函数 $p(t)$; (3) 极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)$.

解: (1) 当需求量等于供给量时, 有 $\frac{a}{p^2} = bp$, 即 $p^3 = \frac{a}{b}$. 故 $p_e = (\frac{a}{b})^{\frac{1}{3}}$1 分

(2) 由条件知 $\frac{dp}{dt} = k[D(p) - S(p)] = k[\frac{a}{p^2} - bp] = k \frac{b}{p^2} [\frac{a}{b} - p^3]$.

因此有 $\frac{dp}{dt} = k \frac{b}{p^2} [p_e^3 - p^3]$, 即 $\frac{p^2 dp}{p^3 - p_e^3} = -k b dt$3 分

在该式两边同时积分得 $p^3 = p_e^3 + ce^{-3kbt}$5 分

故由条件 $P(0) = 1$, 可得 $c = 1 - p_e^3$. 于是价格函数为 $p(t) = [p_e^3 + (1 - p_e^3)e^{-3kbt}]^{\frac{1}{3}}$6 分

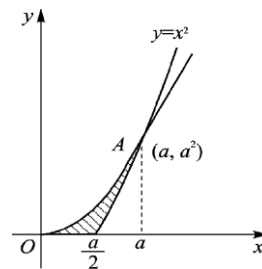
(3) $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [p_e^3 + (1 - p_e^3)e^{-3kbt}]^{\frac{1}{3}} = p_e$ 8 分

六、(本题满分 8 分)

在曲线 $y = x^2 (x \geq 0)$ 上某点 A 处作一切线, 使之与曲线以及 x 轴所围图形的面积为

$\frac{1}{12}$, 试求:

- (1) 切点 A 的坐标;
- (2) 过切点 A 的切线方程;
- (3) 由上述所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.



解: 设切点 A 的坐标为 (a, a^2) ,

则过点 A 的切线方程的斜率为

$y'|_{x=a} = 2a$, 切线方程为 $y - a^2 = 2a(x - a)$, 即 $y = 2ax - a^2$2 分

可见, 切线与 x 轴的交点为 $(\frac{a^2}{2}, 0)$. 故曲线、 x 轴以上及切线这三者所围图形的面积为

$$S = \int_0^a x^2 dx - \frac{a^3}{4} = \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{4} = \frac{a^3}{12}. \quad \text{.....4 分}$$

而由题设知 $S = \frac{1}{12}$, 因此 $a = 1$5 分

于是, 切点 A 的坐标为 $(1, 1)$, 过切点 $(1, 1)$ 的切线方程为 $y = 2x - 1$6 分

旋转体的体积为 $V = \int_0^1 \pi(x^2)^2 dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \pi(2x - 1)^2 dx = \frac{\pi}{30}$8 分

七、(本题满分 8 分)

$$\text{已给线性方程组} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}, \text{问 } k_1 \text{ 和 } k_2 \text{ 各取何值时, 方程组无解? 有唯一}$$

解? 有无穷解? 在方程组有无穷解的情景下, 试求出一般解.

解: 以 \mathbf{A} 表示方程组的系数矩阵, 以 $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ 表示增广矩阵,

$$\text{因 } (\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -k_1 & 15 & 3 \\ 1 & -5 & -10 & 12 & k_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -k_1+2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & k_2+5 \end{pmatrix} \quad \dots\dots 2 \text{ 分}$$

故当 $k_1 \neq 2$ 时, $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 4$, 方程组有唯一解; \dots\dots 3 分

$$\text{当 } k_1 = 2 \text{ 时, 有 } (\mathbf{A}|\mathbf{B}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & k_2+5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_2-1 \end{pmatrix} \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

这时, 若 $k_2 \neq 1$, 则 $R(\mathbf{A}) = 3 < R(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 4$, 故方程组无解;

若 $k_2 = 1$, 则 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = 3 < 4$, 故方程组有无穷多组解, 此时有 \dots\dots 6 分

$$(\mathbf{A}|\mathbf{B}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{相应的方程组为} \begin{cases} x_1 = -8; \\ x_2 = 3 - 2x_3, \text{ 取 } x_3 = c \text{ (} c \text{ 为任意常数), 得方程组的一般解;} \\ x_4 = 2. \end{cases}$$

$$x_1 = -8, x_2 = 3 - 2c, x_3 = c, x_4 = 2. \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

综上所述: 当 $k_1 \neq 2$ 时, 方程组有唯一解; 当 $k_1 = 2$ 而 $k_2 \neq 1$ 时, 方程组无解;

当 $k_1 = 2$ 且 $k_2 = 1$ 时, 方程组有无穷多组解, 其一般解为

$$x_1 = -8, x_2 = 3 - 2c, x_3 = c, x_4 = 2, \text{ 其中 } c \text{ 为任意常数.}$$

八、(本题满分 7 分)

已知向量组 a_1, a_2, \dots, a_s ($s \geq 2$) 线性无关, 设 $\beta_1 = a_1 + a_2, \beta_2 = a_2 + a_3, \dots, \beta_{s-1} = a_{s-1} + a_s, \beta_s = a_s + a_1$,

讨论向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 的线性相关性.

解: 假设 k_1, k_2, \dots, k_s 是一数组, 满足条件 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_s\beta_s = 0$ 1 分

那么, 有 $(k_s + k_1)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + \dots + (k_{s-1} + k_s)\alpha_s = 0$.

由于 a_1, a_2, \dots, a_s 线性无关, 故有
$$\begin{cases} k_s + k_1 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ k_{s-1} + k_s = 0 \end{cases} \quad (*) \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

此方程组的系数行列式为 s 阶行列式:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-1)^{s+1} = \begin{cases} 2, & \text{若 } s \text{ 为奇数} \\ 0, & \text{若 } s \text{ 为偶数} \end{cases} \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

若 s 为奇数, 则 $D = 2 \neq 0$, 故方程组 (*) 只有零解, 即 k_1, k_2, \dots, k_s 必全为 0.

这时, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关.

若 s 为偶数, 则 $D = 0$, 故方程组 (*) 有非零解, 即存在不全为 0 的数组 k_1, k_2, \dots, k_s , 使 $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_s\beta_s = 0$. 这时, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性相关,7 分

九、(本题满分 6 分)

设 A 是三阶方阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, A 的行列式 $|A| = \frac{1}{2}$. 求行列式 $|(3A)^{-1} - 2A^*|$ 的值.

解: 因 $(3A)^{-1} = \frac{1}{3}A^{-1}$,2 分

故 $A^* = |A| \cdot A^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}$,3 分

所以 $|(3A)^{-1} - 2A^*| = \left| \frac{1}{3}A^{-1} - A^{-1} \right| = \left| -\frac{2}{3}A^{-1} \right| = \left(-\frac{2}{3} \right)^3 |A^{-1}|$ 5 分

$$= -\frac{16}{27}. \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$

十、(本题满分 7 分)

玻璃杯成箱出售, 每箱 20 只, 假设各箱含 0, 1, 2 只残次品的概率是 0.8, 0.1 和 0.1, 一顾客欲购买一箱玻璃杯, 在购买时, 售货员随意取一箱, 而顾客开箱随机观察 4 只, 若无

残次品，则购买下该玻璃杯，否则退回.试求：

(1) 顾客买下该箱的概率 α ； (2) 在顾客买下的一箱中，确实没有残次品的概率 β .

解： 设 $B_i = \{\text{箱中恰有 } i \text{ 件残品次品}\} (i = 0, 1, 2)$, $A = \{\text{顾客买下所察看的一箱}\}$.

……1 分

由题意知 $P(B_0) = 0.8, P(B_1) = 0.1, P(B_2) = 0.1$; $P(A|B_0) = 1, P(A|B_1) = \frac{C_{19}^4}{C_{20}^4} = \frac{4}{5}$;

$$P(A|B_2) = \frac{C_{18}^4}{C_{20}^4} = \frac{12}{19}. \quad \text{……3 分}$$

$$(1) \text{ 由全概率公式 } \alpha = P(A) = \sum_{i=0}^2 P(B_i)P(A|B_i) = 0.8 + \frac{0.4}{5} + \frac{1.2}{19} \approx 0.94; \quad \text{……5 分}$$

$$(2) \text{ 由贝叶斯公式 } \beta = P(B_0|A) = \frac{P(B_0)P(A|B_0)}{P(A)} \approx \frac{0.8}{0.94} \approx 0.85. \quad \text{……7 分}$$

十一、(本题满分 6 分)

某保险公司多年的统计资料表明，在索赔户中被盗索赔户占 20%，以 X 表示在随意抽查的 100 个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数.

(1) 写出 X 的概率分布；

(2) 利用棣莫佛拉普拉斯定理，求出索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率的近似值.

解： (1) X 服从二项分布，参数 $n = 100, p = 0.2$ ，其概率分布为

$$P\{X = k\} = C_{100}^k 0.2^k 0.8^{100-k} \quad (k = 0, 1, \dots, 100). \quad \text{……2 分}$$

$$(2) \text{ 由 } X \sim B(n, p) \text{ 知, } EX = np = 20, DX = np(1-p) = 16, \quad \text{……4 分}$$

故根据棣莫佛—拉普拉斯定理，有

$$P\{14 \leq X \leq 30\} = P\left\{\frac{14-20}{\sqrt{16}} \leq \frac{X-20}{\sqrt{16}} \leq \frac{30-20}{\sqrt{16}}\right\} = P\left\{-1.5 \leq \frac{X-20}{4} \leq 2.5\right\} \quad \text{……5 分}$$
$$\approx \Phi(2.5) - \Phi(-1.5) = \Phi(2.5) - [1 - \Phi(1.5)] = 0.994 - [1 - 0.933] = 0.927. \quad \text{……6 分}$$

十二、(本题满分 6 分)

假设随机变量 X 在区间 $(1, 2)$ 上服从均匀分布.试求随机变量 $Y = e^{2x}$ 的概率密度 $f(y)$.

解： 由条件知， X 的密度函数为 $p(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } 1 < x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad \text{……1 分}$

记 $F(y) = P\{Y \leq y\}$ 为 Y 的分布函数，则有

$$F(y) = \begin{cases} 0, & \text{若 } y \leq e^2 \\ \int_1^{\frac{1}{2}\ln y} dx, & \text{若 } e^2 < y < e^4 \\ 1, & \text{若 } y \geq e^4 \end{cases}$$

.....2分

.....3分

.....4分

因此 $f(y) = F'(y) = \begin{cases} 0, & \text{若 } y < e^2 \\ \frac{1}{2y}, & \text{若 } e^2 < y < e^4 \\ 0, & \text{若 } y > e^4 \end{cases}$ 于是 (当 $y = e^2, e^4$ 时, 补充定义 $f(y) = 0$), 得

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2y}, & \text{若 } e^2 < y < e^4 \\ 0 & \text{若 } y > e^4 \end{cases}.$$

.....6分

数 学 (试 卷 五)

一、【同数学四 第一题】

二、【同数学四 第二题】

三、(本题满分 16 分, 每小题 4 分.)

(1) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x^2) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$.

解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\cot \frac{\pi}{2} x}$ 1 分

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x}{-\frac{\pi}{2}} \cdot \sin^2 \frac{\pi}{2} x$$
3 分

$$= \frac{4}{\pi}.$$
4 分

(2) 已知 $u = e^{\frac{x}{y}}$, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

解: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}},$ 1 分

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{y^2} e^{\frac{x}{y}} + \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2} \right)$$
3 分

$$= -\frac{x+y}{y^3} e^{\frac{x}{y}}.$$
4 分

(3) 【同数学四 第三、(3) 题】

(4) 【同数学四 第三、(4) 题】

四、(本题满分 6 分)

确定常数 a 和 b , 使函数 $f(x) = \begin{cases} ax+b, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$, 处处可导.

解: 当 $x \neq 1$ 时, 显然 $f(x)$ 可导;1 分

为使 $x=1$ 时, 导数 $f'(x)$ 存在, $f(x)$ 在 $x=1$ 处必须连续,

故有 $f(1+0) = f(1-0) = f(1)$,2 分

由此可得 $a+b=1$3 分

又由 $f'(1+0)=a, f'(1-0)=2$,4 分

以及 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的可导性, 有 $f'(1+0)=f'(1-0)$. 由此得 $a=2$,5 分

从而 $b=-1$6 分

五、(本题满分 8 分.)【同数学三 第五题】

六、(本题满分 8 分.)【同数学四 第六题】

七、(本题满分 8 分.)【同数学四 第七题】

八、(本题满分 6 分.)

已知 n 阶方阵 A 满足矩阵方程 $A^2-3A-2E=0$, 其中 A 给定, 而 E 是单位矩阵. 证明 A 可逆, 并求出其逆矩阵 A^{-1} .

解一: 由 $A^2-3A-2E=0$, 可见 $A^2-3A=2E$, $A(A-3E)=2E$.

在上式两端同取行列式, 得 $|A(A-3E)|=|2E|$; $|A| \cdot |(A-3E)|=|2E|=2^n \neq 0$ 3 分

由此可见 $|A| \neq 0$, 从而 A 可逆.4 分

在 $A(A-3E)=2E$ 两端同时左乘 $\frac{1}{2}A^{-1}$, 得 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-3E)$6 分

解二: 由 $A^2-3A-2E=0$, 可见 $A^2-3A=2E$. 从而有

$A\left[\frac{1}{2}(A-3E)\right]=E$ 及 $\left[\frac{1}{2}(A-3E)\right]A=E$3 分

记 $B=\frac{1}{2}(A-3E)$, 则 $AB=BA=E$. 由逆矩阵的定义知 A 可逆, 且 B 是 A 的逆矩阵:

$A^{-1}=B=\frac{1}{2}(A-3E)$6 分

九、(本题满分 7 分.)【同数学四 第八题】

十、(本题满分 7 分.)【同数学四 第十题】

十一、(本题满分 7 分)

假设有十只同种电器元件, 其中有两只废品. 装配仪器时从这批元件中任取一只, 如是废品, 则倒掉重新任取一只; 若仍是废品, 则扔掉再取一只. 试求在取到正品之前, 已取出的废品只数的分布, 数学期望和方差.

解: 以 X 表示在取到正品前已取出的废品数.

知 X 是一随机变量, 其有 3 个可能的取值: 0, 1, 2.1 分

(1) 分布: $P\{X=0\}=\frac{8}{10}=0.8; P\{X=1\}=\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{9}=\frac{8}{45};$

$$P\{X=2\}=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{8}=\frac{1}{45}.$$

.....4 分

(2) 数学期望: $EX=0\times 0.8+1\times\frac{8}{45}+2\times\frac{1}{45}=\frac{2}{9}.$

.....5 分

(3) 方差: $EX^2=0^2\times 0.8+1^2\times\frac{8}{45}+2^2\times\frac{1}{45}=\frac{4}{15},$

.....6 分

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{88}{405}.$$

.....7 分

十二、(本题满分 5 分.)【同数学四 第十二题 分值不同】