2020 考研-数学-基础阶段
第三次测试卷解析 PSM（协议）

本试卷满分 100 分，考试时间 30 分钟

姓名__________　　　　　　　　得分__________

一、解答题：请将正确答案及其解题过程写在题后的空白部分。

1、（本小题满分 20 分）设 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+b, & x\le 0 \\ \ln(1+ax), & x>0 \end{cases}$ 处处可导。

（1）确定常数 a,b；

（2）求 $f'(x)$。

【答案】（1）$a=2$，$b=0$；（2）$f'(x)=\begin{cases} 2x+2, x\le 0 \\ \dfrac{2}{1+2x}, x>0 \end{cases}$。

【解析】（1）因为函数 $f(x)$ 为可导函数，则必连续，因此，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$，即得 $b=0$，又因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，故 $f'_+(0)=f'_-(0)$，即 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+ax)}{x}=2$，故 $a=2$，因此，$a=2$，$b=0$；

（2）由（1）知，$f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x\le 0 \\ \ln(1+2x), & x>0 \end{cases}$，故当 $x<0$ 时，$f'(x)=2x+2$，当 $x>0$ 时，$f'(x)=[\ln(1+2x)]'=\dfrac{2}{1+2x}$，当 $x=0$ 时，$f'(0)=2$，因此，$f'(x)=\begin{cases} 2x+2, x\le 0 \\ \dfrac{2}{1+2x}, x>0 \end{cases}$。

序号	错误原因	学习建议	备注
230101	不清楚可导与连续的关系	讲义第 38 页可导与连续；讲义 38 页例 4 以及习题册 38 页 5 题；注意体会可导蕴含连续。	
23010	不清楚函数在一点处连续的概	讲义 29 页连续的概念；讲义 29 页	

2	念	例 1 以及习题册 27 页 5 题；注意体会函数在一点处连续的两种表述方法。	
230103	不清楚常用的求导公式	讲义 41 页求导公式；讲义 41 页例 1；注意体会导数计算中常用的求导公式。	
230104	不清楚计算分段点处的导数要用定义	讲义 35 页函数在一点的导数；讲义 37 页例 3 以及习题册 38 页 6 题、8 题；注意体会求函数具体点处的导数时要用导数的定义进行计算。	
230105	计算型错误	建议 1、2、3、4。	
230106	其他；		

2、（本小题满分 10 分）下列命题

①设 $f_{-}'(x_0)$ 与 $f_{+}'(x_0)$ 均存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必连续

②设 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ 均存在且相等，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必连续

③设 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在且相等，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处极限存在

④设 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必连续

正确的个数（　　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

【答案】（B）

【解析】① $f_{-}'(x_0)$ 与 $f_{+}'(x_0)$ 均存在，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左连续且右连续，故 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，该选项正确；

②令 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\neq 0, \\ 1, & x=0, \end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2x=0$，但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，故该选项错误；

③由左右极限与极限的关系（$f(x)$ 在 $x=x_0$ 处左、右极限都存在且相等的充要条件是 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处极限存在），故该选项正确；

④ $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，需 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 均存在且相等且等于该点的函数值，而本题该点处函数值未知，故该选项错误。

序号	错误原因	学习建议	备注
230201	不清楚函数在一点处极限存在与连续的区别与联系	讲义 13 页极限的概念以及 29 页连续的概念；习题册 27 页 1 题、2 题、4 题；注意体会函数在一点的处极限与在该点处的连续性没有必然联系。	
230202	不清楚导函数在一点处的极限与原函数在该点处的连续性的区别与联系	讲义 35 页函数在一点处的导数；注意体会研究导函数在一点处的极限时，与原函数在该点处的连续性无必然联系。	
230203	不清楚函数在一点处导数存在与连续的关系	讲义 38 页可导与连续；习题册 38 页 6 题、7 题；注意体会函数在一点处左（右）导数存在时，则函数在该点处左（右）连续。	
230204	其他；		

3、（本小题满分 30 分）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin y+\mathrm{e}^x-xy-1=0, y\in(-\pi,\pi)$ 所确定，试求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0},\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$。

【答案】 $y'\big|_{x=0}=-1$，$y''\big|_{x=0}=-3$。

【解析】 $\sin y+\mathrm{e}^x-xy-1=0$ 两边同时对 x 求导得，$\cos y\cdot y'+e^x-y-xy'=0\ (1)$，将 $x=0$ 代入原方程，可得 $y=0$，将 $x=0$，$y=0$ 代入 (1) 式，可解得，$y'\big|_{x=0}=-1$；(1) 式两边同时对 x 求导可得，$-\sin y\cdot y'^2+\cos y\cdot y''+e^x-2y'-xy''=0$，将 $x=0$，$y=0$，$y'\big|_{x=0}=-1$ 代入，解得 $y''\big|_{x=0}=-3$。

序号	错误原因	学习建议	备注
230301	不清楚隐函数的求导法则	讲义 44 页隐函数的导数；讲义 45 页例 5 和例 6 以及习题册 45 页 3 题、4 题；注意体会隐函数求导时需注	

		意方程两边同时对 x 求导并将 y 看成关于 x 的函数。	
230302	不清楚计算隐函数二阶导时如何简化做题步骤	讲义 44 页隐函数的导数；讲义 45 页例 6 以及习题册 45 页 6 题；注意体会在计算二阶导数时，直接对求导后的方程两侧同时对 x 求导即可，不必计算出一阶导函数。	
230303	不清楚常见函数的求导公式	讲义 41 页求导公式；讲义 41 页例 1；注意体会导数计算中常用的求导公式。	
230304	计算型错误	建议 1、2、3。	
230305	其他；		

4、（本小题满分 20 分）若函数 $y=y(x)$ 满足 $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3+\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$，且 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\neq 0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$。

【答案】1。

【解析】$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{y'(x)}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dx}{dy}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{y'(x)}\right)\cdot\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{y''}{y'^3}$，又因 $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3+\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$，

故 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=-\dfrac{y''}{y'^3}=1$。

序号	错误原因	学习建议	备注
230401	不清楚反函数的求导法则	讲义 43 页反函数求导法则；讲义 43 页例 3；注意体会反函数的导数与原函数导数的关系。	
230402	不清楚抽象函数求导时求导变量与自变量如何区分	讲义 46 页抽象函数的导数；讲义 47 页例 11、例 12；注意体会抽象函数求导中当自变量与求导变量不一致时，要插入中间变量，进而计算导数。	
230403	计算型错误	建议 1、2。	
230404	其他；		

5、（本小题满分 20 分）若函数 $y=y(x)$ 二阶可导，且满足微分方程

$y''+(y')^2-\frac{1}{x}y'+4x^2=0$，试做变量替换$u=e^y,x=\sqrt{t}$将该方程化为$u$关于$t$的微分方程。

【答案】$\frac{d^2u}{dt^2}+u=0$。

【解析】$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{u}\frac{du}{dt}2\sqrt{t}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{du}{dt}2\sqrt{t}+\frac{1}{u}\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dt}\right)2\sqrt{t}+\frac{1}{u}\frac{du}{dt}\frac{d(2\sqrt{t})}{dx}$$

$$=\frac{-2\sqrt{t}}{u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 2\sqrt{t}+\frac{2\sqrt{t}}{u}\frac{d^2u}{dt^2}2\sqrt{t}+\frac{2}{u}\frac{du}{dt}=\frac{-4t}{u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{4t}{u}\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{2}{u}\frac{du}{dt},$$

将$\frac{dy}{dx}$与$\frac{d^2y}{dx^2}$代入上述方程得，

$$-\frac{4t}{u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{4t}{u}\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{2}{u}\frac{du}{dt}+\frac{4t}{u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2-\frac{1}{u\sqrt{t}}\frac{du}{dt}2\sqrt{t}+4t=0,$$

整理得，$\frac{d^2u}{dt^2}+u=0$。

序号	错误原因	学习建议	备注
230501	不清楚题目的考查内容	讲义 47 页例 12、例 13；注意体会此类题目主要考查抽象函数的导数。	
230502	不清楚抽象函数求导时求导变量与自变量如何区分	讲义 46 页抽象函数的导数；讲义 47 页例 11、例 12；注意体会抽象函数求导中当自变量与求导变量不一致时，要插入中间变量，进而计算导数。	
230503	计算型错误	建议 1、2。	
230504	其他；		