

2020 考研-数学-基础阶段

第四次测试卷解析（协议）

本试卷满分 100 分，考试时间 30 分钟

姓名_____

得分_____

一、解答题：请将正确答案及其解题过程写在题后的空白部分。

1、（本小题满分 20 分）若 e^x 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int x^2 f(\ln x) dx$ 。

【答案】 $\frac{x^4}{4} + C$ 。

【解析】由 e^x 是 $f(x)$ 的一个原函数，则可知 $f(x) = (e^x)' = e^x$ ，故

$$\int x^2 f(\ln x) dx = \int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + C。$$

序号	错误原因	学习建议	备注
24010 1	不清楚原函数的概念	讲义第 51 页基本概念；注意体会原函数的概念以及与不定积分的关系。	
24010 2	不清楚基本积分公式	讲义第 52 页基本积分公式；讲义 52 页例 1 以及习题册第 55 页第 1 题；注意体会基本积分公式及其运用方法。	
24010 3	计算型错误	建议 1、2。	
24010 4	其他；		

2、（本小题满分 20 分）计算不定积分 $\int \frac{\sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sin 2\sqrt{x}} dx$ 。

【答案】 $\ln |\sec \sqrt{x} + \tan \sqrt{x}| + \ln |\csc \sqrt{x} - \cot \sqrt{x}| + C$ 。

【解析】

$$\int \frac{\sin \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x} \sin 2\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{2\sqrt{x} \cos \sqrt{x}} dx + \int \frac{1}{2\sqrt{x} \sin \sqrt{x}} dx$$

$$= \int \sec \sqrt{x} d\sqrt{x} + \int \csc \sqrt{x} d\sqrt{x} = \ln |\sec \sqrt{x} + \tan \sqrt{x}| + \ln |\csc \sqrt{x} - \cot \sqrt{x}| + C.$$

序号	错误原因	学习建议	备注
24020 1	不清楚常用的三角公式	讲义第 11 页三角公式；讲义第 53 页例 1 (7)、(8)、(9)；注意体会三角公式在求积分中的相关应用。	
24020 2	不清楚凑微分的方法	讲义第 54 页第一类换元法；讲义 54 页例 2 至例 5 以及习题册第 55 页第 2 题；注意体会凑微分方法的使用条件与步骤。	
24020 3	不清楚基本的积分公式	讲义第 52 页基本积分公式；讲义 54 页例 3、4、62 页例 13；注意体会常用的求积公式。	
24020 4	计算型错误	建议 1、2、3。	
24020 5	其他；		

3、(本小题满分 20 分) 计算不定积分 $\int \frac{1}{(x-2)^2(x^2-2x-3)} dx$ 。

【答案】 $-\frac{2}{9} \ln|x-2| + \frac{1}{3(x-2)} - \frac{1}{36} \ln|x+1| + \frac{1}{4} \ln|x-3| + C$ 。

【解析】

$$\int \frac{1}{(x-2)^2(x^2-2x-3)} dx = \int \left(-\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-3} \right) dx$$

$$= -\frac{2}{9} \ln|x-2| + \frac{1}{3(x-2)} - \frac{1}{36} \ln|x+1| + \frac{1}{4} \ln|x-3| + C.$$

序号	错误原因	学习建议	备注
24030 1	不清楚有理函数积分中如何拆分	讲义 60 页有理函数积分；讲义 60 页例 11 与例 12 以及习题册第 56 页第 4 题；注意体会有理函数积分中不同形式的被积函数的拆分过程。	

24030 2	不清楚基本的积分公式	讲义第 52 页基本积分公式；讲义 54 页例 3、4、62 页例 13；注意体会常用的求积公式。	
24030 3	计算型错误	建议 1、2。	
24030 4	其他；		

4、（本小题满分 20 分）计算不定积分 $\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx$ 。

【答案】 $\frac{1}{4} \arcsin^2 x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{x^2}{4} + C$ 。

【解析】 令 $x = \sin t$ ，则

$$\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx = \int t \cos^2 t dt = \int t \cdot \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{t^2}{4} + \frac{1}{4} \int t \sin 2t$$

$$= \frac{t^2}{4} + \frac{1}{4} t \sin 2t - \frac{1}{4} \int \sin 2t dt = \frac{t^2}{4} + \frac{1}{4} t \sin 2t + \frac{\cos 2t}{8} + C$$

$$= \frac{1}{4} \arcsin^2 x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{x^2}{4} + C。$$

序号	错误原因	学习建议	备注
24040 1	不清楚第二类换元法	讲义第 56 页第二类换元法；讲义第 57 页例 6、7 以及习题册第 55 页第 3、7 题；注意体会第二类换元法的使用条件及步骤。	
24040 2	不清楚分部积分法	讲义第 58 页分部积分法；讲义 58 页例 8、9、10 以及习题册第 57 页第 8、9 题；注意体会分部积分的使用范围及基本步骤。	
24040 3	不清楚利用换元法计算不定积分时最终结果要回代成关于 x 的函数	讲义第 56 页第二类换元法；讲义 56 页例 6、例 7；注意体会利用第二类换元法计算不定积分时要回代。	
24040 4	计算型错误	建议 1、2、3。	
24040	其他；		

5			
---	--	--	--

5、(本小题满分 20 分) 计算不定积分 $\int \frac{1}{\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x} dx$ 。

【答案】 $= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| + \frac{1}{2(1 + \cos x)} + C$ 。

【解析】

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x} dx &= \int \frac{1}{\sin x(1 + \cos x)} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x(1 + \cos x)} dx \\
 &= - \int \frac{d \cos x}{(1 - \cos^2 x)(1 + \cos x)} \xrightarrow{t = \cos x} - \int \frac{dt}{(1-t)(t+1)^2} \\
 &= - \int \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-t} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+t)^2} dt \\
 &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right| + \frac{1}{2} \frac{1}{1+t} + C \\
 &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| + \frac{1}{2(1 + \cos x)} + C。
 \end{aligned}$$

序号	错误原因	学习建议	备注
24050 1	不清楚含三角有理式的不定积分的计算思路	讲义第 62 页三角有理式；讲义第 62 页例 13 (6)、习题册第 56 页 5 题；注意体会三角有理式积分的常用方法。	
24050 2	不清楚常用三角公式	讲义第 11 页三角公式；讲义第 53 页例 1 (7)、(8)、(9)；注意体会三角公式在求积分中的相关应用。	
24050 3	不清楚有理函数积分中如何拆分	讲义 60 页有理函数积分；讲义 60 页例 11 与例 12 以及习题册第 56 页第 4 题；注意体会有理函数积分中不同形式的被积函数的拆分过程。	
24050 4	不清楚利用换元法计算不定积分时最终结果要回代成关于 x 的函数	讲义第 56 页第二类换元法；讲义 56 页例 6、例 7；注意体会利用第二类换元法计算不定积分时要回	

		代。	
24050 5	计算型错误	建议 1、2、3、4。	
24050 6	其他；		

offcn