2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题： 1～10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

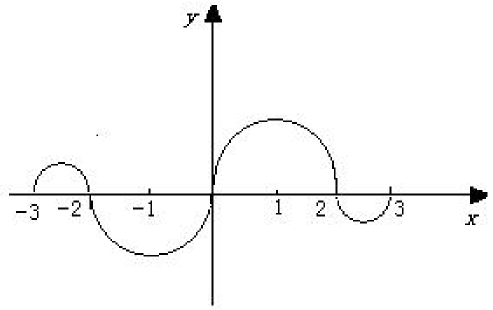
（1）当 $x \to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

（A）$1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$　（B）$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　（C）$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　（D）$1-\cos\sqrt{x}$　[　]

（2）函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$　[　]

（A）0　（B）1　（C）$-\dfrac{\pi}{2}$　（D）$\dfrac{\pi}{2}$

（3）如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2],[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间 $[-2,0],[0,2]$ 上的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周，设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则下列结论正确的是：（　）



（A）$F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$　(B) $F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$

（C）$F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$　（D）$F(-3)=\dfrac{5}{4}F(-2)$　[　]

（4）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是

（A）若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$　（B）若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

（C）若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)=0$　（D）若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)=0$.

（5）曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)$ 渐近线的条数为

（A）0.　（B）1.　（C）2.　（D）3.　[　]

（6）设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，令 $u_n=f(n)$（$n=1,2,\cdots$），则下列结论正确的是：

(A) 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛.　(B) 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散

(C) 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛.　(D) 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散.　[　]

（7）二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是[　　]

（A）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left[f(x,y)-f(0,0)\right]=0$.

（B）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$, 且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$.

（C）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

（D）$\lim\limits_{x\to 0}\left[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)\right]=0$, 且 $\lim\limits_{y\to 0}\left[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)\right]=0$.

（8）设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$ 等于

（A）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$　　（B）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$

（C）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$　　（D）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$

（9）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$　　(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$.　　(D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$.　　[　　]

（10）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 与 B

(A) 合同且相似　　（B）合同，但不相似.

(C) 不合同，但相似.　　(D) 既不合同也不相似　　[　　]

二、填空题：11～16 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上.

（11）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$ ________.

（12）曲线 $\begin{cases}x=\cos t+\cos^2 t\\y=1+\sin t\end{cases}$ 上对应于 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 的点处的法线斜率为________.

（13）设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$________.

（14） 二阶常系数非齐次微分方程 $y''-4y'+3y=2\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为 $y=$________.

（15） 设 $f(u,v)$ 是二元可微函数，$z=f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\right)$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

（16）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 A^3 的秩为_________ .

三、解答题：17～24 小题，共 86 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（17）(本题满分 10 分)设 $f(x)$ 是区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上单调、可导的函数，且满足 $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t=\int_0^x t\dfrac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$，其中 f^{-1} 是 f 的反函数，求 $f(x)$.

（18）（本题满分 11 分）

设 D 是位于曲线 $y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}(a>1,0\le x<+\infty)$ 下方，x 轴上方的无界区域.

（Ⅰ）求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$；

（Ⅱ）当 a 为何值时，$V(a)$ 最小？并求此最小值.

（19）（本题满分 10 分）求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解.

（20）（本题满分 11 分）已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f'(0)=1$，函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y-1}=1$ 所确定，设 $z=f\left(\ln y-\sin x\right)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0},\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}$.

（21）(本题满分 11 分)设函数 $f(x),g(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a),f(b)=g(b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

（22）(本题满分 11 分) 设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} x^2, & |x|+|y|\le 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\le 2 \end{cases}$，计算二重积分 $\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\big||x|+|y|\le 2\right\}$.

（23） (本题满分 11 分)

设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ 与方程组 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求 a 的值及所有公共解.

（24） (本题满分 11 分)

设 3 阶对称矩阵 A 的特征向量值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，$\alpha_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量，记 $B=A^5-4A^3+E$，其中 E 为 3 阶单位矩阵.

（I）验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量，并求 B 的全部特征值与特征向量;

（II）求矩阵 B.

2006年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、填空题：1－6小题，每小题4分，共24分. 把答案填在题中横线上.

（1）曲线 $y=\dfrac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}$ 的水平渐近线方程为

（2）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x \sin t^2 \mathrm{d}t, x\neq 0\\ a, \qquad\qquad\qquad x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$______.

（3）反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=$______.

（4）微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是

（5）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y=1-x\mathrm{e}^y$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$

（6）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，$E$ 为2阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA=B+2E$，则 $|B|=$______.

二、选择题：7－14小题，每小题4分，共32分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（7）设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0, f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量，Δy与$\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则[　]

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.　　(B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$.

(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$.　　(D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.

（8）设 $f(x)$ 是奇函数，除 $x=0$ 外处处连续，$x=0$ 是其第一类间断点，则 $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是

（A）连续的奇函数.　　（B）连续的偶函数

（C）在 $x=0$ 间断的奇函数　　（D）在 $x=0$ 间断的偶函数.　[　]

（9）设函数 $g(x)$ 可微，$h(x)=\mathrm{e}^{1+g(x)}, h'(1)=1, g'(1)=2$，则 $g(1)$ 等于

（A）$\ln 3-1$.　　（B）$-\ln 3-1$.

（C）$-\ln 2-1$.　　（D）$\ln 2-1$.　[　]

（10）函数 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-2x}+x\mathrm{e}^x$ 满足的一个微分方程是

（A）$y''-y'-2y=3x\mathrm{e}^x$.　　（B）$y''-y'-2y=3\mathrm{e}^x$.

（C）$y''+y'-2y=3x\mathrm{e}^x$.　　（D）$y''+y'-2y=3\mathrm{e}^x$.　[　]

（11）设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 等于

（A） $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.　　（B） $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.　　[　　]

（12）设 $f(x,y)$与$\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y'(x,y)\neq 0$，已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是　[ ]

(A) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

(B) 若 $f_x'(x_0,y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

(C) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)=0$.

(D) 若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$.

（13）设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 均为 n 维列向量，A 为 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是　[ ]

（A）若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性相关.

（B）若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关.

(C) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性相关.

(D) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关.

（14）设 A 为3阶矩阵，将 A 的第2行加到第1行得 B，再将 B 的第1列的 -1 倍加到第2列得 C，记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则

（A） $C=P^{-1}AP$.　　（B） $C=PAP^{-1}$.

（C） $C=P^{\mathrm{T}}AP$.　　（D） $C=PAP^{\mathrm{T}}$.　　[　　]

三 、解答题：15－23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

试确定 A,B,C 的值，使得 $\mathrm{e}^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$，其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

（16）（本题满分 10 分）求 $\int \frac{\arcsin \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

（17）（本题满分 10 分）设区域$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1,x\ge 0\right\}$，　计算二重积分$I=\iint\limits_D\dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

（18）（本题满分 12 分）设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi,x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$

（Ⅰ）证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求该极限；（Ⅱ）计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

（19）（本题满分 10 分）

证明：当$0<a<b<\pi$时，

$$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a.$$

（20）（本题满分 12 分）

设函数$f(u)$在$(0,+\infty)$内具有二阶导数，且$z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$满足等式$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

（I）验证$f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$；

（II）若$f(1)=0,f'(1)=1$，求函数$f(u)$的表达式.

（21）（本题满分 12 分）

已知曲线 L 的方程 $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 4t - t^2 \end{cases}$，$(t \geq 0)$（I）讨论 L 的凹凸性；（II）过点 $(-1,0)$ 引 L 的切线，求切点 (x_0, y_0)，并写出切线的方程；（III）求此切线与 L（对应于 $x \leq x_0$ 的部分）及 x 轴所围成的平面图形的面积.

（22）（本题满分 9 分）

已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$$

有 3 个线性无关的解.（Ⅰ）证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r\left(A\right) = 2$；（Ⅱ）求 a, b 的值及方程组的通解.

（23）（本题满分 9 分）

设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3,向量 $\alpha_1 = \left(-1, 2, -1\right)^{\mathrm{T}}, \alpha_2 = \left(0, -1, 1\right)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

(Ⅰ) 求 A 的特征值与特征向量;

(Ⅱ) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ,使得 $Q^T AQ = \Lambda$.

2005年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

二、填空题（本题共6小题，每小题4分，满分24分. 把答案填在题中横线上）

（1）设 $y=(1+\sin x)^x$，则 $dy\Big|_{x=\pi}$ =__________ .

（2）曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为________.

（3）$\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=$ _______ .

（4）微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为____________.

（5）当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 k= ________ .

（6）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为3维列向量，记矩阵

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)，B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)，$$

如果 $|A|=1$，那么 $|B|=$______.

二、选择题（本题共8小题，每小题4分，满分32分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

（7）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 f(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 内

(A) 处处可导.　　(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.　　(D) 至少有三个不可导点.　　[　　]

（8）设 F(x)是连续函数 f(x)的一个原函数，"$M\Leftrightarrow N$"表示"M 的充分必要条件是 N"，则必有

（A）F(x)是偶函数 $\Leftrightarrow$ f(x)是奇函数.

（B） F(x)是奇函数 $\Leftrightarrow$ f(x)是偶函数.

（C） F(x)是周期函数 $\Leftrightarrow$ f(x)是周期函数.

（D）F(x)是单调函数 $\Leftrightarrow$ f(x)是单调函数.　　[　　]

（9）设函数 y=y(x)由参数方程 $\begin{cases} x=t^2+2t, \\ y=\ln(1+t) \end{cases}$ 确定，则曲线 y=y(x)在 x=3 处的法线与 x 轴交点的横坐标是

(A) $\dfrac{1}{8}\ln 2+3$.　　(B) $-\dfrac{1}{8}\ln 2+3$.

(C) $-8\ln 2+3$.　　(D) $8\ln 2+3$.　　[　　]

（10）设区域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\}$，f(x)为 D 上的正值连续函数，a,b 为常数，则

$$\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma=$$

(A) $ab\pi$.　　(B) $\dfrac{ab}{2}\pi$.　　(C) $(a+b)\pi$.　　(D) $\dfrac{a+b}{2}\pi$.　　[　　]

（11）设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中函数 φ 具有二阶导数，ψ 具有一阶导数，则必有

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　　　（B） $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　　　(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.　　　　[　　]

（12）设函数 $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$,则（　　）

（A）x=0,x=1 都是 f(x)的第一类间断点.

（B）x=0,x=1 都是 f(x)的第二类间断点.

（C）x=0 是 f(x)的第一类间断点，x=1 是 f(x)的第二类间断点.

（D）x=0 是 f(x)的第二类间断点，x=1 是 f(x)的第一类间断点.　　　[　　]

（13）设 λ_1,λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 α_1,α_2，则 α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是

(A) $\lambda_1\neq 0$.　　(B) $\lambda_2\neq 0$.　　(C) $\lambda_1=0$.　　(D) $\lambda_2=0$.　　　[　　]

（14）设 A 为 n（$n\geq 2$）阶可逆矩阵，交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B, A^*,B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵，则　[　　　]

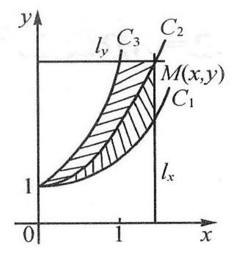
（A）交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^*.　　　(B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^*.

(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$.　　　(D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$.

三 、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

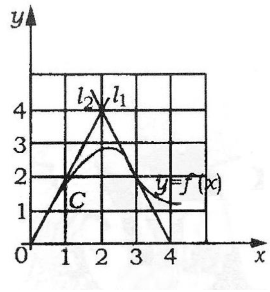
（15）（本题满分 11 分）设函数 f(x)连续，且 $f(0)\neq 0$，求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}.$$



（16）（本题满分 11 分）

如图，C_1 和 C_2 分别是 $y=\frac{1}{2}(1+e^x)$ 和 $y=e^x$ 的图象，过点(0,1)的曲线 C_3 是一单调增函数的图象. 过 C_2 上任一点 M(x,y)分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y. 记 C_1,C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$；C_2,C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$. 如果总有 $S_1(x)=S_2(y)$，求曲线 C_3 的方程 $x=\varphi(y)$.



（17）（本题满分 11 分）

如图，曲线 C 的方程为 y=f(x)，点(3,2)是它的一个拐点，直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点(0,0)与(3,2)处的切线，其交点为(2,4). 设函数 f(x)具有三阶连续导数，计算定积分

$\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)dx.$

（18）（本题满分 12 分）

用变量代换 $x=\cos t(0<t<\pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$，并求其满足 $y\Big|_{x=0}=1, y'\Big|_{x=0}=2$ 的特解.

（19）（本题满分 12 分）已知函数 f(x)在[0，1]上连续，在(0,1)内可导，且 f(0)=0,f(1)=1. 证明：

（I）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；（II）存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

（20）（本题满分 10 分）

已知函数 z=f(x,y) 的全微分 $dz=2xdx-2ydy$，并且 f(1,1,)=2. 求 f(x,y)在椭圆域 $D=\{(x,y)\Big|x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\}$ 上的最大值和最小值.

（21）（本题满分 9 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D |x^2+y^2-1|d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

（22）（本题满分 9 分）

确定常数 a,使向量组 $\alpha_1=(1,1,a)^T$, $\alpha_2=(1,a,1)^T$, $\alpha_3=(a,1,1)^T$ 可由向量组 $\beta_1=(1,1,a)^T$, $\beta_2=(-2,a,4)^T$, $\beta_3=(-2,a,a)^T$ 线性表示，但向量组 β_1,β_2,β_3 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

（23）（本题满分 9 分）

已知 3 阶矩阵 A 的第一行是 $(a,b,c),a,b,c$ 不全为零，矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$（k 为常数），且 AB=O, 求线性方程组 Ax=0 的通解.

2004年考硕数学（二）真题

一．填空题（本题共6小题，每小题4分，满分24分．把答案填在题中横线上．）

（1）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$____ .

（2）设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t^3+3t+1 \\ y=t^3-3t+1 \end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为____..

（3）$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=$_____..

（4）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 确定，则 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$______.

（5）微分方程 $(y+x^3)dx-2xdy=0$ 满足 $y\big|_{x=1}=\dfrac{6}{5}$ 的特解为_______.

（6）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，则

$|B|=$______-.

二．选择题（本题共8小题，每小题4分，满分32分．每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内．）

（7）把 $x\to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x \cos t^2 dt$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3 dt$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是(　　)

（A）α,β,γ.　（B）α,γ,β.　（C）β,α,γ.　（D）β,γ,α.

（8）设 $f(x)=|x(1-x)|$，则

（A）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（B）$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（C）$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（D）$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（9）$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^2(1+\frac{2}{n})^2\cdots(1+\frac{n}{n})^2}$ 等于（　　）

（A）$\int_1^2\ln^2 x dx$.（B）$2\int_1^2\ln x dx$.　（C）$2\int_1^2\ln(1+x)dx$.　（D）$\int_1^2\ln^2(1+x)dx$

（10）设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得(　　)

（A）$f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.　　（B）$f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减小.

（C）对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.　　（D）对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

（11）微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为(　　)

（A）$y*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$.　　（B）$y*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$.

（C）$y*=ax^2+bx+c+A\sin x$.　　（D）$y*=ax^2+bx+c+A\cos x$

（12）设函数 $f(u)$ 连续，区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 2y\right\}$，则 $\iint\limits_D f(xy)dxdy$ 等于(　　)

（A）$\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(xy)dy$.　　（B）$2\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)dx$.

（C）$\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)dr$.　　（D）$\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)rdr$

（13）设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B，再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C，则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为(　　)

（A）$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.　　（B）$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

（C）$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$.　　（D）$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

（14）设 A,B 为满足 $AB=O$ 的任意两个非零矩阵，则必有(　　)

（A）A 的列向量组线性相关，B 的行向量组线性相关.

（B）A 的列向量组线性相关，B 的列向量组线性相关.

（C）A 的行向量组线性相关，B 的行向量组线性相关.

（D）A 的行向量组线性相关，B 的列向量组线性相关.

三. 解答题（本题共 9 小题，满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

（15）（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

（16）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在（$-\infty,+\infty$）上有定义，在区间 $[0,2]$ 上，$f(x)=x(x^2-4)$，若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$，其中 k 为常数.

(Ⅰ)写出 $f(x)$ 在 $[-2,0)$ 上的表达式;（Ⅱ)问 k 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

（17）（本题满分 11 分）

设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt$，

(Ⅰ)证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数;(Ⅱ)求 $f(x)$ 的值域.

（18）（本题满分 12 分）

曲线 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 与直线 $x=0, x=t(t>0)$ 及 $y=0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体，其体积为 $V(t)$，侧面积为 $S(t)$，在 $x=t$ 处的底面积为 $F(t)$.

(Ⅰ)求 $\dfrac{S(t)}{V(t)}$ 的值;（Ⅱ)计算极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{S(t)}{F(t)}$.

（19）（本题满分 12 分）设 $e<a<b<e^2$，证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

（20）（本题满分 11 分）

某种飞机在机场降落时, 为了减小滑行距离, 在触地的瞬间, 飞机尾部张开减速伞, 以增大阻力, 使飞机迅速减速并停下来. 现有一质量为$9000kg$ 的飞机, 着陆时的水平速度为$700\,km/h$. 经测试, 减速伞打开后, 飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比(比例系数为$k=6.0\times10^6$). 问从着陆点算起, 飞机滑行的最长距离是多少?

注 kg 表示千克, km/h 表示千米/小时.

（21）（本题满分 10 分）设$z=f(x^2-y^2,e^{xy})$, 其中 f 具有连续二阶偏导数, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

（22）（本题满分 9 分）

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\2x_1+(2+a)x_2+2x_3+2x_4=0,\\3x_1+3x_2+(3+a)x_3+3x_4=0,\\4x_1+4x_2+4x_3+(4+a)x_4=0,\end{cases}$$

试问a取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

（23）（本题满分 9 分）

设矩阵$\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$的特征方程有一个二重根，求$a$的值，并讨论$A$是否可相似对角化.

2003年考研数学（二）真题

一、填空题（本题共6小题，每小题4分，满分24分. 把答案填在题中横线上）

（1） 若$x\to 0$时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与$x\sin x$是等价无穷小，则 a=__________ .

（2） 设函数 y=f(x)由方程$xy+2\ln x=y^4$所确定，则曲线 y=f(x)在点(1,1)处的切线方程是__________ .

（3） $y=2^x$的麦克劳林公式中x^n项的系数是__________.

（4） 设曲线的极坐标方程为$\rho=e^{a\theta}(a>0)$ ，则该曲线上相应于θ从0变到2π的一段弧与极轴所围成的图形的面积为__________.

（5） 设α为3维列向量，α^T是α的转置. 若$\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$，则$\alpha^T\alpha$ =__________ .

（6） 设3阶方阵 A,B 满足$A^2B-A-B=E$，其中E为3阶单位矩阵，若$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$，则$|B|=$__________.

二、选择题（本题共6小题，每小题4分，满分24分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

（1） 设$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有

(A) $a_n<b_n$对任意 n 成立.　　(B) $b_n<c_n$对任意 n 成立.

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在.　　(D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在.　　[ ]

（2） 设$a_n=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,dx$, 则极限$\lim\limits_{n\to\infty}na_n$等于

(A) $(1+e)^{\frac{3}{2}}+1$.　　(B) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$.

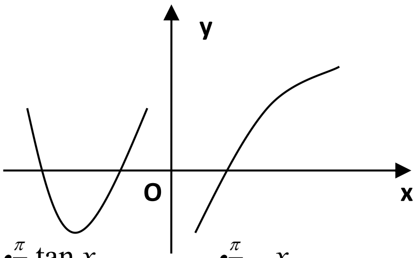
(C) $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}+1$.　　(D) $(1+e)^{\frac{3}{2}}-1$.　　[ ]

（3） 已知$y=\frac{x}{\ln x}$是微分方程$y'=\frac{y}{x}+\varphi(\frac{x}{y})$的解，则$\varphi(\frac{x}{y})$的表达式为

（A） $-\frac{y^2}{x^2}$.　　(B) $\frac{y^2}{x^2}$.　　(C) $-\frac{x^2}{y^2}$.　　(D) $\frac{x^2}{y^2}$.　　[ ]

（4） 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，其导函数的图形如图所示，则$f(x)$有

（A） 一个极小值点和两个极大值点.
（B） 两个极小值点和一个极大值点.
（C） 两个极小值点和两个极大值点.
（D） 三个极小值点和一个极大值点.　　[ ]



（5）设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}dx$，则

(A) $I_1>I_2>1.$ (B) $1>I_1>I_2.$

(C) $I_2>I_1>1.$ (D) $1>I_2>I_1.$ [ ]

（6）设向量组Ⅰ：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组Ⅱ：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则

(A) 当 $r<s$ 时，向量组Ⅱ必线性相关.
(B) 当 $r>s$ 时，向量组Ⅱ必线性相关
.(C) 当 $r<s$ 时，向量组Ⅰ必线性相关.
(D) 当 $r>s$ 时，向量组Ⅰ必线性相关.

[ ]

三 、（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}, & x>0,\end{cases}$

问 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；a 为何值时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点？

四 、（**本题满分 9 分**）

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=1+2t^2,\\ y=\int_1^{1+2\ln t}\frac{e^u}{u}du\end{cases}(t>1)$ 所确定，求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=9}$.

五 、（**本题满分 9 分**）计算不定积分 $\int\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx.$

六 、（**本题满分 12 分**）

设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0, x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)(\frac{dx}{dy})^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

七 、（本题满分 12 分）

讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4 x$ 的交点个数.

八 、（本题满分 12 分）

设位于第一象限的曲线 $y=f(x)$ 过点 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2})$，其上任一点 $P(x,y)$ 处的法线与 y 轴的交点为 Q，且线段 PQ 被 x 轴平分.

(A) 求曲线 $y=f(x)$ 的方程；

(B) 已知曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的弧长为 l，试用 l 表示曲线 $y=f(x)$ 的弧长 s.

九 、（本题满分 10 分）

有一平底容器，其内侧壁是由曲线 $x=\varphi(y)(y\ge 0)$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面（如图），容器的底面圆的半径为 2 m.根据设计要求，当以 $3m^3/\min$ 的速率向容器内注入液体时，液面的面积将以 $\pi m^2/\min$ 的速率均匀扩大（假设注入液体前，容器内无液体）.

(1) 根据 t 时刻液面的面积，写出 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式；

(2) 求曲线 $x=\varphi(y)$ 的方程.

(注：m 表示长度单位米，min 表示时间单位分.)

十 、(**本题满分 10 分**)设函数 $f(x)$ 在闭区间[a,b]上连续,在开区间(a,b)内可导,且 $f'(x)>0$. 若极限 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，证明：

(1) 在(a,b)内 $f(x)>0$;(2)在(a,b)内存在点 ξ，使 $\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$；

(3) 在(a,b) 内存在与(2)中 ξ 相异的点 η，使 $f'(\eta)(b^2-a^2)=\dfrac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)dx.$

十 一、(**本题满分 10 分**)

若矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&2&0\\8&2&a\\0&0&6\end{bmatrix}$ 相似于对角阵 Λ，试确定常数 a 的值；并求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\Lambda.$

十二 、(**本题满分 8 分**)

已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1:\quad ax+2by+3c=0,\qquad l_2:\quad bx+2cy+3a=0,\qquad l_3: cx+2ay+3b=0.$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0.$

2002年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试题

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分)

1．设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\frac{x}{2}} & x>0\\ ae^{2x} & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$（　　　　　　）.

2．位于曲线 $y=xe^{-x}$（$0\le x<+\infty$）下方，x 轴上方的无界图形的面积为（　　　　　）.

3．微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解是（　　　　　　　　　　　　　）.

4．$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}]$ =（　　　　　　　　　　　）.

5．矩阵 $\begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\ 2 & 2 & -2\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix}$ 的非零特征值是（　　　　　　　）.

二、单项选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分．)

1．函数 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0．1，则 $f'(1)=$(　　　)

（A）－1；　（B）0．1；　（C）1；　（D）0．5．

2．函数 $f(x)$ 连续，则下列函数中，必为偶函数的是(　　　)

(A) $\int_0^x f(t^2)dt$；　　(B) $\int_0^x f^2(t)dt$；

(C) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$；　　(D) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$.

3．设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to 0$ 时，函数 $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限(　　　)

(A)不存在；　（B）等于１；　(C)等于２；　(D) 等于３.

4．设函数 $y=f(x)$在$(0,+\infty)$ 内有界且可导，则(　　　)

(A)当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$；

（B）当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$；

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$；

(D) 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.

5．设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量 β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，而向量 β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则对于

任意常数k必有(　　)

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性无关；　　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性相关；

（C）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性无关；　　(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性相关.

三、**（本题满分 6 分）**已知曲线的极坐标方程为$r=1-\cos\theta$，求该曲线对应于$\theta=\frac{\pi}{6}$处的切线与法线的直角坐标方程.

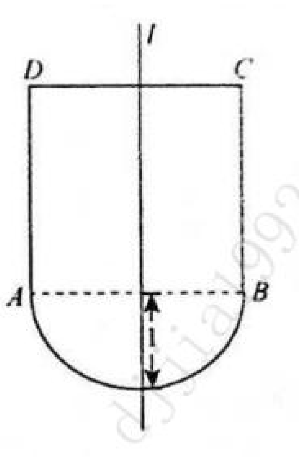
四、**（本题满分 7 分）**设$f(x)=\begin{cases}2x+\frac{3}{2}x^2, & -1\le x<0,\\ \frac{xe^x}{(e^x+1)^2}. & 0\le x\le 1.\end{cases}$，求函数$F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$的表达式.

五、（本题满分 7 分）已知函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内可导，$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$，且满足

$\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{1}{x}}$，求$f(x)$.

六、**（本题满分 7 分）**求微分方程$xdy+(x-2y)dx=0$的一个解$y=y(x)$，使得由曲线$y=y(x)$与直线$x=1,x=2$以及x轴所围成的平面图形绕x轴旋转一周的旋转体的体积最小.

七、（本题满分 7 分）某闸门的形状与大小如图所示，其中直线l为对称轴，闸门的上部为矩形ＡＢＣＤ，下部由二次抛物线与线段ＡＢ所围成．当水面与闸门的上断相平时，欲使闸门矩形部分与承受的水压与闸门下部承受的水压之比为５：４，闸门矩形部分的高h应为多少米？



八、（本题满分 8 分）

设$0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$（$n$＝1,2，…）．证明：数列｛$x_n$｝的极限存在，并求此极限.

九、（本题满分 8 分）设$0<a<b$，证明不等式$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$.

十、（本题满分 8 分）设函数$f(x)$在x＝0 的某邻域具有二阶连续导数，且$f(0)\neq 0$，$f'(0)\neq 0$，$f''(0)\neq 0$..

证明：存在惟一的一组实数λ_1，λ_2，λ_3,，使得当$h\to 0$时，

$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$是比$h^2$高阶的无穷小.

十一、（本题满分 6 分）已知Ａ，Ｂ为 3 阶矩阵，且满足$2A^{-1}B=B-4E$，其中E是 3 阶单位矩阵.

⑴证明：矩阵$A-2E$可逆；

⑵若$B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求矩阵Ａ.

十二、（本题满分 6 分）已知 4 阶方阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$均为 4 维列向量，其中$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$．若$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组$Ax=\beta$的通解.

2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

1、$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}$ =（　　　　　　）.

2、设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在点（0，1）处的法线方程为 ：（　　　　　　）.

3、$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x dx$ =（　　　　　　）.

4、过点 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ 且满足关系式 $y'\arcsin x+\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$ 的曲线方程为：（　　　　　　）.

5、方程组 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 有无穷多解，则 a =（　　　　　　）.

二、单项选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分．)

1、设 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|\le 1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ =(　　　)

（A） 0;　　（B）1;　　（C）$\begin{cases} 1 & |x|\le 1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$;　　（D）$\begin{cases} 0 & |x|\le 1 \\ 1 & |x|>1 \end{cases}$.

2、设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $\left(e^{x^2}-1\right)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于（　　）

（A）1;　　（B）2;　　（C）3;　　（D）4.

3、曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点的个数为(　　　)

（A）0；　　（B）1；　　（C）2；　　（D）3．

4、已知函数 $f(x)$ 在区间（1-δ，1+δ）内具有二阶可导，$f'(x)$ 严格单调减小，且 $f(1)=f'(1)$=1，则(　　　)

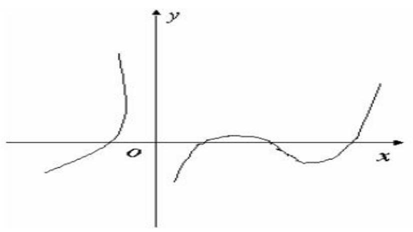
（A）在（1-δ，1）和（1，1+δ）内均有 $f(x)<x$；

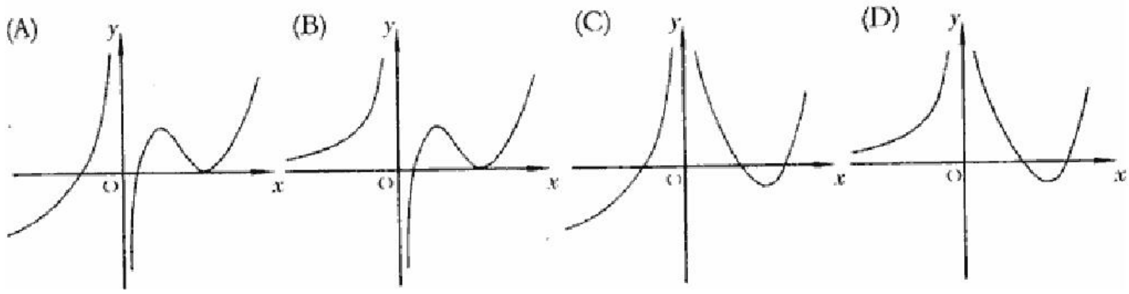
（B）在（1-δ，1）和（1，1+δ）内均有 $f(x)>x$；

（C）在（1-δ，1）内有 $f(x)<x$，在（1，1+δ）内，有 $f(x)>x$；

（D）在（1-δ，1）内有 $f(x)>x$，在（1，1+δ）内，有 $f(x)<x$.

5、已知函数 $y=f(x)$ 在其定义域内可导，它的图形如图所示：则其导函数 $y=f'(x)$ 的图形为 (　　)





三、（**本题满分 6 分**）求$\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

四、（**本题满分 7 分**）求极限$\lim_{t \to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$记此极限为$f(x)$，求函数$f(x)$的间断点并指出其类型.

五、（**本题满分 7 分**）设$\rho = \rho(x)$是抛物线$y = \sqrt{x}$上任意一点 M（x, y）（$x \geq 1$）处的曲率半径，$s = s(x)$是抛物线上介于点 A(1，1)与 M 之间的弧长，计算$3\rho \frac{d^2\rho}{ds^2} - (\frac{d\rho}{ds})^2$的值（在直角坐标系下曲率公式为 K＝$\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$）.

六、（本题满分 7 分）设函数$f(x)$在[0，+∞）可导，$f(0)$=0，且其反函数为$g(x)$.

若$\int_0^{f(x)} g(t)dt = x^2 e^x$，求$f(x)$.

七、（本题满分 7 分）设函数$f(x)$，$g(x)$满足$f'(x)$=$g(x)$，$g'(x)$=2e^x－$f(x)$

且$f(0)$=0，$g(0)$=2，求$\int_0^{\pi} [\frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2}]dx$.

八、（本题满分 9 分）设L为一平面曲线，其上任意点P（x,y）（$x>0$）到坐标原点的距离，恒等于该点处的切线在y轴上的截距，且L过点（$\frac{1}{2}$，0）.

1、求L的方程

2、求L的位于第一象限部分的一条切线，使该切线与L以及两坐标轴所围成的图形的面积最小.

九、（本题满分 7 分）一个半球型的雪堆，其体积的融化的速率与半球面积S成正比 比例系数$K>0$．假设在融化过程中雪堆始终保持半球形状，已知半径为r_0的雪堆在开始融化的 3 小时内，融化了其体积的$\frac{7}{8}$，问雪堆全部融化需要多少时间？

十、（本题满分 8 分）设$f(x)$在区间$[-a,a](a>0)$上具有二阶连续导数，且$f(0)$=0

1、写出$f(x)$的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；

2、证明在$[-a,a]$上至少存在一点η，使$a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)dx$

十一、（本题满分 6 分）已知矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$且矩阵$X$满足

$AXA+BXA=AXB+BXA+E,\text{其中}E\text{是3阶单位矩阵，求}X$.

十二、（本题满分 6 分）已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是线性方程组$AX=0$的一个基础解系，若

$\beta_1=\alpha_1+t\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+t\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+t\alpha_4,\beta_4=\alpha_4+t\alpha_1$，讨论实数$t$满足什么关系时，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$也是$AX=0$的一个基础解系.

2000年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln\left(1+2x^3\right)}=$____________.-

（2）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 所确定，则 $dy\big|_{x-0}=$____________.

（3） $\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}=$____________.

（4）曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐进线方程为____________.

（5）设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{pmatrix}$， E 为4阶单位矩阵，且 $B=(E+A)^{-1}(E-A)$,则 $(E+B)^{-1}=$____________.

二、选择题

6.设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数 a,b 满足（　）

（A） $a<0,b<0.$　　（B） $a>0,b>0.$

（C） $a\le 0,b>0.$　　（D） $a\ge 0,b<0.$

7.设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=x,$ 且 $f'(0)=0,$ 则（　）

（A） $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

（B） $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

（C）点（0， $f(0)$）是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（D） $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值.点 $(0，f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

8.设函数 $f(x)$， $g(x)$ 是大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0,$ 则当 $a<x<b$ 时，有（　）

（A） $f(x)g(b)>f(b)g(x).$　　（B） $f(x)g(a)>f(a)g(x).$

（C） $f(x)g(x)>f(b)g(b).$　　（D） $f(x)g(x)>f(a)g(a).$

9.若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0,$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为（　）

（A）0.　　（B）6.　　（C）36.　　（D）∞

10.具有特解 $y_1=e^{-x},y_2=2xe^{-x},y_3=3e^x$ 的 3 阶常系数齐次线性微分方程是（　）

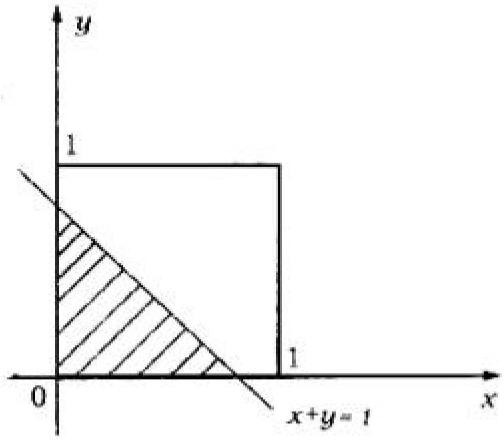
（A）$y'''-y''-y'+y=0.$　　（B）$y'''+y''-y'-y=0.$

（C）$y'''-6y''+11y'-6y=0.$　（D）$y'''-2y''-y'+2y=0.$

三、解答题

11.设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$,计算$\int f(x)dx.$

12.设 xOy 平面上有正方形 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$及直线 $l:x+y=t(t\ge 0)$.若$S(t)$表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积，试求$\int_0^x S(t)dt(x\ge 0)$.



13.求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$在$x=0$处的n阶导数$f^{\langle x\rangle}(0)(n\ge 3)$.

14.设函数 $S(x)=\int_0^x|\cos t|dt,$

（1）当 n 为正整数，且 $n\pi\le x<(n+1)\pi$时，证明:$2n\le S(x)<2(n+1)$;

（2）求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}.$

15.某湖泊的水量为V，每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为$\dfrac{V}{6}$，流入湖泊内不含 A 的水量为$\dfrac{V}{6}$，流出湖泊的水量为$\dfrac{V}{3}$.已知 1999 年年底湖中 A 的含量为$5m_0$，超过国家规定指标，为了治理污水，从 2000 年年初起，限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过$\dfrac{m_0}{V}$.问至多需经过多少年，湖泊中污染物 A 的含量将至 m_0 以内？（注：设湖水中 A 的浓度是均匀的.）

16.设函数 $f(x)$ 在 $[0, \ \pi]$ 上连续，且 $\int_0^{\pi} f(x)dx = 0, \int_0^{\pi} f(x)\cos x dx = 0$. 试证明：在 $(0.\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1，ξ_2，使$f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.

17.已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在 $x = 0$ 的某个邻域内满足关系式 $f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + a(x)$ 其中 $a(x)$ 是当 $x \to 0$ 时，比 x 高阶的无穷小，且 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.

18.设曲线 $y = ax^2 (a > 0, x \geq 0)$与$y = 1 - x^2$交于点$A$，过坐标原点 O 和点 A 的直线与曲线 $y = ax^2$ 围成一平面图形。问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最大？最大体积是多少？

19.函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导，$f(0) = 1$，且满足等式 $f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt = 0$

（1）求导数 $f'(x)$;

（2）证明：当 $x \geq 0$ 时，成立不等式：$e^{-x} \leq f(x) \leq 1$.

20.设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, A = \alpha\beta^T, B = \beta^T\alpha,$ 其中 β^T 是 β 的转置，求解方程 $2B^2A^2x = A^4x + B^4x + \gamma$

21.已知向量组 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\beta_{,2} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 与向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$，$\alpha_{,2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_{,3} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$ 具有相同的秩，且 β_3 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示，求 a, b 的值。

1999年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试卷

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)

（1） 曲线$\begin{cases} x = e^t \sin 2t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$在点（0,1）处的法线方程为____________.

（2）设函数$y = y(x)$由方程$\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$确定，则$\frac{dy}{dx}\Big|_{x-0} =$____________.

（3）$\int \frac{x+5}{x^2 - 6x + 13} dx =$____________.

（4）函数$y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$在区间$[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$上的评价值为____________.

（5）微分方程$y'' - 4y = e^{2x}$的通解为____________.

二、选择题

1.设$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & x > 0 \\ x^2 g(x) & x \le 0 \end{cases}$其中$g(x)$是由界函数，则$f(x)$在$x = 0$处（　）

（A）极限不存在　　（B）极限存在，但不连续

（C）连续，但不可导　　（D）可导

2.设$a(x) = \int_0^{5x} \frac{\sin t}{t} dt, \beta(x) = \int_0^{ainx} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt$则当$x \to 0$时，$a(x)$是$\beta(x)$的（　）

（A）高阶无穷小　　（B）低阶无穷小　（C）同阶但不等价的无穷小　　（D）等阶无穷小

3.设$f(x)$是连续函数$F(x)$是$f(x)$的原函数，则（　）

（A）当$f(x)$是奇函数时，$F(x)$必是偶函数

（B）当$f(x)$是偶函数时，$F(x)$必是奇函数

（C）当$f(x)$是周期函数时，$F(x)$必是周期函数

（D）当$f(x)$是单调增函数时，$F(x)$必是单调增函数

4.“对任意给定的$e \in (0,1)$，总存在正整数N，当$n \ge N$时，恒有$|x_n - a| \le 2\varepsilon$”是数列$\{x_n\}$收敛于$a$的（　）

（A）充分条件但非必要条件　　（B）必要条件但非充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既非充分条件又非必要条件

5.记行列式$\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$为$f(x)$，则方程$f(x) = 0$的根的个数为（　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

三、（本题满分 5 分）

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$

四、（本题满分 6 分）

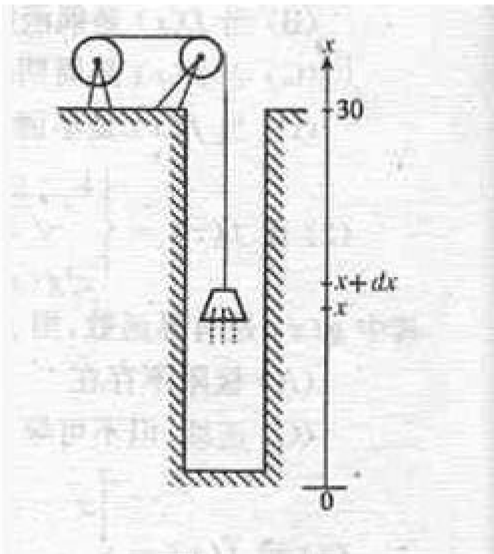
计算 $\int_1^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{x^2}dx.$

五、（本题满分 7 分）

求初值问题 $\begin{cases}\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0,(x>0)\\ y|_{x=1}=0\end{cases}$ 的解

六、（本题满分 7 分）

为清楚井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥提出井口，已知井深 30m，抓斗自重 400N,缆绳每米重 500N，抓斗抓起的污泥重 2000N，提升速度为 3m/s,在提升过程中，污泥以 20N/s 的速度从抓斗缝隙中漏掉，现将抓起污泥的抓斗提升至井口，问克服重力需作多少焦耳的功？（说明：①1N×1m=1J；m, N, s, J 分别表示米，牛顿，秒，焦耳；②抓斗的高度位于井口上方的缆绳长度忽略不计）



七、（本题满分 8 分）

已知函数 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$，求

（1）函数的增减区间及极值；

（2）函数图形的凸凹区间及拐点；

（3）函数图形的渐近线。

八、（本题满分 8 分）

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1, f'(0)=0,$ 证明：在开区间（-1,1）内至少存在一点 ξ，使 $f'''(\xi)=3$

九、（本题满分 8 分）

设函数 $y(x)(x\ge 0)$ 二阶可导，且 $y'(x)>0, y(0)=1.$ 过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1，区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2，并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1，求此曲线 $y=y(x)$ 的方程。

十、（本题满分 7 分）

设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty]$ 上单调减少且非负的连续函数，$a_n=\sum_{k=1}^{n} f(y)-\int_1^n f(x)dx(n=1,2,\cdots,)$ 证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在。

十一、（本题满分 6 分）

设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，矩阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，求矩阵 X.

十二、（本题满分 5 分）

设向量组 $\alpha_1=(1,1,1,3)^T$，$\alpha_2=(-1,-3,5,1)^T$，$\alpha_3=(3,2,-1,\ p+2)^T$，$\alpha_4=(-2,-6,10,p)^T$

（1）p 为何值时，该向量组线性无关？并在此时将向量 $\alpha=(4,1,6,10)^T$ 用 α_1，α_2，α_3，α_4 线性表出；

（2）p 为何值时，该向量组线性相关？并此时求出它的秩和一个极大线性无关组.

1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试卷

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$____________.

（2）曲线 $y=-x^3+x^2+2x$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $A=$____________.

（3）$\int\dfrac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx=$____________.

（4）设 $f(x)$ 连续，则 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=$____________.

（5）曲线 $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)(x>0)$ 的渐进线方程为____________.

二、选择题

1.设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n y_n=0$，则下列断言正确的是（　）

（A）若 x_n 发散，则 y_n 必发散

（B）若 x_n 无界，则 y_n 必有界

（C）若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小

（D）若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小

(2)函数 $f(x)=(x^2-x-2)\left|x^3-x\right|$ 的不可导点的个数是（　）

(A)0　(B)1　(C)2　(D)3

(3)已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha,$ 其中 a 是比 $\Delta x(\Delta x\to 0)$ 高阶无穷小,且 $y(0)=\pi$,则 $y(1)=$（　）

(A) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$　(B) 2π　(C) π　(D) $e^{\frac{\pi}{4}}$

4.设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内连续，且 $f(a)$ 为其极大值，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时，必有（　）

（A）$(x-a)[f(x)-f(a)]\ge 0$　（B）$(x-a)[f(x)-f(a)]\le 0$

（C）$\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\ge 0(x\ne a)$　（D）$\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\le 0(x\ne a)$

5.设 A 是任一 $n(n\ge 3)$ 阶方程，A^* 是其伴随矩阵，又 k 为常数，且 $k\ne 0,\pm 1,$ 则必有 $(kA)^*=$（　）

（A）kA^*　（B）$k^{n-1}A^*$　（C）k^nA^*　（D）$k^{-1}A^*$

三、（本题满分 5 分）

求函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点，并判断其类型。

四、（本题满分 5 分）

确定常数a,b,c的值，使$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c(c\neq 0).$

五、（本题满分 5 分）

利用代换$y=\dfrac{u}{\cos x}$将方程$y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=e^x$化简，并求出原方程的通解.

六、（本题满分 6 分）

计算积分$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\dfrac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}.$

七、（本题满分 6 分）

从船上向海中沉放某种探测仪器，按探测要求，需确定仪器的下沉深度y（从海平面算起）与下沉速度v之间的函数关系。设仪器在重力作用下，从海平面由静止开始铅直下沉，在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用.设仪器的质量为m，体积为B，海水比重为ρ，仪器所受的阻力与下沉速度成正比，比例系数为k（$k>0$）.试建立y与v所满足的微分方程，并求出函数关系式$y=f(v)$.

八、（本题满分 8 分）

设$y=f(x)$是区间$[0,1]$上的任一非负连续函数。

（1）试证存在$x_0\in(0,1)$，使得在区间$[0,x_0]$上以$f(x_0)$为高的矩形面积，等于在$[x_0,1]$上以$y=f(x)$为曲边的梯形面积。

（2）又设$f(x)$在区间$(0,1)$内可导，且$f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$，证明（1）中的x_0是唯一的。

九、（本题满分 8 分）

设有曲线$y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求由此曲线、切线及x轴围成的平面图形绕x轴旋转一周所得到的旋转体的表面积。

十、（本题满分 8 分）

设 $y=y(x)$ 是一向上凸的连续曲线，其上任意一点 $(x，y)$ 处的曲率为 $\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$，且此曲线上点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$，求该曲线的方程，并求函数 $y=y(x)$ 的极值。

十一、（本题满分 6 分）

设 $x\in(0,1)$，证明：

（1）$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$;

（2）$\dfrac{1}{\ln 2}-1<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}.$

十二、（本题满分 5 分）

设 $\left(2E-C^{-1}B\right)A^T=C^{-1}$，其中 E 是 4 阶单位矩阵，A^T 是 4 阶矩阵 A 的转置矩阵，

$$B=\begin{bmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$ 求 A。

十三、（本题满分 8 分）

已知 $\alpha_1=(1,4,0,2)^T$，$\alpha_2=(2,7,1,3)^T,\alpha_3(0,1,-1,a)^T,\beta=(3,10,\mathrm{b},4)^T$, 问：

（1）a,b 取何值时，β 不能由 α_1，α_2，α_3 线性表示？

（2）a,b 取何值时，β 可由 α_1，α_2，α_3 线性表示？并写出表达式.