2018 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题及答案解析

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

（1） 若 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+ax^2+bx)^{\frac{1}{x^2}}=1$,则（　）

(A) $a=\frac{1}{2}$，$b=-1$　　(B) $a=-\frac{1}{2},b=-1$　　(C) $a=\frac{1}{2},b=1$　　(D) $a=-\frac{1}{2},b=1$

【答案】（B）

【解析】

$$原式=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+ax^2+bx-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+2ax+b}{2x}}$$

因为分母的极限是为0，要使此极限等于常数1，则分子的极限比为0，则$b=-1$

则原式$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1+2ax}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+2a}{2}}=1$

所以$a=-\frac{1}{2}$.

（2）下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是（　）

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$　　(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$

(C) $f(x)=\cos|x|$　　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$

【答案】（D）

【解析】根据导数的定义：

（A）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|\sin|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|\cdot|x|}{x}=0$, 可导；

（B）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|\sin\sqrt{|x|}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|\cdot\sqrt{|x|}}{x}=0$, 可导；

（C）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos|x|-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}|x|^2}{x}=0$, 可导；

（D）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\sqrt{|x|}^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}|x|}{x}$, 极限不存在，

故选 D。

（3） 设函数$f(x)=\begin{cases}-1,x<0\\ 1,x\geq 0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}2-ax,x\leq -1\\ x,-1<x<0\\ x-b,x\geq 0\end{cases}$,若$f(x)+g(x)$在$R$上连续，则（　）

(A) $a=3,b=1$　　(B) $a=3,b=2$

(C) $a=-3,b=1$　　(D) $a=-3,b=2$

【答案】（D）

$$令F(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}-1+2-ax & x\le -1\\ -1+x & -1<x<0\\ x-b+1 & x\ge 0\end{cases}$$

$F(-1)=1+a \qquad F(0)=1-b$

【解析】$\lim\limits_{x\to -1^+}F(x)=-2 \qquad \lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=-1$

因为函数连续，故极限值等于函数值

1+a=−2　　a=−3

1−b=−1　　b=2

（4）设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$\int_0^1 f(x)dx=0$,则（　）

(A) 当$f'(x)<0$时, $f(\frac{1}{2})<0$　　(B) 当$f''(x)<0$时, $f(\frac{1}{2})<0$

(C) 当$f'(x)>0$时, $f(\frac{1}{2})<0$　　(D) 当$f''(x)>0$时, $f(\frac{1}{2})<0$

【答案】（D）

【解析】$f(x)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{1}{2})^2,\xi$介于$\frac{1}{2}$，$x$之间，故

$0=\int_0^1 f(x)dx=f(\frac{1}{2})+\int_0^1 f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})dx+\int_0^1\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{1}{2})^2dx=f(\frac{1}{2})+\int_0^1\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{1}{2})^2dx$

由于$f''(x)>0\Rightarrow\int_0^1\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\frac{1}{2})^2dx>0$,所以，$f(\frac{1}{2})<0$.应选$D$.

（5）设$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx,N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx,K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)dx$,则（　）

(A) $M>N>K$　　(B) $M>K>N$

(C) $K>M>N$　　(D) $K>N>M$

【答案】(C)

【解析】$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x^2+2x}{1+x^2}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\frac{2x}{1+x^2})dx=\pi.$

$1+x<e^x(x\ne 0)\Rightarrow\frac{1+x}{e^2}<1\Rightarrow N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx=\pi<M$

$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx>\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx=\pi=M$

故$K>M>N$,应选 C。

（6）$\int_{-1}^0 dx\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)dy+\int_0^1 dx\int_x^{2-x^2}(1-xy)dy=$（　）

(A) $\frac{5}{3}$　　(B) $\frac{5}{6}$　　(C) $\frac{7}{3}$　　(D) $\frac{7}{6}$

【答案】（C）

【解析】因为积分区域关于 y 轴对称，考虑被积函数中 xy 是关于 x 的奇函数，1 是关于 x 的偶函数，利用二重积分的奇偶性化简得：

原积分 $=\iint\limits_D (1-xy)\,dxdy=\iint\limits_D 1dxdy=2\left[\int_0^1 dx\int_x^{2-x^2} dx\right]=\frac{7}{3}.$

（7）下列矩阵中与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为（　）

(A) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

【答案】（A）

【解析】令 $J=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则特征值 $|\lambda E-J|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-1&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3=0$，

则特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1.$

当 $\lambda=1$ 时，$E-J=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，可知 $r(E-J)=2.$

A 选项，令 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&1\\0&\lambda-1&-1\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3=0$ 解得 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1.$

此时当 $\lambda=1$ 时，$E-A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，可知 $e(E-A)=2.$

B 选项，令 $B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则同理显然可知矩阵 B 所有的特征值为 $1,1,1.$ 当 $\lambda=1$ 时，$r(E-B)=1.$

C选项，令 $C=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则同理显然可知矩阵 C 所有的特征值为 $1,1,1.$ 当 $\lambda=1$ 时，$r(E-C)=1.$

D 选项，令 $D=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则同理显然可知矩阵 D 所有的特征值为 $1,1,1.$ 当 $\lambda=1$ 时，$r(E-D)=1.$

由于矩阵相似，则相关矩阵$E-A$与$E-J$也相似，则r(E-A)=r(E-J).

可知答案选 A。

（8）设A,B为n阶矩阵，记$r\left(X\right)$为矩阵X的秩，$\left(X,Y\right)$表示分块矩阵，则（　　）

(A) $r\left(A,AB\right)=r\left(A\right)$　　　　(B) $r\left(A,BA\right)=r\left(A\right)$

(C) $r\left(A,B\right)=\max\left\{r\left(A\right),r\left(B\right)\right\}$　　　　(D) $r\left(A,B\right)=r\left(A^TB^T\right)$

【答案】(A)

【解析】设$C=AB$，则可知C的列向量可以由A的列向量线性表示，则$r(A,C)=r(A,AB)=r(A)$.

二、填空题：9~14 题，每小题 4 分，共 24 分.

（9）$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$________

【答案】1

【解析】$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[\arctan\left(x+1\right)-\arctan x\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan\left(x+1\right)-\arctan x}{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\left(1+x\right)^2}-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+\left(1+x\right)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[1+\left(1+x\right)^2-\left(1+x^2\right)\right]x^3}{\left(1+x^2\right)\left[1+\left(1+x\right)^2\right]}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^4}{\left(1+x^2\right)\left[1+\left(1+x\right)^2\right]}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+2}{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\left[\frac{1}{x^2}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\right]}$$

$$=\frac{1}{2}\times2$$

$$=1$$

（10）曲线$y=x^2+2\ln x$在其拐点处的切线方程是________

【答案】$y=4x-3$

【解析】$y'=2x-\frac{2}{x}$

$y''=2-\frac{2}{x^2}=0 \Rightarrow x^2=1, x=1, (x=-1舍)$

拐点$(1,1)$

$y'(1)=2+2=4$

切线方程：$y-1=4(x-1)$,即$y=4x-3$

（11）$\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}dx=$______

【答案】$\frac{1}{2}\ln 2$

【解析】$\int_5^{+\infty}\frac{1}{x^2-4x+3}dx=\int_5^{+\infty}\frac{1}{(x-1)(x-3)}dx=(-\frac{1}{2})\int_5^{+\infty}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-3})dx$

$=(-\frac{1}{2})\bullet\left[\ln(x-1)-\ln(x-3)\right]\Big|_5^{+\infty}==(-\frac{1}{2})(\ln\frac{x-1}{x-3})\Big|_5^{+\infty}$

$=(-\frac{1}{2})(0-\ln\frac{4}{2})=\frac{1}{2}\ln 2$

（12）曲线$\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$,在$t=\frac{\pi}{4}$对应点处的曲率为______

【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=3\sin^2 t\cdot\cos t\frac{1}{3\cos^2 t(-\sin t)}=\frac{\sin t}{\cos t}=-\tan t$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}}=-\sec^2 t\cdot\cos t\frac{1}{3\cos^2 t\cdot(-\sin t)}=\frac{\sec^2 t}{3\cos^2 t\cdot\sin t}=\frac{1}{3\cos^4 t\sin t}$$

$$t=\frac{\pi}{4}时,\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1,\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{3\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{3\times\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{8}{3\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{6}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$K=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{(1+(1-)^2)^{3/2}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{3}$$

（13）设函数$z=(x,y)$由方程$\ln z+e^{z-1}=xy$确定,则$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(2,\frac{1}{2})}=$______

【答案】$\frac{1}{4}$

【解析】将$x=2, y=\frac{1}{2}$代入$\ln z+e^{z-1}=xy$,得到$z=1$

两边对求x偏导，得到

$$\frac{1}{z}\bullet\frac{\partial z}{\partial x}+e^{z-1}\bullet\frac{\partial z}{\partial x}=y$$

整理得到$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\frac{1}{2})}=\dfrac{1}{4}$

（14）设A为3阶矩阵,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性无关的向量组,若$A\alpha_1=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, A\alpha_2=\alpha_2+2\alpha_3, A\alpha_3=-\alpha_2+\alpha_3$,.
则 A 的实特征值为__________.

【解析】由$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$，令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$可知矩阵$P$可逆，令系数矩阵

$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$，可知矩阵$A$和$B$相似，则它们有相同的特征值.

由$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\-1&\lambda-1&1\\-1&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+3)=0$, 解得实特征值为$\lambda=2$.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

求不定积分$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$.

【解析】原式$=\int\arctan\sqrt{e^x-1}d\left(\dfrac{1}{2}e^{2x}\right)=\dfrac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\dfrac{1}{4}\int\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$

再用整体代换去根号：

$$\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx\underline{\underline{t=\sqrt{e^x-1}}}\int\frac{(t^2+1)^2}{t}\frac{2t}{(t^2+1)}dt=\frac{2}{3}t^3+2t+C=\frac{2}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{e^x-1}+C$$

即原式$=\dfrac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\dfrac{1}{6}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{2}\sqrt{e^x-1}+C$

（16）（本题满分 10 分）

已知连续函数$f(x)$满足$\int_0^x f(t)dt+\int_0^x tf(x-t)dt=ax^2$

（Ⅰ）求$f(x)$;

（Ⅱ）若$f(x)$在区间$[0,1]$上的平均值为1,求a的值.

【解析】（Ⅰ）原式转化为$\int_0^x f(x)dx+x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du=ax^2$.

等式两边关于x求导得：$f(x)=2ax-\int_0^x f(u)du$.且$f(0)=0$

等式两边再关于x求导得：$f'(x)=2a-f(x)$.

解微分方程得：$f(x)=2a-2ae^{-x}$.

（Ⅱ）根据平均值的定义可知：$\dfrac{\int_0^1 f(x)dx}{1-0}=1$,将$f(x)=2a-2ae^{-x}$,代入上式得：$a=\dfrac{e}{2}$.

（17）（本题满分 10 分）

设平面区域D由曲线$\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t \end{cases}(0\le t\le 2\pi)$与$x$轴围成,计算二重积分$\iint\limits_D (x+2y)d\sigma.$

【解析】先用形心公式化简，再用先y后x化二重积分为累次积分，最后用题上给出的变量替换计算定积分：

$$\iint\limits_d (x+2y)dxdy=\bar{x}S(D)+2\iint\limits_D ydxdy=\pi\int_0^{2\pi}ydx+2\int_0^{2\pi}dx\int_0^{y(x)}ydy$$

$$=\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt+2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}y^2(x)dx=\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt+\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt$$

$$=3\pi^2+16\int_0^{\pi}\sin^6 udu=3\pi^2+32\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=3\pi^2+5\pi$$

（18）（本题满分 10 分）

已知常数$k\ge \ln 2-1$. 证明：$(x-1)(x-\ln^2 x+2k\ln x-1)\ge 0$.

【解析】设$F(x)=x-\ln^2 x+2k\ln x-1, x>0$则

$F'(x)=1-\dfrac{2\ln x}{x}+\dfrac{2k}{x}=\dfrac{x-2\ln x+2k}{x}$

令$G(x)=x-2\ln x+2k$,则$G'(x)=1-\dfrac{2}{x}$,

当$0<x<x$时，$G'(x)<0$, 又$G(2)$=0，

所以$G(x)>0\Rightarrow F'(x)>0\Rightarrow G(x)$单调递增

当$x>2$时，$G'(x)>0$, 又$G(2)$=0，

所以$G(x)>0\Rightarrow F'(x)>0\Rightarrow G(x)$单调递增

综上所述：$F(x)$在$x>0$时单调递增，又因为F(1)=0，所以

$0<x<1$时，$F(x)<0$; $x>1$时，$F(x)>0$

即$(x-1)F(x)\ge 0$,原不等式得证.

（19）（本题满分 10 分）

将长为$2m$的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形. 三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值.

【解析】设圆的半径为x，正方形的边长为y，正三角形的边长为z，则$2\pi x+4y+3z=2$,其面积和

$S(x,y,z)=\pi x^2+y^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}z^3$,即是求$S(x,y,z)=\pi x^2+y^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}z^3$在约束条件$2\pi+4y+3z=2$下的最小值是否存在.

设$L(x,y,z,\lambda)=\pi x^2+y^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}z^2+\lambda(2\pi x+4y+3z-2)$,

$\begin{cases} L'_x=2\pi x+2\pi\lambda=0 \\ L'_y=2y+4\lambda=0 \\ L'_z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}z+3\lambda=0 \\ L'_x=2\pi x+4y+3z-2=0 \end{cases}$,解得$\begin{cases} x=\dfrac{1}{x+4+3\sqrt{3}} \\ y=\dfrac{2}{\pi+4+3\sqrt{3}} \\ z=\dfrac{2\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}} \end{cases}$(唯一驻点).由实际问题可知，最小值一定存在，

且在（$\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}},\frac{2}{\pi+4+3\sqrt{3}},\frac{2\sqrt{3}}{\pi+4+3\sqrt{3}}$）取得最小值，且最小值为$\frac{1}{\pi+4+3\sqrt{3}}$.

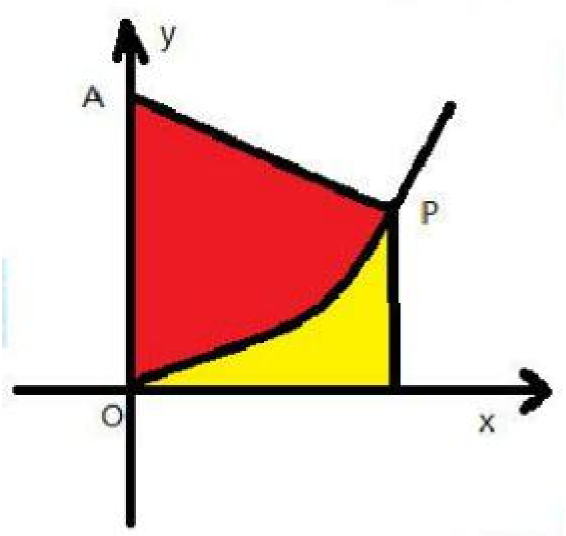
（20）（本题满分 11 分）

已知曲线$L: y=\frac{4}{9}x^2(x\ge 0)$,点$O(0,0)$,点$A(0,1)$.设$P$是$L$上的动点，$S$是直线$OA$与直线$AP$及曲线$L$所围成图形的面积，若$P$运动到点$(3,4)$时沿$x$轴正向的速度是4，求此时$S$关于时间$t$的变化率.

【解析】所求面积为梯形减去曲边三角形的面积，令$P\left(x,\frac{4}{9}x^2\right)$，则该面积为

$$S=\frac{1}{2}x\left(\frac{4}{9}x^2+1\right)+\int_0^x\frac{4}{9}t^2dt=\frac{2}{27}x^3+\frac{1}{2}x$$

$$而\left.\frac{dS}{dt}\right|_{x=3}=\left.\frac{dS}{dx}\frac{dx}{dt}\right|_{x=3}=4\left.\left(\frac{2}{9}x^2+\frac{1}{2}\right)\right|_{x=3}=10$$



（21）（本题满分 11 分）

设数列$\{x_n\}$满足：$x_1>0,x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$, 证明$\{x_n\}$收敛，并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解析】$x_1>0$,假设$x_k 0$,

由$x>0,e^x-1>x>0$可知$x_{k+1}=1n\frac{e^{x_k}-1}{x_k}>1n1=0.$

故数列$\{x_n\}$有下界.

$x_{n+1}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n e^{x_n}}$

令$f(x)=xe^x-(e^x-1)$,则$f'(x)=xe^x>0$,故$f(x)$单调增加.

当$x>0$时，$f(x)>f(0)=0$,故$0<\frac{e^x-1}{xe^x}<1$,所以$x_{n+1}-x_n<0$

数列$\{x_n\}$单调减少

所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设为$A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n e^{x_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{x_n}-1\right)$

$Ae^A=e^A-1$,解得$A=0$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

（22）（本题满分 11 分）

设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$, 其中$a$是参数

(I) 求$f(x_1,x_2,x_3)=0$的解；

(II) 求$f(x_1,x_2,x_3)$的规范形.

由$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2=0$, 则应有

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\ x_2+x_3=0\\ x_1+ax_3=0\end{cases}.\text{令}A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix},x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

即$Ax=0$.

【解析】(I) 由$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&0&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\0&1&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix}$.

可知当$a=2$时，方程组有非零解$x=k\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$,其中$k$为任意常数

当$a\neq 2$时，方程组只有零解.

当$a\neq 2$时，此时显然可知二次型正定，则此时对应的规范形为：

$f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

当$a=2$时，

(II) 方法一：（正交变换法）令二次型对应的实对称矩阵为$B=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-1&2&0\\3&0&6\end{pmatrix}$，则由

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-3\\1&\lambda-2&0\\-3&0&\lambda-6\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-10\lambda+18)=0,$$

解得$\lambda_1=5+\sqrt{7}$，$\lambda_2=5-\sqrt{7}$，$\lambda_3=0$.

则可知规范形为：$f(z_1,z_2,z_3)=z_1^2+z_2^2$.

方法二：(配方法) 由于

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(x_1^2-x_1x_2+3x_1x_3)^2+2x_2^2+6x_3^2=2(x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3)^2+\frac{3}{2}(x_2+x_3)^2.$$

令 $\begin{cases} z_1=\sqrt{2}(x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{3}{2}x_3) \\ z_2=\sqrt{\frac{3}{2}}(x_2+x_3) \\ z_3=x_3 \end{cases}$，得规范形为 $f(z_1,z_2,z_3)=z_1^2+z_2^2.$

(23)（本题满分 11 分）

已知a是常数，且矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$可经初等列变换化为矩阵$B=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

(I) 求a;

(II) 求满足$AP=B$的可逆矩阵P.

【解析】(I) 由于$|A|=\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{vmatrix}=0$,则可知$|B|=\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=1-a+2-1=0, a=2.$

$$由(A\vdots B)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\0&1&-2&0&1&1\\0&3&-6&0&3&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\0&1&-2&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

(II) 解得$p_1=k_1\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}, p_2=k_2\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}, p_3=k_3\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}.$

故解得可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}3-6k_1&4-6k_2&4-6k_3\\-1+2k_1&-1+2k_2&-1+2k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}$, 其中$k_2\neq k_3$.