2020 全国硕士研究生招生考试
数学模拟测试三（数学二）

本试卷满分 150，考试时间 180 分钟

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在**答题纸**指定位置上.

（1） 已知 $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right)$ 存在，[ ]为取整函数，则有（　　）

（A）$a=2$，$I=2$　　（B）$a=-2$，$I=2$

（C）$a=2$，$I=-2$　　（D）$a=-2$，$I=-2$

（2） $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2 x\cdot\cos^8 x-\cos^2 x\cdot\sin^8 x+\sin^7 x}{2}dx=$（　　）

（A）$\dfrac{16\pi}{35}$　（B）$\dfrac{16}{35}$　（C）$\dfrac{8}{35}$　（D）$\dfrac{8\pi}{35}$

（3） 若 $I_1=\int_0^1\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$，$I_2=\int_0^1\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$，$I_3=\dfrac{\pi}{2}\int_0^1\cos\dfrac{\pi}{2}xdx$，则（　　）

（A）$I_1>I_2>I_3$　　（B）$I_1>I_3>I_2$

（C）$I_2>I_1>I_3$　　（D）$I_2>I_3>I_1$

（4） 设函数 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 是非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个不同特解，则该方程的通解为（　　）

（A）$y=C_1y_1+C_2y_2$（C_1，C_2 为任意常数）

（B）$y=y_1+Cy_2$（C 为任意常数）

（C）$y=y_1+C(y_1+y_2)$（C 为任意常数）

（D）$y=y_1+C(y_2-y_1)$（C 为任意常数）

（5）设函数 $f(x)=\sqrt{x-1}$，$x\geq 1$，由微分中值定理有：$f(5)-f(1)=4f'(\xi)$，则 ξ 的取值为（　　）

（A）5　　（B）4　　（C）5和4　　（D）2

（6）设函数 $f\left(x\right)$ 具有连续的导数，则（　　）

（A）若 $f\left(x\right)$ 是偶函数，则对任意实数 a，$\int_a^x f\left(t\right)dt$ 必为奇函数

（B）若 $f\left(x\right)$ 是周期函数，则 $\int_0^x f\left(t\right)dt$ 必为周期函数

（C）若 $f'\left(x\right)$ 是奇函数，则 $\int_0^x f\left(t\right)dt$ 必为奇函数

（D）若 $f'\left(x\right)$ 是偶函数，则 $\int_0^x f\left(t\right)dt$ 必为偶函数

（7）设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 等于（　　）

（A）$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　　（B）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_2$　　（C）$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$　　（D）$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1$

（8）设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，则（　　）

（A）$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$

（B）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值和特征向量

（C）$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都相似于一个对角矩阵

（D）对任意常数 t，$t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 相似

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）函数 $y=x+2\cos x$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最大值为__________。

（10）$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}=$______________.

（11）设$\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=\cos t,\end{cases}$则$\frac{d^2y}{dx^2}=$______________.

（12）微分方程$y''-y'-2y=(2x+1)e^x$的通解为______________.

（13）曲线$y=x^2+x(x<0)$上曲率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的点的坐标是__________.

（14）设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&0&0\\1&3&0&0\\0&0&2&-2\\0&0&-2&2\end{bmatrix}$，则$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A}-2E)+r(\boldsymbol{A}-4E)=$____________.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^2-(1+x)^{\frac{2}{x}}}{x}$。

（16）（本题满分 10 分）证明当$x>0$时，不等式$\ln(1+x)>\frac{\arctan x}{1+x}$成立。

（17）（本题满分 10 分）设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $xy+yz+zx=1$ 确定的隐函数，求 $2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

（18）（本题满分 10 分）设物体 A 从点 $(0,1)$ 出发，以速度大小为常数 v 沿着 y 轴正向运动，物体 B 从点 $(-1,0)$ 与 A 同时出发，其速度大小为 $2v$，方向始终指向 A.试建立物体 B 的运动轨迹所满足的微分方程，并写出初始条件。

（19）（本题满分 10 分）设函数 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=x+\iint\limits_D yf(u,v)dudv$，其中 D 由 $y=\frac{1}{x},x=1,y=2$ 围成，求 $f(x,y)$。

（20）（本题满分 11 分）顶角为60°，底面半径为a的正圆锥形漏斗内盛满水，下接半径为$b(b<a)$的圆柱形水桶（假设水桶的体积大于漏斗的体积），水由漏斗注入水桶，问当漏斗水平面下降速度与水桶水平面上升速度相等时，漏斗中水平面高度是多少？

（21）（本题满分 11 分）设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，在开区间$(0,1)$内大于零，并且满足$xf'(x)=f(x)+\dfrac{3a}{2}x^2$（$a$为常数），又曲线$y=f(x)$与$x=1,y=0$所围的图形$S$的面积值为$2$，求函数$f(x)$，并问$a$为何值时，图形$S$绕$x$轴旋转一周所得的旋转体的体积最小.

（22）（本题满分 11 分）已知$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,a+2,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4,a+8)$及$\boldsymbol{\beta}=(1,1,b+3,5)$.

（Ⅰ）a,b为何值时，$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表出？

（Ⅱ）a,b为何值时，$\boldsymbol{\beta}$有$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的唯一线性表达式？并写出该表达式.

（23）（本题满分 11 分）设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&a&-2\\0&-2&b\end{bmatrix}\sim\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&6\end{bmatrix}$，$a>b$，求$a$、$b$及正交矩阵$\boldsymbol{P}$，使得$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$。