2016 年考研数二真题及答案解析

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的

（1）设$a_1 = x(\cos\sqrt{x}-1), a_2 = \sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x}), a_3 = \sqrt[3]{x+1}-1$，则（ ）.

A. a_1, a_2, a_3

B. a_2, a_3, a_1

C. a_2, a_1, a_3

D. a_3, a_2, a_1

【答案】B

【解析】

当$x \to 0^+$时，$a_1 = x\cos\sqrt{x}-1 \square x(-\frac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}x^2$

$a_2 = \sqrt{x}\square n(1+\sqrt[3]{x}) \square x^{\frac{1}{2}}\square x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}}$

$a_3 = \sqrt[3]{x+1}-1 \square \frac{1}{3}x$

所以，从低到高的顺序为 a_2, a_3, a_1,选 B.

（2）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), x<1\\ \ln x, x\geq 1\end{cases}$，则 $f(x)$ 的一个原函数是（　）.

A. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x<1\\ x(\ln x-1), x\geq 1\end{cases}$

B. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x<1\\ x(\ln x+1)-1, x\geq 1\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x<1\\ x(\ln x+1)+1, x\geq 1\end{cases}$

D. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x<1\\ x(\ln x-1)+1, x\geq 1\end{cases}$

【答案】D

【解析】对函数 $f(x)$ 做不定积分可得原函数，$\int \ln x dx = x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C$，因此选择 D.

（3）反常函数① $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$，② $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ 的敛散性为（　）.

A. ①收敛，②收敛

B. ①收敛，②发散

C. ①发散，②收敛

D. ①发散，②发散

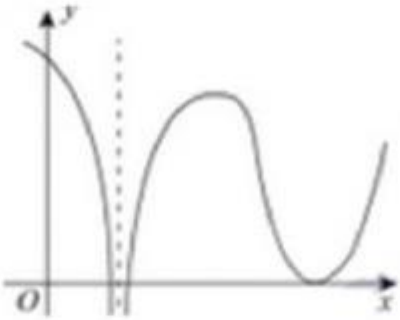
【答案】B

【解析】① $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{1}{x}}d\frac{1}{x}=-[\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}-\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}]=-(0-1)=1$ 收敛。

② $\int_{0}^{\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int_{0}^{+\infty}e^{\frac{1}{x}}d\frac{1}{x}=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_0^{+\infty}=-[\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}-\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}]=+\infty$ 发散。

所以，选 B.

（4）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则（　）.



A. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

B. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点

C. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点

D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

【答案】B

【解析】根据图像可知导数为零的点有 3 个，但是最右边的点左右两侧导数均为正值，因此不是极值点，故有 2 个极值点，而拐点是一阶导数的极值点或者是不可导点，在这个图像上，一阶导数的极值点有 2 个，不可导点有 1 个，因此有 3 个拐点.

（5）设函数 $f_i(x)(i=1,2)$ 具有二级连续导数，且 $f_i''(x_0)<0(i=1,2)$，若两条求曲线 $y=f_i(x)(i=1,2)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有公切线 $y=g(x)$，且在该点曲线 $y=f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y=f_2(x)$，则在 x_0 的某个邻域内，有（　）.

A. $f_1(x)\le f_2(x)\le g(x)$

B. $f_2(x)\le f_1(x)\le g(x)$

C. $f_1(x)\le g(x)\le f_2(x)$

D. $f_2(x)\le g(x)\le f_1(x)$

【答案】A

【解析】因 y=$f_1(x)$与 y=$f_2(x)$在(x_0,y_0)有公切线，则 $f_1(x_0)=f_2(x_0)$, $f_1'(x_0)=f_2'(x_0)$

又 y=$f_1(x)$与 y=$f_2(x)$ 在(x_0,y_0)处的曲率关系为 $k_1>k_2$.

因$k_1=\dfrac{|f''_1(x_0)|}{[1+f_1'^2(x_0)]^{\frac{3}{2}}},k_2=\dfrac{|f''_2(x_0)|}{[1+f_1'^2(x_0)]^{\frac{3}{2}}}$

又$f_1''(x_0)<0,f_2''(x_0)<0,$则$f_1''(x_0)<f_2''(x_0)<0.$

从而在 x_0 的某个领域内 $f_1(x)$与 $f_2(x)$均为凸函数，故 $f_1(x)\leqslant g(x)$, $f_2(x)\leqslant g(x)$,排除 C,D.

令 $F(x)=f_1(x)-f_2(x)$,则 $F(x_0)=0$，$F'(x_0)=0$, $F''(x_0)<0$.

由极值的第二充分条件得 $x=x_0$ 为极大值点。

则 $F(x)\leqslant F(x_0)=0$，即 $f_1(x)\leqslant f_2(x)$,

综上所述，应选 A.

（6）已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$，则（ ）.

A. $f_x'-f_y'=0$

B. $f_x'+f_y'=0$

C. $f_x'-f_y'=f$

D. $f_x'+f_y'=f$

【答案】D

【解析】

$$f_x'=\frac{e^x(x-y)-e^x}{(x-y)^2},f_y'=\frac{0+e^x}{(x-y)^2}=\frac{e^x}{(x-y)^2}$$

$$\therefore f_x'+f_y'=\frac{e^x(x-y)-e^x+e^x}{(x-y)^2}=\frac{e^x}{x-y}=f$$

选 D.

（7）设 A,B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是（ ）.

A. A^T 与 B^T 相似

B. A^{-1} 与 B^{-1} 相似

C. $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似

D. $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似

【答案】C

【解析】

因为 A 与 B 相似，因此存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，于是有：

$(P^{-1}AP)^T=P^TA^T(P^{-1})^T=P^TA^T(P^T)^{-1}=B^T$，即 $A^T\sim B^T$，

$(P^{-1}AP)^{-1}=P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1}=P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}$，因此 $A^{-1}\sim B^{-1}$，

$P^{-1}(A+A^{-1})P=P^{-1}AP+P^{-1}A^{-1}P=B+B^{-1}$，因此 $A+A^{-1}\sim B+B^{-1}$，

而 C 选项中，$P^{-1}A^TP$ 不一定等于 B^T，故 C 不正确，选择 C.

（8）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1,2，则（ ）.

A. $a>1$

B. $a<-2$

C. $-2<a<1$

D. $a=1$ 或 $a=-2$

【答案】C

【解析】

二次型矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-a & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-a \end{vmatrix}=(\lambda-a-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-a & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-a \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-a+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}=(\lambda-a-1)(\lambda-a+1)^2=0$$

$\therefore A$ 的特征值为 $\lambda_1=a+2,\ \lambda_2=\lambda_3=a-1$

$\because$ 二次型的正、负惯性指数分别为 1，2，则 $\begin{cases} a+2>0 \\ a-1<0 \end{cases}$

所以，-2<a<1,所以，选 C.

二、填空题 9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将所选项前的字母填写在答题纸制定位置上

（9）曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为________________.

【答案】 $y=x+\dfrac{\pi}{2}$

【解析】

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}[\frac{x^3}{x(1+x^2)}+\frac{\arctan(1+x^2)}{x}]=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}[\frac{x^2}{1+x^2}-x+\arctan(1+x^2)]=\frac{\pi}{2},$$

所以，斜渐近线方程为 $y=x+\dfrac{\pi}{2}$.

（10） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n})=$ ________________.

【答案】 $\sin 1-\cos 1$

【解析】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n})$$

$$=\int_0^1 x\sin x dx=\sin 1-\cos 1.$$

（11）以 $y=x^2-e^x$ 和 $y=x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为______________.

【答案】 $y'-y=2x-x^2$

【解析】x^2-(x^2-e^x)为对应齐次方程组的解，即 e^x是 y'-y=0 的解；

设非齐次方程为 $y'-y=f(x)$，将 $y=x^2$ 代入得 $f(x)=2x-x^2$，

所求方程为 $y'-y=2x-x^2$.

（12）已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)dt$，则当 $n\geq 2$ 时，

$f^{(n)}(0)=$_________.

【答案】 $5\cdot 2^{n-1}$

【解析】

$$f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)dt$$
$$f'(x)=2(x+1)+2f(x)$$
$$f''(x)=2+2f'(x),f'''(x)=2f''(x)$$
$$f^{(n)}(x)=2^{n-2}f''(x)(n\geq 2)$$
$$f(0)=1,f'(0)=2+2=4,f''(0)=10.$$
$$f^{(n)}(0)=2^{n-1}g10=5g2^{n-1}$$

（13）已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动，记坐标原点与点 P 间的距离为 l.若点 P 的横坐标对时间的变化率为常数 V_0，则当点 P 运动到点 $(1,1)$ 时，l 对时间的变化率是______________.

【答案】$2\sqrt{2}V_0$

【解析】

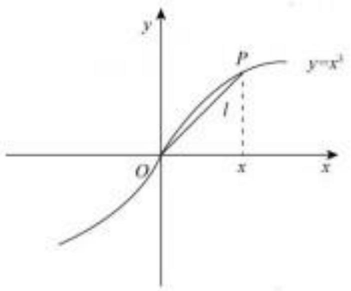
设 P 的坐标为 (x,x^3)，则由题意

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0$$

$$L=\sqrt{(x^3)^2+x^2}=\sqrt{x^6+x^2}$$

则 L 对 t 的变化率

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{6x^5+2x}{2\sqrt{x^6+x^2}}\cdot v_0$$



$$\frac{dl}{dt}\Big|_{x=1}=\frac{8}{2\sqrt{2}}\cdot v_0=2\sqrt{2}v_0$$

（14）设矩阵 $\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价，则 $a=$______________.

【答案】2

【解析】

$$\because A=\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix} 与 B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} 等价$$

$$\therefore r(A)=r(B)$$

$$\because B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore r(B)$$

$$\therefore |A|=0, 即 \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix}=0，得 a=2 或 a=-1$$

当 $a=-1$ 时，$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，此时 $r(A)=1$ 不合题意

$$\therefore a=2$$

三、解答题，15~23 小题，共 94 分，请将所选项前的字母填写在答题纸制定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos 2x+2x\sin x)^{x^{\frac{1}{4}}}$.

【答案】$e^{\frac{1}{3}}$

【解析】

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$$

$$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}}$$

$$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{1-\frac{4x^2}{2}+\frac{2^4x^4}{4!}+2x\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)-1+o(x^4)}{x^4}}$$

$$=e^{\frac{1}{3}}$$

（16）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|dt(x>0)$，求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

【答案】$f'(x)=4x^2-2x$

$f(\frac{1}{2})$ 为最小值，最小值为 $\frac{1}{4}$

【解析】

$f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|dt(x>0)$

当 0<x<1 时，

$$f_1x_1=\int_0^x|t^2-x^2|dt=\int_0^x(x^2-t^2)dt+\int_x^1(t^2-x^2)dt$$
$$=x^3-\frac{1}{3}x^3+\int_x^1t^2dt-x^2(1-x)$$
$$=\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$$
$$故f'|x|=4x^2-2x$$
$$x\geq 1,\ f(x)=\int_0^1(x^2-t^2)dt=x^2-\frac{1}{3}$$
$$故f'(x)=2x,$$
$$\therefore f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x,0<x<1\\2x,x\geq 1\end{cases}$$

$$0<x<1,令f'(x)=4x^2-2x=0,得x=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=8x-2,f''(\frac{1}{2})=2>0.$$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 为最小值点，最小值为 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$.

当 x≥1 时，令 f'(x)=2x=0,得 x=0(舍)

∴f(x)的最小值为 $\frac{1}{4}$.

（17）（本题满分 10 分）

已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定 $z=z(x,y)$ 的极值.

【答案】极大值为 $z(-1,-1)=1$

【解析】

（1）方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ ①

两边对 x, y 分别求偏导得

$$2xz+(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+2=0 \text{②}$$

$$2yz+(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}+2=0 \text{③}$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}=0,$ 得 $\begin{cases} xz+1=0 \\ yz+1=0 \end{cases}$，解得 z=0（舍）或 y=x.

∴当 x≠0 时，$\begin{cases} z=\frac{1}{-x} \\ y=x \end{cases}$ 代入原式 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 得

$$2x^2\times(-\frac{1}{x})+\ln(-\frac{1}{x})+2(2x+1)=0$$

解得 x=-1,y=-1,z=1,则（-1，-1）为驻点。

（2）②式两边对 x,y 分别求偏导得，

$$2z+2x\frac{\partial z}{\partial x}+2x\frac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(-\frac{1}{z^2})(\frac{\partial z}{\partial x})^2+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0 ④$$

$$2x\frac{\partial z}{\partial y}+2y\frac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{1}{z^2}g\frac{\partial z}{\partial y}g\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0 ⑤$$

③式两边对 y 求偏导得

$$2z+2y\frac{\partial z}{\partial y}++2y\frac{\partial z}{\partial y}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{z^2}(\frac{\partial z}{\partial y})^2+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 ⑥$$

将 x=-1, y=-1, z=1 代入⑤⑥得

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{3}, B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0, C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2}{3}.$$

$$AC-B^2=\frac{4}{9}>0, A<0$$

∴x=-1,y=-1 为极大值点，极大值为 z=1.

（18）（本题满分 10 分）

设 D 是由直线 $y=1, y=x, y=-x$ 围成的有界区域，计算二重积分 $\iint_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy$.

【答案】$1-\frac{\pi}{2}$

【解析】

①积分区域如图：

②D 关于 y 轴对称而 $\frac{xy}{x^2+y^2}$ 与 $\frac{y^2}{x^2+y^2}$ 关于 x 为偶函数.

$$\therefore \iint_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D \frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_{D1} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-0$$

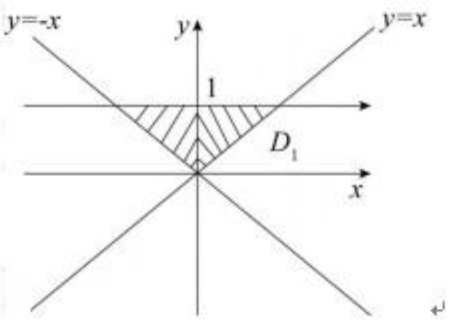
$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}\frac{r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta}{r^2}r\,\mathrm{d}r$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}r(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\,\mathrm{d}r$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{1}{2}r^2\Big|_0^{\frac{1}{\sin\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{1}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 d\theta-\frac{\pi}{4}$$

$$=\cot\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}=1-\frac{\pi}{2}.$$



（19）（本题满分 10 分）

已知函数 $y_1(x)=e^x, y_2(x)=u(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的两个解，若 $u(-1)=e, u(0)=-1$，求 $u(x)$ 并写出微分方程的通解.

【答案】$y(x)=c_1e^x+c_2(2x+1)e^x$，D_1, D_2 为任意实数

【解析】

$y_2'(x)=(u'+u)e^x, y_2''(x)=(u''+2u'+u)ex$, 代入方程得

$(2x-1)u''+(2x-3)u'=0,$

令 $p=u', p'=u''$, 则 $(2x-1)p'+(2x-3)p=0$，

解得 $p=c(2x-1)e^{-x}$，即 $\dfrac{du}{dx}=c(2x-1)e^{-x}$，

解得 $u(x)=-c(2x+1)e^{-x}+c_1$

又 $u(-1)=e$, $u(0)=-1$, 则 $u(x)=-(2x+1)e^{-x}$，

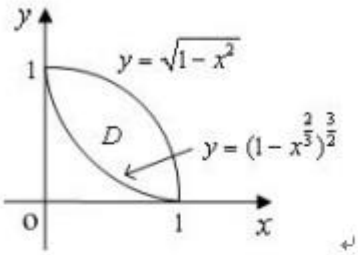
方程的通解为 $y(x)=c_1e^x+c_2(2x+1)e^{-x}$.

（20）（本题满分 11 分）

设 D 是曲线 $y=\sqrt{1-x^2}\,(0\le x\le 1)$ 与 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}(0\le t\le \dfrac{\pi}{2})$ 围成的平面区域，求 D 绕 x 轴转一周所得旋转体的体积和表面积.

【答案】体积为 $V=\dfrac{18\pi}{35}$，表面积为 $S=\dfrac{16\pi}{5}$

【解析】D 的图形如下图所示，D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积可看作两个体积之差，即



$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{\left(-x^2\right)}\right)^2 dx-\pi\int_0^1\left[\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^2 dx=\pi\int_0^1\left(1-x^2\right)dx-\pi\int_0^1\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx$$

$$=\pi\times\frac{2}{3}-\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^6 t\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t)dt=\frac{2}{3}\pi-3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\left(1-\sin^2 t\right)dt$$

$$=\frac{2}{3}\pi-3\pi\times(I_7-I_9)=\frac{2}{3}\pi-3\pi\times\frac{16}{9\times7\times5}$$

$$=\frac{18\pi}{35}$$

表面积 $A=A_1+A_2$，其中

$$A_1=2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+y^2(x)}dx=2\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}\times\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=2\pi,$$

由 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}(0\le t\le\dfrac{\pi}{2})$ 得 $y=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$，$0\le x\le 1$，

$$A_2=2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+y'^2(x)}dx=2\pi\int_0^1\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\times x^{-\frac{1}{3}}dx=-6\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^4 t\cos t dt$$

$$=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t d(\sin t)=6\pi\times\frac{1}{5}\sin^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{6\pi}{5}$$

故 $A=2\pi+\dfrac{6\pi}{5}=\dfrac{16\pi}{5}$

（21）（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{3\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 内是函数 $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数，且 $f(0)=0$

（1）求 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{3\pi}{2}]$ 上的平均值；

（2）证明 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 存在唯一零点.

【答案】（1） $\frac{1}{3\pi}$ （2）证明略.

【解析】

(1) 由题设知 $f(x)=\int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi}dt+c.\because f(0)=0\therefore c=0\Rightarrow f(x)=\int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi}dt$

则函数平均值为 $\frac{\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx}{\frac{3}{2}\pi-0}=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}dx\int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi}dt=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}dt\int_t^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos t}{2t-3\pi}dx$

$$=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos t}{2t-3\pi}\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)dt=-\frac{1}{3\pi}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\cos t dt$$

$$=\frac{-1}{3\pi}\sin t\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi}=\frac{1}{3\pi}$$

（2）$\because f'(x)=\frac{\cos x}{2x-3\pi}$

$\therefore$ $x\in\left(0,\frac{1}{2}\pi\right)$ 时 $f'(x)<0\Rightarrow$ 当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\pi\right)$ 时，f(x) 单调减少

而 $f(0)=0$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内无零点

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$ 时，$f'(x)>0$，则当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$ 时，$f(x)$ 单调增加.

由题意知，显然 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$

而 $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos x}{2x-3\pi}\mathrm{d}x \quad x=\frac{3}{2}\pi-t \quad \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u}{\pi+u}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\pi+t}\right)\sin t\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t>0$$

由零点函理知：$f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$ 内有唯一的零点。

综上知：$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{3}{2}\pi\right)$ 有唯一零点。

（22）（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-a\\ 1 & 0 & a\\ a+1 & 1 & a+1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2a-2\end{pmatrix}$，且方程组 $Ax=\beta$ 无解，

（1）求 a 的值

（2）求方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 的通解.

【答案】（1）$a=0$（2）通解为 $x=k(0,-1,1)^T+(1,-2,0)^T$，其中 k 为任意常数.

【解析】

（1）

增广矩阵为：$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-a & 0\\ 1 & 0 & a & 1\\ a+1 & 1 & a+1 & 2a-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-a & 0\\ 0 & -1 & 2a-1 & 1\\ 0 & -a & a^2+a & 2a-2\end{pmatrix}$

方程组无解，那么系数矩阵的秩与增光矩阵的值不同，因此 $a=0$.

（2）将 $a=0$ 代入可得 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$

因此可得 $A^TA=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix},A^T\beta=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -2\\ -2\end{pmatrix}$

因此可得 $(A^TA,A^T\beta)=\begin{pmatrix}3&2&2&-1\\2&2&2&-2\\2&2&2&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}3&2&2&-1\\2&2&2&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

故可得 $\begin{cases}3x_1+2x_2+2x_3=-1\\2x_1+2x_2+2x_3=-2\end{cases}$，因此可得方程组的一个特解为 $(1,-2,0)^T$，令 $x_3=1$ 得到了

齐次解为：$(0,-1,1)^T$，因此得到了方程组的通解为：

$x=k(0,-1,1)^T+(1,-2,0)^T$，其中 k 为任意常数.

（23）（本题满分 11 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求 A^{99}；

（Ⅱ）设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$.记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别

表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

【答案】（Ⅰ）$A^{99}=\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$

（Ⅱ）$\beta_1=(-2+2^{99})\alpha_1+(-2+2^{100})\alpha_2$;

$\beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2$;

$\beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2$

【解析】

（Ⅰ）利用相似对角化，由 $|\lambda E-A|=0$ 得到特征值为 $0,-1,-2$，

当 $\lambda=0$ 时，代入 $\lambda E-A$ 中，求解方程组 $(\lambda E-A)X=0$ 的解就是特征向量，即 $r_1=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$

同理得到其他的两个特征向量分别为：$\lambda=-1$ 对应的特征向量为 $r_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\lambda=-2$ 对应的

特征向量为$r_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，

设$P=(r_1,r_2,r_1)=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}$，则有$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$，因此可得

$A^{99}=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}^{99}P^{-1}$，根据矩阵$P$可以求得其逆矩阵为$P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

因此有

$$A^{99}=P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}^{99}P^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

（II）$B^2=BA\Rightarrow B^3=BBA=B^2A=BAA=BA^2$，因此可得$B^{100}=BA^{99}$、，所以

$$B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{99}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

因此有$\beta_1=(-2+2^{99})\alpha_1+(-2+2^{100})\alpha_2$;

$\beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2$;

$\beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2$