

2020 考研-数学-基础阶段

第五次测试卷解析（协议）

本试卷满分 100 分，考试时间 30 分钟

姓名_____

得分_____

一、解答题：请将正确答案及其解题过程写在题后的空白部分。

1、（本小题满分 20 分）计算不定积分 $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+a}} dx$ 。

【答案】 $(x+a) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+a}} - a \sqrt{\frac{x}{a}} + C$ 。

【解析】 令 $t = \sqrt{\frac{x}{x+a}}$ ，则 $x = \frac{-at^2}{t^2-1}$ ，

$$\begin{aligned} \int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+a}} dx &= \int \arcsin t d\left(\frac{-at^2}{t^2-1}\right) = \frac{-at^2}{t^2-1} \arcsin t + a \int \frac{t^2}{t^2-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \frac{-at^2}{t^2-1} \arcsin t + a \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} dt \\ &= \frac{-at^2}{t^2-1} \arcsin t + a \arcsin t - a \int \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} dt \end{aligned}$$

$$\text{令 } t = \sin u, \text{ 则 } \int \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} dt = \int \frac{1}{\cos^3 u} \cdot \cos u du = \int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$\text{故原式} = (x+a) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+a}} - a \sqrt{\frac{x}{a}} + C。$$

序号	错误原因	学习建议	备注
25010 1	不清楚此类型的积分如何处理	讲义 68 页例 20 (2)、(3)、(4)； 习题册 58 页 9 (6)；注意体会如何用分部积分法处理含此类根号的积分。	

25010 2	不清楚非有理函数积分如何转化为有理函数积分	讲义 60 页有理函数积分；讲义 52 页例 1 (4)、(5)、(6)，61 页例 12 (1)；注意体会当被积函数为非有理函数时，可将分子凑出分母的一部分因式，再进行约分化简，进而转化为有理函数积分。	
25010 3	不清楚第二类换元法	讲义 56 页第二类换元法；讲义 57 页例 7、习题册 55 页 3 (2)、(4)；注意体会三角代换在积分计算中的使用。	
25010 4	不清楚基本积分公式	讲义 52 页基本积分公式；讲义 52 页例 1、习题册 55 页例 1；注意体会基本积分公式在不定积分计算中的使用。	
25010 5	不清楚最后结果如何回代成关于 x 的函数	讲义 56 页第二类换元法；讲义 57 页例 7、习题册 55 页 3 (2)、(3)；注意体会利用画直角三角形的方法回代成关于 x 的函数	
25010 6	计算型错误	建议 1、2、3、4、5。	
25010 7	其他；		

2、(本小题满分 20 分) 计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x} dx$ 。

【答案】 $2(\sqrt{2} - 1)$ 。

【解析】

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin 2x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x) dx = 2(\sqrt{2} - 1)。 \end{aligned}$$

序号	错误原因	学习建议	备注
25020 1	不清楚常用的三角公式	讲义 11 页三角公式；讲义 53 页例 1 (8)、(9)，习题册 56 页 5 (4)；注意体会二倍角公式在含三角函数积分中的使用。	
25020	不清楚定积分计算中若去掉根	讲义 74 页定积分的计算；讲义 75	

2	号要加绝对值	页例 3 (2); 注意体会在定积分计算中去掉根号要加绝对值, 而不定积分计算时出现此种情况时不用考虑。	
25020 3	不清楚带绝对值的定积分如何计算	讲义 79 页分段函数的积分; 讲义 79 页例 15、例 16; 注意体会在计算分段函数的定积分时利用积分区间的可加性进行拆分。	
25020 4	计算型错误	建议 1、2、3。	
25020 5	其他;		

3、(本小题满分 20 分) 设 $I_k = \int_1^{k\pi} \ln x \cdot \sin x dx (k=1,2,3)$, 试比较 I_1, I_2, I_3 的大小关系。

【答案】 $I_2 < I_1 < I_3$ 。

【解析】 $I_2 - I_1 = \int_{\pi}^{2\pi} \ln x \cdot \sin x dx < 0$, 故 $I_2 < I_1$ 。

$I_3 - I_2 = \int_{2\pi}^{3\pi} \ln x \cdot \sin x dx > 0$, 故 $I_2 < I_3$ 。

$$\begin{aligned}
 I_3 - I_1 &= \int_{\pi}^{3\pi} \ln x \cdot \sin x dx = \int_{\pi}^{2\pi} \ln x \cdot \sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \ln x \cdot \sin x dx \\
 &\stackrel{t=x-\pi}{=} \int_{\pi}^{2\pi} \ln x \cdot \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \ln(t+\pi) \cdot \sin(t+\pi) dt, \\
 &= \int_{\pi}^{2\pi} [\ln x - \ln(x+\pi)] \sin x dx > 0
 \end{aligned}$$

故 $I_1 < I_3$ 。综上, $I_2 < I_1 < I_3$ 。

序号	错误原因	学习建议	备注
25030 1	不清楚比较定理	讲义第 72 页比较定理; 讲义 73 页例 1、例 4、例 5 以及习题册 79 页第 2、3、4 题; 注意体会比较定理在定积分比较大小的应用。	
25030 2	不清楚如何判断同一区间函数有正有负的积分正负	讲义 76 页例 6 以及习题册第 80 页第 5、7 题; 注意体会比较定积分正负的两种方法。	
25030	计算型错误	建议 1、2。	

3			
25030 4	其他;		

4、(本小题满分 20 分) 设 $a > 0$ ，计算定积分 $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \ln \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{3} dx$ 。

【答案】 $-\frac{\pi a^2 \ln 3}{2}$ 。

【解析】 因为 $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 在 $[-a, a]$ 上是奇函数，故：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx - \ln 3 \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= -\ln 3 \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = -2 \ln 3 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = -2 \ln 3 \cdot \frac{\pi a^2}{4} = -\frac{\pi a^2 \ln 3}{2}。 \end{aligned}$$

序号	错误原因	学习建议	备注
25040 1	不清楚对称区间求积分的方法	讲义第 80 页对称区间的定积分；讲义第 81 页例 18、例 19 以及习题册第 82 页第 20 至 22 题；注意体会对称区间被积函数具有奇偶性的化简。	
25040 2	不清楚如何判断函数的奇偶性	讲义第 5 页奇偶性；注意体会函数奇偶性的判别方法与常见的奇偶函数。	
25040 3	计算型错误	建议 1、2。	
25040 4	其他;		

5、(本小题满分 20 分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1 \\ x \ln(x+1), & x \geq 1 \end{cases}$ ，求 $\int_{-2}^2 f(t) dt$ 的值。

【答案】 $\frac{35}{4} + \frac{3}{2} \ln 3$ 。

【解析】 $\int_{-2}^2 f(t) dt = \int_{-2}^1 (x-1)^2 dx + \int_1^2 x \ln(x+1) dx$

$$= 9 + \frac{1}{2} \int_1^2 \ln(x+1) d(x^2) = 9 + 2 \ln 3 - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x^2}{x+1} dx$$

$$= 9 + 2 \ln 3 - \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 - x + \ln(x+1) \right] \Big|_1^2 = \frac{35}{4} + \frac{3}{2} \ln 3。$$

序号	错误原因	学习建议	备注
25050 1	不清楚分段函数的定积分	讲义第 75 页例 15 至例 17 以及习题册第 81 页第 17 至 19 题；注意体会分段函数求定积分的方法。	
25050 2	不清楚分部积分法	讲义 58 页分部积分法；讲义 58 页例 8 至例 10；注意体会分部积分法的使用原则。	
25050 3	计算型错误	建议 1、2。	
25050 4	其他；		