1987年全国硕士研究生入学统一考试

数学试题参考解答

数 学（试卷Ⅰ）

一、填空题（每小题 3 分，满分 15 分. 只写答案不写解题过程）

(1) 与两直线 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$ 及 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 都平行，且过原点的平面方程是 $\underline{x-y+5=0}$

(2) 当 $x=\underline{-1/\ln 2}$；时，函数 $y=x2^x$ 取得极小值.

(3) 由 $y=\ln x$ 与两直线 $y=(e+1)-x$ 及 $y=0$ 围成图形的面积= $\underline{\ 3/2\ }$

(4) 设 L 为取正向的圆周 $x^2+y^2=9$，则曲线积分 $\oint_L (2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy$ 的值是 $\underline{-18\pi}$.

(5) 已知三维线性空间的一组基底 $\alpha_1=(1,1,0)$，$\alpha_2=(1,0,1)$，$\alpha_3=(0,1,1)$，则向量 $\alpha=(2，0，0)$ 在上述基底下的坐标是 $\underline{(1,1,-1)}$

二、（本题满分 8 分）

求正的常数 a 与 b，使式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \dfrac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=1$ 成立.

解： 假若 $b\neq 1$，则根据洛必达法则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{b-\cos x}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}\right)=0\neq 1$$，与题设矛盾，于是 $b=1$.

此时 $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}x^2}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{a+x^2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{a}}$$，

即 $1=\dfrac{2}{\sqrt{a}}$，因此 $a=4$.

三、（本题满分 7 分）

(1) 设函数 f,g 连续可微，$u=f(x,xy),v=g(x+xy)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

解： $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot\dfrac{\partial x}{\partial x}+f_2'\cdot\dfrac{\partial(xy)}{\partial x}=f_1'+y\cdot f_2'$；$\dfrac{\partial v}{\partial x}=g'\cdot\dfrac{\partial(x+xy)}{\partial x}=(1+y)\cdot g'$.

(2) 设矩阵 A 和 B 满足 $AB=A+2B$，其中 $A=\begin{bmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{bmatrix}$，求矩阵 B.

解： 因 $AB=A+2B$，故 $AB-2B=A$，即 $(A-2E)B=A$，

故 $B=(A-2E)^{-1}A=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$.

四、（本题满分 8 分）

求微分方程 $y'''+6y''+(9+a^2)y'=1$ 的通解. 其中常数 $a>0$.

解： 由特征方程 $r^3+2r^2+(9+a^2)r=0$，知其特征根根为 $r_1=0, r_{2,3}=-3\pm ai$.

故对应齐次方程的通解为 $\tilde{y}=C_1+C_2e^{-3x}\cos x+C_3e^{-3x}\sin x$，其中 C_1,C_2,C_3 为任意常数.

设原方程的特解为 $y^*(x)=Ax$，代入原方程可得 $A=\dfrac{1}{9+a^2}$.

因此，原方程的通解为 $y(x)=\tilde{y}+y^*=C_1+C_2e^{-3x}\cos x+C_3e^{-3x}\sin x+\dfrac{1}{9+a^2}x$.

五、选择题（每小题 3 分，满分 12 分）

(1) 设常数 $k>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$ （C）

(A) 发散　(B) 绝对收敛　(C) 条件收敛　(D) 收敛与发散与 k 的值有关.

(2) 设 $f(x)$ 为已知连续函数，$I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)dx$，$s>0,t>0$，则 I 的值 （D）

(A) 依赖于 s 和 t　(B) 依赖于 s、t、x

(C) 依赖于 t 和 x，不依赖于 s　(D) 依赖于 s，不依赖于 t

(3) 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在点 $x=a$ 处 (B)

(A) $f(x)$ 导数存在，$f'(a)\neq 0$　(B) $f(x)$ 取得极大值

(C) $f(x)$ 取得极小值　(D) $f(x)$ 的导数不存在.

(4) 设 A 为 n 阶方阵，且 $|A|=a\neq 0$，而 A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $|A^*|=$ (C)

(A) a　(B) $1/a$　(C) a^{n-1}　(D) a^n

六、（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}x^{n+1}$ 的收敛域，并求其和函数.

解： 记 $u_n=\dfrac{1}{n2^n}x^{n+1}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\cdot\dfrac{n2^n}{x^n}\right|=\dfrac{|x|}{2}$，

令 $\frac{|x|}{2}<1$，知原级数在开区间 $(-2,2)$ 内每一点都收敛.

又当 $x=-2$ 时，原级数=$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}(-2)^{n+1}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$，故由莱布尼兹判别法知其收敛；

而当 $x=2$ 时，原级数=$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}2^{n+1}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$，显然发散，故幂级数的收敛域为 $[-2,2)$.

又记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{x}{2})^n=xS_1(x)$，其中 $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{x}{2})^n$，

有 $S_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{2})^{n-1}=\frac{1}{1-x/2}$，于是 $S_1(x)=\int_0^x\frac{dx}{1-x/2}=2\ln(\frac{2}{2-x})$，

因此幂级数的和函数为 $S(x)=2x\ln\frac{2}{2-x}$，$x\in[-2,2)$.

七、（本题满分 10 分）

计算曲面积分 $I=\iint_S x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$，

其中 s 是曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{y-1} \\ x=0 \end{cases}$ $(1\le y\le 3)$ 绕 Y 轴旋转一周所形成的曲面，它的法向量与 Y 轴正向的夹角恒大于 $\pi/2$.

解： S 的方程为 $y=x^2+z^2+1$，记 S_1： $y=3,(x^2+z^2)$，知 $S+S_1$ 为封闭曲面，设其方向取外侧，所围区域为 Ω，则由高斯公式，有

$$I=\oiint_{S+S_1}x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy-\iint_{S_1}x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy$$

$$=\iiint_\Omega 1\cdot dv-0-\iint_{S_1}2(1-y^2)dydz+0=\int_1^3 dy\iint_{D_y}dzdx-\iint_{D_{zx}}2(1-3^2)dzdx$$

$$=\int_1^3(y-1)dy+16\cdot\pi\cdot 2=34\pi.$$

八、（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可微，对于 $[0,1]$ 上的每个 x，函数的值都在开区间 $(0,1)$ 内，且 $f'(x)\neq 1$.证明 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x，使 $f(x)=x$.

证： 令 $h(t)=f(t)-t$，知 $h(t)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，又由题设知 $0<f(x)<1$，于是有 $h(0)=f(0)-0>0,h(1)=f(1)-1<0$. 故由零点定理，在 $(0,1)$ 内有 x，使 $f(x)=x$.

假若 $f(x)$ 在开区间 $(0,1)$ 内有两个不同的点 x_1 和 x_2，使得 $f(x_1)=x_1$， $f(x_2)=x_2$，不妨设 $x_1<x_2$，则易见 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，故由拉格朗日定理知，

$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$，即 $f'(\xi)=1$.此与 $f'(x)\neq 1$ 矛盾！故在 $(0,1)$ 内使 $f(x)=x$ 的 x 只能有一个.

九、（本题满分 8 分）

问 a,b 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$ 有唯一解？无解？有无穷多解？并求出无穷多解时的通解.

解： 对方程组的增广矩阵进行初等变换，得

$$\widetilde{A}=(A\ \ b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & a-3 & -2 & b \\ 3 & 2 & 1 & a & -1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 & b+1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

① 当 $a\neq 1$ 时，系数行列式 $|A|=(a-1)^2\neq 0$，故由克拉姆法则，原方程组有唯一解；

② 当 $a=1$，且 $b\neq -1$ 时，$r(\widetilde{A})=3, r(A)=2$，$r(\widetilde{A})\neq r(A)$，故原方程组无解；

③ 当 $a=1$，且 $b=-1$ 时，$r(\widetilde{A})=r(A)=2<4$，故原方程组有无穷的解. 此时显然有

$$\widetilde{A}=(A\ \ b)\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见其通解为：$x=(-1,1,0,0)^T+c_1(1,-2,1,0)^T+c_2(1,-2,0,1)^T$，其中 c_1,c_2 为任意常数.

十、填空题（每小题 2 分，满分 6 分）

(1) 在一次试验中事件 A 发生的概率为 p，现进行 n 次独立试验，则 A 至少发生一次的概率为 $\underline{\ 1-(1-p)^n\ }$；而事件 A 至多发生一次的概率为 $\underline{\ [1+(n-1)p](1-p)^{n-1}\ }$.

(2) 三个箱子，第一个箱子有 4 个黑球 1 个白球，第二个箱子中有 3 个白球 3 个黑球，第三个箱子中有 3 个黑球 5 五个白球，现随机地取一个箱子，再从这个箱子中取一个球，这个球为白球的概率为 $\underline{\ 53/120\ }$，已知取出的是白球，此球属于第二箱的概率是 $\underline{\ 20/53\ }$.

(3) 已知连续随机变量 X 的密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$，则 X 的数学期望为 <u>1</u>；X 的方差为 <u>1/2</u>.

十一、（本题满分 6 分）

设随机变量 X，Y 相互独立，其概率密度函数分别为

$f_X(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其 它}\end{cases}$；$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$，求随机变量 Z=2X+Y 的概率密度函数 $f_z(z)$.

解： 由题设，(X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & 0\le x\le 1, y>0\\ 0 & \text{其 它}\end{cases}$，

故 Z 的分布函数 $F_z(z)=P(Z\le z)=P(2X+Y\le z)=\iint\limits_{2x+y\le z}f(x,y)dxdy$，

① 当 $z<0$ 时，$F_z(z)=\iint\limits_{2x+y\le z}0dxdy=0$，此时 $f_z(z)=0'=0$；

② 当 $0\le z\le 2$ 时，$F_z(z)=\int_0^z dy\int_0^{\frac{z-y}{2}}e^{-y}dx=\dfrac{z}{2}\int_0^z e^{-y}dy-\dfrac{1}{2}\int_0^z ye^{-y}dy$，此时

$$f_z(z)=F_z'(z)=\frac{1}{2}\int_0^z e^{-y}dy=\frac{1}{2}(1-e^{z})；$$

③ 当 $z>2$ 时，$F_z(z)=\int_0^1 dx\int_0^{z-2x}e^{-y}dy=\int_0^1(1-e^{2x-z})dx=1-\dfrac{1}{2}(e^{-2}-1)e^{-z}$，此时

$$f_z(z)=F_z'(z)=\frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}$$

综上所述，Z=2X+Y 的概率密度函数为 $f_z(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ \frac{1}{2}(1-e^{-z}) & 0\le z\le 2\\ \frac{1}{2}e^{-z}(e^{-2}-1) & z>2\end{cases}$

数 学（试卷Ⅱ）

一、（**本题满分 15 分**）【 同数学Ⅰ、第一题 】

二、（**本题满分 14 分**）

(1)（**6 分**）计算定积分$\int_{-2}^{2}(|x|+x)e^{-|x|}dx.$

解：因$xe^{-|x|}$是奇函数，$|x|e^{-|x|}$是偶函数，故 原式$=2\int_0^2|x|e^{-|x|}dx=2\int_0^2 xe^{x}dx=2-6e^{-2}$.

(2)（**8 分**）【 同数学Ⅰ、第二题 】

三、（**本题满分 7 分**）

设函数$z=f(u,x,y),u=xe^{y}$，其中f有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+f_2'=f_1'\cdot e^{y}+f'$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(f_{11}''\cdot xe^{y}+f_{13}'')e^{y}+e^{y}\cdot f_1'+f_{21}''\cdot xe^{y}+f_{23}''$.

四、（**本题满分 8 分**）【 同数学Ⅰ、第四题 】

五、（**本题满分 12 分**）【 同数学Ⅰ、第五题 】

六、（**本题满分 10 分**）【 同数学Ⅰ、第六题 】

七、（**本题满分 10 分**）【 同数学Ⅰ、第七题 】

八、（**本题满分 10 分**）【 同数学Ⅰ、第八题 】

九、（**本题满分 8 分**）【 同数学Ⅰ、第九题 】

十、（**本题满分 6 分**）

设λ_1,λ_2为 n 阶方阵A的特征值，$\lambda_1\neq\lambda_2$，而x_1,x_2分别为对应的特征向量，试证明：x_1+x_2不是A的特征向量.

证：假若x_1+x_2是A的特征向量，设其对应的特征值为λ_3，则有$A(x_1+x_2)=\lambda_3(x_1+x_2)$，即$Ax_1+Ax_2=\lambda_3x_1+\lambda_3x_2$. 又由题设条件知$Ax_1=\lambda_1x_1$，$Ax_2=\lambda_2x_2$，故有

$(\lambda_1-\lambda_3)x_1+(\lambda_2-\lambda_3)x_2=0$.因$x_1,x_2$是属于不同特征值的特征向量，所以$x_1,x_2$线性无关，从而$\lambda_1=\lambda_3$，且$\lambda_1=\lambda_3$，此与$\lambda_1\neq\lambda_2$矛盾！因此$x_1+x_2$不是$A$的特征向量.

数　学（试卷Ⅲ）

一、填空题（每小题 2 分，满分 10 分. 把答案填在题中横线上）

(1) 设 $y=\ln(1+ax)$，其中 a 为非零常数，则 $y'=\underline{\dfrac{a}{1+ax}}$，$y''=\underline{-\dfrac{a^2}{(1+ax)^2}}$.

(2) 曲线 $y=arctgx$ 在横坐标为 1 点处的切线方程是 $\underline{y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi-2}{4}}$；法线方程是 $\underline{y=-2x+(\pi+8)/4}$.

(3) 积分中值定理的条件是 $\underline{f(x)\text{在闭区间}[a,b]\text{上连续}}$，结论是 $\underline{\exists\xi\in[a,b],\text{使得}\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n-2}{n+1})^n=\underline{e^{-3}}$.

(5) $\int f'(x)dx=\underline{f(x)+c}$；$\int_a^b f'(2x)dx=\underline{\dfrac{1}{2}f(2b)-\dfrac{1}{2}f(2a)}$.

二、（本题满分 6 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})$

解： $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

三、（本题满分 7 分）

设 $\begin{cases}x=5(t-\sin t)\\ y=5(1-\cos t)\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解： 因 $\dfrac{dy}{dt}=5\sin t,\dfrac{dx}{dt}=5-5\cos t$，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{5(0+\sin t)}{5(1-\cos t)}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$，故 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$，

且 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}(\dfrac{\sin t}{1-\cos t})\cdot\dfrac{dt}{dx}=-\dfrac{1}{5(1-\cos t)^2}$

四、（本题满分 8 分）

计算定积分 $\int_0^1 x\arcsin x dx$.

解： $\int_0^1 x\arcsin xdx=\dfrac{1}{2}x^2\arcsin x\Big|_0^1-\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

令 $x=\sin t$，有 $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cos t dt=\frac{\pi}{4}$，因此 $\int_0^1 x\arcsin x dx=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$.

五、（本题满分 8 分）

设 D 是曲线 $y=\sin x+1$ 与三条直线 $x=0$, $x=\pi$, $y=0$ 围成的曲边梯形.求 D 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体的体积.

解： $V=\pi\int_0^{\pi}(\sin x+1)^2 dx=4\pi+\frac{3\pi^2}{2}$.

六、证明题（本题满分 10 分）

(1)（**5 分**）若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且导数 $f'(x)$ 恒大于零，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加.

证： $\forall x_1,x_2\in(a,b)$，不妨设 $x_1<x_2$，则 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，在 (x_1,x_2) 内可导，故由拉格朗日中值定理，$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使得 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$.
由于 $f'(x)$ 在 (a,b) 内恒大于零，所以 $f'(\xi)>0$，又 $x_2-x_1>0$，因此 $f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$，表明 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加.

(2)（**5 分**）若 $g(x)$ 在 $x=c$ 处二阶导数存在，且 $g'(c)=0$, $g''(c)<0$，则 $g(c)$ 为 $g(x)$ 的一个极大值.

证： 因 $g''(c)=\lim\limits_{x\to c}\frac{g'(x)-g'(c)}{x-c}<0$，而 $g'(c)=0$，故 $\lim\limits_{x\to c}\frac{g'(x)}{x-c}<0$.由极限的保号性，

$\exists\delta>0$，当 $x\in(c-\delta,c)$ 时，有 $\frac{g'(x)}{x-c}<0$，即 $g'(x)>0$，从而 $g(x)$ 在 $(c-\delta,c)$ 单增；

当 $x\in(c,c+\delta)$ 时，有 $\frac{g'(x)}{x-c}<0$，即 $g'(x)<0$，从而 $g(x)$ 在 $(c-\delta,c)$ 单减.

又由 $g'(c)=0$ 知，$x=c$ 是 $g(x)$ 的驻点，因此 $g(c)$ 为 $g(x)$ 的一个极大值.

七、（本题满分 10 分）

计算不定积分 $\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$ （其中 a,b 为不全为零的非负数）

解： ① 当 $a=0$ 时，原式=$\frac{1}{b^2}\int\sec^2 x dx=\frac{1}{b^2}\tan x+c$；

② 当 $b=0$ 时， 原式=$\frac{1}{a^2}\int\csc^2 x dx=-\frac{1}{a^2}\cot x+c$；

③ 当 $ab\neq0$ 时，原式=$\int\frac{\sec^2 x dx}{a^2\tan^2 x+b^2}=\frac{1}{ab}\int\frac{d(\frac{a}{b}\tan x)}{(\frac{a}{b}\tan x)^2+1}=\frac{1}{ab}\arctan(\frac{a}{b}\tan x)+c$.

八、（本题满分 15 分）

(1)（7 分）求微分方程 $x\dfrac{dy}{dx}=x-y$，满足条件 $y|_{x=\sqrt{2}}=0$ 的解.

解： 原方程即 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y=1$，故其通解为 $y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}(\int e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+c)=\dfrac{1}{x}(\dfrac{1}{2}x^2+c)$.

因 $y|_{x=\sqrt{2}}=0$，所以 $c=-1$. 于是所求初值问题的解为 $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{x}$.

(2)（8 分）求微分方程 $y''+2y'+y=xe^x$ 的通解.

解： 由特征方程 $r^2+2r+1=0$，知其特征根根为 $r_{1,2}=-1$.

故对应齐次方程的通解为 $\tilde{y}=(C_1+C_2x)e^{-x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数.

设原方程的特解为 $y^*(x)=e^x(ax+b)$，代入原方程可得 $a=\dfrac{1}{4}$， $b=-\dfrac{1}{4}$.

因此，原方程的通解为 $y(x)=\tilde{y}+y^*=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\dfrac{1}{4}(x-1)e^x$.

九、选择题（每小题 4 分，满分 16 分）

(1). $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}$， $-\infty<x<+\infty$ 是 （D）

（A）有界函数 （B）单调函数 （C）周期函数 （D）偶函数

(2). 函数 $f(x)-x\sin x$ (D)

（A）当 $x\to\infty$ 时为无穷大 （B）当 $x\to\infty$ 时有极限

（C）在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界 （D）在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界

(3) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$ 等于 (B)

（A） $f'(a)$ （B） $2f'(a)$ （C） 0 （D） $f'(2a)$

(4) 【 同数学Ⅰ、第五（2）题 】

十、（本题满分 10 分）

在第一象限内，求曲线 $y=-x^2+1$ 上的一点，使该点处切线与所给曲线及两坐标围成的面积为最小，并求此最小面积.

解： 设切点的横坐标为 a，则切线方程为 $y-(1-a^2)=-2a(x-a)$，即 $y=-2ax+a^2+1$

故所围面积 $s=\dfrac{1}{2}(a^2+1)\dfrac{a^2+1}{2a}-\int_0^1(-x^2+1)dx=\dfrac{a^3}{4}+\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{4a}-\dfrac{2}{3}$. 令 $s'=0$ 得驻点 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

由于 $s''\big|_{a=\sqrt{3}/3}>0$，故所求点的坐标为 $(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{2}{3})$，其最小值为 $s\big|_{a=\sqrt{3}/3}=\dfrac{4}{9}\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}$.

数　学（试卷Ⅳ）

一、判断题（每小题答对得 2 分，答错得-1 分，不答得 0 分，全题最低 0 分）

(1) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ （ × ）

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx = 0$ （ √ ）

(3) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ 必发散 （ × ）

(4) 假设 D 是矩阵 A 的 r 阶子式，且含 D 的一切 $r+1$ 阶子式都等于 0，

那么矩阵 A 的一切 $r+1$ 阶子式都等于 0 （ √ ）

(5) 连续型随机变量取任何给定实数值的概率都等于 0 （ √ ）

二、选择题（每小题 2 分，满分 10 分.）

(1) 下列函数在其定义域内连续的是 (A)

（A） $f(x) = \ln x + \sin x$　　（B） $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \le 0 \\ \cos x & x > 0 \end{cases}$

（C） $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x-1 & x > 0 \end{cases}$　　（D） $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|x|}} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(2) 若函数 f(x)在区间 (a,b) 内可导，x_1, x_2 是区间内任意两点，且 $x_1 < x_2$，则至少存一点 ξ，使得 （C）

(A) $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a),\ a < \xi < b$.

(B) $f(b) - f(x_1) = f'(\xi)(b-x_1),\ x_1 < \xi < b$.

(C) $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2-x_1),\ x_1 < \xi < x_2$.

(D) $f(x_2) - f(a) = f'(\xi)(x_2-a),\ a < \xi < x_2$.

(3) 下列广义积分收敛的是 （C）

（A） $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$　（B） $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$　（C） $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$　（D） $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

(4) 设 A 是 n 阶方阵，其秩 r < n ， 那么在 A 的 n 个行向量中 (A)

(A) 必有 r 个行向量线性无关

(B) 任意 r 个行向量线性无关

(C) 任意 r 个行向量都构成极大线性无关向量组

(D) 任意一个行向量都可以由其它 r 个行向量线性表示

(5) 若二事件 A 和 B 同时出现的概率 $P(AB)=0$，则　　　　(C)

(A) A 和 B 互不相容（互斥）　　(B) AB 是不可能事件

(C) AB 未必是不可能事件　　(D) P(A)=0 或 P(B)=0

三、计算下列各题（每小题 4 分，满分 16 分）

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+xe^x)^{\frac{1}{x}}$.

解：因 $(1+xe^x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{\ln(1+xe^x)}{x}}$，　而 $\dfrac{\ln(1+xe^x)}{x}\sim xe^x$　（当 $x\to 0$），

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}e^x=1$，　从而 $\lim\limits_{x\to 0}(1+xe^x)^{\frac{1}{x}}=e$.

(2) 已知 $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$，　求 y'.

解：$y=\ln(\sqrt{1+x^2}-1)-\ln(\sqrt{1+x^2}+1)$，$y'=\dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}-1}-\ln\dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}+1}=\dfrac{2}{x\sqrt{1+x^2}}$.

(3) 已知 $z=arctg\dfrac{x+y}{x-y}$，求 dz.

解：$dz=\dfrac{d(\dfrac{x+y}{x-y})}{1+(\dfrac{x+y}{x-y})^2}=\dfrac{\dfrac{(x-y)(dx+dy)-(x+y)(dx-dy)}{(x-y)^2}}{1+(\dfrac{x+y}{x-y})^2}=\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$

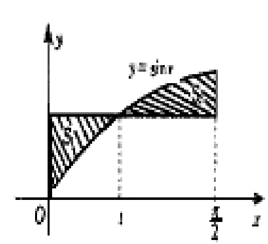
(4) 求不定积分 $\int e^{\sqrt{2x-1}}dx$.

解：令 $\sqrt{2x-1}=t$，有

$$\int e^{\sqrt{2x-1}}dx=\int e^t t dt=te^t-\int e^t dt=te^t-e^t+c=(\sqrt{2x-1}-1)e^{\sqrt{2x-1}}+c$$

四、（本题满分 10 分）

考虑函数 $y=\sin x\quad(0\le x\le\pi/2)$，问：



(1) t 取何值时，图中阴影部分的面积 s_1 与 s_2 之和 $s=s_1+s_2$ 最小？

(2) t 取何值时，$s=s_1+s_2$ 最大？

解：因 $s_1=t\sin t-\int_0^t\sin xdx=t\sin t+\cos t-1$，

$$s_2=\int_t^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx-(\frac{\pi}{2}-t)\sin t=\cos t+t\sin t-\frac{\pi}{2}\sin t,$$

故 $s=s_1+s_2=2t\sin t+2\cos t-\frac{\pi}{2}\sin t-1,(0\le t\le\frac{\pi}{2})$.

令 $s'=0$，得 s 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内的驻点 $t=\frac{\pi}{4}$. 而 $s(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}-1$，$s(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-1$，$s(0)=1$，

因此 $t=\frac{\pi}{4}$ 时，s 最小；$t=0$ 时，s 最大.

五、（本题满分 6 分）

将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$ 展成 x 的级数，并指出收敛区间.

解： 因 $f(x)=\frac{1}{(x-2)(x-1)}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$,

而 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，$x\in(-1,1)$，且 $\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n$，$x\in(-2,2)$,

故 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(1+\frac{1}{2^{n+1}})x^n$，其收敛区间为 $(-1,1)$.

六、（本题满分 5 分）

计算二重积分 $\iint_D e^{x^2}dxdy$，其中 D 是第一象限中由直线 $y=x$ 和 $y=x^3$ 围成的封闭区域.

解： 联立 $y=x$ 和 $y=x^3$，可解得两曲线交点的横坐标 $x=0$ 和 $x=1$，于是

$$\iint_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^3}^{x}e^{x^2}dy=\int_0^1(x-x^3)e^{x^2}dx=\frac{e}{2}-1$$

七、（本题满分 6 分）

已知某商品的需求量 x 对价格 P 的弹性为 $\eta=-3p^3$，而市场对商品的最大需求量为 1（万件），求需求函数.

解： 由弹性的定义，有 $\frac{p}{x}\frac{dx}{dp}=-3p^3$，即 $\frac{dx}{x}=-3p^2dp$,

于是有 $x=ce^{-p^3}$，c 为待定常数.

由题意 $p=0$ 时，$x=1$，故 $c=1$，因此 $x=e^{-p^3}$.

八、（本题满分 8 分）

解线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -4 \\ x_1 \quad\quad + x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad = 1 \\ 7x_1 + \quad 7x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$ 【$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，k 为任意常数】

解：对方程组的增广矩阵进行初等行变换，有

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故原方程组与下方程组同解：

$\begin{cases} x_1 = 3 - x_3 \\ x_2 = -8 + 2x_3 \\ x_4 = 6 \end{cases}$，令 $x_3 = 0$，可得原方程组的特解 $\beta = (3,-8,0,6)^T$.

又显然原方程组的导出组与下方程组同解：

$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$，令 $x_3 = 1$，可得导出组的基础解系 $\eta = (-1,2,1,0)^T$.

因此原方程组的通解为：$(x_1,x_2,x_3,x_4) = (3,-8,0,6)^T + k(-1,2,1,0)^T$，其中 k 为任意常数.

九、（本题满分 7 分）

设矩阵 A 和 B 满足 $AB = A + 2B$，求矩阵 B，其中 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

解：因 $AB = A + 2B$，故 $AB - 2B = A$，即 $(A - 2E)B = A$，

故 $B = (A-2E)^{-1}A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$

十、（本题满分 6 分）

求矩阵 $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的实特征值及对应的特征向量.

解：令 $|\lambda E-A|=0$，即 $(\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+5)=0$ ，可见矩阵 A 只有一个实特征值 $\lambda=1$.

易见，线性方程组 $(\lambda E-A)X=0$ 的基础解系为 $(0,2,1)^T$，故 A 对应于实特征值 $\lambda=1$ 的特征向量为 $k(0,2,1)^T$，（其中 k 为非零任意常数）.

十一、（每小题 4 分，满分 8 分）

(1) 已知随机变量 X 的概率分布为 $P(X=1)=0.2, P(X=2)=0.3, P(X=3)=0.5$，试写出 X 的分布函数 $F(x)$.

解： X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.2, & 1\le x<2\\ 0.5, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$.

(2) 已知随机变量 Y 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}\frac{y}{a^2}e^{-\frac{y^2}{2a^2}} & y\ge 0\\ 0 & y<0\end{cases}$，求随机变量 $Z=\dfrac{1}{Y}$ 的数学期望 EZ.

解： $EZ=E(\dfrac{1}{Y})=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{y}f(y)dy=\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{y}{a^2}e^{-\frac{y^2}{2a^2}}dy=\sqrt{2\pi}\cdot\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi a^2}}e^{-\frac{y^2}{2a^2}}dy=\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2a}$.

十二、（本题满分 8 分）

设有两箱同种零件. 第一箱内装 50 件，其中 10 件一等品；第二箱内装有 30 件，其中 18 件一等品. 现从两箱中随机挑出一箱，然后从该箱中先后随机取出两个零件（取出的零件均不放回），试求：

(1) 先取出的零件是一等品的概率 p；

(2) 在先取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件仍然是一等品的条件概率 q.

解：设 $B_i=\{$取出的零件为第 i 箱中的$\}$， $A_j=\{$第 j 次取出的是一等品$\}$，$i,j=1,2$，

显然 B_1,B_2 为正概完备事件组，故全概公式得

(1) $p=P(A_1)=P(B_1)P(A_1|B_1)+P(B_2)P(A_1|B_2)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{10}{50}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{18}{30}=\dfrac{2}{5}$；

(2) $P(A_1A_2)=P(B_1)P(A_1A_2|B_1)+P(B_2)P(A_1A_2|B_2)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{10\times 9}{50\times 49}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{18\times 17}{30\times 29}=\dfrac{276}{1421}$，

于是，由贝叶斯公式得 $q=q=P(A_2|A_1)=\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\dfrac{690}{1421}\approx 0.48557$.

数　学（试卷Ⅴ）

一、判断题（每小题答对得 2 分，答错得-1 分，不答得 0 分，全题最低 0 分）

(1) 【 同数学Ⅳ 第一（1）题 】

(2) 【 同数学Ⅳ 第一（2）题 】

(3) 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 严格单增，则对区间 (a,b) 内任何一点 x 有 $f'(x)>0$．（ × ）

(4) 若 A 为 n 阶方阵，k 为常数，而 $|A|$ 和 $|kA|$ 为 A 和 kA 的行列式，则 $|kA|=k|A|$．（ × ）

(5) 【 同数学Ⅳ 第一（5）题 】

二、选择题（每小题 2 分，满分 10 分）

(1) 【 同数学Ⅳ 第二（1）题 】

(2) 【 同数学Ⅳ 第二（2）题 】

(3) 【 同数学Ⅳ 第二（3）题 】

(4) 【 同数学Ⅳ 第二（4）题 】

(5) 对于任二事件 A 和 B，有 $P(A-B)=$ (C)

(A) $P(A)-P(B)$　　(B) $P(A)-P(B)+P(AB)$

(C) $P(A)-P(AB)$　　(D) $P(A)-P(\overline{B})-P(A\overline{B})$

三、计算下列各题（每小题 4 分，满分 20 分）

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{arctgx}$.

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{arctgx}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+\frac{1}{x})}{\lim\limits_{x\to+\infty}arctgx}=\dfrac{0}{\pi/2}=0$

(2) 【 同数学Ⅳ 第三（2）题 】

(3) 【 同数学Ⅳ 第三（3）题 】

(4) 计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{\sqrt{2x-1}}dx$

解： 令 $\sqrt{2x-1}=t$，有 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{\sqrt{2x-1}}dx=\int_0^1 e^t t dt=te^t\Big|_0^1-\int_0^1 e^t dt=e-e^t\Big|_0^1=1$

(5) 求不定积分 $\int\dfrac{xdx}{x^4+2x^2+5}$.

解： $\int\frac{xdx}{x^4+2x^2+5}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2+2^2}=\frac{1}{4}\arctan\frac{x^2+1}{2}+c$.

四、（本题满分 10 分）

考虑函数 $y=x^2$，$0\le x\le 1$，问：

(1) t 取何值时，图中阴影部分的面积(与数学Ⅳ第四题类似) s_1 与 s_2 之和 $s=s_1+s_2$ 最小？

(2) t 取何值时，$s=s_1+s_2$ 最大？

解： $s=s_1+s_2=t^3-\int_0^t x^2dx+\int_t^1 x^2dx-(1-t)t^2=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}$，$(0\le t\le 1)$

令 $s'=0$，得 $(0,1)$ 内的驻点 $t=\frac{1}{2}$. 而 $s(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，$s(0)=\frac{1}{3}$，$s(1)=\frac{2}{3}$，

因此 $t=\frac{1}{2}$ 时，s 最小；$t=1$ 时，s 最大.

五、（本题满分 5 分）【 同数学Ⅳ 第六题 】

六、（本题满分 8 分）

设某产品的总成本函数为 $C(x)=400+3x+\frac{1}{2}x^2$，而需求函数为 $p=\frac{100}{\sqrt{x}}$，其中 x 为产量（假定等于需求量）, p 为价格. 试求：

（**1**）边际成本； （**2**）边际收益； （**3**）边际利润； （**4**）收益的价格弹性.

解：（**1**）边际成本：$MC=C'(x)=3+x$；

（**2**）收益函数：$R(x)=p\cdot x=100\sqrt{x}$，边际收益 $MR=R'(x)=\frac{50}{\sqrt{x}}$；

（**3**）利润函数：$L(x)=R(x)-C(x)=100\sqrt{x}-400-3x-\frac{1}{2}x^2$，

边际利润：$ML=L'(x)=\frac{50}{\sqrt{x}}-3-x$；

（**4**）收益的价格函数：$R(x)=100\sqrt{x}=\frac{(100)^2}{p}$，

收益的价格弹性：$\frac{p}{R}\frac{dR}{dp}=-\frac{(100)^2}{p^2}\cdot\frac{p^2}{(100)^2}=-1$.

七、（本题满分 8 分）【 同数学Ⅳ 第八题 】

八、（本题满分 7 分）【 同数学Ⅳ 第九题 】

九、（本题满分 6 分）【 同数学Ⅳ 第十题 】

十、（本题满分 8 分）

已知随机变量 X 的概率分布为 $P(X=1)=0.2, P(X=2)=0.3, P(X=3)=0.5$，试写出 X 的分布函数 $F(x)$，并求 X 的数学期望与方差.

解： X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<1 \\ 0.2, & 1\le x<2 \\ 0.5, & 2\le x<3 \\ 1, & x\ge 3 \end{cases}$,

$EX=1\times 0.2+2\times 0.3+3\times 0.5=2.3$；$EX^2=1^2\times 0.2+2^2\times 0.3+3^2\times 0.5=5.9$

$DX=EX^2-(EX)^2=5.9-2.3^2=0.61$

十一、（本题满分 8 分）【 同数学Ⅳ 第十二题 **】**