# 1997 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)

**一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)**

（1）已知 $f(x)=\begin{cases}(xosx)^{x^{-2}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，在$x=0$处连续，则$a=$ ____________.

（2）设 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$,则 $y''\big|_{x=0}=$____________.

（3）$\int\dfrac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}=$____________.

（4）设$\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+4x+8}=$____________.

（5）已知向量组$\alpha_1=$（$1,2-1,1$），$\alpha_{,2}=$（$2,0$，$t,0$),$\alpha_3=(0,-4,5,-2)$ 的秩为 2，则$t=$____________.

**二、选择题**

1.设$x\to 0$,时，$e^{\tan x}-e^x$与$x^n$是同阶无穷小，则$n$为（　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

(2)设在区间$[a,b]$上 $f(x)>0, f'(x)<0, f''(x)>0$. 记 $S_1=\int_a^b f(x)dx, S_2=f(b)(b-a), S_3=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$, 则（　　）

(A) $S_1<S_2<S_3$　　(B) $S_2<S_3<S_1$

(C) $S_3<S_1<S_2$　　(D) $S_2<S_1<S_3$

(3)已知函数 $y=f(x)$对一切$x$满足$xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$,若$f'(x_0)=0(x_0\neq 0)$,则（　　）

(A) $f(x_0)$是$f(x)$的极大值

(B) $f(x_0)$是$f(x)$的极小值

(C) $(x_0, f(x_0))$是$y=f$（$x$）的拐点

(D) $f(x_0)$不是$f(x)$的极值,$(x_0, f(x_0))$也不是曲线$y=f(x)$的拐点

(4)设$F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t dt$,则$F(x)$（　　）

(A)为正常数　　(B)为负常数　　(C)恒为零　　(D)不为常数

（5）.设$g(x)=\begin{cases}2-x, & x\le 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$, $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\ge 0\end{cases}$,则$g[f(x)]$为（　）

（A）$\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\ge 0\end{cases}$　　（B）$\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\ge 0\end{cases}$

（C）$\begin{cases} 2-x^2, & x<0 \\ 2-x, & x\ge 0 \end{cases}$　　　（D）$\begin{cases} 2+x^2, & x<0 \\ 2+x, & x\ge 0 \end{cases}$

**三、（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）**

（1）求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

（2）设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\arctan t \\ 2y-ty^2+e^t=5 \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

（3）计算 $\int e^{2x}(\tan x+1)^2dx.$

（4）求微分方程 $\left(3x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(x^2-2xy\right)dy=0$ 的通解。

（5）已知 $y_1=xe^x+e^{2x},y_2=xe^x+e^{-x},y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解，求此微分方程。

（6）已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$，且 $A^2-AB=E$, 其中 $E$ 是三阶单位矩阵，求矩阵 $B$.

**四、（本题满分 8 分）**

$\lambda$ 取何值时，方程组 $\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-x_3=1 \\ \lambda x_1-x_2+x_3=2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1 \end{cases}$ 无解，有惟一解或由无穷多解？并在有无穷多解时写出方程组的通解。

**五、（本题满分 8 分）**

设曲线 $L$ 的极坐方程为 $r=r(\theta)$, $M(r,\theta)$ 为 $L$ 上的任一点，$M_0(2,0)$ 为 $L$ 上一定点，若极径 $OM_0$、$OM$ 与曲线 $L$ 所围成的曲边扇形面积值等于 $L$ 上 $M_0,M$ 两点间弧长值的一半，求曲线 $L$ 的方程。

**六、（本题满分 8 分）**

设函数 $f(x)$ 在闭区间[0,1]上连续，在开区间（0,1）内大于零，并满足 $xf'(x)=f(x)+\dfrac{3a}{2}x^2$（$a$ 为常数），又曲线 $y=f(x)$ 与 $x=1,y=0$ 所围成的图形 $S$ 的面积值为 2，求函数 $y=f(x)$，并问 $a$ 为何值时，图形 $S$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得的旋转体的体积最小。

**七、（本题满分 8 分）**

已知函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，设 $\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$, 求 $\varphi'(x)$, 并讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性

**八、（本题满分 8 分）**

就 $k$ 的不同取值情况，确定方程 $x-\dfrac{\pi}{2}\sin x=k$ 在开区间 $(0,\dfrac{\pi}{,2})$ 内根的个数，并证明你的结论。

# 1996 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)

**一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)**

（1）设 $y=(x+e^{-\frac{x}{2}})^{\frac{2}{3}}$,则 $y'|_{x=0}=$____________.

（2）$\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2dx=$____________.

（3）微分方程的 $y''+2y'+5y=0$ 通解为____________.

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln(1+\frac{3}{x})-\sin\ln(1+\frac{1}{x})\right]=$____________.

（5）由曲线 $y=x+\frac{1}{x},x=2及y=2$ 所围图形的面积 $S=$____________.

**二、选择题**

1.设 $x\to0$时，$e^x-(ax^2+bx+1)$是比$x^2$高阶的无穷小，则（　）

（A）$a=\frac{1}{2},b=1$　　（B）$a=1,b=1$

（C）$a=-\frac{1}{2},b=-1$　　（D）$a=-1,b=1$

(2)设函数 $f(x)$ 在区间（$-\delta$，$\delta$）内有定义，若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\le x^2$,则$x=0$ 必是 $f(x)$ 的（　　）

(A)间断点　　(B)连续而不可导的点

(C)可导的点，且 $f'(0)=0$　　(D)可导的点，且 $f'(0)\neq0$

(3)设 $f(x)$ 处处可导，则（　　）

(A)当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$　　(B)当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

(C)当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=+\infty$　　(D)当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=+\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

(4)在区间（$-\infty,+\infty$）内，方程$|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$（　　）

(A)无实根　　(B)有且仅有一个实根

(C)有且仅有两个实根　　(D)有无穷多个实根

（5）.设 $f(x),g(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$g(x)<f(x)<m$($m$为常数)，由曲线$y=g(x)$, $y=f(x)$,$x=a$及$x=b$所围平面图形绕直线 $y=m$ 旋转体体积为（　）

（A）$\int_a^b\pi[2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]dx$　　（B）$\int_a^b\pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]dx$

（C）$\int_a^b\pi[m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]dx$　　（D）$\int_a^b\pi[m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]dx$

**三、（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）**

（1）计算 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}dx.$

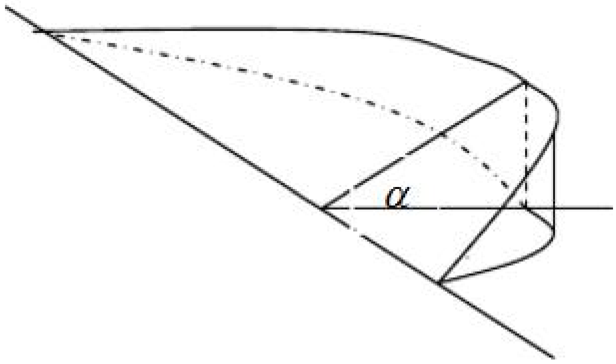
（2）求 $\int\frac{dx}{1+\sin x}.$

（3）设 $\begin{cases}x=\int_0^t f(u^2)du,\\ y=[f(t^2)]^2,\end{cases}$ 其中 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f(u)\neq 0,$ 求 $\frac{d^2y}{dx^2}.$

（4）求函数 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ 在 $x=0$ 点处带拉格朗日型余项 $n$ 阶泰勒展开式。

（5）求微分方程 $y''+y'=x^2$ 的通解。

（6）设有一正椭圆柱体，其地面的长、短轴分别为 $2a$、$2b$，用过此柱体底面的短轴与底面成 $\alpha$ 角（$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$）的平面截此柱体，得以锲形体（如图），求此锲形体的体积 $V$.




**四、（本题满分 8 分）**

计算不定积分 $\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx.$

**五、（本题满分 8 分）**

设函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\le x\le x,\\ 12x-16, & x>2.\end{cases}$

（1）写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式；

（2）$g(x)$ 是否由间断点、不可导点，若有，指出这些点。

六、（本题满分 8 分）

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 所确定，试求 $y=y(x)$ 的驻点，并判别它是否为极值点。

七、（本题满分 8 分）

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0, f'(a)f'(b)>0,$ 试证明：

存在 $\xi\in$（$a,b$）和 $\eta\in$（$a,b$），使 $f(\xi)=0$ 及 $f''(\eta)=0.$

八、（本题满分 8 分）

设 $f(x)$ 为连续函数，

（1）求初值问题 $\begin{cases} y'+ay=f(x), \\ y\big|_{x=0}=0 \end{cases}$ 的解 $y(x)$，其中 $a$ 为正的常数；

（2）若 $|f(x)|\le k$（$k$ 为常数），证明：当 $x\ge 0$ 时，有 $|y(x)|\le \frac{k}{a}(1-e^{-ax}).$

# 1995 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)

**一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)**

（1）设 $y=\cos(x)^2\sin^2\dfrac{1}{x}$,则$y'=$____________.

（2）微分方程 $y''+y=-2x$的通解为 ____________.

（3）曲线$\begin{cases}x=1+t^2\\ y=t^3\end{cases}=-2$ 处的切线方程为____________.

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+L+\dfrac{n}{n^2+n+n})=$____________.

（5）由曲线 $y=x^2e^{-x^2}$ 的渐近方程为____________.

**二、选择题**

1.设 $f(x)$和$\varphi$（$x$）在（$-\infty,+\infty$）内有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq 0,\varphi(x)$ 有间断点，则（　）

（A）$\varphi[f(x)]$必有间断点　　（B）$[\varphi(x)]^2$必有间断点

（C）$f[\varphi(x)]$必有间断点　　（D）$\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$必有间断点

(2)曲线 $y=x(x-1)(2-x)$与$x$ 轴所围图形的面积可表示为（　　）

(A) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$　　(B) $\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx-\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$

(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)dx+\int_1^2 x(x-1)(2-x)dx$　　(D) $\int_0^2 x(x-1)(2-x)dx$

(3)设 $f(x)$ 在（$-\infty,+\infty$）内可导，且对任意 $x_1,x_2$,当$x_1>x_2$时，都有$f(x_1)>f(x_2)$,则（　　）

(A) 对任意$x,f'(x)>0$　　(B) 对任意$x,f'(-x)\le 0$

(C) 函数$f(-x)$单调增加　　(D) 函数$-f(-x)$单调增加

(4)设函数 $f(x)$在$[0,1]$上$f''(x)>0$,则$f'(1)$、$f'(0)$、$f(1)-f(0)$或$f(0)-f(1)$ 的大小顺序是（　　）

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　(D) $f'(1)>f(0)>f(1)-f'(0)$

（5）.设 $f(x)$可导，$F$（$x$）$=f(x)(1+|\sin x|)$,若使$F(x)$在$x=0$处可导，则必有（　）

（A）$f(0)=0$　　（B）$f'(0)=0$

（C）$f(0)+f'(0)=0$　　（D）$f(0)-f'(0)=0$

**三、（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）**

（1）求 $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1-\sqrt{xosx}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

（2）设函数 $y = y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)} = e^y$ 确定，其中 $f$ 具有二阶导数，且 $f' \neq 1$，求 $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

（3）设 $f(x^2-1) = \ln \dfrac{x^2}{x^2-2}$, 且 $f[\varphi(x)]$, 求 $\int \varphi(x)dx$.

（4）设 $f(x) = \begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x^2}, x \neq 0, \\ 0, \qquad\qquad x = 0, \end{cases}$ 试讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

（5）求摆线 $\begin{cases} x = 1-\cos t \\ y = t-\sin t \end{cases}$ 一拱（$0 \leq t \leq 2\pi$）的弧长.

（6）设单位质点在水平面内作直线运动，初速度 $v\big|_{t=0} = v_0$, 已知阻力与速度成正比（比例常数为 1），问 $t$ 为多少时此质点的速度为 $\dfrac{v_0}{3}$？并求到此时刻该质点所经过的路程。

**四、（本题满分 8 分）**

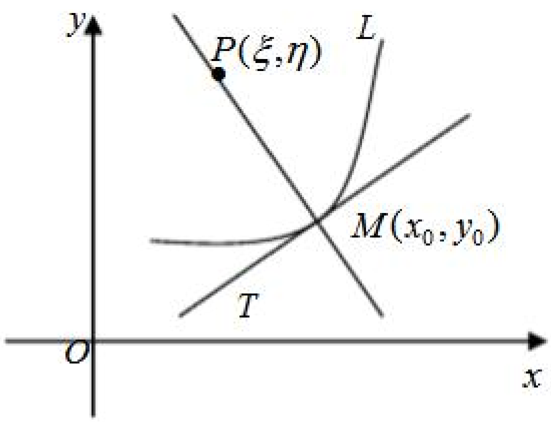
求函数 $f(x) = \int_0^{x^2} (2-t)e^{-t}dt$ 的最大值和最小值。

**五、（本题满分 8 分）**

设 $y = e^x$ 是微分方程 $xy' + p(x)y = x$ 的一个解，求此微分方程满足条件 $y\big|_{x=\ln 2} = 0$ 的特解。

六、（本题满分 8 分）

如图，设曲线 $L$ 的方程为 $y=f(x)$, 且 $y''>0$, 又 $MT, MP$ 分别为该曲线在点 $M$（$x_0, y_0$）处的切线和法线，已知线段 $MP$ 的长度为 $\frac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}$ (其中 $y_0'=y'(x_0), y_0''=y''(x_0)$) 试推导出点 $P$（$\xi$，$\eta$）的坐标表达式。




七、（本题满分 8 分）

设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}dt$, 计算 $\int_0^\pi f(x)dx$.

八、（本题满分 8 分）

设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$, 且 $f''(x)>$, 证明 $f(x)\geq x$.

# 1994 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)

**一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)**

（1）若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, x\neq 0,\\ a, \qquad\qquad x=0\end{cases}$ 在（$-\infty,+\infty$）上连续，则 $a=$____________.

（2）设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t),\\ y=t^3+t^2\end{cases}$ 所确定，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$____________.

（3）$\dfrac{d}{dx}\left[\int_0^{\cos 3x} f(t)dt\right]=$____________.

（4）$\int x^3 e^{x^2} dx=$____________.

（5）微分方程 $ydx+(x^2-4x)dy=0$ 的通解为____________.

**二、选择题**

1.设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$ 则（ ）

（A）$a=1,b=-\dfrac{5}{2}$ （B）$a=0,b=-2$

（C）$a=0,b=-\dfrac{5}{2}$ （D）$a=1,b=-2$

(2)设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, x\le 1\\ x^2, x>1\end{cases}$,则 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的（ ）

(A)左、右导数都存在 (B))左导数存在，但右导数不存在

(C)左导数不存在，但右导数存在 (D) )左、右导数都不存在

(3)设 $y=f(x)$ 是满足微分方程 $y''+y'-e^{\sin x}=0$ 的解，且 $f'(x_0)=0$,则 $f(x)$ 在（ ）

(A) $x_0$ 的某个领域内单调增加 (B) $x_0$ 的某个领域内单调减少

(C) $x_0$ 出取得极小值 (D) $x_0$ 处取得极大值

(4)曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有（ ）

(A)1 条 (B)2 条 (C)3 条 (D)4 条

（5）.设 $M=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 xdx, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx, P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$, 则有（ ）

（A）$N<P<M$ （B）$M<P<N$

（C）$N<M<P$ （D）$P<M<N$

**三、（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）**

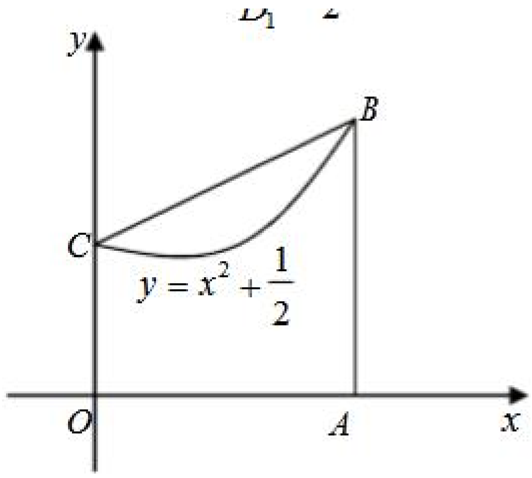
（1）设 $y=f(x+y)$,其中$f$具有二阶导数，且其一阶导数不等于1，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

（2）计算 $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}dx$.

（3）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n})$.

（4）计算 $\int\dfrac{dx}{\sin 2x+2\sin x}$.

（5）如图，设曲线方程为 $y=x^2+\dfrac{1}{2}$，梯形 $OABC$ 的面积为 $D$，曲边梯形 $OABC$ 的面积为 $D_1$，为 $A$ 的坐标为（$a$,0），$a>0$,证明$\dfrac{D}{D_1}<\dfrac{3}{2}$.




**四、（本题满分 9 分）**

设 $x>0$ 当时，方程 $kx+\dfrac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个解，求 $k$ 的取值范围

**五、（本题满分 9 分）**

设 $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$,

（1）求函数的增减区间及极值；

（2）求函数图像的凹凸区间及拐点；

（3）求其渐近线；

（4）作出其图形。

**六、（本题满分 9 分）**

求微分方程 $y''+a^2y=\sin x$ 的通解，其中常数 $a>0$.

**七、（本题满分 9 分）**

设 $f(x)$在$[0,1]$上连续且递减，证明：当$0<\lambda<1$时，$\int_0^{\lambda} f(x)dx \ge \lambda\int_0^1 f(x)dx$.

**八、（本题满分 8 分）**

求曲线 $y=3-|x^2-1|$与$x$轴围成的封闭图形绕直线$y=3$旋转所得的旋转体体积。

# 1993 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)

**一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)**

（1）$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x =$____________.

（2）函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$所确定，则 $\dfrac{dy}{dx}=$____________.

（3）设 $F(x)=\int_1^x (2-\dfrac{1}{\sqrt{t}})dt(x>0)$,则函数$F(x)$ 的单调减少区间是____________.

（4）$\int \dfrac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx =$____________.

（5）已知曲线 $y=f(x)$过点（$0,-\dfrac{1}{2}$），且其上任一点（$x,y$）处的切线斜率为 $xin(1+x^2)$,则$f(x)=$____________.

**二、选择题**

1.当 $x\to 0$时，变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$是 则（　）

（A）无穷小　　（B）无穷大

（C）有界的，但不是无穷小　　（D）有界的，但不是无穷大

(2)设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x^2-1|}{x-1}, & x\neq 1, \\ 2, & x=1, \end{cases}$则在点$x=1$处函数$f(x)$（　　）

(A)不连续　　(B))连续，但不可导

(C)可导，但导数不连续　　(D) )可导，且导数连续

(3)已知 $f(x)=\begin{cases} x^2, 0\le x<1, \\ 1, 1\le x\le 2, \end{cases}$设$F$（$x$）$=\int_1^x f(t)dt(0\le x\le 2)$,则$F$（$x$）为（　　）

(A)$\begin{cases} \dfrac{1}{3}x^3, 0\le x\le 1 \\ x, 1\le x\le 2 \end{cases}$　　(B)$\begin{cases} \dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3}, 0\le x\le 1 \\ x, 1\le x\le 2 \end{cases}$

(C)$\begin{cases} \dfrac{1}{3}x^3, 0\le x<1 \\ x-1, 1\le x\le 2 \end{cases}$　　(D)$\begin{cases} \dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{3}, 0\le x<1 \\ x-1, 1\le x\le 2 \end{cases}$

(4)设常数 $k>0$,函数$f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$在（$0,+\infty$）内零点个数为（　　）

(A)3　　(B)2　　(C)1　　(D)0

（5）.设 $f(x)=-f(-x)$,在（$0,+\infty$）内$f'(x)>0, f''(x)>0$,则$f(x)$在（$-\infty,0$）内 则有（　）

（A）$f'(x)<0, f''(x)<0$　　（B）$f'(x)<0, f''(x)>0$

（C）$f'(x)>0, f''(x)<0$　　（D）$f'(x)>0, f''(x)>0$

**三、（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）**

（1）设 $y=\sin[f(x^2)]$,其中$f$具有二阶导数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

（2）求 $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

（3）求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{1+\cos 2x}dx$.

（4）求 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{(1+x)^3}dx$.

（5）求微分方程（$x^2-1$）$dy+(2xy-\cos x)dx=0$ 满足初始条件求 $y|_{x=0}=0$的特解.

**四、（本题满分 9 分）**

设二阶常数系数线性微分方程求 $y''+ay'+\beta y=\gamma e^x$ 的一个特解为求 $y=e^{2x}+(1+x)e^x$, 试确定常数 $\alpha$，$\beta$，$\gamma$,并求该方程的通解。

**五、（本题满分 9 分）**

设平面图形 $A$ 由求 $x^2+y^2\le 2x$与$y\ge x$所确定，求图形$A$绕直线$x=2$旋转一周所得旋转体的体积。

**六、（本题满分 9 分）**

作半径为求 $r$ 的球外切正圆锥，问此圆锥的高求 $h$ 为何值时，其体积求 $V$ 最小，并求出该最小值。

**七、（本题满分 6 分）**

设 $x>0$,常数$a>e$,证明（$a+x$）$^a<a^{a+x}$.

**八、（本题满分 8 分）**

设求 $f'(x)$在$[0,a]$上连续，且$f(0)=0$,证明:$\left|\int_0^a f(x)dx\right|\le\dfrac{Ma^2}{2}$,其中$M=\max\limits_{0\le x\le a}|f'(x)|$.

# 1992 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)

**一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)**

（1）设 $\begin{cases} x = f(t) - \pi, \\ y = f(e^{3t} - 1), \end{cases}$ 其中$f$可导，且$f'(0) \neq 0$，则$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0} =$____________.

（2）函数 $y = x + 2\cos x$在$[0, \dfrac{\pi}{2}]$上的最大值为____________.

（3）设 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{e^x - \cos x} =$____________.

（4）$\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x(x\ \ +1)} =$____________.

（5）由曲线 $y = xe^x$ 与直线 $y = ex$ 所围成的图形的面积 $S =$____________.

**二、选择题**

1.当$x \to 0$时，$x - \sin x$是$x^2$的 则（　）

（A）低阶无穷小　　　　（B）高阶无穷小

（C）等价无穷小　　　　（D）同阶但非等价的无穷小

(2)设 $f(x) = \begin{cases} x^2, x \leq 0 \\ x^2 + x, x > 0 \end{cases}$,则（　）

(A) $f(-x) = \begin{cases} -x^2, x \leq 0 \\ -(x^2 + x), x > 0 \end{cases}$　　(B)) $f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x)，x < 0 \\ -x^2, x \geq 0 \end{cases}$

(C) $f(-x) = \begin{cases} x^2, x \leq 0 \\ x^2 - x, x > 0 \end{cases}$　　(D) ) $f(-x) = \begin{cases} x^2 - x，x < 0 \\ x^2, x \geq 0 \end{cases}$

(3)当$x \to 1$时，函数$\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{x-1}}$的极限（　）

(A)等于 2　　(B)等于 0　　(C)等$\infty$　　(D)不存在但不为$\infty$

(4)设 $f(x)$连续，$F(x) = \int_0^{x^2} f(t^2)dt$,则$F'(x)$等于 内零点个数为（　）

(A) $f(x^4)$　　(B) $x^2 f(x^4)$　　(C) $2xf(x^4)$　　(D) $2xf(x^2)$

（5）.若 $f(x)$的导函数是$\sin x$,则$f(x)$有一个原函数为 则有（　）

（A）$1 + \sin x$　（B）$1 - \sin x$　（C）$1 + \cos x$　（D）$1 - \cos x$

**三、（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）**

（1）求 $\lim\limits_{x \to \infty} (\dfrac{3 + x}{6 + x})^{\frac{x-1}{2}}$.

（2）设函数 $y=y(x)$由方程$y-xe^{y}=1$所确定，求$\frac{d^{2y}}{dx^{2}}\Big|_{x=0}$的值.

（3）求$\int\frac{x^{3}}{\sqrt{1+x^{2}}}dx.$

（4）求$\int_{0}^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx.$

（5）求微分方程（$y-x^{3})dx-2xdy=0$的通解.

**四、（本题满分 9 分）**

设 $f(x)=\begin{cases}1+x^{2}, x<0\\ e^{-x}, x\geq 0\end{cases}$,求$\int_{1}^{3}f(x-2)dx.$

**五、（本题满分 9 分）**

求微分方程 $y''-3y'+2y=xe^{x}$的通解.

**六、（本题满分 9 分）**

计算曲线 $y=\ln(1-x^{2})$上相应于$0\leq x\leq\frac{1}{2}$的一段孤的长度.

**七、（本题满分 6 分）**

求曲线 $y=\sqrt{x}$的一条切线$l$,使该曲线与切线$l$及直线$x=0,x=2$所围成的平面图形面积最小。

**八、（本题满分 8 分）**

已知 $f''(x)<0, f(0)=0$,试证：对任意的二正数$x_{1}$和$x_{2}$,恒有$f(x_{1}+x_{2})<f(x_{1})+f(x_{2})$成立.

# 1991 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)

**一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)**

（1）设 $y=\ln(1+3^{-x})$,则$dy=$______________.

（2）曲线 $y=e^{-x^2}$ 的上凸间是_____________.

（3）设$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx=$______________.

（4）质点以速度$t\sin(t^2)$米每秒作直线运动，则从时刻$t_1=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$秒到$t_2=\sqrt{\pi}$秒内质点所经过的路程等于______米.

（5）$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=$_____________.

**二、选择题**

1.若曲线$y=x^2+ax+b$和$2y=-1+xy^3$在点（1,−1）处相切，其中$a,b$是常数，则（　）

（A）$a=0,b=-2$　　（B）$a=1,b=-3$

（C）$a=-3,b=1$　　（D）$a=-1,b=-1$

(2)设函数$f(x)=\begin{cases}x^2,0\le x\le 1,\\ 2-x,1<x\le 2,\end{cases}$记$F$（$x$）$=\int_0^x f(t)dt,0\le x\le 2,$则（　　）

(A) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3},0\le x\le 1\\ \frac{1}{3}+2x-\frac{x^2}{3},1<x\le 2\end{cases}$　　(B)) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3},0\le x\le 1\\ -\frac{7}{6}+2x-\frac{x^2}{2},1<x\le 2\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3},0\le x\le 1\\ \frac{x^2}{3}+2x-\frac{x^2}{2},1<x\le 2\end{cases}$　　(D) ) $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3},0\le x\le 1\\ 2x-\frac{x^2}{2},1<x\le 2\end{cases}$

(3)设函数$f(x)$在（$-\infty,+\infty$）内有定义，$x_0\ne 0$是函数$f(x)$的极大点，则（　　）

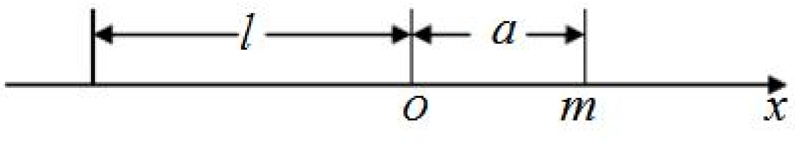
(A) $x_0$必是$f(x)$的驻点　　(B) $-x_0$必是$-f(-x)$的极小点

(C) $-x_0$必是$-f(x)$的极小点　　(D) 对一切$x$都有$f(x)\le f(x_0)$

(4)曲线$y=\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$（　　）

(A)没有渐近线　(B)仅有水平渐近线　　(C)仅有铅直渐近线　(D)既有水平渐近线又有铅直渐近线

（5）.如图，$x$ 轴上有一线密度为常数 $\mu$，长度为 $l$ 的细杆，有一质量为 $m$ 的质点到杆右端的距离为 $a$，已知引力系数为 $k$，则质点和细杆之间引力的大小为（　）




（A）$\int_{-1}^{0}\frac{km\mu}{(a-x)^2}dx$　　（B）$\int_{0}^{l}\frac{km\mu}{(a-x)^2}dx$

（C）$2\int_{-\frac{l}{2}}^{0}\frac{km\mu}{(a-x)^2}dx$　　（D）$2\int_{0}^{\frac{l}{2}}\frac{km\mu}{(a-x)^2}dx$

**三、（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）**

（1）设$\begin{cases}x=t\cos t\\ y=t\sin t\end{cases}$,求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

（2）计算$\int_1^4\frac{dx}{x(1+\sqrt{x})}$.

（3）求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}$.

（4）求$\int x\sin^2 x dx$.

（5）求微分方程 $xy'+y=xe^x$满足$y(1)=1$的特解.

**四、（本题满分 9 分）**

利用导数证明：当 x>1 时，有不等式$\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x}$成立.

**五、（本题满分 9 分）**

求微分方程 $y''+y=x+\cos x$的通解.

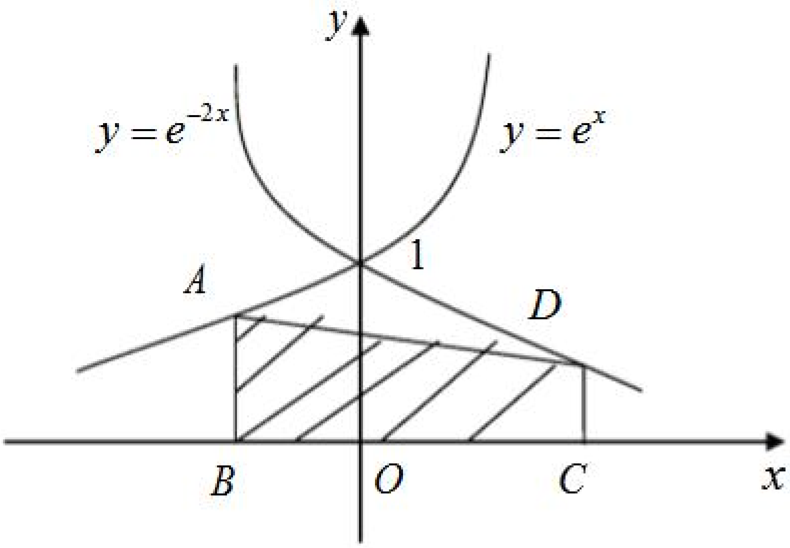
六、（本题满分 9 分）

曲线 $y=(x-1)(x-2)$和$x$轴围成一平面图形，求此平面图形绕$y$轴旋转一周所成的旋转体的体积.

七、（本题满分 9 分）

如图，$A$和$D$ 分别是曲线 $y=e^{x}$和$y=e^{-2x}$ 上的点，$AB$和$DC$ 均垂直 $x$ 轴，且

$|AB|:|DC|=2:1,|AB|<1$，求点$B$和$C$的横坐标，使梯形$ABCD$的面积最大.




八、（本题满分 8 分）

设函数 $f(x)$在（$-\infty,+\infty$）内满足$f(x)=f(x-\pi)+\sin x$, 且$f(x)=x, x\in[0,\pi)$, 计算$\int_{\pi}^{3\pi} f(x)dx$.

# 1990 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)

**一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)**

（1）曲线 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ 上对应于点 $t=\dfrac{\pi}{6}$ 点处的法线方程是____________.

（2）设 $y=e^{\tan\frac{1}{x}}.\sin\dfrac{1}{x}$,则$y'=$____________.

（3）$\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx=$____________.

（4）下列两个积分的大小关系是：$\int_{-2}^{-1} e^{-x^3}dx$ ____________ $\int_{-2}^{-1} e^{x^3}dx.$

（5）设函数 $f(x)=\begin{cases} 1, |x|\le 1 \\ 0, |x|>1 \end{cases}$,则函数$f[f(x)]=$____________.

**二、选择题**

1.已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$,其中$a,b$是常数，则（　）

（A）$a=1,b=1$　　　　（B）$a=-1,b=1$

（C）$a=1,b=-1$　　　　（D）$a=-1,b=-1$

(2)设函数 $f(x)$在（$-\infty,+\infty$）上连续，则$d\left[\int f(x)dx\right]$等于（　　）

(A) $f(x)$　　　　(B)) $f(x)dx$

(C) $f(x)+C$　　　　(D) ) $f'(x)dx$

(3)已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 $n$ 为大于 2 的正整数时，$f(x)$ 的 $n$ 阶导数 $f^{(n)}(x)$（　　）

(A) $n![f(x)]^{n+1}$　(B) $n[f(x)]^{n+1}$　(C) $[f(x)]^{2n}$　(D) $n![f(x)]^{2n}$

(4)设 $f(x)$ 是连续函数，且 $F$（$x$）$=\int_x^{e^{-x}} f(t)dt$，则$F'$（$x$）等于（　　）

(A) $-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$　　　　(B) $-e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

(C) $e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$　　　　(D) $e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$

（5）.设 $F$（$x$）$=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x\ne 0 \\ f(0), & x=0 \end{cases}$,其中$f(x)$在$x=0$出可导，$f'(0)\ne 0, f(0)=0$,则$x=0$是$F(x)$的（　）

（A）连续点　　　　（B）第一类间断点

（C）第二类间断点　　　　　　　　　　（D）连续点或间断点不能由此确定

**三、（本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）**

（1）已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+a}{x-a})^x=9,$ 求常数 $a.$

（2）求由方程 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的微分 $dy.$

（3）求曲线 $y=\dfrac{1}{1+x^2}(x>0)$ 的拐点.

（4）计算 $\displaystyle\int\frac{\ln x}{(1-x)^2}dx.$

（5）求微分方程 $x\ln xdy+(y-\ln x)dx=0$ 满足条件 $y\big|_{x=e}=1$ 的特解.

**四、（本题满分 9 分）**

在椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的第一象限部分上求一点 $P$，使该点处的切线、椭圆及两坐标轴所围图形面积为最小（其中 $a>0,b>0$）.

**五、（本题满分 9 分）**

证明：当 $x>0,$ 有不等式 $\arctan x+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\pi}{2}.$

**六、（本题满分 9 分）**

设 $f(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}dt,$ 其中 $x>0,$ 求 $f(x)+f(\dfrac{1}{x}).$

**七、（本题满分 9 分）**

过点 $P$（1,0）作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，该切线与上述抛物线及 $x$ 轴围成一平面图形，求此平面图绕 $x$ 轴旋转一周所围成旋转体的体积。

**八、（本题满分 8 分）**

求微分方程 $y''+4y'+4y=e^{ax}$ 之通解，其中 $a$ 为实数.

# 1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

**一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.把答案填在题中横线上)**

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot 2x =$ ____________.

(2) $\int_0^{\pi} t\sin t dt =$____________.

(3)曲线 $y=\int_0^x (t-1)(t-2)dt$在点$(0,0)$处的切线方程是____________.

(4) 设$f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+n)$,则$f'(0)=$____________.

(5) 设$f(x)$是连续函数，且$f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$,则$f(x)=$____________.

(6) 设$f(x)=\begin{cases} a+bx^2, x\le 0 \\ \dfrac{\sin bx}{x}, x>0 \end{cases}$在$x=0$处连续，则常数$a$与$b$ 应满足的关系是____________.

(7) 设 $\tan y = x+y$,则$dy=$____________.

**二、计算题（每小题 4 分，满分 20 分.）**

(1)已知 $y=\arcsin e^{-\sqrt{x}}$,求$y'$.

(2) 求$\int \dfrac{dx}{x\ln^2 x}$.

(3) 求$\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

(4)已知$\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=\arctan t, \end{cases}$求$\dfrac{dy}{dx}$及$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(5)已知$f(2)=\dfrac{1}{2}, f'(2)=0$及$\int_0^2 f(x)dx=1$,求$\int_0^1 x^2 f''(2x)dx$.

**三、选择题(每小题 3 分,满分 18 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)**

(1) 设$x>0$时，曲线$y=x\sin\dfrac{1}{x}$（　　）

(A)有且仅有水平渐近线　　(B)有且仅有铅直渐近线

(C)既有水平渐近线,也有铅直渐近线　　(D)既无水平渐近线,也无铅直渐近线

(2) 若$3a^2-5b<0$，则方程$x^5+2ax^3+3bx+4c=0$（　　）

(A)无实根　　(B)有唯一实根　　(C)有三个不同实根　　(D)有五个不同实根

(3)曲线 $y=\cos x(-\dfrac{\pi}{2}\le x\le \dfrac{\pi}{2})$与$x$轴所围成的图形，绕 $x$ 轴旋转一周所成的旋转体的体积为（　　）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　　(B) $\pi$　　(C) $\dfrac{\pi^2}{2}$　　(D) $\pi^2$

(4)设两函数 $f(x)$及$g(x)$都在$x=a$ 处取得极大值，则函数 $F(x)=f(x)g(x)$在$x=a$处（　　）

(A)必取极大值　(B)必取极小值　(C)不可能取极值 (D)是否取极值不能确定

(5)微分方程 $y''-y=e^x+1$ 的一个特解应具有形式（式中 $a,b$ 为常数）（　　）

(A) $ae^x+b$　　(B) $axe^x+b$　　(C) $ae^x+bx$　　(D) $axe^x+bx$

(6)设 $f(x)$在$x=a$ 的某个领域内有定义，则 $f(x)$在$x=a$ 处可导的一个冲分条件是（　　）

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]$存在　(B) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a+h)}{h}$存在

(C) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在　(D) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在

**四、(本题满分 6 分)**

求微分方程 $xy'+(1+x)y=e^{2x}(0<x<+\infty)$满足$y(1)=0$的解.

**五、(本题满分 7 分)**

设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$，其中 $f$ 为连续函数，求 $f(x)$.

**六、(本题满分 7 分)**

证明方程 $\ln x=\dfrac{x}{e}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$在区间$(0,+\infty)$内有且仅有两个不同实根.

**七、（本题满分 11 分）**

对函数 $y=\dfrac{x+1}{x^2}$,填写下表：

| | |
|---|---|
| 单调减少区间 | |
| 单调增加区间 | |
| 极值点 | |
| 极值 | |
| 凹$(\bigcup)$区间 | |
| 凸$(\bigcap)$区间 | |
| 拐点 | |
| 渐近线 | |

**八、（本题满分 10 分）**

设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，当$0\le x\le1$时，$y\ge0$, 又已知该抛物线与 $x$ 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\dfrac{1}{3}$，试确定 $a,b,c$ 使此图形绕 $x$ 选择一周而成的旋转体的体积$V$ 最小.

# 1988 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试卷

**一、(本题共 3 小题,每小题 5 分,满分 15 分)**

(1)求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n3^n}$的收敛域.

(2)设$f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$且$\varphi(x)\geq 0$,求$\varphi(x)$及其定义域.

(3)设$\sum$为曲面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧,计算曲面积分$I=\oiint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$.

**二、填空题(本题共 4 小题,每小题 3 分,满分 12 分.把答案填在题中横线上)**

(1)若$f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t(1+\frac{1}{x})^{2tx}$,则$f'(t)=$____________.

(2)设$f(x)$连续且$\int_0^{x^3-1}f(t)dt=x$,则$f(7)=$____________.

(3)设周期为 2 的周期函数,它在区间$(-1,1]$上定义为$f(x)=\begin{matrix}2\\x^2\end{matrix}\begin{cases}-1<x\leq 0\\0<x\leq 1\end{cases}$,则的傅里叶$(Fourier)$级数在$x=1$处收敛于____________.

(4)设4阶矩阵$\mathbf{A}=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4],\mathbf{B}=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4]$,其中$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$均为4维列向量,且已知行列式$|\mathbf{A}|=4,|\mathbf{B}|=1,$则行列式$|\mathbf{A}+\mathbf{B}|=$____________.

**三、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)**

(1)设$f(x)$可导且$f'(x_0)=\frac{1}{2}$,则$\Delta x\to 0$时,$f(x)$在$x_0$处的微分$dy$是(　　)

(A)与$\Delta x$等价的无穷小　　(B)与$\Delta x$同阶的无穷小

(C)比$\Delta x$低阶的无穷小　　(D)比$\Delta x$高阶的无穷小

(2)设$y=f(x)$是方程$y''-2y'+4y=0$的一个解且$f(x_0)>0,f'(x_0)=0,$则函数$f(x)$在点$x_0$处(　　)

(A)取得极大值　　(B)取得极小值

(C)某邻域内单调增加　　(D)某邻域内单调减少

(3)设空间区域$\Omega_1:x^2+y^2+z^2\leq R^2,z\geq 0,\Omega_2:x^2+y^2+z^2\leq R^2,x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0,$则:(　　)

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1} xdv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} dv$　　　(B) $\iiint\limits_{\Omega_1} ydv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} ydv$

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1} zdv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} zdv$　　　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1} xyzdv = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyzdv$

(4)设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛,则此级数在 $x=2$ 处（　　）

(A)条件收敛　　　(B)绝对收敛

(C)发散　　　(D)收敛性不能确定

(5) $n$ 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s (3 \le s \le n)$ 线性无关的充要条件是（　　）

(A)存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$, 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \ne 0$

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量均线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量不能用其余向量线性表示

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量都不能用其余向量线性表示

**四、(本题满分 6 分)**

（1）设 $u = yf(\frac{x}{y}) + xg(\frac{y}{x})$, 其中函数 $f$ 、$g$ 具有二阶连续导数,求 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

（2）计算 $\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\frac{\pi x}{2y} dy.$

（3）求椭球面 $x^2 + xy^2 + 3z^2 = 21$ 上某点 M 处的切平面 $\pi$ 的方程，使平面 $\pi$ 过已知直线 $l: \frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{2z-1}{-2}.$

**五、(本题满分 8 分)**

设函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2\,\mathrm{e}^x$, 其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y = x^2 - x - 1$ 在该点处的切线重合,求函数 $y = y(x)$.

**六、（本题满分 9 分）**

设位于点 $(0,1)$ 的质点 $A$ 对质点 $M$ 的引力大小为 $\dfrac{k}{r^2}$($k>0$ 为常数,$r$ 为 $A$ 质点与 $M$ 之间的距离),质点 $M$ 沿直线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 自 $B(2,0)$ 运动到 $O(0,0)$, 求在此运动过程中质点 $A$ 对质点 $M$ 的引力所作的功.

**七、（本题满分 6 分）**

已知 $\mathbf{AP}=\mathbf{BP}$, 其中 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$,$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}$, 求 $\mathbf{A},\mathbf{A}^5$.

**八、（本题满分 8 分）**

已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix}$ 与 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ 相似.

(1)求 $x$ 与 $y$.

(2)求一个满足 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{B}$ 的可逆阵 $\mathbf{P}$.

**九、（本题满分 9 分）**

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且在 $(a,b)$ 内有 $f'(x)>0$, 证明:在 $(a,b)$ 内存在唯一的 $\xi$, 使曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi),x=a$ 所围平面图形面积 $S_1$ 是曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi),x=b$ 所围平面图形面积 $S_2$ 的 3 倍.

# 1987年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试卷

**一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分.把答案填在题中横线上)**

(1)当 $x=$____________时,函数 $y=x\cdot 2^x$ 取得极小值.

(2)由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=\mathrm{e}+1-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积是____________.

(3)与两直线 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ \end{cases}$ 及 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{1}$ 都平行且过原点的平面方程为____________ $.z=2+t$

(4)设 $L$ 为取正向的圆周 $x^2+y^2=9$, 则曲线积分 $\oint_L (2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy=$____________.

(5)已知三维向量空间的基底为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)$, 则向量 $\boldsymbol{\beta}=(2,0,0)$ 在此基底下的坐标是____________.

**二、(本题满分14分)**

(1)(6分)计算定积分 $\int_{-2}^{2}(|x|+x)e^{-|x|}dx.$

(2)(8分)求正的常数 $a$ 与 $b$, 使等式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \dfrac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}dt=1$ 成立.

**三、(本题满分7分)**

设函数 $z=f(u,x,y), u=xe^y$，其中 $f$ 有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

**四、(本题满分8分)**

求微分方程 $y'''+6y''+(9+a^2)y'=1$ 的通解,其中常数 $a>0$.

**五、选择题(本题共 4 小题,每小题 3 分,满分 12 分.每小题给出的四个选项中,只有一个符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)**

(1)设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1,$ 则在 $x=a$ 处（　　）

(A) $f(x)$ 的导数存在,且 $f'(a)\neq 0$　　　(B) $f(x)$ 取得极大值

(C) $f(x)$ 取得极小值　　　(D) $f(x)$ 的导数不存在

(2)设 $f(x)$ 为已知连续函数, $I=t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)dx,$ 其中 $t>0,s>0,$ 则 $I$ 的值（　　）

(A)依赖于 $s$ 和 $t$　　　(B)依赖于 $s$ 、 $t$ 和 $x$

(C)依赖于 $t$ 、 $x$ ,不依赖于 $s$　　　(D)依赖于 $s$ ,不依赖于 $t$

(3)设常数 $k>0,$ 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$ （　　）

(A)发散　　　(B)绝对收敛

(C)条件收敛　　　(D)散敛性与 $k$ 的取值有关

(4)设 $\mathbf{A}$ 为 $n$ 阶方阵，且 $\mathbf{A}$ 的行列式 $|\mathbf{A}|=a\neq 0,$ 而 $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵，则 $|\mathbf{A}^*|$ 等于

(A) $a$　　　(B) $\dfrac{1}{a}$　　　(C) $a^{n-1}$　　　(D) $a^n$

**六、（本题满分 10 分）**

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\bullet 2^n}x^{n-1}$ 的收敛域，并求其和函数.

**七、（本题满分 10 分）**

求曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}x(8y+1)dydz+2(1-y^2)dzdx-4yzdxdy,$$

其中 $\Sigma$ 是由曲线 $f(x)=\begin{cases}z=\sqrt{y-1} & 1\le y\le 3\\ x=0\end{cases}$ 绕 $y$ 轴旋转一周而成的曲面,其法向量与 $y$ 轴正向的夹角恒大于 $\dfrac{\pi}{2}$.

**八、（本题满分 10 分）**

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可微,对于 $[0,1]$ 上的每一个 $x$, 函数 $f(x)$ 的值都在开区间 $(0,1)$ 内,且 $f'(x)\neq 1$,证明在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 $x$, 使得 $f(x)=x$.

**九、（本题满分 8 分）**

问 $a,b$ 为何值时,现线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$$

有唯一解,无解,有无穷多解?并求出有无穷多解时的通解.

**十、（本题满分 6 分）**

设 $\lambda_1$，$\lambda_2$为$n$阶方阵 $A$ 的特征值，$\lambda_1\neq\lambda_2$，而 $x_1,x_2$ 分别为对应的特征向量，试证明：$x_1+x_2$不是$A$的特征向量。