Modelując populację pewną zmienną losową *X* nie znamy parametrów jej rozkładu (tym samym parametrów populacji).

Na podstawie pobranej próby (reprezentatywnej) będziemy chcieli **oszacować te parametry (estymować).** Estymator jest zmienną losową, która dla każdej próby przyjmuje inną wartość, czyli inną **ocenę parametru**.

Estymator danego parametru populacji będziemy nazywać określoną **funkcją elementów próby** spełniającą ustalone kryteria optymalności. Postać estymatora zależy od sformułowanych kryteriów - *np. oceną średniej (wartości oczekiwanej) może być średnia arytmetyczna, średnia geometryczna albo średnia z min i max wartości elementów próby* - powinna być tak dobrana, aby zapewniała oceny jak najbardziej zbliżone do szacowanego parametru.

Niech θ będzie **nieznanym parametrem** populacji generalnej, a $\hat{\theta}$ niech **będzie oszacowaniem (estymatorem)** tego parametru na podstawie próby ($\hat{\theta}$ jest funkcja próby $\hat{\theta} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$). Chcemy, żeby oczekiwana wartość tego estymatora była równa tej nieznanej wartości parametru:

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

wtedy **estymator** $\hat{\theta}$ nazywamy **ESTYMATOREM NIEOBCIĄŻONYM.**

Jedną z najbardziej rozpowszechnionych metod estymacji jest **Metoda Najmniejszych Kwadratów**, według której tak dobieramy estymator, żeby: $E\left\{\left(\theta - \hat{\theta}\right)^2\right\} = min$.

Można udowodnić bardzo **użyteczne twierdzenia odnoszące się do funkcji elementów próby.**

Twierdzenie

Jeżeli $X \sim N(m, \sigma)$ (**zmienna losowa X ma rozkład normalny z wartością oczekiwaną m i odchyleniem standardowym σ**), a $\{x_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ jest $\boldsymbol{n}$ **- elementową próbą z tego rozkładu**

oraz

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ jest **ŚREDNIA ARYTMETYCZNA**

$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ jest **ŚREDNIA SUMA KWADRATÓW ODCHYLEŃ ELEMENTÓW PRÓBY OD JEJ ŚREDNIEJ (WARIANCJA PRÓBKI)**

to zachodzi:

- $\bar{x} \sim N(m, \sigma_{\bar{x}})$, gdzie $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (ma rozkład normalny ze średnią m oraz odchyleniem stand. $\sigma_{\bar{x}}$)
- $\frac{(n-1) \cdot S^2}{\sigma^2} \sim {\chi^2}_{n-1}$ (ma rozkład χ^2 z liczbą stopni swobody $n-1$)
- $t = \frac{\bar{x} - m}{S_{\bar{x}}}$, gdzie $S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{S^2}{n}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$ (ma rozkład *t*-Studenta z liczbą stopni swobody $n-1$)

Z powyższego twierdzenia można uzyskać zależności:

- $E(\bar{x}) = m$ Średnia arytmetyczna jest **estymatorem nieobciążonym średniej z populacji**
- $D^2(\bar{x}) = \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ Wariancja średniej jest *n*-krotnie mniejsza od wariancji cechy oryginalnej (nieznanej) dla populacji
- $E(\sigma^2) = S^2$ Średni kwadrat odchyleń jest **oceną nieobciążoną wariancji w populacji**

Odchylenie standardowe średniej $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ jest **błędem standardowym jaki popełniamy przyjmując średnią arytmetyczną za ocenę średniej w populacji** (im większe *n* , tym mniejszy błąd)

Liczbę $S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{S^2}{n}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$ nazywamy **BŁĘDEM ŚREDNIEJ ARYTMETYCZNEJ.**