

# Teoría Electromagnética

## Taller 1: Electrostatica

Cindy Tatiana Coy Pinto  
Código: 2200811  
Juan Camilo Murcia Pérez  
Código: 2191322

*Presentado a:*  
Prof. Fabio Lora Clavijo

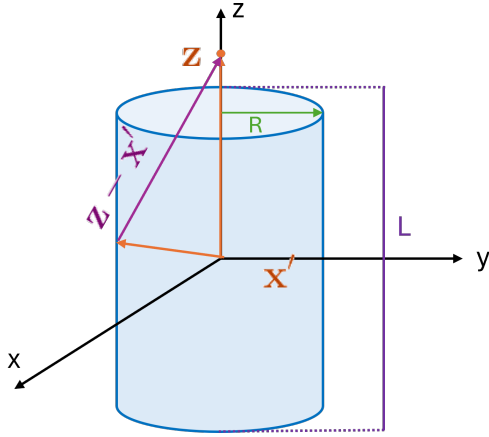
6 de abril de 2024

Universidad  
Industrial de  
Santander



1. Encuentre el potencial escalar electrostático sobre el eje de un cilindro sólido, cargado uniformemente a una distancia  $z$  del centro. La longitud del cilindro es  $L$ , su radio es  $R$ , y la densidad de carga es  $\rho$ . Use este resultado para calcular el campo eléctrico sobre este eje. Asuma que  $z > L/2$ .

Partiendo de un cilindro centrado en el origen del sistema de coordenadas; ubicando los vectores donde se encuentra la distribución de carga, así como donde vamos a medir (sobre el eje  $z$ ), nos queda el enunciado representado en la figura (1).



**Fig. 1.** Cilindro centrado en el origen, con distribución de carga uniforme, con los vectores asociados al cálculo del potencial.

Escribimos el potencial de la forma convencional

$$\Phi(\mathbf{x}) = k \int \frac{dq}{|\mathbf{z} - \mathbf{x}'|}, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \quad (1)$$

Vamos a calcular primero en un punto que está sobre el eje  $z$ , y cambiaremos a coordenadas cilíndricas.

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= k \int \frac{dq}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + (z - z')^2}}, \\ &= k \int \frac{dq}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}}, \\ &= k \iiint \frac{\rho}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} r dr d\theta dz', \\ &= k \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} r dr d\theta dz'. \end{aligned}$$

Usando la propiedad:

$$\int_a^b s(z') dz' = \int_{a+z}^{b+z} s(z' - z) dz' \quad (2)$$

Podemos reescribir la integral respecto a  $z'$  sin el  $z$  que en nuestro caso no se va integrar en toda la operación, para conservar la forma de [2] tenemos:

$$\rho k \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \int_z^{R+z} \frac{1}{\sqrt{r^2 + (-z')^2}} r dr d\theta dz', \quad (3)$$

en donde utilizamos una sustitución simple donde  $w = r^2 + z'^2$ , y por ende  $dw = 2r dr$ . Ajustamos los límites de integración y obtenemos

$$\Phi(z) = \frac{\rho k}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \int_{z^2+z'^2}^{(R+z)^2+z'^2} \frac{1}{\sqrt{w}} dw d\theta dz'. \quad (4)$$

Integramos sobre  $w$ , y como el integrando no depende de  $\theta$  de forma explícita, simplemente integramos sobre los límites como una constante. Llegamos entonces a

$$\Phi(z) = 2\pi\rho k \int_{-L/2}^{L/2} \left[ \sqrt{(R+z)^2 + z'^2} - \sqrt{z^2 + z'^2} \right] dz' \quad (5)$$

$$\rightarrow \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \left[ \sqrt{(R+z)^2 + z'^2} - \sqrt{z^2 + z'^2} \right] dz' \quad (6)$$

Integramos sobre  $z'$ , obteniendo

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left\{ \left[ \frac{z'}{2} \sqrt{(R+z)^2 + z'^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(R+z)^2}{2} \ln \left( z' + \sqrt{(R+z)^2 + z'^2} \right) \right] \right|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\ &\quad \left. - \left[ \frac{z'}{2} \sqrt{z^2 + z'^2} + \frac{z^2}{2} \ln \left( z' + \sqrt{z^2 + z'^2} \right) \right] \right|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

Evaluando, obtenemos

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left[ \frac{L}{4} \sqrt{(R+z)^2 + \frac{L^2}{4}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(R+z)^2}{2} \ln \left( \frac{L}{2} + \sqrt{(R+z)^2 + \frac{L^2}{4}} \right) + \frac{L}{4} \sqrt{(R+z)^2 + \frac{L^2}{4}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(R+z)^2}{2} \ln \left( -\frac{L}{2} + \sqrt{(R+z)^2 + \frac{L^2}{4}} \right) \right]; \quad (8) \end{aligned}$$

donde, reescribiendo el término  $(R+z)^2 + \frac{L^2}{4}$  como  $\Omega$ , y empleando las propiedades de la función logaritmo natural, tenemos, finalmente, que

$$\Phi(z) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left\{ \frac{L}{2} \left( \sqrt{\Omega} - \sqrt{z^2 + \frac{L^2}{4}} \right) + \ln \left[ \frac{\left( \frac{\frac{L}{2} + \sqrt{\Omega(z)}}{-\frac{L}{2} + \sqrt{\Omega(z)}} \right)^{\frac{(R+z)^2}{2}}}{\left( \frac{\frac{L}{2} + \sqrt{z^2 + \frac{L^2}{4}}}{-\frac{L}{2} + \sqrt{z^2 + \frac{L^2}{4}}} \right)^{\frac{z^2}{2}}} \right] \right\}. \quad (9)$$

Esta sería nuestra expresión final para el potencial, dependiente del punto donde vamos a medir sobre el eje  $z$ , y la longitud  $L$  del cilindro. Ahora bien, haciendo una aproximación donde la distancia  $z \gg \frac{L}{2}$ , por ende  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ ; podemos obtener la expresión siguiente de potencial lejano:

$$\Phi(z) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left\{ \frac{L}{2} \left( \frac{L^2}{8(R+z)^2} \right) + \frac{(R+z)^2}{2} \ln \left[ \frac{\left| \frac{L}{2} + 1 + \frac{L^2}{8(R+z)^2} \right|}{\left| -\frac{L}{2} + 1 + \frac{L^2}{8(R+z)^2} \right|} \right] - \frac{z^2}{2} \ln \left[ \frac{\left| \frac{L}{2} + 1 + \frac{L^2}{8z^2} \right|}{\left| -\frac{L}{2} + 1 + \frac{L^2}{8z^2} \right|} \right] \right\}. \quad (10)$$

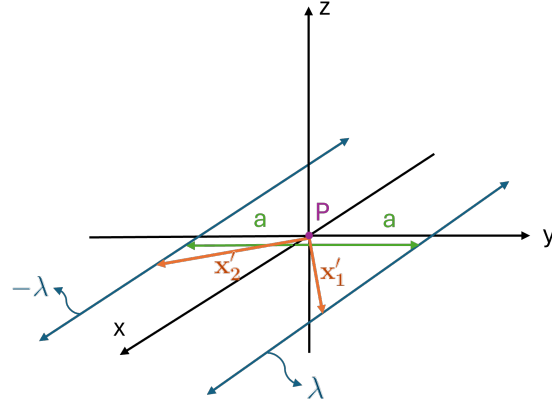
Esta expresión final también depende del  $z$  donde vamos a medir el potencial, y de la longitud  $L$  del cilindro cargado.

## 2. Dos cables infinitamente largos, con densidad de carga $+\lambda$ $-\lambda$ e ponen en paralelo al eje $x$ una distancia $a$ y $-a$ , respectivamente.

### a. Encuentre el potencial en cualquier punto $(x, y, z)$ , usando el origen como referencia.

Comenzaremos por ilustrar el problema que se nos plantea (fig. 2).

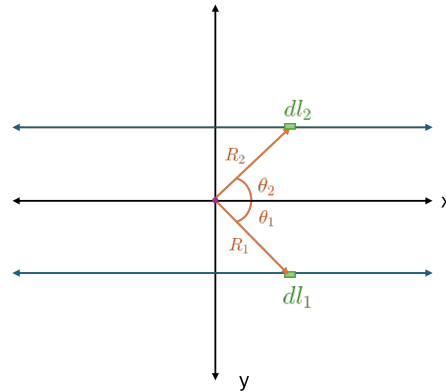
Planteamos ahora el potencial calculado sobre el punto P, origen del sistema coordenado. Conociendo que los vectores tienen las componentes siguientes:  $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{x}'_1 = (x, a, 0)$  y  $\mathbf{x}'_2 = (x, -a, 0)$ ; obtenemos que la expresión inicial para el potencial es la siguiente:



**Fig. 2.** Ilustración punto 2. Dos cables infinitamente largos con sus respectivas densidades de carga lineal, separados cada uno del eje  $x$  por una distancia  $a$ .

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int \frac{\lambda dl_1}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_1|} - \int \frac{\lambda dl_2}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_2|} \right], \quad (11)$$

donde integraríamos sobre los cables infinitos para obtener el valor del potencial en cualquier punto. He aquí un problema, puesto que en la vida real no podemos integrar sobre todo el espacio (desde  $-\infty$  hasta  $\infty$ ). Entonces, hacemos un cambio de variable, considerando las distancias y ángulos entre los diferenciales  $dl$ , tal que  $dl_1 = R_1 \cos \theta_1 d\theta_1$ , y  $dl_2 = R_2 \cos \theta_2 d\theta_2$  (ver fig. 3). Los límites de integración ahora quedarían en función del ángulo  $\theta$ , barriendo de 0 hasta  $\pi/2$ .



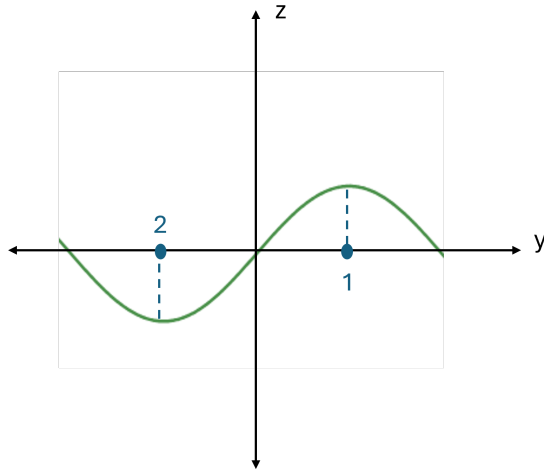
**Fig. 3.** Ilustración del cambio de variable, punto 2. Consideramos una reformulación de los diferenciales para resolver la integral.

Con lo cual, tenemos la expresión siguiente:

$$\Phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{R_1 \cos \theta_1 d\theta_1}{R_1} - \int_0^{\pi/2} \frac{R_2 \cos \theta_2 d\theta_2}{R_2} \right] \quad (12)$$

En esta ecuación vemos que, debido a que los dos hilos están a una misma distancia del eje  $x$ , y barren los mismos ángulos, debido a que la densidad de carga del hilo 2 es igual a la del hilo 1 pero con signo contrario, entonces las integrales se cancelarían, y obtendríamos que el potencial es cero en el origen del centro coordenado. Esto nos aporta cierta información. En primer lugar, si vamos a medir en cualquier punto sobre el eje  $x$ , sucedería una situación similar a cuando medimos en el origen, ya que los hilos son considerados de longitud infinita, las contribuciones siempre se cancelarán sobre el eje  $x$ .

Tenemos, entonces, que el eje  $x$  del sistema coordenado es una equipotencial con valor  $\Phi(x) = 0$ . Asimismo, analizando la configuración, podemos ver que hay dos picos de potencial, correspondientes a donde se ubicarían los dos hilos, sobre el plano  $yz$ . Podemos pensar, entonces, que el potencial se ve como algo así (fig. 4).



**Fig. 4.** Interpretación del potencial sobre el plano  $yz$ , con base en los resultados que proporciona el cálculo sobre el punto origen del sistema coordenado.

Dado que, sobre el eje  $x$ , los hilos se extienden infinitamente, podríamos pensar que, al menos en cierta región cercana a los dos hilos, el potencial en 3D se vería como una 'teja', cumpliendo siempre la condición de que el potencial es cero sobre el eje  $x$ , y máximo sobre cada hilo, con un signo positivo y negativo, respectivamente.

Pensando cualitativamente, diríamos entonces que tenemos una especie de 'dipolo extendido' a lo largo de todo el eje  $x$ , donde, dependiendo sobre qué plano nos paremos a medir, obtendremos el potencial asociado a un dipolo en diferentes posiciones en el sistema coordenado.

Siendo así, podríamos reescribir el potencial como

$$\Phi_{dipolo} = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow \Phi = \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{x}}}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)}, \quad (13)$$

donde el vector  $\mathbf{p}$  corresponde al momento dipolar eléctrico, que se define como  $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ , siendo  $d$  la distancia entre las cargas en dirección del vector que las separa, en este caso, entre las distribuciones de carga. Como son equidistantes, simplemente  $d = 2a$  en magnitud, mientras que en cuanto a su dirección, vemos que es simplemente el vector del sistema coordenado  $\hat{\mathbf{y}}$ . Por otro lado,  $q$ , que corresponde a la carga, sería  $q = \lambda\Delta l$ . ¿Por qué  $\Delta l$ ? Porque, como sabemos, no podemos considerar hilos infinitos en la vida real, por lo que simplemente tomaríamos fragmentos de esos hilos, 'truncándolos' para que dejen de ser infinitos, y de esa manera, nuestra solución pueda ser localmente válida. Escribiendo todo esto en la ecuación anterior, obtenemos finalmente que

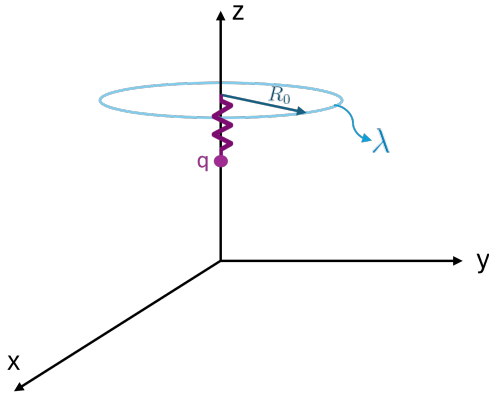
$$\Phi(r) = \frac{2a\lambda\Delta l(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}})}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)} \rightarrow \Phi(r) = \frac{2a\lambda\Delta l(\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}})}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (14)$$

donde el vector  $\hat{\mathbf{x}}$  no es el mismo vector unitario  $\hat{\mathbf{x}}$  del sistema coordenado, sino que es el vector unitario con componentes  $(x, y, z)$  en donde vayamos a calcular el potencial. Vemos también, que esta solución es consistente con el resultado en donde  $\hat{\mathbf{x}}$  coincida con  $\hat{\mathbf{x}}$ , haciéndose cero sobre todo el eje  $x$ .

b. Muestre que las superficies equipotenciales son cilindros circulares, y ubique el eje y el radio del cilindro correspondiente a un potencial dado  $V_0$ .

3. Considere un anillo de radio  $R_0$  cuya carga  $Q$  positiva está distribuida de manera uniforme sobre el anillo. Considere que una carga puntual, con carga  $q$  negativa y masa  $m$  está en reposo sobre el eje central del anillo cerca del centro  $O$ . Además, la carga está sujeta a un resorte ideal de constante elástica  $K$ , el cual está fijo en el punto  $O$ . Calcule la frecuencia de oscilación de la partícula puntual (Asuma que la partícula se mueve sobre el eje central del anillo).

Ilustremos el problema, para contextualizarnos (fig. 5).



**Fig. 5.** Ilustración punto 3. Anillo con carga uniforme, radio constante  $R_0$  y con una carga atada mediante un resorte al centro del anillo.

$$\Phi(\mathbf{z}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{R_0^2 + (z-b)^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\mathbf{z} - \mathbf{c}|}, \quad (15)$$

donde consideramos el mismo problema del anillo ya resuelto en clase. Allí tenemos que la distancia  $b$  es la altura en  $z$  desde el origen del sistema coordenado hasta donde se encuentra el anillo, mientras que el vector  $\mathbf{c}$  es el que va desde el origen del sistema coordenado hasta el borde del anillo en cualquier punto del mismo.

Debido a que se produciría un movimiento de la carga puntual  $q$ , considerarlo dentro del factor de fuerza eléctrica estaría por fuera del marco de la elec-

trostática, ya que se produciría una corriente, y esto ya nos lleva a otro tipo de planteamiento.

El campo  $\mathbf{E}$  es:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi,$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{z} - \mathbf{c}}{|\mathbf{z} - \mathbf{c}|^3}.$$

Nos interesa solo la componente en el eje  $z$  del campo, la cual es:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z-b}{\left(\sqrt{R_0^2 + (z-b)^2}\right)^3}. \quad (16)$$

Por lo tanto la fuerza que sentiría la masa de carga  $-q$  ubicada en el punto  $z$  sería:

$$\mathbf{F} = \frac{-qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{z-b}{\left(\sqrt{R_0^2 + (z-b)^2}\right)^3}. \quad (17)$$

Ahora hallaremos la frecuencia de oscilación de la masa, solo actúan sobre ella el potencial eléctrico y la fuerza restauradora del resorte. Para ello solucionaremos la ecuación dinámica sobre el eje  $z$ :

$$m\ddot{z} = -kz + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{z-b}{\left(\sqrt{R_0^2 + (z-b)^2}\right)^3},$$

$$\ddot{z} = -\frac{k}{m}z + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m} \frac{z-b}{\left(\sqrt{R_0^2 + (z-b)^2}\right)^3},$$

La cual es una EDO no lineal cuya solución analítica es muy complicada de obtener pero usaremos dos aproximación de dos casos extremos,  $z \ll R_0$  y  $z \gg R_0$ :

$z \ll R_0$ :

$$\frac{z-b}{\left(\sqrt{R_0^2 + (z-b)^2}\right)^3} \rightarrow \frac{z-b}{\left(R_0 \sqrt{1 + \frac{(z-b)^2}{R_0^2}}\right)^3},$$

$$\frac{z-b}{R_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(z-b)^2}{R_0^2}\right)^3} \rightarrow \frac{z-b}{(R_0)^3} \approx 0$$

En este primer caso la frecuencia natural del sistema es  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Ahora el caso contrario:

$z \gg R_0 :$

$$\frac{z-b}{\left(\sqrt{R_0^2 + (z-b)^2}\right)^3} \rightarrow \frac{z-b}{\left((z-b)\sqrt{1 + \frac{R_0^2}{(z-b)^2}}\right)^3},$$

$$\frac{z-b}{(z-b)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{R_0^2}{(z-b)^2}\right)^3} \rightarrow \frac{z-b}{(z-b)^3} \rightarrow \frac{1}{(z-b)^2}.$$

Así la ecuación de movimiento queda:

$$\ddot{z} + w^2 z - \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 m} \frac{1}{(z-b)^2} = 0 \quad (18)$$

La cual se tiene que solucionar con métodos numéricos. En este código Github realizamos una sencilla simulación del sistema.