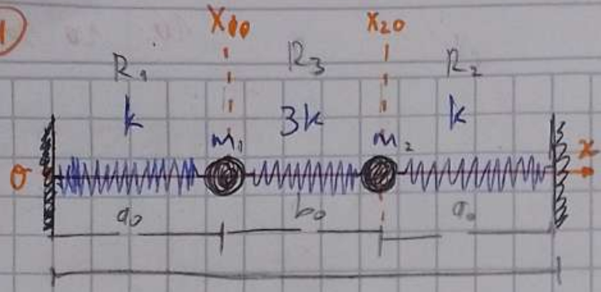
①



en la posición de equilibrio dos resortes k se alargan una una misma distancia y el resorte de otra distancia,

L

No nos interesa la longitud de reposo del resorte ya que en este sistema su equilibrio no es ahí.

$m_1 = m_2$

① grados de libertad

$$1 \cdot 2 - 0 = 2 \rightarrow q = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

② Lagrangiano caso general $L = T - V$: ③ $T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$

④ $V(x_1, x_2) = V_{R_1} + V_{R_2} + V_{R_3} \rightarrow \frac{1}{2} k (\Delta l_1)^2 + \frac{1}{2} k (\Delta l_2)^2 + \frac{3}{2} k (\Delta l_3)^2$

$$\rightarrow \frac{1}{2} k (x_1 - x_{01})^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_{02})^2 + \frac{3}{2} (x_2 - x_1 - b_0)^2$$

donde Δl_i es la variación de cada longitud de resorte

Lagrangiano:

$$\frac{1}{2}\left[m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - k\left\{ (x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + 3(x_2 - x_1 - b_0)^2 \right\} \right]$$

para nuestro caso de pequeños desplazamientos.

$x_1 = x_{01} + \eta_1$ y $x_2 = x_{02} + \eta_2$ || $\dot{x}_1 = \dot{\eta}_1$

$x_1 = a_0 + \eta_1$ y $x_2 = a_0 + b_0 + \eta_2$ || $\dot{x}_2 = \dot{\eta}_2$

el lagrangiano $L(x_1, x_2) \rightarrow L(\eta_1, \eta_2)$

$$L = \frac{1}{2}\left[m(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) - k\left\{ \eta_1^2 + \eta_2^2 + 3(\eta_2 - \eta_1)^2 \right\} \right]$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_2^2) - \frac{1}{2}\left\{ 4k\eta_1^2 + 4k\eta_2^2 - 3k\eta_1\eta_2 - 3k\eta_2\eta_1 \right\}$$

$$T = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \quad y \quad V = \begin{bmatrix} 4k & -3k \\ -3k & 4k \end{bmatrix}$$

El determinante $|V_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$

$$\begin{vmatrix} 4k-\omega^2 m & -3k \\ -3k & 4k-\omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (4k-\omega^2 m)^2 - 9k^2 = 0$$

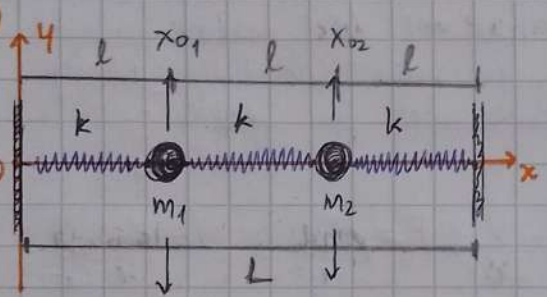
$$4k - \omega^2 m = \pm 3k, \quad \omega^2 = \frac{4k \pm 3k}{m}$$

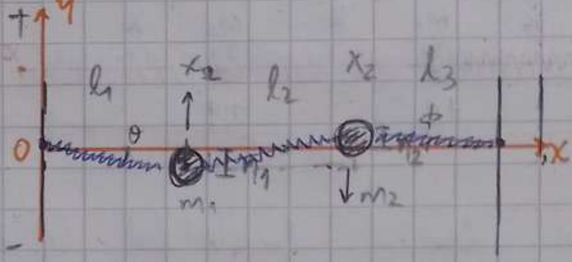
los dos modos normales son

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad y \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{7k}{m}}$$

Comentario: el primer modo ocurre cuando $\eta_1 = \eta_2$ y el R_3 no se ve afectado, el segundo modo es $\eta_1 = -\eta_2$ y ahí el R_3 sí cambia su longitud.

(2)





La energía cinética permanece igual, cambia es la forma de la potencial

$$V = \frac{1}{2}k\left(\Delta l_1^2 + \Delta l_2^2 + \Delta l_3^2\right)$$

l_i es la longitud actual del resorte al moverse y $\Delta l_i^2 = \|l_i\|^2 - l^2$

$$l_1^2 = l^2 + (-\eta_1)^2; \quad l_3^2 = l^2 + \eta_2^2 \quad y \quad l_2^2 = l^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2$$

$$V = \frac{1}{2}k\left\{\left[(l^2+\eta_1^2) - l^2\right] + \left[(l^2+\eta_2^2) - l^2\right] + \left[(l^2 + (\eta_2-\eta_1)^2 - l^2\right]\right\}$$

$$V = \frac{1}{2}k\left\{\eta_1^2 + \eta_2^2 + (\eta_1+\eta_2)^2\right\} = \frac{1}{2}k\left\{2\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + 2\eta_1\eta_2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{2k\eta_1^2 + 2k\eta_2^2 - k\eta_1\eta_2 - k\eta_2\eta_1\right\}$$

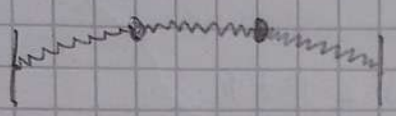
$$V = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$, entonces $\det(V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & 2k-\omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (2k-\omega^2 m)^2 - k^2 = 0$$

$$2k - \omega^2 m = \pm k, \quad \omega^2 = \frac{2k \pm k}{m}$$

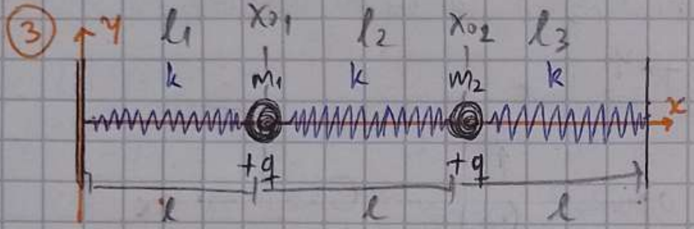
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

el primer modo normal corresponde a $\eta_1 = \eta_2$ y en este caso el resorte del medio (l_2) no se altera,



El segundo modo $\eta_1 = -\eta_2$ y en este

③



Hallaremos los modos normales de oscilación longitudinales y transversales por aparte

Energía potencial longitudinal ① $F = -\frac{\partial V}{\partial r}$, $F = k\frac{Qq}{r^2}$; $V = k\frac{Qq}{r}$

② $V = \frac{1}{2}k\left[\Delta l_1^2 + \Delta l_2^2 + \Delta l_3^2\right] + V_q$

$x_1 = x_{01} + \eta_1$ | $l_1 = x_1$

$x_2 = x_{02} + \eta_2$ | $l_2 = x_2 - x_1$

③ | $l_3 = 3l - x_2$

$$
\begin{cases}
\Delta l_1 = (x_{01} + \eta_1) - l = \eta_1 \\
\Delta l_2 = (x_{02} + \eta_2) - (x_{01} + \eta_1) - l = \eta_2 - \eta_1 \\
\Delta l_3 = 3l - (x_{02} - \eta_2) - l = 3l - 2l + \eta_2 - l = \eta_2
\end{cases}
$$

---

⑤ El que m_1 y m_2 tengan cargas eléctricas hacen al problema uno de fuerza central donde

$V(\eta_1, \eta_2) = \frac{K_e q^2}{|x_2 - x_1|}$, expandimos en serie de Taylor alrededor del equilibrio

$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{K_e q^2}{|x_2 - x_1|^2}$, $\frac{\partial V}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{-2K_e q^2}{|x_2 - x_1|^3}$ evaluado en x_{01}, x_{02}

$\frac{\partial V}{\partial x_2} = \frac{-K_e q^2}{|x_2 - x_1|^2}$, $\frac{\partial V}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{-2K_e q^2}{|x_2 - x_1|^3}$ $\rightarrow \frac{-2K_e q^2}{|2l - l|^3} = \frac{-2K_e q^2}{l^3}$

$\frac{\partial V}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial V}{\partial x_2 \partial x_1} = \left[\frac{-2K_e q^2}{l^3}\eta_1\eta_2\right] = V_{ij} \quad i \neq j$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} = 2keq^2 \frac{1}{|x_2 - x_1|^3} , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} = -(-2)keq^2 \frac{1}{|x_2 - x_1|^3}(1) = \frac{2keq^2}{|x_2 - x_1|^3}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{2keq^2}{l^3} \qquad V_q = \underbrace{\frac{2keq^2}{l^3}}_{\mu} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

la matriz de potenciales es

$$V = V_k + V_q \quad \text{siendo} \quad V_k = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 2k+\mu & -(k+\mu) \\ -k-\mu & 2k+\mu \end{bmatrix} \quad \text{entonces el } \det(V_{ij} - \omega^2 T_{ij}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2k+\mu-\omega^2 m & -(k+\mu) \\ -(k-\mu) & 2k+\mu-\omega^2 m \end{vmatrix} = (2k+\mu-\omega^2 m)^2 - (k+\mu)^2 = 0$$

$$2k+\mu-\omega^2 m = \pm(k+\mu)$$

$$\omega^2 = \frac{2k+\mu \mp (k+\mu)}{m}$$

frecuencias normales para el movimiento longitudinal

$$\omega_1 = \omega_- = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad y \quad \omega_2 = \omega^+ = \sqrt{\frac{3k+2\mu}{m}}$$