Clase 2

Ejercicio 1.6, c

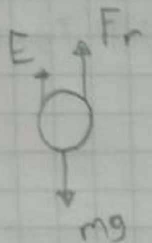
Hallar la velocidad con la que un corcho (b) esférico de 5 cm de diametro, que está en el fondo de una piscina de 5 m de profundidad llega a la superficie.
Aplique el mismo caso con una burbuja (c) de gas ideal.

b) Ley / Formulación de Stokes - Principio de Arquimedes

- $mg = \rho_e \frac{4}{3}\pi R^3 g$

$$m = \rho_e \frac{4}{3}\pi R^3$$

La masa la escribimos como el producto del volumen por la densidad volumetrica




- La fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad y esta expresión es la ley de stokes

$F_r = 6\pi R \eta v$ $\quad$ $\eta$ viscosidad del fluido

- La viscosidad es el rozamiento interno entre los capas del fluido y es una constante única de cada fluido.

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{dx}$$

- Segun el principio de Arquimedes, el empuje es igual al producto de la densidad del fluido $\rho_f$ por el volumen del cuerpo sumergido y por la aceleración de la gravedad

$$E = \rho_f \frac{4}{3}\pi R^3 g$$

Por tanto $\quad ma = mg - E + F_r$ (En caso que ascienda la partícula)

$$ma = \frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_e - \rho_f) + 6\pi R \eta v$$

Ahora hallaremos la velocidad limite que alcanzaria una particula en ascenso.

$$ma = 0 \rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_e - \rho_f) - 6\pi R \eta v = 0$$

$$6\pi R \eta v = \frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_e - \rho_f)$$

$$v_l = \frac{2}{9\eta} R^2 g(\rho_e - \rho_f)$$

Ecuación de movimiento

$$m\frac{dv}{dt} = mg - E - F_r$$
$$= F + Kv$$

$mg - E < 0$
$mg - E + F < 0$
$\rho_f > \rho_e$

Ahora integramos

$K = 6\pi R \eta$
$F = mg - E = \frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_e - \rho_f)$
$E = \frac{4}{3}\pi R^3 g \rho_f$
$mg = \frac{4}{3}\pi R^3 g \rho_e$
$m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_e$

$$\int_0^v \frac{dv}{\frac{F}{m} + \frac{K}{m} v} = \int_0^t dt$$

$$\int_0^v \frac{dv}{g(1 - \frac{\rho_f}{\rho_e}) - \frac{9\eta}{2R^2\rho_e} v} = t \rightarrow \int_0^v \left(g(1 - \frac{\rho_f}{\rho_e}) - \frac{9\eta}{2R^2\rho_e} v\right)^{-1} dv = t$$

$$= \frac{\ln\left(g(1 - \frac{\rho_f}{\rho_e}) - \frac{9\eta}{2R^2\rho_e} v\right)}{-\frac{9\eta}{2R^2\rho_e}}\Bigg|_0^v = t \rightarrow \frac{\ln\left(g(1 - \frac{\rho_f}{\rho_e}) - \frac{9\eta}{2R^2\rho_e} v\right)}{-\frac{9\eta}{2R^2\rho_e}} - \frac{\ln\left(g(1 - \frac{\rho_f}{\rho_e})\right)}{-\frac{9\eta}{2R^2\rho_e}} = t$$

$$\rightarrow \frac{\ln\left(1 - \frac{9\eta}{2g(1 - \frac{\rho_f}{\rho_e})R^2\rho_e} v\right)}{-\frac{9\eta}{2R^2\rho_e}} = t \rightarrow \ln\left(1 - \frac{9\eta}{2gR^2(\rho_e - \rho_f)} v\right) = \frac{-9\eta t}{2R^2\rho_e}$$

$$\rightarrow 1 - \frac{v}{v_l} = e^{-\frac{9\eta t}{2R^2\rho_e}} \rightarrow v_l\left(1 - e^{-\frac{9\eta t}{2R^2\rho_e}}\right) = v$$

$$\frac{9\eta}{2R^2\rho_e} = cte = \frac{K}{m} = \frac{9(1{,}002)}{2(0{,}025 m)^2(255 \frac{kg}{m^3})} = 0{,}7186$$

$\rho_e = 255\ kg/m^3$ Densidad del corcho

$\rho_f = 998\ kg/m^3$ Densidad del agua

$R = 0{,}025\ m$ Radio de la esfera

$\eta = 1{,}002\ N \cdot \frac{s}{m^2}$

$$V_l = \frac{2}{9\eta} R^2 g (\rho_e - \rho_f) = -1{,}048 \text{ m/s}$$

Entonces

$$V = -1{,}048(1 - e^{-0{,}7186t})$$

Ahora hallaremos la posición en función del tiempo $t$, suponiendo que parte en $x = 0$ en $t = 0$

$$x = \int_0^t v\,dt = V_l t - V_l \int_0^t e^{-\frac{k}{m}t}\,dt$$

$$= V_l t - V_l \left(-\frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{m}{k}\right)$$

$$= V_l \left(t - \frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)\right)$$

Si la profundidad de la piscina es 5 m entonces tardaría

$$m/k = 1{,}3915$$

$$\frac{-5}{V_l} = t - \frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

Despejando y resolviendo numéricamente tenemos que $t = 6{,}1456$ s.

Ahora reemplazamos este valor en la velocidad para hallar a que velocidad se encuentra al salir de la piscina.

$$V = -1{,}048\left(1 - e^{-0{,}7186(6{,}1456)}\right) = -1{,}0353 \text{ m/s} \checkmark$$

c) Este caso es similar al anterior con 2 pequeños diferencias

- Debido a cuestiones termodinámicas la burbuja al ascender se expande isotérmicamente.

- La masa y el peso del gas ideal de la burbula serán despreciables

Para tomar en cuenta este aumento de tamaño de la burbuja tomaremos en cuenta la siguiente relación

$$\rho g x \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \rho g x_0 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad r = \sqrt[3]{\frac{x_0}{x}}\, R$$

Usaremos de nuevo los conceptos de Fuerza de empuje y rozamiento

$$E = \rho g \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad F_r = 6\pi r n v$$

Y hallaremos nuevamente la velocidad limite

$$E - F_r = 0 \rightarrow \quad 6\pi r n v = \rho g \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$v_l = \frac{2}{9n}\rho g r^2$$

Y ahora con la ecuación diferencial hallaremos una relación entre la profundidad y el tiempo

$$\frac{dx}{dt} + \frac{2}{9}\frac{\rho g}{n}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{2}{3}} R^2 = 0$$

Reemplazando r tenemos

$$\rightarrow \int_{x_1}^{x} x^{\frac{2}{3}}\, dx = -\frac{2\rho g x_0^{\frac{2}{3}} R^2}{9n}\int_0^t dt$$

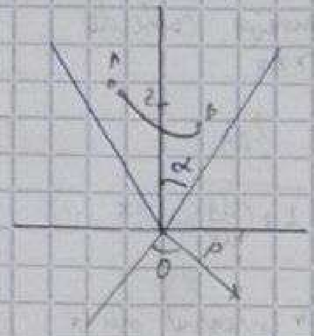
$$x^{\frac{5}{3}} = x_1^{\frac{5}{3}} - \frac{10}{27}\frac{\rho g}{n} x_0^{\frac{2}{3}} R^2 t$$

$x_1$ es donde se empieza a contar el tiempo en nuestro caso será el mismo $x_0$

Para hallar la velocidad respecto a t usaremos la derivada de x

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt[5]{\left(x_0^{5/3} - \frac{10}{27}\frac{\rho g}{n} x_0^{\frac{2}{3}} R^2 t\right)^3}\right)$$

② Calcule la trayectoria de la distancia más corta entre dos puntos de la superficie del Cono circular.




① Distancia $L$ a minimizar $\quad L = \int_A^B dS$

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

② Usaremos coordenadas cilíndricas $(\rho, \theta, z)$ y tenemos:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

pero como estamos en un cono $\quad \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ como es redondo entonces $a = b$

$$z^2 = (x^2 + y^2)c^2 = z = \rho c$$

por trigonometría $\tan\alpha = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = z = \cot(\alpha)\rho$ por lo tanto $\cot(\alpha) = c$

forma final $\quad x = \rho\cos\theta$
$\quad y = \rho\sin\theta$
$\quad z = \rho c$

Los diferenciales $dx^2 + dy^2 + dz^2$ son

$$d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + c^2 d\rho^2$$

volviendo a $L$:

$$L = \int_A^B \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + c^2 d\rho^2} = \int_A^B d\rho \sqrt{1 + \rho^2 \frac{d\theta^2}{d\rho^2} + c^2}$$

$1 + c^2 = \mu^2$ entonces $\quad \int_A^B \underbrace{\sqrt{\mu^2 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2}}_{} \, d\rho$

$F(\rho, \theta, \theta') \to$ escribimos E-Lagrange $\quad \frac{d\theta}{d\rho} = \theta'$

$$\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta'}\right) - \cancel{\frac{\partial F}{\partial \theta}}^{\,0} = 0 \quad \frac{d}{d\rho}\left(\frac{\rho^2\theta'}{\sqrt{\mu^2 + \rho^2\theta'^2}}\right) = 0$$

$\frac{\rho^2\theta'}{\sqrt{\mu^2 + \rho^2\theta'^2}} = K$, elevamos al cuadrado $= \frac{\rho^4\theta'^2}{\mu^2 + \rho^2\theta'^2} = K^2$ y despejamos para $\theta'^2$

$$\theta'^2 = \frac{K^2\mu^2}{\rho^2(\rho^2 - K^2)} = d\theta = \frac{K\mu\, d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2 - K^2}}$$ y ahora integramos a ambos lados

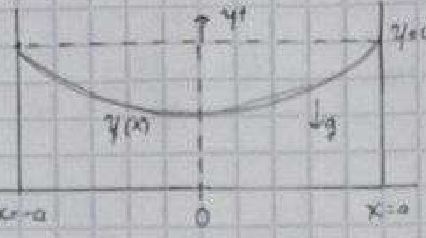
$$\theta = K\mu\left(\frac{1}{K}\sec^{-1}\left|\frac{\rho}{K}\right| + C_2\right) + \theta_0, \quad C_2 = 0$$ y como $z = \rho c \to \rho = \frac{z}{c}$

y despejamos para $z = z(\theta)$

$$\theta - \theta_0 = \mu\sec^{-1}\left|\frac{\rho}{K}\right| = \rho = K\sec\left(\frac{\theta - \theta_0}{\mu}\right) = \left\{ z = \frac{K\cot(\alpha)}{\cos\left(\frac{\theta - \theta_0}{\mu}\right)} \right\} \quad \mu = \csc(\alpha)$$

Esta función describe la trayectoria de la distancia entre dos puntos.

③ Catenaria, forma que minimiza la energía potencial




$y(x)$ forma de la catenaria, cable de longitud $L$ y $L > 2a$

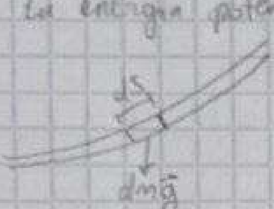
• La longitud $L$ es fija

$$J = \int_{cable} dS = \int_{-a}^{a} \underbrace{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}_{dS} \quad ①$$

esta integral da la longitud de la cuerda/cable

# Hipótesis: esta forma es la que minimiza la energía potencial

La energía potencial del cable es la suma de cada elemento del mismo




su diferencial de energía potencial $dU$ es

$dU = dm \cdot g \cdot y$ siendo $dm$ el diferencial de masa, que es igual a la densidad lineal por la longitud $dS$

"$y$" es la altura del elemento

$dU = \mu dS g \cdot y$

Entonces la energía total $U = \int_{cable} \mu g y \, dS$ ②

Con todo esto dicho ahora nuestro problema es hallar la forma que minimiza $U$ teniendo en cuenta $J$, nuestra nueva acción $F$, es

$$③ \quad F = U + \lambda J = \int_{-a}^{a} \left[ \mu g y \sqrt{1+y'^2} + \lambda \sqrt{1+y'^2} \right] dx$$ su ecuación de E-L

$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$, usamos la identidad de Beltrami $\Rightarrow F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C_1$

$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$ así la Ec de E-L queda:

$$④ \quad F = \mu g y \sqrt{1+y'^2} + \lambda \sqrt{1+y'^2} - y' \left[ \mu g y \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} + \lambda \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right] = C_1$$

Reorganizamos el lado izquierdo

$$\frac{\mu g y (1+y'^2) + \lambda (1+y'^2) - \mu g y y'^2 - \lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1 \quad ⑤$$

$\frac{\mu g y + \lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$, elevamos al cuadrado y despejamos $y'$ $= \frac{(\mu g y + \lambda)^2}{1+y'^2} = C_1^2 \rightarrow y'^2 = \frac{(\mu g y + \lambda)^2}{C_1^2} - 1$

(6) $y' = \sqrt{\dfrac{(\mu g y+\lambda)^2}{C_1^2}-1} = \displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{\dfrac{(\mu g y-\lambda)^2}{C_1^2}-1}} = \int dx$, Sustituimos

$\cosh(u) = \dfrac{\mu g y+\lambda}{C_1}$

Nuestra integral queda

$y = \dfrac{1}{\mu g}\left(C_1 \cdot \cosh(u) - \lambda\right)$

$dy = \dfrac{C_1 \sinh(u)\, du}{\mu g}$

(7) $\displaystyle\int \frac{\frac{C_1 \sinh(u)}{\mu g}}{\underbrace{\sqrt{\cosh^2(u)-1}}_{\sinh(u)}}\, du = x + C_2$

$u = \cosh^{-1}\left(\dfrac{\mu g y+\lambda}{C_1}\right)$

(8) $\displaystyle\int \frac{C_1}{\mu g}\frac{\sinh(u)}{\sinh(u)}\, du = x + C_2 = \frac{C_1}{\mu g} u = x + C_2 \Rightarrow \frac{C_1}{\mu g}\cosh^{-1}\left(\frac{\mu g y+\lambda}{C_1}\right) = x + C_2$

(9)

Despejamos para $y \to y(x) = \dfrac{C_1}{\mu g}\cosh\left[\dfrac{\mu g}{C_1}(x+C_2)\right] - \dfrac{\lambda}{\mu g}$, incognitas ; $C_1, C_2, \lambda$

1era condición

en $x=-a, y=0 \wedge x=a, y=0$ y como $\cosh(x)=\cosh(-x)$ entonces

$0 = \dfrac{C_1}{\mu g}\cosh\left[\dfrac{\mu g a}{C_1}\right] - \dfrac{\lambda}{g\mu} \to \lambda = C_1 \cosh\left(\dfrac{\mu g a}{C_1}\right)$ esto lo reemplazamos en $y(x)$

(10)

$y(x) = \dfrac{C_1}{\mu g}\cosh\left(\dfrac{\mu g x}{C_1}\right) - \dfrac{C_1}{\mu g}\cosh\left(\dfrac{\mu g a}{C_1}\right) \wedge \dfrac{dy}{dx} = \sinh\left(\dfrac{\mu g x}{C_1}\right)$ (11)

Usando $L = \displaystyle\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ reemplazamos (11) y como

$\cosh^2(x) = \sinh^2(x) + 1$

$L = \displaystyle\int_{-a}^{a}\cosh\left(\frac{\mu g x}{C_1}\right)dx = \frac{C_1}{\mu g}\sinh\left(\frac{\mu g x}{C_1}\right)\Bigg]_{-a}^{a}$

$= \dfrac{C_1}{\mu g}\left[\sinh\left(\dfrac{\mu g a}{C_1}\right) - \sinh\left(\dfrac{-\mu g a}{C_1}\right)\right] = \underbrace{\dfrac{2C_1}{\mu g}\sinh\left(\dfrac{\mu g a}{C_1}\right) = L}_{\text{esto se soluciona con métodos numéricos.}}$

la forma que minimiza la energía potencial del cable colgado es

$y(x) = \dfrac{C_1}{\mu g}\left[\cosh\left(\dfrac{\mu g x}{C_1}\right) - \cosh\left(\dfrac{\mu g a}{C_1}\right)\right]$ donde $C_1$ sale de $\dfrac{2C_1}{\mu g}\sinh\left(\dfrac{\mu g a}{C_1}\right) = L$