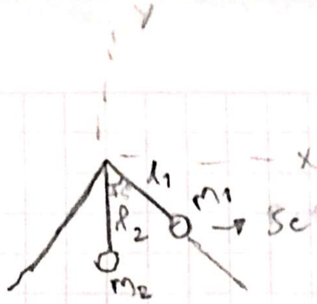
Viernes 2.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

2.



→ se desliza sin rodar y sin fricción

$l_1 + l_2 = l$

$x_1 = l_1 \operatorname{sen}(45°)$ $\quad \dot{x}_1 = \dot{l}_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$y_1 = -l_1 \cos(45°)$ $\quad \dot{y}_1 = -\dot{l}_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x_2 = 0$

$y_2 = -l_2$ $\qquad \dot{y}_2 = -\dot{l}_2$

$h_1 = l_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad h_2 = l_2$

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1 + \frac{1}{2} m_2 v_2$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 (\dot{l}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 \dot{l}_2^2$$

$$V = -m_1 g h_1 - m_2 g h_2 = -m_1 g \cdot \frac{l_1}{\sqrt{2}} - m_2 g l_2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 (\dot{l}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 \dot{l}_2^2 + m_1 g \frac{l_1}{\sqrt{2}} + m_2 g l_2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = m_1 \ddot{l}_1 + m_2 \ddot{l}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} m_1 g - m_2 g = 0$$

$$\rightarrow m_1 \ddot{l}_1 + m_2 \ddot{l}_2 = g\left(\frac{1}{\sqrt{2}} m_1 + m_2\right)$$

Ecuación de movimiento.

b) Calcular radio de equibrio de m_1

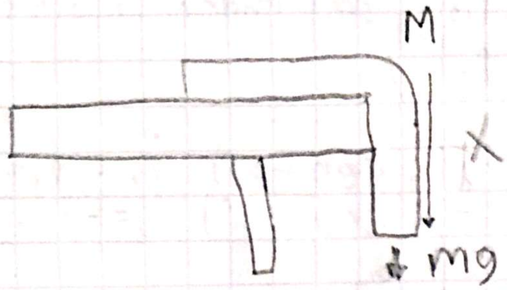
En este planteamiento, que m_1 esté en equilibrio quiere decir que no habrá cambios en l_1 ni l_2 por tanto $\ddot{l}_1 = 0$ y $\ddot{l}_2 = 0$

$$\cancel{g}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} m_1 + m_2\right) = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} m_1 + m_2 = 0$$

Para lograr este equilibrio en el sistema se necesita que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} m_1 = -m_2 \checkmark$$

+)



No fricción, solo desliza

Cómo este es un cuerpo extenso y es mas complejo establecerlo como un objeto puntual lo haré por Newton.

Sabemos que la fuerza mg aumenta con el tiempo, por tanto al aplicar Newton obtenemos la siguiente ecuación de movimiento

$$M \frac{x}{L} g = M\ddot{x}$$

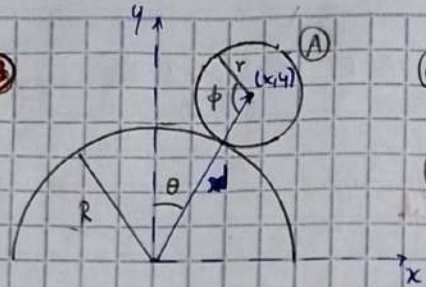
$$\ddot{x} - \frac{g}{L} x = 0$$

Al resolver esta ecuación diferencial obtenemos

$$x = A\cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\, t\right) + B\,\mathrm{senh}\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\, t\right)$$

Cómo los coeficientes A y B dependen de las condiciones iniciales asumiremos que en $t = 0$, $x = x_0$ y $v = 0$ por tanto

$$x = x_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\, t\right)$$



3

$d = R + r$

disco

ⓐ El cilindro Ⓐ rueda sin deslizarse sobre otro cilindro más grande

ⓑ podemos describir su movimiento respecto al centro de masa y reducir el problema a 1 solo cuerpo

ⓒ Queremos hallar el ángulo θ en el que Ⓐ deja de tener contacto con la superficie

Desarrollo

① el número de grados de libertad $2(1) - 1 = 1$

Nuestras coordenadas generalizadas son (θ, ϕ), entonces nuestra ligadura queda

$$f(\theta,\phi) = R\theta - r\phi = 0$$

② La energía cinética del disco es una traslacional y otra rotacional

$$T = T_T + T_r = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

donde
M = masa total del disco
V = velocidad del centro de masa
I = inercia rotacional respecto al centro de masa
ω = velocidad angular respecto al centro de masa

$$v^2 = (\dot{x}+\dot{y})^2 = d^2\dot{\theta}^2 = (R+r)^2\dot{\theta}^2$$

ω: a medida que Ⓐ rota también lo hace su punto de contacto con la superficie, por lo tanto

$$\omega = \frac{d}{dt}(\theta+\phi) = \dot{\theta} + \dot{\phi}$$

③ La energía potencial será la del centro de masa; $V = mgy = mgd\cos\theta$

④ El Lagrangiano es $L = \frac{1}{2}M(R+r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I(\dot{\phi}+\dot{\theta})^2 - mg(R+r)\cos\theta$ I

⑤ Como usaremos multiplicadores de Lagrange $L \to L^* = L + \lambda f$ será el nuevo Lagrangiano

$$L^* = \frac{1}{2}M(R+r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I(\dot{\phi}+\dot{\theta})^2 - Mg(R+r)\cos\theta + \lambda(R\theta - r\phi) \quad \text{II}$$

⑥ Euler Lagrange

$$\phi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial\dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial\phi} = Q_i = I(\ddot{\phi}+\ddot{\theta}) - \lambda r = 0 \quad \text{III}$$

$$\theta = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^*}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L^*}{\partial\theta} = Q_i = M(R+r)^2\ddot{\theta} + I(\ddot{\phi}+\ddot{\theta}) - Mg(R+r)\sin\theta + \lambda R = 0 \quad \text{IV}$$

$$\lambda = R\theta - r\phi = 0 \quad \text{V}$$

De aquí podemos saber que λ es la fuerza de fricción en el borde de Ⓐ, lo mismo para la superficie sobre la que rueda.

λ = fuerza de fricción

vamos a multiplicar III por R y a IV por r y sumarlas

$I(\ddot{\phi}+\ddot{\theta})R - \lambda r R = 0$ VI

$Mr(R+r)^2\ddot{\theta} + I(\ddot{\phi}+\ddot{\theta})r - Mgr(R+r)\sin\theta + \lambda R r = 0$ VII

$Mr(R+r)^2\ddot{\theta} + (R+r)I(\ddot{\phi}+\ddot{\theta}) - Mgr(R+r)\sin\theta = 0$ VIII

el momento de inercia del disco es igual al del cilindro $I = \frac{1}{2}Mr^2$

VIII $\rightarrow$ $Mr(R+r)^2\ddot{\theta} + (R+r)\cdot\frac{1}{2}Mr^2(\ddot{\phi}+\ddot{\theta}) - Mgr(R+r)\sin\theta = 0$

$\frac{1}{2}r(\ddot{\phi}+\ddot{\theta})(R+r) + (R+r)^2\ddot{\theta} - g(R+r)\sin\theta = 0$ IX

De IVI tenemos $\phi = \frac{R}{r}\theta \wedge \frac{d^2}{dt^2}(\phi) = \frac{R}{r}\ddot{\theta}$ X

reemplazamos X en IX

IX $= \frac{1}{2}r\left(\frac{R}{r}\ddot{\theta}+\ddot{\theta}\right)\cancel{(R+r)} + (R+r)^{\cancel{2}}\ddot{\theta} - g\cancel{(R+r)}\sin\theta = 0$

$= \frac{1}{2}r\left(\frac{R}{r}+1\right)\ddot{\theta} + (R+r)\ddot{\theta} - g\sin\theta = 0, \; = \frac{3}{2}(R+r)\ddot{\theta} - g\sin\theta = 0$

$\rightarrow \ddot{\theta} = \frac{2\sin\theta}{3(R+r)}g$ XI , $\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{\dot{\theta}\,d\dot{\theta}}{d\theta}$

$\frac{\dot{\theta}\,d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{2g}{3(R+r)}\sin\theta \Rightarrow \int\dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \frac{2g}{3(R+r)}\int\sin\theta\,d\theta = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + C = \frac{-2g}{3(R+r)}\cos\theta$

en $t=0$ $\theta=0$ y $\dot{\theta}=0$ por lo tanto $C = \frac{-2g}{3(R+r)}$, así $\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{3(R+r)}(1-\cos\theta)$ XII

¿En qué momento deja de tocar? Cuando la fuerza normal $N=0$

La aceleración en Ⓐ es $a_r = (R+r)\dot{\theta}^2$, así $\Sigma F = ma$

$N - Mg\cos\theta = -M(R+r)\dot{\theta}^2$, si $N=0 \rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{g\cos\theta}{(R+r)}$ XIII

igualamos XII y XIII

$\frac{4g}{3(R+r)}(1-\cos\theta) = \frac{g\cos\theta}{(R+r)} \rightarrow \frac{4}{3}(1-\cos\theta) = \cos\theta, \; \frac{4}{3} = \left(1+\frac{4}{3}\right)\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{4}{7}, \; \theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{7}\right) \approx 55{,}15°$

$\left[\theta \approx 55{,}15°\right]$ ángulo en el que se separa de la superficie