

Zestaw wybranych wzorów matematycznych

matematyka elementarna

pochodne

całki

geometria analityczna w 3D

elementy trygonometrii sferycznej

Piotr Choczyński

p.j.choczynski@wp.pl

www.e-korepetycje.net/pjchocz

Spis treści

1	Matematyka Elementarna	3
1.1	Wzory skróconego mnożenia	3
1.2	Prawa działań na potęgach i pierwiastkach	3
1.3	Prawa działań na logarytmach	3
1.4	Trygonometria	3
2	Pochodne	5
2.1	Podstawowe informacje	5
2.2	Pochodne funkcji elementarnych	5
2.3	Własności	5
3	Całki	6
3.1	Wzory podstawowe	6
3.2	Wzory uogólnione	6
3.3	Całki funkcji wymiernych	7
3.4	Całki funkcji niewymiernych	8
3.5	Całki funkcji trygonometrycznych	8
3.6	Zastosowania w geometrii	9
4	Geometria Analityczna w 3D	10
4.1	Wektory	10
4.2	Teoria pola	10
4.3	Proste	11
4.4	Płaszczyzny	11
4.5	Proste i płaszczyzny	12
5	Elementy Trygonometrii Sferycznej	13
5.1	Podstawowe informacje	13
5.2	Twierdzenie cosinusów (dla boków)	14
5.3	Reguła Nepera	14
5.4	Algorytm rozwiązania zadania metodą klasyczną	14
5.5	Rysunki szczegółowe	16

1 Matematyka Elementarna

1.1 Wzory skróconego mnożenia

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

1.2 Prawa działań na potęgach i pierwiastkach

Dla dowolnych $m, n \in R$ i $a, b > 0$:

$$a^0 = 1$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

1.3 Prawa działań na logarytmach

Dla dowolnych $c > 0$, $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$: $\log_a c = b \Leftrightarrow a^b = c$ (definicja logarytmu)

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^r = r \cdot \log_a x$$

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

Można stosować uproszczone formy zapisu: $\log_e x \equiv \ln x$; $\log_{10} x \equiv \log x \equiv \lg x$

1.4 Trygonometria

Wzory podstawowe: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

Funkcje podwojonego kąta: $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

Wzory redukcyjne:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha \quad \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha \quad \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad \sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$

Wzory redukcyjne:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	nie istnieje	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	nie istnieje

2 Pochodne

2.1 Podstawowe informacje

- Definicja
Granica ilorazu różnicowego przy $\Delta x \rightarrow 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- Interpretacja geometryczna pochodnej
Tangens nachylenia stycznej do wykresu funkcji w punkcie x_0 :

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- Interpretacja fizyczna pochodnej oraz drugiej pochodnej (po czasie):

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

- Styczna do wykresu funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 :

$$y = ax + b, \quad \text{gdzie:} \quad a = f'(x_0), \quad b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

2.2 Pochodne funkcji elementarnych

$$(C)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\left(\frac{a}{x}\right)' = \frac{-a}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{x^2 + 1}$$

2.3 Własności

$$[a \cdot f(x)]' = a \cdot f'(x)$$

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$[f[g(x)]]' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

3 Całki

3.1 Wzory podstawowe

$$\begin{aligned}
 \int 0 \cdot dx &= C & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C \\
 \int dx &= x + C & \int e^x dx &= e^x + C \\
 \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) & \int \sin x dx &= -\cos x + C \\
 \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C & \int \cos x dx &= \sin x + C \\
 \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \operatorname{arctg} x + C & \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\operatorname{ctg} x + C \\
 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C & \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \operatorname{tg} x + C
 \end{aligned}$$

3.2 Wzory uogólnione

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{a^2+x^2} &= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0) & \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln|f(x)| + C \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \arcsin \frac{x}{a} + C & \int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx &= \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} + C \\
 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} &= \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C & \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx &= 2\sqrt{f(x)} + C \\
 \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} &= \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C & \int e^{ax} dx &= \frac{1}{a} e^{ax} + C \\
 \int \frac{dx}{a^2-x^2} &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0) & \int \cos ax dx &= \frac{1}{a} \sin ax + C \\
 \int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} &= \pm \frac{1}{2} \ln|a^2 \pm x^2| + C & \int \sin ax dx &= -\frac{1}{a} \cos ax + C
 \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

wzór na całkowanie przez części:

$$\int u(x)v'(x) dx = \begin{vmatrix} u(x) & v'(x) \\ u'(x) & v(x) \end{vmatrix} = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$$

3.3 Całki funkcji wymiernych

Wszystkie całki postaci $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx$, gdzie $P_n(x)$ to wielomian n -tego stopnia, a $Q_m(x)$ to wielomian m -tego stopnia możemy podzielić na następujące przypadki:

1. $\boxed{n \geq m}$

Poprzez dzielenie wielomianu doprowadzamy wyrażenie podcałkowe do postaci:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{S_k(x)}{Q_m(x)}, \text{ gdzie } k < m$$

Wyrażenie $R_{n-m}(x)$ rozwiązujemy standardowym wzorem na całkę z wielomianu, natomiast $\frac{S_k(x)}{Q_m(x)}$ za pomocą metody z punktu 2.

2. $\boxed{n < m}$

Doprowadzamy mianownik do postaci iloczynowej (czynniki stopnia co najwyżej drugiego) i przedstawiamy go w postaci ułamków prostych:

$$\frac{A}{(x+a)^k}, \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^l}, \quad l, n \in \mathbb{N}$$

Na przykład:

$$\int \frac{1}{x^2(x^2-1)(x^2-x+1)} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} + \frac{Ex+F}{x^2-x+1} \right) dx$$

Poszczególne elementy występujące w powyższej całce rozwiązujemy jedną z poniższych metod (gdzie m to stopień wielomianu z mianownika, a n to stopień wielomianu z licznika):

(a) $\boxed{(m = 1)}$

Stosujemy wzór:

$$\int \frac{1}{x \pm p} dx = \ln |x \pm p| + C$$

(b) $\boxed{(m \geq 2) \wedge (n = 0)}$

Podstawiamy pod t wyrażenie stojące pod potęgą i korzystamy ze wzoru:

$$\int t^n dx = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$$

(c) $\boxed{(m = 2) \wedge (\Delta < 0) \wedge (n = 0)}$

Doprowadzamy mianownik do postaci $(x-p)^2 + q$ i po podstawieniu $t = x - p$ oraz $q = a^2$ korzystamy ze wzoru:

$$\int \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$$

(d) $\boxed{(m = 2) \wedge (n = 1)}$

Doprowadzamy licznik do postaci pochodnej mianownika i stosujemy wzory:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C \qquad \int \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$$

3.4 Całki funkcji niewymiernych

Do całek postaci:

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \quad ad-bc \neq 0$$

Stosujemy podstawienie typu:

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad t^n = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad x = \varphi(t), \quad dx = \varphi'(t) dt$$

3.5 Całki funkcji trygonometrycznych

1. Całki typu $\int R(\sin ax, \cos bx) dx$, rozwiązujemy, stosując jeden z następujących wzorów:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta &= \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2} \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)}{2} \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2} \end{aligned}$$

2. Całki typu $\int R(\sin^m x, \cos^n x) dx$ rozwiązujemy stosując jedną z poniższych metod:

- (a) Podstawienie, gdy funkcja jest nieparzysta względem $\sin x$: $t = \cos x$
- (b) Podstawienie, gdy funkcja jest nieparzysta względem $\cos x$: $t = \sin x$

• Przykład:

$$\int \sin^n x \cos^{2k+1} x dx = \int \sin^n x \cos^{2k} x \cos x dx = \int \sin^n x (1 - \sin^2 x)^k d(\sin x)$$

- (c) Podstawienie, gdy funkcja jest parzysta względem $\sin x, \cos x$:

• Stosujemy podstawienie:

$$t = \operatorname{tg} x, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

• lub przekształcamy funkcję podcałkową jednym z poniższych wzorów:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

- (d) Podstawienie, gdy funkcja nie spełnia warunków (a)-(c) (tzw. podstawienie uniwersalne):

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

3.6 Zastosowania w geometrii

1. Objętość bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu funkcji dookoła osi OX:

- Funkcja dana jawnie $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$

$$V = \pi \int_a^b y^2(x) dx$$

- Funkcja dana parametrycznie $x = x(t), y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t) |x'(t)| dt$$

2. Pole powierzchni bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu funkcji dookoła osi OX:

- Funkcja dana jawnie $y = y(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$

$$S = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

- Funkcja dana parametrycznie $x = x(t), y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

3. Długość łuku funkcji:

- Funkcja dana jawnie $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

- Funkcja dana parametrycznie $x = x(t), y = y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

4 Geometria Analityczna w 3D

4.1 Wektory

- Iloczyn skalarny: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$

- Iloczyn wektorowy: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$

W wyniku obliczenia iloczynu wektorowego otrzymujemy trzeci wektor \vec{c} , który jest prostopadły do obydwu wektorów \vec{a} oraz \vec{b} .

- Iloczyn mieszany: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

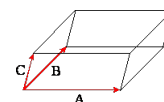
- Prostopadłość (ortogonalność) wektorów: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

- Równoległość (kolinearność) wektorów: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \sin \varphi = 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

- Pole równoległoboku zbudowanego na dwóch wektorach: $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$

- Pole trójkąta zbudowanego na dwóch wektorach: $S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$

- Objętość równoległościanu zbudowanego na trzech wektorach: $V = |(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}|$



- Objętość czworościanu zbudowanego na trzech wektorach: $V = \frac{1}{6} |(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}|$

- Rzut wektora \vec{a} na wektor \vec{b} : $\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$

4.2 Teoria pola

- Gradient pola skalarnego f : $\nabla f(x, y, z) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right]$

- Dywergencja pola wektorowego $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$: $\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

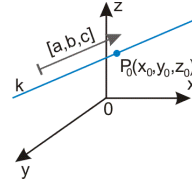
- Rotacja pola wektorowego $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$: $\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

- Pochodna kierunkowa: $\nabla_{\vec{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0, z_0) = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{u}$

4.3 Proste

- Równanie kierunkowe: $\frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c}$, gdy $abc \neq 0$
lub $\begin{cases} x = x_o \\ \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c} \end{cases}$ gdy $a = 0 \wedge bc \neq 0$ oraz analogicznie dla pozostałych.

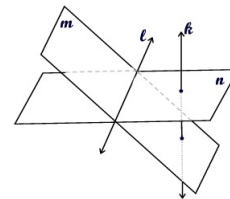
- Równanie parametryczne: $\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \\ z = z_o + ct \end{cases}$



Prosta wychodząca z punktu $P_o = (x_o, y_o, z_o)$ przeciętna przez wektor $\vec{v} = [a, b, c]$

- Równanie krawędziowe (przecięcie dwóch płaszczyzn nierównoległych)

$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$



- Równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B: $\frac{x - x_A}{x_A - x_B} = \frac{y - y_A}{y_A - y_B} = \frac{z - z_A}{z_A - z_B}$

- Wzajemne położenie prostych

- Prostopadłość: $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$
- Równoległość: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
- Przecinanie się: $\overrightarrow{P_{01}P_{02}}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ są liniowo zależne i nie spełniają warunku równoległości.
- Skośność (proste nie leżą w jednej płaszczyźnie): $\overrightarrow{P_{01}P_{02}}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ są liniowo niezależne.

4.4 Płaszczyzny

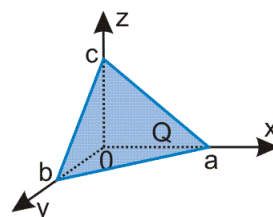
- Równanie ogólne płaszczyzny: $Ax + By + Cz + D = 0$

Wektor prostopadły do płaszczyzny $\vec{R} = [A, B, C]$

Prostopadłość/równoległość płaszczyzn określa się przy pomocy prostopadłości/równoległości ich wektorów normalnych:

- Prostopadłość płaszczyzn: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
- Równoległość płaszczyzn: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

- Równanie odcinkowe płaszczyzny: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$



- Równanie płaszczyzny przechodzącej przez 3 punkty niewspółliniowe:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- Odległość punktu od płaszczyzny: $d = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

- Kąt między płaszczyznami (kąt między wektorami normalnymi do płaszczyzn):

$$\cos \varphi = \frac{\vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2}{|\vec{R}_1| |\vec{R}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

- Płaszczyzna styczna do wykresu funkcji $F(x, y, z)$ w punkcie $P_o(x_o, y_o, z_o)$:

$$F_x(P_o)(x - x_o) + F_y(P_o)(y - y_o) + F_z(P_o)(z - z_o) = 0$$

4.5 Proste i płaszczyzny

- Prostopadłość/równoległość prostej i płaszczyzny:

$$l : \begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \\ z = z_o + ct \end{cases}, \quad \alpha : Ax + By + Cz + D = 0$$

Wektor $\vec{u}(a, b, c)$ jest równoległy do prostej l

Wektor $\vec{R}(A, B, C)$ jest prostopadły do płaszczyzny α

- Warunek prostopadłości:

$$l \perp \alpha \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{R} \Leftrightarrow \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$$

- Warunek równoległości:

$$l \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{R} \Leftrightarrow Aa + Bb + Cc = 0$$

- Punkt przebiecia prostej z płaszczyzną

Wyznaczamy parametr t podstawiając l do α : $A(x_o + at) + B(y_o + bt) + C(z_o + ct) + D = 0$

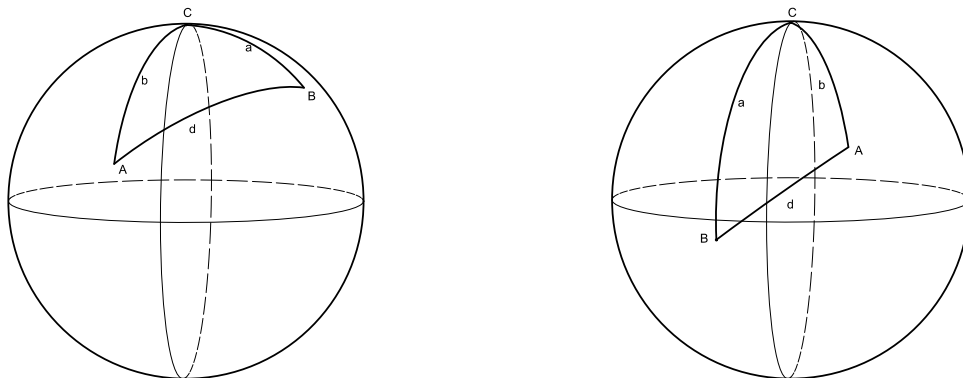
Współrzędne punktu przebiecia otrzymamy podstawiając parametr t do równania prostej l .

- Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny: $\sin \varphi = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

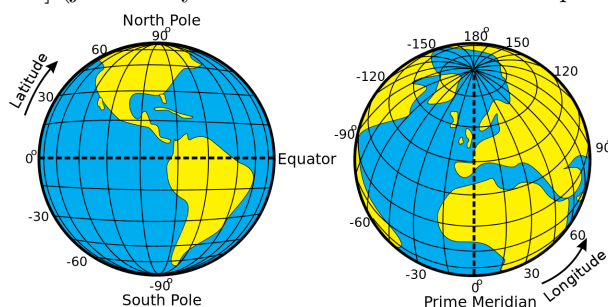
5 Elementy Trygonometrii Sferycznej

5.1 Podstawowe informacje

- Trygonometria sferyczna zajmuje się związkami w trójkątach na powierzchni kuli, czyli tzw. trójkątach sferycznych. Trójkąt sferyczny jest figurą, której bokami są łuki kół wielkich przechodzące przez każdą z par spośród trzech punktów będących jego wierzchołkami. Poniżej znajdują się dwa przykładowe trójkąty sferyczne.



- W trójkącie sferycznym miarą zarówno kątów A, B, C jak i boków a, b, d są stopnie. Jego boki są łukami wyrażonymi w mierze swoich kątów środkowych.
- Podstawowe własności trójkątów sferycznych:
 - Każdy element trójkąta sferycznego jest mniejszy od 180° ,
 - $0^\circ < a + b + c < 180^\circ$, $180^\circ < A + B + C < 540^\circ$,
 - Naprzeciw dłuższego boku leży większy kąt.
- W celach nawigacyjnych rozważane trójkąty sferyczne będą posiadały jeden wierzchołek (C) na biegunie północnym. Boki a, b leżą na południkach przechodzących odpowiednio przez punkty B, A .
- Ortodroma jest krótszym łukiem koła wielkiego przechodzącego przez dwa punkty na sferze i wyznacza najkrótszą drogę między nimi (tzw. odległość ortodromiczną między punktami A i B oznaczoną jako d). Jest ona zawsze wygięta w kierunku bliższego bieguna.
- Kąty drogi są mierzone zawsze względem ruchu wskazówek zegara, między południkiem przechodzącym przez dany punkt a dodatnim kierunkiem ruchu. Szczegółowo jest to zobrazowane na rysunkach na stronie 16. Są na nich zaznaczone wszystkie elementy zarówno trójkąta sferycznego jak i samej ortodromy, które musimy wyznaczyć.
- Aby poruszać się po ortodromie, kąt drogi musi być cały czas zmieniany (poza przypadkiem poruszania się po równiku - wtedy kąt drogi wynosi stale 90° lub 270° , lub po dowolnym południku - wtedy kąt drogi wynosi stale 0° lub 180°).
- Wierzchołki ortodromy to dwa punkty W_1 oraz W_2 leżące na kole wielkim zawierającym daną ortodromę, wysunięte najbardziej na północ oraz najbardziej na południe.
- współrzędne geograficzne składają się z szerokości geograficznej (N,S) podawanej w zakresie $[-90^\circ; 90^\circ]$. (jako odchylenie na północ lub południe od równika) oraz z długości geograficznej (E,W) podawanej w zakresie $[-180^\circ; 180^\circ]$ (jako odchylenie na wschód lub zachód od południka zerowego).



5.2 Twierdzenie cosinusów (dla boków)

- W dowolnym trójkącie sferycznym ABC możemy zdefiniować następujące wzory:

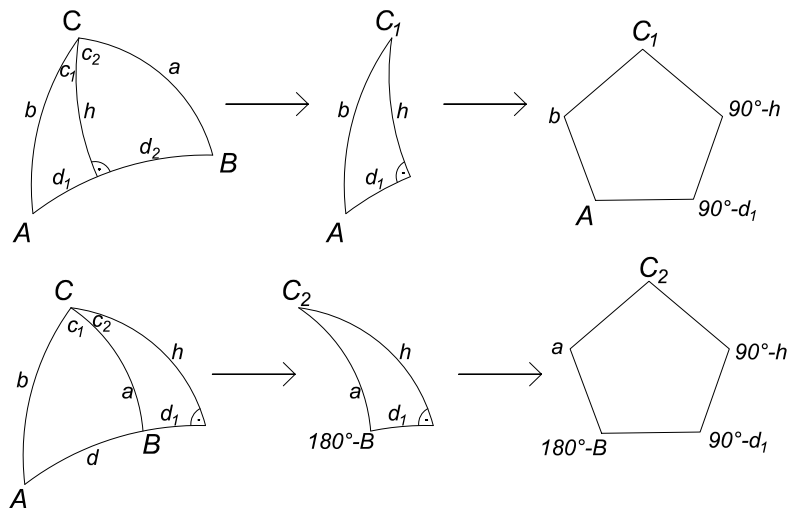
$$\cos a = \cos b \cos d + \sin b \sin d \cos A$$

$$\cos b = \cos a \cos d + \sin a \sin d \cos B$$

$$\cos d = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

5.3 Reguła Nepera

- W celu znalezienia wysokości trójkąta sferycznego oraz miary kąta przylegającego do niej można skorzystać z tzw. reguły Nepera. Poniżej znajdują się przykładowe rysunki dla przypadków kiedy wysokość trójkąta znajduje się wewnątrz trójkąta oraz poza nim.



- Jeśli rozmieścimy pięć elementów prostokątnego trójkąta sferycznego na pięciokącie (pomijając kąt prosty) w takiej kolejności, w jakiej występują w trójkącie i zastąpimy przy tym przyprostokątne ich dopełnieniami do 90° , to:
 - cosinus każdego z elementów jest równy iloczynowi cotangensów dwóch przylegających do niego elementów,
 - cosinus każdego z elementów jest równy iloczynowi sinusów dwóch nieprzylegających do niego elementów.

W szczególności (na podstawie górnego rysunku):

$$\cos(90^\circ - h) = \sin b \cdot \sin A \quad \Rightarrow \quad \sin h = \sin b \cdot \sin A$$

$$\cos b = \operatorname{ctg} C_1 \cdot \operatorname{ctg} A \quad \Rightarrow \quad \cos b = \frac{1}{\operatorname{tg} C_1 \cdot \operatorname{tg} A} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} C_1 = \frac{1}{\cos b \cdot \operatorname{tg} A}$$

- Do rozwiązywania powyższych równań zastosowano m.in. wzór $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ oraz wzory redukcyjne:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$$

5.4 Algorytm rozwiązania zadania metodą klasyczną

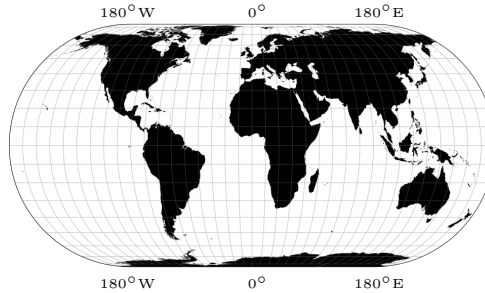
- Na wejściu otrzymujemy współrzędne geograficzne dwóch punktów (początkowego i końcowego). Przykładowo:

$$A(52^\circ 46'S; 73^\circ 24'W); \quad B(34^\circ 54'S; 95^\circ 00'E)$$

Celem zadania jest wyznaczenie odległości ortodromicznej (d) pomiędzy nimi, początkowego kąta drogi (α), końcowego kąta drogi (β) oraz współrzędnych wierzchołków ortodromy W_1 i W_2 .

ETAPY ROZWIĄZANIA:

1. Zamieniamy współrzędne geograficzne obu punktów na wartości liczbowe szerokości (φ) oraz długości geograficznych (λ) korzystając z przyjętej konwencji znaków: (+) dla NE, (-) dla SW.
2. Rysujemy rzut równikowy (jest on przedstawiony na 16. stronie) i zaznaczamy długości geograficzne obu punktów (w celu sprawdzenia w którą stronę będzie krótsza droga: $W \rightarrow E$ czy $E \rightarrow W$). Kierunek drogi łatwo jest również ustalić na podstawie płaskiego odwzorowania Ziemi. Droga na wschód zawsze będzie na nim odwzorowana jako droga w prawo.
UWAGA: Nawet płynąc w prawo ze wschodniej półkuli na zachodnią (przecinając południk 180°) jest to traktowane jako droga z zachodu na wschód. Analogicznie jest dla przeciwnego kierunku.



3. Wyznaczamy a, b, C (przyjmujemy $\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A$):

$$\begin{aligned} a &= 90^\circ - \varphi_B \\ b &= 90^\circ - \varphi_A \end{aligned}$$

$$C = \begin{cases} |\Delta\lambda| & \text{gdy } |\Delta\lambda| \leq 180^\circ \\ 360^\circ - |\Delta\lambda| & \text{gdy } |\Delta\lambda| > 180^\circ \end{cases}$$

4. Wyznaczamy odległość ortodromiczną z twierdzenia cosinusów (5.2). Aby wyznaczyć ją w milach morskich (Mm) mnożymy otrzymany w stopniach wynik przez 60.
5. Wyznaczamy miary kątów A, B - z twierdzenia cosinusów (5.2), po wyznaczeniu z odpowiednich równań cosinusów kątów:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos d}{\sin b \sin d}$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos d}{\sin a \sin d}$$

6. Obliczamy początkowy oraz końcowy kąt drogi:

$$W \rightarrow E : \begin{cases} \alpha = A \\ \beta = 180^\circ - B \end{cases}$$

$$E \rightarrow W : \begin{cases} \alpha = 360^\circ - A \\ \beta = 180^\circ + B \end{cases}$$

7. Wprowadzamy do naszego trójkąta $ABCabd$ wysokość h wychodzącą z wierzchołka C i obliczamy wartości C_1 (lub C_2) oraz h korzystając z reguły Nepera (5.3). Jeżeli kąty A, B są jednorodnie (oba rozwarte lub oba ostre) to wysokość h będzie leżała wewnątrz trójkąta, a jeżeli są niejednorodne to wysokość będzie leżała na zewnątrz, po stronie kąta rozwartego. Wysokość h przecina koło wielkie naszej ortodromy w punkcie będącym jej wierzchołkiem W_1 .

UWAGA: Przy wyznaczaniu dowolnej wielkości z funkcji $\sin h$ otrzymujemy dwa możliwe rozwiązania: (h) oraz $(180^\circ - h)$. Na podstawie własności trójkąta sferycznego wybieramy jedyne właściwe rozwiązanie. Często wystarczy zauważenie na podstawie rysunku, czy wysokość powinna być większa czy mniejsza niż 90° (czyli na której półkuli spodziewamy się wierzchołka W_1).

8. Obliczamy wierzchołki ortodromy wykorzystując podane wzory, a następnie zaznaczamy długości λ_{W_1} oraz λ_{W_2} na rzucie równikowym (rysunek na stronie obok):

$$W_1 = \begin{cases} \varphi_{W_1} = 90^\circ - h \\ \lambda_{W_1} = \lambda_A \pm C_1 \quad \vee \quad \lambda_B \pm C_2 \end{cases} *$$

$$W_2 = \begin{cases} \varphi_{W_2} = -\varphi_{W_1} \\ \lambda_{W_2} = \lambda_{W_1} \pm 180^\circ \end{cases} **$$

* Prawidłową zależność wybieramy na podstawie rysunku, biorąc pod uwagę odchylenie wysokości (o kąt C_1 lub C_2) od odpowiedniego południka (biegnącego do punktu A lub B).

** Tak, aby $\lambda_{W_2} \in [-180^\circ, 180^\circ]$ - czyli aby miała sens długości geograficznej.

