Universidade do Minho
Escola de Engenharia

MDIO-TP2

Novembro 2019

Ana César(A86038)

Pedro Costa(A85700)

Alexandre Costa(A78890)

1 Parte I

1. Indique o valor de ABCDE e apresente a rede com indicação dos sentidos das ruas BDCE.
   ABCDE - 86038

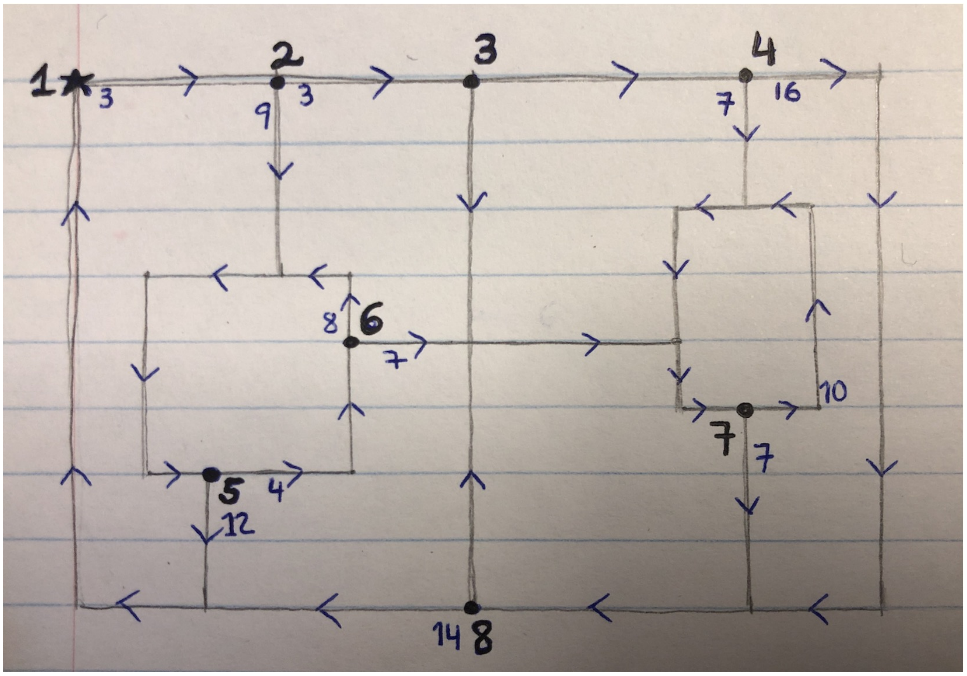

Figura 1: Rede de transporte

2. O problema pode ser formulado como um problema de transporte numa rede geral G = (V, A) considerando variáveis de decisão x_{ij} que representam o fluxo no arco (i, j),∀(i, j) ∈ A, i.e., o número de vezes que o arco (i, j) é percorrido. O modelo de minimização de custo de transporte em rede tem as seguintes restrições:
   - o fluxo que entra num vértice do grafo deve ser igual ao que sai, para o percurso ser fechado.
   - o fluxo em qualquer arco deve ser, pelo menos, uma unidade, para visitar todos os arcos.

Solution:

Variáveis de decisão:
- x_{ij} que representa o fluxo no arco (i,j), ∀(i,j) ∈ A, i.e., o número de vezes que o arco (i,j) é percorrido.

Restrições:
Restrições de conservação de fluxo:

$$x_{12} = x_{51} + x_{81}; \tag{1}$$

$$x_{25} + x_{23} = x_{12}; \tag{2}$$

$$x_{34} + x_{37} = x_{23}; \quad (3)$$

$$x_{47} + x_{48} = x_{34}; \quad (4)$$

$$x_{56} + x_{51} = x_{25} + x_{65}; \quad (5)$$

$$x_{65} + x_{67} = x_{56}; \quad (6)$$

$$x_{77} + x_{78} = x_{37} + x_{47} + x_{67} + x_{77} + x_{87}; \quad (7)$$

$$x_{48} + x_{78} = x_{81} + x_{87}; \quad (8)$$

Restrições de capacidade:

$$x_{ij} > 0, \forall (i, j) \in A; \quad (9)$$

Função objetivo:
min z = $3x_{12} + 3x_{23} + 9x_{25} + 4x_{34} + 9x_{37} + 7x_{47} + 16x_{48} + 4x_{56} + 12x_{51} + 8x_{65} + 7x_{67} + 10x_{77} + 7x_{78} + 14x_{81} + 9x_{87}$

3. No segundo grupo de restrições, é imposto um limite inferior ao valor das variáveis. O software de resolução de problemas de transportes em rede normalmente apenas aceita arcos com limite superior. Usando a mudança de variável $y_{ij} = x_{ij} - I_{ij}$,∀(i, j) ∈ A, em que I_{ij} é o limite inferior de fluxo no arco (i, j), pode obter-se uma nova instância em que os limites inferiores são todos iguais a zero. Apresente o modelo de programação linear da nova instância.

Solution:

Variáveis de decisão:
- y_{ij} que representa o número de vezes que revisitamos o arco (i,j), ∀(i,j) ∈ A.

Restrições:
Restrições de conservação de fluxo:

$$y_{12} = y_{51} + y_{81} + 1; \quad (10)$$

$$y_{25} + y_{23} = y_{12} - 1; \quad (11)$$

$$y_{34} + y_{37} = y_{23} - 1; \quad (12)$$

$$y_{47} + y_{48} = y_{34} - 1; \quad (13)$$

$$y_{56} + y_{51} = y_{25} + y_{65}; \quad (14)$$

$$y_{65} + y_{67} = y_{56} - 1; \quad (15)$$

$$y_{77} + y_{78} = y_{37} + y_{47} + y_{67} + y_{77} + y_{87} + 3; \quad (16)$$

$$y_{48} + y_{78} = y_{81} + y_{87}; \quad (17)$$

Restrições de capacidade:

$$y_{ij} > -1, \forall (i, j) \in A; \quad (18)$$

Função objetivo:
min z = $3y_{12} + 3y_{23} + 9y_{25} + 4y_{34} + 9y_{37} + 7y_{47} + 16y_{48} + 4y_{56} + 12y_{51} + 8y_{65} + 7y_{67} + 10y_{77} + 7y_{78} + 14y_{81} + 9y_{87}$

4. Apresente a rede do problema de transporte que resulta da mudança de variável, indicando claramente quais são os valores de oferta (para os vértices de excesso) e de procura (para os vértices de defeito) associados a cada vértice do grafo.

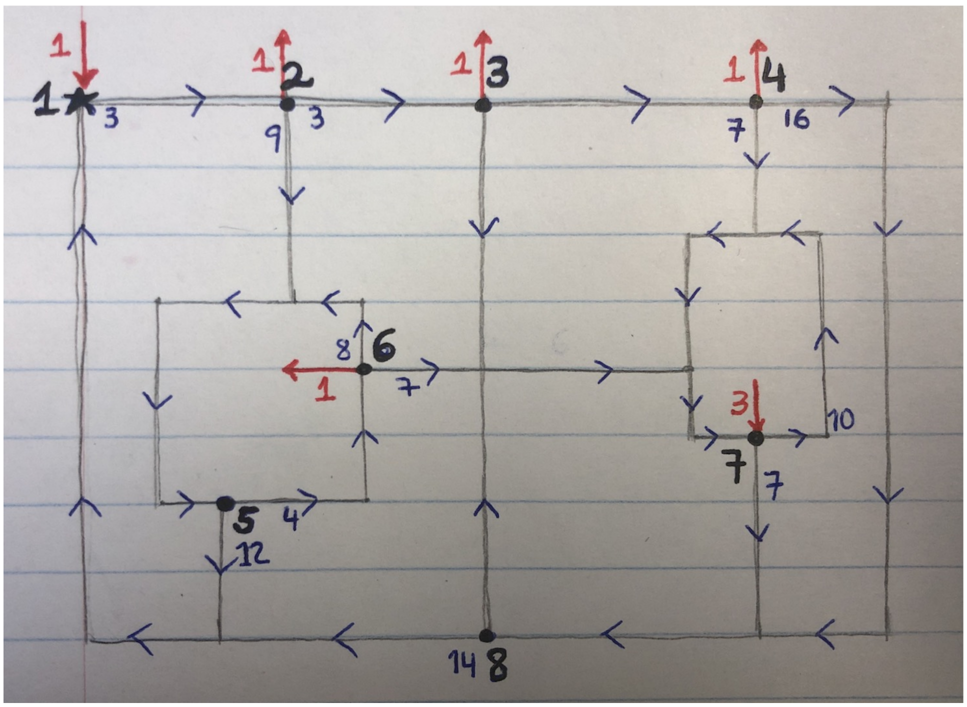

Figura 2: Ofertas e procuras dos vértices

5. Apresente o ficheiro de input submetido ao software de optimização em rede (por exemplo, oRelax4) (cut-and-paste).

```
8
15
1 2 3 100
2 3 3 100
2 5 9 100
3 4 4 100
3 7 9 100
4 7 7 100
4 8 16 100
5 6 4 100
5 1 12 100
6 5 8 100
6 7 7 100
7 7 10 100
7 8 7 100
8 7 9 100
8 1 14 100
1
-1
-1
-1
0
-1
3
0
```

Figura 3: Input submetido ao relax

6. Apresente o ficheiro de output produzido pelo programa (cut-and-paste).

```
END OF READING
NUMBER OF NODES = 8, NUMBER OF ARCS = 15
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
***********************************
TOTAL SOLUTION TIME =  0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION =  0. SECS.
  1 2  4.
  2 3  2.
  2 5  1.
  3 4  1.
  5 6  1.
  7 8  3.
  8 1  3.
OPTIMAL COST =   98.
NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 35
NUMBER OF ITERATIONS =  19
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS =  3
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS =  3
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS =  4
***********************************
```

Figura 4: Output produzido pelo relax

Observação: É de notar que todas as variáveis de decisão que não aparecem no output obtido tomam o valor 0, sendo por isso as variáveis não básicas da solução.

7. Interprete a solução óptima, apresente o conjunto óptimo de caminhos de reposicionamento do veículo entre os vértices de excesso e os vértices de defeito, e calcule o seu custo. Caso tenha obtido a mesma solução óptima do Trabalho 1, pode fazer cut-and-paste do relatório anterior e identificar no desenho anteriormente apresentado o conjunto óptimo de caminhos de reposicionamento do veículo entre os vértices de excesso e os vértices de defeito. Caso contrário, teça todas as considerações que considere necessárias.

Solution: O conjunto ótimo de caminhos de reposicionamento é o obtido no output produzido pelo relax4. O seu custo é de 98, como vamos mostrar de seguida. Se, ao custo de reposicionamento, somarmos o custo base de percorrer todas as arestas uma vez, obtemos o mesmo valor da solução ótima do problema anterior. Nas figuras seguintes, identificamos, a azul, a travessia dos caminhos de reposicionamento e, a vermelho, a primeira travessia de cada aresta.
A tabela explicita exatamente quais caminhos de reposicionamento são percorridos em cada trajeto.

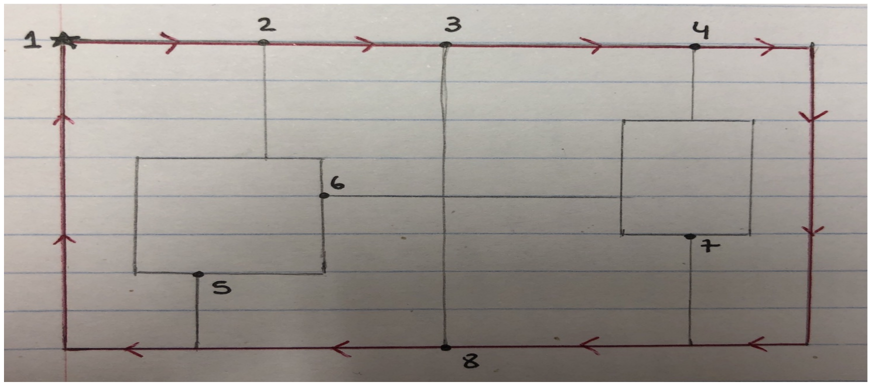

Figura 5: Trajeto 1

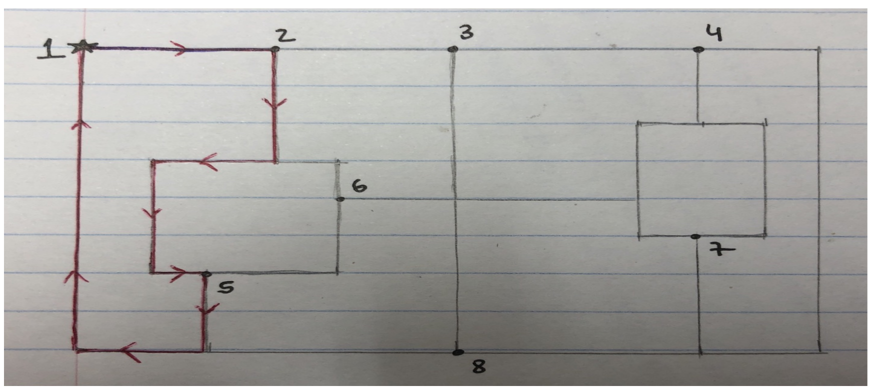

Figura 6: Trajeto 2

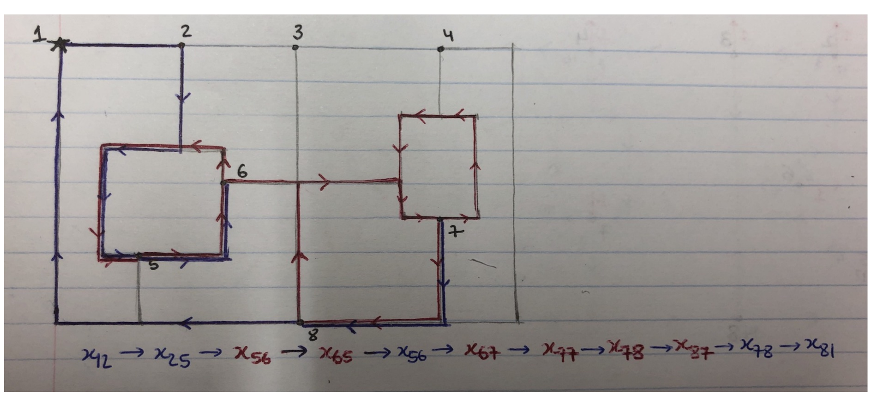

Figura 7: Trajeto 3

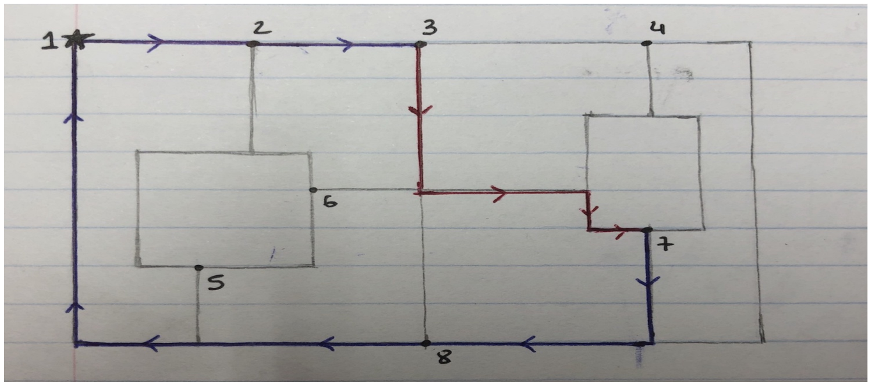

Figura 8: Trajeto 4

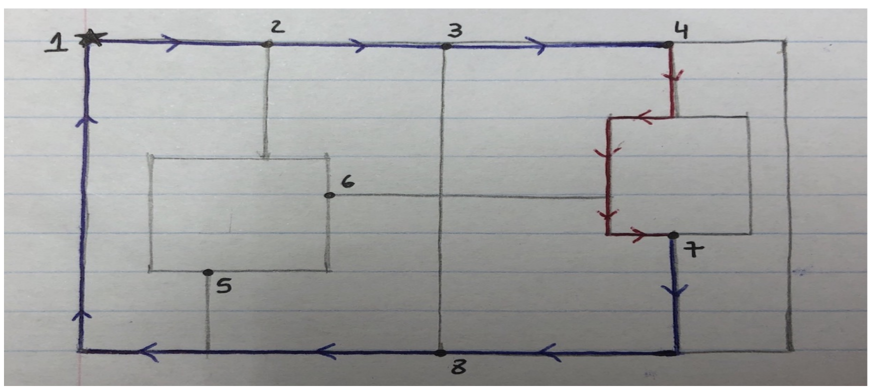

Figura 9: Trajeto 5

Caminhos de reposicionamento \Trajeto	1	2	3	4	5
x_{12}	0	1	2	3	4
x_{23}	0	0	0	1	2
x_{25}	0	0	1	1	1
x_{34}	0	0	0	0	1
x_{56}	0	0	1	1	1
x_{78}	0	0	1	2	3
x_{81}	0	0	1	2	3

\Trajeto	1	2	3	4	5	Total
custo	0	3	37	27	31	98

8. Descreva os procedimentos usados para validar o modelo.

Solution: Uma maneira de validar o modelo é garantindo que a solução obtida respeita todas as restrições do problema.

- Restrições de conservação de fluxo

$$y_{12} = y_{51} + y_{81} + 1 \Leftrightarrow 4 = 0 + 3 + 1; \tag{19}$$

$$y_{25} + y_{23} = y_{12} - 1 \Leftrightarrow 1 + 2 = 4 - 1; \quad (20)$$

$$y_{34} + y_{37} = y_{23} - 1 \Leftrightarrow 1 + 0 = 2 - 1; \quad (21)$$

$$y_{47} + y_{48} = y_{34} - 1 \Leftrightarrow 0 + 0 = 1 - 1; \quad (22)$$

$$y_{56} + y_{51} = y_{25} + y_{65} \Leftrightarrow 1 + 0 = 1 + 0; \quad (23)$$

$$y_{65} + y_{67} = y_{56} - 1 \Leftrightarrow 0 + 0 = 1 - 1; \quad (24)$$

$$y_{77} + y_{78} = y_{37} + y_{47} + y_{67} + y_{77} + y_{87} + 3 \Leftrightarrow 0+3 = 0+0+0+0+3; \quad (25)$$

$$y_{48} + y_{78} = y_{81} + y_{87} \Leftrightarrow 0 + 3 = 3 + 0; \quad (26)$$

- Restrições que garantem o limite inferior de cada aresta. Garantindo que percorremos todas as arestas pelo menos uma vez, e sendo que as variáveis de decisão y_{ij} tomam o valor do número de vezes que cada aresta é novamente percorrida, temos que

$$y_{ij} > -1, \forall (i, j) \in A; \quad (27)$$

que podemos verificar no output obtido.

2 Parte II

1. Apresente o grafo bipartido deste problema de transporte, indicando os valores das ofertas e das procuras associados aos vértices e os custos unitários de transporte (calculados na alínea seguinte). Verifique que o problema é balanceado, i.e., o número total de caminhos que saem dos vértices de excesso é igual ao número de caminhos que chegam aos vértices de defeito. Dê uma justificação sucinta para esse facto.

Solution:

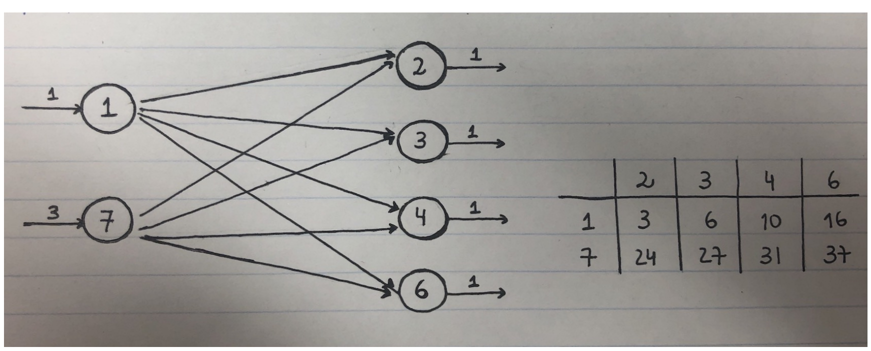

Figura 10: Grafo bipartido

Por questões de modelação no relax efetuamos uma pequena troca na numeração dos vértices, ficando com o seguinte grafo bipartido.

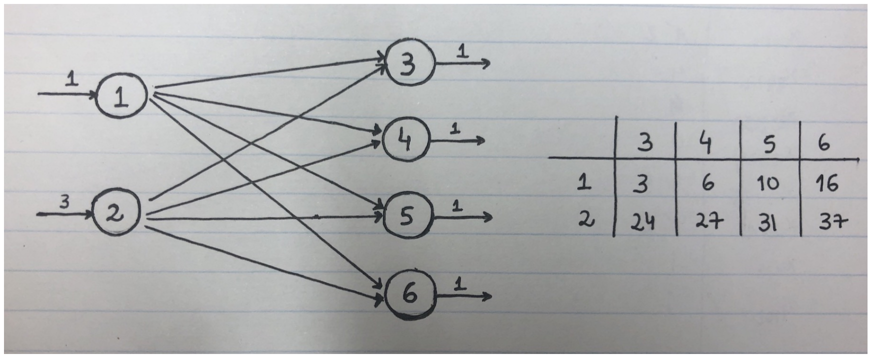

Figura 11: Grafo bipartido adaptado ao relax

2. Por inspecção, ou usando um programa adequado, determine os caminhos mais curtos entre os vértices relevantes. Apresente uma matriz com os valores dos caminhos mais curtos para cada par vértice de excesso / defeito.

Solution:

E\D	3	4	5	6
1	3	6	10	16
2	24	27	31	37

A tabela ilustra o custo entre todos os pares de vértices existentes entre vértices de excesso e de defeito (no grafo bipartido adaptado ao relax). Por exemplo, entre o vértice de excesso (E) 1 e o vértice de defeito (D) 3 o caminho mais curto disponível tem um custo de 3.

3. Apresente o ficheiro de input submetido ao software de optimização em rede (por exemplo, o Relax4) (cut-and-paste).

```
6
8
1 3 3 100
1 4 6 100
1 5 10 100
1 6 16 100
2 3 24 100
2 4 27 100
2 5 31 100
2 6 37 100
1
3
-1
-1
-1
-1
```

Figura 12: Ficheiro de input submetido ao relax

4. Apresente o ficheiro de output produzido pelo programa (cut-and-paste).

```
END OF READING
NUMBER OF NODES = 6, NUMBER OF ARCS = 8
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
***********************************
TOTAL SOLUTION TIME =  0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION =  0. SECS.
  1 3  1.
  2 4  1.
  2 5  1.
  2 6  1.
OPTIMAL COST =   98.
NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 8
NUMBER OF ITERATIONS =  4
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS =  1
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS =  1
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS =  1
***********************************
```

Figura 13: Ficheiro de output submetido pelo relax

5. Interprete a solução óptima, apresente o conjunto óptimo de caminhos de reposicionamento do veículo entre os vértices de excesso e os vértices de defeito, e calcule o seu custo (faça isto caso apenas no caso de obter uma solução óptima alternativa).

Solution: A solução ótima obtida corresponde a reposicionar o veículo entre os vértices 1 e 3, 2 e 4, 2 e 5 e, por fim, 2 e 6. Isto significa que temos que realizar 4 caminhos de reposicionamento que, curiosamente, correspondem aos trajetos de caminhos de reposicionamento realçados a azul nas figuras dos trajetos apresentados acima.
Adaptando aos vértices do problema, temos que 1 a 2 é realizado no trajeto 2, 7 a 3 é realizado no trajeto 4, 7 a 4 é realizado no trajeto 5 e, finalmente, 7 a 6 é realizado no trajeto 3.

6. Descreva os procedimentos usados para validar o modelo.

Solution: Para validar o modelo desenvolvido, tivemos em atenção dois procedimentos:
O primeiro procedimento corresponde a garantir o balanceamento do grafo bipartido, ou seja, assegurar que a produção no grafo V1 (o de origem) satisfaz a necessidade de consumo do grafo V2 (o destino).
O segundo procedimento corresponde ao cálculo correto do custo dos caminhos entre cada par de vértice de excesso e vértice de defeito. Para tal efeito, por inspeção, observamos e calculamos o custo mínimo entre os vértices $\{1,7\} \in$ V1 e $\{2,3,4,6\} \in$ V2. Os seus valores encontram-se na tabela apresentada na solução à alínea dois.