Universidade do Minho
Escola de Engenharia

MDIO-TP3

Novembro 2019



Ana César(A86038)
Pedro Costa(A85700)
Alexandre Costa(A78890)

1 Parte 0 - Apresentação do projecto a abordar pelo grupo

1. Apresente a rede que representa o projecto depois de eliminar as actividades indicadas na secção "Determinação da lista de actividades", no final do texto, identificando os vértices da rede e os arcos e respectivos custos.

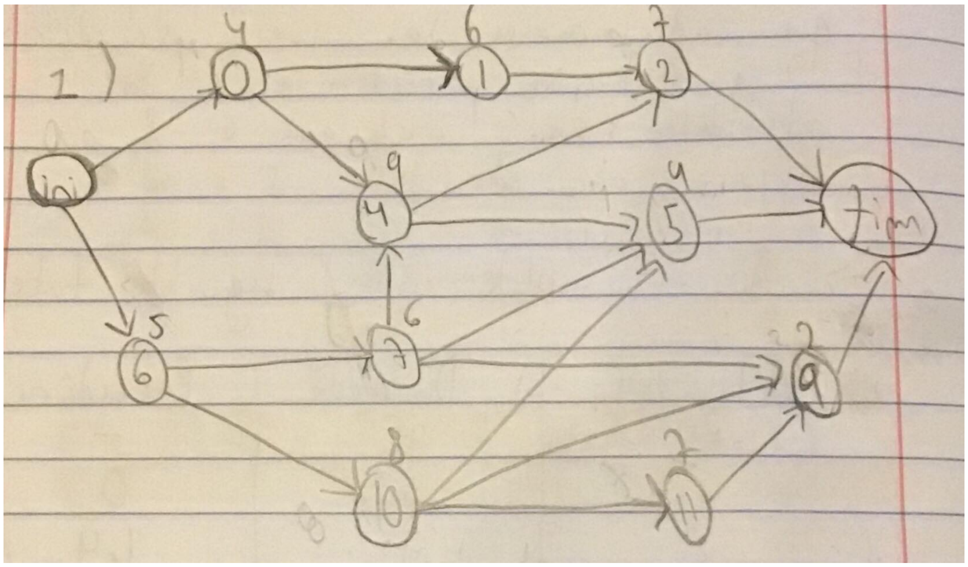

Figura 1: Rede de atividades

2. Apresente o diagrama de Gantt (que resulta de resolver o modelo com as variáveis de decisão (ti, ∀i)) e indique a duração do projecto.

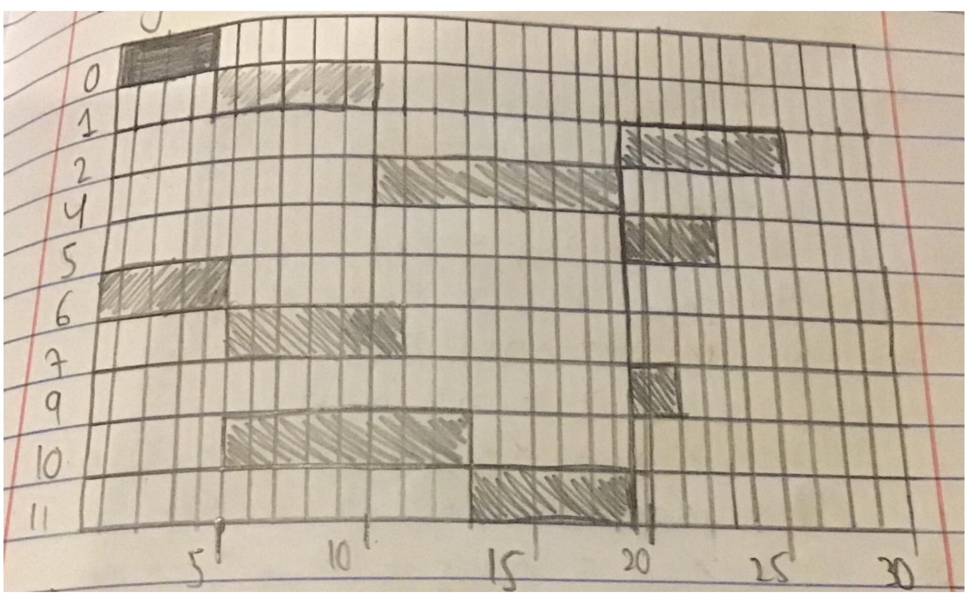

Figura 2: Diagrama de Gantt

Para obter a solução ótima, de duração 27, apresentada acima, utilizamos o modelo seguinte:

```
/* Objective function */
min: tf;

/* Variable bounds */
t1 >= t0 + 4;
t2 >= t1 + 6;
t2 >= t4 + 9;
t4 >= t0 + 4;
t4 >= t7 + 6;
t5 >= t4 + 9;
t5 >= t7 + 6;
t5 >= t10 + 8;
t6 >= ti + 0;
t0 >= ti + 0;
t7 >= t6 + 5;
t9 >= t7 + 6;
t9 >= t10 + 8;
t9 >= t11 + 7;
t10 >= t6 + 5;
t11 >= t10 + 8;
tf >= t2 + 7;
tf >= t5 + 4;
tf >= t9 + 2;
int ti, tf, t0, t1, t2, t3, t4, t5, t6, t7, t8, t9, t10, t11;
```

Figura 3: Modelo utilizado para obter o diagrama de Gantt

Utilizamos ainda um outro modelo para obter o caminho crítico do problema que, por sua vez, corresponde à sequência **i -> 6 -> 7 -> 4 -> 2 -> f** onde i e f correspondem ao vértice inicial e ao vértice final, respetivamente.

O modelo utilizado foi o seguinte:

```
/* Objective function */
max: 4x01 + 4x04 + 6x12 + 7x2f + 9x42 + 9x45 + 4x5f + 5x610 + 5x67 + 6x74 +
     6x75 + 6x79 + 2x9f + 8x105 + 8x1011 + 7x119;

/* Variable bounds */
v_i: 1 = xi0 + xi6;
v_0: xi0 = x01 + x04;
v_1: x01 = x12;
v_2: x12 + x42 = x2f;
v_4: x04 + x74 = x42 + x45;
v_5: x45 + x75 + x105 = x5f;
v_6: xi6 = x67 + x610;
v_7: x67 = x74 + x75 + x79;
v_9: x79 + x109 + x119 = x9f;
v_10: x610 = x105 + x109 + x1011;
v_11: x1011 = x119;
v_f: x2f + x5f + x9f = 1;
int xi0, xi6, x01, x04, x12, x2f, x42, x45, x5f, x610, x67, x74, x75, x79, x9f, x195, x1011, x119;
```

Figura 4: Modelo utilizado para obter o caminho crítico.

2 Parte I

Nota: As 3 atividades simultâneas que selecionamos foram a 1, a 7 e a 10.

1. Explique a forma que escolheu para formular este problema. Identifique claramente o significado das novas restrições e da função objectivo do novo modelo de programação linear inteira mista. Teça todos os comentários que considere adequados.

Solution: Para modelar este problema adicional surgem alterações em várias partes do modelo, as quais iremos abordar uma a uma.

A nível das várias de decisão, torna-se necessário adicionar variáveis responsáveis por criar uma ordem entre as atividades que não podem ocorrer simultaneamente. Para tal efeito, vamos usar o seguinte:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a tarefa i precede a tarefa j} \\ 0, & \text{se a tarefa j precede a tarefa i} \end{cases}$$

Pelo que adicionamos então as variáveis y_{17}, y_{710} e y_{110} ao modelo.

A nível das restrições, torna-se necessário garantir que as variáveis acima descritas se comportem da maneira que queremos. Para tal efeito, basta adicionar as seguintes duas restrições de não-simultaneidade ao modelo, uma vez por cada nova variável y,

$$x_i + d_i \leq x_j + M(1 - y > ij) \tag{1}$$

$$x_j + d_j \leq x_i + My_{ij} \tag{2}$$

Nota: d_j corresponde à duração de uma atividade.

A nível da função objetivo, nada muda uma vez que o objetivo continua a ser minimizar o tempo para completar todas as tarefas.

2. Apresente o ficheiro de input (cut-and-paste).

```
/* Restrições de precedência */
t1 >= t0 + 4;
t2 >= t1 + 6;
t2 >= t4 + 9;
t4 >= t0 + 4;
t4 >= t7 + 6;
t5 >= t4 + 9;
t5 >= t7 + 6;
t5 >= t10 + 8;
t6 >= ti + 0;
t0 >= ti + 0;
t7 >= t6 + 5;
t9 >= t7 + 6;
t9 >= t10 + 8;
t9 >= t11 + 7;
t10 >= t6 + 5;
t11 >= t10 + 8;
tf >= t2 + 7;
tf >= t5 + 4;
tf >= t9 + 2;

/* Restrições de não-simultaneidade */
/* Entre 1 e 7 */
t1 + 6 <= t7 + 100 - 100y17;
t7 + 6 <= t1 + 100y17;

/* Entre 7 e 10 */
t7 + 6 <= t10 + 100 - 100y710;
t10 + 8 <= t7 + 100y710;

/* Entre 1 e 10 */
t1 + 6 <= t10 + 100 - 100y110;
t10 + 8 <= t1 + 100y110;

int ti, tf, t0, t1, t2, t3, t4, t5, t6, t7, t8, t9, t10, t11;
bin y17, y710, y110;
```

Figura 5: Ficheiro de input

3. Apresente o ficheiro de output produzido pelo programa (cut-and-paste).

Variables	MILP ...	MILP ...	result
	33	32	32
tf	33	32	32
t1	4	19	19
t0	0	0	0
t2	26	25	25
t4	17	16	16
t7	10	5	5
t5	26	25	25
t10	16	11	11
t6	0	0	0
ti	0	0	0
t9	31	30	30
t11	24	23	23
y17	1	0	0
y710	1	1	1
y110	1	0	0

Figura 6: Ficheiro de output

4. Apresente o plano de execução (diagrama de Gantt) do projecto. Verifique sumariamente que o plano obedece às novas restrições.

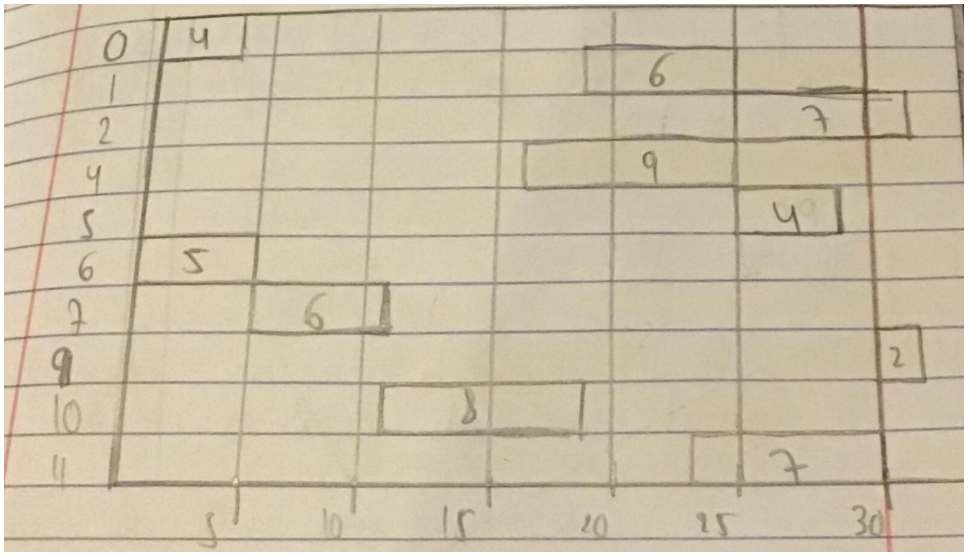

Figura 7: Diagrama de Gantt

Solution:
Prova que o plano obedece às restrições:

$$
\begin{aligned}
t_1 \geq t_0 + 4 &\Leftrightarrow 19 \geq 0 + 4; \\
t_2 \geq t_1 + 6 &\Leftrightarrow 25 \geq 19 + 6; \\
t_2 \geq t_4 + 9 &\Leftrightarrow 25 \geq 16 + 9; \\
t_4 \geq t_0 + 4 &\Leftrightarrow 16 \geq 0 + 4; \\
t_4 \geq t_7 + 6 &\Leftrightarrow 16 \geq 5 + 6; \\
t_5 \geq t_4 + 9 &\Leftrightarrow 25 \geq 16 + 9; \\
t_6 \geq t_i + 0 &\Leftrightarrow 0 \geq 0 + 0; \\
t_0 \geq t_i + 0 &\Leftrightarrow 0 \geq 0 + 0; \\
t_7 \geq t_6 + 5 &\Leftrightarrow 5 \geq 0 + 5; \\
t_9 \geq t_7 + 6 &\Leftrightarrow 30 \geq 5 + 8; \\
t_9 \geq t_{10} + 8 &\Leftrightarrow 30 \geq 11 + 8; \\
t_9 \geq t_{11} + 7 &\Leftrightarrow 30 \geq 23 + 7; \\
t_{10} \geq t_6 + 5 &\Leftrightarrow 11 \geq 0 + 5; \\
t_{11} \geq t_{10} + 8 &\Leftrightarrow 23 \geq 11 + 8; \\
t_f \geq t_2 + 7 &\Leftrightarrow 32 \geq 25 + 7; \\
t_f \geq t_5 + 4 &\Leftrightarrow 32 \geq 25 + 4; \\
t_f \geq t_9 + 2 &\Leftrightarrow 32 \geq 30 + 2;
\end{aligned}
$$

3 Parte II

1. Explique a forma que escolheu para formular este problema. Identifique claramente o significado das novas restrições e da função objectivo do novo modelo de programação linear inteira mista. Teça todos os comentários que considere adequados.

Solution:
Para criar o efeito desejado, torna-se necessário adicionar variáveis novas ao problema, assim como um novo conjunto de restrições (mantendo as pré-existentes). Além disso, tendo em consideração que o objetivo do problema mudou, torna-se ainda necessário fazer uma mudança por completo da função objetivo.
A nível das variáveis utilizadas, adicionaram-se 3 novos tipos:
c_{1a} -> Corresponde à quantidade de unidades de tempo que vamos reduzir a custo c1.
c_{2a} -> Corresponde à quantidade de unidades de tempo que vamos reduzir a custo c2.
y_{1a} -> Variável binária responsável por identificar se atingimos o limite de redução a custo c1 (tendo valor 1 nesse cenário).

A nível das restrições, para cada atividade torna-se necessário adionar as seguintes restrições:

$$c_{1a} \leq c_{1a}max \tag{3}$$

$$c_{1a} \geq c_{1a}max * y_{1a} \tag{4}$$

$$c_{2a} \leq c_{2a}max * y_{1a} \tag{5}$$

Nota: c_{xa}max corresponde ao valor máximo que podemos atingir de redução de tempo a custo cx.

A primeira restrição apresentada acima serve um único propósito, tal como a terceira. Trata-se de uma restrição para limitar a quantidade de unidades de tempo que podemos reduzir a custo c1 enquanto que a terceira limita a quantidade de unidades de tempo que podemos reduzir a custo c2, garantindo que só utilizamos esta redução caso y_{1a} se verifique, ou seja, caso tenhamos esgotado o tempo reduzido a custo c1.
A segunda restrição, por sua vez, é a responsável por manipular o valor de y_{1a}.

Além das restrições mencionadas acima, é ainda necessário colocar uma nova restrição que vá limitar o tempo que podemos utilizar, uma vez que, tal como mencionado acima, o objetivo do problema já não é minimizar o tempo, mas sim o custo adicional para obter um determinado tempo.
A restrição temporal adicionada é a seguinte:

$$tf \leq k \tag{6}$$

onde k corresponde ao maior valor de tempo desejado. (nesta secção pedia-se que k fosse igual a 24)

A nível da função objetivo, passamos a ter simplesmente a soma de todas as variáveis do tipo c_{1a} e c_{2a} com os custos associados às mesmas como coeficientes.

2. Apresente o ficheiro de input (cut-and-paste).

```
/* Objective function */
min: 200c10 + 600c11 + 1000c12 + 800c14 + 1600c15 + 180c16 + 1000c110 + 600c111 +
     100c20 + 300c21 + 500c22 + 400c24 + 800c25 + 90c26 + 500c210 + 300c211;

/* Restrição temporal */
tf <= 24;

/* Primeiras reduções máximas */
c10 <= 0.5;
c11 <= 1;
c12 <= 3;
c14 <= 2;
c15 <= 0.5;
c16 <= 1;
c110 <= 0.5;
c111 <= 1;

/* Restrições que forçam a condição de apenas podermos usar
as segundas reduções quando esgotamos as primeiras */

c10 >= 0.5y10;
c11 >= 1y11;
c12 >= 3y12;
c14 >= 2y14;
c15 >= 0.5y15;
c16 >= 1y16;
c110 >= 0.5y110;
c111 >= 1y111;

/* Segundas reduções máximas */
c20 <= 0.5y10;
c21 <= 1y11;
c22 <= 1y12;
c24 <= 1y14;
c25 <= 0.5y15;
c26 <= 1y16;
c210 <= 0.5y110;
c211 <= 1y111;

/* Relações de precedência */
t1 >= t0 - c10 - c20 + 4;
t2 >= t1 - c11 - c21 + 6;
t2 >= t4 - c14 - c24 + 9;
t4 >= t0 - c10 - c20 + 4;
t4 >= t7 + 6;
t5 >= t4 - c14 - c24 + 9;
t5 >= t7 + 6;
t5 >= t10 - c110 - c210 + 8;
t6 >= ti + 0;
t0 >= ti + 0;
t7 >= t6 - c16 - c26 + 5;
t9 >= t7 + 6;
t9 >= t10 - c110 - c210 + 8;
t9 >= t11 - c111 - c211 + 7;
t10 >= t6 - c16 - c26 + 5;
t11 >= t10 - c110 - c210 + 8;
tf >= t2 - c12 - c22 + 7;
tf >= t5 - c15 - c25 + 4;
tf >= t9 + 2;
int ti, tf, t0, t1, t2, t3, t4, t5, t6, t7, t8, t9, t10, t11,
    c10, c11, c12, c14, c15, c16, c110, c111,
    c20, c21, c22, c24, c25, c26, c210, c211;
bin y10, y11, y12, y14, y15, y16, y110, y111;
```

Figura 8: Ficheiro de input

3. Apresente o ficheiro de output produzido pelo programa (cut-and-paste).

Variables	MILP ...	MILP ...	result
	1780	1070	1070
c10	0	0	0
c11	0	0	0
c12	0	0	0
c14	2	1	1
c15	0	0	0
c16	1	1	1
c110	0	0	0
c111	0	0	0
c20	0	0	0
c21	0	0	0
c22	0	0	0
c24	0	0	0
c25	0	0	0
c26	0	1	1
c210	0	0	0
c211	0	0	0
tf	24	24	24
y10	0	0	0
y11	0	0	0
y12	0	0	0
y14	1	0	0
y15	0	0	0
y16	1	1	1
y110	0	0	0
y111	0	0	0
t1	4	4	4
t0	0	0	0
t2	17	17	17
t4	10	9	9
t7	4	3	3
t5	17	17	17
t10	4	3	3
t6	0	0	0
ti	0	0	0
t9	19	18	18
t11	12	11	11

Figura 9: Ficheiro de output

4. Apresente o plano de execução (diagrama de Gantt) do projecto representando as actividades com as durações que elas têm após a respectiva redução.

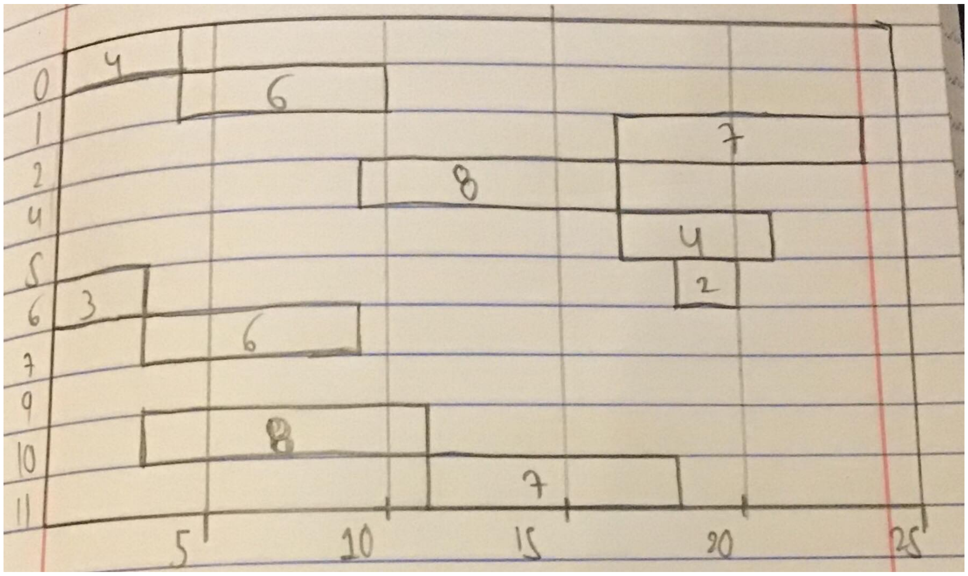

Figura 10: Diagrama de Gantt

5. Verifique que o custo da solução está correcto.

$$Custo = c_{14} * 800 + c_{16} * 180 + c_{26} * 90 = 1 * 800 + 1 * 180 + 1 * 90 = 1070 \quad (7)$$